



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Gésica Peixoto Campos

Um Estudo Sobre Sequências Numéricas: Novos Resultados.

RECIFE
2025



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Gésica Peixoto Campos

Um Estudo Sobre Sequências Numéricas: Novos Resultados.

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Yukio Tanaka

RECIFE
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

C198e Campos, Gésica Peixoto.

Um estudo sobre sequências numéricas : novos resultados / Gésica Peixoto
Campos. – Recife, 2025.
126 f. : il.

Orientador(a): Thiago Yukio Tanaka

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Mestrado
Profissional em Matemática, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências.

1. Sequências numéricas 2. Progressão aritméticas 3. Progressões geométricas
4. Fibonacci, Números de I. Tanaka, Thiago Yukio, II. Título

CDD 510

A cada pessoa que fez parte do meu caminho.

Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus por estar sempre comigo, me dando forças nos momentos difíceis e iluminando meu caminho até aqui. Sem a presença Dele em minha vida, eu nada seria.

A minha mãe, Maria Elizabete Peixoto Campos, agradeço com muito amor, todo seu apoio nos meus estudos e por sempre acreditar em mim. Foi meu alicerce nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador, Thiago Yukio Tanaka, minha profunda gratidão pela paciência, dedicação, incentivo e por estar sempre disponível. Suas contribuições foram essenciais para a construção deste trabalho e de tudo o que ele representa.

Sou grata a todos os professores do PROFMAT/UFRPE. Todas as aulas, conversas e desafios ajudaram a desenvolver-me profissionalmente e crescer como indivíduo. Obrigada por acreditarem na importância da formação de professores e por se dedicarem a isso.

Aos colegas de mestrado, que durante esses 2 anos de curso compartilhamos desafios, alegrias e tristezas. Em especial, deixo um agradecimento cheio de carinho, a Janaína Mirele e a Roberta Oliveira, pela companhia, as diversas ajudas, incentivo e apoio que me deram durante esses anos. A jornada se tornou mais leve com a amizade de vocês.

Agradeço também à UFRPE e ao PROFMAT por abrirem as portas para essa experiência. A estrutura, o acolhimento e a proposta do programa fizeram muita diferença na minha formação.

E um agradecimento de coração a minha amiga Alessandra da Silva e ao professor Airton Castro, que me incentivaram e acreditaram em mim. As conversas com vocês foram de grande valor e importância para eu conseguir finalizar e entregar meu trabalho.

Resumo

Este trabalho tem o propósito de contribuir com a pesquisa, o ensino e a aprendizagem no estudo das sequências numéricas. As sequências numéricas são conteúdos presentes no currículo da Educação Básica e estão na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como um dos conteúdos centrais da Matemática, cujas habilidades devem ser desenvolvidas ao longo do período escolar, justificando assim um estudo profundo nesse tema. Apresentaremos, de forma expandida, três artigos que foram desenvolvidos durante o Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, dos quais, até o presente momento, dois estão publicados e outro já foi aceito para publicação e está em processo de finalização. Também serão apresentados os conceitos e resultados mais básicos envolvendo as Progressões Aritméticas (PA), Progressões Geométricas (PG) e a Sequência de Fibonacci como suporte aos capítulos principais. Além disso, apresentamos três propostas de abordagens didáticas para o ensino desses temas, inspiradas nos artigos desenvolvidos.

Palavras-chave: Sequências numéricas, Progressões Aritméticas, Progressões Geométricas e Sequência de Fibonacci.

Abstract

This work aims to contribute to research, teaching, and learning in the study of numerical sequences. Numerical sequences are part of the Basic Education curriculum and are included in the Base Nacional Comum Curricular (BNCC) as one of the core mathematics topics, with skills that must be developed throughout the school years. This justifies a deeper study of the subject. We present, in expanded form, three articles developed during the Professional Master's Program in Mathematics – PROFMAT. So far, two of them have been published, and the third has been accepted for publication and is currently in the finalization process. We will also present the most basic concepts and results related to Arithmetic Progressions (AP), Geometric Progressions (GP), and the Fibonacci Sequence, as support for the main chapters. In addition, we present three proposals for didactic approaches to teaching these topics, inspired by the developed articles.

Keywords: Numerical sequences, Arithmetic Progressions, Geometric Progressions and Fibonacci Sequence.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Triângulos Equiláteros cuja medida de seus lados são os termos de uma P.G. de razão $1/2$	61
Figura 2 – Representação do Mapa do Brasil em um quadrado que tem lados medindo 4500 km e o quadrado interno menor mede 1 cm.	75
Figura 3 – Triângulo Retângulo em que as medidas dos lados estão em uma PA de razão 5	81
Figura 4 – Triângulo Retângulo em que as medidas dos lados estão em uma PA de razão r	81
Figura 5 – Recorte do Problema 460 da 105 ^a Edição da RPM (RPM, 2022). . . .	98
Figura 6 – Caso de funções com $n = 3$ e PAs de mesma razão $r = 2$	106
Figura 7 – Representação dos gráficos de $f_{4,k}$ para $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$. Os valores mínimos $f_{4,k}(\bar{x})$ são distintos, mas obtidos no mesmo valor $\bar{x}$	113

Sumário

	Introdução	15
1	CONCEITOS INICIAIS DAS SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS .	19
1.1	Sequências Numéricas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)	19
1.2	Sequências Numéricas	23
1.2.1	Sequência Recorrente ou Recorrência	25
1.2.2	Progressão Arimética (PA)	26
1.2.2.1	Classificação de uma Progressão Aritmética	28
1.2.2.2	A Lenda de Gauss	32
1.2.3	Progressão Geométrica (PG)	33
1.2.3.1	Classificação de uma Progressão Geométrica	34
1.2.4	Sequência de Fibonacci	43
1.2.4.1	Os Coelhoos de Fibonacci	43
1.2.4.2	Propriedades da Sequência de Fibonacci	48
2	ARTIGO 1: UMA ABORDAGEM OLÍMPICA DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS	55
2.1	Olimpíadas de Matemática	56
2.2	Resolução de Problemas	57
2.3	Uma Abordagem Olímpica das Progressões Geométricas . . .	59
2.3.1	Introdução	59
2.3.2	Conceitos e Propriedades	60
2.3.2.1	Soma dos Termos de uma PG	67
2.3.3	Problemas Propostos	73
2.3.4	Agradecimentos	75
2.4	Sequência Didática	75
3	ARTIGO 2: TERNAS PITAGÓRICAS E SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS: NOVOS RESULTADOS	79
3.1	A BNCC e Problemas sobre Ternas Pitagóricas e Sequências	80
3.2	Ternas Pitagóricas e Sequências Numéricas: Novos Resultados	83
3.2.1	Introdução	83
3.2.2	Resultados Principais	86
3.2.2.1	Ternas Pitagóricas e PAs	86
3.2.2.2	Ternas e PGs	87

3.2.2.3	Ternas e a Sequência de Fibonacci	90
3.2.3	Contribuições do artigo	92
3.2.4	Agradecimentos	92
3.3	Sequência Didática	93
4	ARTIGO 3: INVESTIGANDO NOVAS CLASSES DE SOLU- ÇÕES PARA UM PROBLEMA EXTREMAL COM SEQUÊN- CIAS NUMÉRICA	97
4.1	Investigando Novas Classes de Soluções para um Problema Extremal com Sequências Numérica	97
4.1.1	Introdução	97
4.1.2	Análise do Problema Original	101
4.1.3	Uma proposta de generalização	102
4.1.4	Classes de Soluções: Análise de Casos Particulares	104
4.1.4.1	O Caso das Progressões Aritméticas	104
4.1.4.2	O caso das Progressões Geométricas	107
4.1.4.3	O Caso da Sequência de Fibonacci	108
4.2	Generalização no Grau do Polinômio	110
4.2.1	No Problema Original	111
4.2.1.1	No Caso das Progressões Aritméticas	113
4.2.2	Contribuições do artigo	116
4.2.3	Agradecimentos	116
4.3	Sequência Didática	117
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	121
	REFERÊNCIAS	123

Introdução

As ideias relacionadas com as *Sequências Numéricas* estão atreladas principalmente aos conceitos de regularidade, ou seja, de um determinado comportamento nos elementos listados. Frequentemente o estudo no tema propõe investigações com relação ao posicionamento, elementos de paridade, descrição da regularidade, soma ou produto de termos, entre tantos outros.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento norteador sobre as competências e habilidades a serem desenvolvidas na Educação Básica, o conteúdo de sequência é destacado como componente curricular tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. A saber, no Ensino Fundamental Anos Finais (6º ao 9º ano), destacam-se as sequências numéricas, incluindo Progressões Aritméticas (PA) e Progressões Geométricas (PG), são introduzidas. Os alunos devem aprender a identificar padrões, desenvolver fórmulas para o termo geral de uma sequência e aplicar esses conceitos na resolução de problemas práticos e teóricos.

Já no Ensino Médio, há o aprofundamento das progressões aritméticas e geométricas. Os estudantes exploram mais a fundo as características e propriedades dessas sequências, como a soma de termos, e a relação desses conceitos em diferentes contextos: Finanças, Ciências Naturais e outros. Assim, seja no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio, a BNCC enfatiza a importância de entender e aplicar sequências numéricas dentro de contextos que promovam o raciocínio lógico e matemático.

Além disso, o documento incentiva tanto a interdisciplinaridade quanto abordagens que utilizem a resoluções de problemas como metodologias possíveis. A interdisciplinaridade dentro dos assuntos de Matemática é fundamental para o desenvolvimento de um pensamento matemático mais integrado e aplicado. Nesse sentido, são encorajados explorações de conexões entre diferentes Áreas Matemáticas. Tais abordagens possibilitam uma complementação no entendimento dos conceitos matemáticos envolvidos, uma vez que eles serão utilizados conjuntamente para resolver problemas mais complexos, assim reforçam as habilidades dos estudantes em pensar matematicamente de maneira mais abrangente e crítica.

“A interdisciplinaridade, entendida como a articulação da disciplina com diferentes áreas do conhecimento, permite a ampliação do entendimento de conceitos e procedimentos em seus múltiplos contextos de uso, a identificação de procedimentos de investigação característicos de áreas específicas e a compreensão de questões complexas ou globais que exigem uma visão abrangente dos fenômenos, a mobilização de conhecimentos de diferentes áreas e a adoção de abordagens mais flexíveis e integradas para a resolução de problemas.” (BNCC, p. 35) (BRASIL, 2018, p.270)

Essas orientações ajudam a garantir que os estudantes adquiram uma base sólida em matemática, capaz de suportar aprendizados mais avançados e aplicados, além de prepará-los para os desafios do cotidiano e profissionais, pelo menos em teoria, o que destaca uma necessidade de aprofundamento no tema, e é isso que desenvolveremos neste trabalho.

Para isso, esta pesquisa toma como referência os livros (HEFEZ, 2004; MARTINEZ et al., 2013; NETO, 2012; MOREIRA, 2012; LIMA, 2013; LIMA, 1997; CARVALHO P. C. P.; MORGADO, 2015). Em seguida, a partir de problemáticas inéditas ou inovadoras, apresentamos os resultados de três artigos que foram desenvolvidos ao longo do mestrado do PROFMAT na UFRPE. Acreditamos que esta dissertação de mestrado contribui para a Pesquisa, o Ensino e a Aprendizagem no tema das Sequências e nos temas relacionados.

Iniciamos o Capítulo 1 descrevendo como as Sequências Numéricas são abordadas no Ensino Básico, seguindo como parâmetro a BNCC. Em seguida, definimos o conceito de sequências numéricas e suas especificidades, como crescimento, recorrência, progressões aritméticas e geométricas, e a sequência de Fibonacci, utilizando como fundamento as referências matemáticas citadas. Em cada um desses temas, apresentamos as classificações e propriedades relevantes.

No Capítulo 2, expandimos o artigo intitulado “*Uma Abordagem Olímpica das Progressões Geométricas*”, publicado no periódico “*É Matemática, Oxente!*”, que foi classificado como *Qualis C* no período de 2017 a 2020. O artigo aborda os principais conceitos de Progressões Geométricas que são frequentemente explorados nas Olimpíadas Matemáticas. Este trabalho adota a metodologia de resolução de problemas e inclui comentários e soluções para exemplos retirados de competições nacionais e internacionais. Acreditamos que este trabalho complementa os materiais de treinamento olímpico em matemática nacionais, podendo ser utilizado tanto como recurso didático por professores quanto como material de estudo por alunos envolvidos com o treinamento olímpico.

No Capítulo 3, apresentamos o artigo intitulado “*Ternas Pitagóricas e Sequências Numéricas: Novos Resultados*”, publicado ao periódico “*Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*”, que foi classificado como *Qualis A4* no período de 2017 a 2020. O artigo aborda de maneira interdisciplinar um problema que relaciona as Ternas Pitagóricas e as Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e Sequência de Fibonacci. Precisamente, verificaremos a existência e inexistência das Ternas Pitagóricas envolvendo esse três casos, mesmo quando os termos não são consecutivos. Os resultados desta parte são inéditos.

No Capítulo 4, mostramos o artigo intitulado “*Investigando Novas Classes de Soluções para um Problema Extremal com Sequências Numérica*”, submetido no periódico “*Revista Ciência e Natura*”, que foi classificado como *Qualis A3* no período de 2017 a 2020. O artigo encontra-se aceito para publicação, e está em fase final de correções. O artigo aborda soluções para uma classe de problemas extremas que envolvem Sequências

Numéricas e Funções Polinomiais. A partir do problema original em (4.1.1), verificamos padrões estruturais e apresentamos soluções para essas particularidades. Especificamente, houve uma modificação na sequência padrão, considerando as Progressões Aritméticas, Progressões Geométricas e Sequência de Fibonacci, e também analisando uma nova versão para o problema com um grau par qualquer. A partir disso, sugerimos alguns problemas com perfil de problemas olímpicos.

Ao final dos Capítulos 2, 3 e 4, apresentamos de maneira detalhada Sequências Didáticas propondo a utilização dos materiais desses capítulos, mas com uma abordagem direcionada ao Ensino Básico.

1 Conceitos Iniciais das Sequências Numéricas

1.1 Sequências Numéricas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo utilizado para orientar na aprendizagem dos conteúdos essenciais do Ensino Básico, pegando desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. Se preocupando em determinar os conhecimentos, competências e habilidades que devem ser desenvolvidas em cada etapa da Educação Básica. Neste trabalho, delimitaremos o estudo de Sequências ao Ensino Fundamental e Ensino Médio.

No Ensino Fundamental, a BNCC, divide a Área de Matemática em cinco Unidades Temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. A unidade de Números tem como objetivo

“desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.” (BRASIL, 2018, p.268)

O intuito, na unidade de Álgebra, é

“o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade.” (BRASIL, 2018, p.270)

De acordo com a unidade de Geometria, o propósito é

“estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento

geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.” (BRASIL, 2018, p.271)

A ideia da unidade de Grandezas e Medidas é que

“ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico.” (BRASIL, 2018, p.273)

E de acordo com a unidade de Probabilidade e Estatística,

“Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos.” (BRASIL, 2018, p.274)

Como a temática deste estudo é Sequências, analisaremos com mais detalhe a unidade de Álgebra.

De acordo com a unidade de Álgebra da BNCC, o estudo de sequências já pode ser encontrado nos anos iniciais do ensino fundamental. Nessa fase, os professores devem focar nos conceitos de regularidade e generalização de padrões, contudo sem a necessidade do uso de letras para representar essas regularidades. Também devem trabalhar com a noção de Sequências, recursivas e repetitivas, completando elementos ausentes ou construindo sequências a partir de uma Lei de Formação. Nos anos finais do ensino fundamental, o intuito é aprofundar e ampliar os conhecimentos adquiridos nos anos iniciais. Nessa fase, espera-se que o aluno aprenda a encontrar regularidade em Sequências Numéricas e que seja capaz de traduzir a situação em Linguagem Algébrica (fórmulas). O conteúdo de sequência encontra-se diluído durante o ensino fundamental, aparecendo nos 1º, 2º, 3º, 4º, 7º e 8º anos, com as habilidades específicas de cada ano.

As habilidades específicas de sequências, no ensino fundamental, segundo a (BRASIL, 2018, p.279-291 e p.307-313), são:

(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.

(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.

(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.

(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.

(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.

(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.

(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Conforme as habilidades da BNCC, o conteúdo de sequência no Ensino Fundamental tem como objetivo desenvolver os conhecimentos básicos do alunado, como descrever, reconhecer e identificar padrões e regularidades de objetos, símbolos, letras e números, incluindo construir algoritmos que permitam indicar os próximos números ou figuras de uma sequência recursiva ou não recursiva. Esses conhecimentos são melhor aprofundados e aperfeiçoados no Ensino Médio com o ensino das progressões, como as Progressões Aritméticas (PA) e Progressões Geométricas (PG).

No Ensino Médio, segundo a BNCC, a Área de *Matemática e suas Tecnologias* “tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior” (BRASIL, 2018, p.528). Para isso, o documento divide essa área em 5 *Competências Específicas*, as quais estão relacionadas às habilidades que devem ser alcançadas. São elas:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p.531)

No desenvolvimento do estudo de Sequência, no Ensino Médio, adentramos ao conteúdo das Progressões, cujas capacidades estão relacionadas a competência 5. Essa competência é referente a habilidade de formular e investigar situações e experiências práticas. Além de ser capaz de questionar as formulações usando contraexemplos e, também, poder demonstrar alguns casos que vão além do cálculo prático. Ajudando aos alunos entender que a matemática é um campo dinâmico e com conhecimentos interconectados. O assunto de Progressões encontram-se concentrados, principalmente, no 1º ano do Ensino Médio. Suas habilidades específicas, segundo a (BRASIL, 2018, p.541), são:

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

De acordo com as habilidades específicas da BNCC, percebe-se que as Progressões Aritméticas e Geométricas devem ser identificadas e associadas com Funções Afins e Exponenciais, respectivamente, para que os estudantes possam analisar as propriedades, deduzir algumas fórmulas e resolver seus problemas.

Portanto, no estudo de sequências, segundo a BNCC, foi possível verificar que esse documento possui uma importância ímpar no que se refere à orientação pedagógica das sequências e progressões ao longo do Ensino Básico. Nos anos iniciais do Ensino

Fundamental, trabalham-se as definições básicas de sequências, ou seja, são apresentados aos estudantes os conceitos de regularidade e generalização de padrões, explorando a noção de sequências recursivas e repetitivas sem a necessidade de uma notação algébrica complexa. Nos anos finais do Ensino Fundamental, o propósito é orientar o estudante a identificar regularidades em sequências numéricas e traduzi-las para a linguagem algébrica, dessa forma aprofundando e ampliando os conhecimentos adquiridos nos anos iniciais. No Ensino Médio, dedica-se uma atenção especial ao estudo das progressões, que devem ser associadas aos conteúdos de funções afins e exponenciais, permitindo assim analisar propriedades, deduzir fórmulas e resolver problemas, com o objetivo de expandir os conhecimentos adquiridos no aprendizado de sequências durante o Fundamental. Nessa perspectiva, o alunado consegue compreender a Matemática como um campo interconectado e dinâmico, fortalecendo o letramento matemático e promovendo habilidades críticas e investigativas essenciais para um aperfeiçoamento constante e aplicações práticas.

Agora, daremos início, nas próximas seções, ao estudo de sequências numéricas, explorando seus conceitos e propriedades.

1.2 Sequências Numéricas

A concepção de Sequência Numérica inicia-se no 1º ano do Ensino Fundamental na Unidade Temática de Álgebra. A princípio, o aluno aprende a ideia de sequência a partir de objetos concretos; ele deve ser ensinado a organizar e ordenar objetos ou figuras através de suas características físicas como cor, forma e medida. Durante os anos seguintes do Ensino Fundamental, o conteúdo de Sequências fica mais complexo ao introduzir os números. Ao fim do Ensino Fundamental, o estudante deve conseguir identificar regularidade na sequência e saber construir fluxogramas para determinar o número seguinte da sequência.

Nesta seção, trabalharemos o conceito de sequência numérica, finita e infinita, e sua classificação de acordo com o comportamento de seus termos (crescente, não decrescente, decrescente, não crescente e constante). Será dada uma atenção especial para as sequências recorrentes, as definiremos e estudaremos algumas de suas propriedades. Existem alguns tipos diferentes de sequências recorrentes, contudo destacaremos três delas que são importantes para este trabalho: as Progressões Aritméticas, as Progressões Geométricas e a Sequência de Fibonacci, sendo cada uma devidamente exemplificada para uma melhor compreensão.

Definição 1.1 (Sequência Numérica). É uma função $n \mapsto a_n$, sendo $n \in \mathbb{N}$ (sequência infinita) ou $n \in I_k = 1, 2, \dots, k-1, k$ (sequência finita) e $a_n \in \mathbb{R}$. Denotaremos uma sequência por (a_n) e chamaremos a_n de n -ésimo termo da sequência.

Exemplo 1.2. A sequência dos números pares $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$. O primeiro termo dessa sequência é $a_1 = 2$, o segundo termo da sequência é $a_2 = 4$, o terceiro é $a_3 = 6$ e, assim

sucessivamente, sendo o n -ésimo termo da sequência do tipo $a_n = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta é uma sequência infinita. Por outro lado, ao considerarmos os pares menores do que 100, obtemos a sequência com a mesma lei de formação $(2n)$, porém $n \in \mathbb{N}$ varia apenas de $1 \leq n \leq 49$.

Exemplo 1.3. Algumas sequências podem não ter uma expressão em termos de função bem definida. Por exemplo, ao considerarmos os dígitos da expansão decimal de $\pi = 3,14159265\dots$, podemos criar uma sequência (a_n) onde $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$ e $a_k = k$ -ésimo dígito de π . Como π é irracional, sua expansão decimal é uma dízima não periódica, e não é um trabalho simples determinar a_n para valores grandes de n . Este seria um bom exemplo de sequência infinita para a qual não temos uma expressão indexada em n facilmente determinável.

As sequências também podem ser classificadas de acordo com o comportamento de seus termos como *Crescente*, *Não decrescente*, *Decrescente*, *Não crescente* e *Constante*.

Definição 1.4. Quanto ao crescimento, uma sequência é dita

Crescente: Quando $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

Não Decrescente: Quando $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

Decrescente: Quando $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

Não Crescente: Quando $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

Constante: Quando $a_n = a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.5. Exemplos de sequências quanto ao crescimento.

Crescente: A sequência dos números naturais $(1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots)$ é uma sequência *Crescente*, pois há uma desigualdade estrita $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots < n < \dots$.

Não Decrescente: A sequência $(1, 2, 4, 4, 5, 7, 9, 9)$ é uma sequência *Não decrescente*, pois $1 < 2 < 4 \leq 4 < 5 < 7 < 9 \leq 9$, mas se vale a desigualdade estrita, vale a desigualdade ou igual, portanto $1 \leq 2 \leq 4 \leq 4 \leq 5 \leq 7 \leq 9 \leq 9$.

Decrescente: A sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{(n-1)}}, \dots\right)$ é uma sequência *Decrescente*, pois $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \dots > \frac{1}{2^{(n-1)}} > \dots$

Não Crescente: A sequência $(-1, -2, -4, -4, -5, -7, -9, -9)$ é uma sequência *Não crescente*, pois $-1 \geq -2 \geq -4 \geq -4 \geq -5 \geq -7 \geq -9 \geq -9$.

Constante: A sequência $(2, 2, 2, 2, \dots, 2, \dots)$ é uma sequência constante, pois $a_n = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Quando os termos de uma sequência são definidos em função dos termos anteriores, esse tipo de sequência é chamada de *Sequência Recorrente* ou *Recorrência*. Estudaremos casos de recorrência na seção a seguir.

1.2.1 Sequência Recorrente ou Recorrência

Nesta parte, será estudado o conceito de recorrência e suas ordens, nos deteremos ao tópico das recorrências de ordens 1 e 2. Também será visto quando a Recorrência é Linear e Homogênea (Não Homogênea), incluindo a equação característica da recorrência linear de segunda ordem.

Definição 1.6 (Sequência Recorrente ou Recorrência de ordem k). Dizemos que uma sequência (a_n) possui uma recorrência de ordem k quando há uma relação entre a_n e os k termos imediatamente anteriores $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$. Explicitamente, o termo geral a_n pode ser escrito como,

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k+1}, a_{n-k})$$

as funções f e g determinam como será a recorrência. Precisamente, a f indica se a recorrência é linear ou não linear nas variáveis, e g determina se é homogênea ou não homogênea.

Exemplo 1.7. A sequência $a_n = 5a_{n-1}^5 + a_{n-2}^4 - a_{n-3}^3 + 3a_{n-4}^2 - 4a_{n-5}$ é um exemplo de uma recorrência de *quinta ordem* não linear e homogênea.

Este trabalho se concentrará apenas *Recorrências Lineares*, ou seja, no caso em que a função f dada na Definição 1.6 é uma função linear.

Definição 1.8 (Recorrência Linear). Dizemos que uma recorrência é linear quando a função f na Definição 1.6 for uma função linear nas variáveis $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k+1}, a_{n-k}$. Nesse caso, podemos reescrever,

$$a_n = f_1(n)a_{n-1} + f_2(n)a_{n-2} + f_3(n)a_{n-3} + \dots + f_k(n)a_{n-k} + g(n).$$

Exemplo 1.9. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^3$ é uma *recorrência linear de segunda ordem*. Note que é linear.

Perceba que os termos da Sequência Recorrente do Exemplo 1.7 são determinados, exclusivamente, pelos termos anteriores. Já no Exemplo 1.9, há um termo adicional que não depende dos termos anteriores. Elas podem ser classificadas conforme a dependência ou não dependência desse termo adicional em *Homogêneas* e *Não Homogêneas*.

Definição 1.10 (Recorrência Homogênea e Não-Homogênea). Dizemos que uma recorrência é *Homogênea* quando a_n depende exclusivamente dos termos imediatamente anteriores, isto é, na Definição 1.6 temos $g(n) = 0$. Caso contrário, dizemos que a recorrência é *não-homogênea*.

Definição 1.11 (Recorrência Linear de Primeira Ordem). É quando os termos da sequência são definidos por

$$a_n = f_1(n)a_{n-1} + g(n),$$

no qual $f_1(n) \neq 0$. Se $g(n) = 0$, dizemos que é uma *Recorrência Linear de Primeira Ordem Homogênea* e, para $g(n) \neq 0$, *Recorrência Linear de Primeira Ordem Não-Homogênea*.

Exemplo 1.12. $a_n = a_{n-1} + n^3$ é uma *Recorrência Linear de Primeira Ordem Não-Homogênea* e $a_n = 2a_{n-1}$ é uma *Recorrência Linear de Primeira Ordem Homogênea*.

Definição 1.13 (Recorrência Linear de Segunda Ordem). É quando os termos da sequência são escritos da forma

$$a_n = f_1(n)a_{n-1} + f_2(n)a_{n-2} + g(n),$$

no qual $f_2(n) \neq 0$. Se $g(n) = 0$, dizemos que é uma *Recorrência Linear de Segunda Ordem Homogênea* e, para $g(n) \neq 0$, *Recorrência Linear de Segunda Ordem Não-Homogênea*.

Exemplo 1.14. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^3$ é uma *Recorrência Linear de Segunda Ordem Não-Homogênea* e $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ é uma *Recorrência Linear de Segunda Ordem Homogênea*.

Definição 1.15 (Equação Característica da recorrência linear de segunda ordem homogênea). Pela Definição 1.13, sabemos que $a_n = f_1(n)a_{n-1} + f_2(n)a_{n-2}$, passando todos os termos para o lado esquerdo da igualdade, temos que $a_n - f_1(n)a_{n-1} - f_2(n)a_{n-2} = 0$. Quando $f_1(n)$ e $f_2(n)$ são constantes, atribui-se a essa recorrência o formato $a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0$. Podemos relacionar essa recorrência a uma equação de segundo grau $r^2 + pr + q = 0$, essa equação é chamada de *Equação Característica da recorrência linear de segunda ordem homogênea*, importante para a obtenção da expressão para a_n .

Exemplo 1.16. Dada a recorrência linear de segunda ordem homogênea do Exemplo 1.14, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, sua equação característica é escrita da forma $r^2 - 2r + 1 = 0$.

Existem diversos tipos de sequências recorrentes, mas, para este trabalho, serão abordados três: Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e Sequência de Fibonacci. Nas seções seguintes, vamos explorar estes objetos, destacando os elementos principais da teoria que darão suporte para o desenvolvimento dos capítulos principais.

1.2.2 Progressão Arimética (PA)

Nesta seção, falaremos sobre Progressão Aritmética (PA) e suas principais propriedades. A noção de Progressão Aritmética é introduzida no 3º ano do Ensino Fundamental dentro do conteúdo de Sequências Numéricas, no qual espera-se que o estudante seja capaz de “Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma

regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.” (BNCC, 2018). Este conteúdo é mais aprofundado e detalhado no Ensino Médio, trabalhando as aplicações teóricas e práticas em diversos contextos. Tal como no Ensino Básico, a sequência do conteúdo de PA, nesta seção, será feita gradualmente e com exemplificações simples, para melhor compreensão do leitor.

Definição 1.17 (Progressão Aritmética (PA)). Uma sequência numérica (a_n) é dita uma *Progressão Aritmética* quando satisfaz a seguinte recorrência:

$$a_n - a_{n-1} = r, \text{ para todo } n \geq 2,$$

em que r é uma constante e é chamada a *Razão da PA*.

Observação 1.18. Na Definição 1.17 atentamos para o fato que ao escrever a expressão “para todo $n \geq 2$ ” estamos considerando os n possíveis, ou seja, a definição inclui PAs com finitos ou infinitos termos.

Observação 1.19. Será usada a abreviação “PAs” para se referir a “Progressões Aritméticas”.

Exemplo 1.20. A sequência dos números ímpares $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ é uma PA com infinitos termos. É uma PA, pois, para quaisquer dois termos consecutivos, temos que $a_n - a_{n-1} = 2$. Com efeito, os números ímpares nas posições n e $n - 1$ serão dados por $a_n = 2n - 1$ e $a_{n-1} = 2n - 3$, logo:

$$a_n - a_{n-1} = (2n - 1) - (2n - 3) = 2n - 1 - 2n + 3 = 2.$$

E tem infinitos termos.

Exemplo 1.21. Outro caso de PA com infinitos termos é a sequência dos números inteiros negativos. Podemos verificar que a sequência é uma PA, pois, para quaisquer dois números consecutivos, temos que $a_n - a_{n-1} = -1$. Escrevendo dois termos consecutivos dessa sequência, temos que $a_n = -n$ e $a_{n-1} = -(n - 1)$. Assim

$$a_n - a_{n-1} = -n - [-(n - 1)] = -n - (-n + 1) = -n + n - 1 = -1.$$

São exemplos de PAs com finitos termos:

Exemplo 1.22. Os números pares entre 1 e 20. Essa sequência é finita, pois escrevendo ela $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18)$ podemos observar que há 9 termos. E é PA, pois $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_9 - a_8 = 2$.

Exemplo 1.23. As medidas dos lados de um quadrado que medem 5. Essa sequência é finita, pois a quantidade de lados de um quadrado é 4, logo escrevendo em forma de sequência $(5, 5, 5, 5)$ temos uma sequência com 4 termos. E é PA, pois $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = 0$.

Além de identificar as PAs como finitas ou infinitas, podemos classificá-las de acordo com o comportamento de sua razão. Dependendo desse valor, a PA pode ser Crescente, Decrescente ou Constante. Como veremos a seguir.

1.2.2.1 Classificação de uma Progressão Aritmética

Seja (a_n) uma PA de razão r , ela será classificada como

Crescente: Quando $r > 0$;

Decrescente: Quando $r < 0$;

Constante: Quando $r = 0$.

Exemplo 1.24. Verifique se a sequência $(10, 13, 16, 19, \dots)$ é uma PA, classifique-a e determine o 12º termo.

Solução. A sequência é uma PA, pois podemos verificar que $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = 3 = r$ e indutivamente que $a_n - a_{n-1} = r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ela é crescente, pois $r = 3 > 0$. Pela Definição 1.17, note que, para determinar o valor de um termo qualquer temos que saber o valor do termo anterior, então para calcularmos a_{12} , temos que determinar a_{11} , e assim sucessivamente. Logo,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} = 3 &\Rightarrow a_n = a_{n-1} + 3 \\ &\Rightarrow a_5 = a_4 + 3 = 19 + 3 = 22 \\ &\Rightarrow a_6 = a_5 + 3 = 22 + 3 = 25 \\ &\Rightarrow a_7 = a_6 + 3 = 25 + 3 = 28 \\ &\Rightarrow a_8 = a_7 + 3 = 28 + 3 = 31 \\ &\Rightarrow a_9 = a_8 + 3 = 31 + 3 = 34 \\ &\Rightarrow a_{10} = a_9 + 3 = 34 + 3 = 37 \\ &\Rightarrow a_{11} = a_{10} + 3 = 37 + 3 = 40 \\ &\Rightarrow a_{12} = a_{11} + 3 = 40 + 3 = 43, \end{aligned}$$

o valor de a_{12} é 43. □

Exemplo 1.25 (Retirado de (MAGAGNANGMO; LUTZ, 2020)). Seja a PA $(4, 4, 4, 4, 4, 4)$ determine a razão e classifique-a.

Solução. Pela Definição 1.17, temos que $r = a_n - a_{n-1} = 4 - 4 = 0$. Como $r = 0$, pela Definição 1.2.2.1, a PA é Constante. □

Exemplo 1.26 (Retirado de (SOUZA, 2021)). Classifique e determine o 15º termo da PA $(2 + \sqrt{3}, 2, 2 - \sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3}, \dots)$.

Solução. A PA é decrescente, pois $r = a_2 - a_1 = 2 - (2 + \sqrt{3}) = -\sqrt{3} < 0$. Pela Definição de PA 1.17, temos que,

$$\begin{aligned}
 a_n - a_{n-1} = -\sqrt{3} &\Rightarrow a_n = a_{n-1} - \sqrt{3} \\
 &\Rightarrow a_5 = a_4 - \sqrt{3} = (2 - 2\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 2 - 3\sqrt{3} \\
 &\Rightarrow a_6 = a_5 - \sqrt{3} = (2 - 3\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 2 - 4\sqrt{3} \\
 &\Rightarrow a_7 = a_6 - \sqrt{3} = (2 - 4\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 2 - 5\sqrt{3} \\
 &\Rightarrow a_8 = a_7 - \sqrt{3} = (2 - 5\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 2 - 6\sqrt{3} \\
 &\Rightarrow a_9 = a_8 - \sqrt{3} = (2 - 6\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 2 - 7\sqrt{3} \\
 &\Rightarrow a_{10} = a_9 - \sqrt{3} = (2 - 7\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 2 - 8\sqrt{3} \\
 &\Rightarrow a_{11} = a_{10} - \sqrt{3} = (2 - 8\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 2 - 9\sqrt{3} \\
 &\Rightarrow a_{12} = a_{11} - \sqrt{3} = (2 - 9\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 2 - 10\sqrt{3} \\
 &\Rightarrow a_{13} = a_{12} - \sqrt{3} = (2 - 10\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 2 - 11\sqrt{3} \\
 &\Rightarrow a_{14} = a_{13} - \sqrt{3} = (2 - 11\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 2 - 12\sqrt{3} \\
 &\Rightarrow a_{15} = a_{14} - \sqrt{3} = (2 - 12\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 2 - 13\sqrt{3},
 \end{aligned}$$

o 15º termo da PA é $2 - 13\sqrt{3}$. □

Como vimos nos Exemplos 1.24 e 1.26, uma vez que temos a recorrência, conseguimos calcular o valor de qualquer termo de uma PA. Todavia, seríamos capazes de calcular um termo a_n , cujo n é tão grande quanto se queira sem necessariamente percorrer todos os $n - 1$ termos? Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 1.27. Determine o termo a_{2024} da sequência $(1, 7, 13, 19, 25, 31, \dots)$.

Seguindo a lógica dos Exemplos 1.24 e 1.26, sabemos que, para calcular um termo a_{2024} , precisaríamos fazer todos os cálculos até o a_{2023} . Mas isso tornaria a solução muito longa, cansativa e desinteressante. Diante disso, podemos notar que seguir a recorrência dada na Definição em 1.17 não é a melhor estratégia para encontrar o valor de um a_n qualquer. À vista disso, veremos uma maneira de encontrar o valor de qualquer termo a_n em função de n , de algum termo da PA e da razão r .

Proposição 1.28 (Lei de Formação ou Fórmula do Termo Geral de uma PA). *Dada uma PA (a_n) de razão r , então podemos relacionar os termos a_n e a_k por meio da seguinte identidade:*

$$a_n = a_k + (n - k)r. \quad (1.1)$$

Demonstração. Escrevendo sucessivamente a recorrência desde a_n até a_{k+1} , teremos

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + r \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + r \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + r \\ &\vdots \\ a_{k+3} &= a_{k+2} + r \\ a_{k+2} &= a_{k+1} + r \\ a_{k+1} &= a_k + r \end{aligned}$$

Assim, efetuando a soma dos termos escritos no mesmo sentido da igualdade, isto é, somando todos os termos do lado esquerdo e do lado direito da igualdade, usaremos a lei do cancelamento sistematicamente para simplificar os termos iguais do lado direito da igualdade de uma linha superior com o termo do lado esquerdo da linha imediatamente inferior,

$$\begin{aligned} a_n &= \cancel{a_{n-1}} + r \\ \cancel{a_{n-1}} &= \cancel{a_{n-2}} + r \\ \cancel{a_{n-2}} &= \cancel{a_{n-3}} + r \\ &\vdots \\ \cancel{a_{k+3}} &= \cancel{a_{k+2}} + r \\ \cancel{a_{k+2}} &= \cancel{a_{k+1}} + r \\ \cancel{a_{k+1}} &= a_k + r, \end{aligned} \tag{1.2}$$

obtendo:

$$a_n = a_k + (n - k)r.$$

□

Observação 1.29. O argumento utilizado acima é chamado de *Somas Telescópicas*, e é bastante eficiente para simplificar escritas com vários termos com recorrências semelhantes. No caso particular com $k = 1$, o resultado nos dá a famosa Fórmula do Termo Geral como vista no Ensino Médio.

Então, voltando ao Exemplo 1.27. Usaremos a Equação (1.1) para resolvê-lo.

$$a_{2024} = a_6 + (2024 - 6) \cdot 6 = 31 + 2018 \cdot 6 = 12139.$$

Tornando a solução muito mais simples e interessante. Agora veremos outros exemplos que podem ser resolvidos usando a Fórmula do Termo Geral da PA.

Exemplo 1.30 (Retirado de (CEZAR, s.d.)). Se $a_5 = 120$ e $r = 40$ determine a posição n do termo de valor 2000.

Solução.

$$\begin{aligned}a_n &= a_5 + (n - 5) \cdot r \\2000 &= 120 + (n - 5) \cdot 40 \\2000 &= 120 + 40n - 200 \\2000 &= 40n - 80 \\2080 &= 40n \\n &= 52.\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.31. Obtenha a razão da PA em que $a_2 = 9$ e $a_{14} = 45$.

Solução.

$$\begin{aligned}a_{14} &= a_2 + (14 - 2) \cdot r \\45 &= 9 + 12 \cdot r \\36 &= 12 \cdot r \\r &= 3.\end{aligned}$$

□

A Progressão Aritmética tem diversas propriedades interessantes, dentre as quais destacaremos relação importante para obtenção da soma dos termos.

Proposição 1.32. *Seja (a_n) uma PA não constante, ou seja $r \neq 0$. Suponha que $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, então*

$$m + n = p + q \quad \text{se, e somente se,} \quad a_m + a_n = a_p + a_q. \quad (1.3)$$

Demonstração. Como a proposição é uma bicondicional, vamos demonstrá-la em duas etapas. Suponha que $m + n = p + q$. Multiplicando a igualdade por r temos

$$m \cdot r + n \cdot r = p \cdot r + q \cdot r.$$

Em seguida somamos com $2(a_k - k \cdot r)$ ficando com

$$m \cdot r + n \cdot r + 2(a_k - k \cdot r) = p \cdot r + q \cdot r + 2(a_k - k \cdot r),$$

organizando temos:

$$(m \cdot r + a_k - k \cdot r) + (n \cdot r + a_k - k \cdot r) = (p \cdot r + a_k - k \cdot r) + (q \cdot r + a_k - k \cdot r),$$

portanto

$$(a_k + (m - k) \cdot r) + (a_k + (n - k) \cdot r) = (a_k + (p - k) \cdot r) + (a_k + (q - k) \cdot r).$$

Assim, pela Equação (1.1) temos que $a_m + a_n = a_p + a_q$.

Suponha agora que $a_m + a_n = a_p + a_q$. Usando a Equação (1.1) podemos escrever essa igualdade como

$$(a_k + (m - k) \cdot r) + (a_k + (n - k) \cdot r) = (a_k + (p - k) \cdot r) + (a_k + (q - k) \cdot r).$$

Subtraindo a_k a igualdade fica

$$(m - k) \cdot r + (n - k) \cdot r = (p - k) \cdot r + (q - k) \cdot r,$$

em seguida, como $r \neq 0$, dividiremos a identidade por r , assim

$$m - k + n - k = p - k + q - k$$

e somando por k concluímos que $m + n = p + q$. □

Agora trataremos sobre a *Soma dos n Primeiros Termos de uma PA*, mas antes de entrar nesse assunto, veremos uma breve lenda sobre esse tema.

1.2.2.2 A Lenda de Gauss

Johann Friederich Carl Gauss nasceu em Brunswick, Alemanha, em 30 de abril de 1777. Foi um grande matemático e sua genialidade apareceu já na infância. Diz a lenda, que, quando ele tinha dez anos, o professor de matemática pediu para que os alunos fizessem a soma dos números de 1 a 100. Em pouco tempo, Gauss mostrou o resultado correto ao professor. Incrédulo, o professor pediu para Gauss explicar como fez. Ele disse que notou que somando o primeiro e último números da sequência, ou seja, $1 + 100$, dava 101. Somando o segundo e penúltimo número da sequência, ou seja, $2 + 99$, dava 101, o terceiro e o antepenúltimo também dava 101, e assim por diante. Como são 100 números, então há 50 pares. Logo, $101 \cdot 50 = 5050$.

Baseado na solução do menino Gauss para a atividade do professor, usaremos a mesma lógica para demonstrar a fórmula da *Soma dos n Primeiros Termos de uma Progressão Aritmética*, a seguir.

Proposição 1.33 (Soma dos n Primeiros Termos de uma Progressão Aritmética). *Dada uma PA (a_n) , então*

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}. \quad (1.4)$$

Demonstração. Iremos escrever a soma dos n termos da PA duas vezes, somando indo de a_1 até a_n e outra somando de a_n até a_1 . Assim obtendo o sistema

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \end{cases}$$

Somando temos,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como vimos na Proposição 1.3, podemos escrever a soma em função apenas de $(a_1 + a_n)$, pois a soma dos índices sempre dará $n + 1$, portanto

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

□

Exemplo 1.34 (Retirado de (Material POTI - Recorrências - Parte I, s.d.)). Calcule a soma dos 1000 primeiros múltiplos positivos de 7.

Solução. Como queremos os múltiplos de 7 positivos, então temos que $a_1 = 7$ e $a_{1000} = 7 + (1000 - 1) \cdot 7 = 7000$. Assim sendo,

$$S_{1000} = \frac{(7 + 7000) \cdot 1000}{2} = 3503500.$$

□

Em síntese, durante esse segmento, abordamos o conteúdo de PA, estudamos seus conceitos, suas classificações, suas propriedades e demonstramos e exemplificamos suas principais fórmulas. Em continuidade ao conteúdo de Sequências Recorrentes, agora falaremos sobre *Progressões Geométricas*.

1.2.3 Progressão Geométrica (PG)

Nesta seção, falaremos sobre Progressão Geométrica (PG) e suas principais propriedades. A ideia de Progressão Geométrica inicia-se no 4º ano do Ensino Fundamental, dentro do conteúdo de Sequências Numéricas, no qual espera-se que o estudante seja capaz de “Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.” (BNCC, 2018). No Ensino Médio, esse conhecimento é melhor trabalhado e aprofundado com aplicações teóricas e práticas em contextos diversificados. Assim como no Ensino Básico, a sucessão do conteúdo de PG, nesta seção, será feita de forma gradual e com exemplos de fácil compreensão.

Definição 1.35 (Progressão Geométrica (PG)). Uma sequência numérica (a_n) é dita uma *Progressão Geométrica* quando satisfaz a seguinte recorrência:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \text{ para todo } n \geq 2,$$

com n sendo um número natural e q é uma constante chamada de *Razão da PG*.

Exemplo 1.36. A sequência 2, 4, 8, 16, 32, ... é uma PG, pois para quaisquer dois termos consecutivos a razão é 2. Para verificar isso vamos primeiro escrever a sequência como potência na base 2: $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots$. Em seguida, consideremos quaisquer dois termos consecutivos $a_k = 2^k$ e $a_{k-1} = 2^{k-1}$, logo:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2^k}{2^{k-1}} = 2^{k-(k-1)} = 2.$$

Ainda é possível classificar a PG conforme o comportamento de sua razão. Dependendo desse valor, podemos dizer se ela é Crescente, Decrescente ou Constante. Como veremos a seguir.

1.2.3.1 Classificação de uma Progressão Geométrica

Seja (a_n) uma PG de razão q e primeiro termo a_1 , ela será classificada como

Crescente: quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$;

Decrescente: quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$;

Constante: quando $a_1 = 0$ ou $q = 1$.

Exemplo 1.37. Determine se a sequência $(3, 9, 27, \dots)$ é uma PG. Em caso de confirmação, classifique-a e calcule o quinto termo.

Solução. Pela Definição 1.35, sabemos que

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3k}{k} = 3 = q,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $a_1 = 3 > 0$ e $q = 3 > 1$, podemos ver que a PG é Crescente. Para calcular o valor de a_5 , iremos calcular o valor do termo anterior que é o a_4 ,

$$\frac{a_4}{a_3} = q \Rightarrow \frac{a_4}{27} = 3 \Rightarrow a_4 = 81.$$

Então, a_5 é

$$\frac{a_5}{a_4} = q \Rightarrow \frac{a_5}{81} = 3 \Rightarrow a_5 = 243.$$

□

Exemplo 1.38. Dada a PG $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$, classifique-a e calcule o seu sétimo termo.

Solução. Usando a Definição 1.35, a razão é

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}.$$

Como $a_1 = 1 > 0$ e $q = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < q < 1$, então a PG é Decrescente. Para determinar o valor de a_7 , devemos calcular dos termos anteriores a_6 , a_5 e a_4 . Assim,

$$\frac{a_4}{a_3} = q \Rightarrow \frac{a_4}{1/4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{1}{8}.$$

Da mesma forma temos que $a_5 = \frac{1}{16}$ e $a_6 = \frac{1}{32}$. Desse modo, concluímos que $a_7 = \frac{1}{64}$. $\square$

As PGs também podem ser finitas de forma crescente, $q > 1$, ou decrescente, $0 < q < 1$. Como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 1.39. Os lados de um triângulo retângulo estão em PG crescente. Determine a razão dessa progressão.

Solução. Iniciaremos considerando os lados do triângulo como a_1 , a_1q e a_1q^2 , pois, pela definição temos que

$$\frac{a_2}{a_1} = q \Rightarrow a_2 = a_1q$$

e

$$\frac{a_3}{a_2} = q \Rightarrow \frac{a_3}{a_1q} = q \Rightarrow a_3 = a_1q^2.$$

Prosseguindo, como os lados estão em PG crescente, então $a_1 < a_1q < a_1q^2$, daí, pelo Teorema de Pitágoras temos

$$(a_1q^2)^2 = (a_1q)^2 + (a_1)^2 \Rightarrow a_1^2q^4 = a_1^2q^2 + a_1^2 \Rightarrow a_1^2(q^4 - q^2 - 1) = 0.$$

Como a_1 é a medida de um dos lados do triângulo, então $a_1 \neq 0 \Rightarrow a_1^2 \neq 0$. Assim sendo $q^4 - q^2 - 1 = 0$. Agora vamos supor $q^2 = k$, logo teremos $k^2 - k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Para $q > 1 \Leftrightarrow k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, desse modo $q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$. $\square$

Exemplo 1.40. Qual o valor do segundo termo e da razão da PG decrescente $(3, x, \frac{1}{3})$?

Solução. Pela definição sabemos que $\frac{a_2}{a_1} = q$ e $\frac{a_3}{a_2} = q$, portanto o segundo termo é

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{1/3}{x} \Rightarrow x = 1$$

e a razão é

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$\square$

Nem toda questão de PG é viável responder pela definição, pois o cálculo poderá ser trabalhoso e cansativo. Como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.41. Determine o termo a_{1000} da PG que tem $a_1 = 3$ e $q = 2$.

Podemos notar que, para resolver esse problema, devemos saber o valor de a_{1000} , é preciso calcular os valores de todos os termos até a_{999} , uma conta grande e desestimulante. Para resolver esse exemplo de forma mais interessante, vamos utilizar uma fórmula que calcula a_n em função de n e q .

Proposição 1.42 (Lei de Formação ou Fórmula do Termo Geral da PG). *Dada uma PG (a_n) de razão q , então podemos relacionar a_n e a_k por meio da seguinte expressão:*

$$a_n = a_k \cdot q^{(n-k)}. \quad (1.5)$$

Demonstração. De forma semelhante a proposição 1.1, iremos demonstrar essa identidade utilizando produtos telescópios. Escrevemos sucessivamente a recorrência desde a_n até a_{k+1} e, em seguida, realizaremos o produto dos termos escritos no mesmo sentido da igualdade, aplicando a lei do cancelamento para simplificar os termos iguais,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} = q &\Leftrightarrow a_n = \cancel{a_{n-1}} \cdot q \\ \cancel{a_{n-1}} &= \cancel{a_{n-2}} \cdot q \\ \cancel{a_{n-2}} &= \cancel{a_{n-3}} \cdot q \\ &\vdots \\ \cancel{a_{k+3}} &= \cancel{a_{k+2}} \cdot q \\ \cancel{a_{k+2}} &= \cancel{a_{k+1}} \cdot q \\ \cancel{a_{k+1}} &= a_k \cdot q \end{aligned}$$

Assim,

$$a_n = a_k \cdot q^{n-(k+1)+1} \Rightarrow a_n = a_k \cdot q^{(n-k)}.$$

□

Agora, para resolver o Exemplo 1.2.3.1 fica muito mais fácil com a Equação (1.5). Considerando $k = 1$, temos

$$a_n = a_k \cdot q^{(n-k)} \Rightarrow a_{1000} = a_1 \cdot 2^{(1000-1)} \Rightarrow a_{1000} = 3 \cdot 2^{999}.$$

Além de encontrar o n -ésimo termo, a_n , a *Lei de Formação da PG* (1.5), também serve para o número de termos da sequência, n , e a razão, q . Como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 1.43 (Retirado de (PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG) – LISTA - RESUMO, s.d.)). O primeiro termo de uma PG decrescente é $\frac{27}{16}$ e o quinto termo é $\frac{1}{3}$. Calcule a razão dessa sequência

Solução. Usando a formula do termo geral da PG, para $k = 1$ e $n = 5$, temos

$$a_n = a_k \cdot q^{(n-k)} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^{(5-1)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{27}{16} \cdot q^4 \Rightarrow \frac{16}{81} = q^4 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^4 = q^4.$$

Logo, a razão dessa PG é $q = \frac{2}{3}$. □

Exemplo 1.44 (Retirado de (SOUZA, s.d.)). Determine a quantidade de termos da PG $(10, 2, \frac{2}{5}, \dots, \frac{2}{625})$.

Solução. Para $k = 1$, temos $a_1 = 10$, $a_n = \frac{2}{625}$ e a razão $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Deste modo, substituindo na formula do termo geral da PG, temos

$$\frac{2}{625} = 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{(n-1)} \Rightarrow \frac{1}{3125} = \left(\frac{1}{5}\right)^{(n-1)} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{1}{5}\right)^{(n-1)}.$$

Pela igualdade temos que $n - 1 = 5$, portanto a quantidade de termos dessa PG é $n = 6$. □

A Progressão Geométrica tem diversas propriedades interessantes, mas, para nossa temática, comentaremos apenas produto dos termos equidistantes.

Proposição 1.45. Considere (a_n) uma PG com $a_k \neq 0$, $|q| > 0$ e $|q| \neq 1$. Tome $m, n, r, s \in \mathbb{N}$, então

$$m + n = r + s \Leftrightarrow a_m \cdot a_n = a_r \cdot a_s. \quad (1.6)$$

Demonstração. Para $a_m \cdot a_n = a_r \cdot a_s$, usando a lei de formação 1.5 e a lei do cancelamento, temos

$$a_m \cdot a_n = a_r \cdot a_s \Leftrightarrow (a_k \cdot q^{(m-k)}) \cdot (a_k \cdot q^{(n-k)}) = (a_k \cdot q^{(r-k)}) \cdot (a_k \cdot q^{(s-k)})$$

$$\Leftrightarrow a_k^2 \cdot q^{(m+n-2k)} = a_k^2 \cdot q^{(r+s-2k)}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{a_k^2} \cdot \frac{q^{m+n}}{q^{2k}} = \cancel{a_k^2} \cdot \frac{q^{r+s}}{q^{2k}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{q^{m+n}}{\cancel{q^{2k}}} = \frac{q^{r+s}}{\cancel{q^{2k}}}$$

$$\Leftrightarrow q^{m+n} = q^{r+s}$$

$$\Leftrightarrow m + n = r + s.$$

□

Exemplo 1.46. Numa PG, o produto do terceiro com o sétimo termos é 16. Sabendo que $a_9 = 64$, qual o valor de a_1 ?

Solução. Como $3 + 7 = 1 + 9$, então

$$a_3 \cdot a_7 = a_1 \cdot a_9 \quad \Leftrightarrow \quad 16 = a_1 m \cdot 64 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{1}{4}.$$

□

Exemplo 1.47. Seja (a_n) uma progressão geométrica cujo primeiro termo $a_1 = 2$ e o sétimo termo é $a_7 = 128$. Determine o valor de a_4 .

Solução. Note que $4 + 4 = 1 + 7$, então temos que

$$a_4^2 = a_1 \cdot a_7 = 2 \cdot 128 = 256 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \sqrt{256} = 16.$$

□

Exemplo 1.48. Mostre que os lados de um triângulo retângulo que medem $a_1 = 2$, $a_2 = 2 \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \right)$ e $a_3 = 1 + \sqrt{5}$ estão em Progressão Geométrica.

Solução. Note que a_1 é o menor lado, logo é um dos catetos e a_3 é o maior lado, logo se provarmos que $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$, então provaremos que a_1 , a_2 e a_3 formam uma PG nesta ordem. Note que

$$a_2^2 = \left(2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \right) \right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 2 \cdot (1 + \sqrt{5}) = a_1 \cdot a_3.$$

Logo, os lados do triângulo retângulo, a_1 , a_2 e a_3 , estão em PG.

□

Um dos métodos mais importantes de resolução da Progressão Geométrica é a soma dos seus termos, podendo ser finitos ou infinitos. A seguir, vamos demonstrar e trabalhar essas fórmulas matemática exemplificando problemas semelhantes em questões de Olimpíadas e Vestibulares.

Proposição 1.49 (Soma dos n Primeiros Termos de uma Progressão Geométrica). *Dada uma PG (a_n) , então*

$$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right), \text{ para } q \neq 1. \quad (1.7)$$

Demonstração. Sendo S_n a soma dos n termos da PG, então

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

e

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + \dots + q \cdot a_{n-1} + q \cdot a_n = a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$$

Tomando $qS_n - S_n$ e usando a lei do cancelamento, temos

$$\begin{aligned} qS_n - S_n &= (\cancel{a_1q} + \cancel{a_1q^2} + \dots + \cancel{a_1q^{n-1}} + a_1q^n) - (a_1 + \cancel{a_1q} + \dots + \cancel{a_1q^{n-2}} + \cancel{a_1q^{n-1}}) \\ &= a_1q^n - a_1 \end{aligned}$$

Colocando S_n e a_1 em evidência, e dividindo a igualdade por $(q-1)$, para $q \neq 1$, concluímos

$$(q-1)S_n = a_1(q^n - 1) \Rightarrow S_n = a_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right).$$

□

Exemplo 1.50 (Retirado de (PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG) – LISTA - RESUMO, s.d.)). Uma moça seria contratada como balconista para trabalhar de segunda a sábado nas duas últimas semanas que antecederiam o Natal. O patrão ofereceu R\$1,00 pelo primeiro dia de trabalho e nos dias seguintes o dobro do que ela recebera no dia anterior. A moça recusou o trabalho. Se ela tivesse aceitado a oferta, quanto teria recebido pelos 12 dias de trabalho?

Solução. Nessa questão temos uma PG cujo primeiro termo é 1, a razão é 2 e o número de termos é 12. Para determinar o quando ela ganharia nos 12 dias trabalhados, devemos calcular S_{12} . Usando a Equação 1.7, temos

$$S_{12} = 1 \cdot \left(\frac{2^{12} - 1}{2 - 1} \right) = \frac{4095}{1} = 4095.$$

Ela receberia por 12 dias de trabalho o valor de R\$4095,00.

□

Exemplo 1.51 (Retirado de (PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG) – LISTA - RESUMO, s.d.)). Calcule a soma dos cinco primeiros termos da PG infinita $(2, -6, 18, \dots)$.

Solução. A razão da PG é $q = \frac{-6}{2} = -3$ e pela Fórmula da Soma dos n termos de uma PG, temos

$$S_5 = 2 \cdot \left(\frac{(-3)^5 - 1}{(-3) - 1} \right) = 2 \cdot \left(\frac{-244}{-4} \right) = 122.$$

□

Exemplo 1.52. Escreva a soma de todos os termos de uma PG infinita cuja razão é $\frac{2}{3}$, sabendo que a soma dos seus seis primeiros termos é 665.

Solução. Iniciaremos determinando o valor de a_1 através da fórmula da Soma de n termos da PG, ou seja,

$$\begin{aligned} S_6 &= a_1 \cdot \left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6 - 1}{\left(\frac{2}{3}\right) - 1} \right) \Rightarrow 655 = a_1 \cdot \left(\frac{\left(\frac{64}{729}\right) - 1}{-\frac{1}{3}} \right) \\ &\Rightarrow 655 = a_1 \cdot \left(\frac{-\frac{665}{729}}{-\frac{1}{3}} \right) \\ &\Rightarrow 655 = a_1 \cdot \left(\frac{665}{243} \right) \\ &\Rightarrow a_1 = 243. \end{aligned}$$

Como queremos a soma de infinitos termos da PG, então o número de termos crescerá infinitamente, isto é, tenderá ao infinito. Dessa forma teremos

$$\begin{aligned} S_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) \Rightarrow S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} 243 \cdot \left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\frac{2}{3} - 1} \right) \\ &\Rightarrow S_\infty = 243 \cdot \left(\frac{0 - 1}{-\frac{1}{3}} \right) \\ &\Rightarrow S_\infty = 243 \cdot 3 \\ &\Rightarrow S_\infty = 729. \end{aligned}$$

Podemos notar, que o único valor que estava dependendo de n era a razão e como $0 < q < 1$, seu valor fica cada vez menor quanto maior o n . Assim sendo, quanto maior o n , mais próximo de zero fica o valor de $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, em outras palavras,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0.$$

□

Mas não é necessário usar conceito de limites toda vez que for calcular a soma de infinitos termos de uma PG. Há uma maneira de encontrar essa soma em função de a_1 e q , para $0 < q < 1$.

Proposição 1.53 (Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Decrescente e Ilimitada). *Dada uma PG decrescente (a_n) , então*

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ para } 0 < q < 1. \quad (1.8)$$

Demonstração. Do mesmo jeito que vimos no Exemplo 1.52 como $0 < q < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Assim, substituindo em 1.7 temos

$$S_{\infty} = a_1 \cdot \left(\frac{0-1}{q-1} \right) = a_1 \cdot \left(\frac{-1}{q-1} \right) = \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

□

Observação 1.54. Já para $q > 1$ não é possível calcular essa soma, pois quanto maior for n , maior será q^n , uma vez que $q^n > q^m$ para $n > m$, assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.

Vamos fazer mais um exemplo de soma dos termos de uma PG decrescente e ilimitada.

Exemplo 1.55. Calcule a soma dos termos da PG infinita, cujo produto dos 10 primeiros termos é $\frac{1}{32768}$ e $q = \frac{1}{2}$.

Observe que, para resolver esse problema, à primeira vista, podemos acreditar que é necessário conhecer os valores dos 10 primeiros termos cujo produto é $\left(\frac{1}{2}\right)^{32768}$, ou, pelo menos, o valor do primeiro termo dessa PG. Talvez fosse possível fazer por tentativa até achar esse valor, porém não seria nada prático e interessante, podendo levar horas para encontrar o resultado. Para solucionar esse exemplo, vamos usar a fórmula do produto dos n primeiros termos de uma PG, a qual veremos e demonstraremos a seguir.

Proposição 1.56 (Produto dos n Primeiros Termos de uma Progressão Geométrica).
Dada uma PG (a_n) , então

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}. \quad (1.9)$$

Demonstração. Seja P_n o produto dos n termos da PG. Começamos escrevendo P_n duas vezes, com o produto partindo de a_1 até a_n e depois de a_n até a_1 . Em outros termos

$$\begin{cases} P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \\ P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \dots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \end{cases}$$

Em seguida multiplicamos o sistema, obtendo

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot \dots \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$$

Tal qual a Equação (1.6), sabemos que $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \dots$, a partir daí, escrevemos todos os produtos no formato $(a_1 \cdot a_n)$, deste modo

$$\begin{aligned} P_n^2 &= (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot \dots + (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \\ P_n^2 &= (a_1 \cdot a_n)^n \\ P_n &= \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}. \end{aligned}$$

□

Agora, podemos retornar ao Exemplo 1.55 para resolvê-lo. Pela fórmula do termo geral da PG, temos que $a_n = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$, substituindo na Equação (1.9), temos

$$P_n = \sqrt{\left(a_1 \cdot a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}\right)^n}$$

Ajeitando a expressão e substituindo n e P_n , ficamos com

$$\frac{1}{32768} = \sqrt{\left(a_1^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9\right)^{10}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = a_1^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{45} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-30} = a_1^{10},$$

assim, $a_1 = 2^{\frac{30}{10}} \Rightarrow a_1 = 2^3 \Rightarrow a_1 = 8$. Agora, substituímos a_1 e q em (1.8), temos que

$$S_\infty = \frac{8}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow S_\infty = \frac{8}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S_\infty = 16.$$

Portanto, a soma dos infinitos termos da PG pedida no Exemplo 1.55 é 16.

Exemplo 1.57 (Colégio Técnico Industrial de Santa Maria, Caderno 3, Progressão Aritmética e Progressão Geométrica, Testes de Progressão Geométrica, Problema 9, (MAGAGNANGMO; LUTZ, 2020)). O produto de três números em P.G. é 125 e a soma é 31. O maior número é:

- a) 5 b) 1 c) 25 d) 120 e) 4

Solução. Como os números estão em PG e considerando q a razão dessa PG, então esses três números podem ser escritos na forma $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$. Visto que, o produto desses termos é 125 e utilizando a Equação (1.9), temos

$$P_3 = \sqrt{(a_1 \cdot a_3)^3} \Rightarrow 125 = \sqrt{\left(\frac{x}{q} \cdot (xq)\right)^3} \Rightarrow 5^3 = \sqrt{(x^2)^3} \Rightarrow 5 = x. \quad (1.10)$$

Já a soma desses mesmos termos é 31. Empregando a Equação (1.7) e substituindo o valor obtido em (1.10), obteremos

$$S_3 = a_1 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \Rightarrow 31 = \frac{x}{q} \cdot (q^2 + q + 1) \Rightarrow 31q = 5 \cdot (q^2 + q + 1).$$

Fazendo a distributividade e colocando os termos de um mesmo lado da igualdade,

$$5q^2 - 26q + 5q = 0. \quad (1.11)$$

A solução para a equação polinomial de segundo grau (1.11) é $q_1 = 5$ e $q_2 = 0,5$. Para ambos casos, temos que os três números são 1, 5 e 25. Assim sendo, o maior deles é 25. $\square$

Nessa seção, vimos a definição de PG, suas propriedades, demonstramos suas principais fórmulas e resolvemos diversos problemas. Como continuação do assunto de

Sequências Recorrentes, agora veremos a *Sequência de Fibonacci*. Embora esse tema não faça parte, explicitamente, da base curricular do Ensino Básico de matemática, é importante que ela seja vista no ensino de sequência numéricas, pois ajuda na formação do pensamento lógico, analítico, abstrato, quantitativo, crítico e na resolução de problemas. Uma forma motivadora de trabalhá-la no ensino fundamental é apresentando o problema dos *Coelhos de Fibonacci*, como faremos a seguir.

1.2.4 Sequência de Fibonacci

Leonard Fibonacci, um dos matemáticos mais talentosos da idade média, nasceu em Pisa, na Itália, por volta de 1175. Em 1202, ele publicou um livro chamado *Liber Abaci*, no qual ele apresenta o problema conhecido como *Os Coelhos de Fibonacci*. Ainda que esse problema tenha ganhado fama com Fibonacci, sua origem é mais antiga. Ele aparece no Papiro de Rhind, que é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., no qual o escriba Amósis escreve a solução de 85 problemas de matemática.

1.2.4.1 Os Coelhos de Fibonacci

Há várias versões que encontramos para o problema original, fizemos a escolha da seguinte versão: *Um homem tem um casal de coelhos em um cercado e deseja saber quantos casais de coelhos serão produzidos em um ano. Sabendo que um casal de coelhos gera mais um casal de coelhos todo mês e que eles se tornam férteis a partir do segundo mês de vida.*

Observação 1.58. Devemos considerar que nenhum coelho nunca morre e que todos os meses todos os casais de coelhos férteis reproduzem.

Para solucionar esse problema, iremos observar quantos casais de coelhos não-férteis e férteis (vamos chamá-los de filhotes e adultos, respectivamente, para simplificar o texto) há em cada mês, dessa forma, teremos o total de casais de coelhos do mês.

- No primeiro mês, há apenas um casal de coelhos filhotes, totalizando 1 casal;
- No segundo mês, temos o mesmo casal do mês anterior, porém adultos, totalizando 1 casal;
- No terceiro mês, o casal adulto, do mês anterior, produziu mais um casal de coelhos. Logo, há um casal adulto e um casal de filhotes, totalizando 2 casais;
- No quarto mês, um casal de adultos gera mais um casal de filhotes e os filhotes do mês anterior se tornam adultos. Portanto há dois casais de adultos e um casal de filhotes, totalizando 3 casais;

- No quinto mês, os dois casais de adultos, do mês passado, geram mais dois casais de filhotes e os filhotes que nasceram no mês passado se tornam adultos. Então há dois casais de filhotes e três casais de adultos, totalizando 5 casais;
- E assim sucessivamente.

Organizando tudo em uma tabela até o 12º mês, temos que a resposta é 144 casais de coelhos.

Tabela 1 – Tabela dos coelhos de Fibonacci até o 12º mês

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Casal de coelhos filhotes	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Casal de coelhos adultos	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Total de casal de coelhos	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Note que, o número total de casais de coelhos depende da quantidade de casais de adultos e filhotes dos meses anteriores. Em vista disso, repare que, a partir do terceiro mês, a quantidade de casais de coelhos de um certo mês é exatamente a soma do total de casais de coelhos dos dois meses imediatamente anteriores. Dessa forma, produzindo uma sequência definida por uma recorrência linear homogênea de ordem dois, em que o primeiro e segundo termos valem 1. Foi essa sequência que recebeu o nome do matemático Leonard Fibonacci. A seguir, iremos defini-la formalmente usando recorrência, demonstrar a fórmula do termo geral e explorar algumas propriedades interessantes relacionadas a este estudo.

Definição 1.59 (Sequência de Fibonacci). Uma sequência numérica (F_n) é dita *Sequência de Fibonacci* quando satisfaz a seguinte recorrência de segunda ordem:

$$F_n + F_{n-1} = F_{n+1},$$

com $F_1 = F_2 = 1$ e $n > 2$. Em outras palavras, é a sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$.

O próximo exemplo é a 6ª questão da primeira fase (regional) do nível 3 da *XXV Olimpíada Brasileira de Matemática*.

Exemplo 1.60. Na sequência de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$ cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores. Quanto vale a soma infinita

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{5}{32} + \frac{8}{64} + \frac{13}{128} + \frac{21}{256} + \frac{34}{512} + \frac{55}{1024} + \dots,$$

onde o n -ésimo termo é o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci dividido por 2^n ?

Solução. Chamaremos a soma infinita desejada de S . Note que podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{2}{16}\right) + \left(\frac{2}{32} + \frac{3}{32}\right) + \left(\frac{3}{64} + \frac{5}{64}\right) \\ + \left(\frac{5}{128} + \frac{8}{128}\right) + \left(\frac{8}{256} + \frac{13}{256}\right) + \left(\frac{13}{512} + \frac{21}{512}\right) + \left(\frac{21}{1024} + \frac{34}{1024}\right) + \dots$$

Reorganizando-a, temos

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{3}{32} + \frac{5}{64} + \frac{8}{128} + \frac{13}{256} + \frac{21}{512} + \frac{34}{1024} + \dots\right) \\ + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{2}{32} + \frac{3}{64} + \frac{5}{128} + \frac{8}{256} + \frac{13}{512} + \frac{21}{1024} + \dots\right)$$

Observe que a soma dentro do primeiro parenteses é $\frac{1}{2}S$ e a soma no segundo parenteses é $\frac{1}{4}S$. Então, substituindo-os teremos

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}S + \frac{1}{4}S \Rightarrow S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}S \Rightarrow S - \frac{3}{4}S = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}S = \frac{1}{2} \Rightarrow S = 2.$$

□

Séculos depois da sequência de Fibonacci ter ganhado fama no mundo ocidental, o matemático e físico suíço Leonhard Euler, em 1765, desenvolveu e demonstrou uma fórmula para encontrar o valor do n -ésimo termo da sequência de Fibonacci, sem precisar calcular os termos anteriores. Contudo, ela ganhou visibilidade depois que foi redescoberta pelo matemático francês Jacques Binet em 1843.

Proposição 1.61 (Fórmula do Termo Geral da Sequência de Fibonacci ou Fórmula de Binet). *Seja a sequência (F_n) , temos que*

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \text{ para } n \geq 1. \quad (1.12)$$

Demonstração. A demonstração será feita pelo Segundo Princípio de Indução Finita¹.

Para $n = 1$ temos que

$$F_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

¹ Seja $P(n)$ uma propriedade sobre um número natural n a qual queremos validar. Se $P(n)$ satisfaz as seguintes condições:

Condição 1. $P(n_0)$ é verdadeira;

Condição 2. Para todo $n_0 \leq k \leq n$, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdade para todo $n \geq n_0$.

Portanto, a identidade é válida para F_1 .

Pela Definição 1.59 temos que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. E também, considere, por indução matemática, que para todo k , com $1 \leq k \leq n$, F_k é válido. Logo,

$$\begin{aligned}
 F_{n+1} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] - \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]}{\sqrt{5}}. \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

Note que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \tag{1.14}$$

e

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \tag{1.15}$$

Substituindo (1.14) e (1.15) em (1.13) temos

$$\begin{aligned}
 F_{n+1} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{(n+1)} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{(n+1)}}{\sqrt{5}}.
 \end{aligned}$$

Portanto, pelo Segundo Princípio de Indução Finita, a identidade F_n é válida para todo $n \geq 1$. $\square$

Exemplo 1.62. Vamos determinar o oitavo número da sequência de Fibonacci sem recorrer aos valores anteriores. Pela Fórmula de Binet (1.12), temos

$$F_8 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^8}{\sqrt{5}}$$

Desenvolvendo as potências e resolvendo as contas, teremos que o valor de F_8 é

$$\begin{aligned}
 F_8 &= \frac{\left(\frac{1 + 8\sqrt{5} + \cancel{28\sqrt{5}^2} + 56\sqrt{5}^3 + \cancel{70\sqrt{5}^4} + 56\sqrt{5}^5 + \cancel{28\sqrt{5}^6} + 8\sqrt{5}^7 + \sqrt{5}^8}{2^8} \right)}{\sqrt{5}} \\
 &- \frac{\left(\frac{1 - 8\sqrt{5} + \cancel{28\sqrt{5}^2} - 56\sqrt{5}^3 + \cancel{70\sqrt{5}^4} - 56\sqrt{5}^5 + \cancel{28\sqrt{5}^6} - 8\sqrt{5}^7 + \sqrt{5}^8}{2^8} \right)}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{\frac{16\sqrt{5} + 560\sqrt{5} + 2800\sqrt{5} + 2000\sqrt{5}}{256}}{\sqrt{5}} = \frac{5376\sqrt{5}}{256\sqrt{5}} = \frac{5376}{256} = 21.
 \end{aligned}$$

Como nos problemas de PA e PG, haverá questões, as quais serão necessárias saber a soma dos n termos de uma sequência de Fibonacci. Como no exemplo a seguir.

Exemplo 1.63. Qual a soma dos 6 primeiros números da Sequência de Fibonacci?

Solução. Pela informação que sabemos até agora, para encontrar a soma dos 6 primeiros termos, deve-se encontrar o valor desses termos: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = 1 + 2 = 3$, $a_5 = 2 + 3 = 5$ e $a_6 = 3 + 5 = 8$. E somá-los: $S_6 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$. $\square$

Mas para resolver esse exemplo, foi necessários calcular o valor de todos os termos da sequência até a_6 . Todavia, há uma fórmula que é possível de calcular a soma dos n primeiros termos sem precisar recorrer aos termos anteriores, como veremos a seguir.

Proposição 1.64 (Soma dos n Primeiros Termos da Sequência de Fibonacci). *Dada uma uma sequência de Fibonacci (F_n) , a soma dos seus n primeiro termos é dada por*

$$S_n = F_{n+2} - 1, \quad n \geq 1. \quad (1.16)$$

Demonstração. Anotando de forma sequencial a recorrência de F_3 até F_{n+2} , de acordo com a definição 1.59, temos

$$\begin{aligned}
 F_3 &= F_1 + F_2 \\
 F_4 &= F_2 + F_3 \\
 F_5 &= F_3 + F_4 \\
 &\vdots \\
 F_n &= F_{n-2} + F_{n-1} \\
 F_{n+1} &= F_{n-1} + F_n \\
 F_{n+2} &= F_n + F_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Como feito em (1.2), empregaremos a lei do cancelamento sistematicamente para simplificar os termos iguais do lado esquerdo com a linha imediatamente inferior do lado direito.

$$\begin{aligned}
 \cancel{F_3} &= F_1 + F_2 \\
 \cancel{F_4} &= F_2 + \cancel{F_3} \\
 \cancel{F_5} &= F_3 + \cancel{F_4} \\
 &\vdots \\
 \cancel{F_n} &= F_{n-2} + \cancel{F_{n-1}} \\
 \cancel{F_{n+1}} &= F_{n-1} + \cancel{F_n} \\
 F_{n+2} &= F_n + \cancel{F_{n+1}}.
 \end{aligned}$$

Obtendo,

$$F_{n+2} = F_2 + (F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-2} + F_{n-1} + F_n). \quad (1.17)$$

Note que $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-2} + F_{n-1} + F_n = S_n$ e que $F_2 = 1$, daí, substituindo em (1.17) temos

$$F_{n+2} = 1 + S_n,$$

portanto

$$S_n = F_{n+2} - 1.$$

□

Voltando ao Exemplo 1.63. Para resolvê-lo sem precisar calcular todos os termos até a_6 , será usada a Fórmula (1.16). Assim, temos que

$$S_6 = F_8 - 1$$

Como no Exemplo 1.62 já foi calculado o valor F_8 , então teremos que $S_6 = 21 - 1 = 20$.

A sequência de Fibonacci tem diversas propriedades interessantes e importantes para a matemática, entretanto, para este trabalho, citaremos apenas quatro delas. Elas serão denominadas como “Primeira Propriedade”, “Segunda Propriedade”, “Terceira Propriedade”, “Quarta Propriedade” e “Quinta Propriedade”.

1.2.4.2 Propriedades da Sequência de Fibonacci

Proposição 1.65 (Primeira Propriedade). *Seja (F_n) uma sequência de Fibonacci, a soma dos n primeiros termos de índice ímpar é dado por*

$$S_n^i = F_{2n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Com $S_n^i = F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1}$.

Observação 1.66. Usaremos S_n^i como a soma dos n primeiros números ímpares.

Demonstração. Iniciaremos anotando, sequencialmente, os termos pares seguindo a definição 1.59 de F_2 até F_{2n}

$$\begin{aligned} F_2 &= F_2 \\ F_4 &= F_2 + F_3 \\ F_6 &= F_4 + F_5 \\ &\vdots \\ F_{2n-2} &= F_{2n-4} + F_{2n-3} \\ F_{2n} &= F_{2n-2} + F_{2n-1}. \end{aligned}$$

Utilizando a lei do cancelamento, notaremos que todos os termos pares, com exceção do F_{2n} , são anulados

$$\begin{aligned} \cancel{F_2} &= F_1 \\ \cancel{F_4} &= \cancel{F_2} + F_3 \\ \cancel{F_6} &= \cancel{F_4} + F_5 \\ &\vdots \\ \cancel{F_{2n-2}} &= \cancel{F_{2n-4}} + F_{2n-3} \\ F_{2n} &= \cancel{F_{2n-2}} + F_{2n-1}. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos

$$F_{2n} = F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-3} + F_{2n-1}.$$

Por definição, sabemos que $S_n^i = F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1}$, logo $F_{2n} = S_n^i$, ou melhor,

$$S_n^i = F_{2n}.$$

□

Exemplo 1.67. Determinar a soma dos 4 primeiros termos de índice ímpar da sequência de Fibonacci.

Solução. Pela Fórmula 1.65, temos que $S_4^i = F_8$. E pelo Exemplo 1.62, sabemos que $F_8 = 21$, assim $S_4^i = 21$. □

Proposição 1.68 (Segunda Propriedade). *Seja (F_n) uma sequência de Fibonacci, a soma dos n primeiros termos de índice par é dado por*

$$S_n^p = F_{2n+1} - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Com $S_n^p = F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n}$.

Observação 1.69. Usaremos S_n^p como a soma dos n primeiros números pares.

Demonstração. De forma análoga a demonstração da Primeira Propriedade 1.65, listaremos os termos ímpares partindo de F_1 até F_{2n+1}

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_2 \\
 F_3 &= F_1 + F_2 \\
 F_5 &= F_3 + F_4 \\
 &\vdots \\
 F_{2n-1} &= F_{2n-3} + F_{2n-2} \\
 F_{2n+1} &= F_{2n-1} + F_{2n}.
 \end{aligned}$$

Dessa vez cancelaremos todos os termos ímpares, com exceção do F_{2n+1} , ou seja,

$$\begin{aligned}
 \cancel{F_1} &= F_2 \\
 \cancel{F_3} &= \cancel{F_1} + F_2 \\
 \cancel{F_5} &= \cancel{F_3} + F_4 \\
 &\vdots \\
 \cancel{F_{2n-1}} &= \cancel{F_{2n-3}} + F_{2n-2} \\
 F_{2n+1} &= \cancel{F_{2n-1}} + F_{2n}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos

$$F_{2n+1} = F_2 + (F_2 + F_4 + \dots + F_{2n-2} + F_{2n}).$$

Por definição, sabemos que $S_n^p = F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n}$, assim sendo $F_{2n+1} = F_2 + S_n^p$. Como $F_2 = 1$, substituindo e organizando a igualdade, temos

$$S_n^p = F_{2n+1} - 1.$$

□

Exemplo 1.70. Determinar a soma dos 4 primeiros termos de índice par da sequência de Fibonacci.

Solução. Pela Fórmula 1.68, temos que $S_4^p = F_9 - 1$. Calculando F_9 usando a fórmula 1.12,

temos

$$\begin{aligned}
 F_9 &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^9 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^9}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{\left(\frac{1+9\sqrt{5}+36\sqrt{5}^2+84\sqrt{5}^3+126\sqrt{5}^4+126\sqrt{5}^5+84\sqrt{5}^6+36\sqrt{5}^7+9\sqrt{5}^8+\sqrt{5}^9}{2^9} - \frac{1-9\sqrt{5}+36\sqrt{5}^2-84\sqrt{5}^3+126\sqrt{5}^4-126\sqrt{5}^5+84\sqrt{5}^6-36\sqrt{5}^7+9\sqrt{5}^8-\sqrt{5}^9}{2^9}\right)}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{18\sqrt{5} + 840\sqrt{5} + 6300\sqrt{5} + 9000\sqrt{5} + 1250\sqrt{5}}{512\sqrt{5}} = \frac{17408\sqrt{5}}{512\sqrt{5}} = 34.
 \end{aligned}$$

Assim, teremos que $S_4^p = F_9 - 1 = 34 - 1 = 33$. □

Proposição 1.71 (Terceira Propriedade). *Seja (F_n) uma sequência de Fibonacci, a soma alternada dos n primeiros termos é dada por*

$$S_n^a = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Com $S_n^a = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + \dots + (-1)^{n+1}F_n$.

Observação 1.72. Usaremos S_n^a como a soma alternada dos n primeiros termos.

Demonstração. Por definição temos que

$$\begin{aligned}
 S_n^a &= F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + \dots + (-1)^{n+1}F_n \\
 S_n^a &= (F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n+1}) - (F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n})
 \end{aligned}$$

e, utilizando as Propriedades 1.65 e 1.68, podemos escrever S_n^a de duas maneiras:

1. Para n par, temos

$$S_n^a = S_n^i - S_n^p = F_n - (F_{n+1} - 1) = F_n - [(F_{n-1} + F_n) - 1] = -F_{n-1} + 1.$$

2. Para n ímpar, temos

$$S_n^a = S_n^i - S_n^p = F_{n+1} - (F_n - 1) = (F_{n-1} + F_n) - (F_n - 1) = F_{n-1} + 1.$$

Note que para n par o sinal de F_{n-1} é negativo e quando é ímpar, o sinal é positivo. Assim sendo, podemos escrever S_n^a , como

$$S_n^a = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1.$$

□

Exemplo 1.73. Determinar a soma alternada dos 10 primeiros termos de uma sequência de Fibonacci.

Solução. Pela Fórmula 1.71, temos $S_{10}^a = (-1)^{11}F_9 + 1$. Pelo Exemplo 1.70, sabemos que $F_9 = 34$. Desse modo, $S_{10}^a = (-1)^{11}F_9 + 1 = (-1) \cdot 34 + 1 = -34 + 1 = -33$. $\square$

Proposição 1.74 (Quarta Propriedade). *Seja (F_n) uma sequência de Fibonacci, para $n \geq 2$, temos que*

$$F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n.$$

Demonstração. Pela definição 1.59, temos que $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$. Colocando F_n em evidência ficamos com $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$. Daí, substituindo F_n a seguir e aplicando a distributividade, obtemos o que queríamos, ou seja,

$$F_n^2 = F_n F_n = F_n (F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n.$$

$\square$

Exemplo 1.75. Determine o valor de um termo a_n da sequência de Fibonacci em que $a_n \cdot a_{n-1} = 273$ e $a_n \cdot a_{n+1} = 714$.

Solução. Substituindo os valores na Fórmula 1.74, temos que

$$F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n \Rightarrow a_n^2 = 714 - 273 = 441 \Rightarrow a_n = \sqrt{441} \Rightarrow a_n = 21.$$

$\square$

Proposição 1.76 (Quinta Propriedade). *Seja (F_n) uma sequência de Fibonacci, a soma dos quadrados dos n primeiros termos é dada por*

$$S_{n^2} = F_n F_{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Com $S_{n^2} = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2$.

Observação 1.77. Usaremos S_{n^2} como a soma dos quadrados dos n primeiros termos.

Demonstração. Escreveremos, de forma sistemática, os n primeiros termos de Fibonacci ao quadrado, para $n \geq 2$ faremos de acordo com a quarta propriedade 1.74, e para $n = 1$, note que $F_1^2 = 1^2 = 1 \cdot 1 = F_1 F_2$. Assim,

$$\begin{aligned} F_1^2 &= F_1 F_2 \\ F_2^2 &= F_2 F_3 - F_1 F_2 \\ F_3^2 &= F_3 F_4 - F_2 F_3 \\ F_4^2 &= F_4 F_5 - F_3 F_4 \\ &\vdots \\ F_{n-2}^2 &= F_{n-2} F_{n-1} - F_{n-3} F_{n-2} \\ F_{n-1}^2 &= F_{n-1} F_n - F_{n-2} F_{n-1} \\ F_n^2 &= F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n. \end{aligned}$$

Somando essas igualdades, cancelaremos os termos, do lado direito da igualdade, de valores iguais e com sinais opostos. Dessa forma, teremos

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \dots + F_{n-2}^2 + F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_n F_{n+1} \quad \Rightarrow \quad S_{n^2} = F_n F_{n+1}.$$

□

Exemplo 1.78. Determinar a soma dos quadrados dos 8 primeiros termos da sequência de Fibonacci.

Solução. Sabemos, pelo Exemplo 1.62, que $F_8 = 21$ e, pelo Exemplo 1.70, e que $F_9 = 34$. Assim, pela Fórmula 1.76, temos $S_{8^2} = F_8 F_9 = 21 \cdot 34 = 714$. □

Nesse capítulo, foi visto alguns conceitos iniciais de Sequências Numéricas, cujo conteúdo é trabalhado nas escola durante todo o Ensino Básico. Esse trabalho usou como principal documento de referencia a Base Nacional Comum Curricula (BNCC). Esse documento foi usado para orientar o estudo dessa dissertação sobre o que é ensinado de Sequências Numéricas e Progressões durante o Ensino Fundamental e Médio. Também foi mencionado a Sequencia de Fibonacci, que não um assunto trabalhado de forma direta no Ensino Básico, mas que frequentemente é usado como uma atividade para trabalhar a ideia de sequencias. O estudo desse capítulo é uma porta de entrada para os três artigos que serão divulgados nos próximos capítulos.

2 Artigo 1: Uma Abordagem Olímpica das Progressões Geométricas

Neste capítulo, será abordado o artigo intitulado “*Uma Abordagem Olímpica das Progressões Geométricas*”(BARBOZA; TANAKA; CAMPOS, 2023), um trabalho em conjunto com o professor doutor Eudes Mendes Barboza e o orientador desta dissertação professor doutor Thiago Yukio Tanaka. O trabalho foi publicado na 12ª Edição, número 29, da Revista “É Matemática, OXENTE!”, que possui *qualis* C, em 01 de Dezembro de 2023. Esse artigo pode ser acessado de forma gratuita no seguinte *cqcode*



O artigo discute sobre como o conceito e as propriedades da Progressão Geométrica é abordado no âmbito da Matemática Olímpica. Em seguida, é apresentado e solucionado vários exemplos, os quais são alguns problemas básicos de Olimpíadas em contextos diversificados. Ao fim do artigo, é deixado problemas semelhantes aos resolvidos anteriormente para serem solucionados pelo leitor. Esses problemas foram extraídos de materiais de treinamentos olímpicos ou até mesmo das próprias competições, tanto nacionais quanto internacionais.

Antes de apresentar o artigo, será feita uma breve introdução sobre as Olimpíadas de Matemática, o treinamento Olímpico mencionado e a Revista “É Matemática, OXENTE!”, para uma melhor contextualização e enriquecimento ao leitor desse trabalho. E também, como o artigo é focado em exemplos e problemas olímpicos, será analisada a importância da Resolução de Problemas conforme as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A relevância em abordar o documento curricular nacional para educação básica citado visa justificar o uso desse artigo como um potencial material didático para alunos do Ensino Médio.

Depois do artigo, isto é, ao final desse capítulo, é apresentado uma proposta de “Sequência Didática”. Essa proposta tem como objetivo sugerir uma forma de organizar e estruturar, de modo sequencial e metodológico, os conteúdos do artigo. Assim, devendo ser coerente com a construção de conhecimentos do estudante e facilitando a aprendizagem do assunto. O planejamento contém: Público-alvo, Tema, Conteúdos Trabalhados, Objetivo, Habilidades da BNCC que estão relacionadas ao conteúdo, Duração e Aulas minuciosamente planejadas.

A ordem das próximas seções desse capítulo são: “Olimpíadas de Matemática”, “Resolução de Problemas”, “Uma Abordagem Olímpica da Progressões Geométricas” e “Sequência Didática”.

2.1 Olimpíadas de Matemática

As Olimpíadas de matemática é uma importante ferramenta para o desenvolvimento educacional e científico, pois, ela “ tem como objetivo estimular o estudo da Matemática, contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, identificar jovens talentos, promover inclusão social e incentivar o aperfeiçoamento dos professores.”([Ministério da Educação - MEC, 2019](#)). Como uma forma de reforçar e incentivar essa competição, foi iniciado em Pernambuco, e em diversas partes do território brasileiro, programas de treinamento, competições regionais e publicações de periódicos que falam exclusivamente desse tema.

De acordo com ([Olimpíada Brasileira de Matemática, 2024](#)), as Olimpíadas de Matemática iniciaram, da forma como conhecemos hoje, na Hungria em 1894. Aos poucos, essa competição foi se espalhando pelo leste Europeu, dessa forma, surgindo a primeira Olimpíada Internacional de Matemática (OIM) que foi realizada na Romênia em 1959. Segundo ([IMO, 2024](#)), a OIM é uma competição mundial de matemática para alunos de Ensino Médio, que conta com a participação de mais de 100 países dos 5 continentes, sendo realizada anualmente e cada ano com um país anfitrião diferente.

No Brasil, a ([Olimpíada Brasileira de Matemática, 2024](#)) informa que a Primeira Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) ocorreu em 1979, organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Atualmente, segundo ([GARCIA, 2017](#)), esse evento também tem o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e o suporte do Ministério da Educação (MEC), a qual é realizada, desde 2017, junto com a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas(OBMEP). Além dessas duas competições principais, alguns estados promovem competições regionais, como, por exemplo, Pernambuco que realiza a Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT). De acordo com ([OPEMAT, 2023](#)), ela acontece desde 2015, sendo uma atividade de extensão da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) que tem como apoio a Associação Olimpíada Brasileira de Matemática (AOBM) e a STONE.

Com a intenção de melhorar a performance dos estudantes na OBM e OBMEP, ([GARCIA, 2017](#)) afirma que a organização responsável por essas competições juntamente com o IMPA criaram, em 2012, o Programa Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI). Ele ainda declara que o programa oferece aulas presenciais uma vez por semana, em alguns dos seus polos, as quais podem ser acessadas por qualquer aluno regularmente matriculado na rede de Ensino Básico a partir oitavo do ensino fundamental até o terceiro

ano do Ensino Médio. Há diversos polos espalhado na maioria dos estados brasileiros, em Pernambuco o polo presencial fica no Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Além dessas aulas presenciais, no portal <<https://poti.impa.br/>> há materiais didáticos disponíveis gratuitamente, como videoaulas, material teórico e listas de problemas.

Como outra forma de estimular os alunos a participarem das Olimpíadas, o departamento de Matemática da UFRPE criou o jornal “É Matemática, Oxente!”. Seu conteúdo, de acordo com o site do próprio jornal, “traz artigos com linguagem acessível, teoria reduzida, enfocando principalmente em exemplos e exercícios. Além de apresentar matérias sobre curiosidades em matemática, recomendação de livros/filmes, bem como problemas propostos e suas resoluções.”([É Matemática, OXENTE! O jornal de Matemática Olímpica, 2024](#)).

Como podemos ver, há diversas atividades e estímulos, como os periódico “É Matemática, Oxente!”, para incentivar a participação nas Olimpíadas de matemática, pois esse processo eleva o padrão de ensino de matemática no país. Essa competição tem, como característica principal, a resolução de problemas. A resolução de problemas é vista como uma importante metodologia de ensino da matemática pela BNCC e defendida por diversos estudiosos, que veremos no tópico a seguir.

2.2 Resolução de Problemas

A resolução de Problemas é “uma das principais metodologias de ensino para o desenvolvimento dos conteúdos (objetos de conhecimento) matemáticos em sala de aula.”([MARTINS; VIANA; COSTA, 2023](#)). George Polya, um renomado matemático húngaro, que teve uma considerável contribuição para educação matemática, destaca, em seu livro *A arte de resolver problemas* ([POLYA, 1945](#)), a importância da resolução de problemas no ensino da matemática. Polya acreditava que “o problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.”([POLYA, 1945](#)). Também é de extrema importância que os problemas sejam diversificados, explorados em contextos distintos, pois, essa variedade, pode “levar o aluno a elaborar conjecturas, estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões e a capacidade de argumentação”, segundo ([MILANI, 2011](#)).

Para a BNCC, a resolução de problemas é um processo matemático que pode ser citado como uma das “formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem”([BRASIL, 2018](#), p.266) no Ensino Fundamental. Além do mais, o documento considera a resolução de problemas, juntamente com outros processos de aprendizagem, como uma metodologia potencialmente

rica para o desenvolvimento do raciocínio, representação, comunicação, argumentação e pensamento computacional. Aparecendo no documento em competências e habilidades específicas a serem desenvolvidas ao longo de toda Educação Básica. A seguir iremos apresentar cada competência e habilidade.

Na BNCC do Ensino Fundamental, as competências específicas falam sobre resolução de problemas nos seguintes contextos:

1. Científico e tecnológico.

Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p.267)

2. Cotidiano e social.

Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. (BRASIL, 2018, p.267)

3. Que não estão diretamente relacionados situações práticas do cotidiano.

Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). (BRASIL, 2018, p.267)

4. Aprender a trabalhar de forma cooperativa.

Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2018, p.267)

Já no Ensino Médio, as competências específicas, segundo a BNCC, apresenta a resolução de problemas com o intuito de aprofundar e explorar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental. Para isso, o documento recomenda a utilização de estratégias, ações investigativas e de busca de solução em diferentes registros de representação matemática.

Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (BRASIL, 2018, p.531)

No que se concerne as habilidades específicas da BNCC, a resolução de problemas aparece em todos os anos do Ensino Básico, sendo citada 63 vezes nas habilidades do ensino fundamental e 30 vezes no Ensino Médio. Citada, inclusive, no conteúdo que será trabalhado nesse artigo, as Progressões Geométricas. Tal habilidade já citada anteriormente em 1.1.

Como podemos ver, a Resolução de Problemas é uma estratégia de aprendizagem importante para o ensino da matemática na educação básica, ideia defendida tanto pela BNCC quanto por estudiosos na área, como George Polya. Esse método de aquisição de conhecimento ajuda no desenvolvimento do raciocínio lógico e na comunicação social e computacional. Assim, nota-se que é de extrema importância trabalhar com os alunos problemas diversificados e complexos (que envolvam vários assuntos), algo que as Olimpíadas de Matemática, seus treinamentos e os seus estímulos de leitura oferecem para professores e alunos da Recde Básica de Ensino.

Nessa próxima seção, será apresentada uma versão expandida do artigo.

2.3 Uma Abordagem Olímpica das Progressões Geométricas

2.3.1 Introdução

Ao longo das últimas edições do jornal “É Matemática, Oxente!”, diversos esforços foram feitos com o intuito da propagação de conhecimentos no tema das Sequências Numéricas, assunto central da área de Álgebra dentro das Olimpíadas de Matemática. No artigo (ARAÚJO; SANTOS, 2022) as autoras trazem um detalhamento sobre recorrências lineares de primeira e segunda ordem, seus métodos de resolução e como aplicar estes resultados a problemas sobre sequências numéricas, em especial, dando ênfase à sequência de Fibonacci. Já no artigo, (VITAL; TANAKA; GUEDES, 2023) há uma abordagem sobre

Progressão Aritmética nas Olimpíadas nacionais e internacionais, fazendo um destaque no objeto definido no artigo como o *Triângulo Aritmético de Números Ímpares*, que é uma estrutura de números ímpares organizados em formato triangular como no Triângulo de Pascal. Em seguida, trabalhando os diversos conceitos de Progressões Aritméticas de primeira e segunda ordens. De modo indireto, sob a perspectiva dos estudo dos fractais, em (FILHO; ALBUQUERQUE, 2019) há diversos exemplos e problemas propostos que utilizam o conceito de Progressão Geométrica em suas soluções, porém sem um detalhamento sobre o tema em si. Ainda sobre o artigo de fractais, dentre os problemas trazidos há alguns extraídos da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT), então recomendamos fortemente para todos que participam desta olimpíada.

Neste artigo traremos um detalhamento sobre o tema das Progressões Geométricas (PGs) fazendo uma abordagem com problemas retirados das Olimpíadas, de vestibulares e de materiais de programas de treinamentos olímpicos nacionais e internacionais, seguindo uma linha similar às dos artigos (VITAL; TANAKA; GUEDES, 2023; ARAÚJO; SANTOS, 2022).

A escrita desenvolvida neste artigo visa uma abordagem que estabeleça uma relação estreita entre os conceitos envolvidos com o tema e como aplicá-los para solucionar problemas que tenham um perfil olímpico ou de concurso, além de trazer possibilidades distintas de soluções utilizando diferentes recursos. Assim, o trabalho pode ser facilmente utilizado, com ou sem adaptação, como fonte de estudo e pesquisa para discentes e docentes interessados tanto no tema das Progressões Geométricas em si, quanto na sua relação com a matemática olímpica.

2.3.2 Conceitos e Propriedades

As *Progressões Geométricas* são sequências numéricas em que há uma *Recorrência de Primeira Ordem*, precisamente, há uma relação envolvendo dois termos consecutivos, a qual explanaremos em breve. Sobre o tema das sequências recorrentes, convidamos o(a) leitor(a) para a leitura do artigo (ARAÚJO; SANTOS, 2022). As PGs são casos particulares de recorrências de primeira ordem da forma

$$a_n = f(n)a_{n-1}, \quad (2.1)$$

no caso em que $f(n)$ é constante. Apesar de já estar definida pelo comentário anterior, mas uma vez que essa definição é a principal do trabalho, escreveremos a definição de uma PG.

Definição 2.1 (Progressão Geométrica (PG)). Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ é uma PG quando satisfaz a recorrência $a_n = qa_{n-1}$, para todo $n \geq 2$. A constante q é chamada *Razão da PG*.

Observação 2.2. Para o intuito deste trabalho, vamos desconsiderar PGs nas quais $q \in \{0, 1\}$.

Exemplo 2.3. Seja um triângulo equilátero de lado a . A partir dele, considere um novo triângulo cujos vértices são os pontos médios de cada lado do primeiro. Obtemos assim um novo triângulo equilátero de lado $a/2$. Procedendo similarmente, obtemos um terceiro triângulo equilátero de lado $a/4$. Veja figura.

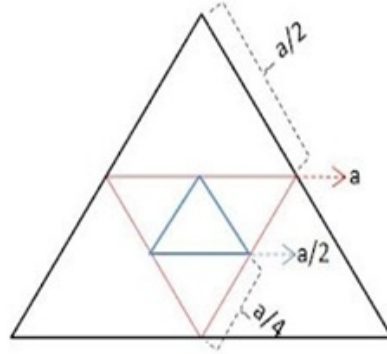


Figura 1 – Triângulos Equiláteros cuja medida de seus lados são os termos de uma P.G. de razão $1/2$.

Repetindo este procedimento, obtemos a PG $(a, a/2, a/4, \dots, a/2^{n-1}, \dots)$, em que cada termo representa a medida dos lados dos triângulos equiláteros construídos neste processo.

É possível utilizar o argumento de *Produtos Telescópicos* para encontrar uma expressão para o n -ésimo termo da sequência dada em (2.1), em termos do parâmetro n relativo à posição do termo, é o que chamamos de *Lei de Formação* ou *Fórmula do Termo Geral*. O argumento de *Produtos Telescópicos* são produtos nos quais os termos intermediários são cancelados e, no final, restam apenas o primeiro e o último termos. Veja mais sobre *Produtos Telescópicos* em ([Material POTI - Sequências, s.d.](#); [Portal da Matemática OBMEP: Material Teórico - Tópicos Adicionais - Recorrências - Parte 2, s.d.](#)). Veremos a utilização desse argumento a seguir.

Escrevendo sucessivamente todos os termos da expressão em (2.1) desde a_n até o termo a_{p+1} , com $p + 1 < n$, vamos obter

$$\begin{aligned}
 a_n &= f(n)a_{n-1} \\
 a_{n-1} &= f(n-1)a_{n-2} \\
 &\vdots \\
 a_{p+2} &= f(p+1)a_{p+1} \\
 a_{p+1} &= f(p)a_p.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Fazendo o produto dos termos escritos em (2.2) no mesmo sentido da igualdade, ou seja, efetuando o produto de todos os termos do lado esquerdo e do lado direito da igualdade, podemos usar a lei do cancelamento sistematicamente, simplificando o termo do lado direito da igualdade de uma linha superior com o termo do lado esquerdo da linha imediatamente inferior,

$$\begin{aligned}
 a_n &= f(n) \cancel{a_{n-1}} \\
 \cancel{a_{n-1}} &= f(n-1) \cancel{a_{n-2}} \\
 &\vdots \\
 \cancel{a_{p+2}} &= f(p+1) \cancel{a_{p+1}} \\
 \cancel{a_{p+1}} &= f(p) a_p.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dessa forma, obtemos

$$a_n = a_p \prod_{i=p}^n f(i). \tag{2.4}$$

Observação 2.4. Perceba que a expressão obtida em (2.4) é relativa a uma recorrência dada por (2.1). Isso significa que para encontrar o termo geral de expressões com tal formato, precisaremos sempre determinar uma fórmula para o produtório $\prod_{i=p}^n f(i)$.

Sendo as PGs casos particulares de (2.1), em que $f(i) = q$ para todo i , então, nessa situação, podemos escrever (2.4) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_p \prod_{i=p}^n q \\
 &= a_p \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n-p \text{ vezes}} \\
 &= a_p q^{n-p},
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

que é usualmente conhecida como *Fórmula Generalizada do Termo Geral da PG*. No caso particular $p = 1$ (que é equivalente a desenvolver a expressão em (2.2) até o termo a_2), obteríamos

$$a_n = a_1 q^{n-1} \tag{2.6}$$

cuja expressão conhecemos por *Fórmula do Termo Geral de uma PG* ou *Lei de Formação da PG*.

Nosso próximo exemplo trará a noção de PG relacionada com o assunto de Geometria. Ela está como uma questão não resolvida do material do projeto olímpico do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) chamado Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI). Esse projeto é um dos maiores treinamentos de matemática olímpica no contexto nacional e totalmente gratuito. Para conhecer o projeto veja ([Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo, 2012](#)).

Exemplo 2.5 (Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), Álgebra, Nível 2, Recorrência, ([Material POTI - Recorrências - Parte I, s.d.](#))). Prove que, quando os lados de um triângulo estão em PG, o mesmo ocorre para as alturas.

Solução. Sejam a_1 , a_2 e a_3 , os três lados do triângulo que estão, nesta ordem, em PG, e h_1 , h_2 e h_3 as alturas relativas a cada um desses lados, respectivamente. Por estarem em PG, $a_2 = a_1q$ e $a_3 = a_2q$, com q a razão da PG. Além disso, como a área de um triângulo pode ser calculada por meio da metade do produto entre a base e a altura relativa a esta base, então:

$$\text{Área} = \frac{a_1 \cdot h_1}{2} = \frac{a_2 \cdot h_2}{2} = \frac{a_3 \cdot h_3}{2}. \quad (2.7)$$

Por meio da segunda igualdade em (2.7),

$$\begin{aligned} \frac{a_1 \cdot h_1}{2} = \frac{a_2 \cdot h_2}{2} &\Rightarrow \frac{a_1 \cdot h_1}{2} = \frac{a_1 q \cdot h_2}{2} \\ &\Rightarrow h_1 = q \cdot h_2. \end{aligned}$$

Pela última igualdade em (2.7),

$$\begin{aligned} \frac{a_2 \cdot h_2}{2} = \frac{a_3 \cdot h_3}{2} &\Rightarrow \frac{a_2 \cdot h_2}{2} = \frac{a_2 q \cdot h_3}{2} \\ &\Rightarrow h_2 = q \cdot h_3, \end{aligned}$$

assim, h_1 , h_2 e h_3 , nesta ordem, formam uma PG cuja razão igual a $\frac{1}{q}$. Ou também, h_3 , h_2 , h_1 , nesta ordem, formam uma PG de razão q . $\square$

Nosso segundo exemplo foi retirado de uma das provas seletivas da Índia para a equipe que representa o país na *International Mathematic Olympiad (IMO)*.

Exemplo 2.6 (*Pre-Regional Mathematical Olympiad (Pre-RMO)*, 2017, Problema 5, ([Pre-Regional Mathematical Olympiad, 2017](#))). Sejam u , v , w números reais em progressão geométrica tais que $u > v > w$. Suponha que

$$u^{40} = v^n = w^{60},$$

determine o valor de n .

Solução. Como os números reais u , v e w formam uma PG de três termos, então podemos reescrever u e w em função de v da seguinte forma: $u = \frac{v}{q}$ e $w = vq$, onde q é a razão da PG. Substituindo na identidade dada no enunciado,

$$\left(\frac{v}{q}\right)^{40} = v^n = (vq)^{60}. \quad (2.8)$$

Pela primeira igualdade em (2.8) e utilizando as propriedades da potência,

$$\begin{aligned} \left(\frac{v}{q}\right)^{40} = v^n &\Rightarrow v^{40-n} = q^{40} \\ &\Rightarrow v^{\frac{40-n}{40}} = q. \end{aligned}$$

Analogamente, pela segunda igualdade em (2.8),

$$\begin{aligned} v^n = (vq)^{60} &\Rightarrow v^{n-60} = q^{60} \\ &\Rightarrow v^{\frac{n-60}{60}} = q. \end{aligned}$$

Segue que

$$v^{\frac{40-n}{40}} = v^{\frac{n-60}{60}}$$

e como as bases dessas potências são iguais, para que a igualdade seja válida, os expoentes também devem ser iguais, então

$$\begin{aligned} \frac{40-n}{40} &= \frac{n-60}{60} \Rightarrow 4n - 240 = 240 - 6n \\ &\Rightarrow 10n = 480 \\ &\Rightarrow n = 48. \end{aligned}$$

□

A seguir, apenas utilizando os conceitos iniciais, provaremos o resultado sobre produto de termos.

Exemplo 2.7. Seja P_n o produto dos n primeiros termos de uma PG, ou seja,

$$P_n = \prod_{j=1}^n a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Mostre que $P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Solução. Utilizando (2.6) para cada um dos termos do produto,

$$\begin{aligned} P_n &= a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \\ &= a_1 \cdot (a_1 q) \cdot \dots \cdot (a_1 q^{n-2}) \cdot (a_1 q^{n-1}) \\ &= a_1^n q^{1+2+\dots+n-2+n-1} \\ &= a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}. \end{aligned}$$

Na última igualdade usamos que a soma dos $n-1$ primeiros números naturais é dada por

$$1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

O argumento de produtos telescópicos utilizado para obter as fórmulas (2.5) e (2.6) também tem sua importância no contexto olímpico. Esse argumento é uma ferramenta que permite a resolução de questões envolvendo sequências que possuam em sua recorrência com o princípio multiplicativo igual ou similar das PGs, como veremos a seguir do problema extraído da *American Mathematics Competition*. Essa última é uma competição estadunidense e que também funciona como uma seletiva para determinar a equipe olímpica dos Estados Unidos que irá competir nas Olimpíadas Internacionais de Matemática.

Exemplo 2.8 (*American Mathematics Competition* (AMC), 1999, 12, Problema 13, ([Art of Problem Solving, 1999](#))). Defina uma sequência de números reais $a_1, a_2, a_3, \dots$ por $a_1 = 1$ e $a_{n+1}^3 = 99a_n^3$, para todo $n \geq 1$. Determine o valor de a_{100} .

Solução 1. Utilizando a recorrência, escrevemos todas as relações desde a_{100} até a_2 ,

$$\begin{aligned} a_{100}^3 &= 99 \cdot a_{99}^3 \\ a_{99}^3 &= 99 \cdot a_{98}^3 \\ &\vdots \\ a_3^3 &= 99 \cdot a_2^3 \\ a_2^3 &= 99 \cdot a_1^3. \end{aligned}$$

Vamos proceder como em (2.3), fazendo o produto telescópico e cancelando sistematicamente o termo do lado direito da igualdade com o termo da linha imediatamente inferior que está do lado esquerdo,

$$\begin{aligned} a_{100}^3 &= 99 \cdot \cancel{a_{99}^3} \\ \cancel{a_{99}^3} &= 99 \cdot \cancel{a_{98}^3} \\ &\vdots \\ \cancel{a_3^3} &= 99 \cdot \cancel{a_2^3} \\ \cancel{a_2^3} &= 99 \cdot a_1^3, \end{aligned}$$

de modo a obter

$$a_{100}^3 = 99^{99} \cdot a_1^3.$$

Como $a_1 = 1$, então $a_{100}^3 = 99^{99}$, portanto $a_{100} = \sqrt[3]{99^{99}} = 99^{33}$. $\square$

Solução 2. Extraíndo a raiz cúbica em ambos lados da identidade $a_{n+1}^3 = 99a_n^3$, obtemos

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{99}a_n,$$

portanto, via Definição 2.1, a sequência é uma PG em que $a_1 = 1$ e $q = \sqrt[3]{99}$. Pela Fórmula do Termo Geral (2.6),

$$a_{100} = a_1 q^{99} = 1 \cdot \left(\sqrt[3]{99}\right)^{99} = 99^{33}.$$

$\square$

O exemplo a seguir, extraído do Banco de Questões preparatórias para a Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas de 2018, nos dá uma perspectiva de como o assunto se relaciona com a área de Teoria dos Números.

Exemplo 2.9 (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), Banco de Questões, 2018, Problema 26, ([OBMEP Banco de Questões 2018, 2018](#))). Os números 10, 11 e 12 podem pertencer a uma mesma progressão geométrica?

Solução. Vamos supor, por absurdo, que 10, 11 e 12 fazem parte de uma mesma PG de razão q . Considere r , s e t números naturais distintos, tais que:

$$10 = a_{r+1} = a_1 \cdot q^r \Rightarrow a_1 = \frac{10}{q^r}, \quad (2.9)$$

$$11 = a_{s+1} = a_1 \cdot q^s \Rightarrow a_1 = \frac{11}{q^s}, \quad (2.10)$$

$$12 = a_{t+1} = a_1 \cdot q^t \Rightarrow a_1 = \frac{12}{q^t}. \quad (2.11)$$

Daí, igualando as frações (2.9) e (2.10):

$$\begin{aligned} \frac{10}{q^r} = \frac{11}{q^s} &\Rightarrow \frac{q^s}{q^r} = \frac{11}{10} \\ &\Rightarrow q^{s-r} = \frac{11}{10}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

E as frações (2.10) e (2.11):

$$\begin{aligned} \frac{11}{q^s} = \frac{12}{q^t} &\Rightarrow \frac{q^t}{q^s} = \frac{12}{11} \\ &\Rightarrow q^{t-s} = \frac{12}{11}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Objetivando que os expoentes da razão q fiquem iguais, elevaremos o resultado obtido em (2.12) a $t-s$ e o resultado de (2.13) a $s-r$,

$$\left(\frac{12}{11}\right)^{s-r} = q^{(t-s)(s-r)} = \left(\frac{11}{10}\right)^{t-s}.$$

Utilizando o primeiro e o último termo da igualdade acima temos,

$$\begin{aligned} 10^{t-s} \cdot 12^{s-r} &= 11^{t-s} \cdot 11^{s-r} \\ \Rightarrow 10^{t-s} \cdot 12^{s-r} &= 11^{(t-s)+(s-r)} \\ \Rightarrow (2 \cdot 5)^{t-s} \cdot (2^2 \cdot 3)^{s-r} &= 11^{t-r} \\ \Rightarrow 2^{t+s-2r} \cdot 3^{s-r} \cdot 5^{t-s} &= 11^{t-r} \\ \Rightarrow 2^{t+s-2r} \cdot 3^{s-r} \cdot 5^{t-s} \cdot 11^{r-t} &= 1. \end{aligned}$$

A identidade acima nos diz que estamos escrevendo o número 1 como produto de potências dos números primos 2, 3, 5 e 11, portanto, a única solução ocorre quando todos os expoentes são nulos formando o seguinte sistema:

$$\begin{cases} r - t &= 0 \\ t + s - 2r &= 0 \\ s - r &= 0 \\ t - s &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r &= t \\ s &= r \\ t &= s \end{cases}.$$

Ou seja, $r = s = t$, um absurdo, pois supomos inicialmente que r , s e t eram números naturais distintos. Logo, 10, 11 e 12 não podem pertencer a uma mesma PG. $\square$

Uma PG de termos positivos e cuja razão é maior do que 1, possui um rápido crescimento, mas é rápido mesmo! Por exemplo, você aceitaria trabalhar em um lugar que lhe pagassem 1 centavo, mas dobrassem o seu salário a cada mês? Sem pensar muito, a resposta provável seria um belo “não!”, porquanto você notou que nos primeiros meses de ofício, iria receber em reais $a_1 = 0,01$, $a_2 = 0,02$, $a_3 = 0,04$, $a_4 = 0,08$, $a_5 = 0,16$, nesse ponto você já recusaria de imediato. Mas usando a expressão dada em (2.6), teríamos

$$a_{30} = 0,01 \cdot 2^{29} = 5.368.709,12,$$

ou seja, em cerca de 30 meses você estaria, provavelmente, recebendo um dos maiores salários do mundo.

Esta questão também é abordada no famoso e incrível livro “O Homem que Calculava” (TAHAM, 1981), do autor Malba Tahan, pseudônimo do brasileiro Júlio César de Mello e Souza, quando traz uma lenda sobre o pagamento pela criação do jogo de xadrez. Não vamos dar nenhum “spoiler” sobre o livro. Convidamos vocês à leitura do breve texto na revista É Matemática, Oxente! sobre esta obra na edição de Setembro de 2018 (MELO, 2018), assim como a leitura deste livro.

2.3.2.1 Soma dos Termos de uma PG

Agora investigaremos como somar os primeiros termos de uma PG e, em uma situação especial, veremos até mesmo a soma para infinitos termos.

Considere S_n , a soma dos n primeiros termos de uma PG, ou seja,

$$S_n = \sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Nosso objetivo será encontrar uma expressão que nos permita descobrir S_n sem a necessidade de desenvolver todos os n cálculos de cada termo.

Note que, para $q \neq 1$

$$\begin{aligned} qS_n &= q \sum_{j=1}^n a_j = q(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) \\ &= a_1q + a_2q + \dots + a_{n-1}q + a_nq \\ &= a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_nq, \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} S_n(q-1) &= qS_n - S_n \\ &= \cancel{a_1q} + \cancel{a_2q} + \dots + \cancel{a_{n-1}q} + a_nq \\ &\quad - (a_1 + \cancel{a_2} + \dots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n}) \\ &= a_nq - a_1. \end{aligned}$$

Reorganizando a expressão obtemos:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1},$$

ou seja, quando for conveniente, podemos utilizar a expressão do termo geral em a_n de modo a obter uma expressão para S_n apenas em função de a_1 e q , com $q \neq 1$,

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}. \quad (2.14)$$

Veremos como aplicar estes conceitos resolvendo o seguinte problema da Olimpíada Cearense de Matemática.

Exemplo 2.10 (Olimpíada Cearense de Matemática (OCM), 1991). Determine a soma dos n primeiros termos da sequência: $1, 1+2, 1+2+2^2, 1+2+2^2+2^3, \dots, 1+2+2^2+2^3+\dots+2^{k-1}$.

Solução. Para uma melhor visualização, escrevemos os termos da sequência até a posição n ,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 + 2 \\ a_3 &= 1 + 2 + 2^2 \\ &\vdots \\ a_{n-2} &= 1 + 2 + \dots + 2^{n-3} \\ a_{n-1} &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} \\ a_n &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Podemos observar que cada a_k (linha) corresponde a soma dos k primeiros termos de uma PG, cujo primeiro termo é igual a 1 e a razão é igual a 2. Assim, cada termo a_k corresponde a soma dos k primeiros termos da sequência descrita anteriormente. Utilizando a fórmula dada em (2.14),

$$a_k = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = \frac{1 \cdot (2^k - 1)}{2 - 1} = 2^k - 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2^1 - 1 \\ a_2 &= 2^2 - 1 \\ a_3 &= 2^3 - 1 \\ &\vdots \\ a_{n-2} &= 2^{n-2} - 1 \\ a_{n-1} &= 2^{n-1} - 1 \\ a_n &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

Somando todos os termos acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 & a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\
 &= 2^1 - 1 + 2^2 - 1 + \dots + 2^{n-1} - 1 + 2^n - 1 \\
 &= (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n) - n \\
 &= \frac{2^1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} - n \\
 &= 2^{n+1} - (n + 2).
 \end{aligned}$$

Na penúltima igualdade usamos, novamente, a soma dos termos de uma PG cujo primeiro termo e a razão são iguais a 2. $\square$

Exemplo 2.11 (OBMEP - Banco de Questões 2014, Problema 10, ([OBMEP Banco de Questões 2014](#), [2014](#))). Calcule a soma

$$1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + \underbrace{111\dots 11}_{n \text{ 1's}}.$$

Solução. Reescreveremos os termos da sequência como somas de potências de 10 até a posição n .

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 10^0 \\
 a_2 &= 10^0 + 10^1 \\
 a_3 &= 10^0 + 10^1 + 10^2 \\
 &\vdots \\
 a_{n-2} &= 10^0 + 10^1 + \dots + 10^{n-3} \\
 a_{n-1} &= 10^0 + 10^1 + \dots + 10^{n-2} \\
 a_n &= 10^0 + 10^1 + \dots + 10^{n-2} + 10^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Note que cada a_j (linha) corresponde a soma dos j primeiros termos de uma PG, no qual o primeiro termo é 10^0 e a razão é 10. Portanto, usando a fórmula dada em ([2.14](#)),

$$a_j = \frac{10^0 \cdot (10^j - 1)}{10 - 1} = \frac{10^j - 1}{9} = \frac{10^j}{9} - \frac{1}{9},$$

com $1 \leq j \leq n$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{10^1}{9} - \frac{1}{9} \\
 a_2 &= \frac{10^2}{9} - \frac{1}{9} \\
 a_3 &= \frac{10^3}{9} - \frac{1}{9} \\
 &\vdots \\
 a_{n-2} &= \frac{10^{n-2}}{9} - \frac{1}{9} \\
 a_{n-1} &= \frac{10^{n-1}}{9} - \frac{1}{9} \\
 a_n &= \frac{10^n}{9} - \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

e somando todos os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
 &a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\
 &= \frac{10^1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{10^2}{9} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{10^n}{9} - \frac{1}{9} \\
 &= \left(\frac{10^1}{9} + \frac{10^2}{9} + \dots + \frac{10^n}{9} \right) - \frac{n}{9} \\
 &= \frac{\frac{10^1 \cdot (10^n - 1)}{10 - 1}}{9} - \frac{n}{9} \\
 &= \frac{10}{81} \cdot (10^n - 1) - \frac{n}{9}.
 \end{aligned}$$

Perceba que no numerador utilizamos novamente a soma dos termos da PG, cujo primeiro termo e a razão são iguais a 10. $\square$

Observação 2.12. Essa questão traz um ponto bastante importante. Se um número A na base 10 tem escrita da forma $\underbrace{aaa\dots aaa}_{n \text{ dígitos } a}$, então podemos escrever

$$\begin{aligned}
 A &= \underbrace{aaa\dots aaa}_{n \text{ dígitos } a} = a \cdot \underbrace{111\dots 111}_{n \text{ dígitos } 1} \\
 &= \frac{a}{9} \cdot \underbrace{999\dots 999}_{n \text{ dígitos } 9} = \frac{a}{9} \cdot (10^n - 1).
 \end{aligned}$$

Se por um lado razões maiores do que um possuem crescimento rápido, se agora a razão q satisfaz $-1 < q < 1$, ou seja, $|q| < 1$, podemos calcular até mesmo a soma de infinitos termos de uma PG, denotada por S_∞ . Não aprofundaremos aqui, pois há a

necessidade do conceito de limite de seqüências. Entenderemos esse fato por meio de uma noção intuitiva de pensamento. Se a razão é tal que $0 < |q| < 1$, então multiplicando por $|q|$, teremos $0 < |q|^2 < |q| < 1$. Refazendo esse passo sucessivas vezes concluímos que $0 < |q|^n < |q|^{n-1} < \dots < |q|^2 < |q| < 1$, isso significa que as potências de $|q|^n$ estão ficando cada vez menores. Vamos considerar um exemplo particular apenas para ilustração. Se $q = 0,1$, perceba que $q^2 = 0,01$, $q^3 = 0,001$, de modo que

$$q^n = \underbrace{0,00\dots001}_{n \text{ zeros}}.$$

Você consegue perceber para qual valor q^n está “convergindo”? O que acontece, não provaremos aqui, contudo note que se n tende a infinito (corresponderia a somar infinitos termos em S_n), então $|q|^n$ fica cada vez menor e tende para zero, de modo que ao considerarmos a soma dos infinitos termos teremos:

$$S_\infty = \frac{a_1(0-1)}{q-1} = \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}. \quad (2.15)$$

Vejamos uma aplicação em um exemplo extraído do ITA.

Exemplo 2.13 (Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), 1975, Problema 13, (QUESTÕES..., 1975)). A expressão $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots$ vale

- a) 4 b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{7}{2}$ d) 3,8 e) NDA.

Solução. Para facilitar a visualização, vamos escrever os denominadores da expressão em forma de potência de 2,

$$\frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots$$

Podemos observar que os numeradores e os denominadores estão determinando duas seqüências. Nos numeradores, a seqüência é uma PA de razão 1, cujo n -ésimo termo é n . Já nos denominadores, há uma PG de razão 2, na qual o n -ésimo termo é 2^{n-1} . Assim, cada termo do somatório é o produto dos n -ésimos termos de uma PA com uma PG. Denotando por S a soma inicial, perceba que podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S = & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ & + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ & + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\ & + \dots + \\ & + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}}_{n-1 \text{ vezes}} + \dots \end{aligned}$$

Podemos reescrever S da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots\right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-3}} + \dots\right) + \dots \end{aligned}$$

Note que, dentro de cada parênteses, há uma soma infinita de termos de uma PG, e todas as PGs possuem razão igual a $\frac{1}{2}$. Assim, usando (2.15) obtemos:

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}}\right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}}\right) + \dots \\ &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \dots \\ &= \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4, \end{aligned}$$

Resposta letra a. □

Exemplo 2.14 (*American Mathematics Competitions (AMC)*, 2016, Problemas 12B, Problema 14, modificado, (Art of Problem Solving, 2016)). Em uma PG cujo segundo termo é igual a 1 e a soma infinita dos termos é positiva, qual é o menor valor possível para essa soma?

Solução. Seja q a razão da PG. Como $a_2 = 1$, então pela recorrência

$$a_2 = a_1 \cdot q = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{q}.$$

Por (2.15) a soma da PG infinita é

$$S_{\infty} = \frac{\frac{1}{q}}{1 - q} = \frac{1}{q \cdot (1 - q)}.$$

Como por hipótese esta soma é positiva, então

$$\begin{aligned} S_{\infty} \geq 0 &\Rightarrow \frac{1}{q \cdot (1 - q)} \geq 0 \\ &\Rightarrow q \cdot (1 - q) \geq 0. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade das Médias, a qual garante que o valor da Média Aritmética entre quaisquer números é maior ou igual ao valor da Média Geométrica entre eles (você pode verificar a demonstração dessa Desigualdade no artigo de Everton Henrique Cardoso de

Lira que foi publicado nesse jornal em 2020 (LIRA, 2020)). Então considerando o caso com dois números, tomando q e $1 - q$, fazendo as médias aritmética e geométrica entre eles e usando a Desigualdade das Médias, obtemos:

$$\frac{q + (1 - q)}{2} \geq \sqrt{q \cdot (1 - q)} \quad (2.16)$$

(observe que faz sentido calcular $\sqrt{q \cdot (1 - q)}$ uma vez que provamos que $q \cdot (1 - q) > 0$). Elevando então a expressão (2.16) ao quadrado, e organizando os termos, vamos obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \geq q \cdot (1 - q) &\Rightarrow \frac{1}{q \cdot (1 - q)} \geq 4 \\ &\Rightarrow S_{\infty} \geq 4. \end{aligned}$$

Portanto, o menor valor assumido pela soma infinita de uma PG com essas condições da hipótese é 4. $\square$

Observação 2.15. Uma questão importante e interessante a observar é que as somas infinitas não são objetos simples, mais precisamente, nem sempre é fácil decidir se uma soma infinita de termos “converge” para um valor finito, e quando houver a convergência, qual é este valor. Por exemplo, considerando a soma infinita:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

intuitivamente, como os termos estão diminuindo cada vez mais, isso nos dá a impressão que se n é muito grande então a contribuição de $\frac{1}{n}$ será muito pequena (e próximo a zero) para esse somatório, o que nos dá a impressão que há um valor “limitante” ao somarmos esses infinitos termos, mas isso não é verdade. O somatório é infinito e é conhecido como Série Harmônica. Recomendamos a leitura do artigo (ÁVILA, ed. 30) para conhecer um pouco mais sobre este objeto. Ainda sobre a observação, é possível escrever as famosas constantes π e e como somatórios infinitos (não nos adentraremos, é a nível de curiosidade) da seguinte forma:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

e

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots \right),$$

o resultado é válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.3.3 Problemas Propostos

Problema 2.1 (Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), 2011, Nível Universitário, Primeira Fase, Problema 1, (Olimpíada Brasileira de Matemática, 2011)). *Calcule o valor de*

$$\sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{\min\{m, n\}}{3^{m+n}}.$$

Problema 2.2 (Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), Álgebra, Nível 2, Sequências, ([Material POTI - Sequências, s.d.](#))). *Uma sequência é definida por $a_1 = 2$ e $a_n = 3a_{n-1} + 1$. Determine a soma $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.*

Dica: Reescreva $a_n - a_{n-1}$ em função de seus termos anteriores, em seguida utilize o argumento de produtos telescópicos.

Problema 2.3 (*Olimpiáda Matemática Española*, Fase Nacional, 2016, Concurso Final, Barcelona, Problema 1, ([LII Olimpiada Matemática Española, 2016](#))). *Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma progressão aritmética e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma progressão geométrica tais que: $a_1 = g_1 \neq 0$, $a_2 = g_2$, $a_{10} = g_3$. Prove que para cada inteiro positivo p existe um inteiro positivo m tal que $g_p = a_m$.*

Dica: Se necessitar de conceitos envolvendo Progressões Aritméticas, veja ([VITAL; TANAKA; GUEDES, 2023](#)).

Problema 2.4 (*Indian Statistical Institute (ISI) entrance Bachelor of Statistics (Honours)*, 2003, Problema 3, modificado, ([Indian Statistical Institute \(ISI\) entrance Bachelor of Statistics \(Honours\) - 2003, Problem 3, 2003](#))). *Suponha que a , b e c são três números reais distintos que estão, nesta ordem, em PG e satisfazem*

$$a + b + c = xb.$$

Prove que $x < -1$ ou $x > 3$.

Problema 2.5 (Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), Álgebra, Nível 2, Recorrência, ([Material POTI - Recorrências - Parte I, s.d.](#))). *Seja (a_n) uma PG e P_n o produto dos n primeiros termos de uma PG. Mostre que $P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$.*

Problema 2.6 (*Olimpiáda Pernambucana de Matemática (OPEMAT)*, 2016, nível 3, Problema 8, ([Olimpiáda Pernambucana de Matemática, 2016](#))). *Um tapete de Sierpinski pode ser construído da seguinte forma: A partir de um quadrado de lado 1 dividimos cada lado em k partes iguais onde k é ímpar e maior ou igual a 3, dividindo assim o quadrado de lado 1 em k^2 subquadrados iguais. Remova o subquadrado central. Agora divida cada um dos subquadrados restantes novamente em k^2 subquadrados iguais e novamente remova os subquadrados centrais. Repita o processo em cada um dos novos subquadrados restantes e assim por diante. O Tapete de Sierpinski é a figura que sobra após a remoção dos subquadrados em cada etapa. Qual a área do tapete de Sierpinski?*

Problema 2.7 (Revista Professor de Matemática (RPM), Logaritmos - Um curso alternativo, Problemas Básicos, 2ª ilustração, ([FRAENKEL, Rio de Janeiro](#))). *Quantos quadrados são necessários para “cobrir” o Brasil, supondo o processo indicado na figura em que o quadradinho inicial tem 1 cm de lado e o quadrado externo tem lado igual a 4.500 km?*



Figura 2 – Representação do Mapa do Brasil em um quadrado que tem lados medindo 4500 km e o quadrado interno menor mede 1 cm.

Problema 2.8 (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) - Banco de Questões 2018, Problema 10, (OBMEP Banco de Questões 2018, 2018)). *Um jogo é composto das seguintes regras:*

- (i) *Em cada rodada, ocorre o lançamento de um dado comum não viciado.*
- (ii) *Se sair o número 3, então o jogador A ganha.*
- (iii) *Se sair um dos números do conjunto $\{4, 5, 6\}$, então o jogador B ganha.*
- (iv) *Se sair um dos números do conjunto $\{1, 2\}$, então o dado é lançado outra vez até resultar em 3 ou 4 ou 5 ou 6.*

Qual a probabilidade do jogador B vencer?

2.3.4 Agradecimentos

A autora e os autores agradecem o apoio do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) nos projetos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), Polo Recife e no Projeto de Extensão da UFRPE Polo de Treinamento Olímpico em Matemática (PTOM - UFRPE). Agradecem também ao Programa de Pós - Graduação de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) por todo o apoio e suporte.

Aqui finaliza a versão estendida do artigo.

2.4 Sequência Didática

Direcionaremos uma proposta de Sequência Didática a ser aplicada no Ensino Básico.

- **Público-alvo:** Alunos a partir do 1º ano do Ensino Médio.

- **Tema:** Progressões Geométricas e Resolução de Problemas.
- **Conteúdos trabalhados:** Conceitos e propriedades de Progressões Geométricas. Somas dos termos de uma PG.
- **Objetivo:** Fazer uma abordagem aprofundada e detalhada sobre Progressões Geométricas, usando problemas retirados das Olimpíadas, de vestibulares e de materiais de programas de treinamentos olímpicos nacionais e internacionais com o intuito de fornecer uma abordagem olímpica sobre o tema com a metodologia da resolução de problemas.
- **Habilidades (BNCC, (BRASIL, 2018, p.541)):**

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

- **Materiais necessários:** Cópias do artigo *Uma Abordagem Olímpica das Progressões Geométricas* do periódico *Jornal É Matemática, Oxente!*; Um projetor para exibir os exemplos e problemas; Quadro branco e piloto para resolução dos exemplos e problemas; E materiais escolares como caneta, lápis, caderno e borracha para os alunos resolverem os problemas.
- **Duração:** 10 aulas de 50 minutos. As aulas podem ser unidas em duas ou mais aulas, unindo também as metas de cada aula.

- **Aula 1**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos.

Será fornecido aos alunos cópias do artigo. Será feita uma breve introdução sobre as Olimpíadas, progressões geométricas e o que será abordado na aula.

Será dado de forma expositiva a definição de PG e feito o Exemplo 2.3. Em seguida, falaremos da Fórmula do Termo Geral da PG e da Fórmula generalizada do Termo Geral da PG. E finalizaremos essa aula resolvendo o Exemplo 2.5.

- **Aula 2**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e com as cópias do artigo fornecidas na primeira aula.

Será feita uma breve revisão do que foi dado na aula anterior, em seguida faremos os Exemplos 2.6, 2.7 e 2.8.

- **Aula 3**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e com as cópias do artigo.

Será feita uma breve revisão do que foi visto de PG até esse momento e faremos o Exemplo 2.9.

Falaremos sobre PG de razão maior que 1 e sobre a questão abordada no livro “O Homem que Calculava”.

- **Aula 4**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e com as cópias do artigo.

Será dado de forma expositiva sobre A Soma dos Termos de uma PG e faremos o Exemplo 2.10.

- **Aula 5**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e com as cópias do artigo.

Será feita uma breve revisão do que foi dado sobre A Soma dos Termos de uma PG e em seguida faremos os Exemplo 2.11, Observação 2.12 e Exemplo 2.13.

- **Aula 6**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e com as cópias do artigo.

Será feita uma breve revisão do que foi visto de PG até esse momento e faremos o Exemplo 2.14 e Observação 2.15. No restante de tempo da aula os alunos tentarão resolver o Problema 2.1.

- **Aula 7**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e com as cópias do artigo.

O professor responderá junto com os alunos o Problema 2.1. No restante de tempo da aula os alunos tentarão resolver os Problemas 2.2, 2.3 e 2.4.

- **Aula 8**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e com as cópias do artigo.

O professor responderá junto com os alunos os Problemas 2.2, 2.3 e 2.4. No restante de tempo da aula os alunos tentarão resolver o Problema 2.5.

- **Aula 9**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e com as cópias do artigo.

O professor responderá junto com os alunos o Problema 2.5.

No restante de tempo da aula os alunos tentarão resolver os Problemas 2.6, 2.7 e 2.8.

- **Aula 10**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e com as cópias do artigo.

O professor responderá junto com os alunos os Problemas 2.6, 2.7 e 2.8.

Nesse capítulo foi desenvolvido o artigo *Uma Abordagem Olímpica das Progressões Geométricas* que se mostra um excelente material de estudo para alunos que querem aprofundar no assunto para fazer as Olimpíadas e também pode ser usado como material de apoio para professores do Ensino Médio. Antes de introduzir o artigo, houve uma contextualização para o leitor, antes de começar a leitura do artigo, sobre as Olimpíadas de Matemática e a importância de Resolução de Problemas para o ensino da Matemática. Finalizando com uma proposta de “Sequência Didática”.

A seguir, explanaremos o artigo “Ternas Pitagóricas e Sequências Numéricas: Novos Resultados”, que também é um excelente material, envolvendo Ternas Pitagóricas, PA, PG e Sequência de Fibonacci.

3 Artigo 2: Ternas Pitagóricas e Sequências Numéricas: Novos Resultados

Nesta seção, será apresentado o artigo intitulado “*Ternas Pitagóricas e Sequências Numéricas: Novos Resultados*”(CASTRO; TANAKA; CAMPOS, 2024), um trabalho em conjunto com o professor doutor Airtton Temístocles Gonçalves de Castro, do departamento de Matemática da UFPE, e o orientador desta dissertação doutor Thiago Yukio Tanaka. O Artigo foi publicado na 12ª Edição da Revista “Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática” que possui *qualis* A4 no dia 24 de Dezembro de 2024. O artigo pode ser acessado de forma gratuita no seguinte *qr*code:



O artigo trata sobre uma abordagem interdisciplinar entre Ternas Pitagóricas (uma tripla de números inteiros positivos em que vale a relação de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$) e três tipos de Sequências Numéricas(PA, PG e Sequência de Fibonacci). O intuito é provar a existência e inexistência das Ternas Pitagóricas envolvendo essas sequências. No caso das PGs e da Sequência de Fibonacci, será visto a inexistência dessas Ternas tanto para termos consecutivos, quanto não consecutivos. Acreditamos que esses dois últimos casos sejam inéditos e esperamos que possa contribuir para estudos futuros nessa área.

Antes de apresentar o artigo, será analisado como as Ternas Pitagóricas são abordadas no Ensino Básico, segundo a Base Nacional Comum Curricular(BNCC). Em seguida, será apresentado alguns problemas Olímpicos que trabalha esse tema, podendo ser feito com alunos que pretende fazer Olimpíadas ou que se interessam por esse tema.

Depois do artigo é apresentada uma proposta de “Sequência Didática”. Esta proposta visa sugerir uma maneira de organizar e estruturar, de forma sequencial e metódica, os conteúdos do artigo. Isso deve estar alinhado com a construção do conhecimento do estudante, facilitando a compreensão do tema. O planejamento contém: Público-alvo, Tema, Conteúdos Trabalhados, Objetivo, Habilidades da BNCC(que estão relacionadas ao conteúdo), Duração e Aulas minuciosamente planejadas.

A ordem das próximas seções desse capítulo são: “A BNCC e Problemas sobre Ternas Pitagóricas e Sequências”, “Ternas Pitagóricas e Sequências Numéricas: Novos

Resultados” e “Sequência Didática”.

3.1 A BNCC e Problemas sobre Ternas Pitagóricas e Sequências

Ao contrário das Sequências, como já vimos em 1.1, Ternas Pitagóricas é pouco visto no conteúdo do Ensino Básico, sendo visto frequentemente em Problemas que envolvem o Teorema de Pitágoras. Contudo, é um tema trabalhado no programas de treinamentos Olímpicos no assunto de Equações Diofantinas, o que justifica o trabalho do artigo para os alunos de Ensino Médio que tem interesse em participar de Olimpíadas de Matemática.

De acordo com a BNCC, o Teorema de Pitágoras é trabalhado, no currículo escolar, no 9º ano do Ensino Fundamental na Unidade Temática de Geometria, o que não impede dele surgir em problemas de outros assuntos, cujas as Habilidades Específicas dizem:

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. (BRASIL, 2018, p.319).

Para trabalhar problemas envolvendo Ternas Pitagóricas e Sequências, a seguir, será apresentada algumas sugestões de problemas com suas devidas soluções. Observe que, em todas essas questões, as Sequências Numéricas utilizadas são de Progressões Aritméticas, nenhuma usa Progressões Geométricas ou Sequência de Fibonacci. Isso acontece, pois, como será visto e demonstrado mais a frente no Artigo e como também já citado na introdução desse capítulo, não existem Ternas Pitagóricas cujos termos estejam em Progressão Geométrica ou numa Sequência de Fibonacci.

Problema 3.1 (Companhia Energética de Minas Gerais(CEMIG), Médico do Trabalho, adaptada, (Fundação Mariana Resende Costa(FUMARC), 2017)). *Se as medidas dos lados de um triângulo retângulo estão em Progressão Aritmética de razão igual a cinco, então qual é a área desse triângulo, em unidades de área?*

Solução. Seja x um número inteiro positivo com $x > 5$, temos que as medidas dos lados do triângulos retângulo são

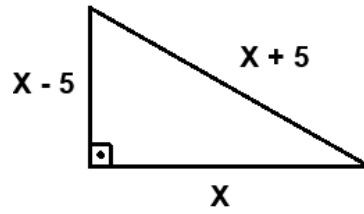


Figura 3 – Triângulo Retângulo em que as medidas dos lados estão em uma PA de razão 5

Assim, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, onde a e b são os catetos e c é a hipotenusa, temos que

$$(x - 5)^2 + x^2 = (x + 5)^2 \Rightarrow x^2 - 10x + \cancel{25} + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 10x + \cancel{25} \Rightarrow x^2 - 20x = 0.$$

A solução para essa equação de segundo grau é $x = 0$ ou $x = 20$. Mas, por construção $x > 5$, então teremos que as medidas são $(15, 20, 25)$. Logo, a área do triângulo é $A = \frac{20 \cdot 15}{2} = 150u^2$. $\square$

Problema 3.2 (Universidade Estadual de Campinas(UNICAMP), 2ª fase, (UNICAMP, 1987)). *Os lados de um triângulo retângulo estão em progressão aritmética. Sabendo que a área do triângulo é 150, calcule as medidas dos lados desse triângulo.*

Solução. Seja x e r inteiro positivos, com $x > r > 0$, as medidas dos lados do triângulo retângulo são

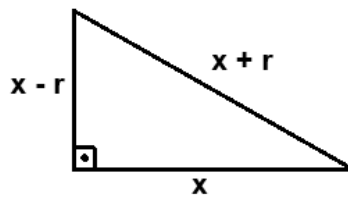


Figura 4 – Triângulo Retângulo em que as medidas dos lados estão em uma PA de razão r

Daí, utilizando o Teoremas de Pitágoras, temos

$$(x - r)^2 + x^2 = (x + r)^2 \Rightarrow x^2 - 2rx + \cancel{r^2} + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 2rx + \cancel{r^2} \Rightarrow x^2 - 4rx = 0.$$

Assim, $x \cdot (x - 4r) = 0$. Como $x > 0$, então temos que $x = 4r$. Dessa forma, a medida dos lados do triângulo ficam $(3r, 4r, 5r)$. Sabemos que a área desse triângulo é 150, por isso temos que $A = \frac{4r \cdot 3r}{2} = 6r^2 \Rightarrow 6r^2 = 150 \Rightarrow r = 5$. Portanto, as medidas dos lados desse triângulo são $(15, 20, 25)$. $\square$

Problema 3.3 (Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), Teorema de Pitágoras e Área, (Programa de Iniciação Científica Jr., 2015)). *Determine todos os triângulos retângulos cujos lados são inteiros e estão em progressão aritmética.*

Solução. Como vimos em 4, as medidas dos lados de um triângulo retângulo que estão em PA de razão $r > 0$ é escrita da forma $(3r, 4r, 5r)$, para todo r inteiro. $\square$

Observação 3.1. No artigo a seguir será demonstrado que o tipo de Tripla Pitagórica $(3n, 4n, 5n)$ é única, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 3.4 (Retirado de (Instituto Federal De Educação, Ciências e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN) - Projeto de extensão, s.d.), Problema 13). (Unitau) *Um triângulo retângulo tem seus lados c , b , e a em uma progressão aritmética crescente, então podemos dizer que sua razão r é igual a:*

- a) $2c$. b) $c/3$. c) $a/4$. d) b . e) $a - 2b$.

Solução. Sabemos que c , b , e a estão em PA e $c < b < a$, então

$$r = a - b = b - c \Rightarrow a = 2b - c. \quad (3.1)$$

Ainda temos que c , b , e a são lados de um triângulo retângulo, como a é a maior medida, então a é hipotenusa. Assim, pelo Teorema de Pitágoras temos que

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (3.2)$$

Substituindo (3.1) em (3.2), ficamos com

$$(2b - c)^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4b^2 - 4bc + c^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 3b^2 - 4bc = 0 \Rightarrow b(3b - 4c) = 0.$$

Como b é medida de um lado de um triângulo retângulo, então $b \neq 0$. Logo,

$$3b - 4c = 0 \Rightarrow b = \frac{4c}{3}. \quad (3.3)$$

Como vimos em (3.1) que $r = b - c \Rightarrow b = r + c$ e substituindo em (3.3), a resposta é

$$r + c = \frac{4c}{3} \Rightarrow r = \frac{c}{3}.$$

$\square$

Problema 3.5 (Colégio Técnico Industrial de Santa Maria, Caderno 3, Progressão Aritmética e Progressão Geométrica, Testes de Progressão Aritmética, Problema 11, (MAGAGNANGMO; LUTZ, 2020)). *O perímetro de um triângulo retângulo é 48cm e os seus lados estão em P.A.. A área do triângulo, em cm^2 , é igual a:*

- a) $108cm^2$ b) $96cm^2$ c) $64cm^2$ d) $54cm^2$ e) $48cm^2$

Solução. Seja x e r valores positivos com $x > r$. Considere $(x - r, x, x + r)$ os lados desse triângulo, então

$$(x - r) + x + (x + r) = 3x = 48 \Rightarrow x = 16. \quad (3.4)$$

Sendo $(x + r)$ a hipotenusa desse triângulo e substituindo (3.4), temos, pelo teorema de Pitágoras,

$$(16 + r)^2 = (16 - r)^2 + 16^2 \Rightarrow 256 + 32r + r^2 = 256 - 32r + r^2 + 256,$$

daí,

$$64r = 256 \Rightarrow r = \frac{256}{64} = 4.$$

Assim, como a área do triângulo retângulo é a metade do produto dos catetos, ficamos com

$$A = \frac{16 \cdot (16 - 4)}{2} = 96cm^2.$$

□

Nesta seção, vimos como as ternas são trabalhadas no Ensino Básico e nos programas de treinamento olímpico. Também observamos o que a BNCC fala sobre esse tema e quela é a sua importância no ensino curricular da Educação Básica. E ainda, houveram sugestões de três problemas envolvendo Sequências e Teorema de Pitágoras, para serem utilizadas como modelos de questões para serem trabalhadas com o estudante. Agora, na seção em que se segue, apresentaremos uma versão expandida do artigo.

3.2 Ternas Pitagóricas e Sequências Numéricas: Novos Resultados

3.2.1 Introdução

Durante nossa vida escolar, no Ensino Básico, nos deparamos com situações que envolvem o conteúdo Triângulos Retângulos e o Teorema de Pitágoras. Porém, o conceito das Ternas Pitagóricas raramente é abordado no currículo. Quando este tema aparece, está vinculado aos treinamentos olímpicos nacionais, como nos projetos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI) e no Programa de Iniciação Científica voltado para a OBMEP (PIC-OBMEP). Durante a resolução de problemas envolvendo esses conteúdos, é comum aparecerem triângulos retângulos com lados 3, 4 e 5; ou 5, 12 e 13; ou triângulos semelhantes a estes (como o triângulo com lados 6, 8 e 10, semelhante ao primeiro). Uma Terna Pitagórica é uma tripla de números inteiros positivos (a, b, c) em que vale a relação pitagórica:

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (3.5)$$

O problema das Ternas Pitagóricas consiste em determinar todas as triplas de inteiros positivos que satisfaçam (3.5). Este é um problema famoso da classe das *Equações Diofantinas Não Lineares*. Recomendamos a leitura de (RICHT; RICHT; RICHT, 2021) que trata da solubilidade de problemas de Equações Diofantinas Lineares e (NASCI-MENTO; TANAKA; SILVA, 2022) para uma abordagem olímpica voltada para os casos não lineares. Na verdade, basta encontrar as soluções em que a , b e c sejam inteiros coprimos. É bem conhecido que a parametrização (3.6) gera todas as soluções.

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn \quad e \quad c = m^2 + n^2, \quad (3.6)$$

em que m e n são inteiros positivos com $m > n$.

A procura por padrões está presente em várias pesquisas matemáticas. Para motivar o estudo de sequências numéricas no Ensino Básico, destacamos a busca de padrões numéricos. As *Progressões Aritméticas* (PA), como as sequências dos números pares, ímpares, formadas pelos números naturais consecutivos ou mesmo por múltiplos de um determinado inteiro, e as *Progressões Geométricas* (PG), como as sequências formadas por potências inteiras de um determinado número, compõem parte do currículo comum no Ensino Básico. Nessa situação, estamos interessados na relação recorrente, em questões de posição, interpolação, soma ou produtos de termos.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfatiza a importância da integração entre conteúdos distintos, pois enriquece o aprendizado do aluno e ajuda no desenvolvimento de “competências para compreender o mundo, relacionar informações, representar e solucionar problemas de várias naturezas” (BRASIL, 2018, p.350). Geralmente, os conteúdos de triângulos retângulos e sequências são apresentados de forma separada no currículo de Matemática, e poucas ou quase nenhuma vez há integração entre esses conteúdos. O estudo de triângulos retângulos é parte essencial do programa de Geometria, focando principalmente nas propriedades, no Teorema de Pitágoras, e nas aplicações práticas, tanto na Matemática quanto nas outras áreas como Física e Engenharia. Já as Sequências Numéricas são abordadas no contexto das Progressões Aritméticas e Geométricas, com ênfase em encontrar padrões, deduzir e utilizar fórmulas. Nosso intuito é explorar a matemática de modo a integrar os dois temas citados como forma de incentivar os alunos aprofundarem seus conhecimentos matemáticos em “contextos significativos de aprendizagem” (BRASIL, 2018, p. 350).

Durante uma das disciplinas do Programa de Pós-Graduação de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), surgiu um interessante questionamento relacionando conceitos que aparecem em momentos distintos no currículo do Ensino Básico: o das Ternas Pitagóricas e o das Sequências Numéricas. O questionamento foi sobre a existência de Ternas Pitagóricas como termos consecutivos de sequências conhecidas. Em (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005), um dos livros adotados no programa, há o desenvolvimento do conteúdo de ternas, e um

dos problemas contém: “Encontre todas as triplas de números (a, b, c) tais que a^2 , b^2 e c^2 estão em progressão aritmética.” (Exemplo 5.4., p. 165). Ainda na referência (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005), há outros problemas dessa natureza; nas páginas 170-173, Seção 5.5, há uma seção inteira destinada à procura de triângulos com lados inteiros cujos ângulos estão em Progressão Aritmética. Em (MARTINEZ et al., 2013), há um outro questionamento interessante que determina quais são todos os pontos racionais sobre uma determinada circunferência (Teorema 4.3, p. 136), analisando um comportamento regular. O questionamento foi reformulado para determinar se seria possível encontrar Ternas Pitagóricas em Sequências Numéricas que possuem determinadas regularidades. Além dos problemas acima, encontramos outras referências que trabalharam especificamente com essa problemática. Em (COMUNNITY MATHEMATICS CENTRE CoMaC, 2012, p.33-34), há o desenvolvimento das respostas no caso de ternas de termos consecutivos de Progressões Aritméticas, provando, assim como nós faremos, que elas são geradas pela famosa $(3, 4, 5)$. Ainda sobre PAs, em (LAGRANGE; LEECH, 1994) há uma investigação de conjuntos de quatro Razões Pitagóricas¹ em Progressão Aritmética, revelando suas relações com Progressões Aritméticas de três e de cinco termos. Ao final do trabalho, eles identificam a existência de uma família infinita de Razões Pitagóricas em Progressão Aritmética. No caso da Sequência de Fibonacci, encontramos diversos artigos que tentam encontrar identidades de ternas para combinações de termos de Fibonacci, como (BICKNELL-JOHNSON, 1979; BOGOMOLNY, s.d.; HORADAM, 1961) e as referências contidas em cada trabalho. Por fim, não encontramos um desenvolvimento de resultado sistemático para o caso das PGs; apenas encontramos uma discussão em um fórum (veja (QUORA, s.d.)), a qual não estabelece um resultado para o problema. Ressaltamos que a busca por padrões em sequências, sejam de resultados novos ou de generalizações de resultados conhecidos, mas com modificações na sequência escolhida, é um tema recorrente em artigos da própria Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática. Recomendamos a leitura de (COSTA, 2021; SANTOS R.; COSTA, 2022; SPREAFICO E. V.; CATARINO, 2024; VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019; VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2021) para trabalhos na mesma linha deste. Recomendamos também as dissertações de PROFMAT (BRAGAGNOLO, 2020; CONCEIÇÃO, 2021; CUNHA, 2013; SILVA, 2014; FONSECA, 2023; JUNIOR, 2022; KELMER, 2023; OLIVEIRA, 2013; SENA, 2013; SOUZA, 2016) que percorrem todos os temas propostos neste artigo.

A partir das discussões subsequentes, surgiu este artigo. Mais precisamente, este trabalho é uma compilação de parte das respostas que descobrimos na investigação deste problema e compõem parte da dissertação de mestrado em andamento. O objetivo deste trabalho é explorar padrões e relações entre os temas que compõem o título do mesmo. Até onde sabemos, as respostas que propomos aos questionamentos aqui presentes são

¹ Uma Razão Pitagórica denotada por a, b é definida pela razão $\frac{a^2-b^2}{2ab}$ entre os lados de um triângulo retângulo com medidas de lados racionais.

inéditas. Esperamos também que este trabalho inspire e incentive discentes e docentes do programa PROFMAT a compartilharem seus estudos e suas pesquisas, enriquecendo as discussões em temas relativos ao Ensino Básico, cuja socialização pode trazer grandes melhorias no ensino e aprendizado de Matemática.

Assumiremos estabelecidos os principais conceitos e resultados dos conteúdos das Ternas Pitagóricas e das sequências numéricas PA, PG e da Sequência de Fibonacci. Dessa forma o trabalho está organizado da seguinte maneira: Na Seção 3.2.2 apresentamos os resultados principais do trabalho, começando pelo caso de Ternas Pitagóricas e Progressões Aritmética, que foi estabelecido em (COMUNNITY MATHEMATICS CENTRE CoMaC, 2012), e que expandimos como forma de apresentar o problema. Em seguida, consideramos os casos inéditos com Progressões Geométricas e da Sequência de Fibonacci, estudando casos de termos consecutivos ou não consecutivos. Finalizamos o trabalho na Seção 3.2.3 com as considerações finais, seguido de algumas referências que encontramos no tema.

3.2.2 Resultados Principais

A partir da perspectiva de problemas descritos na introdução, buscaremos determinar a existência de Ternas Pitagóricas associadas a PAs, PGs e da Sequência de Fibonacci.

3.2.2.1 Ternas Pitagóricas e PAs

Apesar desse resultado já ter sido estabelecido em (COMUNNITY MATHEMATICS CENTRE CoMaC, 2012), descreveremos a nossa solução uma vez que o encaminhamento da solução nos dará um suporte nos demais casos.

Definição 3.2. Uma PA é uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que respeita a seguinte recorrência de primeira ordem não homogênea

$$a_n - a_{n-1} = r,$$

para todo $n \geq 2$. A constante $r \in \mathbb{R}$ é dita a razão da PA.

Perceba que as ternas apresentadas na introdução $(3, 4, 5)$ e $(6, 8, 10)$ podem ser vistas como termos de PAs, como a da sequência formada pelos números inteiros e a segunda, como termos da sequência de números pares. Veremos que isso não é uma coincidência.

Proposição 3.3 ((COMUNNITY MATHEMATICS CENTRE CoMaC, 2012)). *Há uma única família de Ternas Pitagóricas (a, b, c) que são termos consecutivos de uma PA. Esta é formada pelas triplas da forma $(3n, 4n, 5n)$ com $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Três termos consecutivos de uma PA são do tipo $a - r$, a e $a + r$. Como são lados de um triângulo, $0 < r < a$. Para o triângulo ser retângulo

$$(a + r)^2 = a^2 + (a - r)^2 \Rightarrow a = 4r.$$

Os lados do triângulo retângulo em PA são da forma $3r = 4r - r$, $4r$ e $5r = 4r + r$; ou seja, o triângulo é semelhante ao triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Resumindo, se uma Terna Pitagórica é formada por termos consecutivos de uma PA, então ela é um múltiplo inteiro de (3, 4, 5). $\square$

Mostramos assim que a tripla (3, 4, 5) tem de fato uma particularidade importante nas Ternas Pitagóricas. Ela é uma Terna Pitagórica Primitiva e gera todas as Ternas Pitagóricas cujos termos estão em PA, estes são da forma $(3n, 4n, 5n)$ com $n \in \mathbb{N}$.

Observação 3.4. Uma observação no caso das PAs é que ao considerar um número real $\lambda > 0$, então todos os termos da tripla $(3\lambda, 4\lambda, 5\lambda)$ ou são racionais ou são irracionais.

3.2.2.2 Ternas e PGs

A partir daqui, até onde sabemos, os resultados estabelecidos são inéditos.

Definição 3.5. Uma PG é uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que respeita a seguinte recorrência de primeira ordem não homogênea

$$a_n = qa_{n-1},$$

para todo $n \geq 2$. A constante $q \in \mathbb{R}$ é dita a razão da PG.

Proposição 3.6 (Autores). *Não há nenhuma Progressão Geométrica da qual podemos extrair três termos consecutivos de modo a obtermos uma Terna Pitagórica.*

Demonstração. Três termos consecutivos de uma PG são do tipo b , bq e bq^2 . Como são lados de um triângulo, devemos ter $b > 0$ e, sem perda de generalidade, podemos supor $q > 1$, ou seja, bq^2 é a hipotenusa. Como o triângulo é retângulo, vale

$$(bq^2)^2 = (bq)^2 + b^2 \Rightarrow (q^2)^2 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como estamos procurando soluções reais positivas ($q > 0$), então $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \notin \mathbb{Q}$. Se um triângulo retângulo tem os lados como termos consecutivos de uma PG, então ele é semelhante ao triângulo de lados $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (hipotenusa), $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ (cateto maior) e 1 (cateto menor). Note que os triângulos descritos no parágrafo anterior não geram Ternas Pitagóricas, pois não existe $\lambda > 0$ real tal que λ , $\lambda\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ e $\lambda\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sejam todos inteiros. $\square$

Observação 3.7. Diferente do caso das PAs, o caso das PGs nos dá uma inexistência de soluções de ternas em inteiros positivos. Um fato interessante é que as ternas soluções possuem uma relação direta com o número de ouro, definido por $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Observação 3.8. Uma observação importante é que, no caso das PGs, independente da escolha de λ , não é possível obter ternas com regularidade de termos racionais. Na melhor situação, temos dois lados com medidas irracionais e um dos lados com medida racional.

Observação 3.9. Perceba que todos os triângulos deverão ser semelhantes ao triângulo com medidas dos catetos iguais a 1, $\sqrt{\varphi}$ e hipotenusa igual a φ , que é um triângulo famoso na Geometria, conhecido como *Triângulo de Kepler* (veja (VERMA, 2021)).

Diante da inexistência do caso anterior, um novo questionamento surge: será que este é um problema de ordenação ou é sobre a natureza (característica intrínseca) da sequência? Ou seja, será que podemos considerar uma outra ordenação nos termos da PG e agora sim obter uma terna? Esse questionamento está formulado na próxima proposição. Antes, precisaremos de dois lemas:

Lema 3.10 (Teorema das Raízes Racionais, (LARSON, 2011)). *Considere o seguinte polinômio*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

em que $a_i \in \mathbb{Z}$. Se $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$, então toda solução racional x de $p_n(x)$ quando escrita como uma fração irredutível, ou seja, $x = \frac{a}{b}$ com $\text{mdc}(a, b) = 1$, satisfaz:

- a é um fator inteiro do termo constante a_0 ;
- b é um fator inteiro do coeficiente a_n .

Observação 3.11. O Teorema das Raízes Racionais é um caso particular do Lema de Gauss que trata sobre a fatoração de polinômios. Além disso, o Teorema da Raízes Inteiras é um caso particular do Lema 3.10 quando $a_n = 1$.

Vamos enunciar e provar uma proposição que usaremos para generalizar a Proposição 3.6.

Lema 3.12 (Autores). *Sobre as raízes da Equação (3.7),*

$$x^n - x^m - 1 = 0 \quad (n > m \geq 1), \quad (3.7)$$

temos:

- (i) A Equação (3.7) não tem raiz racional;
- (ii) Se $\alpha \geq 0$ é raiz da Equação (3.7) então $\alpha > 1$;
- (iii) A Equação (3.7) tem uma raiz real positiva no intervalo $(1, 2)$;
- (iv) A Equação (3.7) tem apenas uma raiz real positiva.

Demonstração. Seja $p_{n,m}(x) = x^n - x^m - 1$, com $n > m \geq 1$. Provaremos primeiro o item (i). Observe que as únicas possíveis raízes racionais da Equação (3.7) são ± 1 . Substituindo, concluímos que não são raízes: $1^n - 1^m - 1 = -1 \neq 0$ e $(-1)^n - (-1)^m - 1 \neq 0$. Em virtude do Lema (3.10), sabemos que a equação $x^n - x^m - 1 = 0$ não tem raiz racional.

Para demonstrar o item (ii), se $p_{n,m}(\alpha) = 0$, então $\alpha^n = \alpha^m + 1 > \alpha^m$, logo $\alpha > 1$. Agora, considerando o caso (iii), como $n > m \geq 1$, temos

$$2^n \geq 2^{m+1} = 2^m + 2^m > 2^m + 1,$$

assim $p_{n,m}(2) > 0$. Por outro lado,

$$p_{n,m}(1) = 1^n - 1^m - 1 = -1 < 0.$$

O Teorema do Valor Intermediário (que pode ser encontrado em (STEWART, 2016)) garante que a função $p_{n,m}(x)$ tem uma raiz real positiva no intervalo aberto $(1, 2)$.

Por fim, considerando o caso (iv),

$$p_{n,m}(x) = x^n - x^m - 1 = x^m(x^{n-m} - 1) - 1,$$

sabemos que para $k \geq 1$ a função $h_k(x) = x^k$ é crescente no intervalo $[0, +\infty)$, em particular $x^k > 1$ se $x > 1$. Como o produto de funções crescente positivas é crescente, concluímos que a função $x^m(x^{n-m} - 1)$ é crescente no intervalo $[1, +\infty)$, então $p_{n,m}$ é crescente neste mesmo intervalo. Logo, utilizando as conclusões de (i) e (ii), concluímos que $p_{n,m}$ tem uma única raiz positiva, a qual está no intervalo $(1, 2)$. $\square$

Proposição 3.13 (Autores). *Não há nenhuma Progressão Geométrica da qual podemos extrair três termos de modo a obtermos uma Terna Pitagórica, mesmo que os termos não sejam consecutivos. De forma mais geral, se num triângulo retângulo os lados são termos de uma PG, não necessariamente termos consecutivos, então dois dos lados são irracionais.*

Demonstração. Três termos de uma PG são do tipo bq^n , bq^m e b . Como são lados de um triângulo, com o primeiro termo sendo a hipotenusa, temos $b > 0$, $q > 1$, $n > m \geq 1$. Podemos trocar o triângulo por um triângulo semelhante dividindo os lados por b : q^n , q^m e 1. Usando a informação de que o triângulo é retângulo, temos:

$$q^{2n} = q^{2m} + 1 \Rightarrow x = q^2 \Rightarrow x^n - x^m - 1 = 0.$$

Em virtude do Lema (3.10), sabemos que a equação $x^n - x^m - 1 = 0$ não tem raiz racional. Suponha agora que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$ seja uma raiz da equação. Temos $\alpha > 1$, logo $q = \sqrt{\alpha} > 1$. O triângulo retângulo de lados 1 (menor cateto), $q^m = \alpha^{m/2}$ (maior cateto) e $q^n = \alpha^{n/2}$ (hipotenusa), tem seus lados como termos de uma PG e gera todos os triângulos com lados em PG, nesta sequência de ordem numa PG.

Seja $\beta = \alpha^m$, temos que $\beta^{n/m} = \beta + 1$, assim $\beta^n - (\beta + 1)^m = 0$, logo β é uma raiz positiva da equação:

$$x^n - (x + 1)^m = 0. \quad (3.8)$$

Em virtude do Lema (3.10), sabemos que a Equação (3.8) não tem raiz racional, pois as únicas possíveis raízes racionais da equação são ± 1 ; substituindo, concluímos que não são raízes: $1^n - 2^m \neq 0$ e $(-1)^n - 0^m \neq 0$. Desta forma concluímos que $\beta = \alpha^m$ é irracional. Como $\alpha^n = \alpha^m + 1$ temos que α^n também é irracional.

Observe que para um triângulo retângulo ter dois de seus lados com comprimentos racionais, então pelo menos uma razão trigonométrica terá que ser racional. Considerando θ o ângulo oposto ao maior cateto, temos:

$$\cos(\theta) = \alpha^{m/2}, \quad \sin(\theta) = \alpha^{n/2} \quad e \quad \tan(\theta) = \alpha^{(n-m)/2}. \quad (3.9)$$

Acabamos de provar que $\alpha^n, \alpha^m \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, logo $\cos(\theta) = \sqrt{\alpha^m}$ e $\sin(\theta) = \sqrt{\alpha^n}$ são números irracionais. Temos também $\alpha^{n-m} = 1 + (\alpha^m)^{-1} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, donde $\tan(\theta) = \alpha^{(n-m)/2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Concluindo que, pelo menos, dois dos lados do triângulo são irracionais, em particular, não é possível extrair uma Terna Pitagórica deste triângulo retângulo. $\square$

Observação 3.14. É interessante notar que, no caso das PGs, há uma inexistência de Ternas Pitagóricas de inteiros positivos, independente da ordenação. De fato, o Lema (3.7) e a Proposição (3.13) garantem a existência de triângulos retângulos com lados termos de uma PG, mas, no máximo, eles têm um único lado com medida racional. Por outro lado, a procura de ternas em PAs, independentemente da ordenação, é um questionamento cuja resposta é elementar, uma vez que toda Terna Pitagórica pode ser vista como termos, não necessariamente consecutivos, da PA dos números naturais positivos $(n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3.2.2.3 Ternas e a Sequência de Fibonacci

Definição 3.15. A Sequência de Fibonacci (clássica) é uma sequência $(a_n)_{n \geq 0}$ que respeita a seguinte recorrência de segunda ordem

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

para todo $n \geq 2$, com condições iniciais $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.

Proposição 3.16 (Autores). *Na Sequência de Fibonacci não há Ternas Pitagóricas de termos sucessivos.*

Demonstração. Em geral, três termos consecutivos da Sequência de Fibonacci podem ser representados por a , b e $a + b$. É fácil provar que não existem três termos consecutivos que são Ternas Pitagóricas, pois $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ implica que $ab = 0$, a Sequência de

Fibonacci só tem nulo o termo a_0 , logo só a terna $(0, 1, 1)$ tem a propriedade desejada, só que não forma uma Terna Pitagórica, não são lados de um triângulo retângulo. $\square$

Analogamente ao caso das PGs, podemos nos questionar se há ternas quando os termos não são necessariamente sucessivos. Nessa situação, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.17 (Autores). *Na Sequência de Fibonacci, não há Triplas Pitagóricas de termos, mesmo que não sejam sucessivos.*

Demonstração. Já sabemos a impossibilidade para termos consecutivos. Vamos escrever os três termos de forma diferente, olhando para a Sequência de Fibonacci começando de um dado termo, no nosso caso a_i .

Fazendo $a = a_i$ e $b = a_{i-1}$, assim temos $a_i = a$, $a_{i+1} = a_i + a_{i-1} = a + b$, $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i = a + b + a = 2a + b$, $a_{i+3} = a_{i+2} + a_{i+1} = 2a + b + a + b = 3a + 2b$, é fácil provar por indução que: $a_{i+n} = a_{n+1}a + a_nb$. Vamos considerar então três termos em ordem crescente, não consecutivos, na forma: a , $(a_{m+1}a + a_mb)$ e $(a_{n+1}a + a_nb)$, com $a \geq 1$ e $1 \leq m < n$.

Suponha por absurdo que a tripla descrita acima é uma Terna Pitagórica:

$$(a_{n+1}a + a_nb)^2 = (a_{m+1}a + a_mb)^2 + a^2,$$

que por reorganização nos dá:

$$(a_{n+1}^2 - a_{m+1}^2 - 1)a^2 + (a_n^2 - a_m^2)b^2 + 2(a_{n+1}a_n - a_{m+1}a_m)ab = 0. \quad (3.10)$$

A Sequência de Fibonacci $(a_j)_{j=0}^\infty$ é monótona não-decrescente, ou seja, se $0 \leq i < j$, então $a_i \leq a_j$. Na verdade temos $i < j$ e $j \neq 2$, assim $a_i < a_j$. Desta forma, a segunda e terceira parcelas da Equação (3.10) são não negativas:

$$(a_n^2 - a_m^2)b^2 \geq 0 \quad e \quad 2(a_{n+1}a_n - a_{m+1}a_m)ab \geq 0.$$

Como a_{n+1} e a_{m+1} são inteiros positivos e $a_{m+1} < a_{n+1}$, então $a_{m+1} + 1 \geq a_{n+1}$. Segue que

$$a_{m+1}^2 + 2a_{m+1} + 1 \leq a_{n+1}^2,$$

como $m \geq 1$ então $m + 1 \geq 2$, consequentemente $a_{m+1} \geq a_2 = 1$, logo $a_{m+1}^2 + 3 \leq a_{n+1}^2$, assim temos $a_{n+1}^2 - a_{m+1}^2 - 1 \geq 2$, provando que $(a_{n+1}^2 - a_{m+1}^2 - 1)a^2 > 0$, uma contradição, uma vez que pela Equação (3.10) a soma dos três termos positivos tem resultado igual a zero. Isso demonstra a impossibilidade da terna ser Pitagórica. $\square$

Observação 3.18. Somos tentados a generalizar, ampliar a definição da Sequência de Fibonacci considerando termos iniciais quaisquer, na esperança de obter um resultado diferente. Trocando os dados iniciais $\beta_0 = b$, $\beta_1 = a$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Neste caso, é fácil exibir

um contraexemplo: faça $a = 3$ e $b = -2$, listando alguns termos: $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 4$, $\beta_4 = 5$, $\beta_5 = 9$ e $\beta_6 = 14$. Encontramos uma Terna Pitagórica $(\beta_1, \beta_3, \beta_4) = (3, 4, 5)$, simplesmente a mais famosa Terna Pitagórica, exibindo assim um resultado positivo de existência. Porém, considerando a e b positivos, uma pequena alteração na demonstração apresentada prova a inexistência de três termos que sejam lados de um triângulo retângulo.

3.2.3 Contribuições do artigo

Acreditamos que a busca por respostas para questionamentos iniciados durante uma prática docente levou a investigações interessantes e com respostas inéditas. Respondemos ao questionamento de buscar Ternas Pitagóricas, mesmo considerando o caso mais geral de lados de um triângulo retângulo nos conjuntos $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, considerando-as como termos consecutivos ou não e pertencentes a uma Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e da Sequência de Fibonacci. Apresentamos a solução no caso das PAs, que já havia sido estabelecida, porém, para o caso das PGs e da Sequência de Fibonacci, as soluções e os questionamentos apresentados são inéditos. Para o caso das PGs, provamos a inexistência de soluções em números racionais, o que mostra a impossibilidade de Ternas Pitagóricas considerando o problema original. Porém, ao considerarmos números reais, vimos que essas triplas são relacionadas com o Triângulo de Kepler. Respondemos também o caso para termos não consecutivos de uma PG. Considerando agora o caso da Sequência de Fibonacci, provamos a inexistência de ternas, mesmo considerando termos não consecutivos. Encontramos a Terna Pitagórica $(3, 4, 5)$ como termos não consecutivos de uma Sequência de Fibonacci generalizada. As resoluções para os problemas proporcionam um melhor entendimento sobre as relações entre os conteúdos de Ternas Pitagóricas e as Sequências Numéricas, além de agregar temas adjacentes. Além disso, as perguntas fomentam diversos outros questionamentos dentro da mesma classe de problemas, por exemplo, modificando a sequência ou modificando a equação. Assim, a presente investigação não é exaustiva, uma vez que há diversas outras sequências famosas que podem ser analisadas por essa perspectiva e inúmeras equações a serem consideradas, dando bons problemas a serem investigados.

3.2.4 Agradecimentos

Agradecemos ao Comitê Editorial e aos revisores do artigo pela oportunidade de divulgar parte dos resultados de nosso trabalho desenvolvidos no Programa de mestrado em Rede PROFMAT da UFRPE. Agradecemos também aos Programa de Pós-Graduação em rede PROFMAT da UFRPE por todo apoio e suporte.

Aqui finaliza a versão estendida do artigo.

3.3 Sequência Didática

Direcionaremos uma proposta de Sequência Didática a ser aplicada no Ensino Básico.

- **Público-alvo:** Alunos a partir do 1º ano do Ensino Médio.
- **Tema:** Ternas Pitagóricas e Sequências Numéricas.
- **Conteúdos trabalhados:** Conceitos e propriedades de Ternas Pitagóricas, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e Sequência de Fibonacci.
- **Objetivo:** Explorar padrões e relações, em uma abordagem interdisciplinar, entre as ternas pitagóricas e termos que envolvem as Progressões Aritméticas, as Progressões Geométricas e a Sequência de Fibonacci.
- **Habilidades (BNCC, (BRASIL, 2018, p.541)):**

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

- **Materiais necessários:** Cópias do artigo *Ternas Pitagóricas, Sequências Numéricas e Problemas Inéditos* do periódico *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*; Um projetor para exibir os exemplos e problemas; Quadro branco e piloto para resolução dos exemplos e problemas; E materiais escolares como caneta, lápis, caderno e borracha para os alunos resolverem os problemas.
- **Duração:** 6 aulas de 50 minutos. As aulas podem ser unidas em duas ou mais aulas, unindo também as metas de cada aula.
- **Aula 1**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos.

Será fornecido aos alunos cópias do artigo.

Será feita uma breve introdução sobre a relação entre Olimpíadas, ternas Pitagóricas e as Sequências Numéricas.

Será explanado a definição sobre Ternas Pitagóricas.

- **Aula 2**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e com as cópias do artigo fornecidas na aula passada.

Será feita uma breve revisão do que foi visto na introdução sobre Ternas Pitagóricas.

Será dado de forma expositiva a definição a definição de Progressão Aritmética (PA).

Em seguida, trabalharemos a relação entre as Ternas Pitagóricas e PA, usando a Proposição 3.3 e demonstrando-a.

- **Aula 3**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e com as cópias do artigo.

Será feita uma breve revisão da última aula, sobre a relação de PA e ternas Pitagóricas.

Será dado de forma expositiva a definição a definição de Progressão Geométrica (PG).

Em seguida, trabalharemos a relação entre as Ternas Pitagóricas e PG, usando a Proposição 3.6 e demonstrando-a.

- **Aula 4**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e com as cópias do artigo.

Será feita uma breve revisão da última aula, sobre a relação de PG e ternas Pitagóricas.

Dando continuidade ao estudo da relação entre as Ternas Pitagóricas e PG, veremos os Lemas 3.10 e 3.12. Em seguida, será trabalhado e demonstrado a Proposição 3.13.

- **Aula 5**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e com as cópias do artigo.

Será feita uma breve revisão da última aula, sobre o "Teorema das Raízes Racionais".

Será dado de forma expositiva a definição a definição de Sequência de Fibonacci.

Em seguida, trabalharemos a relação entre as Ternas Pitagóricas e Sequência de Fibonacci, usando a Proposição 3.16 e demonstrando-a.

- **Aula 6**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e com as cópias do artigo.

Será feita uma breve revisão da última aula, sobre a relação de Ternas Pitagóricas e Sequência de Fibonacci.

Dando continuidade ao estudo da relação entre as Ternas Pitagóricas e Sequência de Fibonacci, será trabalhado e demonstrado a proposição 3.17.

Nesse capítulo foi explanado o artigo “*Ternas Pitagóricas e Sequências Numéricas: Novos Resultados*”, o qual faz uma abordagem interdisciplinar entre Sequências Numéricas e as Ternas Pitagóricas, com resultados inéditos. Esse artigo pode ser trabalhado com estudantes Olímpicos e também no Ensino Médio, como uma forma de aprofundar o conteúdo de Sequências e Teorema de Pitágoras. Antes de começar de explicar o artigo, vimos a abordagem das Ternas Pitagóricas segundo a BNCC, com o objetivo de ressaltar a importância do artigo para os alunos do ensino básico. Além disso foram apresentados alguns problemas interessantes sobre o tema e uma proposta de sequência didática. Pois, esse trabalho não só se importa em contribuir para o entendimento teórico das Ternas Pitagóricas, mas também almeja fornecer ferramentas pedagógicas para seu ensino e aplicação.

Dando continuidade a esse trabalho, veremos nesse próximo capítulo o artigo “*Investigando Novas Classes de Soluções para um Problema Extremal com Sequências Numérica*”, cujo conteúdo investiga e soluciona problemas extremos envolvendo sequências numéricas e funções polinomiais, aplicando variações em PAs, PGs e a Sequência de Fibonacci, com ênfase em problemas de perfil olímpico.

4 Artigo 3: Investigando Novas Classes de Soluções para um Problema Extremal com Sequências Numérica

Neste capítulo discutiremos sobre o artigo intitulado “*Investigando Novas Classes de Soluções para um Problema Extremal com Sequências Numérica*” que foi um trabalho em conjunto com os professores doutores Jogli Gidel da Silva e Ricardo Nunes Machado Júnior, ambos do departamento de Matemática da UFRPE, e o orientador desta dissertação professor doutor Thiago Yukio Tanaka. Esse Artigo foi submetido no periódico “*Revista Ciência e Natura*” que possui *qualis* A3. Atualmente o artigo encontra-se aceito para publicação e está em fase final de correção.

O artigo apresenta e resolve um conjunto de problemas extremais envolvendo sequências e funções polinomiais. Fazemos uma análise do problema original, incluindo casos específicos como as Progressões, Aritmética e Geométrica, e Sequência de Fibonacci, e também há uma generalização para um grau par qualquer. A partir dos resultados obtidos, sugerimos diversas propostas de problemas com perfil olímpico, que podem ser utilizados como material de treinamento olímpico.

No que segue, apresentaremos uma versão expandida do artigo.

4.1 Investigando Novas Classes de Soluções para um Problema Extremal com Sequências Numérica

4.1.1 Introdução

A Matemática, como ciência, é composta de conceitos e definições, bem como das consequências que podemos obter a partir da manipulação de determinadas premissas consideradas verdadeiras, sempre respeitando as “regras do jogo” durante essa busca por respostas. A grande maioria dos resultados que conhecemos hoje pode ser vista sob três perspectivas: pode ser um resultado completamente inovador, no sentido de que nunca havia sido considerado antes; pode ser um resultado novo, mas obtido a partir da generalização de algum resultado mais simples; ou ainda, pode ser um caso particular e mais específico de um resultado mais geral. É natural observar a Matemática sob estas perspectivas, uma vez que estamos constantemente procurando demonstrar ou provar a

veracidade de novos resultados, sejam eles generalizações ou casos particulares. É desta maneira que frequentemente surgem novas teorias ou novas perspectivas para objetos já estudados.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar a resolução de um problema que envolve uma interdisciplinaridade com conteúdos de Matemática vistos em momentos distintos no Ensino Básico: as funções quadráticas, as sequências e as séries. Acreditamos que os resultados apresentados podem ser aplicados tanto na perspectiva de servir como um elo entre os conteúdos quanto na ótica da resolução de problemas. Nossa motivação nessa investigação foi o Problema 460, exposto na Revista do Professor de Matemática (RPM), número 105.

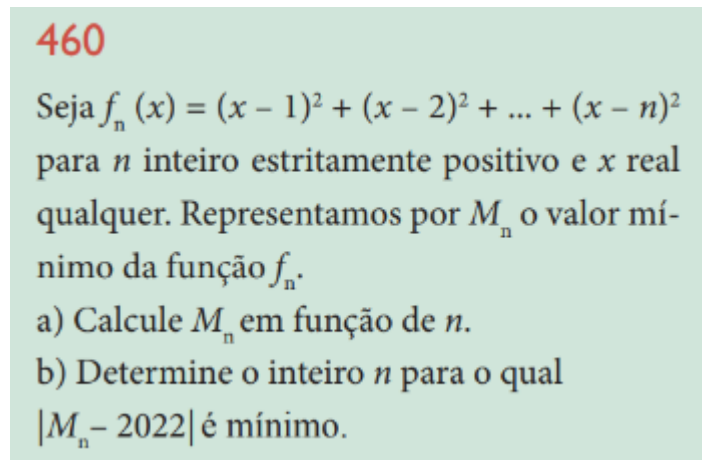


Figura 5 – Recorte do Problema 460 da 105ª Edição da RPM (RPM, 2022).

Estruturalmente, o problema está relacionado com duas questões de otimização (uma para cada item) para uma sequência de funções (f_n) com n sendo um número natural, e correspondente ao somatório de expressões escritas como o quadrado da diferença entre a variável x e os números naturais desde 1 até n . Um primeiro questionamento envolve a obtenção da minimalidade de f_n para um n fixo, denotado por M_n . Um segundo questionamento busca estabelecer o menor valor para $|M_n - 2022|$, ou seja, considerando a sequência (f_n), qual deve ser o valor de n para que a distância entre as retas $y = M_n$ e $y = 2022$ seja mínima.

Uma vez respondido os questionamentos do problema original, iremos propor a seguinte generalização, estudando os extremos para a função

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^n (x - a_j)^2 = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_{n-1})^2 + (x - a_n)^2,$$

na qual (a_n) é uma sequência de números reais.

Buscaremos então responder ao primeiro questionamento, procurando pela minimalidade de F_n , ou seja, determinando qual o valor de x para que $F_n(x)$ seja mínimo e

qual é esse valor mínimo.

Em seguida, iremos determinar como estes objetos se comportam quando consideramos situações particulares para a sequência (a_n) nos seguintes casos:

- (i) (a_n) é uma PA;
- (ii) (a_n) é uma PG;
- (iii) (a_n) é a Sequência de Fibonacci (clássica).

Após estes resultados, iremos considerar segunda generalização considerando uma função de grau par qualquer,

$$f_{n,k} = \sum_{j=1}^n (x - a_j)^{2k} = (x - a_1)^{2k} + (x - a_2)^{2k} + \cdots + (x - a_{n-1})^{2k} + (x - a_n)^{2k},$$

em que $k \in \mathbb{N}$ e dois casos a considerar:

- (iv) (a_n) é a sequência dos naturais $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$;
- (v) (a_n) é uma PA.

Nosso segundo objetivo é abordar o tema sob uma perspectiva olímpica, em particular, na criação de problemas semelhantes aos das Olimpíadas de Matemática. Acreditamos que nosso trabalho expande o problema original para uma classe de novos problemas, que podem auxiliar e motivar a busca por respostas elementares para as situações particulares mencionadas, desde a obtenção da *Lei de Formação* até o comportamento dos somatórios no caso geral das sequências consideradas. Além disso, os conceitos envolvidos são todos relacionados ao Ensino Básico. Embora não seja comum a abordagem desses assuntos na perspectiva do problema original, os resultados aqui apresentados podem servir como uma ponte para conectar conteúdos de matemática que usualmente não se encontram, como Sequências Numéricas, Somatórios e Funções Quadráticas.

Em termos da abordagem adotada no trabalho, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfatiza a importância da integração entre conteúdos de diferentes unidades temáticas, pois enriquece o aprendizado do aluno e ajuda no desenvolvimento de “competências para compreender o mundo, relacionar informações, representar e solucionar problemas de várias naturezas” (BRASIL, 2018, p. 350). Geralmente, os conteúdos de função quadrática e sequências são apresentados de forma separada no currículo de Matemática, uma vez que as competências e habilidades relacionadas são distintas. A função quadrática é parte do programa das funções elementares, focando principalmente nas propriedades, representações gráficas e aplicações práticas. Já as Sequências Numéricas são abordadas no contexto de Progressões Aritméticas e Geométricas, com ênfase em encontrar padrões, deduzir e

utilizar fórmulas. Nossa proposta é explorar a interdisciplinaridade unindo dois temas que, a princípio, não parecem se interligar. Dessa forma, incentivamos os alunos a aprofundar seus conhecimentos matemáticos em “contextos significativos de aprendizagem”(BRASIL, 2018, p. 350).

Com relação a contextualização, procuramos diversos trabalhos, entre artigos ou dissertações de mestrados, que abordassem problemas de otimização para esta função, e relacionasse com problemas de sequências, mas dada a especificidade, não encontramos contextos relevantes. Apesar disso, vale ressaltar que esta função aparece frequentemente em diversos contextos da matemática. Alguns dos contextos onde essa função é relevante incluem a Análise de Variância, para medir a soma dos quadrados das diferenças (variância) entre valores observados e seus valores médios, na Regressão e Ajuste de Curvas, como na regressão linear para obter a linha de ajuste. Em métodos numéricos como o Métodos de Mínimos Quadrados, essa soma é minimizada para encontrar a melhor aproximação para um conjunto de dados.

A busca por padrões em sequências, sejam de resultados novos ou de generalizações de resultados conhecidos, mas com modificações na sequência escolhida, problemas de otimização e temas olímpicos são temas recorrente em artigos da própria Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática. Recomendamos a leitura de (COSTA, 2021; SANTOS R.; COSTA, 2022; SPREAFICO E. V.; CATARINO, 2024; VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019; VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2021; VIEIRA; ALVES, 2019) para artigos de sequências em linhas similares a nossa, os artigos (CASTRO C.O.; HEREDIA; OLIVEIRA, 2024; SIQUEIRA; GALVÃO, 2021) para problemas de otimização e (SILVA; VIEIRA; MENEZES, 2020; TEIXEIRA; MOREIRA, 2021) com temas de Olimpíadas de Matemática. Recomendamos também as dissertações de PROFMAT (BRAGAGNOLO, 2020; CONCEIÇÃO, 2021; CUNHA, 2013; SILVA, 2014; FONSECA, 2023; JUNIOR, 2022; KELMER, 2023; SENA, 2013; SOUZA, 2016) que percorrem todos os temas propostos neste artigo.

Este trabalho compõe parte da dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da UFRPE, da primeira autora, sob a orientação do segundo autor e colaboração dos demais autores, ver (AUTORES, 2024). Até onde vai o nosso conhecimento, os resultados aqui apresentados são inéditos.

O trabalho está dividido da seguinte maneira: na Seção 4.1.2, apresentaremos o problema original e sua solução, buscando entender as estruturas envolvidas até a solução. Em seguida, iremos generalizar o problema, fazendo uma alteração no formato que define a função a ser minimizada. Na Seção 4.1.3, apresentaremos as formas do problema quando consideramos casos particulares e com estruturas já conhecidas. A Seção 4.1.4 traz a abordagem com alteração no grau do polinômio e considera os casos do problema original

e com Progressões Aritméticas. A Seção 4.2 contém a perspectiva de como aplicar a teoria desenvolvida nas três primeiras seções para a criação de problemas olímpicos. Por fim, a Seção 4.2.2 traz a conclusão do trabalho.

4.1.2 Análise do Problema Original

Discutiremos o problema proposto na Revista do Professor de Matemática (RPM), edição 105, a fim de observar os elementos estruturais do problema.

Problema 4.1 (Problema 460 da Revista do Professor de Matemática nº 105). *Seja*

$$f_n(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \dots + (x-n)^2,$$

para n inteiro estritamente positivo e x real qualquer. Representamos por M_n o valor mínimo da função f_n .

(a) *Calcule M_n em função de n .*

(b) *Determine o inteiro n para o qual $|M_n - 2022|$ é mínimo.*

Solução. Item (a).

Iniciaremos procurando uma expressão mais simplificada para $f_n(x)$,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (x-1)^2 + (x-2)^2 + \dots + (x-n)^2 \\ &= (x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2) + (x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) + \dots + (x^2 - 2 \cdot n \cdot x + n^2) \\ &= (1 + 1 + \dots + 1)x^2 - 2 \cdot (1 + 2 + \dots + n)x + (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\ &= nx^2 - 2 \left(\frac{(1+n)n}{2} \right) x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= n \left[x^2 - (n+1)x + \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right]. \end{aligned}$$

Na última expressão, completamos quadrados para obter a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n \left[x^2 - (n+1)x + \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\ &= n \left[\left(x - \frac{n+1}{2} \right)^2 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \right] \\ &= n \left(x - \frac{n+1}{2} \right)^2 + \frac{n^3 - n}{12}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_n(x) = n \left(x - \frac{n+1}{2} \right)^2 + \frac{n^3 - n}{12} \geq \frac{n^3 - n}{12}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Logo, a partir da desigualdade acima, segue que $f_n \geq \frac{n^3 - n}{12}$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $x = \frac{n+1}{2}$, o que mostra que o valor mínimo de f_n é $\frac{n^3 - n}{12}$.

No desenvolvimento do cálculo acima trocamos os somatórios por expressões que dependem de n e estão em um formato mais simplificado¹.

Item (b).

Uma vez encontrada a expressão para M_n , o problema se reduz a encontrar o menor valor para a função g , dada por

$$g(n) = \left| \frac{n^3 - n}{12} - 2022 \right|.$$

Para encontrar o menor valor assumido por $g(n)$, devemos encontrar um valor n no qual $\frac{n^3 - n}{12}$ mais se aproxime de 2022.

Para que $\frac{n^3 - n}{12} \approx 2022$, precisamos ter $n^3 - n \approx 24264$, o que é satisfeito para $n = 29$. Com efeito, como n^3 é muito maior do que n à medida que n aumenta, podemos simplificar a procura por um valor de n tal que $n^3 \approx 24264$.

Rapidamente observamos que n precisa ter dois dígitos, uma vez que $100^3 = 1000000$. Como $10^3 = 1000$, ainda um valor longe de 24264, nosso primeiro palpite é $n = 20$, com $20^3 = 8000$, que já está mais próximo. Consideremos agora $n = 30$, encontramos $30^3 = 27000$, valor que excede 24264. As últimas duas estimativas refinam a nossa busca para $20 < n < 30$, com n mais próximo de 30 do que de 20. Agora, basta esgotar os casos.

$$27^3 = 19683, \quad 28^3 = 21952, \quad \text{e} \quad 29^3 = 24389.$$

Dentre os valores acima, o que mais se aproxima de 24264 é $29^3 = 24389$, logo $n = 29$ é o resultado. $\square$

4.1.3 Uma proposta de generalização

Uma vez conhecido um resultado matemático, uma das indagações naturais é saber como se comporta o resultado ao modificar algumas estruturas subjacentes. Com o resultado anterior estabelecido e entendendo a estrutura do problema, vamos considerar agora um caso mais geral, que consiste em substituir os números naturais das diferenças $x - 1, x - 2, \dots, x - n$, por termos de uma sequência qualquer. Mais precisamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere uma função $F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^n (x - a_j)^2,$$

¹ A soma dos n primeiros números naturais é dada por $1 + 2 + 3 + \dots + n - 2 + n - 1 + n = \frac{n(n+1)}{2}$, e a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é dada por $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

em que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são os n primeiros termos de uma dada sequência $(a_n)_{n \geq 1}$. Seja $m_n = m(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ o valor mínimo da função F_n e x_n o valor de x que minimiza F_n .

teorema 1 (Autores). *Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, a função F_n possui um valor mínimo global m_n com*

$$m_n = \sum_{j=1}^n a_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n a_j \right)^2, \quad (4.1)$$

obtido quando

$$x = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j. \quad (4.2)$$

Demonstração. Expandindo F_n , obtemos

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{j=1}^n (x - a_j)^2 = \sum_{j=1}^n (x^2 - 2xa_j + a_j^2) = \left(\sum_{j=1}^n x^2 \right) - \left(2x \sum_{j=1}^n a_j \right) + \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right) \\ &= nx^2 - 2 \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) x + \sum_{j=1}^n a_j^2. \end{aligned}$$

Organizando os termos, podemos proceder de modo análogo ao caso anterior para f_n , de modo a obtermos:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= n \left[x^2 - \frac{2}{n} \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) x + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j^2 \right] \\ &= n \left[x^2 - \frac{2}{n} \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) x + \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j \right)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j \right)^2 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j^2 \right] \\ &= n \left[\left(x - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j \right)^2 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j \right)^2 \right] \\ &= n \left(x - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j \right)^2 + \sum_{j=1}^n a_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n a_j \right)^2 \end{aligned}$$

Assim,

$$F_n(x) = n \left(x - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j \right)^2 + \sum_{j=1}^n a_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n a_j \right)^2 \geq \sum_{j=1}^n a_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n a_j \right)^2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é,

$$F_n \geq \sum_{j=1}^n a_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n a_j \right)^2.$$

E a igualdade ocorre se, e somente se, $x = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$. Portanto, o mínimo da função F_n é

$$m_n = \sum_{j=1}^n a_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n a_j \right)^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^n a_j^2 - \frac{2}{n} \left(\sum_{0 \leq i < j \leq n} a_i a_j \right). \quad (4.3)$$

e ocorre quando

$$x = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j. \quad (4.4)$$

□

Perceba que as estruturas que estão em jogo na busca pela minimalidade de f_n nos forçam a determinar expressões para os seguintes objetos:

$$\sum_{j=1}^n a_j, \quad \sum_{j=1}^n a_j^2 \quad \text{e} \quad \left(\sum_{j=1}^n a_j \right)^2, \quad (4.5)$$

que são, respectivamente, a soma dos n primeiros termos, a soma dos quadrados dos n primeiros termos e, finalmente, o quadrado da soma dos n primeiros termos da sequência (a_n) . Sabemos que essas quantidades são bem comportadas quando a sequência é, por exemplo, uma progressão aritmética. É natural então esperar que m_n e x_n possuam formatos específicos quando considerarmos sequências que possuem determinadas regularidades. É isso que vamos explorar na próxima seção.

4.1.4 Classes de Soluções: Análise de Casos Particulares

Uma vez demonstrado o Teorema 1, apresentaremos a análise de alguns casos particulares. Sugerimos que essas modificações podem se tornar boas questões olímpicas por possuírem estruturas adequadas tanto para questões de múltipla escolha quanto para questões dissertativas. Além disso, assim como o problema original, podemos associar o valor de n ao ano de aplicação, por exemplo. Apresentaremos então o comportamento deste problema quando, em vez de uma sequência arbitrária, consideramos sequências com determinadas particularidades: Progressões Aritméticas e Geométricas.

Para responder os questionamentos, nosso trabalho será procurar por formatos simplificados para x_n e m_n . Para evitar a confusão entre os casos $F_n(x)$ geral, de PA e de PG, manteremos a notação (a_n) para o caso geral, e adotaremos as notações (b_n) e (c_n) para PAs e PGs, respectivamente.

4.1.4.1 O Caso das Progressões Aritméticas

Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência (b_n) que possui uma recorrência de primeira ordem da forma $b_{n+1} - b_n = r$ para todo $n \geq 2$ e r é uma constante a qual chamamos de razão da PA. A lei de formação ou fórmula do termo geral para PAs já é um resultado bastante conhecido, ela nos permite calcular b_n em função de b_1 e r da seguinte forma: $b_n = b_1 + (n - 1)r$. Este formato pode ser estabelecido por meio de um argumento que utiliza somas telescópicas. Ainda sobre estas sequências, a soma dos n

primeiros termos também é um resultado bastante conhecido e não demonstraremos aqui,

$$\sum_{j=1}^n b_j = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n = \frac{(b_1 + b_n)n}{2}. \quad (4.6)$$

Estabelecidos os fundamentos, suponha então que $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ são os termos consecutivos de uma Progressão Aritmética de razão r . Representamos por $m_n = m(r, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ o valor mínimo da função F_n dada por

$$F_n(x) = (x - b_1)^2 + (x - b_2)^2 + \cdots + (x - b_n)^2.$$

Provaremos o seguinte resultado.

Proposição 4.1 (Autores). *Dada uma Progressão Aritmética $(b_n)_{n \geq 1}$ de razão r , então o menor valor para F_n ocorre para*

$$x = \frac{b_1 + b_n}{2} = b_1 + (n-1)\frac{r}{2}, \quad (4.7)$$

e cujo valor é igual a

$$m_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{12}r^2 \quad (4.8)$$

Demonstração. Já sabemos que o mínimo ocorre para x dado por (4.4), assim

$$x = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n b_j = \frac{1}{n} \left(\frac{(b_1 + b_n)n}{2} \right) = \frac{b_1 + b_n}{2} = \frac{b_1 + b_1 + (n-1)r}{2} = b_1 + (n-1)\frac{r}{2}.$$

Na segunda igualdade usamos a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA fornecida na Identidade (4.6). O valor mínimo de F_n é dado por (4.3), logo precisamos assim descobrir o formato destes somatórios em (4.3) quando (b_n) é uma PA. Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n b_j \right)^2 &= \frac{1}{n} \left(\frac{(b_1 + b_n)n}{2} \right)^2 = \frac{n(b_1 + b_n)^2}{4} \\ &= nb_1^2 + b_1n(n-1)r + \frac{n(n-1)^2r^2}{4}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_j^2 &= \sum_{j=1}^n (b_1 + (j-1)r)^2 = \sum_{j=1}^n (b_1^2 + 2b_1r(j-1) + (j-1)^2r^2) \\ &= \sum_{j=1}^n b_1^2 + 2b_1r \sum_{j=1}^n (j-1) + r^2 \sum_{j=1}^n (j-1)^2 \\ &= nb_1^2 + 2b_1r \frac{n(n-1)}{2} + r^2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \end{aligned}$$

Note que o último somatório usamos que $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Assim,

$$\sum_{j=1}^n b_j^2 = nb_1^2 + b_1n(n-1)r + \frac{n(n-1)(2n-1)r^2}{6}. \quad (4.10)$$

Substituindo as expressões dos somatórios obtidos nas Equações (4.9) e (4.10) na Identidade (4.3), obtemos

$$m_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{12}r^2 = \frac{(n^3 - n)r^2}{12}$$

□

Observação 4.2. É interessante perceber que, no caso acima, o valor mínimo m_n não depende da condição inicial, ou de nenhum outro termo da progressão aritmética. Ela depende exclusivamente da quantidade de termos envolvidos e do valor da razão r . Isso significa que no valor mínimo $m(r, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ há dependência apenas dos parâmetros n e r . Por exemplo, se (p_n) e (q_n) são PAs com a mesma razão r , então pelos resultados da Proposição 4.1 podemos concluir que as funções $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por

$$f_n(x) = \sum_{j=k}^{k+n} (x - p_j)^2$$

e

$$g_n(t) = \sum_{j=l}^{l+n} (t - q_j)^2$$

possuem o mesmo valor mínimo $M(n, r) = \frac{n(n-1)(n+1)}{12}r^2$. Isso abre uma grande margem para a criação de bons problemas. Os Problemas 3 e 4 são inspirados nesta observação.

Na figura abaixo, consideramos três funções e ilustramos o mínimo obtido.

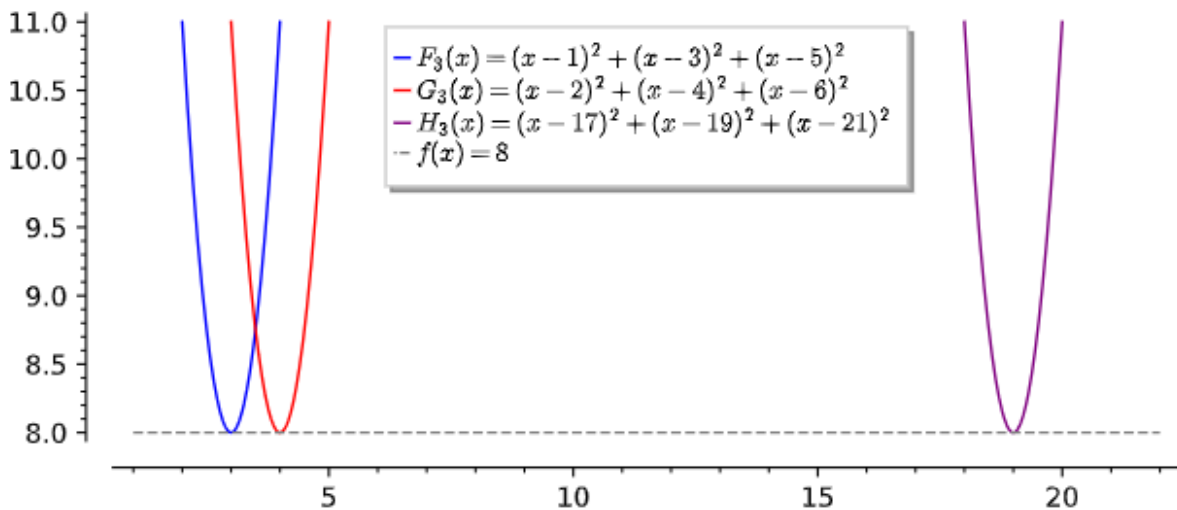


Figura 6 – Caso de funções com $n = 3$ e PAs de mesma razão $r = 2$.

Podemos ver na Figura 6 ver no gráfico que o mínimo para as três funções é o mesmo, e que o gráfico de uma pode ser obtido pela translação horizontal do gráfico da outra.

Observação 4.3. No caso das progressões aritméticas, a expressão para $F_n(x)$ tem o seguinte aspecto

$$F_n(x) = nx^2 - 2 \left(b_1 n + \frac{n(n-1)}{2} r \right) x + nb_1^2 + 2b_1 r \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} r^2.$$

Observação 4.4. O caso degenerado constante está incluído neste caso, basta considerar $r = 0$. O problema original também está incluso, basta considerar $b_1 = r = 1$.

4.1.4.2 O caso das Progressões Geométricas

Faremos uma investigação análoga a anterior, mas agora considerando (c_n) uma progressão geométrica.

Dizemos que (c_n) é uma Progressão Geométrica (PG) quando $\frac{c_{n+1}}{c_n} = q$ para todo $n \geq 2$. É possível mostrar pelo argumento de produtos telescópicos que a lei de formação ou fórmula do termo geral da PG é dado por $c_n = c_1 q^{n-1}$. Também é um resultado bastante conhecido que a soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n = \frac{c_n q - c_1}{q - 1} = \frac{c_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Estamos no ponto de considerar o segundo caso particular.

Proposição 4.5 (Autores). *Dada uma Progressão Geométrica $(c_n)_{n \geq 1}$ de razão q , então o menor valor para F_n ocorre para*

$$x = \frac{c_1(q^n - 1)}{n(q - 1)}, \quad (4.11)$$

e o valor é igual a

$$m_n = \frac{c_1^2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} - \frac{c_1^2(q^n - 1)^2}{n(q - 1)^2}. \quad (4.12)$$

Demonstração. Seguiremos o roteiro da Proposição 4.1, devemos portanto estabelecer uma expressão para as expressões em (4.5) quando (c_n) é uma PG de razão q . Por (4.4), o mínimo é obtido em

$$x = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n c_j = \frac{1}{n} \frac{c_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Por (4.3), o valor mínimo é igual a

$$\begin{aligned} m_n &= \sum_{j=1}^n c_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n c_j \right)^2 = \frac{c_1^2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} - \frac{1}{n} \left(\frac{c_1(q^n - 1)}{q - 1} \right)^2 \\ &= \frac{c_1^2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} - \frac{c_1^2(q^n - 1)^2}{n(q - 1)^2}. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade, explicando o formato do primeiro somatório, perceba que o termo geral é escrito por $c_n = c_1 \cdot q^{n-1}$ dessa forma

$$c_n^2 = (c_1 \cdot q^{n-1})^2 = c_1^2 \cdot (q^2)^{n-1},$$

assim (c_n^2) é uma PG cujo primeiro termo é igual a c_1^2 e a razão é igual a q^2 . Agora, basta usar a expressão para soma dos n primeiros termos.

□

Observação 4.6. Note que para o caso PG, m_n depende do primeiro termo c_1 , da razão q e da posição n . Além disso, a dependência em c_1 no x que nos dá o valor mínimo, e em m_n é de ordem 1 e 2, respectivamente. Isso significa que PGs com termos iniciais opostos possuem um mesmo mínimo m_n , porém o mínimo é obtido em valores x diferentes.

Observação 4.7. No caso das progressões geométricas, $F_n(x)$ assume o seguinte formato

$$F_n(x) = nx^2 - 2c_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}x + c_1^2 \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}.$$

É interessante notar que na situação em que (c_n) é uma PG cuja razão q satisfaz $0 < q < 1$, se $n \rightarrow +\infty$, que consistiria em considerar a expressão $f_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} (x - c_j)^2$, então aplicando o limite quando $n \rightarrow +\infty$ nas Expressões (4.11) e (4.12), obteremos

$$x_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_1(q^n - 1)}{n(q - 1)} = 0$$

e

$$m_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_1^2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} - \frac{c_1^2(q^n - 1)^2}{n(q - 1)^2} = \frac{c_1^2}{1 - q^2}.$$

De modo que m_∞ tem mesmo valor do que a soma dos infinitos termos da PG dos quadrados dos termos, (c_n^2) .

4.1.4.3 O Caso da Sequência de Fibonacci

Até então os casos anteriores consideravam recorrências de primeira ordem. Ao considerarmos a sequência de Fibonacci, teremos então uma modificação que considera uma recorrência de segunda ordem.

A sequência de Fibonacci é uma sequência (d_n) que possui uma recorrência de segunda ordem da forma

$$d_{n+2} = d_{n+1} + d_n, \quad n \geq 1,$$

com $d_1 = 1$ e $d_2 = 1$. Antes de partir para o resultado principal, iremos provar o seguinte lema.

Lema 4.8. *Se (d_n) é a sequência de Fibonacci, então*

$$(i) \sum_{j=1}^n d_j = d_{n+2} - d_2.$$

$$(ii) \sum_{j=1}^n d_j^2 = d_n \cdot d_{n+1}.$$

Demonstração. (i) Escrevendo sucessivamente as recorrências desde a ordem $n + 2$ até d_3 , podemos cancelar sistematicamente o primeiro termo do lado direito da igualdade de cada linha com o termo do lado esquerdo da igualdade da linha imediatamente inferior,

$$\begin{aligned} d_{n+2} &= \cancel{d_{n+1}} + d_n \\ \cancel{d_{n+1}} &= \cancel{d_n} + d_{n-1} \\ &\vdots \\ \cancel{d_4} &= \cancel{d_3} + d_2 \\ \cancel{d_3} &= d_2 + d_1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$d_{n+2} = \left(\sum_{j=1}^n d_j \right) + d_2 \Rightarrow \sum_{j=1}^n d_j = d_{n+2} - d_2.$$

(ii) Utilizaremos o Princípio de Indução Finita². Queremos validar a expressão

$$P(n) = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_{n-1}^2 + d_n^2 = d_n \cdot d_{n+1}.$$

Perceba que para o caso $n = 1$, $d_1^2 = 1^2 = 1$, e $d_1 \cdot d_2 = 1 \cdot 1 = 1$, logo $P(1)$ é verdadeiro.

Suponha que $P(n)$ é verdade, então

$$\begin{aligned} d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_{n-1}^2 + d_n^2 + d_{n+1}^2 &= (d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_{n-1}^2 + d_n^2) + d_{n+1}^2 \\ &= P(n) + d_{n+1}^2 = d_n \cdot d_{n+1} + d_{n+1}^2 \\ &= d_{n+1}(d_n + d_{n+1}) = d_{n+1} \cdot d_{n+2} \\ &= P(n+1). \end{aligned}$$

E o resultado está demonstrado. □

Proposição 4.9 (Autores). *Se $(d_n)_{n \geq 1}$ é a sequência de Fibonacci então o menor valor para f_n ocorre para*

$$x = \frac{d_{n+2} - d_2}{n},$$

e cujo valor é igual a

$$m_n = d_n \cdot d_{n+1} - \frac{(d_{n+2} - d_2)^2}{n}.$$

Demonstração. A demonstração consiste em utilizar as expressões obtidas no Lema 4.8 itens (i) e (ii) para a obter expressões para os somatórios dados em (4.5). Combinando estes resultados com as expressões (4.4) e (4.3), obtemos o resultado. □

² O Princípio de Indução Finita é uma ferramenta utilizada para validar expressões que dependem de números naturais. Este princípio diz que se uma determinada propriedade P que depende de um número natural n , denotada por $P(n)$ satisfaz $P(n_0)$ é verdadeiro e para todo $n \geq n_0$, assumindo que $P(n)$ é verdadeiro implicar que $P(n+1)$ também é verdadeiro, então $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq n_0$.

Observação 4.10. Ainda que demonstrado para um caso particular, ao considerarmos uma sequência com a mesma recorrência que a Sequência de Fibonacci, porém com termos iniciais quaisquer, ou seja, $d_1 = \alpha$ e $d_2 = \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, os resultados dados pelo Lema 4.8 e da Proposição 4.9 ainda são verdadeiros. Perceba que a validade desses resultados dependem da estrutura, ou seja, da recorrência, permanecendo válidos com modificações em seus valores iniciais. Dessa maneira, também provamos o resultado para a Sequência de Lucas, que é a sequência com a mesma recorrência que Fibonacci, porém com termos iniciais $d_1 = 1$ e $d_2 = 3$. Assim, m_n depende do elemento posicional n e também das condições iniciais.

4.2 Generalização no Grau do Polinômio

Apresentaremos uma segunda proposta de generalização que consiste em modificar o grau 2 para um grau par qualquer. Assim, a proposta desta seção é discutir a otimalidade para a seguinte função

$$y_{n,k} = \sum_{j=1}^n (x - a_j)^{2k},$$

em que n e k são inteiros positivos. Utilizando o Teorema Binomial, que pode ser encontrado em (MORGADO et al., 1991), na identidade anterior, obtemos:

$$y_{n,k} = \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{2k} \binom{2k}{m} x^{2k-m} (-a_j)^m = \sum_{m=0}^{2k} \binom{2k}{m} \left(\sum_{j=1}^n (-a_j)^m \right) x^{2k-m}.$$

Uma vez que esta função é polinomial e de grau $2k$, não há um método que seja sistemático para determinar a minimalidade de $y_{n,k}$. Por exemplo, nem pelo método variacional, derivando a expressão, encontrando os pontos críticos, é algo elementar de resolver, uma vez para isso seria necessários estudar os zeros de $y'_{n,k}$ que é polinomial de grau $2k - 1$. Apenas métodos computacionais seriam eficientes para esse fato.

Observando os casos anteriores, indagamos se seria possível replicar a minimalidade com os “mesmo pontos” considerados em cada situação, e é a partir desta ideia que provamos esses resultados. Mais precisamente, usaremos como candidatos os pontos de mínimo obtidos nas seções anteriores, e para provar que um ponto $\bar{x}$ é um ponto de mínimo para uma função y , provaremos que

$$y(\bar{x}) \leq y(\bar{x} + \delta), \quad \text{para todo } \delta \text{ tal que } \bar{x} + \delta \text{ esteja no domínio de } y,$$

e nesse caso $y(\bar{x})$ é o valor mínimo assumido por esta função. É assim que atacaremos os problemas a seguir.

4.2.1 No Problema Original

Sejam n e k números inteiros positivos. Considere a função $f_{n,k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_{n,k}(x) = \sum_{j=1}^n (x-j)^{2k} = (x-1)^{2k} + (x-2)^{2k} + \cdots + (x-n+1)^{2k} + (x-n)^{2k}.$$

Observe que $f_{n,k}(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, $f_{n,k} > 0$. Observando os resultados desenvolvidos no início da Seção 4.1.2, provaremos que o mesmo x que minimiza f_n , também minimiza $f_{n,k}$.

Proposição 4.11 (Autores). *A função $f_{n,k}$ atinge o valor mínimo em $\bar{x} = \frac{n+1}{2}$.*

Demonstração. De fato, defina o número m tal que

$$\begin{aligned} m = f_{n,k}(\bar{x}) &= (\bar{x}-1)^{2k} + (\bar{x}-2)^{2k} + \cdots + (\bar{x}-n+1)^{2k} + (\bar{x}-n)^{2k} \\ &= \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)^{2k} + \left(\frac{n+1}{2} - 2\right)^{2k} + \left(\frac{n+1}{2} - 3\right)^{2k} + \cdots + \\ &\quad \left(\frac{n+1}{2} - n + 2\right)^{2k} + \left(\frac{n+1}{2} - n + 1\right)^{2k} + \left(\frac{n+1}{2} - n\right)^{2k} \\ &= \left(\frac{n-1}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2}\right)^{2k} + \cdots + \left(\frac{3-n}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2}\right)^{2k}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} m &= \left(\frac{n-1}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{n-5}{2}\right)^{2k} + \cdots + \\ &\quad + \left(\frac{5-n}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{3-n}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2}\right)^{2k}. \end{aligned}$$

Agora defina o número $\hat{x}$ por

$$\hat{x} = \bar{x} + \delta = \frac{n+1}{2} + \delta, \quad \text{com } \delta \neq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f_{n,k}(\hat{x}) &= (\hat{x}-1)^{2k} + (\hat{x}-2)^{2k} + (\hat{x}-3)^{2k} + \cdots + \\ &\quad + (\hat{x}-n+2)^{2k} + (\hat{x}-n+1)^{2k} + (\hat{x}-n)^{2k} \\ &= \left(\frac{n+1}{2} + \delta - 1\right)^{2k} + \left(\frac{n+1}{2} + \delta - 2\right)^{2k} + \cdots + \\ &\quad + \left(\frac{n+1}{2} + \delta - n + 1\right)^{2k} + \left(\frac{n+1}{2} + \delta - n\right)^{2k} \\ &= \left(\frac{n-1}{2} + \delta\right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2} + \delta\right)^{2k} + \cdots + \\ &\quad + \left(\frac{3-n}{2} + \delta\right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2} + \delta\right)^{2k} \\ &= \left[\left(\delta + \frac{n-1}{2}\right)^{2k} + \left(\delta - \frac{n-1}{2}\right)^{2k} \right] + \cdots + \\ &\quad + \left[\left(\delta + \frac{n-3}{2}\right)^{2k} + \left(\delta - \frac{n-3}{2}\right)^{2k} \right] \end{aligned} \tag{4.13}$$

Para escrever (4.13) de outra forma, desenvolveremos as expressões em cada colchete. Seja i um número ímpar, utilizando o Teorema Binomial, obtemos,

$$\begin{aligned} \left(\delta + \frac{n-i}{2}\right)^{2k} &= \delta^{2k} + \binom{2k}{1}\delta^{2k-1}\left(\frac{n-i}{2}\right) + \binom{2k}{2}\delta^{2k-2}\left(\frac{n-i}{2}\right)^2 + \\ &\quad + \binom{2k}{3}\delta^{2k-3}\left(\frac{n-i}{2}\right)^3 + \cdots + \binom{2k}{3}\delta^3\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k-3} + \\ &\quad + \binom{2k}{2}\delta^2\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k-2} + \binom{2k}{1}\delta\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k-1} + \left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \left(\delta - \frac{n-i}{2}\right)^{2k} &= \delta^{2k} - \binom{2k}{1}\delta^{2k-1}\left(\frac{n-i}{2}\right) + \binom{2k}{2}\delta^{2k-2}\left(\frac{n-i}{2}\right)^2 + \\ &\quad - \binom{2k}{3}\delta^{2k-3}\left(\frac{n-i}{2}\right)^3 + \cdots - \binom{2k}{3}\delta^3\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k-3} + \\ &\quad + \binom{2k}{2}\delta^2\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k-2} - \binom{2k}{1}\delta\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k-1} + \left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Somando as Identidades (4.14) e (4.15), cancelamos todos os termos opostos de modo a obter

$$\begin{aligned} \left(\delta + \frac{n-i}{2}\right)^{2k} + \left(\delta - \frac{n-i}{2}\right)^{2k} &= 2\delta^{2k} + 2\binom{2k}{2}\delta^{2k-2}\left(\frac{n-i}{2}\right)^2 + \cdots + \\ &\quad + 2\binom{2k}{2}\delta^2\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k-2} + 2\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k} \\ &> 2\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k} \\ &= \left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{i-n}{2}\right)^{2k}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Finalmente, combinando a Desigualdade (4.16) e a Identidade (4.13),

$$\begin{aligned} f_{n,k}(\hat{x}) &> \left(\frac{n-1}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{n-5}{2}\right)^{2k} + \cdots + \\ &\quad + \left(\frac{5-n}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{3-n}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2}\right)^{2k} \\ &= f_{n,k}(\bar{x}) = m, \end{aligned}$$

isto é,

$$f_{n,k}(\bar{x}) < f_{n,k}(\hat{x}) = f_{n,k}(\bar{x} + \delta), \quad \text{para todo } \delta \neq 0.$$

Portanto, o valor mínimo da função $f_{n,k}$ é m e é atingido quando $x = \bar{x} = \frac{n+1}{2}$. $\square$

Na figura abaixo, consideramos a função $f_{4,k}(x)$ e escolhemos três valores para k . Podemos ver no gráfico, o ponto de mínimo é o mesmo.

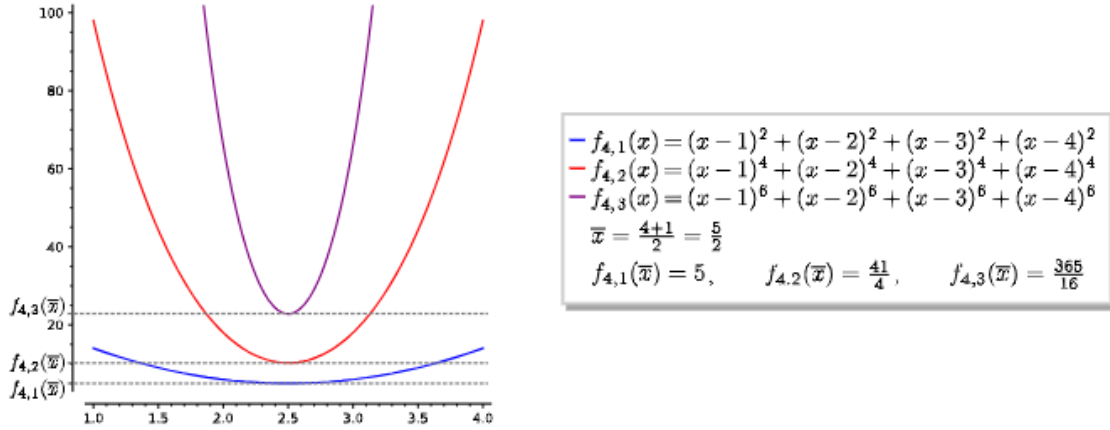


Figura 7 – Representação dos gráficos de $f_{4,k}$ para $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$. Os valores mínimos $f_{4,k}(\bar{x})$ são distintos, mas obtidos no mesmo valor $\bar{x}$.

Observação 4.12. Com o resultado acima estabelecido, percebe-se que alterações considerando graus pares não altera a localidade x para obtenção do valor mínimo. Provamos assim que a família de funções $f_{n,k}$ com $k \in \mathbb{Z}_+^*$ possuem o mesmo ponto de mínimo $x = \frac{n+1}{2}$, sendo f_n o caso particular com $k = 1$.

4.2.1.1 No Caso das Progressões Aritméticas

Sejam a e r números reais e n, k números inteiros positivos. Considere a função $f_{n,k,a,r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} f_{n,k,a,r}(x) = & [x - (a + r)]^{2k} + [x - (a + 2r)]^{2k} + \cdots + \\ & + [x - (a + (n - 1)r)]^{2k} + [x - (a + nr)]^{2k} \end{aligned}$$

Observe que nesse contexto mais geral, o caso anterior é um problema em particular quando $a = 0$ e $r = 1$, isto é, $f_{n,k} = f_{n,k,0,1}$. Pela Proposição 4.1, o valor mínimo é encontrado pela Identidade (4.7) como a média aritmética entre o primeiro e último termo. Veremos que isso também acontece para o caso mais geral na dimensão. Sem perda de generalidade, na demonstração a seguir, consideramos a PA começando do termo $a + r$ e com razão r , apenas para facilitar a escrita dos termos.

Proposição 4.13 (Autores). *A função $f_{n,k,a,r}$ possui um valor mínimo no ponto*

$$x = \bar{x} = \frac{(a + r) + (a + nr)}{2} = a + \frac{1}{2}(n + 1)r.$$

Demonstração. De fato, seja $\mathbf{M}$ um número dado por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= f_{n,k,a,r}(\bar{x}) = [\bar{x} - (a+r)]^{2k} + [\bar{x} - (a+2r)]^{2k} + \cdots + \\
 &\quad + [\bar{x} - (a+(n-1)r)]^{2k} + [\bar{x} - (a+nr)]^{2k} \\
 &= \left[a + \frac{1}{2}(n+1)r - (a+r) \right]^{2k} + \left[a + \frac{1}{2}(n+1)r - (a+2r) \right]^{2k} + \cdots + \\
 &\quad + \left[a + \frac{1}{2}(n+1)r - (a+(n-1)r) \right]^{2k} + \left[a + \frac{1}{2}(n+1)r - (a+nr) \right]^{2k} \\
 &= \left[\frac{1}{2}(n+1)r - r \right]^{2k} + \left[\frac{1}{2}(n+1)r - 2r \right]^{2k} + \\
 &\quad + \left[\frac{1}{2}(n+1)r - 3r \right]^{2k} + \cdots + \left[\frac{1}{2}(n+1)r - (n-2)r \right]^{2k} + \\
 &\quad + \left[\frac{1}{2}(n+1)r - (n-1)r \right]^{2k} + \left[\frac{1}{2}(n+1)r - nr \right]^{2k},
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \left(\frac{n-1}{2}r \right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2}r \right)^{2k} + \left(\frac{n-5}{2}r \right)^{2k} + \cdots + \\
 &\quad + \left(\frac{5-n}{2}r \right)^{2k} + \left(\frac{3-n}{2}r \right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2}r \right)^{2k} \\
 &= r^{2k} \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2} \right)^{2k} + \cdots + \left(\frac{3-n}{2} \right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2} \right)^{2k} \right].
 \end{aligned}$$

Seja $\hat{x}$ um número real qualquer. Então, podemos escrever $\hat{x}$ da seguinte maneira:

$$\hat{x} = \bar{x} + \delta, \quad \text{com } \delta \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 f_{n,k,a,r}(\hat{x}) &= [\hat{x} - (a+r)]^{2k} + [\hat{x} - (a+2r)]^{2k} + \cdots + \\
 &\quad + [\hat{x} - (a+(n-1)r)]^{2k} + [\hat{x} - (a+nr)]^{2k} \\
 &= \left(\frac{n-1}{2}r + \delta \right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2}r + \delta \right)^{2k} + \cdots + \\
 &\quad + \left(\frac{3-n}{2}r + \delta \right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2}r + \delta \right)^{2k} \\
 &= \left[\left(\delta + \frac{n-1}{2}r \right)^{2k} + \left(\delta - \frac{n-1}{2}r \right)^{2k} \right] + \\
 &\quad + \left[\left(\delta + \frac{n-3}{2}r \right)^{2k} + \left(\delta - \frac{n-3}{2}r \right)^{2k} \right] + \cdots
 \end{aligned}$$

Aqui usamos um abuso de notação. Queremos que as reticências sejam entendidas apenas como as escritas de termos semelhantes aos que já estão escritos, e que a soma é finita. A escrita simbólica nesse caso é ineficiente porque não sabemos se n é par ou ímpar.

Seja i um número ímpar e T_i como definido abaixo:

$$T_i = \left(\delta + \frac{n-i}{2}r \right)^{2k} + \left(\delta - \frac{n-i}{2}r \right)^{2k}.$$

Considerando o Teorema Binomial em T_i , podemos cancelar os termos de ordem ímpar, assim:

$$\begin{aligned} T_i = & \binom{2k}{0} \delta^{2k} + \cancel{\binom{2k}{1} \delta^{2k-1} \left(\frac{n-i}{2}r \right)^1} + \binom{2k}{2} \delta^{2k-2} \left(\frac{n-i}{2}r \right)^2 + \cdots + \\ & + \binom{2k}{2} \delta^2 \left(\frac{n-i}{2}r \right)^{2k-2} + \cancel{\binom{2k}{1} \delta^1 \left(\frac{n-i}{2}r \right)^{2k-1}} + \left(\frac{n-i}{2}r \right)^{2k} + \cdots + \\ & + \binom{2k}{0} \delta^{2k} - \cancel{\binom{2k}{1} \delta^{2k-1} \left(\frac{n-i}{2}r \right)^1} + \binom{2k}{2} \delta^{2k-2} \left(\frac{n-i}{2}r \right)^2 + \cdots + \\ & - \cancel{\binom{2k}{1} \delta^1 \left(\frac{n-i}{2}r \right)^{2k-1}} + \left(\frac{n-i}{2}r \right)^{2k}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$T_i = \left(\delta + \frac{n-i}{2}r \right)^{2k} + \left(\delta - \frac{n-i}{2}r \right)^{2k} \geq \left(\frac{n-i}{2}r \right)^{2k} + \left(\frac{i-n}{2}r \right)^{2k}.$$

Combinando a desigualdade acima e $f_{n,k,a,r}$, concluímos que

$$\begin{aligned} f_{n,k,a,r}(\hat{x}) & \geq \left(\frac{n-1}{2}r \right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2}r \right)^{2k} + \left(\frac{n-5}{2}r \right)^{2k} + \cdots + \\ & + \left(\frac{5-n}{2}r \right)^{2k} + \left(\frac{3-n}{2}r \right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2}r \right)^{2k} \\ & = r^{2k} \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2} \right)^{2k} + \cdots + \left(\frac{3-n}{2} \right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2} \right)^{2k} \right] \\ & = \mathbf{M}. \end{aligned}$$

Portanto, o valor mínimo da função $f_{n,k,a,r}$ é $\mathbf{M}$ e é atingido quando

$$x = \bar{x} = a + \frac{1}{2}(n+1)r.$$

□

Observação 4.14. Em particular, este caso mais geral engloba os resultados provados anteriormente:

- Do problema original da RPM 105, quando $a = 0$, $r = 1$ e $k = 1$;
- Da Proposição 4.1 quando $k = 1$;
- Da Proposição 4.11 quando $a = 0$ e $r = 1$.

Observação 4.15. Novamente, neste caso o valor mínimo denotado por $\mathbf{M}$, não depende do termo inicial, apenas da razão (r), do expoente (k) e da quantidade de termos (n).

4.2.2 Contribuições do artigo

Ao final deste artigo, emergem conexões inovadoras entre os conteúdos de funções quadráticas e sequências numéricas, em consonância com os princípios de interdisciplinaridade propostos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Demonstramos como é viável quantificar a otimalidade de uma função quadrática através de somatórios que integram elementos de sequências, destacando a relevância de cada conteúdo na investigação do problema proposto. Vimos que ao considerarmos um expoente par qualquer, o conteúdo também tem conexões com o Teorema Binomial e com a noção de minimalidade por meio da uma desigualdade, e que os resultados poderiam ser obtidos a partir dos candidatos a mínimo encontrados no caso de expoente 2. Precisamente provamos cinco novos resultados que estão nas Proposições 1 até 5.

Ao explorar estruturas interdisciplinares, investigamos casos específicos envolvendo Progressões Aritméticas (PAs), Progressões Geométricas (PGs), Sequência de Fibonacci, observando a simplificação dos somatórios nessas configurações particulares. Essa abordagem amplia a compreensão dos estudantes, oferecendo uma visão integrada dos conteúdos matemáticos e fomentando a articulação entre o mesmos, conforme preconizado pela BNCC. Além disso, partindo das conclusões obtidas, reformulamos a teoria desenvolvida sob uma perspectiva da resolução de problemas. Especificamente, propomos uma série de nove problemas inéditos com perfil semelhante ao das Olimpíadas Matemáticas que, não apenas estimulam a aplicação dos conhecimentos matemáticos, como evidenciam a importância da interdisciplinaridade para uma educação integral. Essas ações podem promover uma aprendizagem significativa e contextualizada. Essa abordagem visa, não apenas o desenvolvimento de habilidades matemáticas avançadas, mas também, a integração de diferentes conteúdos.

4.2.3 Agradecimentos

Agradecemos ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) pelo apoio nos projetos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), Polo Recife, e no Projeto de Extensão da UFRPE Polo de Treinamento Olímpico em Matemática (PTOM - UFRPE). Também expressamos nossa gratidão ao Programa de Pós-Graduação de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) pelo suporte fundamental e apoio contínuo oferecido ao longo deste trabalho.

Aqui finaliza a versão estendida do artigo.

4.3 Sequência Didática

Direcionaremos uma proposta de Sequência Didática a ser aplicada no Ensino Básico.

- **Público-alvo:** Alunos a partir do 1º ano do Ensino Médio.
- **Tema:** Problemas Extremais Quadráticos e Sequências Numéricas.
- **Conteúdos trabalhados:** Conceitos e propriedades Função Quadrática, Progressão Aritmética e Progressão Geométrica.
- **Objetivo:** Apresentar a resolução do Problema 460 da “Revista do Professor de Matemática” (RPM), número 105, explorando alguns conteúdos da Matemática que são vistos em momentos distintos no Ensino Básico: as funções quadráticas e as sequências. E, também, abordar esse tema na perspectiva olímpica com criação de problemas semelhantes aos das Olimpíadas de Matemática.
- **Habilidades (BNCC, (BRASIL, 2018, p.541)):**

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

- **Materiais necessários:** Cópias do artigo *Investigando uma nova classe de solução para um problema extremal com sequências numéricas* do periódico *Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática*; Um projetor para exibir os exemplos e problemas; Quadro branco e piloto para resolução dos exemplos e problemas; E materiais escolares como caneta, lápis, caderno e borracha para os alunos resolverem os problemas.
- **Duração:** 8 aulas de 50 minutos. As aulas podem ser unidas em duas ou mais aulas, unindo também as metas de cada aula.
- **Aula 1**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos.

Será fornecido aos alunos apenas cópias do Problema 460 da "Revista do Professor de Matemática" (RPM), número 10.

Será feita uma breve introdução sobre a "Revista Professor de Matemática" e o que será estudado na aula.

Será apresentado o Problema 460 da "Revista do Professor de Matemática" (RPM), número 10, e será dado tempo para os alunos tentarem resolvê-lo, podendo ser de forma individual, em dupla ou em grupo.

- **Aula 2**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos.

O professor responderá o Problema 460 da "Revista do Professor de Matemática" (RPM), número 10, para a turma.

Será feita uma discussão com a turma sobre o comportamento do resultado ao considerar termos de uma sequência qualquer.

- **Aula 3**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos.

Será fornecido cópias do artigo aos alunos.

Será feita uma revisão do que foi trabalhado até aqui.

Será apresentado e demonstrado o teorema 1 do artigo.

- **Aula 4**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e a cópia do artigo fornecido na última aula.

Será feita uma revisão do que foi trabalhado na última aula.

Será apresentado e demonstrado o caso de solução particular das Progressões Aritméticas: proposição 4.1.

- **Aula 5**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e a cópia do artigo fornecido na última aula.

Será feita uma breve revisão sobre o caso de solução particular das Progressões Aritméticas: proposição 4.1.

Será apresentado e demonstrado o caso de solução particular das Progressões Geométricas: proposição 4.5.

- **Aula 6**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e a cópia do artigo fornecido na última aula.

Será feita uma breve revisão sobre o caso de solução particular das Progressões Geométricas: proposição 4.5.

Será apresentado e demonstrado o caso de solução particular da Sequência de Fibonacci: Lema 4.8 e proposição 4.9.

- **Aula 7**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e a cópia do artigo fornecido na última aula.

Será apresentado e demonstrado o caso da generalização no grau do polinômio e proposição 4.11.

- **Aula 8**

Os alunos devem estar sentados no formato tradicional da sala de aula com seus devidos materiais didáticos e a cópia do artigo fornecido na última aula.

Será apresentado e demonstrado o caso da proposição 4.13.

Vimos, nesse Capítulo, o último artigo desse trabalho denominado “*Investigando Novas Classes de Soluções para um Problema Extremal com Sequências Numérica*”. A análise resolução dos problemas extremais, desse artigo, envolvendo sequências numéricas e funções polinomiais, juntamente com a generalização para polinômios de grau par, nos permitiu explorar novas possibilidades e aprofundar o conhecimento sobre essas estruturas matemáticas. Finalizando a sessão com uma Sequência Didática direcionada aos alunos do Ensino Médio.

5 Considerações Finais

Nesta dissertação, abordamos extensivamente os conceitos de sequências numéricas, progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG). Nossa pesquisa resultou na publicação de três artigos científicos, cujas versões expandidas foram incluídas neste trabalho. Esses artigos representam contribuições significativas e inovadoras, demonstrando a aplicabilidade e relevância desses tópicos dentro do contexto do ensino da matemática.

No primeiro artigo, detalhamos o tema das Progressões Geométricas (PGs), utilizando problemas retirados de Olimpíadas, vestibulares e materiais de programas de treinamentos olímpicos nacionais e internacionais. A abordagem estabelece uma relação estreita entre os conceitos envolvidos e sua aplicação na resolução de problemas com perfil olímpico ou de concurso, além de apresentar diferentes possibilidades de soluções. Esse trabalho oferece uma fonte de estudo valiosa tanto para discentes quanto para docentes interessados em PGs e matemática olímpica.

O segundo artigo apresenta e soluciona uma classe de problemas extremos quadráticos envolvendo sequências numéricas. Investigamos os elementos estruturais dos problemas e apresentamos soluções para casos particulares bem comportados, considerando a sequência como uma progressão aritmética ou geométrica. Os resultados, inéditos até onde sabemos, foram orientados pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), enfatizando a importância da interdisciplinaridade e da resolução de problemas no ensino da matemática. Este artigo é uma consequência direta dos estudos realizados no mestrado profissional (PROFMAT-UFRPE).

No terceiro artigo, adotamos uma abordagem interdisciplinar para resolver problemas relacionados às ternas pitagóricas envolvendo Progressões Aritméticas, Progressões Geométricas e a Sequência de Fibonacci. Provamos a existência de ternas pitagóricas no caso das PAs e a inexistência para PGs e a Sequência de Fibonacci. Os resultados apresentados são inéditos e representam uma contribuição significativa ao conhecimento sobre sequências numéricas. Este trabalho também é fruto dos estudos desenvolvidos no mestrado profissional (PROFMAT-UFRPE).

Para cada um dos artigos, que foram organizados em capítulos, propomos sequências didáticas que podem ser aplicadas no Ensino Básico. Essas sequências didáticas são valiosas por diversas razões. Primeiramente, elas permitem a contextualização de conceitos abstratos, facilitando a compreensão dos alunos. Além disso, promovem o desenvolvimento do pensamento crítico e a capacidade de resolver problemas complexos, habilidades essenciais para a formação acadêmica e profissional dos estudantes. A implementação dessas sequências no Ensino Básico também pode incentivar o interesse pela matemática

e pela participação em competições olímpicas, ampliando o horizonte educacional dos alunos.

Em suma, esta dissertação oferece uma visão aprofundada e prática sobre sequências numéricas, PA e PG, reforçando a importância desses tópicos no currículo educacional. As contribuições apresentadas enriquecem a literatura acadêmica e fornecem recursos valiosos para educadores, evidenciando o impacto positivo da pesquisa no ensino da matemática.

Acreditando nas potencialidades desta dissertação, pretendemos implementar cada uma das Sequências Didáticas apresentadas no Ensino Básico, por meio da intervenção nas escolas onde a autora leciona. E a partir das experiências, apresentar os resultados destas intervenções em trabalhos futuros.

Por fim, acreditando na diversidade de bons problemas envolvendo o tema das Sequências Numéricas e, em virtude da criação do programa de doutorado do PROFMAT, continuaremos os estudos e pesquisas neste tema, visando o ingresso no doutorado.

Referências

ARAÚJO, Y. L. R.; SANTOS, H. P. d. S. Recorrências lineares. *É Matemática, Oxente!*, Recife, v. 1, n. 23, p. 2–10, jun. 2022. Disponível em: <https://ematematicaoxente.com.br/wp-content/uploads/2023/03/jornal_23ed.pdf>.

Art of Problem Solving. *1999 AMC 12 Problems*. 1999. Disponível em: <https://artofproblemsolving.com/downloads/printable_post_collections/4863>.

Art of Problem Solving. *2016 AMC 12B Problems*. 2016. Disponível em: <https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2016_AMC_12B_Problems/Problem_14>.

AUTORES. *Um Estudo Sobre Sequências Numéricas: Novos Resultados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2024.

ÁVILA, G. As séries infinitas. *Revista do Professor de Matemática*, v. 30, ed. 30. Disponível em: <<https://www.rpm.org.br/cdrpm/30/3.htm>>.

BARBOZA, E. M.; TANAKA, T. Y.; CAMPOS, G. P. Uma abordagem olímpica das progressões geométricas. *É Matemática, Oxente!*, Recife, v. 1, n. 29, p. 2–13, 2023. Disponível em: <https://ematematicaoxente.com.br/wp-content/uploads/2023/12/jornal_29ed.pdf>.

BICKNELL-JOHNSON, M. Pythagorean triples containing fibonacci numbers: Solutions for $f_n^2 + f_k^2 = k^2$. *The Fibonacci Quarterly*, v. 17, p. 1–12, 1979.

BOGOMOLNY, A. *Pythagorean Triples via Fibonacci Numbers*. s.d. Disponível em: <<https://www.cut-the-knot.org/Outline/Combinatorics/PythagoreanFibonacci.shtml>>.

BRAGAGNOLO, C. P. S. *Polinômios e sequências reais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2020.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da educação, 2018.

CARMO, M.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria Números Complexos*. [S.l.]: SBM, 2005.

CARVALHO P. C. P.; MORGADO, A. C. *Matemática discreta*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2015.

CASTRO, A. T. G.; TANAKA, T. Y.; CAMPOS, G. P. Ternas pitagóricas e sequências numéricas: Novos resultados. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 9, n. 4, 2024. Disponível em: <<https://periodicos.ufs.br/ReviSe/issue/view/1352>>.

CASTRO C.O.; HEREDIA, M.; OLIVEIRA, A. o teorema de goldman-tucker para problemas de otimização linear canalizados. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 9, n. 1, p. 120–136, 2024. Disponível em: <<https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/19557>>.

- CEZAR, P. *Rede La Salle Sobradinho. Lista de Exercícios*. s.d. Disponível em: <<https://lasalle.edu.br/public/uploads/publications/sobradinho/307145f461bbf713a77e44ffdc58cfaa.pdf>>.
- COMUNUNITY MATHEMATICS CENTRE CoMaC. *How many primitive Pythagorean triples in arithmetic progression*. [S.l.]: Right Angles, 2012.
- CONCEIÇÃO, A. P. *Sequências recursivas e métodos iterativos aplicados no ensino básico: aplicações em raízes irracionais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Londrina, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2021.
- COSTA, E. Os números mágicos de ball e a sequência de fibonacci. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 6, n. 1, p. 19–25, 2021. Disponível em: <<https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/14066>>.
- CUNHA, M. M. *Progressão Aritmética, Geométrica e Fractais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2013.
- É Matemática, OXENTE! O jornal de Matemática Olímpica. *Apresentação*. 2024. Disponível em: <<https://ematematicaoxente.com.br/>>.
- FILHO, M. A. S.; ALBUQUERQUE, A. C. C. Geometria fractal: alguns “monstros” famosos. *É Matemática, Oxente!*, Recife, v. 1, n. 12, p. 1–9, set. 2019. Disponível em: <https://ematematicaoxente.com.br/wp-content/uploads/2023/03/jornal_12ed.pdf>.
- FONSECA, L. C. *Desvendando as sequências de Fibonacci, Lucas e Gibonacci*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2023.
- FRAENKEL, R. Logaritmos: Um curso alternativo. *Revista do Professor de Matemática*, v. 4, Rio de Janeiro. Disponível em: <<https://www.rpm.org.br/cdrpm/4/5.htm>>.
- Fundação Mariana Resende Costa(FUMARC). *Fundação Mariana Resende Costa(FUMARC)*. 2017. Disponível em: <<https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/92de92d7-86>>.
- GARCIA, F. L. *OLIMPIADAS MATEMÁTICAS: UM CAMINHO PARA O FUTURO*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Londrina, 2017.
- HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2004.
- HORADAM, A. F. Fibonacci number triples. *The American Mathematical Monthly*, v. 68, n. 8, p. 751–753, 1961.
- IMO. *Olimpiada internacional de Matematica*. 2024. Disponível em: <<https://www.imo-official.org/?language=es>>.
- Indian Statistical Institute (ISI) entrance Bachelor of Statistics (Honours) - 2003, Problem 3. *Indian Statistical Institute (ISI) entrance Bachelor of Statistics (Honours) - 2003, Problem 3*. 2003. Disponível em: <<https://www.cheenta.com/geometric-progression-isi-entrance-b-stat-hons-2003-problem-3/>>.

Instituto Federal De Educação, Ciências e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN) - Projeto de extensão. *PA e PG*. s.d. Disponível em: <<https://annway.github.io/assets/doc/material/cme/aula15PaPg.pdf>>.

JUNIOR, E. W. *Identidades envolvendo números da sequência de Fibonacci demonstradas por prova combinatorial e indução finita*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2022.

KELMER, L. R. G. *Um Estudo De Progressão Aritmética No Ensino Médio Com Uso De Uma Planilha Eletrônica Gratuita*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Centro de Ciências Exatas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2023.

LAGRANGE, J.; LEECH, J. Pythagorean ratios in arithmetic progression, part ii. *Glasgow Mathematical Journal*, v. 36, n. 1, p. 45–55, 1994.

LARSON, R. *Cálculo aplicado*. [S.l.]: Editora: Cengage Learning, 2011.

LII Olimpiada Matemática Española. *LII Olimpiada Matemática Española*. 2016. Disponível em: <http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimp2016_archivos/fase_nacional_problemas/enunciados.pdf>.

LIMA, E. L. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 1997.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. [S.l.]: SBM, Rio de Janeiro, 2013.

LIRA, E. H. C. D. Uma introdução às desigualdades. *É Matemática, Oxente!*, Recife, v. 1, n. 17, p. 5–6, dez. 2020. Disponível em: <https://ematematicaoxente.com.br/wp-content/uploads/2023/03/jornal_17ed.pdf>.

MAGAGNANGMO, A.; LUTZ, M. R. *Caderno Didático 3. Progressão Aritmética e Progressão Geométrica*. 2020. Disponível em: <<https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/705091/2/3%20SI%20Progressao%20aritmetica%20e%20geometrica.pdf>>.

MARTINEZ, F. B. et al. *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

MARTINS, A. C. d. J.; VIANA, M. N. G.; COSTA, M. d. S. Diferentes abordagens da resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem de matemática. *Periferia*, Rio de Janeiro, v. 15, p. 1–22, jul. 2023. Disponível em: <<https://www.e-publicacoes.uerj.br/periferia/article/view/74665/47214>>.

Material POTI - Recorrências - Parte I. *Material POTI - Recorrências - Parte I*. s.d. Disponível em: <https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/cg5bhn7jgkoos.pdf>.

Material POTI - Sequências. *Material POTI - Sequências*. s.d. Disponível em: <https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/diqafy8dofks4.pdf>.

MELO, S. Indicações de leituras. *É Matemática, Oxente!*, Recife, v. 1, n. 8, p. 7, set. 2018. Disponível em: <https://ematematicaoxente.com.br/wp-content/uploads/2023/03/jornal_8ed.pdf>.

MILANI, W. N. *A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO FERRAMENTA PARA A APRENDIZAGEM DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, 2011. Disponível em: <<https://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/2447>>.

Ministério da Educação - MEC. *Olimpiada de Matemática*. 2019. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/12-acoes-programas-e-projetos-637152388/81801-alunos-do-4-e-5-anos-do-ensino-fundamental-fazem-prova-nesta-terca-feira-29>>.

MOREIRA, C. G. T. A. *Tópicos de Teoria dos Números*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MORGADO, A. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. [S.l.]: SBM - Rio de Janeiro, 1991.

NASCIMENTO, E. C. A.; TANAKA, T. Y.; SILVA, B. C. D. Equações diofantinas lineares e não lineares: uma abordagem por meio de questões de olimpíadas de matemática. *Revista Professor de Matemática Online*, v. 10, n. 3, 2022. Disponível em: <<https://pmo.sbm.org.br/volumes-anteriores/>>.

NETO, A. M. *Tópicos de Matemática Elementar: Teoria dos números*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2012.

OBMEP Banco de Questões 2014. *OBMEP Banco de Questões 2014*. 2014. Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/1iLIHuWVHyTbng4cgd6RLYWuOwB2cCAfz/view>>.

OBMEP Banco de Questões 2018. *OBMEP Banco de Questões 2018*. 2018. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1dxEDt_-5HyFg8I1MXlaZJo0a03axzWqq/view>.

Olimpíada Brasileira de Matemática. *Olimpíada Brasileira de Matemática*. 2011. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/1Fase_NivelU_2011.pdf>.

Olimpíada Brasileira de Matemática. *Historico da olimpiada de matematica*. 2024. Disponível em: <<https://www.obm.org.br/quem-somos/historico/>>.

Olimpíada Pernambucana de Matemática. *Olimpíada Pernambucana de Matemática*. 2016. Disponível em: <<https://www.opemat.com.br/uploads/provasgabaritos/2016-nivel3.pdf>>.

OLIVEIRA, A. L. C. *O Teorema de Pitágoras: Demonstrações e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2013.

OPEMAT. *Olimpiada Pernambucana de Matematica*. 2023. Disponível em: <<https://www.opemat.com.br/>>.

Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. *Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo*. 2012. Disponível em: <<https://poti.impa.br/>>.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. [S.l.: s.n.], 1945.

Portal da Matemática OBMEP: Material Teórico - Tópicos Adicionais - Recorrências - Parte 2. *Portal da Matemática OBMEP: Material Teórico - Tópicos Adicionais - Recorrências - Parte 2*. s.d. Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/647s36qnyv40k.pdf>.

Pre-Regional Mathematical Olympiad. *Pre-Regional Mathematical Olympiad*. 2017. Disponível em: <<https://www.cheenta.com/geometric-progression-and-integers-prmo-2017-question-5/>>.

Programa de Iniciação Científica Jr. *Teorema de Pitágoras e Área*. 2015. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf>>.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG) – LISTA - RESUMO. *PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG) – LISTA-RESUMO*. s.d. Disponível em: <https://files.comunidades.net/professorjhonnes/PROGRESSAO_GEOMETRICA.pdf>.

QUESTÕES ITA 1975 Matemática. 1975. Disponível em: <<https://cosseno.com/questoes/ITA/1975/Matematica>>.

QUORA. *What numbers have three Pythagorean partners in geometric progression?* s.d. Disponível em: <<https://www.quora.com/What-numbers-have-three-Pythagorean-partners-in-geometric-progression>>.

RICHIT, L. A.; RICHIT, A.; RICHIT, A. Solução particular de equações diofantinas lineares $ax + by = c$ via abordagem por substituição progressiva do algoritmo de euclides. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, Sergipe, v. 6, n. 3, p. 97–122, 2021. Disponível em: <<https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/15046>>.

RPM. *Revista do Professor de Matemática*, v. 105, 2022. Disponível em: <<https://rpm.org.br/>>.

SANTOS R.; COSTA, E. A. Números de ball generalizados. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 7, n. 1, p. 61–85, 2022. Disponível em: <<https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/16202>>.

SENA, C. A. R. *Sequência de Fibonacci: Propriedades, Aplicações e Curiosidades*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2013.

SILVA, C. M. D. *Propriedades Aritméticas e Geométricas da Ternas Pitagóricas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Feira de Santana, Departamento de Ciências Exatas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2014.

SILVA, J. G. A. D.; VIEIRA, F. R. A.; MENEZES, D. B. Aspectos da teoria das situações didáticas aplicada ao ensino de geometria plana referente a problemas das olimpíadas de matemática com amparo do software geogebra. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 5, n. 2, p. 328–342, 2020. Disponível em: <<https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/13325>>.

SIQUEIRA, E.; GALVÃO, M. E. E. L. Problemas de otimização e mudança de quadros em um trabalho com participantes de um curso de engenharia. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 6, n. 3, p. 21–39, 2021. Disponível em: <<https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/14149>>.

- SOUZA, I. R. S. *Relação entre função exponencial e progressão geométrica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2016.
- SOUZA, R. R. M. D. *PROGRESSÕES: PROBLEMAS E SOLUÇÕES*. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ, Departamento de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2021.
- SOUZA, W. S. D. *PROGRESSÃO GEOMÉTRICA*. s.d. Disponível em: <https://daffy.ufs.br/uploads/page_attach/path/9439/Matematica_A_2a_2serie.pdf>.
- SPREAFICO E. V.; CATARINO, P. M. M. C. Sobre os números generalizados de oresme e o sistema fundamental de fibonacci. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 9, n. 1, p. 68–80, 2024. Disponível em: <<https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/19912>>.
- STEWART, J. *Cálculo I*. [S.l.]: Editora: Cengage Learning, 2016.
- TAHAM, M. *O Homem que Calculava*. 83. ed. Rio de Janeiro: Record, 1981.
- TEIXEIRA, C. D. J.; MOREIRA, G. E. Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas: Uma análise de evidências de validade de conteúdo. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 6, n. 1, p. 1–25, 2021. Disponível em: <<https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/13801>>.
- UNICAMP. *2 fase*. 1987. Disponível em: <<https://vestibulares.estrategia.com/public/questoes/lados-trianguulo252eef439f/>>.
- VERMA, P. Infinite kepler triangles. *At Right Angles*, n. 10, p. 70–72, 2021.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Identidades tribonacci. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 4, n. 1, p. 216–226, 2019. Disponível em: <<https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/9823>>.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relações bidimensionais e identidades da sequência de leonardo. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 4, n. 2, p. 156–173, 2019. Disponível em: <<https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/11863>>.
- VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A generalização dos quatérnios de narayana. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 6, n. 3, p. 12–22, 2021. Disponível em: <<https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/14975>>.
- VITAL, P.; TANAKA, T. Y.; GUEDES, G. Progressão aritmética e triângulo aritmético de números Ímpares. *É Matemática, Oxente!*, Recife, v. 1, n. 27, p. 2–13, jul. 2023. Disponível em: <https://ematematicaoxente.com.br/wp-content/uploads/2023/03/jornal_23ed.pdf>.