



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Jadson Moura de Castro

**Utilizando a linguagem de programação Scratch para fortalecer
competências relacionadas à função quadrática no Ensino Médio**

RECIFE
2024



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Jadson Moura de Castro

**Utilizando a linguagem de programação Scratch para fortalecer
competências relacionadas à função quadrática no Ensino Médio**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento
de Matemática da Universidade Federal Rural de Per-
nambuco como requisito parcial para obtenção do título
de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dra. Tarciana Maria Santos da Silva

RECIFE

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecária: Suely Manzi – CRB/4 - 809

C355u Castro, Jadson Moura de
Utilizando a linguagem de programação Scratch para fortalecer
competências relacionadas à função quadrática no ensino médio /
Jadson Moura de Castro. – 2024.
120 f.: il.

Orientadora: Tarciana Maria Santos da Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) –
Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de
Matemática, Recife, BR-PE, 2024.
Inclui bibliografia e apêndice(s).

1. Scratch (Linguagem de programação de computador)
2. Linguagem de programação (Computadores) 3. Funções
(Matemática) 4. Ensino médio 5. Matemática – Estudo e ensino
I. Silva, Tarciana Maria Santos da, orient. II. Título

CDD 510

JADSON MOURA DE CASTRO

Utilizando a linguagem de programação Scratch para fortalecer competências relacionadas à função quadrática no Ensino Médio

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 03/09/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dra. Tarciana Maria Santos da Silva(Orientadora) –PROFMAT/UFRPE

Prof. Dr. José Laudelino de Menezes Neto – UFPB

Prof. Dr. Clessius Silva–UFRPE

À minha família

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de expressar minha profunda gratidão a Deus, por me conceder força e a perseverança necessárias para concluir os créditos e esta dissertação.

Agradeço a minha orientadora, Prof^a. Dra. Tarciana Maria Santos da Silva, por sua orientação, apoio e paciência ao longo deste processo.

Aos meus colegas de curso, que me acompanharam nesta jornada acadêmica, e com quem compartilhei momentos de aprendizado, desafios e conquistas. Agradeço pelas discussões enriquecedoras e pelo apoio mútuo.

Aos alunos que participaram da pesquisa, pela disposição e pelo entusiasmo em contribuir com este estudo. Sem a colaboração de vocês, este trabalho não teria sido possível.

À minha família, pelo amor, compreensão e incentivo constante. Vocês são meu alicerce e a minha motivação.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)*

Resumo

A pesquisa explora o potencial do software Scratch como uma ferramenta eficaz para o ensino da função quadrática, também chamada de função polinomial do segundo grau, visando promover uma aprendizagem mais significativa e engajadora dos conceitos matemáticos no contexto do ensino médio. A pesquisa desenvolve e implementa uma sequência didática em uma turma de segundo ano do Ensino Médio, que integra os princípios da função quadrática com a linguagem de programação em blocos do Scratch. Os resultados da implementação revelam que o uso do Scratch foi favorável para a aprendizagem de conceitos matemáticos desta turma, resultando em melhorias no desempenho dos alunos e no seu engajamento durante as atividades de aprendizagem. No entanto, a pesquisa identifica desafios, como a falta de familiaridade prévia dos alunos com a tecnologia e a disponibilidade limitada de recursos tecnológicos, que precisam ser superados para uma implementação mais ampla e eficaz. Conclui-se que o uso do Scratch no ensino da função quadrática oferece uma oportunidade promissora para promover uma educação matemática mais significativa e alinhada com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), enfatizando o desenvolvimento do pensamento computacional e o uso de tecnologias na sala de aula.

Palavras-chave: Função Quadrática, Scratch, Programação, Sequência Didática, Ensino Médio.

Abstract

The research explores the potential of the Scratch software as an effective tool for teaching the quadratic function, also known as the second-degree polynomial function, aiming to promote a more meaningful and engaging learning of mathematical concepts in the high school context. The study develops and implements a didactic sequence with a second-year high school class, integrating the principles of the quadratic function with Scratch's block-based programming language. The results of the implementation reveal that the use of Scratch was beneficial for learning mathematical concepts in this class, leading to improvements in student performance and engagement during learning activities. However, the study identifies challenges, such as students' lack of prior familiarity with the technology and limited availability of technological resources, which need to be overcome for broader and more effective implementation. It is concluded that using Scratch in teaching the quadratic function offers a promising opportunity to promote a more meaningful mathematics education aligned with the guidelines of the Common National Curriculum Base (BNCC), emphasizing the development of computational thinking and the use of technology in the classroom.

Keywords: Quadratic Function, Scratch, Programming, Didactic Sequence, High School

Lista de ilustrações

Figura 1 – Método para a equação $x^2 - px + q^2$	19
Figura 2 – Método de Descartes	27
Figura 3 – Parábola de foco positivo	36
Figura 4 – Parábola de foco negativo	38
Figura 5 – Gráfico da função $f(x) = x^2$	39
Figura 6 – Eixo de simetria	41
Figura 7 – Concavidade da Parábola	42
Figura 8 – Parábola no eixo canônico	43
Figura 9 – Translação horizontal	44
Figura 10 – Translação vertical da parábola.	45
Figura 11 – Interface do logo	49
Figura 12 – Editor do logo	50
Figura 13 – Página inicial do Scratch	53
Figura 14 – Parte inferior da página inicial do Scratch	53
Figura 15 – Interface do Scratch	54
Figura 16 – Imprimindo “Olá, mundo!”	55
Figura 17 – “Olá, mundo!”, no Scratch	56
Figura 18 – Interface do quizz	57
Figura 19 – Definição padrão do botão Start para a tela inicial	57
Figura 20 – Efeito do botão Start	58
Figura 21 – Escondendo a variável	58
Figura 22 – Transmitindo mensagem	59
Figura 23 – Pressionanda a tecla	60
Figura 24 – Analisanda a resposta	60
Figura 25 – Resultado do projeto	61
Figura 26 – Coeficientes	62
Figura 27 – Script de função quadrática	63
Figura 28 – Condição de existência	63
Figura 29 – Zeros da função no palco	64
Figura 30 – Ator escondido	65
Figura 31 – Script do gráfico	65
Figura 32 – Função em tabela	66
Figura 33 – Gráfico da função	66
Figura 34 – Planejamento da sequência didática	68
Figura 35 – Interação entre os atores	70
Figura 36 – Recorte do script dos alunos	71

Figura 37 – Operadores do Scratch	71
Figura 38 – Potenciação	72
Figura 39 – Recorte da atividade de um dos grupos	73
Figura 40 – Uma nova ideia de potência	74
Figura 41 – Recorte do diário de bordo	75
Figura 42 – Script sobre média	75
Figura 43 – Resultado no palco	76
Figura 44 – Conômetro regressivo	77
Figura 45 – Conômetro progressivo	77
Figura 46 – Relato de um grupo	79
Figura 47 – Código para calculadora	79
Figura 48 – Calculadora: operações básicas	80
Figura 49 – Calculadora: imprimindo resultado	80
Figura 50 – Quiz	81
Figura 51 – Quiz código	82
Figura 52 – Script zeros da função	84
Figura 53 – Resultado	84
Figura 54 – Script caso geral	85
Figura 55 – Script soma e produto	86
Figura 56 – Erro no script	87
Figura 57 – Soma e produto	87
Figura 58 – Fórmula babilônica	88
Figura 59 – Imprimindo os zeros da função	89
Figura 60 – Grafico da função $f(x)$	90
Figura 61 – Script para gerar o gráfico $f(x)$	90
Figura 62 – Função tabela	91
Figura 63 – Variando delta x	92
Figura 64 – Coeficientes positivos	93
Figura 65 – Apenas coeficiente c negativo	93
Figura 66 – Apenas coeficiente b negativo	94
Figura 67 – Todos os coeficientes positivos	94
Figura 68 – Vértice	96
Figura 69 – Comportamento da parábola	96
Figura 70 – Vértice uma 2ª ideia	97
Figura 71 – Área máxima	98
Figura 72 – Com restrição	99
Figura 73 – Sem restrição	100
Figura 74 – 80 metros de cerca	100
Figura 75 – Diário de bordo	101

Figura 76 – Projeto final	102
Figura 77 – Resolução da primeira questão	105
Figura 78 – Parábola do pré-teste	105
Figura 79 – Questão 3 Pré-teste	106
Figura 80 – Resolução da segunda questão	107
Figura 81 – Análise dos coeficientes	107
Figura 82 – Análise dos coeficientes 2	108
Figura 83 – Resolução da terceira questão	108
Figura 84 – Resolução da quarta questão	109
Figura 85 – Questão SAEPE	110
Figura 86 – Questão 5	110
Figura 87 – Tabela pré-teste	111
Figura 88 – Tabela pós-teste	111
Figura 89 – Resolução da sexta questão	112
Figura 90 – Questão 7 pré-teste	112
Figura 91 – Questão 7 pós-teste	113
Figura 92 – Ideia Correta	114
Figura 93 – Ideia equivocada	114
Figura 94 – Resolução da oitava questão	115

Sumário

	Introdução	14
1	O ESTUDO DA EQUAÇÃO QUADRÁTICA AO LONGO DO TEMPO	16
1.1	Os Babilônios	16
1.2	Os Egípcios	17
1.3	Os Gregos	18
1.4	A matemática, hindu e árabe	20
1.4.1	Bhaskara II	20
1.4.2	Os Árabes	21
1.5	Idade Média	24
1.6	Período Renascentista	24
1.6.1	Rafael Bombelli	25
1.6.2	François Viète	25
1.6.3	René Descartes e o método analítico	26
1.7	Século XVII	28
1.8	A função quadrática nos dias de hoje	28
2	FUNÇÃO QUADRÁTICA	30
2.1	A forma canônica	30
2.2	Máximo e mínimo	32
2.2.1	Imagem	32
2.3	Fórmula resolutiva	33
2.4	Soma e produto: aplicação da relação de Girard	33
2.5	Forma fatorada	35
2.6	Gráfico da função quadrática	36
2.6.1	Eixo de simetria	40
2.6.2	Concavidade da parábola	42
2.6.3	Translação da parábola	43
2.6.4	As coordenadas do vértice	45
3	IMPLEMENTAÇÃO DO SCRATCH NO ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS: DIRETRIZES EDUCACIONAIS, TEORIA CONSTRUCIONISTA E APLICAÇÃO	46
3.1	A Tecnologia e as diretrizes educacionais brasileiras	46
3.2	A teoria construcionista de Seymour Papert	48

3.2.1	Linguagem de programação logo	49
3.2.2	Software Scratch	51
3.3	Conhecendo a plataforma Scratch	52
3.4	Programação no Scratch	55
3.4.1	Demonstração de programação no Scratch: exemplo prático .	56
3.5	Linguagem de programação Scratch e a função quadrática . .	61
4	SOFTWARE SCRATCH E O ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	67
4.1	Desenvolvimento das etapas	69
4.2	Primeira etapa	69
4.3	Segunda etapa	70
4.3.1	Primeiro encontro da segunda etapa	70
4.3.2	Segundo encontro da segunda etapa	71
4.3.3	Terceiro encontro da segunda etapa	72
4.3.4	Quarto encontro da segunda etapa	73
4.3.5	Quinto encontro da segunda etapa	76
4.3.6	Sexto encontro da segunda etapa	81
4.4	Terceira etapa	82
4.4.1	Primeiro encontro da terceira etapa	83
4.4.2	Segundo encontro da terceira etapa	86
4.4.3	Terceiro encontro da terceira etapa	89
4.4.4	Quarto encontro da terceira etapa	92
4.4.5	Quinto encontro da terceira etapa	95
4.5	Quarta etapa	101
4.5.1	Culminância dos projetos desenvolvidos na quarta etapa . . .	102
4.6	Resultados e discussões	103
4.6.1	Análise dos dados	104
	Conclusão	116
	REFERÊNCIAS	118

Introdução

A educação enfrenta desafios na promoção de uma aprendizagem eficiente das ideias matemáticas, especialmente no contexto do Ensino Médio, pois é notório a rejeição dos estudantes dessa modalidade de ensino pela matéria, e esse dado fica nítido nos resultados do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), onde os índices são preocupantes. Muitos estudantes encontram dificuldades em compreender e aplicar conceitos matemáticos como, por exemplo, a função quadrática. Diante disso, Faz-se necessário, destacar a importância de estratégias pedagógicas inovadoras, utilizando recursos tecnológicos para promover uma compreensão mais significativa, interativa, dinâmica dos princípios matemáticos.

Esta dissertação tem como objetivo investigar e apresentar uma abordagem inovadora para o ensino e aprendizagem da função quadrática, utilizando o software de programação Scratch como uma ferramenta educacional. Ao explorar o contexto histórico, a teoria subjacente e a aplicação prática dessa função, esta pesquisa busca desenvolver e avaliar uma sequência didática que integre de forma eficaz os conceitos da função quadrática, tais como zeros da função, gráficos e vértices com a linguagem de programação em blocos Scratch. O propósito final é fornecer aos educandos uma atividade pedagógica relevante e engajadora, que promova uma compreensão mais significativa da função quadrática.

A dissertação está organizada em quatro capítulos, cada um abordando aspectos específicos relacionados ao conceito da função quadrática. O Capítulo 1 apresenta o contexto histórico, abordando sua origem histórica desde a antiga Mesopotâmia, há quatro mil anos, até sua relevância nos tempos contemporâneos. No Capítulo 2, são discutidos os fundamentos teóricos. O Capítulo 3 traz a integração do software Scratch com a função em foco, incluindo uma discussão sobre as diretrizes pedagógicas que norteiam o uso de tecnologias na educação. Finalmente, o Capítulo 4 apresenta uma sequência didática elaborada para o ensino da função quadrática utilizando o Scratch, demonstrando sua aplicação prática e seu potencial para promover uma aprendizagem significativa dos alunos.

Ao delimitar o foco da pesquisa para o uso do Scratch no ensino da função quadrática, espera-se contribuir para o desenvolvimento de estratégias pedagógicas mais eficazes na área de educação matemática escolar. Acredita-se que a análise aprofundada do uso do software Scratch neste contexto específico possa fornecer ideias valiosas para educadores interessados em promover uma aprendizagem mais estimulante na disciplina de matemática.

Desta forma, esta pesquisa busca contribuir para o avanço do ensino e da compreensão dos conceitos matemáticos, destacando a importância do uso de ferramentas

tecnológicas como ferramenta pedagógica, enquanto proporciona uma análise crítica e reflexiva do uso do software Scratch no ensino da função quadrática e seus prováveis impactos na aprendizagem dos alunos.

1 O Estudo da Equação Quadrática ao Longo do Tempo

1.1 Os Babilônios

A função quadrática desempenha um papel crucial na matemática e nas aplicações práticas, e seu contexto histórico é extremamente rico e diversificado. Explorar a expansão desse tema nos permitirá compreender melhor a evolução do estudo dessa função ao longo dos séculos.

A origem da função quadrática remonta às civilizações antigas, como os babilônios e os egípcios, que possuíam conhecimentos práticos sobre a resolução de problemas geométricos e de engenharia, que envolviam equações quadráticas. O estudo das funções polinomiais de grau dois tem suas bases na resolução de problemas que envolviam a equação quadrática.

Segundo (ROQUE, 2012), os antigos babilônios possuíam habilidades matemáticas para resolver equações, embora eles não tivessem desenvolvido a álgebra de maneira sistemática como a conhecemos hoje.

A falta de uma estrutura algébrica formal, juntamente com a peculiaridade do sistema numérico sexagesimal adotado pelos babilônios, fazia com que seus métodos de resolução de problemas seguissem procedimentos complexos. Essa combinação de elementos torna a compreensão das soluções propostas por esse povo da antiguidade uma tarefa desafiadora.

Segue um exemplo ilustrativo de um problema de difícil compreensão, comumente encontrado nos textos cuneiformes escritos pelos babilônios, que está relacionado ao cálculo do lado de um quadrado. A informação fornecida é que a diferença entre a área desse quadrado e o seu lado é o número (na base sexagesimal) 14,30. Ao traduzir esse problema para a álgebra atual, deve-se determinar os valores de x na equação $x^2 - x = 870$, onde x é o lado do quadrado e 14,30 na base 60 é equivalente a 870 na base decimal.

Segue o passo a passo da resolução do problema encontrado nos tabletas babilônios.

1. Tome metade de 1, que é 0;30;
2. Multiplique 0;30 por 0;30, o que dá 0;15;
3. Some 0;15 a 14,30 obtendo 14,30;15.
4. Este último é o quadrado de 29;30.

5. A seguir some 0;30 a 29;30;
6. O resultado é 30, que é o lado do quadrado.

O método de resolução empregado pelos babilônios, quando traduzido para a matemática moderna, seria equivalente à aplicação da fórmula:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$$

para uma raiz da equação $x^2 - px = q$.

Segundo (BOYER; MERZBACH, 2012), a equação quadrática era trabalhada e classificada em três formas diferentes desde a antiguidade até o início do período moderno. São elas:

- $x^2 + px = q$
- $x^2 = px + q$
- $x^2 + q = px$

Segue um comparativo entre o método babilônico e o método moderno. Utilizando a equação $x^2 - px = q$, tome $p = 1$ e $q = 14,30$.

Passo	Cálculo	Resultado
Tome metade de 1	0; 30	$p/2$
Multiplique 0; 30 por 0; 30	0; 15	$(p/2)^2$
Some 0; 15 + 14, 30	14, 30; 30	$(p/2)^2 + q$
Extrair a raiz de 14, 30; 15	29; 30	$\sqrt{(p/2)^2 + q}$
Some 0; 30 + 29; 30	30	$x = \sqrt{(p/2)^2 + q} + \frac{p}{2}$

Em cada etapa do procedimento mencionado, os antigos babilônios contavam com a assistência de tabletas. Por exemplo, a etapa (2) requeria a consulta a uma tabuleta de multiplicação, enquanto a etapa (4), como evidenciado neste caso específico, geralmente era resolvida por meio da consulta a uma tabuleta de raízes quadradas.

1.2 Os Egípcios

Por outro lado, há dificuldade em falar dos conceitos e descobertas matemáticas egípcios, pois tais informações estão presentes em apenas dois documentos, conhecidos como o Papiro de Moscou (ou Golenishev) e o Papiro de Ahmes. Uma passagem que remete a ideia de equação quadrática está no papiro de Kahun, datado do império Médio, que

menção de textos médicos, no entanto, contém informações matemáticas, como problemas envolvendo proporções e cálculos de áreas de terrenos. No referido papiro encontra-se uma solução para uma equação do tipo $x^2 + y^2 = c$.

Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como $1 : \frac{3}{4}$. Nesse caso, temos $x^2 + y^2 = 100$ e $x = \frac{3y}{4}$. A eliminação de x fornece uma equação quadrática em y . Podemos, porém, resolver o problema por falsa posição. Para isso, tomemos $y = 4$. Então, $x = 3$ e $x^2 + y^2 = 25$ em vez de 100. Por conseguinte, devemos fazer a correção de x e y dobrando os valores iniciais, o que dá $x = 6$ e $y = 8$. (EVES et al., 2011).

Embora os babilônios e egípcios tenham desenvolvido métodos para resolver equações e realizar cálculos matemáticos, é importante destacar que essas civilizações não utilizavam uma forma algébrica como a conhecemos hoje. Suas abordagens matemáticas eram mais práticas e empíricas, focadas em descrever processos e soluções específicas, em vez de buscar uma generalização formal.

Os registros matemáticos dessas civilizações, como os papiros egípcios e as tábuas cuneiformes babilônicas, fornecem instruções passo a passo para resolver problemas peculiares, mas não apresentam uma prova formal ou uma justificativa teórica para os métodos utilizados.

De acordo com (EVES et al., 2011)

“Deve-se notar, contudo, que nenhum exemplo do que hoje chamamos demonstração pode ser encontrado na matemática oriental antiga. Em vez de um argumento encontra-se meramente a descrição de um processo. Instrui-se: “Faça assim e assim”. Além disso, exceto possivelmente em alguns casos, essas instruções não eram dadas na forma de regras gerais, mas simplesmente aplicadas a sequências de casos específicos. Assim, se é para explicar a resolução de uma equação quadrática, não se encontram nem a dedução do processo usado nem a descrição geral do processo, mas ao invés disso nos são oferecidas várias equações específicas e somos informados, passo a passo, como proceder para resolver cada um dos exemplos.”

Portanto, embora os babilônios e egípcios tenham realizado importantes contribuições para a matemática antiga e desenvolvido métodos eficazes para cálculos e equações, a ênfase na demonstração e na forma algébrica como um sistema formal de símbolos e operações só surgiu mais tarde na história da matemática.

1.3 Os Gregos

Foi com a introdução do pensamento grego e o desenvolvimento da matemática dessa civilização que surgiu um interesse mais profundo pelas demonstrações e provas rigorosas, e isso ocorreu devido a necessidade de estabelecer fundamentos matemáticos mais sólidos.

De acordo com (EVES et al., 2011) no Oriente antigo, a percepção estática das coisas tornou-se insustentável à medida que um espírito racionalista ganhava força, levando as pessoas a questionarem o “como” e o “porquê”.

Através desse questionamento constante sobre o “como” e o “porquê”, o estudo sistemático das equações quadráticas avançou, levando ao desenvolvimento de teorias mais abrangentes e métodos mais eficazes para resolver e compreender essas equações.

Ao passo que os matemáticos investigavam as equações quadráticas, surgiram perguntas sobre a validade das soluções encontradas e a generalidade dos dados desenvolvidas. Eles perceberam que não bastava apenas obter uma solução aparentemente correta, era necessário provar que aquela solução estava correta e que abrangia todos os casos possíveis.

Entre os séculos VII a.C e III a.C matemáticos como, Tales, os Pitagóricos e Euclides influenciaram e contribuíram com os fundamentos da geometria axiomática e demonstraram teoremas de forma lógica e sistemática.

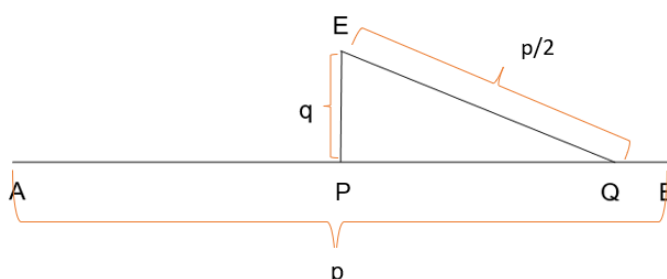
Euclides, em sua obra “Os Elementos”, estabeleceu bases sólidas para a geometria da época e apresentou métodos geométricos eficazes para resolver equações quadráticas. Seu método envolvia a construção de figuras geométricas usando régua e compasso, permitindo a representação visual das soluções dessas equações. Um exemplo desse método está na Proposição 28 do livro VI, que diz:

Dividir determinada reta de maneira que o retângulo contido por seus segmentos seja igual a um espaço dado. Esse espaço não deve ser maior que o quadrado da bissecção da linha (SESSA, 2009, p.33).

A compreensão da Proposição 28 do livro VI pode ser facilitada por meio de diferentes abordagens. (PEDROSO, 2010) traz uma construção geométrica associada a essa proposição e afirma ser mais simples a compreensão em comparação com o método geral proposto por Euclides.

Acompanhe a solução a seguir: Para a equação $x^2 - px + q^2 = 0$, em que p e q são comprimentos de segmentos de reta.

Figura 1 – Método para a equação $x^2 - px + q^2 = 0$



Fonte: PEDROSO, Hermes, 2010

Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{PE}$ dois segmentos de reta, em que $\overline{AB} = p$, $\overline{PE} = q$ e $q < \frac{p}{2}$. Dividindo $\overline{AB}$ com o ponto Q tal que $\overline{AQ} + \overline{QB} = p$ e $\overline{AQ} \cdot \overline{QB} = q^2$ tem-se a solução procurada. Para isso basta traçar uma circunferência de centro em E e raio $\frac{p}{2}$, que cortará o segmento $\overline{AB}$ no ponto Q . Logo, pelo teorema de Pitágoras,

$$q^2 = (\overline{PB})^2 - (\overline{PQ})^2 = (\overline{PB} - \overline{PQ}) \cdot (\overline{PB} + \overline{PQ})$$

Observe que, sendo p o ponto médio, temos que $PB = PA$, e $AQ = PB + PQ$, além de $PB - PQ = QB$. Assim,

$$(PB - PQ) \cdot (PB + PQ) = QB \cdot AQ$$

Finalmente, denotando por $r = \overline{AQ}$ e $s = \overline{BQ}$ as raízes da equação dada, conclui-se que $p = r + s$ e $q^2 = r \cdot s$.

1.4 A matemática, hindu e árabe

Ao longo da Idade Média, três civilizações contribuíram e influenciaram de maneira significativa na história da matemática, preservando e desenvolvendo conhecimentos matemáticos e introduzindo novos conceitos e técnicas que ainda são fundamentais nos estudos matemáticos modernos. Na Índia, a matemática progrediu durante o período medieval (séculos IX-XIII). Matemáticos indianos, como Brahmagupta, Aryabhata, Mahavira e Bhaskara II desempenharam papéis significativos em áreas como álgebra, trigonometria e aritmética. Os matemáticos hindus tinham conhecimento e aceitavam a existência dos números negativos e irracionais, e também a utilização do zero como número. Eles também compreendiam que uma equação quadrática, quando possui soluções reais, tem duas raízes formais.

1.4.1 Bhaskara II

Nos livros didáticos brasileiros, a fórmula resolutiva de uma equação do segundo grau é comumente apresentada como a fórmula de Bhaskara. Entretanto, durante o período em que o matemático viveu, os problemas eram abordados por meio de métodos retóricos, uma vez que os conceitos algébricos que temos hoje ainda não estavam presentes.

O método utilizado por Bhaskara II é conhecido como prática da ganita. A prática da ganita foi um sistema matemático desenvolvido na antiga Índia, que abrangia uma ampla gama de tópicos matemáticos. Tal método era utilizado com o foco em resolver problemas concretos do cotidiano, como divisões, cálculos comerciais, medições de terras, entre outros. As técnicas e métodos matemáticos da ganita foram transmitidos através

de textos conhecidos como “Sutras” e “Shlokas”, que continham regras e instruções para realizar cálculos.

Segundo (ROQUE, 2012), os princípios da ganita foram inicialmente estabelecidos por matemáticos como Brahmagupta e Aryabhata, mas foram posteriormente aperfeiçoados por Bhaskara II.

Um dos textos mais famosos e influentes na prática da ganita foi o “Lilavati”, escrito por Bhaskara II. O Lilavati tratava de diversos tópicos matemáticos, desde operações básicas até problemas mais complexos envolvendo equações, sequências e progressões aritméticas. Ele também introduziu o conceito de “bija ganita”, ou seja, o estudo das equações quadráticas.

Tradução do método de Bhaskara em notação moderna para resolver a equação $ax^2 + bx = c$, aplica-se o método da seguinte forma:

- Multiplicamos ambos os lados por $4a$, resultando em $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$.
- Em seguida, adicionamos b^2 a ambos os lados, obtendo $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$.
- Agora podemos reescrever essa igualdade como $(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$, onde o lado contendo as quantidades desconhecidas possui uma raiz quadrada.
- Toma-se então a raiz quadrada de ambos os lados para obter:

$$2ax + b = \sqrt{4ac + b^2}$$

Desenvolvendo a equação para encontrar o valor de x obtém-se a seguinte expressão:

$$x = \frac{\sqrt{b^2 + 4ac} - b}{2a}.$$

De acordo com (ROQUE, 2012), Bhaskara não é creditado como o inventor da fórmula atualmente utilizada para resolver equações quadráticas. O método indiano não empregava símbolos para representar coeficientes genéricos, como a , b e c . No entanto, ao traduzir o método para a notação algébrica moderna e aplicá-lo a uma equação geral, chega-se a uma fórmula equivalente para a resolução de equações quadráticas. Essa constatação revela a existência de um método geral retórico para resolver equações, embora a concepção de uma “fórmula” tal como compreendemos hoje só tenha surgido com o simbolismo dos coeficientes introduzido por Viète no século XVI.

1.4.2 Os Árabes

Os matemáticos árabes desempenharam um papel crucial na preservação e disseminação dos conhecimentos matemáticos da Grécia, da Índia e da China. Durante o período

medieval, o mundo islâmico testemunhou um período de intensa atividade intelectual, conhecido como a “Idade de Ouro Islâmica”.

Matemáticos como Al-Khwarizmi (conhecido como o “pai da álgebra”) e Omar Khayyam fizeram contribuições importantes em áreas como álgebra, trigonometria, geometria e aritmética. Eles também traduziram e preservaram muitos textos matemáticos clássicos e introduziram conceitos como os algarismos arábicos e o sistema decimal.

O matemático Al-Khwarizmi, em seu processo de resolução, atribuía características específicas a cada termo de uma equação quadrática, são elas: raiz, quadrado e número simples. Por meio de sua notação, ele definiu o quadrado como uma entidade algébrica, representada pela palavra “mal”, indicando uma espécie de tesouro ou possessão. A raiz, designada por “Jidhr”, equivalia à incógnita nas equações quadráticas, enquanto “adad” representava os números conhecidos.

Palavra	Significado	Sentido nos problemas	Notação moderna
Adad	—	Quantidade conhecida (número dado)	c
Jidhr	Raiz	Quantidade desconhecida	x
Mal	Tesouro	Quadrado da quantidade desconhecida	x^2

Segundo Sessa, tal obra estuda a resolução de equações de segundo grau com coeficientes numéricos, em linguagem complementemente retórica, sem utilização de nenhum símbolo. (SESSA, 2009)

Durante esse período, as equações ainda eram examinadas e estudadas por meio de padrões. Segundo (ROQUE; CARVALHO, 2012), Al-Khwarizmi trabalhava com seis tipos de equações quadráticas em seus textos. Aqui estão os seis casos nos quais o matemático empregava a sua abordagem, acompanhados de sua tradução para a álgebra atual:

- Quadrados iguais a raízes ($ax^2 = bx$)
- Quadrados iguais a um número ($ax^2 = c$)
- Raízes iguais a um número ($bx = c$)
- Quadrados e raízes iguais a um número ($ax^2 + bx = c$)
- Quadrados e um número iguais a raízes ($ax^2 + c = bx$)
- Raízes e um número iguais a quadrados ($bx + c = ax^2$)

Em todos os exemplos, os números que multiplicavam as incógnitas eram sempre positivos. Al-Khwarizmi tinha regras específicas para resolver cada tipo de problema que ele listava, e essas regras se baseavam nos princípios matemáticos dos Elementos de Euclides.

Isso é interessante porque, mesmo que os antigos gregos não tivessem a mesma noção de equações que temos hoje, Al-Khwarizmi conseguiu aplicar seus métodos de resolução com base nesses conceitos mais antigos.

Segue um exemplo para ilustrar o método utilizado por Al-Khwarizmi: mal e dez jidhr igualam trinta e nove. Na notação algébrica moderna, seria representado como $x^2 + 10x = 39$. O método de resolução é descrito da seguinte forma:

- Encontra-se a metade da quantidade de jidhr, que neste caso é 5;
- Eleva-se jidhr ao quadrado, resultando em 25;
- Soma-se este resultado aos adad, resultando em $39 + 25 = 64$;
- A raiz quadrada desse total é extraída, resultando em 8;
- Por fim, subtrai-se a metade dos jidhr deste valor, encontrando-se a solução, que é $8 - 5 = 3$.

Traduzindo este procedimento para a linguagem algébrica atual, a solução para uma equação do tipo $x^2 + bx = c$ seria expressa como:

$$-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$$

Segue um quadro comparativo entre o método utilizado por Al-Khwarizmi e o método atualmente empregado:

Solução dada por Al-Khwarizmi	Operações correspondentes em linguagem moderna	Operações correspondentes em linguagem moderna para uma equação genérica do tipo $ax^2 + bx + c = 0$
Tome a metade da quantidade de jidhr.	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{b}{2}$
Multiplique esta quantidade por si mesma	5^2	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$
Some no resultado os adad.	$25 + 39 = 64$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
Extraia a raiz quadrada do resultado.	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
Subtraia a metade dos jidhr para encontrar a solução.	$8 - 5 = 3$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$

O método de resolução de equações quadráticas de Al-Khwarizmi foi um marco na matemática, trazendo uma abordagem sistemática e eficiente para a época.

1.5 Idade Média

Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, viveu durante a Idade Média. Ele nasceu por volta de 1170 e faleceu após 1240. Fibonacci é mais conhecido por popularizar o sistema de numeração indo-arábico e introduzir os números de Fibonacci na Europa, além de ter feito contribuições significativas para a matemática e a álgebra da época.

O relato de Fibonacci com equação quadrática foi em um torneio matemático da corte que participou a convite do imperador Frederico II. Durante esse evento, Fibonacci compartilhou seus conhecimentos sobre equações quadráticas, expondo os conceitos e técnicas relacionados a esse tipo específico de equação matemática e solucionando os problemas com maestria.

De acordo com (EVES et al., 2011), um dos problemas propostos no torneio foi: Achar um número racional x tal que $x^2 + 5$ e $x^2 - 5$ fossem ambos quadrados de números racionais.

Solução do problema segundo o matemático: Fibonacci mostrou que se x e h são inteiros tais que $x^2 + h$ e $x^2 - h$ são quadrados perfeitos, então h deve ser múltiplo de 24. Como exemplos $5^2 + 24 = 7^2$; $5^2 - 24 = 1^2$ e $10^2 + 96 = 14^2$; $10^2 - 96 = 2^2$ (EVES et al., 2011).

A participação de Leonardo Fibonacci despertou grande interesse e debate entre os presentes, contribuindo para uma maior compreensão e apreciação das equações quadráticas naquela época. A presença de Fibonacci no torneio, a convite de um imperador, evidenciou seu talento e reconhecimento como um matemático respeitado, além de impulsionar a disseminação de seu trabalho e o avanço no estudo das equações quadráticas.

1.6 Período Renascentista

Um dos principais avanços no estudo das equações quadráticas durante o período do Renascimento foi a introdução de símbolos algébricos para representar quantidades desconhecidas. O Renascimento foi um período de transição da álgebra, com a utilização de novas nomenclaturas, de uma nova roupagem. As equações eram geralmente expressas em palavras, o que tornava difícil manipulá-las de forma matemática. O matemático renascentista frade Franciscano Luca Pacioli, ainda fazia uso das letras iniciais nos cálculos dos seus trabalhos.

A álgebra da Sūma chega até equações quadráticas e contém muitos problemas que levam a essas equações. A álgebra é sincopada, com o uso de abreviações como p (de piu, “mais”) para indicar a adição, m (de meno, “menos”) para indicar a subtração, co (de cosa, “coisa”) para a incógnita, ce (de censo) para x^2 cu (de cuba) para x^3 e cece (de censo-censo) para x^4 igualdade às vezes é indicada por ae (de aequalis). (EVES et al., 2011)

Os matemáticos renascentistas começaram a usar letras para denotar incógnitas e desenvolveram métodos para resolver simbolicamente equações quadráticas, cúbicas e simbolicamente. O mesmo aconteceu com as notações de adição (+) e subtração (-), que só foram utilizadas como sinais de operações algébricas no ano de 1514 pelo matemático holandês Vander Hoecke. Antes disso, eram usadas pelas iniciais “et” para adição e “m” para subtração, com a ideia de excesso e deficiência.

Durante o Renascimento, uma notável disputa ocorreu entre os matemáticos Niccolò Fontana Tartaglia e Gerolamo Cardano. Ambos competiram para encontrar a melhor solução para as equações de terceiro e quarto grau. Essa rivalidade culminou na publicação das soluções por Cardano em sua obra “Ars Magna” (A Grande Arte), em 1545. Tartaglia também desenvolveu suas próprias soluções, mas as revelou a Cardano em circunstâncias controversas. Essa competição intelectual reflete o fervor pela busca de avanços matemáticos durante o Renascimento.

A descoberta da solução algébrica das equações cúbicas e quárticas por esses estudiosos é considerada um dos feitos matemáticos mais extraordinários do século XVI. Durante esse período, é possível perceber que houve um desenvolvimento significativo na manipulação das equações quadráticas. A compreensão e o domínio dessas equações se tornaram mais refinados, resultando em uma abordagem mais tranquila na resolução de problemas.

Além disso, as equações quadráticas se tornaram uma ferramenta valiosa para lidar com equações de grau superior, evidenciando a importância e a versatilidade desse campo da matemática na época.

1.6.1 Rafael Bombelli

O matemático italiano Rafael Bombelli, em seu livro “L’Algebra” publicado em 1572, contribuiu para a compreensão das raízes quadradas de números negativos, estendendo o sistema numérico para incluir números complexos. Isso teve um impacto significativo no estudo das equações quadráticas, pois agora as soluções poderiam ser expressas em termos de números complexos. Bombelli também contribuiu para o aprimoramento das notações matemáticas. Outro renomado matemático que contribuiu de maneira significativa não só com o estudo das equações, mas também com a notação matemática, foi o francês François Viète, que segundo (EVES et al., 2011), seria o maior matemático francês do século XVI.

1.6.2 François Viète

François Viète, também conhecido como Franciscus Vieta, nasceu em 1540 em Fontenay, na França. Sua notoriedade reside principalmente em suas significativas contribuições para o campo da álgebra, notadamente pela introdução de letras como símbolos

para representar incógnitas e coeficientes. Essa inovação revolucionária abriu caminho para uma compreensão mais avançada e simplificada do universo das equações matemáticas.

O matemático francês introduziu uma representação padronizada para os coeficientes das equações, usando vogais para representar incógnitas e consoantes para representar coeficientes, todas em maiúsculas. Além disso, ele usou a mesma letra para representar potências. EVES afirma que: o que hoje se indica por x , x^2 , x^3 ele expressava por A , A quadratum, A cubum; mais tarde alguns escritores abreviaram essa notação para A , A q, A c. (EVES et al., 2011).

Viète também introduziu uma notação para expressar equações de uma maneira mais compacta e sistemática. Por exemplo, a equação $x^2 + b = cx$ foi escrita na notação de Viète como A quadratum + B plano aequatur C in A , onde "aequatur" significa "igual". E a palavra "plano" após "B" na notação refletia a necessidade de que todas as parcelas de uma equação tivessem as mesmas dimensões.

Segundo (ROQUE, 2012), pode-se afirmar que a fórmula só foi escrita após a introdução do simbolismo dos coeficientes por Viète, e embora ele seja reconhecido por seu método de resolução, não é considerado o inventor da fórmula, uma vez que seu método já era conhecido pelos indianos e árabes.

Apesar de não ter criado a fórmula resolutiva específica que é utilizada atualmente, Viète deixou contribuições significativas no campo das equações quadráticas, abrindo caminho para avanços futuros na resolução dessas equações. Suas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento e aprimoramento dos métodos de resolução, deixando um legado importante na área das equações quadráticas.

1.6.3 René Descartes e o método analítico

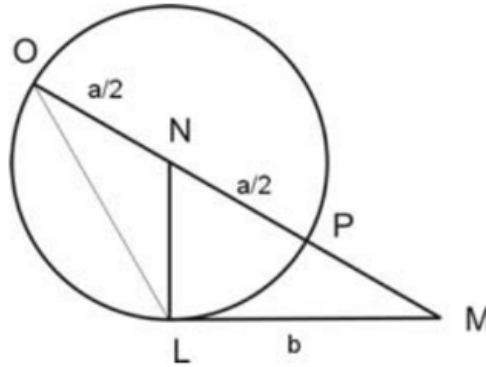
Durante o Renascimento, o estudo das equações quadráticas também foi influenciado pelas ideias da geometria analítica, introduzida por René Descartes. Descartes estabeleceu uma conexão entre a álgebra e a geometria, permitindo que equações quadráticas fossem representadas graficamente por meio de curvas chamadas conic sections (seções cônicas), como círculos, elipses, parábolas e hipérboles.

O método proposto por Descartes, conhecido como método analítico, era baseado na atribuição de nomes às linhas necessárias para a construção da solução de um problema geométrico.

Para resolver equações quadráticas, o matemático utilizou construções geométricas para representar as soluções como segmentos de reta. Ele demonstrou como construir essas soluções geometricamente, proporcionando uma compreensão mais profunda das propriedades das equações quadráticas.

Método de Descartes para solucionar equação quadrática do tipo $z^2 = az + b^2$.

Figura 2 – Método de Descartes



Fonte: ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*, 2012.

- Construa um triângulo retângulo NLM com $LM = b$ e $NL = \frac{a}{2}$. Queremos construir z que satisfaça a equação.
- Prolonga-se o segmento MN até o ponto O tal que $NO = NL$. Considere o segmento $OM = z$.
- Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo NLM , obtém-se:

$$NM^2 = NL^2 + LM^2$$

$$NM^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$$

$$NM = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

como $OM = ON + NM$ isso implica em

$$z = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

- Trace a circunferência com raio $\frac{a}{2}$ e centro N . Note que a circunferência corta MN em P .
- Observe que os triângulos OLM e LPM são semelhantes. O ângulo LMO é comum aos dois triângulos e de acordo com a propriedade dos ângulos inscritos em uma circunferência, os ângulos que determinam o mesmo arco são iguais. Portanto, o ângulo MLP é igual ao ângulo LOM .
- Usando a razão de semelhança, temos:

$$\frac{LM}{OM} = \frac{PM}{LM} \text{ implica em } OM \cdot PM = LM^2$$

Sendo assim, se $OM = z$, $PM = z - a$, como $OM \cdot PM = LM^2$, concluímos que:

$$b^2 = z(z - a), \text{ ou } b^2 = z^2 - az.$$

Logo, OM , a raiz da equação, é dada por

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

Descartes escolhe excluir a segunda raiz, pois é negativa, alinhando-se com sua abordagem centrada na manipulação de segmentos de retas em suas operações algébricas.

1.7 Século XVII

Descartes deu os primeiros passos na concepção de funções ao manipular equações indeterminadas. Ele introduziu a ideia de uma equação em x e y que representava uma relação entre duas quantidades variáveis, permitindo calcular os valores de uma a partir dos valores da outra. No entanto, o conceito de função só se desenvolveu após a introdução dos estudos do cálculo por Leibniz e Newton, que marcaram um ponto de virada no entendimento matemático.

Esse desenvolvimento no entendimento matemático foi essencial para o surgimento formal do conceito de função no final do século XVII e início do século XVIII. Durante esse período, a noção de função, que inicialmente estava implícita em problemas como o inverso das tangentes, tratados por Leibniz, começou a se tornar mais clara. O termo “função” foi introduzido por Johann Bernoulli em correspondências com Leibniz, e a definição formal apareceu em 1718, quando Bernoulli descreveu uma função como uma quantidade composta de uma grandeza variável e constantes. Posteriormente, Euler expandiu essa definição, tratando o cálculo como uma teoria das funções e estabelecendo a função como uma expressão analítica composta de variáveis e constantes.

Assim, a ideia de função evoluiu ao longo do tempo, desde suas origens práticas e empíricas nas antigas civilizações até se tornar um conceito central na matemática moderna, fundamental para entender e descrever uma ampla variedade de fenômenos em diversas áreas do conhecimento.

1.8 A função quadrática nos dias de hoje

Nos livros didáticos brasileiros, é comum encontrar uma definição detalhada da função quadrática. Essa função é representada por uma expressão da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$.

A variável x representa a entrada da função e $f(x)$ representa a saída correspondente. A função quadrática é caracterizada pelo termo de maior grau, x^2 , e pode incluir dois outros termos: o termo linear bx e o termo constante c . Esses termos contribuem para o resultado da função.

O estudo dessa função inclui conceitos como o cálculo do discriminante, simbolizado pela letra grega Δ , que é dado pela expressão $b^2 - 4ac$ e desempenha um papel importante na determinação da natureza e quantidade de raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. A utilização da fórmula resolutive da equação quadrática, ou seja, resolução da função quando $f(x) = 0$ que é expressa por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Além disso, a função polinomial do segundo grau também envolve conceitos como a representação gráfica, que assume a forma de uma parábola. Outra expressão importante relacionada à parábola são as coordenadas do vértice, que são relevantes para uma análise completa e precisa da função polinomial do segundo grau e para a interpretação de seu comportamento e aplicações.

Essa definição e seus aspectos são abordados de forma a fornecer aos estudantes uma compreensão sólida e ampla das propriedades e aplicações da função quadrática.

2 Função Quadrática

Neste capítulo, aprofunda-se no estudo da teoria da função quadrática, buscando compreender sua estrutura matemática de maneira abrangente. Fundamentado em obras como “A Matemática do Ensino Médio” de (LIMA et al., 1997), “Temas e Problemas Elementares” de (LIMA et al., 2010) e “Números e Funções Reais” (LIMA, 2013), este capítulo apresenta uma estudo detalhada dos conceitos fundamentais que permeiam a Função Quadrática. Ao explorar esses recursos, nosso objetivo é não só apresentar os conceitos teóricos, mas também proporcionar uma compreensão sólida e aprofundada dessa importante área da matemática, mantendo o foco no estudo da teoria.

Definição 2.1. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se função quadrática quando são dados números reais a, b, c , com $a \neq 0$, tais que

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (2.1)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2. Ilustrações de funções quadráticas

1. $f(x) = 2x^2 - 4x + 19$
2. $f(x) = x^2 - 5x + 6$
3. $f(x) = 5x^2 - 25$
4. $f(x) = -4x^2$

2.1 A forma canônica

Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Colocando o coeficiente a em evidência, obtemos:

$$f(x) = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right]$$

Completando o quadrado da expressão $x^2 + \frac{b}{a}x$, temos:

$$f(x) = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{(4a^2)} - \frac{b^2}{(4a^2)} + \frac{c}{a} \right].$$

Ao realizar a fatoração, alcançamos o seguinte resultado:

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{(4a^2)} + \frac{c}{a} \right].$$

Resolvendo a fração $-\frac{b^2}{(4a^2)} + \frac{c}{a}$, obtemos a seguinte expressão:

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \right].$$

Esta forma de expressar a equação é conhecida como a forma canônica. Uma outra maneira de expressar a forma canônica é adotando $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Verifica-se que $k = f(m)$. Com esta notação, temos para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k$$

Exemplo 2.3. Escreva a função $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ na sua forma canônica e determine os seus zeros.

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

$$f(x) = 2 \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \right)$$

$$f(x) = 2 \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4} \right)^2 - \left(\frac{5}{4} \right)^2 + \frac{3}{2} \right)$$

$$f(x) = 2 \left(x - \frac{5}{4} \right)^2 - 2 \left(\frac{5}{4} \right)^2 + 3$$

$$f(x) = 2 \left(x - \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{25}{8} + 3$$

$$f(x) = 2 \left(x - \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{1}{8}. \quad (2.2)$$

Portanto, a equação 2.2 é a forma canônica pedida.

Para encontrar os zeros, igualamos $f(x)$ a zero e resolvemos a equação:

$$2 \left(x - \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{1}{8} = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{4} \right)^2 = \frac{1}{16}.$$

Tomando a raiz quadrada em ambos os lados, obtemos:

$$x - \frac{5}{4} = \pm \frac{1}{4}$$

Assim, os zeros são:

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x = 1.$$

Portanto, os resultados obtidos atendem aos requisitos do problema proposto.

2.2 Máximo e mínimo

Considerando $a > 0$ para a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ em sua forma canônica, apresenta-se a seguinte expressão:

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$$

Note que há a soma de duas parcelas: a primeira depende de x e é sempre maior ou igual a zero, enquanto a segunda é uma constante. O menor valor dessa soma é alcançado quando a primeira parcela é igual a zero, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Neste ponto, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ assume valor mínimo. Logo, quando $a > 0$ o menor valor assumido por $f(x)$ é igual a $-\frac{\Delta}{4a}$.

Tomando $a < 0$, o valor de $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é o maior possível, para qualquer x pertencente ao conjunto dos números reais.

2.2.1 Imagem

O conceito de imagem de uma função é fundamental para compreendermos como os valores de entrada se relacionam com os valores de saída em uma função. Os valores de entrada, representados por x , são os pontos ao longo do eixo horizontal que inserimos na função. Já os valores de saída, representados por y , são os resultados obtidos quando aplicamos esses valores de entrada à função. Em uma função quadrática, os valores de saída são determinados pela expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $f(x)$ é a saída correspondente para um dado x .

O conjunto imagem de uma função quadrática é o conjunto de todos os possíveis valores de saída y que a função pode produzir para todos os valores de entrada x em seu domínio. Isso significa que a imagem da função quadrática representa todas as alturas possíveis dos pontos no gráfico da parábola ao longo do eixo vertical.

Define-se a imagem de uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$, como o conjunto de valores que y pode assumir, que será simbolizado como (Im). Ao analisar a função em sua forma canônica pode-se tirar pelo menos duas conclusões:

- Para $a > 0$ a função tem imagem $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v = -\frac{\Delta}{4a}\}$.
- Para $a < 0$ a função tem imagem $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v = -\frac{\Delta}{4a}\}$.

Portanto, compreender o conceito de imagem nos permite visualizar como a função se comporta em relação aos seus valores de saída para diferentes valores de entrada, proporcionando uma melhor compreensão do seu comportamento. Isso inclui identificar os

valores mínimos e máximos da função, bem como determinar se a função é crescente ou decrescente em determinados intervalos.

2.3 Fórmula resolutiva

Como visto no Capítulo 1 desta dissertação, a fórmula de resolução de equações quadráticas tem suas bases na história da matemática e evoluiu com o passar do tempo, resultado das contribuições de diversos matemáticos. Graças ao empenho das civilizações antigas, hoje temos facilidade em manipular expressões matemáticas com eficiência. Esse progresso permitiu o desenvolvimento de métodos que tornam a obtenção das raízes de equações mais imediata e eficaz, algo essencial em diversas aplicações práticas

Para $a \neq 0$ e $f(x) = 0$, tem-se as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Encontrando a fórmula resolutiva de uma equação quadrática, comumente conhecida no Brasil como fórmula de Bhaskara. Designa-se a expressão $b^2 - 4ac$ como o símbolo grego delta e denotaremos como discriminante, então teremos $\Delta = b^2 - 4ac$. Observe que, se o discriminante for negativo, ou seja, $\Delta < 0$, a equação não terá solução real, pois $(x + \frac{b}{2a})^2$ é sempre positivo e neste caso sabe-se que um termo ao quadrado não pode ser negativo no conjunto dos números reais. Além disso, a equivalência não faria sentido. Para um discriminante positivo, ou seja, $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes reais e distintas, que são:

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Para um discriminante igual a zero, ou seja, $\Delta = 0$, a equação possui duas raízes iguais dadas por $-\frac{b}{2a}$.

2.4 Soma e produto: aplicação da relação de Girard

De acordo com (LIMA et al., 1997), problemas que envolvem equações do segundo grau estão entre os mais antigos da matemática. Segundo o autor, em textos cuneiformes escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos, encontra-se problemas que traduzido para

a linguagem matemática moderna seria equivalente a encontrar dois números conhecendo sua soma S e seu produto P . Segue o desenvolvimento :

Se um desses números é representado por x , o outro pode ser expresso como $S - x$. Assim, temos a equação $x(S - x) = P$. Ao expandir essa equação, obtemos $Sx - x^2 = P$, que pode ser reescrita como $x^2 - Sx + P = 0$. Substituindo S por $-\frac{b}{a}$ e P por $\frac{c}{a}$, chegamos à equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

Encontrar os valores de x e $(S - x)$ é equivalente a resolver a equação quadrática $x^2 - Sx + P = 0$, ou seja, determinar os pontos onde a função quadrática

$$f(x) = x^2 - Sx + P \quad (2.3)$$

se anula. Esses pontos são denominados zeros da função ou raízes da equação quadrática. Existe uma expressão que determina esses valores que é: para $f(x) = 0$, temos

$$x = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P} \quad (2.4)$$

É importante notar que, dado arbitrariamente os valores de S e P , nem sempre existem dois números reais cuja soma seja S e cujo produto seja P .

Exemplo 2.4. Mostrar que se dois números positivos têm soma constante, seu produto é máximo quando eles são iguais.

Dado que x e y são números positivos e b é o resultado da soma de $x + y$, podemos expressar y como $b - x$. O produto de x e y é representado por $x(b - x)$, que pode ser representado pela função $f(x) = -x^2 + bx$, com coeficiente a menor que zero. Assim, $f(x)$ é maximizado quando $x = -\frac{b}{2a}$. No entanto, como a é igual a menos um, $f(x)$ é maximizado quando $x = \frac{b}{2}$. Portanto, y também será igual a $\frac{b}{2}$. Em outras palavras, x e y serão iguais.

Outra abordagem para determinar os zeros de uma função quadrática, utilizando o método da soma e produto, é testar valores que, quando combinados de forma lógica, resultem na soma e no produto correspondentes aos coeficientes da equação.

Considerando as raízes α e β previamente mencionadas, com $\alpha \leq \beta$, a soma $\alpha + \beta$ é dada da seguinte forma:

$$\alpha + \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Ao multiplicar as raízes α por β , obtém-se o seguinte resultado:

$$\alpha.\beta = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Desenvolvendo o produto, encontramos:

$$\alpha.\beta = \frac{(b^2 - b\sqrt{\Delta} + b\sqrt{\Delta} - \Delta)}{4a} = \frac{b^2 - \Delta}{a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

É importante destacar que este método é bastante eficaz quando a solução não pertença ao conjunto dos números irracionais e complexos. Segue abaixo o modelo mencionado.

Exemplo 2.5. Aplicando o método para a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

O valor de $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$, então o valor da soma dos zeros é igual a $-\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5$, e o produto é $\frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$. Agora, basta escolher dois números que somados resulta em cinco e que o produto resulta em seis. Logo, os números a serem escolhidos são 2 e 3. Substituindo $x = 2$ na equação $f(x) = x^2 - 5x + 6$:

$$f(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

Logo, $x = 2$ é uma solução.

Agora, substituindo $x = 3$ na equação:

$$f(3) = 3^2 - 5(3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$$

Portanto, $x = 3$ também é uma solução.

Assim, foi mostrado que os valores 2 e 3 satisfazem a equação $f(x) = 0$. Portanto esses valores são os zeros da função mencionada.

2.5 Forma fatorada

Sejam α e β os zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Colocando o coeficiente a da função quadrática em evidência, temos:

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

sabe-se que $-\frac{b}{a}$ é igual a $\alpha + \beta$ e que $\frac{c}{a}$ é igual a $\alpha \cdot \beta$, substituindo na função acima, temos:

$$f(x) = a(x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha \cdot \beta)$$

fazendo as operações necessárias, temos:

$$f(x) = a(x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha \cdot \beta)$$

coloca-se o termo comum em evidência, obtém-se o seguinte resultado:

$$f(x) = a(x(x - \alpha) - \beta(x - \alpha))$$

observe que o termo $(x - \alpha)$ é comum, o que permite fatorar a expressão por agrupamento:

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

A forma fatorada da função quadrática nos permite visualizar os zeros da função de forma mais nítida, facilitando na análise e na resolução de problemas relacionados à função.

O método citado nos ajuda a entender quando a função quadrática assume valores positiva, negativa ou igual a zero para diferentes valores de x , com base na posição desses valores em relação às raízes da equação $f(x) = 0$ e ao coeficiente “a” da função quadrática. Isso é útil, pois permite identificar diretamente as raízes e os intervalos onde a função é positiva ou negativa, facilitando a análise gráfica.

Com base nos argumentos ditos acima, podemos enunciar os seguintes fatos sobre o sinal da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Se $\Delta > 0$ e $\alpha < \beta$ são as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$, então o polinômio $ax^2 + bx + c$ mantém o mesmo sinal de a quando x está fora do intervalo $[\alpha, \beta]$ e adota o sinal oposto ao de a quando x está dentro desse intervalo.

Em outras palavras, $f(x) \cdot a > 0$ se $x < \alpha$ ou $x > \beta$. E $f(x) \cdot a < 0$ se $\alpha < x < \beta$.

2. Se $\Delta = 0$ e $\alpha = -\frac{b}{2a}$ representa uma raiz dupla da equação $ax^2 + bx + c = 0$, então $f(x)$ possui o mesmo sinal que a para todo x diferente de α .

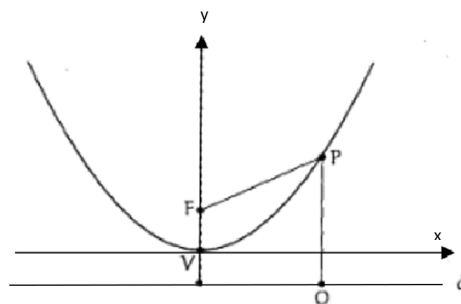
Observamos que, 1 e 2 são resultados imediatos da forma fatorada.

2.6 Gráfico da função quadrática

A função quadrática representa, de forma algébrica, o comportamento dos pontos em um gráfico que descreve uma parábola. Este será o foco de estudo desta seção.

Definição 2.6. Dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d .

Figura 3 – Parábola de foco positivo



Fonte: LIMA, Elon, 1997

Considera-se um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e o eixo positivo das ordenadas passando pelo foco, conforme a imagem. Em uma parábola, a distância do vértice ao foco é igual à distância do vértice à reta diretriz. Toma-se p como a distância do vértice ao foco, então tem-se que a distância do vértice à diretriz também é p . A partir das informações mencionadas, pode-se inferir os seguintes dados:

- $VF = Vd = p$;
- $F(0, p)$ - foco localizado em um ponto positivo;
- $P(x, y)$ - ponto arbitrário da parábola;
- $Q(x, -p)$ - um ponto da diretriz de modo que PQ seja perpendicular a mesma.

Seguindo a definição de parábola, determina-se que $FP = PQ$. Sob essas circunstâncias, a equação reduzida da reta é estabelecida ao aplicar a fórmula da distância entre dois pontos para calcular essas distâncias:

$$\begin{aligned} d((0, p), (x, y)) &= d((x, y), (x, -p)) \\ \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} &= \sqrt{(x - 0)^2 + (-p - y)^2} \\ (x - 0)^2 + (y - p)^2 &= (x - 0)^2 + (-p - y)^2 \\ x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= p^2 + 2py + y^2 \\ x^2 = 4py &\Rightarrow y = \frac{x^2}{4p} \end{aligned}$$

Esta equação descreve uma parábola com eixo de simetria vertical, vértice na origem $(0, 0)$ e abertura voltada para cima.

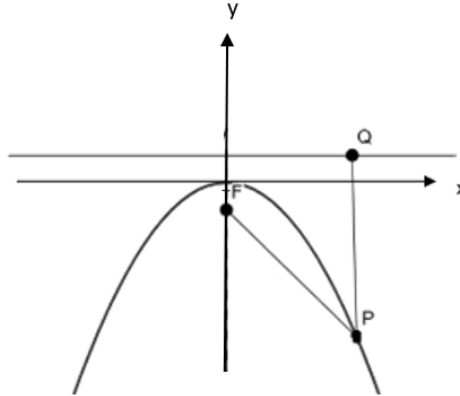
Tomando $y = f(x)$, temos uma Função Quadrática com as mesmas características :

$$f(x) = \frac{x^2}{4p}$$

De maneira análoga, ocorre para o foco no eixo negativo das ordenadas conforme a Figura 4:

- $VF = Vd = p$;
- $F(0, -p)$ - foco localizado em um ponto negativo do eixo y;
- $P(x, y)$ - ponto arbitrário da parábola;
- $Q(x, p)$ - um ponto na diretriz de modo que PQ seja perpendicular a mesma.

Figura 4 – Parábola de foco negativo



Fonte: Produzida pelo autor

Usando a definição de parábola temos:

$$\begin{aligned}
 d((0, p), (x, y)) &= d((x, y), (x, -p)) \\
 \sqrt{(x - 0)^2 + (y - (-p))^2} &= \sqrt{(x - x)^2 + (y - p)^2} \\
 (x - 0)^2 + (y - (-p))^2 &= (x - x)^2 + (y - p)^2 \\
 x^2 + y^2 + 2py + p^2 &= y^2 - 2py + p^2 \\
 x^2 &= -4py \\
 x^2 = -4py &\Rightarrow y = \frac{-x^2}{4p}
 \end{aligned}$$

Esta equação descreve uma parábola com eixo de simetria vertical, vértice na origem $(0, 0)$ e abertura voltada para baixo.

Tomando $y = f(x)$, temos a seguinte função:

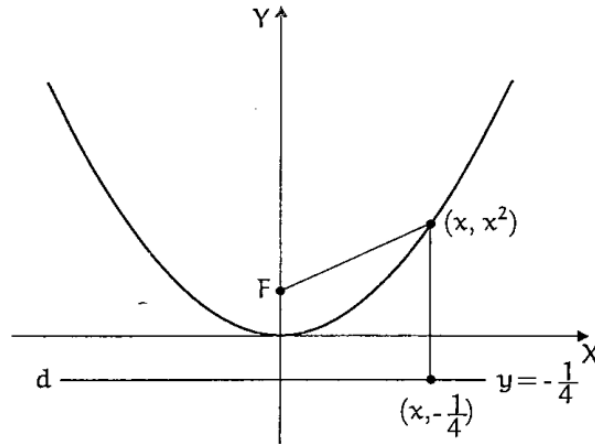
$$f(x) = -\frac{x^2}{4p}$$

Exemplo 2.7. O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ é a parábola cujo foco é $F = (0, \frac{1}{4})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4}$.

Para confirmar essa informação, é suficiente aplicar a definição de parábola e calcular a distância de um ponto qualquer (x, x^2) no gráfico da função $f(x) = x^2$ ao ponto $F = (0, \frac{1}{4})$, e fazer o mesmo para o ponto (x, x^2) e a reta $y = -\frac{1}{4}$ e mostrar que essas distâncias são iguais.

Calculando a distância entre $P = (x, x^2)$ e $F = (0, \frac{1}{4})$, temos:

$$\begin{aligned}
 d(P, F) &= \sqrt{(x - 0)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2} \\
 d(P, F) &= \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Figura 5 – Gráfico da função $f(x) = x^2$ 

Fonte: LIMA, Elon, 1997

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}}$$

$$d(P, F) = \sqrt{x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}}$$

$$d(P, F) = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2}$$

$$d(P, F) = x^2 + \frac{1}{4}$$

Agora, calculando a distância entre $P = (x, x^2)$ e $Q = \left(x, -\frac{1}{4}\right)$, temos:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - x)^2 + \left(x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{\left(x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2}$$

$$d(P, Q) = x^2 + \frac{1}{4}$$

A partir do desenvolvimento, pode-se observar que $d(P, F) = d(P, Q)$, demonstrando assim a veracidade do enunciado.

Exemplo 2.8. Se $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$.

Conforme ilustrado no **Exemplo 2.7**, pode-se simplesmente aplicar a definição de parábola. Calcula-se a distância de um ponto arbitrário (x, ax^2) no gráfico da função

$f(x) = ax^2$ até o ponto $F = (0, \frac{1}{4a})$. Em seguida, repete-se o mesmo processo para o ponto (x, ax^2) em relação à reta $y = -\frac{1}{4a}$, demonstrando assim a igualdade das distâncias.

Vamos mostrar que $PF = PQ$, temos a seguinte expressão para PF:

$$PF = \sqrt{(x - 0)^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$PF = \sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$PF = x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2$$

Expandindo o produto notável, obtém-se :

$$\begin{aligned} x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 &= x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right) \times \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right) \\ &= x^2 + \left(a^2x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2}\right) \\ &= x^2 + a^2x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2} \\ &= a^2x^4 + x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2} \\ &= a^2x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2} \end{aligned}$$

Daí, tem-se

$$PF = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right).$$

Temos a seguinte expressão para PQ:

$$PQ = \sqrt{(x - x)^2 + \left(x^2 - \left(-\frac{1}{4a}\right)\right)^2}$$

$$PQ = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4a}\right)^2}$$

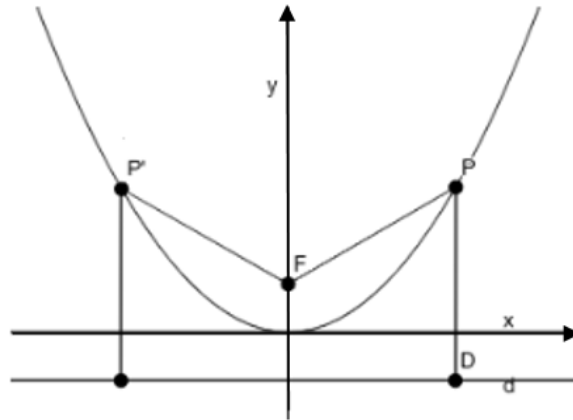
$$PQ = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right).$$

Portanto, ver-se que $PF = PQ$, isso mostra que todo ponto do gráfico de $f(x)$ pertence à parábola em questão.

2.6.1 Eixo de simetria

Se P pertence à parábola e P' é o seu ponto simétrico em relação ao eixo da parábola, então as distâncias de P' ao foco e à diretriz são iguais às distâncias de P ao foco e à diretriz, respectivamente. Isso decorre da simetria da parábola em relação ao seu eixo. Portanto, se um ponto está na parábola, seu ponto simétrico também está. Pode-se

Figura 6 – Eixo de simetria



Fonte: Produzida pelo autor

afirmar que aquilo que anteriormente foi chamado de “eixo” é agora reconhecido como o eixo de simetria da parábola.

Uma abordagem alternativa para compreender o eixo de simetria é a seguinte: Tome x diferente de x' para a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Existe $f(x) = f(x')$? Utilizando a forma canônica, temos as seguintes expressões:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

e

$$f(x') = ax'^2 + bx' + c = a \left(\left(x' + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

Analisando as equações na forma canônica, percebe-se que $f(x) = f(x')$ se, e somente se,

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \left(x' + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

Note que,

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x + \frac{b}{2a} \quad \text{ou} \quad - \left(x + \frac{b}{2a} \right)$$

Considerando que x é diferente de x' , isto implica que:

$$x' + \frac{b}{2a} = - \left(x + \frac{b}{2a} \right)$$

$$x + x' = -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x + x' = -\frac{b}{a}$$

$$\frac{x + x'}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Assim, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ apresenta o mesmo valor $f(x) = f(x')$ para x diferente de x' se, e somente se, os pontos x e x' estão equidistantes de $-\frac{b}{2a}$.

Exemplo 2.9. Consideremos a seguinte função $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

Pode-se determinar o eixo de simetria usando a fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$, onde $a = 2$ e $b = -4$. Substituindo esses valores na fórmula, obtemos:

$$x_v = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1$$

Portanto, o eixo de simetria desta função quadrática é $x = 1$.

Agora, encontramos dois pontos x e x' que têm a média aritmética igual a $-\frac{b}{2a} = 1$. Podemos escolher $x = 0$ e $x' = 2$, pois sua média aritmética é $\frac{(0+2)}{2} = 1$. Agora, podemos verificar se esses pontos têm a mesma imagem sob a função quadrática:

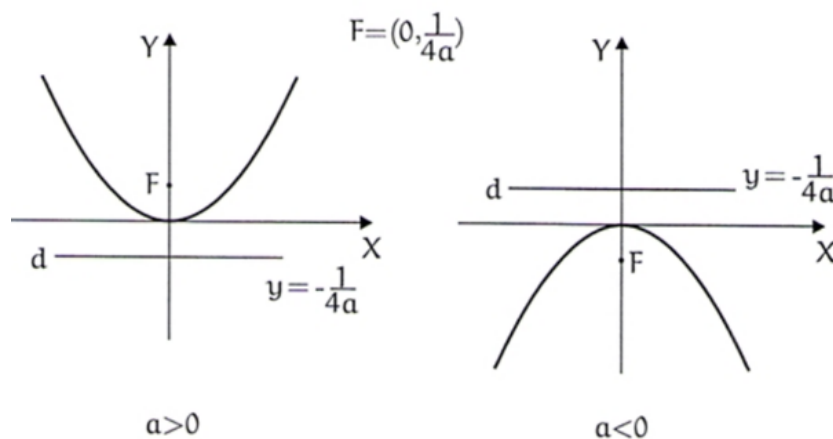
- $f(0) = 2(0)^2 - 4(0) + 3 = 3$
- $f(2) = 2(2)^2 - 4(2) + 3 = 3$

Como ambos $f(0)$ e $f(2)$ são iguais a 3, isso confirma que esses pontos são simétricos em relação ao eixo de simetria do gráfico da função quadrática.

2.6.2 Concavidade da parábola

A partir das informações trabalhadas anteriormente, pode-se analisar o comportamento da parábola a partir do foco e da reta diretriz.

Figura 7 – Concavidade da Parábola



Fonte: LIMA, Elon, 1997

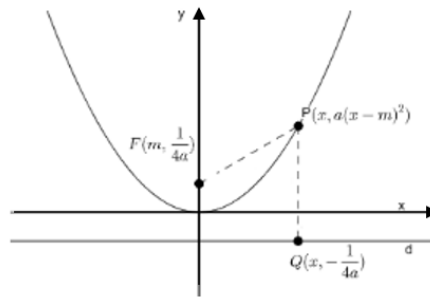
Se $a > 0$, a parábola $f(x) = ax^2$ possui concavidade voltada para cima, e seu vértice representa o ponto de menor ordenada. Por outro lado, se $a < 0$, a concavidade da parábola $f(x) = ax^2$ é direcionada para baixo, e seu vértice se encontra no ponto de maior ordenada.

2.6.3 Translação da parábola

Exemplo 2.10. Para todo $a \neq 0$ e todo m pertencente ao conjunto dos números reais, o gráfico da Função Quadrática $f(x) = a(x - m)^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $(m, \frac{1}{4a})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$.

Aplica-se a definição de parábola, já vista em exemplos anteriores, para mostrar que $PF = PQ$.

Figura 8 – Parábola no eixo canônico



Fonte: LIMA, Elon, 1997

Calculando a distância entre os pontos $F = (m, \frac{1}{4a})$ e $P = (x, a(x - m)^2)$, temos:

$$d(P, F) = d\left((x, a(x - m)^2), \left(m, \frac{1}{4a}\right)\right)$$

$$d(P, F) = \sqrt{(x - m)^2 + \left(a(x - m)^2 - \frac{1}{4a}\right)^2}$$

Note que a segunda parcela é igual a :

$$\left(a(x - m)^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = a^2(x - m)^4 - \frac{(x - m)^2}{2} + \frac{1}{16a^2}$$

Substituindo a expressão, tem-se:

$$d(P, F) = \sqrt{(x - m)^2 + a^2(x - m)^4 - \frac{(x - m)^2}{2} + \frac{1}{16a^2}}$$

Fatorando a expressão no radicando, temos:

$$d(P, F) = \sqrt{\left(a(x - m)^2 + \frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$d(P, F) = a(x - m)^2 + \frac{1}{4a}$$

Agora, calculada a distância do ponto P ao ponto Q da reta diretriz d :

$$d(P, Q) = \left((x, a(x - m)^2), \left(x, \frac{1}{4a}\right)\right)$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - x)^2 + \left(a(x - m)^2 - \left(-\frac{1}{4a}\right)\right)^2}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{\left(a(x - m)^2 + \frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$d(P, Q) = a(x - m)^2 + \frac{1}{4a}$$

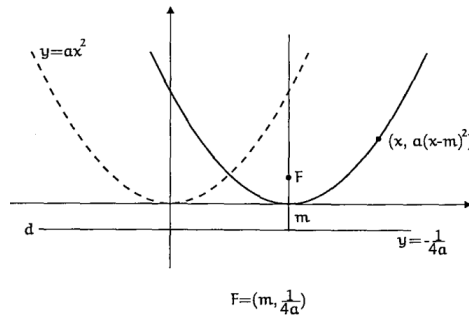
Ficou claro que a distância de P a F é igual à distância de P a Q . Logo, o enunciado é válido.

De acordo com as considerações de (LIMA et al., 1997), o **Exemplo 2.10** oferece duas maneiras de enxergar o problema. Uma delas demonstra que, para qualquer valor de x pertencente ao conjunto dos números reais, a igualdade

$$(x - m)^2 + \left(a(x - m)^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(a(x - m)^2 + \frac{1}{4a}\right)^2$$

é válida. A outra opção simplesmente evidencia que o gráfico de $f(x) = a(x - m)^2$ resulta do gráfico de $g(x) = ax^2$ por meio de uma translação horizontal que desloca o eixo $x = 0$ para o eixo $x = m$, conforme a Figura 9:

Figura 9 – Translação horizontal



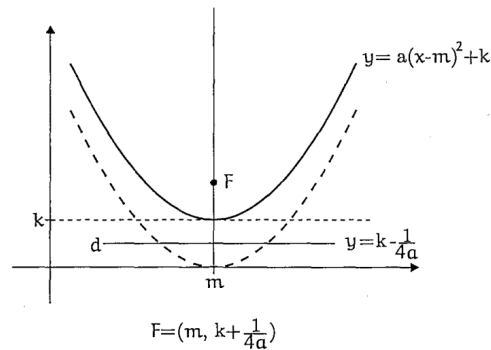
Fonte: LIMA, Elon, 1997

Exemplo 2.11. Dados a , m , k , pertencentes ao conjunto dos números reais, com a diferente de zero, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = k - \frac{1}{4a}$.

A afirmação acima decorre diretamente do **Exemplo 2.10**, considerando que o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é obtido do gráfico de $g(x) = a(x - m)^2$ por meio de uma translação vertical de (x, y) para $(x, y + k)$, o que posiciona o eixo OX na linha $y = k$ e a reta $y = -\frac{1}{4a}$.

É válido observar que toda função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser reescrita na forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$, em que $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = f(m)$. Portanto, conclui-se que o gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola.

Figura 10 – Translação vertical da parábola.



Fonte: LIMA, *Elon*, 1997

2.6.4 As coordenadas do vértice

Para uma função quadrática na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, as coordenadas do vértice podem ser calculadas usando a fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$ para encontrar a coordenada x e, em seguida, substituindo esse valor de x na função para obter a coordenada y . O ponto em questão é denominado vértice da parábola, uma característica fundamental que indica o ponto de máximo ou mínimo, dependendo do coeficiente a da função.

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

Neste ponto, também se destaca a alteração na monotonicidade da função quadrática, indicando a transição entre os comportamentos de crescente ou decrescente.

3 Implementação do Scratch no Ensino de Funções Quadráticas: Diretrizes Educacionais, Teoria Construcionista e Aplicação

Este capítulo tem como objetivo explorar o software Scratch e implementar seu uso no ensino de funções quadráticas. A introdução de tecnologias no ensino de matemática pode transformar a aprendizagem, tornando conceitos abstratos mais compreensíveis.

Primeiramente, analisamos as diretrizes educacionais que por sua vez estimulam o uso de softwares educativos, destacando como essas políticas apoiam a integração tecnológica nas escolas. Em seguida, discutimos a teoria construcionista de Seymour Papert, pioneiro no uso de tecnologia no ensino de matemática e criador do software logo.

Posteriormente, apresentamos o software Scratch, explicando suas principais funcionalidades. Logo em seguida, exploramos a programação no Scratch, mostrando exemplos práticos que promovem o engajamento dos alunos. Por fim, exploramos a aplicação do software no ensino de funções polinomiais do segundo grau, abordando conceitos fundamentais como os zeros, construção de gráficos, entre outros, conceitos.

Este capítulo demonstra como a linguagem de programação Scratch pode transformar e enriquecer o ensino de matemática, tornando-o mais acessível e eficaz para os alunos.

3.1 A Tecnologia e as diretrizes educacionais brasileiras

A tecnologia permeia todas as esferas da nossa sociedade, e a educação não fica de fora desse processo de transformação. Ela se tornou uma ferramenta poderosa para potencializar o aprendizado, proporcionando aos educadores e alunos oportunidades únicas de explorar novos horizontes. Ao incorporar a tecnologia de forma eficaz, é possível criar experiências educacionais mais envolventes, interativas e personalizadas.

A educação é um dos pilares fundamentais para o desenvolvimento humano e o progresso de uma sociedade. Ao longo dos anos, o cenário educacional tem passado por uma notável transformação, estimulada pelo progresso tecnológico. Neste contexto, torna-se

essencial compreender a crescente importância da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem, pois ela desempenha um papel de destaque na construção de uma educação mais eficaz e relevante para os tempos modernos.

Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em suas competências gerais, enfatiza a relevância dos computadores e recursos tecnológicos no Ensino Médio. O documento oficial de orientação educacional afirma o seguinte:

“No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área”. (BRASIL, 2018, 470).

À medida que a sociedade avança rapidamente em direção a um mundo cada vez mais digital, é importante que a educação esteja alinhada com as demandas desse novo cenário. A escola desempenha um papel essencial na preparação dos alunos para os desafios do futuro. É nela que devem-se desenvolver habilidades como pensamento crítico, resolução de problemas, criatividade, colaboração e pensamento computacional, que são essenciais em um mundo em constante evolução.

Nesse contexto, diretrizes como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) desempenham um papel importante ao estimular a integração da tecnologia na educação. O documento evidencia uma preocupação clara com as profundas transformações sociais provocadas pelas tecnologias. Conforme afirmado na BNCC:

“A preocupação com os impactos dessas transformações na sociedade está expressa na BNCC e se explicita já nas competências gerais para a Educação Básica. Diferentes dimensões que caracterizam a computação e as tecnologias digitais são tematizadas, tanto no que diz respeito a conhecimentos e habilidades quanto a atitudes e valores” (BRASIL, 2018, 473).

Além da BNCC, o Brasil também conta com o referencial da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) como guias para a construção de uma educação de qualidade. Embora a LDB não faça uma menção direta à necessidade de promover o uso da tecnologia como um meio para melhorar a qualidade do ensino. A LDB, em seu artigo 1º e parágrafo 2º, destaca que: A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social (FEDERAL, 2017, p.10). Isso pode ser interpretado como um reconhecimento da necessidade de preparar os estudantes para um mundo cada vez mais influenciado pela tecnologia digital.

Os PCN's, por sua vez, destacam não só a importância do desenvolvimento de habilidades como criatividade, pensamento crítico e resolução de problemas. Mas também,

ressalta a preocupação com o ritmo acelerado das mudanças e a necessidade de adaptação a um mundo cada vez mais tecnológico. E isso é evidenciado em:

“ O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional” (BRASIL, 2018, p.41).

Com isso, a escola tem o papel de proporcionar competências e habilidades essenciais para que os estudantes estejam preparados para os desafios do mundo contemporâneo.

3.2 A teoria construcionista de Seymour Papert

O construcionismo é uma teoria de aprendizado desenvolvida por Seymour Papert na década de 60, influenciada pelos anos que trabalhou ao lado de Piaget. Mesmo em uma época em que os computadores não eram amplamente comuns, Papert já vislumbrava o potencial dessas ferramentas na educação. Sua teoria propõe que os alunos aprendem melhor quando estão ativamente envolvidos na construção de algo tangível e significativo, utilizando recursos tecnológicos, especialmente o computador. Segundo (PINTO, 2010)

Esta teoria coloca a construção do conhecimento, por intermédio do computador, no centro da sua análise, defendendo que se deve olhar a criança como um construtor. E, como qualquer construtor, a criança precisa de matéria para construir o seu próprio conhecimento. (PINTO, 2010, 26)

Segundo (BICUDO; BORBA, 2012), afirma que para Papert o computador possibilita a criação de ambientes mais propícios, enriquecedores e específicos para o desenvolvimento do conhecimento. Além disso, ressalta a relevância do aprendizado como um processo ativo, no qual os aprendizes participam ativamente do desenvolvimento de projetos práticos, em vez de apenas ouvirem passivamente as explicações do professor.

Uma das principais ideias do construcionismo é que os alunos aprendem melhor quando estão engajados em atividades práticas, pois de acordo com (BICUDO; BORBA, 2012), o aprendiz tem mais oportunidades de aprendizado quando está ativamente envolvido na criação de um “produto” que possa ser objeto de reflexão e compartilhamento com outras pessoas. Ao criar algo novo, os alunos não somente adquirem conhecimento e habilidades, mas também desenvolvem um entendimento mais profundo dos conceitos e princípios subjacentes

Além disso, o construcionismo valoriza a exploração, a experimentação e o erro como partes naturais do processo de aprendizagem. Os alunos são incentivados a tentar

coisas novas, fazer perguntas e resolver problemas por conta própria, com o apoio do professor como um guia e facilitador.

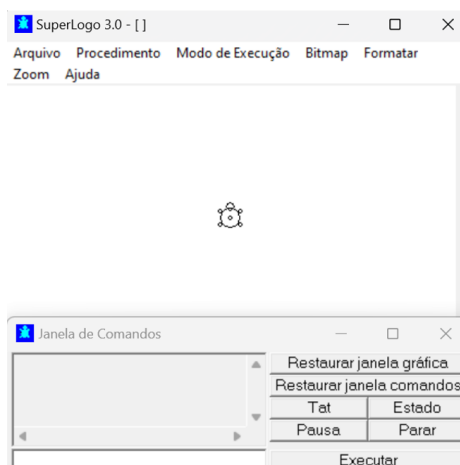
Segundo (FINO, 2017), o construcionismo enfatiza que a oportunidade para cometer erros é essencial no processo de aprendizagem. Ao permitir a iniciativa dos alunos, especialmente ao programar computadores, os erros são vistos como parte natural do processo, incentivando o pensamento crítico e a depuração como uma etapa valiosa na construção do conhecimento.

Uma das aplicações mais conhecidas do construcionismo é o ambiente de aprendizagem baseado na programação logo, onde os alunos podem criar e programar seus próprios projetos usando a linguagem de programação desenvolvido por Papert. Nesse contexto, os alunos aprendem a programar e a pensar de forma lógica e criativa, enquanto constroem e testam suas próprias soluções para problemas.

3.2.1 Linguagem de programação logo

O software de programação logo, desenvolvido na década de 1960 por Seymour Papert e sua equipe no Massachusetts Institute of Technology (MIT), trouxe uma maneira completamente diferente de como as crianças poderiam aprender matemática. Papert, um pioneiro no campo da inteligência artificial e da aprendizagem computacional, viu na linguagem logo uma oportunidade de trazer a programação para o contexto educacional. A Figura 11 mostra a interface do software logo:

Figura 11 – Interface do logo



Fonte: Produzida pelo autor

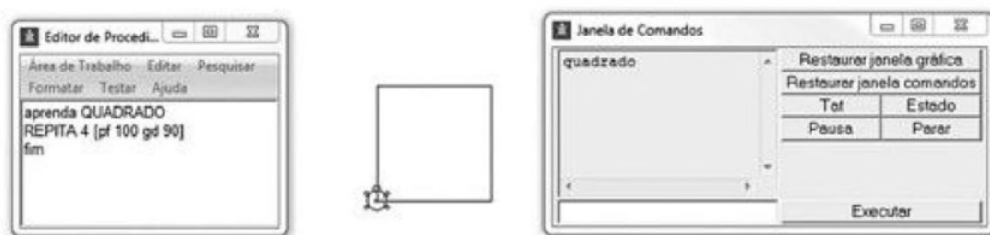
logo foi concebido com um propósito claro: permitir que crianças explorassem conceitos matemáticos e de programação através da criação de desenhos em uma tela de computador. Central para sua abordagem estava a ideia de que as crianças poderiam

aprender melhor ao fazerem, ao invés de apenas absorverem informações passivamente. Segundo(BRASÃO, 2007)

Trata-se de uma linguagem interativa que possibilita trabalhar de modo prático a estrutura do raciocínio, os conceitos de matemática e de lógica. O ambiente permite que o aluno expresse a resolução de um problema segundo uma linguagem de programação. O programa pode ser verificado por meio de sua execução e, com isso, o aluno pode verificar suas idéias e conceitos.

No coração do logo estava a “tartaruga”, um cursor gráfico que as crianças podiam controlar com comandos de programação simples. Elas podiam direcionar a tartaruga para frente ou para trás, girar em diferentes direções e levantar ou abaixar sua “caneta” virtual para desenhar na tela. Este simples conceito permitia que crianças explorassem uma variedade de conceitos matemáticos, como geometria, coordenadas cartesianas, e até mesmo conceitos mais avançados como loops e condicionais. A Figura 12 ilustra a construção no logo.

Figura 12 – Editor do logo



Fonte: Produzida pelo autor

Segundo (BRASÃO, 2007),afirma que:

“A tartaruga é um animal cibernético controlado pelo computador. Ela existe dentro das miniculturas cognitivas do “ambiente logo”, sendo Logo a linguagem computacional que usamos para nos comunicarmos com a tartaruga. Essa tartaruga serve ao único propósito de ser fácil de programar e boa para pensar. A tartaruga no monitor faz com que o aluno descentralize seu pensamento e imagine um objeto deslocando-se e girando no espaço”.

Uma das características do logo era sua natureza aberta e exploratória. Não havia uma maneira “certa” de usar o logo; em vez disso, as crianças eram encorajadas a experimentar, testar hipóteses e descobrir por si mesmas como os comandos de programação poderiam ser combinados para criar diferentes padrões e formas.

O logo também influenciou o desenvolvimento de outras linguagens de programação e ambientes de aprendizagem, como o software Scratch, ajudando a pavimentar o caminho para abordagens mais interativas e centradas no aluno no campo da educação em tecnologia.

Mais do que apenas uma ferramenta de software, para os seus usuários o logo representou uma filosofia educacional que valorizava a exploração, a experimentação e a descoberta como fundamentais para o processo de aprendizagem. Ao colocar o poder da programação nas mãos das crianças, Seymour Papert e o logo abriram uma janela para a criatividade e o pensamento computacional que continuam a inspirar educadores e estudantes até os dias de hoje.

3.2.2 Software Scratch

O Scratch é uma linguagem de programação visual e uma plataforma online que permite aos usuários criar histórias, jogos, animações, entre outros. Desenvolvido para ser uma ferramenta educativa, o Scratch foi inicialmente projetado para crianças e principiantes na programação, facilitando o aprendizado por meio de uma interface intuitiva onde os comandos são organizados como blocos coloridos que podem ser arrastados e encaixados para formar os scripts, ou seja, o código a ser executado. Esta abordagem elimina a necessidade de escrever código em textos sintaticamente corretos, tornando a programação acessível ao público iniciante.

Segundo (VARELA, 2017)

A maioria das linguagens de programação são baseadas em textos, isto é, você teria de dar comandos ao computador, escrevendo-os em um programa. O Scratch é uma linguagem de programação visual, portanto, nós apenas precisamos arrastar blocos para dentro da área de programação.(VARELA, 2017, p.6)

Mitchel Resnick foi fortemente influenciado por Seymour Papert, o criador da teoria do construtivismo e da linguagem de programação logo. Nos anos 1990, Resnick fundou o Lifelong Kindergarten Group. Este grupo se concentrou em desenvolver novas tecnologias e atividades que envolvem as crianças em experiências de aprendizagem por meio da tecnologia.

O Scratch foi desenvolvido em 2007 pelo Lifelong Kindergarten Group no Media Lab do MIT, liderado por Mitchel Resnick. Segundo (SOUZA; COSTA, 2018) o principal objetivo do grupo é pesquisar e compreender melhor como o trabalho criativo com as tecnologias, especialmente usando bricolagem e programação, se relaciona com o processo de aprendizagem. Segundo (VARELA, 2017) a criação do Scratch é o resultado de anos de pesquisa e desenvolvimento, baseados na teoria do construtivismo, que enfatiza a importância da aprendizagem significativa através da construção de algo concreto.

Os autores (RAMOS; ROMÃO, 2016), afirmam que Resnick ficou fascinado com o envolvimento das crianças com o jogo Lego, o que o levou a desenvolver uma linguagem de programação inspirado nesse brinquedo de encaixes e também nos princípios do logo. O Scratch é uma das principais realizações deste grupo, sendo o resultado da junção dessas

duas ideias. Segundo (RAMOS; ROMÃO, 2016) o scratch apresenta uma interface propícia à criação de projetos, pois:

Sendo uma combinação perfeita entre o LOGO e o Lego, a interface do SCRATCH possibilita uma “montagem” mais fácil e rápida, onde não ocorreram erros de sintaxe e melhorando o aproveitamento do alunado diante dos algoritmos, facilitando a aprendizagem do aluno.(RAMOS; ROMÃO, 2016, p.5)

Uma das características do Scratch é ser um software de código aberto. Isso significa que qualquer pessoa pode baixar, examinar e modificar o código-fonte de um projeto, promovendo uma cultura de compartilhamento e colaboração. Esta característica permite que qualquer usuário personalize e adapte projetos de terceiros para melhor atender às suas necessidades específicas, ampliando ainda mais seu potencial.

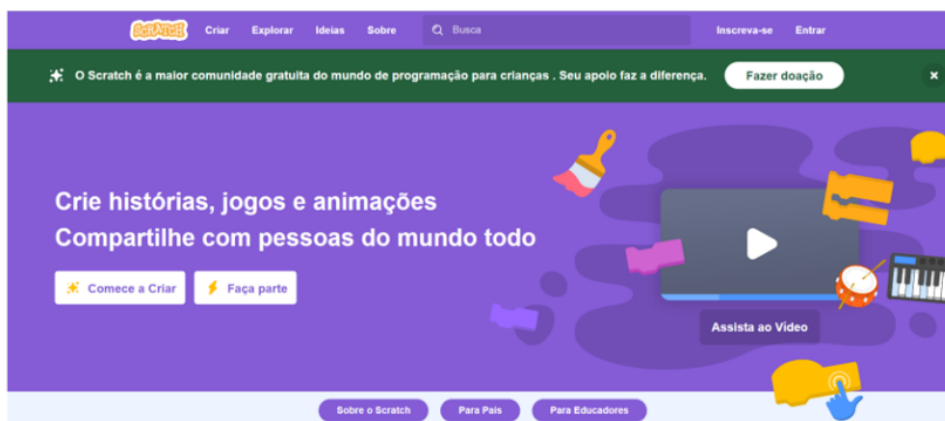
O Scratch é uma ferramenta de programação, além de ser um meio de expressão criativa e uma plataforma para a aprendizagem colaborativa. Desenvolvido com base em pesquisas teóricas e práticas, o Scratch capacita os usuários a explorar e experimentar com a programação de uma maneira acessível. A combinação de sua interface visual intuitiva, a filosofia de código aberto e o suporte de uma comunidade ativa faz do Scratch uma ferramenta eficaz para fomentar o desenvolvimento do pensamento computacional e a criatividade em aprendizes de todas as idades.

Graças à sua capacidade de criar códigos de forma acessível e intuitiva, a linguagem de programação Scratch supera sua “irmã mais velha” o logo. Atualmente, o Scratch tem sido amplamente adotado por universidades de renome para preparar indivíduos para cursos mais avançados em ciência da computação. Um exemplo notável é seu uso no início do curso “Introdução à Ciência da Computação” da (CS50) Harvard College. Segundo o site <https://cs50.harvard.edu/scratch/2024>, essa linguagem de programação é amplamente utilizada nos cursos de engenharia da computação como uma introdução ao assunto Essa popularidade destaca sua eficácia em fornecer uma base sólida para os alunos iniciantes, permitindo-lhes compreender conceitos fundamentais de programação de forma prática e envolvente.

3.3 Conhecendo a plataforma Scratch

A página inicial do Scratch, acessível em <http://scratch.mit.edu>, é o ponto de partida para uma jornada de aprendizado intuitivo e empolgante, conforme a Figura 13. O primeiro passo é criar uma conta gratuita, que permite aos usuários salvar seus projetos, abrir e editar em outros dispositivos e também podendo tanto compartilhar os projetos de sua autoria com a comunidade do Scratch, quanto utilizar projetos da comunidade.

Figura 13 – Página inicial do Scratch



Fonte: *Produzida pelo autor*

Na parte inferior da página inicial do Scratch, encontra-se uma série de recursos adicionais de grande importância. Isso inclui a opção de criar contas específicas para educadores, contas para pais, contas de desenvolvedores, opção para alterar o idioma e acessar fóruns de discussão, entre outros recursos valiosos, veja Figura 14.

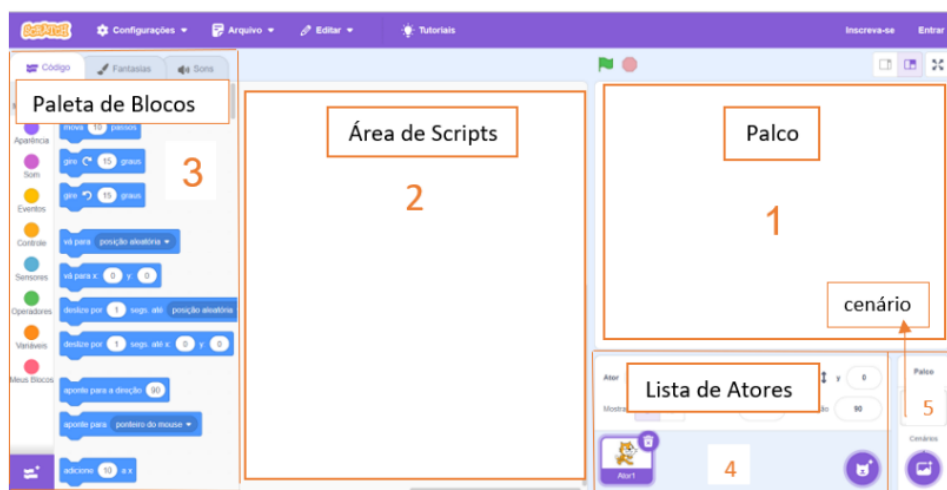
Figura 14 – Parte inferior da página inicial do Scratch



Fonte: *Produzida pelo autor*

Ao explorar a interface do Scratch, fica evidente sua acessibilidade. A página é projetada com simplicidade e intencionalmente amigável para os novatos na programação. A plataforma de programação é composta essencialmente por cinco componentes que juntos tornam a funcionalidade dos projetos possíveis. Esses componentes incluem: o palco, área de descrição, paletas de blocos, a área onde ficam os atores e os cenários do palco, conforme a Figura 15.

Figura 15 – Interface do Scratch



Fonte: Produzida pelo autor

A seguir, será exposto de forma detalhada a função dos cinco principais elementos do Scratch:

Palco: Esta seção constitui o espaço primordial que viabiliza a observação da dimensão gráfica e animada do projeto, além de servir como ambiente de experimentação e teste.

Área de Scripts: Neste espaço é onde a programação é elaborada, abrangendo tanto o código que será desenvolvido quanto os blocos que controlam o movimento, permanecendo de forma centralizada nessa seção.

Paleta de Blocos: Todos os Blocos que serão utilizados para programar estarão localizados nesta seção. Observe que eles são categorizados por cores e, dentro de cada cor, os Blocos apresentam diferentes formas. Cada cor corresponde a uma função específica e, de acordo com a sua forma, os Blocos realizam a leitura ou retorno de tipos de valores distintos. É importante lembrar que na Área de Scripts é onde os Blocos são compilados, ou seja, transformados em um programa que será visualizado no Palco.

Lista de Atores: Este espaço oferece a capacidade de visualizar, adicionar ou modificar imagens que serão exibidas no Palco, também conhecidas como Atores.

Cenário: Este componente representa o ambiente no qual podemos selecionar e personalizar para criar o Palco do projeto de maneira personalizada e única.

Ainda na interface do software encontra-se a opção de tutoriais, função desenvolvida para dar suporte nos primeiros passos, ao orientar os usuários iniciantes em seu processo de aprendizado. Esses tutoriais são recursos valiosos, pois auxiliam os usuários, principalmente iniciantes, a aprenderem como criar jogos, contar histórias e desenvolver animações. Eles servem como um guia mostrando o passo a passo dos comandos, oferecendo instruções

claras e práticas, ajudando assim a comunidade Scratch a expandir suas habilidades de programação e narrativa.

3.4 Programação no Scratch

A programação é realizada por meio de blocos de comando que representam ações como movimento, som e interações. Arrastar e soltar esses blocos cria scripts, tornando a programação uma experiência visual e intuitiva. A versatilidade do Scratch é impressionante. Os usuários podem criar jogos, animações, histórias interativas e mais, tudo isso com uma interface de fácil uso. Para programadores mais experientes, o Scratch oferece recursos avançados, incluindo variáveis, condicionais e loops, permitindo a criação de projetos complexos.

De acordo com a tradição entre programadores, a primeira tarefa a ser realizada é criar um programa que exiba a mensagem “Olá, mundo!”.

“Olá, mundo!” é frequentemente considerado o primeiro programa que os programadores escrevem ao aprender uma nova linguagem de programação. Esse programa simples envolve a exibição da mensagem “Olá, mundo!” na tela ou em algum outro tipo de saída. A ideia por trás disso é que, ao criar esse programa básico, os programadores podem se familiarizar com a sintaxe da linguagem, a estrutura do código e o processo de compilação ou execução.

A seguir, apresenta-se exemplos de como se escreve um programa para expressar a mensagem “Olá, mundo!” em algumas linguagens de programação mais usadas:

Figura 16 – Imprimindo “Olá, mundo!”

Linguagem	Código
Python	<code>print ("Olá, mundo!");</code>
Java	<code>system.out. println("Olá, mundo!");</code>
C	<code>printf ("Olá, mundo!");</code>
Scratch	

Fonte: *Produzida pelo autor*

Nos exemplos dados de todas as linguagens de programação, o resultado é uniformemente “Olá, mundo!”. Entretanto, no caso do Scratch, a abordagem se diferencia um

pouco, já que a mensagem é sempre entregue por um personagem (Ator). A essência da mensagem permanece a mesma, mas a apresentação ganha um toque diferente.

Figura 17 – “Olá, mundo!”, no Scratch



Fonte: Produzida pelo autor

3.4.1 Demonstração de programação no Scratch: exemplo prático

A seguir, será apresentado um exemplo sobre a utilização da plataforma Scratch, com o propósito de ilustrar a exploração de suas funcionalidades. Este exemplo demonstrará a capacidade da plataforma em facilitar a criação de projetos, contribuindo assim para o desenvolvimento de habilidades essenciais tanto na programação quanto na resolução problemas e também contribuindo de maneira significativa na aprendizagem por meio da tecnologia.

Será apresentado a criação de um projeto de natureza simples, cujo objetivo é demonstrar a aplicação de uma operação matemática fundamental, a multiplicação. Esta abordagem inicial visa tanto a prática e a compreensão da programação, quanto a construção de uma base sólida para explorar conceitos matemáticos por meio da tecnologia.

Em qualquer projeto de programação, seja ele simples ou complexo, um passo fundamental é o planejamento cuidadoso das funcionalidades e da estrutura do projeto. Neste contexto, o planejamento do projeto será desenvolvido em etapas. Vai ser desenvolvido o planejamento de um projeto de programação cujo objetivo é criar um QUIZ educativo baseado na tabuada, uma aplicação que envolverá dois atores e dois cenários distintos: a página inicial (start) e a página do quiz em si.

Primeiramente escolhe-se o cenário “School” do Scratch e em seguida escolhe-se um ator para representar o botão “Start”, que ficará na tela inicial, conforme a Figura 18.

Após essa etapa, chegou o momento de programar. Inicia-se com a programação do primeiro ator que é nomeado “START”. No botão “FANTASIA”, localizado acima da

Figura 18 – Interface do quizz



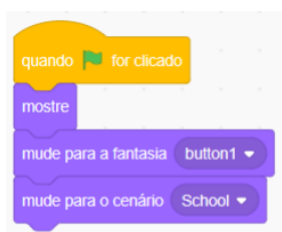
Fonte: Produzida pelo autor

paleta de blocos, duplica-se o ator e em uma das duas opções, altera-se a sua cor, criando um segundo ator com as cores modificadas. Os atores são denominados como “START 1” e “START 2” para facilitar o reconhecimento durante a programação.

Na paleta de blocos, utiliza-se a seção denominada “EVENTOS” para dar início à programação com os blocos. O programa para o botão “START” se divide em dois Scripts, que são os blocos de comandos das figuras .

O primeiro Script, representado na Figura 19, estabelece o seguinte: sempre que a bandeira verde for pressionada, o ator 1 estará ativo, a fantasia 1 será definida como a inicial e o cenário inicial será o “School”.

Figura 19 – Definição padrão do botão Start para a tela inicial

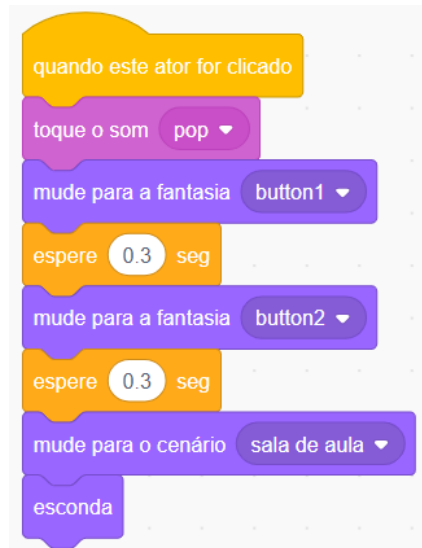


Fonte: Produzida pelo autor

O segundo Script define o seguinte procedimento: quando o botão “START” for pressionado, um efeito sonoro é acionado e a fantasia do ator “START1” é alternada entre “START1” e “START2”, criando um efeito visual semelhante ao de pressionar um botão. Em seguida, o ator “START” fica invisível, e o cenário School é alterado para o cenário

sala de aula, esses passos são visíveis conforme a Figura 20.

Figura 20 – Efeito do botão Start



Fonte: Produzida pelo autor

Esta fase do programa é a etapa dos comandos referentes ao “QUIZ” que foi dividido em 4 Scripts. O primeiro Script define o seguinte procedimento: sempre que a bandeira verde for pressionada, o ator 2 estará desativado, o que no contexto do Scratch significa tornar-se invisível, e em seguida, as variáveis X e Y são ocultadas. Esconde-se as variáveis para que elas não fiquem visíveis no palco quando o projeto iniciar. As variáveis serão construídas no próximo Scripts do Quiz, segundo a Figura 21 e inserida no início da programação

Figura 21 – Escondendo a variável

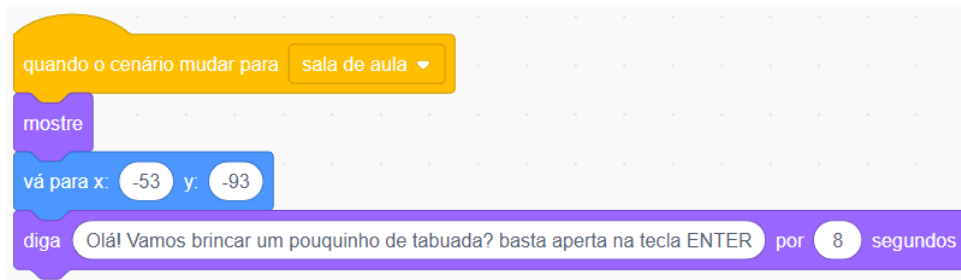


Fonte: Produzida pelo autor

O segundo “Script” estabelece o seguinte procedimento: quando o cenário mudar para a sala de aula, o ator 2 será ativado, estará na posição ($x = -53$) e ($y = -93$) do “Palco” e emitirá uma mensagem de interação, dando início ao Quiz. Conforme a Figura 22

No terceiro “Script”, serão utilizados os comandos das “Paletas de Blocos” “Eventos”, “Controles”, “Sensores” e “Operadores”, conforme a (interface).

Figura 22 – Transmitindo mensagem



Fonte: *Produzida pelo autor*

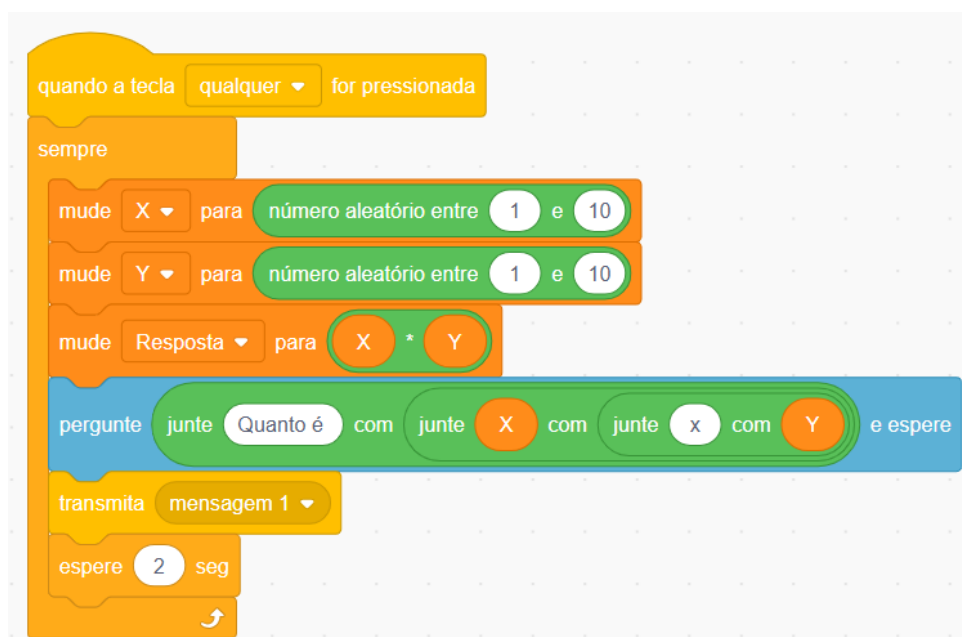
Neste Script é onde ocorrerão as perguntas da tabuada. Para isso, são criadas três variáveis, “X”, “Y” e “resposta”, dentro da Paleta de Blocos no comando “Controles”. Em termos gerais, uma variável tem a finalidade de armazenar valores, e neste programa em particular, ela será empregada para conter valores aleatórios situados no intervalo fechado de 1 a 10, e esta função é retirada do bloco operadores.

Além disso, é criado a variável “Resposta” com a finalidade de gerenciar as respostas fornecidas pelos usuários às perguntas relacionadas à tabuada. Essa parte do código desempenhará um papel fundamental no controle do processo de criação das perguntas e na avaliação das respostas fornecidas pelos jogadores. Para isso, a variável “Resposta” será responsável por armazenar o produto dos valores contidos nas variáveis “X” e “Y”.

Em seguida, o programa utiliza o comando do sensor, especificamente a função “pergunta”. Dentro dessa função, são empregados blocos de operações, incluindo a função “junte com” formando exatamente a pergunta: quanto é “variável X” vezes a “variável Y”. Esses comandos permitem ao programa apresentar uma pergunta aos usuários e coletar suas respostas. O uso de “junte com” pode ser útil para formatar a pergunta de maneira adequada e exibir informações relevantes aos jogadores.

Após o uso do bloco de sensores e da função “pergunta”, o programa utiliza um bloco de comandos da categoria “Controles” com a função “transmitir”. Esse bloco de comando estabelece a conexão com o quarto script e espera a entrada das respostas dos usuários, permitindo a interação com o programa. Para garantir que as perguntas sejam feitas repetidamente, é possível colocar as variáveis, a função de pergunta e a função de transmissão em um loop. No Scratch, esse loop é conhecido como “SEMPRE”. Isso permitirá que o programa continue gerando perguntas e interagindo com os usuários de forma contínua, tornando o quiz um processo iterativo. A construção das ideias mencionadas pode ser vista em um único script representado na Figura 23.

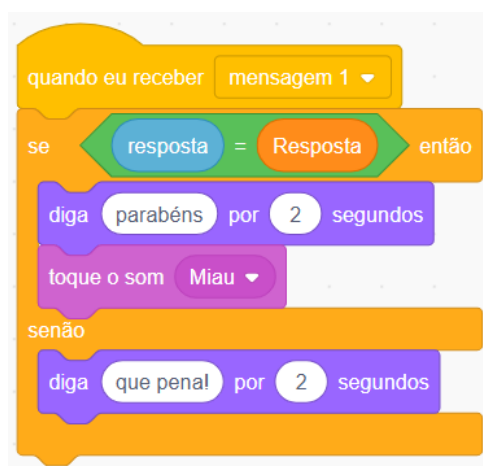
Figura 23 – Pressionanda a tecla



Fonte: Produzida pelo autor

No quarto bloco, é implementada uma estrutura condicional que verifica se a resposta fornecida pelos usuários é igual a resposta armazenada na variável “resposta”. Se a resposta estiver correta, o programa retornará uma mensagem de parabéns. Caso contrário, ele exibirá uma mensagem criada pelo programador, que contém a expressão “Que pena”. Essa estrutura condicional permite ao programa fornecer feedback aos usuários com base na precisão de suas respostas. A Figura 24 ilustra a ideia citada.

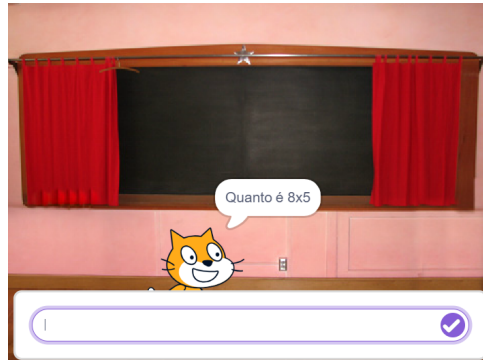
Figura 24 – Analisanda a resposta



Fonte: Produzida pelo autor

A Figura 25 mostra a junção de todos os scripts, produzindo o seguinte resultado:

Figura 25 – Resultado do projeto



Fonte: Produzida pelo autor

Acesse o código-fonte através do link: <https://scratch.mit.edu/projects/89435719>

3.5 Linguagem de programação Scratch e a função quadrática

Com o objetivo de explorar e compreender a função quadrática, propõe-se a elaboração de um programa computacional que seja capaz de identificar os zeros de qualquer função quadrática, utilizando os coeficientes “ a ”, “ b ” e “ c ” como parâmetros de entrada. Com o intuito de tornar a programação mais compreensível, o projeto será dividido em três scripts.

Primeiramente escolhe-se o cenário “Room 2” do Scratch e em seguida é selecionado um ator, “abby-a”, para interagir com os usuários que utilizarão o programa.

O início da programação ocorre da seguinte maneira: na paleta de blocos, seleciona-se o bloco “eventos” e opta-se pelo bloco “ao clicar na bandeira verde” para iniciar a programação. Em seguida é selecionado a posição (x, y) designada para o ator no bloco “movimento”. O ator dará início à interação com o usuário por meio da função “aparência” e bloco de comando “diga”, apresentando a seguinte pergunta: “Deseja descobrir os zeros de qual função quadrática? Basta informar os valores dos coeficientes a , b e c .”

A fim de prosseguir com a programação, será fundamental criar variáveis para armazenar os coeficientes da função, ou seja, a , b e c . Além disso, serão estabelecidas variáveis para armazenar os valores de delta, y , x , x_1 e x_2 que utilizaremos mais adiante.

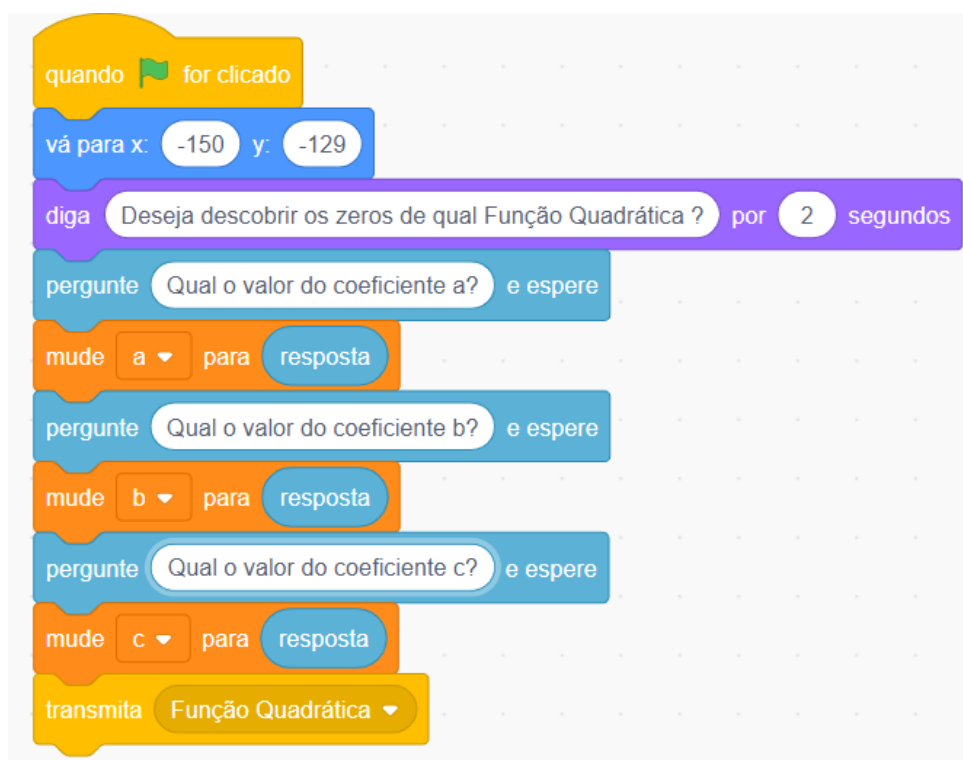
Após utilizar o bloco “diga”, aplica-se o bloco “pergunte e aguarde” da função “sensores”. Esse bloco tem a finalidade de apresentar uma pergunta ao usuário e, simultaneamente, aguardar a resposta. Para cada coeficiente da função, serão empregados

o bloco “pergunta” e os valores fornecidos pelo usuário serão registrados nas variáveis correspondentes.

Para cada variável criada, há a opção de exibir seu resultado na tela; portanto, iremos mostrar os coeficientes escolhidos pelo usuário como respostas às perguntas.

Para ilustrar, tome como exemplo o uso do bloco “mude para” em relação a uma variável específica, como a variável “a”. Esta operação ficaria assim: “mude a” para “resposta”. Importante notar que o bloco “resposta” está inserido na função “sensores”. o bloco “resposta” ajuda a armazenar e utilizar as respostas dadas pelo usuário. Essas concepções tornam-se mais evidentes na Figura 26.

Figura 26 – Coeficientes

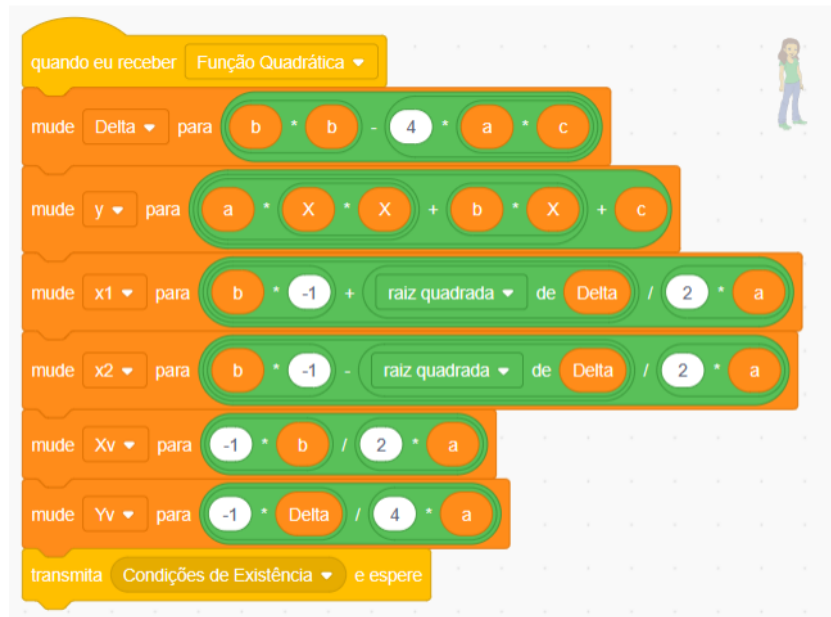


Fonte: Produzida pelo autor

No segundo script, é onde todos os elementos da função quadrática serão criados. O Script 1 exibirá uma mensagem ao final da programação. O Script 2 começa por receber as informações do Script 1. O bloco “Quando eu receber [mensagem]” no Scratch é usado para criar ações que ocorrerão quando um sprite, ou seja, um personagem recebe uma mensagem específica de outro sprite ou quando uma mensagem é transmitida para todos os sprites. Neste caso, foi utilizado para reduzir à programação em scripts menores.

Nesta fase, faz-se uso das variáveis previamente definidas para escrever as equações correspondentes, como mostra a Figura 27. Por exemplo, para a variável delta, a equação correspondente é dada por $(b^2 - 4ac)$. Essas equações são formuladas utilizando os blocos de comando “operadores” disponíveis na paleta de blocos.

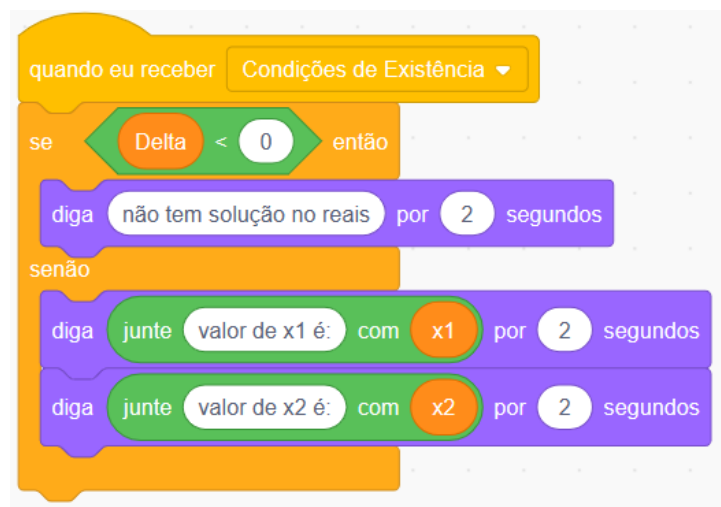
Figura 27 – Script de função quadrática



Fonte: Produzida pelo autor

O objetivo do terceiro script é verificar se a função possui zeros reais ou não. Em outras palavras, examinar o comportamento do delta por meio do uso de comandos condicionais “se-então/senão”, do bloco de controle, como mostra a Figura 28. O programa diz o seguinte: caso o delta seja menor que zero, utilize o comando “diga” para exibir a mensagem “não tem solução real”. Caso contrário utilize o comando “diga” “aninhado” com o bloco “junte com” para exprimir a mensagem do valor de x1 e do valor de x2.

Figura 28 – Condição de existência



Fonte: Produzida pelo autor

Utiliza-se valores arbitrários para os coeficientes de “a”, “b”, “c” da função quadrática com o objetivo de exemplificar, verificando o resultado no palco, como na Figura 29.

Tome $a = 1$, $b = 5$ e $c = 6$.

Figura 29 – Zeros da função no palco



Fonte: Produzida pelo autor

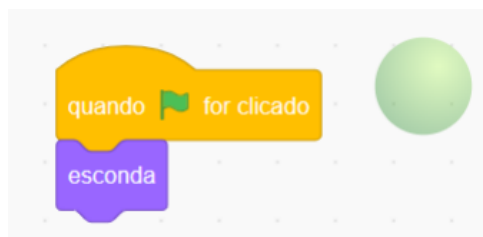
Construindo o gráfico da função quadrática no Scratch. Com base no projeto anterior, será possível plotar o gráfico da função desejada, a partir dos coeficientes inseridos no início do programa.

Seleciona-se o personagem “ball-d” do Scratch para representar a trajetória da parábola, e também opta-se pelo cenário “Xy-grid”, que servirá como plano cartesiano.

A programação será subdividida em duas partes para simplificar o entendimento. No fim da programação do script de “condições de existência” da Figura 28 foi criado um bloco “transmita” com a mensagem “gráfico” esse comando fará a conexão do ator “abby-a” com o ator “ball-d”. Na paleta de blocos, emprega-se o bloco de eventos “quando eu receber” com a mensagem “gráfico”. Esse bloco dará o início da programação do ator “ball-d”.

Assim, quando o ator receber a mensagem “gráfico”, o cenário será alterado para “Xy-grid” e o ator também será exibido. No entanto, para que isso ocorra, é necessário incluir um código que oculte o ator inicialmente. Para fazer isso, basta adicionar a incluir um código que oculte o ator inicialmente. Para fazer isso, basta adicionar a programação “quando a bandeira verde for clicada, esconda”, como mostra na Figura 30.

Figura 30 – Ator escondido



Fonte: Produzida pelo autor

Em seguida, utilizaremos a extensão “Caneta”, localizada abaixo da paleta de blocos, representada por um ícone quadrado com um sinal de “+”. Essa extensão será responsável por desenhar a trajetória da parábola. Em seguida, utiliza-se a variável “mude x” para -240, que representa o limite do palco do lado esquerdo, junto com um bloco adicional de conexão, que será chamado de intervalo do eixo y. Essa descrição pode ser visualizada na Figura. 31

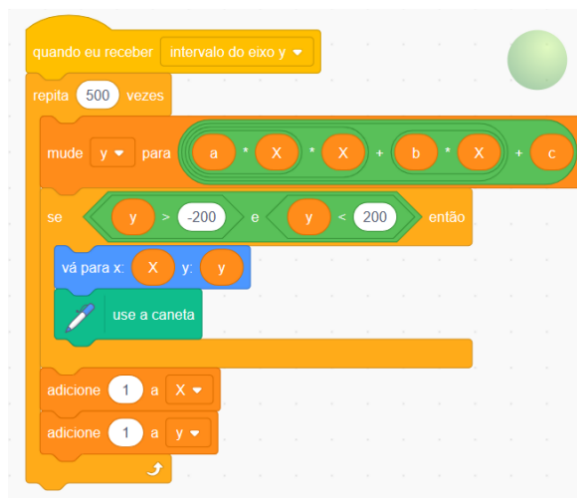
Figura 31 – Script do gráfico



Fonte: Produzida pelo autor

O segundo script tem como objetivo analisar o intervalo do eixo e no “palco”. Em seguida, é usado um bloco condicional “se-então” para verificar se é possível criar o gráfico, ou seja, se os valores de y estão dentro do intervalo especificado. Se estiverem, o gráfico da função será construído usando o comando “mude para x e y” em um loop curto que se repete 500 vezes. Isso permitirá a construção do gráfico ponto a ponto, pois o valor da variável receberá uma unidade a mais para cada repetição.

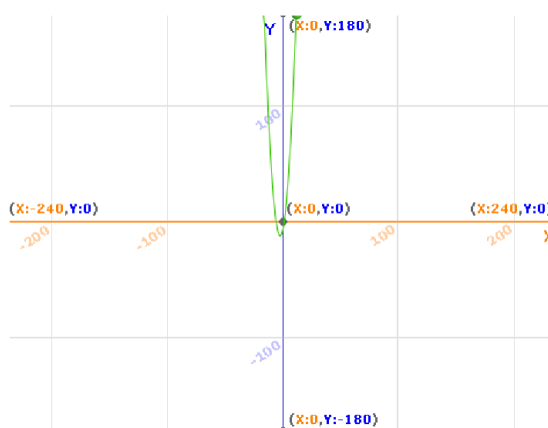
Figura 32 – Função em tabela



Fonte: Produzida pelo autor

A Figura 33, mostra a trajetória da parábola que tem como coeficientes $a=1$, $b=5$ e $c=-6$.

Figura 33 – Gráfico da função



Fonte: Produzida pelo autor

Com a finalidade de explorar e compreender a função Quadrática, este projeto propôs a elaboração de um programa computacional capaz de identificar os zeros de qualquer função, utilizando os coeficientes “a”, “b” e “c” como parâmetros de entrada. Ao utilizar variáveis e blocos específicos do Scratch, tornou-se possível a criação de equações correspondente à Função Quadrática, facilitando a compreensão dos conceitos matemáticos. A programação resultante não apenas identifica os zeros reais da função, mas também permite a construção do gráfico da parábola associada, promovendo uma experiência prática e visualmente estimulante para os alunos. Acesse o código-fonte através do link: <https://scratch.mit.edu/projects/845799431>

4 Software Scratch e o ensino de função quadrática: uma sequência didática

Neste capítulo, abordaremos uma sequência didática direcionada ao ensino da função quadrática, utilizando o software Scratch. A implementação de tecnologias educacionais, como o Scratch, se mostra uma estratégia promissora para enriquecer o processo de ensino e aprendizagem. Ao integrar o Scratch no ensino de funções quadráticas, buscamos proporcionar aos alunos uma abordagem mais prática, que busca estimular a compreensão dos conceitos matemáticos por meio da programação. Essa iniciativa surge em resposta aos baixos índices sobre o tema nas avaliações das escolas públicas do Estado de Pernambuco realizadas pela secretaria de educação, como SAEPE e SAEB, destacando a necessidade de abordagens inovadoras para superar os desafios no ensino da matemática.

No meio educacional, o termo “sequência didática” é amplamente utilizado, no entanto, para uma compreensão mais precisa, recorreremos à seguinte definição: de acordo com (ZABALA, 2015), a sequência didática é conceituada como um conjunto de atividades, estratégias e intervenções meticulosamente planejadas pelo professor, organizadas em etapas sequenciais. Essa abordagem visa proporcionar aos alunos uma compreensão profunda e significativa do conteúdo proposto, garantindo que os objetivos educacionais sejam alcançados de forma eficaz. (ZABALA, 2015) ressalta ainda que essa sequência é cuidadosamente estruturada, com um início e um fim claramente definidos, conhecidos tanto pelo docente quanto pelos discentes, visando orientar e direcionar o processo de ensino-aprendizagem de maneira coerente e progressiva.

O objetivo da sequência didática é proporcionar aos alunos, através da metodologia construcionista e do software de programação Scratch, uma experiência de aprendizado mais prática, onde eles colocam a mão na massa, sendo protagonistas de sua própria aprendizagem. Busca-se trabalhar os conceitos da função polinomial do segundo grau de uma maneira interativa, aumentando o engajamento dos estudantes e incentivando-os a aplicar o conhecimento de forma criativa.

A sequência didática se dará em uma turma do segundo ano, composta por 36 alunos, com idades variando entre 16 e 18 anos. Esses estudantes fazem parte da trilha de tecnologia do Novo Ensino Médio, em uma escola pública localizada na cidade de Olinda.

A metodologia adotada inclui a realização de pré-teste, pós-teste, diário de bordo e observação do professor, permitindo uma avaliação das mudanças no desempenho e na

compreensão dos alunos ao longo do processo de aprendizagem.

A análise desses testes em conjunto com a análise dos diários de bordo visa identificar possíveis melhorias no ensino através do uso do Scratch, destacando seu potencial para promover uma aprendizagem mais prática e motivadora. Esta pesquisa representa uma iniciativa valiosa para compreender o papel das tecnologias educacionais no contexto escolar contemporâneo e contribuirá para o avanço da prática pedagógica no uso de softwares educacionais, inclusive o Scratch.

Tanto o pré-teste quanto o pós-teste consistem em oito questões de múltipla escolha, abordando as principais habilidades requeridas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre função polinomial do segundo grau. As questões de mesma numeração são correlacionadas com a mesma habilidade, o que permitirá a análise dos dados do pré-teste e pós teste de maneira simultânea.

A sequência didática será desenvolvida em seis etapas, cada etapa com uma quantidade específica de encontros. A média de duração para cada encontro foi de aproximadamente 2 horas aula, que é equivalente a 100 minutos. Os encontros, que incluem aulas teóricas e práticas sobre o tema, estão resumidos no quadro a seguir:

Figura 34 – Planejamento da sequência didática

Etapas	Atividade	Período
I-Apresentação, sondagem (2 encontros)	• Apresentação do projeto; • aplicação do pré-teste; • divisão dos grupos(trios) • entrega do diário de bordo.	04/09 e 05/09
II- Explorando a plataforma Scratch. (6 encontros)	• Apresentação do software (interface e as principais ferramentas); • criação de contas pelos grupos na plataforma; • explorando as ferramentas do Scratch com a criação de miniprojetos indicados no diário de bordo.	11/09 a 28/09
III- Função Quadrática com o Scratch. (5 encontros)	• Zero da função • Construção do gráfico d função quadrática • Analise do comportamento da parábola • Estudo dos vértices da parábola	02/10 a 19/10
IV-Criação de projetos pelos alunos. (6 encontros)	• Coleção e seleção das ideias e elaboração do projeto.	23/10 a 13/11
V-Apresentação dos projetos(culminância)	• Exposição dos projetos	16/11/23
VI-Aplicação dos pós teste e o recolhimento do diário e bordo	• Teste	20/11/23

Fonte: *Produzida pelo autor*

4.1 Desenvolvimento das etapas

A sequência didática que será apresentada foi planejada com base nos resultados obtidos a partir da avaliação diagnóstica, denominada pré-teste, que mediu habilidades básicas sobre função quadrática. Para auxiliar no desenvolvimento da sequência didática, foram utilizados dois livros. O primeiro é “SCRATCH: Guia Prático para Aplicação na Educação Básica” de (SOUZA; COSTA, 2018). O segundo livro é “Aprenda a Programar com Scratch: Uma Introdução Visual à Programação com Jogos, Arte, Ciência e Matemática” de (MARJI, 2014). Ambos os livros foram essenciais para enriquecer e fortalecer a sequência didática proposta.

4.2 Primeira etapa

No primeiro encontro dessa fase, os alunos foram informados sobre a natureza e os objetivos do projeto. Considerando que se tratava de uma turma da Trilha de Tecnologia do Novo Ensino Médio, destacou-se que seria utilizada uma linguagem de programação específica, dentre as várias linguagens de programação existentes, para abordar o tópico função quadrática. Foi comunicado ainda que cada encontro deveria ser documentado, registrando as experiências vivenciadas. Além disso, enfatizou-se a necessidade de duas avaliações, uma no início e outra ao final das atividades, com o propósito de avaliar o desenvolvimento do projeto.

Em seguida, foi solicitado aos alunos que formassem grupos de três estudantes. A sala foi dividida com o objetivo de facilitar a coleta de dados ao longo do projeto e promover o desenvolvimento do trabalho em equipe. Essa estratégia foi concebida tanto para otimizar a obtenção de informações quanto para garantir uma culminância no projeto final.

Após a divisão dos grupos, foi distribuído apostilas contendo a programação das aulas e miniprojetos incentivadores, que serviriam como suporte para futuras iniciativas. As apostilas também incluíam folhas em branco destinadas ao diário de bordo. Os estudantes receberam orientações para registrar minuciosamente cada encontro em seus diários de bordo, documentando os eventos em si, mas também as percepções, desafios, pontos positivos, negativos e aprendizados decorrentes dessas experiências.

No segundo encontro, procedeu-se à aplicação do pré-teste composto por oito questões relacionadas à função quadrática. Essas questões abrangiam as habilidades e competências exigidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

4.3 Segunda etapa

A segunda etapa foi composta por seis encontros e cada encontro foi especialmente focada na experimentação e aplicação de comandos provenientes da paleta de blocos do software Scratch. Esse direcionamento específico permitiu uma abordagem específica, prática e aprofundada na utilização das funcionalidades de cada comando disponíveis na paleta de blocos.

4.3.1 Primeiro encontro da segunda etapa

No primeiro encontro da segunda etapa, os grupos tiveram um tempo para explorar a interface do Scratch e se familiarizarem com o software. Em seguida, foi feita uma apresentação da plataforma e também de suas ferramentas. Foi informado que, em cada encontro, seriam trabalhados comandos específicos das paletas de blocos.

Neste encontro, foi dado ênfase a três blocos de comando: MOVIMENTO, APARÊNCIA e SOM. Desenvolvemos pequenos scripts utilizando esses três blocos, progredindo gradualmente na programação e adquirindo compreensão dessas ferramentas.

Um dos projetos desenvolvidos nesse encontro foi a criação de uma animação que envolvia interação entre personagens, troca de cenário e uso de som, utilizando os blocos mencionados. Durante esse encontro, foi trabalhado que, além das imagens fornecidas pelo software para representar atores e cenários, podemos criar nossos próprios, tornando os projetos únicos. A Figura 35 ilustra o que foi trabalhado, combinando os recursos do Scratch com criações pessoais.

Figura 35 – Interação entre os atores



Fonte: Produzida pelo autor

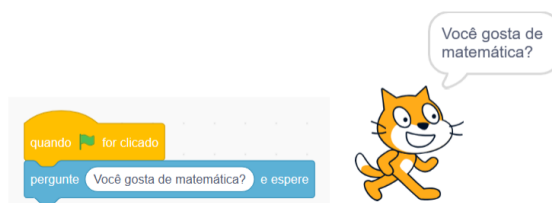
Essa abordagem permitiu que os alunos desenvolvessem uma melhor compreensão sobre os três blocos trabalhados, preparando-os para as etapas subsequentes do projeto. Além disso, foi comunicado aos grupos que deveriam criar contas na plataforma,

possibilitando assim a revisitação dos trabalhos e o prosseguimento nos projetos já em desenvolvimento.

4.3.2 Segundo encontro da segunda etapa

No segundo encontro, aprimoramos a compreensão de dois novos blocos. Primeiro, trabalhamos com o bloco **SENSORES**, desenvolvendo pequenos scripts que utilizavam esse bloco em conjunto com os blocos já estudados. Um exemplo foi o uso dos blocos “pergunta” e “resposta”, frequentemente utilizados em projetos para interagir com o usuário. A Figura 36 mostra um código realizado pela maioria dos grupos.

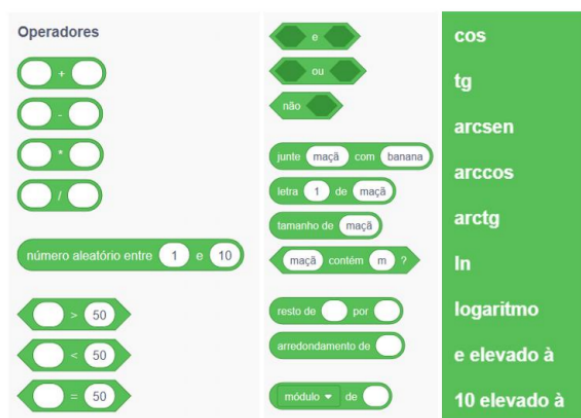
Figura 36 – Recorte do script dos alunos



Fonte: Produzida pelo autor

O segundo bloco que exploramos foi o bloco de **OPERADORES**, abrangendo diversas operações matemáticas, sinais matemáticos e conectivos lógicos, como mostra a Figura 37.

Figura 37 – Operadores do Scratch



Fonte: Produzida pelo autor

Trabalhamos desde as quatro operações básicas até conceitos mais avançados, como exponencial e logaritmo, usando o Scratch. Alguns grupos perceberam que o Scratch não possui uma operação específica para potenciação. A partir dessa observação, desenvolvemos um algoritmo utilizando os comandos já aprendidos para lidar com a ideia de potenciação. Chegamos à seguinte solução:

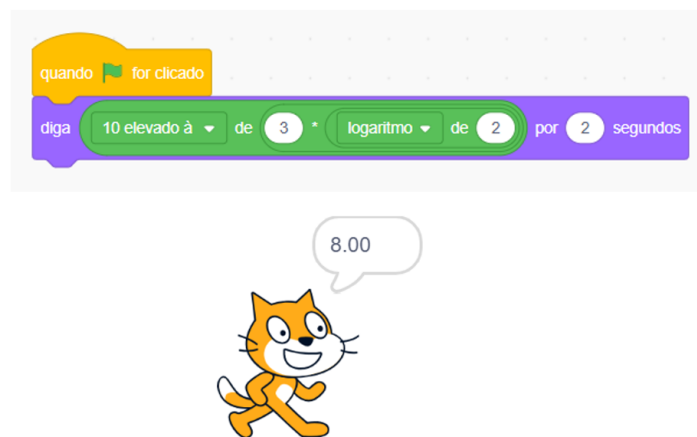
Para implementar a operação de potenciação no Scratch, utilizamos propriedades dos logaritmos e o bloco de potência de dez disponível no Scratch. Por exemplo, para calcular 2^3 , escrevemos a operação da seguinte maneira:

$$2^3 = 10^{3 \cdot \log_{10}(2)}$$

.

A Figura 38 ilustra esse resultado no Scratch.

Figura 38 – Potenciação



Fonte: *Produzida pelo autor*

Foi perceptível que muitos grupos não entenderam a operação inicialmente, pois não se lembravam da propriedade trabalhada. No entanto, após a explicação, tudo ficou claro.

Esse encontro possibilitou que os alunos visualizassem a aplicação prática de conceitos matemáticos fundamentais na programação.

4.3.3 Terceiro encontro da segunda etapa

No terceiro encontro, trabalhamos com os blocos EVENTOS e CONTROLE. Estes blocos permitem uma interação mais ampla entre os cenários, atores e sons possibilitando a criação de projetos mais elaborados.

Foi compartilhado com os alunos diversas ideias sobre o que pode ser produzido com o Scratch, como quizzes, contos, telas de introdução de jogos, entre outras. Essas ideias servirão como estímulos para futuros projetos criados por eles. Nesta etapa, os grupos estão sendo guiados pelos passos do professor, com momentos dedicados a atividades de fixação.

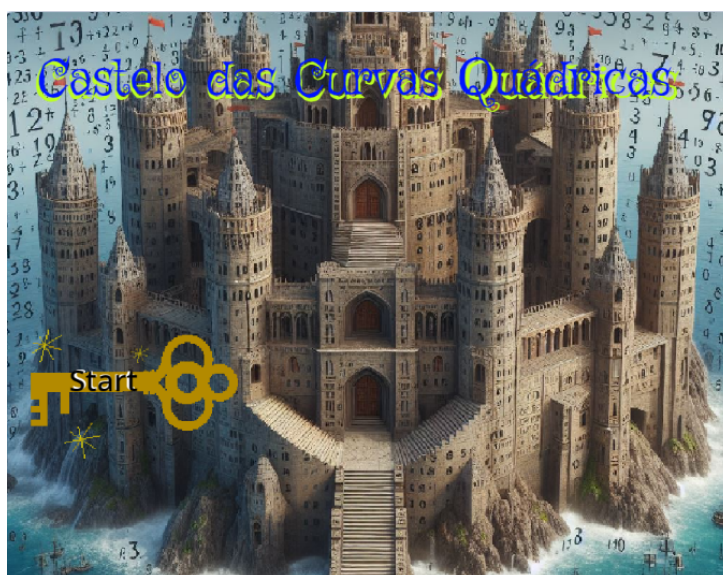
Ainda neste encontro, conseguimos reproduzir em aula uma atividade proposta no livro “Aprenda a Programar com Scratch: Uma Introdução Visual à Programação com

Jogos, Arte, Ciência e Matemática.” A atividade consistia em criar um programa que calculasse a idade de uma pessoa a partir do ano de nascimento fornecido. Esta atividade incorporou todos os comandos da paleta de blocos estudados, resultando em um programa rico em funcionalidades. Foi possível observar, em um único projeto, a aplicação de todos os blocos abordados.

Para encerrar este encontro, foi pedido aos grupos que elaborassem um projeto simples utilizando os recursos previamente abordados. A proposta do projeto consistia em criar a interface de abertura de tela, contendo um botão que daria início ao projeto e contendo também troca de cenário.

Os grupos mostraram eficiência ao completar rapidamente a atividade proposta. A Figura 39 ilustra o resultado obtido por um desses grupos. Esse desempenho demonstra a compreensão dos conceitos abordados, e também a habilidade dos alunos em aplicar esses conhecimentos de maneira eficaz.

Figura 39 – Recorte da atividade de um dos grupos



Fonte: *Produzida pelo autor*

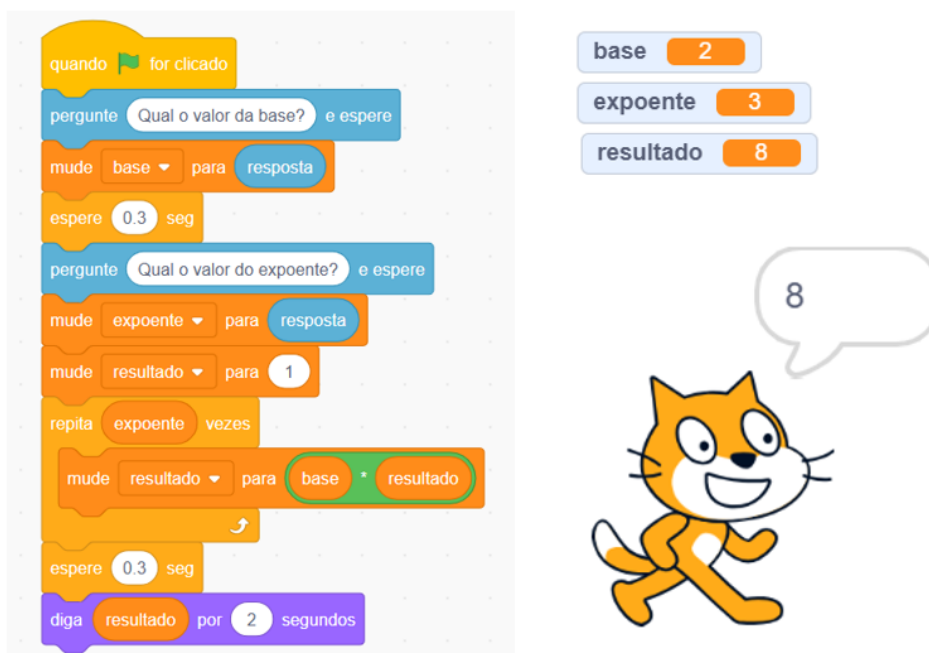
4.3.4 Quarto encontro da segunda etapa

No quarto encontro, estudamos o bloco de VARIÁVEIS, compreendendo que essa ferramenta tem a função de armazenar informações. Ao necessitarem utilizar essas informações, apenas precisam buscar o bloco onde foram previamente armazenadas. Por exemplo, armazenar nomes, guardar números, registrar respostas e salvar resultados de operações matemáticas.

Com a utilização de variáveis, conseguimos aprimorar algumas ideias de códigos já trabalhados. Por exemplo, o código desenvolvido anteriormente para representar potencia-

ção, que utilizava blocos de potência e logaritmo, agora foi melhorado para permitir que o usuário insira os valores para a base e o expoente. A Figura 40 ilustra essa ideia.

Figura 40 – Uma nova ideia de potência



Fonte: Produzida pelo autor

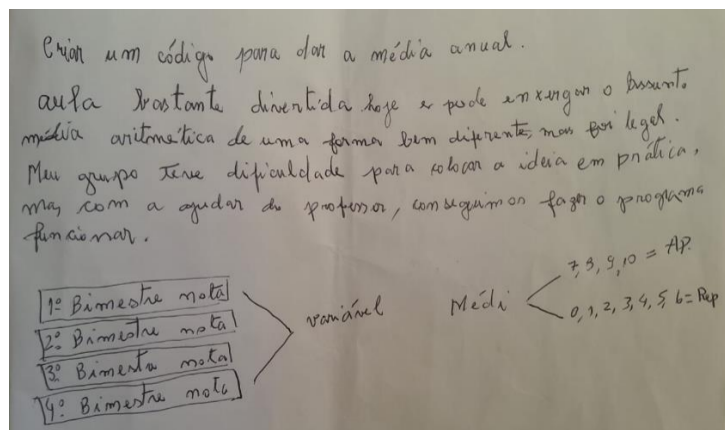
Os alunos ficaram encantados com as ideias apresentadas, mas também demonstraram insegurança ao aplicar os novos conceitos. Foi ressaltado que a confiança virá com a prática.

Para que os alunos possam praticar e reforçar os conceitos abordados, foi proposto o seguinte desafio: desenvolver um código que forneça o resultado final dos alunos da sua escola, sabendo que a média é 7. O código deve incluir as médias das quatro unidades escolares e, ao término, indicar se o estudante foi aprovado ou reprovado.

Observou-se que os alunos enfrentaram desafios ao elaborar os códigos. Alguns grupos mencionaram que tinham ideias para escrever o código, mas encontraram dificuldades na execução.

A Figura 41, traz o relato de um dos grupos em seu diário de bordo.

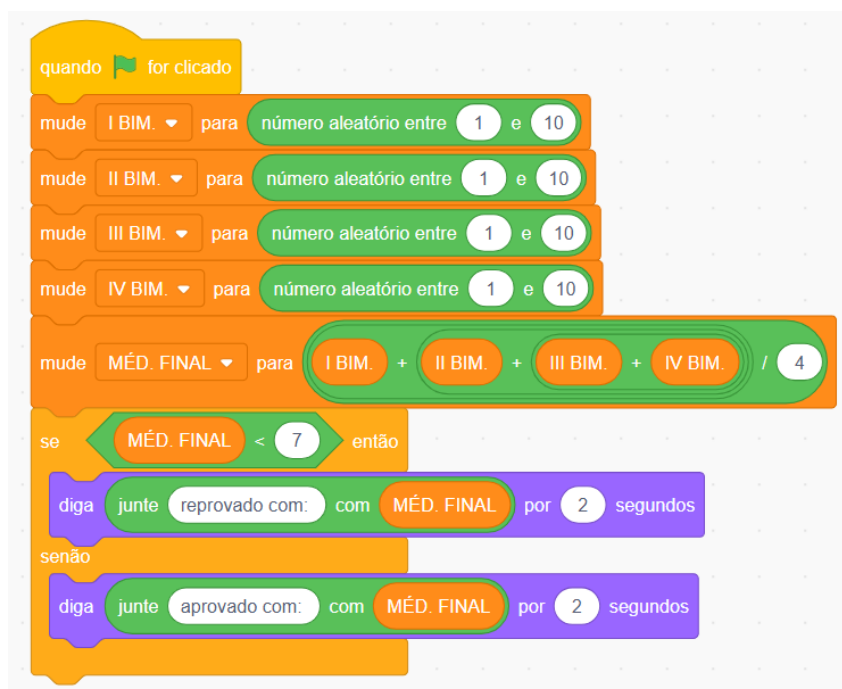
Figura 41 – Recorte do diário de bordo



Fonte: Produzida pelo autor

Ao notar que os grupos envolvidos na atividade estavam enfrentando dificuldades, foi organizado um momento de discussão. Ouvindo as ideias, chegamos a um código. A Figura 42, mostra o código desenvolvido com os alunos.

Figura 42 – Script sobre média



Fonte: Produzida pelo autor

A Figura 43, mostra a mensagem transmitida pelo ator após calcular a média.

Figura 43 – Resultado no palco



Fonte: Produzida pelo autor

Ao término do projeto, os alunos tiveram a oportunidade de revisitar o conceito de média aritmética e, adicionalmente, aplicar os princípios relacionados às variáveis.

4.3.5 Quinto encontro da segunda etapa

No quinto encontro, as atividades realizadas promoveram uma integração abrangente de todas as funções previamente exploradas nos encontros anteriores. Esse momento possibilitou que os alunos consolidassem e aplicassem de forma conjunta os conhecimentos adquiridos nos últimos encontros.

Neste encontro, foi propôs duas atividades. A primeira consistia em programar um relógio com o tempo sendo exibido em ordem crescente ou decrescente. E a segunda tarefa consistia em criar uma calculadora que contemplasse as quatro operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Atividade 1

O objetivo da primeira atividade era incentivar os grupos a pensar em como estabelecer uma contagem de tempo para incorporar em projetos futuros, como, por exemplo, em um jogo ou quiz.

Entre os 12 grupos, apenas dois realizaram a primeira atividade com sucesso. A Figura 44, apresenta o código desenvolvido pelo grupo que foi o primeiro a completar a tarefa com sucesso.

Figura 44 – Conômetro regressivo



Fonte: Produzida pelo autor

Ao analisar o código, torna-se evidente a estratégia empregada para marcar o tempo em ordem decrescente. Inicialmente, uma variável chamada “tempo” foi criada e recebeu um valor. Posteriormente, foi introduzida uma condição: enquanto o valor da variável “tempo” for maior que zero, subtrai-se uma unidade de tempo.

Essa instrução foi incorporada dentro de um loop, garantindo que esse conjunto de comandos se repita até que o valor de “tempo” alcance zero. Dessa forma, o script executa a contagem regressiva de maneira eficiente.

A Figura 45, exibe o código elaborado pelo segundo grupo que concluiu a atividade.

Figura 45 – Conômetro progressivo



Fonte: Produzida pelo autor

O segundo grupo optou por uma abordagem mais simples, desenvolvendo um código simulando um relógio com contagem progressiva de tempo. Eles criaram uma variável e atribuíram o valor zero a essa variável. Em seguida, introduziram um loop que continha o bloco “espere um segundo” junto ao bloco “adicione uma unidade à variável”.

Essa configuração permitiria que o loop acrescentasse uma unidade de tempo continuamente, cada vez que o computador fizesse a leitura do código. No entanto, para simular uma pausa no tempo, eles incorporaram uma condição. Quando a variável atingisse um valor específico, uma unidade negativa de tempo seria adicionada, resultando na interrupção do tempo. Essa estratégia proporcionou uma maneira eficaz de criar a ilusão de pausa no decorrer do tempo no script.

Ao analisar e comprovar a eficácia dos códigos, eles foram trabalhados, compartilhados com os demais participantes e incluídos na apostila de códigos. Os estudantes mencionaram novamente que tinham as ideias em mente, mas não sabiam como estruturar o código. No entanto, ao observarem o código criado pelos colegas, perceberam que era algo bastante simples de construir.

Atividade 2

O objetivo desta atividade era explorar todos os blocos da paleta, com um foco especial nos blocos de variáveis. Neste pequeno projeto, a variável “operação” tem a capacidade de assumir quatro valores distintos: soma, subtração, multiplicação e divisão.

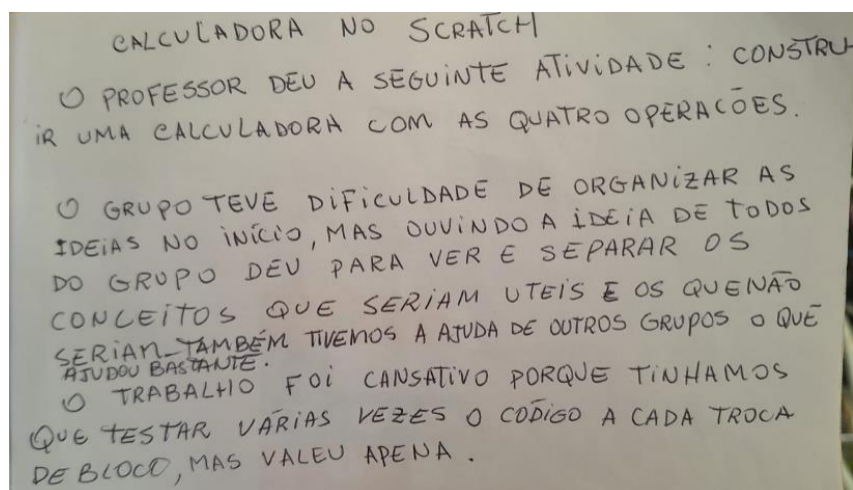
Todos os grupos conseguiram concluir a tarefa de maneira eficiente. Embora alguns tenham enfrentado mais dificuldades que outros, todos obtiveram sucesso na conclusão da atividade. Durante a execução, era perceptível a união, discussão e organização dos grupos. A intervenção foi mínima, sendo necessários apenas pequenos ajustes nos códigos. Nos comentários dos alunos realizar os projetos em grupo permitiam discutir e ouvir as ideias de todos e isso ajudava na construção e execução das atividades.

Segundo uma interpretação de Kroes e Vassillou (apud Fuente, 2014-15):

A utilização da programação não se limita a auxiliar nos estudos de áreas do conhecimento e conteúdo. Ela contribuirá diretamente para o desenvolvimento de competências transversais, tais como análise crítica, solução de problemas, colaboração em equipe e criatividade entre os alunos. (FUENTE, 2014-15, p.6)

A Figura 46, mostra o relato de um dos grupos no diário de bordo, sobre a construção da calculadora.

Figura 46 – Relato de um grupo



Fonte: Produzida pelo autor

A Figura 47, mostra como o grupo desenvolveu o código em sala

Figura 47 – Código para calculadora



Fonte: Produzida pelo autor

O algoritmo utilizado não foi uma ideia nova, consistiu em instruções usadas em outros estudos, o que facilitou a criação do código. É dessa maneira que desenvolvemos o pensamento computacional.

No desenvolvimento do código acima, utilizou-se o bloco “eventos” para iniciar o script, seguido pelo bloco “pergunte” e o bloco “variável” para armazenar as respostas às perguntas feitas. Esse processo foi repetido para os números que serão utilizados. Para evitar que o código se tornasse extenso, ele foi dividido em duas partes. Em seguida, foi adicionado o bloco “transmita mensagem” para estabelecer comunicação entre essas partes, ou seja, entre os scripts.

A Figura 48, ilustra como foi elaborada a segunda parte da programação.

Figura 48 – Calculadora: operações básicas

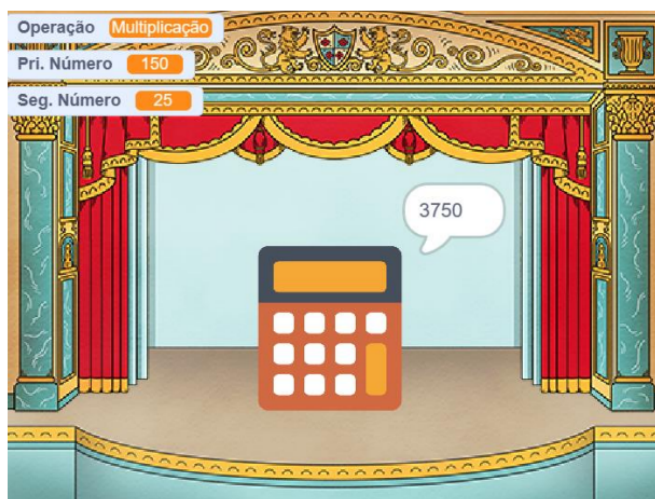


Fonte: Produzida pelo autor

O segundo bloco também foi dividido em duas partes com a mesma ideia anterior de não deixar o Script muito extenso. Foram empregados quatro blocos condicionais, cada um associado a uma operação matemática. A variável “operação” está associada a cada uma das operações possíveis. Quando o usuário inserir a operação desejada, ela é armazenada e executada conforme a condição estabelecida.

Então, neste projeto, fica evidente que a variável pode assumir qualquer valor, mas apenas um valor por vez. Isso reflete o funcionamento das calculadoras, onde um número é atribuído a uma variável, a operação é selecionada e atribuída a outra variável, e, por fim, outro número é atribuído a uma terceira variável. Ao pressionar a tecla igual, a máquina exibe o resultado calculado com base nessas variáveis. A Figura 49, exibe como ficou expresso o resultado no cenário do projeto.

Figura 49 – Calculadora: imprimindo resultado



Fonte: Produzida pelo autor

Acesse o código-fonte através do link: <https://scratch.mit.edu/projects/951815584>

4.3.6 Sexto encontro da segunda etapa

No encerramento da segunda etapa, os estudantes demonstraram uma compreensão satisfatória da linguagem de programação Scratch. Em consequência, foi proposta como atividade a criação de um projeto que consolidasse todos os conceitos previamente abordados, sendo esse projeto um quiz. A atividade envolvia a concepção de uma página inicial atrativa com botões para interagir entre os cenários, a criação de interações para o usuário, a incorporação de um marcador de tempo e a inclusão de um sistema de pontuação.

Essa atividade tinha como objetivo testar o conhecimento adquirido e promover a aplicação prática dos conceitos de programação explorados e aprendidos ao longo das etapas. Para isso, era necessário reunir os conceitos por trás dos algoritmos já estudados para construir novos códigos.

Todos os grupos executaram a atividade de maneira exitosa. No entanto, ao analisar os projetos, observou-se que a disposição das perguntas no quiz permitiria que um usuário externo que acompanhasse o quiz conseguisse antecipar a ordem das perguntas caso fosse usar o programa, pois a ordem e a sequência das perguntas eram sempre fixas.

Para tentar solucionar essa questão, paramos para discutir ideias sobre como resolver o problema. Após debates e testes de diferentes algoritmos, um grupo apresentou uma solução eficaz. A ideia trazida foi criar uma roleta que associasse uma cor a cada pergunta, como nos programas de TV, no entanto, eles não tinham clareza sobre como executar a ideia. A partir dessa ideia conseguimos desenvolver o código e organizar para que as perguntas fossem sorteadas de forma aleatória. Para isso, foram selecionados dois atores: um círculo de cores e outro para representar o ponteiro da roleta, como ilustrado na figura., como ilustrado na Figura 50.

Figura 50 – Quiz



Fonte: Produzida pelo autor

A Figura 51 apresenta o código implementado para corrigir o problema recorrente das perguntas, que anteriormente seguiam uma sequência previsível.

Figura 51 – Quiz código



Fonte: Produzida pelo autor

No fim desta etapa, ficou claramente perceptível que a ocorrência de equívocos é uma componente inerente e inevitável do programão. Isso sugere que, ao enfrentar desafios ou empreender novos caminhos, a probabilidade de cometer erros é uma constante que deve ser aceita e compreendida. O mesmo é válido para o desenvolvimento de códigos de programação. Em vez de ser encarado como algo negativo, o ato de errar pode ser visto como uma oportunidade valiosa para aprender, crescer e aprimorar as abordagens utilizadas.

4.4 Terceira etapa

Na terceira etapa, os alunos foram introduzidos às atividades que envolviam a função quadrática, permitindo uma compreensão mais prática desse conceito matemático. Nessa etapa, o foco foi direcionado aos códigos que visavam abordar conceitos essenciais como zeros da função, a construção e análise gráfica, além dos pontos de máximo e mínimo na aplicação desta função. Essa abordagem também permitiu a integração dos conhecimentos adquiridos nas etapas anteriores com a função quadrática.

A utilização do software Scratch tem como objetivo abrir novas perspectivas para os alunos nas aulas de matemática, permitindo que enxerguem a disciplina de um ponto de vista diferente. Nesse processo, cada aluno desempenhará o papel de construtor ativo

de seu próprio conhecimento. Isso torna as aulas mais interessante, mais atraente, e também contribui para uma abordagem mais participativa e significativa no aprendizado matemático.

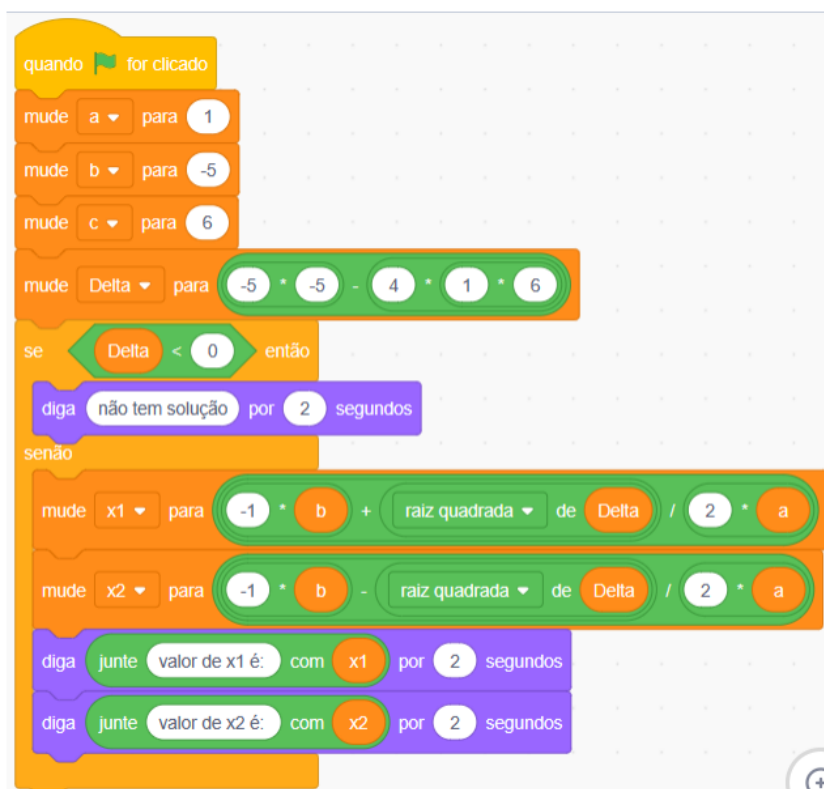
4.4.1 Primeiro encontro da terceira etapa

No primeiro encontro, abordou-se o conceito de zero da função, destacando a habilidade de código (EM13MAT302) da BNCC, que enfatiza a capacidade de: construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p.536). Essa habilidade envolve a compreensão e a aplicação dos zeros de uma função quadrática em diferentes situações, utilizando modelos matemáticos para a resolução de problemas práticos.

Para dar início a este encontro, foram feitas as seguintes perguntas: “Quem lembra o que significa o termo zero da função?” e “Quais métodos utilizamos para determinar os zeros da função quadrática?”. As respostas dos alunos para a primeira pergunta permitiram três constatações: alguns sabiam, outros já tinham ouvido a expressão, e alguns não recordavam do que se tratava. Em relação à segunda pergunta, a maioria mencionou o método de Bhaskara, enquanto apenas um número muito pequeno de alunos mencionou o método da soma e do produto. Esses questionamentos foram feitos porque essa turma já tinha tido contato com o conteúdo em anos anteriores, visto que o tema de função quadrática é abordado no nono ano do ensino fundamental e no primeiro ano do ensino médio.

Após ouvir as respostas dos alunos, os dois questionamentos levantados foram esclarecidos teoricamente e abordados de forma prática através da construção de algoritmos. Os códigos desenvolvidos tinham como objetivo determinar os zeros de uma função quadrática através da lei de formação fornecida, como por exemplo o código da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$, ilustrado na Figura 52.

Figura 52 – Script zeros da função



Fonte: Produzida pelo autor

O código trabalhado e desenvolvido em sala apresenta de forma clara todos os passos necessários para alcançar os zeros da função proposta. Durante essa abordagem, foi possível observar uma análise abrangente, incluindo a exploração dos coeficientes da função, a avaliação do discriminante, a verificação da condição de existência e a aplicação da fórmula resolutiva. Além disso, os zeros da função são evidenciados no palco pelo ator escolhido como mostra a Figura 53.

Figura 53 – Resultado



Fonte: Produzida pelo autor

Durante essa abordagem, foi possível observar por parte dos alunos um grande interesse em aprender, pois estavam visualizando de forma prática e dinâmica conceitos abstratos, os quais anteriormente estavam acostumados a estudar apenas em quadros

brancos. Um outro aspecto relevante é que, no início da primeira etapa os estudantes apresentavam uma postura passiva em relação ao conhecimento. Porém, durante a sequência didática, houve uma transformação notável, os estudantes assumindo um papel ativo e se tornando protagonistas de sua própria aprendizagem.

Atividade

Com base nas diversas funções testadas utilizando o código desenvolvido na aula, foi questionado aos grupos se havia a possibilidade de generalizar o código. Ou seja, se era possível criar um código a partir daquele já trabalhado nos encontros, com a finalidade de determinar os zeros de qualquer função quadrática, sem haver a necessidade de estar substituindo os coeficientes em todas os blocos criados como foi feito na Figura 52.

O objetivo dessa atividade é incentivar os alunos a pensar de maneira mais abstrata e eficiente ao lidar com algoritmos. Ao questionar a possibilidade de generalizar o algoritmo para determinar os zeros da função quadrática, busca-se promover a compreensão de como otimizar processos e tornar o algoritmo mais versátil e aplicável a diferentes funções de forma imediata e objetiva.

Inicialmente, os grupos não compreenderam bem o propósito da atividade. No entanto, com orientações adequadas, ficou evidente que seria suficiente empregar códigos previamente explorados, especificamente na segunda atividade do quinto encontro da segunda etapa.

Para realizar a atividade, foi explicado que os alunos deveriam utilizar os blocos de controle e variáveis no Scratch. Eles precisariam usar os comandos de pergunta e resposta do bloco de controle para solicitar e registrar os valores desejados dos coeficientes da função. Além disso, deveriam criar variáveis para armazenar esses valores. Com essas orientações, os grupos foram pouco a pouco completando a tarefa designada. A Figura 54 foi extraída de um dos grupos.

Figura 54 – Script caso geral



Fonte: Produzida pelo autor

O script extraído mostra que a atividade foi solucionada de maneira satisfatória. Os zeros de qualquer função quadrática vão ser determinada a partir dos coeficientes das respectivas funções.

4.4.2 Segundo encontro da terceira etapa

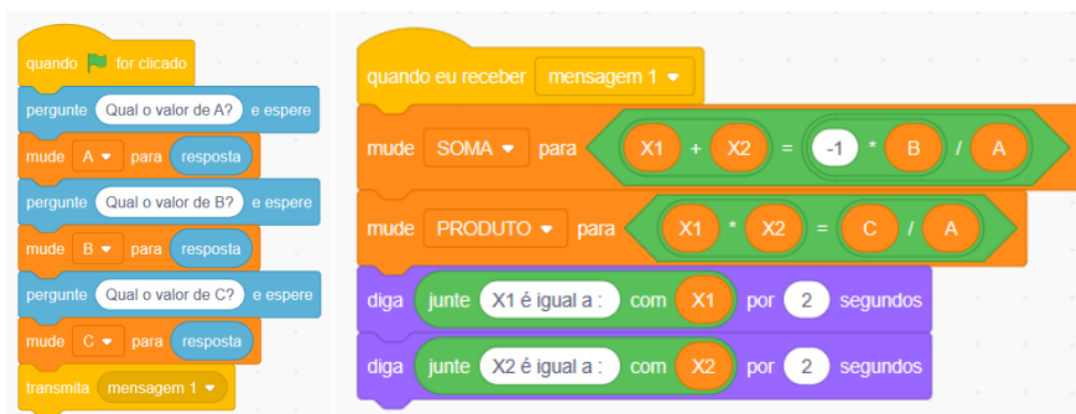
No segundo encontro, foi discutido a seguinte ideia: Se existiria uma abordagem alternativa para determinar os zeros de uma função quadrática. Alguns alunos afirmaram que sim, citando o método de soma e produto, embora muitos não estivessem familiarizados ou não se lembrassem desse conceito. A partir da resposta dada pelos alunos, abriu-se uma roda de discussões sobre esse método, realizando alguns cálculos para esclarecimentos.

Atividade

Como atividade ficou estabelecido o desenvolvimento de um código que utilizasse a ideia de soma e produto para determinar os zeros de uma função quadrática. O objetivo desta atividade era incentivar os alunos tanto no aspecto criativo e lógico quanto na consolidação do conteúdo.

A atividade proposta se mostrou bastante desafiadora, pois nenhum grupo conseguiu executar a programação conforme o esperado. Os grupos tiveram bastante dificuldade no desenvolvimento dos códigos. Foram identificadas duas ideias que mais se repetiram nos códigos. Notavelmente, quatro grupos optaram por ideias bastante semelhantes. A Figura 55, representa o código desenvolvido por um desses grupos na tentativa de solucionar a atividade.

Figura 55 – Script soma e produto



Fonte: Produzida pelo autor

Ao analisar o código, observou-se que os alunos estavam bem familiarizados com os blocos. No entanto, o problema estava presente no segundo script, onde eram utilizadas variáveis não previamente definidas. Essa ausência de definição impedia o correto

cálculo computacional, resultando na criação de uma variável vazia. Como consequência, o personagem no palco representava o valor zero, já que não foi armazenado valor algum.

Além disso, outro ponto que evidencia uma falha nos comandos está na comparação incluída nos blocos das variáveis “SOMA” e “PRODUTO”. O computador verificará se há uma igualdade entre as operações e transmitirá essa informação, como ilustrado na Figura 56.

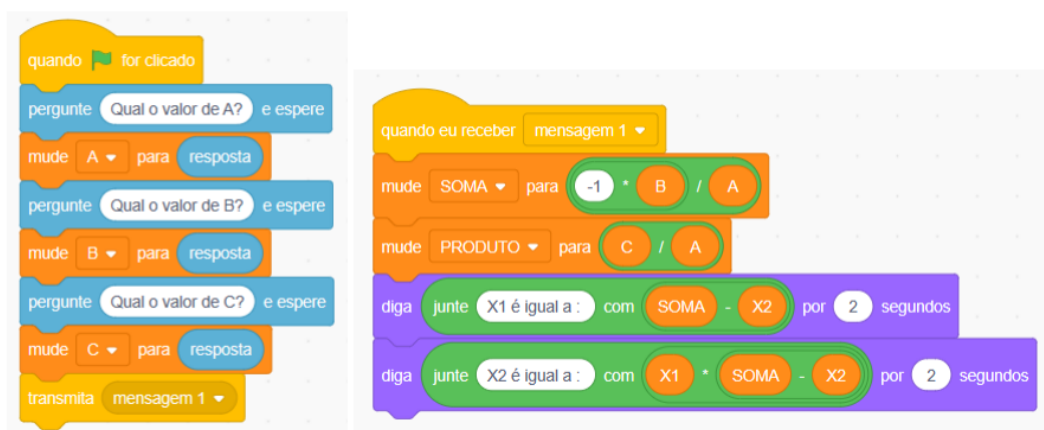
Figura 56 – Erro no script



Fonte: Produzida pelo autor

A segunda ideia que mais apareceu nos códigos é ilustrada na Figura 57. Cerca de 5 grupos utilizaram ideias bem próximas no desenvolvimento da programação.

Figura 57 – Soma e produto



Fonte: Produzida pelo autor

Ao examinar o código, observou-se que a mesma falha do grupo anterior estava ocorrendo, especificamente nas variáveis do segundo script. As variáveis “X1” e “X2” foram criadas, entretanto, não estão armazenando nenhum valor lógico. Além disso, o grupo emprega uma expressão matemática na tentativa de fazer o computador encontrar os valores desejados. Vale ressaltar que, nos encontros anteriores, foi destacado que o computador não possui inteligência própria, ele apenas executa o que foi programado para fazer.

Desta forma, Delval como citado em (FUENTE, 2014-15) ressalta que:

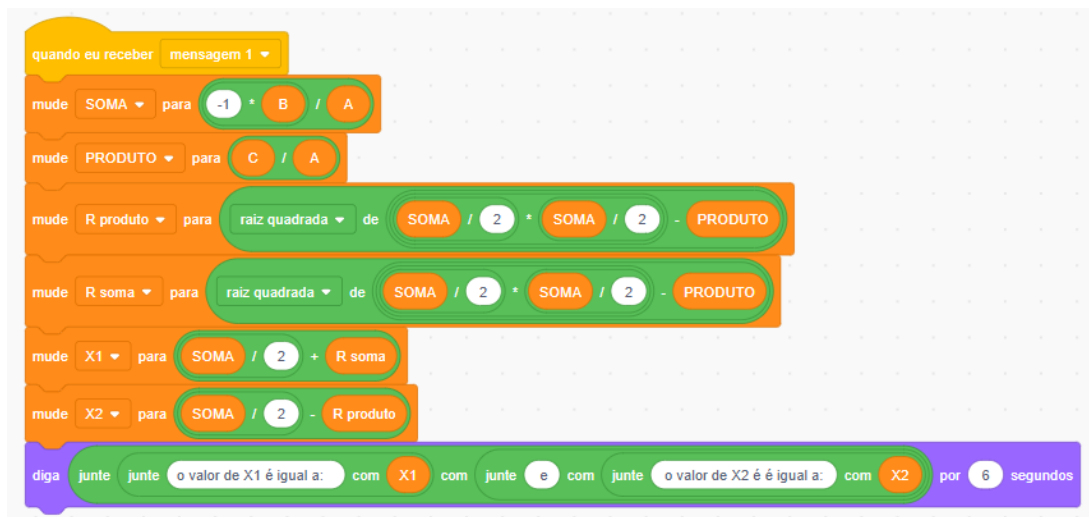
Ao programar estamos dando instruções ao computador para solucionar um determinado problema. Esse processo precisa de um planejamento de precisão no uso da linguagem de programação, como criar e comprovar hipóteses, identificar sequências para atingir os objetivos e depurar os erros. É dizer explicitamente o processo que tem que ser seguido para levar a cabo uma tarefa determinada. (FUENTE, 2014-15, p.5)

Ao notar que os alunos estavam enfrentando dificuldades e estavam buscando uma estratégia para encontrar uma fórmula matemática que determinasse os zeros de uma função quadrática, Foi sugerido que os alunos acompanhassem uma nova ideia e a aplicassem em seus códigos. A ideia consistia em utilizar uma expressão matemática empregada pelos babilônios há mais de 4000 anos, juntamente com um breve comentário sobre a história dessa expressão. A expressão é a formula 2.4 trabalhado no capítulo 2, onde S representa a soma e P representa o produto, conforme ilustrado a seguir:

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Apartir do que foi sugerido aos grupos a atividade foi executada de forma correta. A Figura 58, exibe o código que substituiu a versão anterior, a qual estava apresentando falhas.

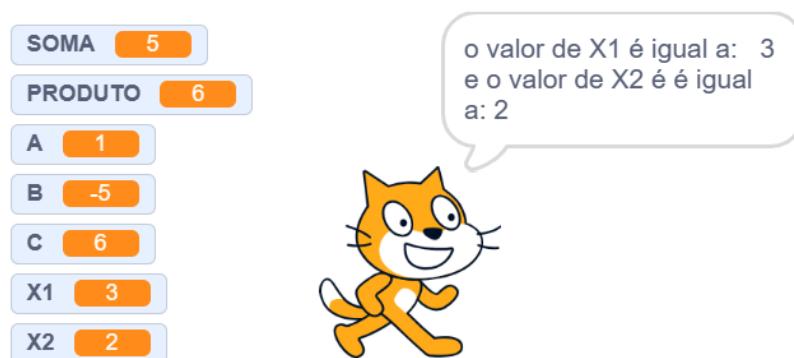
Figura 58 – Fórmula babilônica



Fonte: Produzida pelo autor

A fim de demonstrar a eficácia do código desenvolvido, foi sugerida a inserção dos coeficientes de uma função quadrática específica. A Figura 59 ilustra os zeros da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ no palco, validando assim o desempenho do programa.

Figura 59 – Imprimindo os zeros da função



Fonte: Produzida pelo autor

4.4.3 Terceiro encontro da terceira etapa

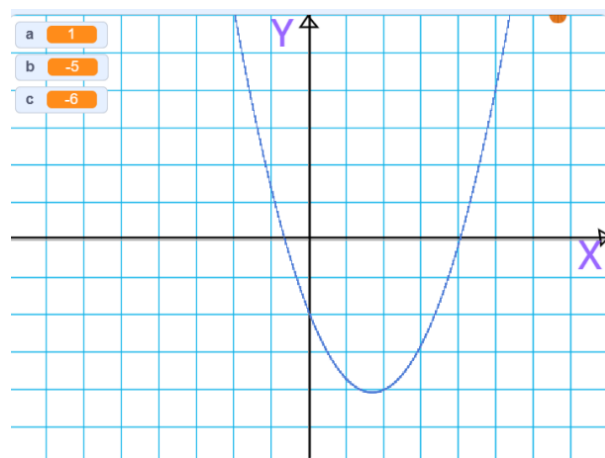
No terceiro encontro, abordou-se a construção gráfica da função quadrática. A habilidade da BNCC abordada neste encontro foi a habilidade (EM13MAT402), que expressa:

Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais (BRASIL, 2018, p.539).

Essa habilidade destaca a capacidade de transformar a expressão algébrica de uma função quadrática em uma representação gráfica no plano cartesiano. Envolve, assim, a interpretação visual do comportamento da função, identificando características, por meio da análise do gráfico correspondente.

Para plotar os gráficos, utilizou-se uma extensão no Scratch denominada “caneta”. Além dos oito comandos da paleta de blocos já abordados, existe uma função oculta no software chamada “extensão”, localizada no final da paleta de blocos, que adiciona mais nove funcionalidades ao Scratch. A extensão da caneta permite que o ator desenhe no palco enquanto se move, deixando um rastro conforme segue as coordenadas definidas pelo código. Isso possibilita a visualização dos gráficos diretamente no palco.

A Figura 60 representa o gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x - 6$ plotada no software Scratch. O Scratch não foi desenvolvido com o propósito de ser um simulador de gráficos, diferentemente dos softwares como o Winplot, Geogebra, entre outros. Com isso, a tela do programa, que neste caso seria o palco, é estática e limitada pelos intervalos $x \in [-240, 240]$ e $y \in [-180, 180]$. No entanto, é possível explorar e analisar propriedades e características da função acima.

Figura 60 – Grafico da função $f(x)$ 

Fonte: Produzida pelo autor

A Figura 61 mostra o código utilizado para plotar o gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x - 6$. O código foi dividido em duas partes para evitar que não se torne excessivamente longo.

Figura 61 – Script para gerar o gráfico $f(x)$ 

Fonte: Produzida pelo autor

No primeiro script, empregaram-se três blocos com a função da caneta. O primeiro tem a função de apagar todo o conteúdo do palco sempre que a bandeira verde for clicada. O segundo bloco é responsável pela seleção da cor da caneta, enquanto o terceiro

desabilita a funcionalidade da caneta, evitando que faça marcações enquanto o ator interage. Posteriormente, foram criadas cinco variáveis, sendo atribuídos valores a elas.

As variáveis “a”, “b” e “c” correspondem aos coeficientes da função escolhida. Já a “variável x” atua como o valor inicial para a construção de uma tabela de valores da função, abrangendo valores negativos e positivos, o que torna a construção gráfica eficaz. Esta tabela será preenchida a cada execução do código pelo programa. Vale ressaltar que a tabela não aparece no palco é apenas uma execução interna do computador. A Figura 62 ilustra essa abordagem.

Figura 62 – Função tabela



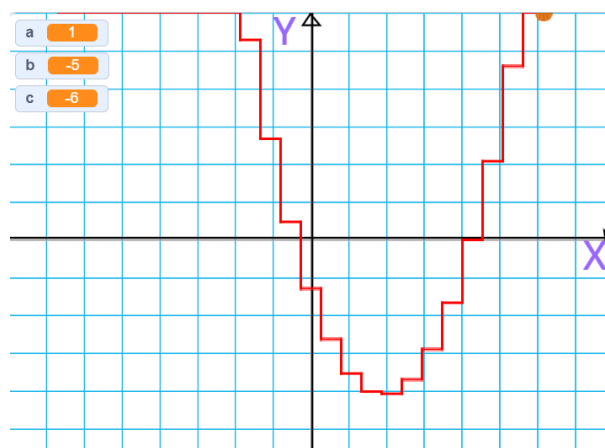
Fonte: Produzida pelo autor

O segundo script funciona como uma função representada em uma tabela, associando a cada valor de x um correspondente valor para y . Foi criado uma variável chamada “delta x”, e foi atribuído a ela o valor correspondente a 0.05. Essa variável desempenha a função de estabelecer intervalos muito pequenos entre os pares ordenados, proporcionando o efeito de curvatura ponto a ponto.

Um ponto que gerou bastante dúvida foi a criação da variável “delta x”. Os alunos, ao verem o nome, associaram-na ao discriminante da função quadrática. No entanto, durante a aula, foi explicado que a variável teria uma função diferente dentro do código. Para uma melhor compreensão, foi solicitado aos grupos como atividade que variassem o valor da variável e analisassem o gráfico da parábola resultante. A Figura 63 a seguir apresenta uma variação de valor 0.8 para a variável “delta x”.

Após analisar a variação dos valores para a variável “delta x”, os alunos puderam compreender melhor a função dessa variável.

Figura 63 – Variando delta x



Fonte: Produzida pelo autor

4.4.4 Quarto encontro da terceira etapa

O quarto encontro foi reservado para atividades que envolviam a análise do comportamento da parábola no plano cartesiano. As competências exploradas nesta reunião incluíram a habilidade (EM13MAT402), já mencionada, e a habilidade (EM13MAT502), que estabelece:

Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$ (BRASIL, 2018, p.541).

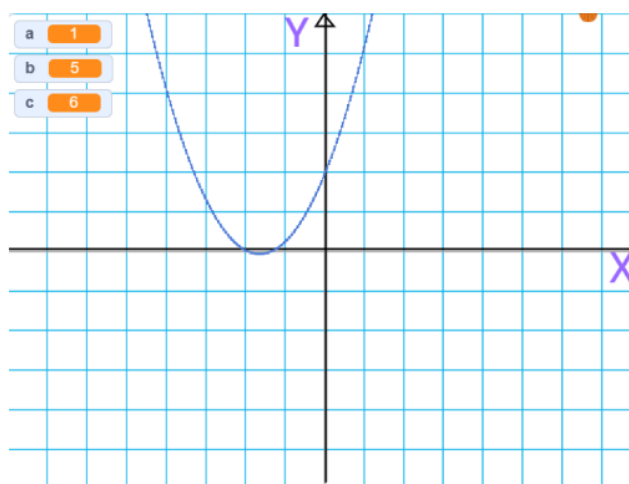
Atividade

Foi proposto aos grupos analisarem o comportamento do gráfico da parábola a partir da mudança dos valores dos coeficientes. O propósito desta atividade é desenvolver a habilidade dos estudantes em estabelecer relações entre a função-gráfico e o gráfico-função. Isso envolve identificar como a função é representada graficamente e compreender como interpretar o gráfico para extrair informações sobre a função. Assim, a partir do gráfico, os alunos poderão analisar os valores dos coeficientes, identificando se são positivos ou negativos, mesmo quando esses valores não estão explicitamente apresentados no gráfico.

Como o código para plotar gráficos tinha sido desenvolvido no encontro anterior, bastava escolher as funções a serem analisadas. Nesta etapa, serão exploradas todas as combinações possíveis para os coeficientes de uma mesma função, mas apenas os gráficos em que o coeficiente “a” é maior que zero serão apresentados. O primeiro gráfico a ser desenvolvido foi o gráfico de uma função quadrática que apresentava todos os coeficientes positivos.

Os grupos perceberam que quando os valores dos coeficientes são todos positivos, a concavidade fica voltada para cima, devido ao valor do coeficiente “ a ” que é positivo. A parábola cruza o eixo x em dois pontos, determinando assim os zeros da função, os quais, neste caso, estão localizados na parte negativa do eixo x . como mostra a Figura 64 extraída de um dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos.

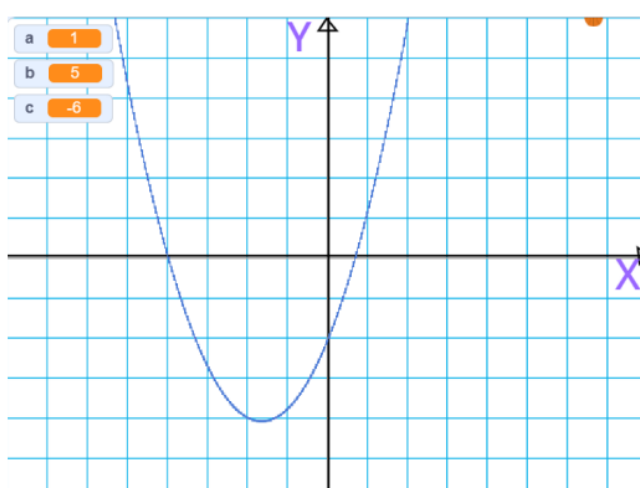
Figura 64 – Coeficientes positivos



Fonte: Produzida pelo autor

A segunda função continha os coeficientes “ a ” e “ b ” positivos, enquanto o coeficiente “ c ” era negativo. A Figura 65, ilustra gráfico da função com os respectivos coeficientes.

Figura 65 – Apenas coeficiente c negativo

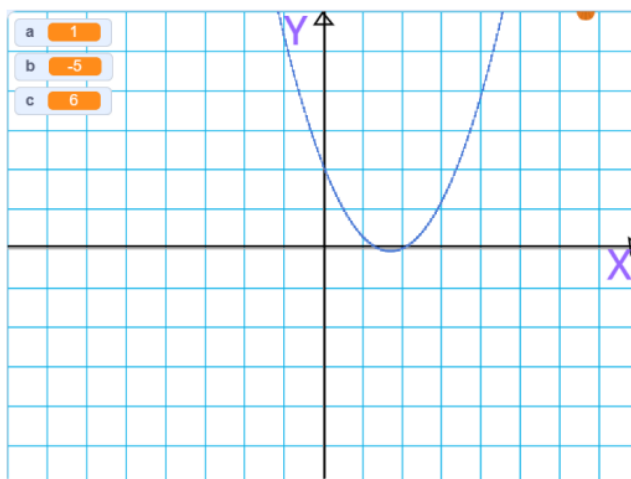


Fonte: Produzida pelo autor

Neste caso, a parábola intercepta o eixo das abscissas em um ponto negativo e em um ponto positivo, determinando, assim, os zeros da função. A parábola também intercepta o eixo y na parte negativa, ou seja, intercepta no valor -6 do eixo das ordenadas.

A terceira função continha os coeficientes “ a ” e “ c ” positivos e o coeficiente “ b ” negativo. A Figura 66, mostra o gráfico com os coeficientes associados.

Figura 66 – Apenas coeficiente b negativo

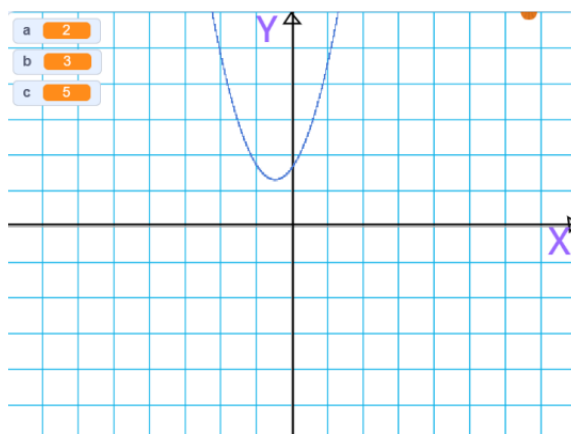


Fonte: Produzida pelo autor

Neste caso, os zeros da função estão localizados no lado positivo do eixo x , e a parábola intercepta o eixo y na parte positiva, que corresponde ao valor de c . A quarta função possuía o coeficiente “ a ” positivo, enquanto os coeficientes “ b ” e “ c ” eram negativos. Aqui, a parábola cortou o eixo das abscissas em ambas as partes, negativa e positiva, determinando assim os zeros da função. Também fez contato com o eixo y na parte negativa.

Ao analisar e discutir com os grupos a respeito dos gráficos da parábola, foi proposto um desafio, que consistia na análise do gráfico da função quadrática $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, conforme a Figura 67. Notavelmente, todos os coeficientes são positivos, assemelhando-se a uma função previamente estudada. O que poderia analisar desse gráfico?

Figura 67 – Todos os coeficientes positivos



Fonte: Produzida pelo autor

Os alunos de forma ampla disseram que a função não continha zeros, pois a parábola não interceptava o eixo das abscissas, mas quando se perguntava o motivo eles não souberam explicar. A condição de existência dos zeros da função foi revisada com o grupo. Dessa forma, eles perceberam que não era suficiente considerar apenas os coeficientes, mas também era necessário ter cuidado com o discriminante ao relacionar o gráfico com a lei de formação.

A atividade promoveu uma compreensão mais sólida, uma vez que os alunos estavam envolvidos na prática e no desenvolvimento de argumentos, fortalecendo assim suas ideias.

4.4.5 Quinto encontro da terceira etapa

No quinto encontro, explorou-se o conceito de vértices da parábola. A habilidade trabalhada durante essa atividade alinha-se com a habilidade de código (EM13MAT503) da BNCC, que estabelece:

Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais ([BRASIL, 2018](#), p.541).

Essa habilidade envolve a análise e investigação dos pontos de máximo ou mínimo da Funções Quadráticas, que são ferramentas importantes no estudo dessa função. Pode incluir a representação gráfica desses pontos e a compreensão de como eles se relacionam com o contexto do problema em questão.

Os conceitos de vértice da parábola foram abordados teoricamente, com algumas aplicações. Logo em seguida, foi o momento de aplicar esses conceitos na prática. Foram propostas duas atividades aos grupos para desenvolver a habilidade mencionada.

Atividade 1

desenvolver um código que determinasse os vértices de uma função quadrática qualquer e identificasse se a função tem ponto de máximo ou ponto de mínimo. A atividade tem como objetivo consolidar o entendimento sobre vértice da parábola e, ao mesmo tempo, estimular os alunos ao desenvolvimento das habilidades de programação e o pensamento computacional.

Discutimos ideias para desenvolver o código a ser utilizado na atividade. Concluímos que seria necessário criar duas variáveis para armazenar os valores de x e y do vértice. Os grupos foram orientados a adicionar essas novas variáveis a um código desenvolvido em atividades anteriores e criar um script que analisasse a condição da função ter ponto de mínimo ou máximo, além de imprimir uma mensagem dando o resultado.

De forma gradual os grupos finalizaram a atividade, demonstrando uma estratégia de solução eficaz. Será evidenciado o código de um dos grupos que apresentou script

pequenos, o que facilitará na explicação do desenvolvimento. Este grupo em específico desenvolveu o código da atividade em três scripts. O primeiro bloco de códigos é um programa que já foi utilizado em outros encontros, conforme ilustrado na Figura 54.

O segundo bloco consiste em um script com uma sequência de comandos para armazenar os valores do vértice da função. Fica bem claro na Figura 68 que foram criadas três variáveis. A primeira, chamada “Delta”, armazena o valor do discriminante da função. As variáveis “Xv” e “Yv” são responsáveis por armazenarem os valores de x e y do vértice

Figura 68 – Vértice



Fonte: Produzida pelo autor

O terceiro bloco de código, conforme representado na Figura 69, tem como objetivo identificar se a função quadrática possui um ponto de máximo ou mínimo, e apresentar o valor do vértice, conforme solicitado na atividade.

Figura 69 – Comportamento da parábola



Fonte: Produzida pelo autor

Durante a discussão e compartilhamento de ideias, um código elaborado por outro grupo suscitou dúvidas entre os demais. A Figura 70, exibe a parte específica do código que gerou a insegurança por parte dos colegas.

Figura 70 – Vértice uma 2ª ideia



Fonte: Produzida pelo autor

O código que gerou a dúvida foi o bloco de variável “Xv”, responsável por armazenar a média aritmética dos zeros da função, que representa o x do vértice. Foi esclarecido aos alunos que não havia erro no programa e que, de fato, o x do vértice pode ser determinado pela média aritmética dos zeros da função como já havia sido mencionado ao decorrer dos encontros. Os alunos mencionaram que tinha sido falta de atenção.

Atividade 2

Com x metros de cerca, um fazendeiro pretende circundar uma área retangular adjacente a um rio para confinar alguns animais. Determine a área máxima dessa região sob as seguintes restrições: utilizando o rio, ou seja, cercando apenas três lados, ou cercando todos os quatro lados.

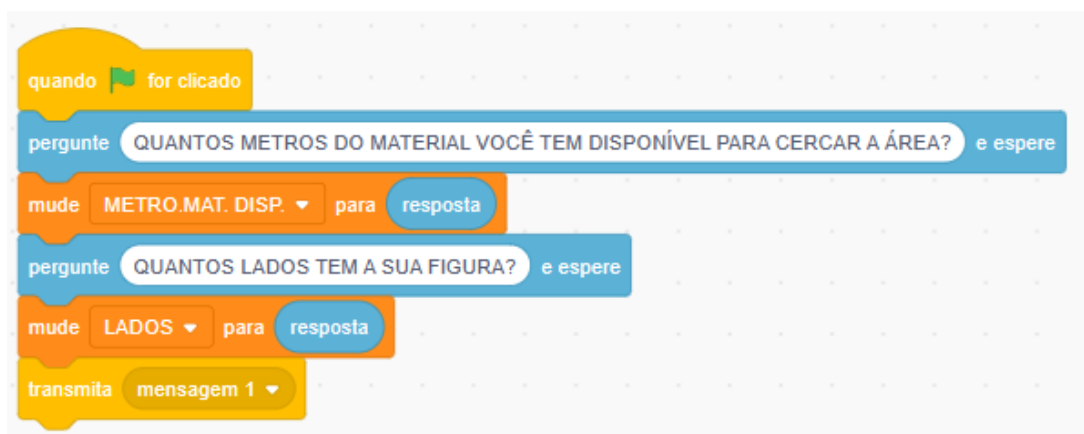
O objetivo desta atividade é explorar e aplicar conceitos matemáticos relacionados à otimização da área de uma região retangular, considerando restrições específicas de cercamento em um contexto prático. Utilizando o software Scratch como uma ferramenta de programação, os alunos irão modelar a situação de um fazendeiro que precisa cercar uma área retangular ao lado de um rio, levando em conta diferentes restrições de cercamento. Dessa forma, os alunos desenvolverão habilidades de pensamento computacional e aprofundarão sua compreensão dos conceitos matemáticos, conforme estabelecido pela BNCC.

No início, os grupos enfrentaram dificuldades em organizar suas ideias para construir os códigos, pois inicialmente queriam realizar a atividade através da construção de figuras, o que seria mais difícil. No entanto, foram orientados a basear suas ideias em códigos

já trabalhados em outros encontros, como o bloco “Pergunte e Responda” e o bloco de “variáveis”. Com algumas orientações e um trabalho em grupo com troca de ideias, os grupos foram construindo as ideias aos poucos e desenvolvendo a atividade.

Segue a ideia de um dos grupos para resolver a atividade. O grupo dividiu o desenvolvimento do código em três scripts distintos. No primeiro script, a equipe concentrou-se em solicitar a metragem do material disponível. Foi criada uma variável para armazenar essa informação, a fim de que pudesse ser utilizada posteriormente para determinar a área a ser cercada. Além disso, esse script também foi responsável por verificar se a área em questão apresenta alguma restrição específica, ou seja, se deve ser cercada apenas três lados ou todos os quatro lados.

Figura 71 – Área máxima



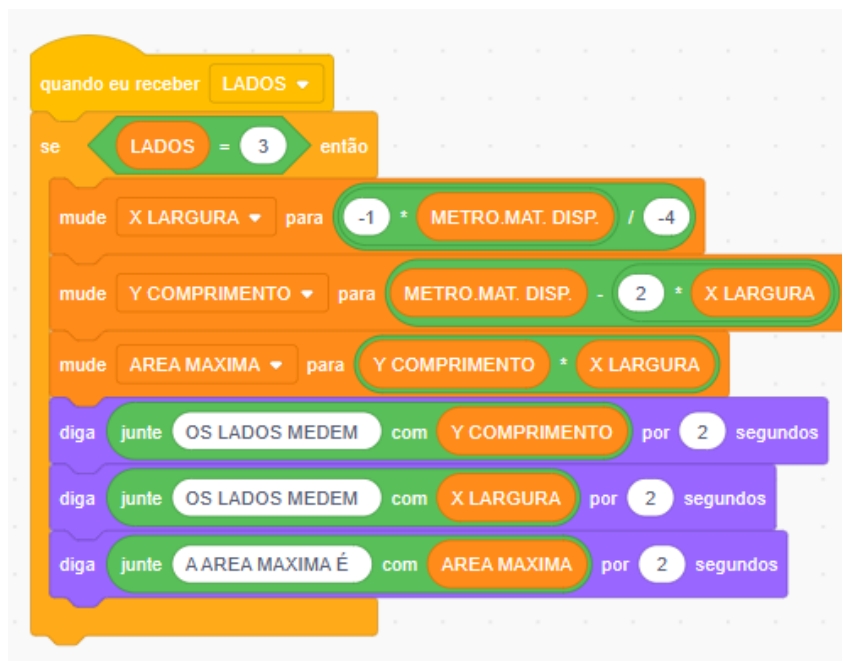
Fonte: Produzida pelo autor

O segundo e o terceiro script recebem a mensagem “LADO” do primeiro. Esse dois script são responsáveis por analisar a informação armazenada nas variáveis do primeiro script e executar um comando de acordo com uma das duas restrições fornecidas.

No segundo script, o grupo deixou bastante claro a condição de que se foi armazenado o valor 3, há uma maneira específica de calcular o problema proposto. Ao analisar o código, observou-se que o grupo estava lidando com a função área $A(x) = Cx - 2x^2$, onde C é o valor da metragem da cerca. O grupo optou por considerar a largura tendo dois lados e o comprimento apenas um lado.

Identificou-se que o valor para a largura é dado pela expressão $-b/2a$, onde a é sempre -2 e b é sempre C . Assim, criou-se a variável “XLARGURA” para armazenar $-c/-4$. Em seguida, concluiu-se que a outra medida seria o valor total menos duas vezes o valor da largura, ou seja, $C/2$, e este valor seria armazenado na variável “YCOMPRIMENTO”. Portanto, a área máxima é dada pelo produto dos valores armazenados nas variáveis “XLARGURA” e “YCOMPRIMENTO”, conforme a Figura 72.

Figura 72 – Com restrição



Fonte: Produzida pelo autor

Ao analisar o terceiro script, observa-se que o grupo estava empregando outra abordagem para processar a informação armazenada na variável. Quando o valor armazenado na variável é 4, a função quadrática utilizada é $A(x) = \frac{C/2}{2} - \frac{(ax^2)}{2}$, onde C representa o valor da metragem da cerca. Como visto antes, foram criadas três variáveis: “XLARGURA”, “YCOMPRIMENTO” e “AREA MAXIMA”. O grupo percebeu que o valor para a largura pode ser obtido pela expressão $-b/2a$, onde a é sempre -1 e b é sempre C . Assim, a variável “XLARGURA” armazenou o valor $-c/-2$.

Em seguida, concluiu-se que a outra medida seria o mesmo valor de “XLARGURA”, o qual foi armazenado na variável “YCOMPRIMENTO”. Portanto, o grupo reconheceu que a área máxima é alcançada quando todos os lados são iguais, formando um quadrado, conforme a Figura 73.

Figura 73 – Sem restrição



Fonte: Produzida pelo autor

Veja o resultado no palco para 80 metros de cerca nos casos com e sem restrição.

Figura 74 – 80 metros de cerca



Fonte: Produzida pelo autor

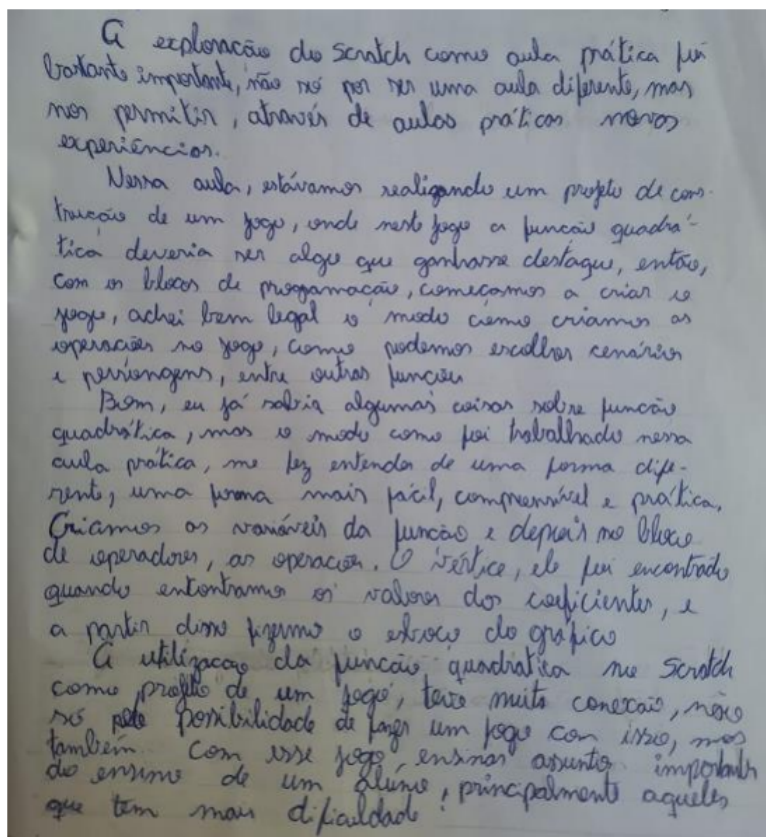
Os alunos enfrentaram desafios durante a resolução do problema proposto, porém demonstraram resiliência e determinação para superá-los. Ao trabalharem juntos e compartilharem ideias, eles conseguiram encontrar soluções e também desenvolveram habilidades importantes relacionadas à maximização de área. Essa experiência proporcionou a eles a oportunidade de aplicar conceitos matemáticos de maneira prática, mas também de aprimorar suas habilidades de pensamento crítico, criativo e computacional. O processo de resolver esse problema os capacitou a enfrentar desafios futuros com confiança e determinação.

4.5 Quarta etapa

Na quarta etapa, os grupos foram desafiados a aplicar de forma prática os conhecimentos adquiridos sobre o software Scratch e a função quadrática. Durante seis encontros, os participantes empenharam-se no desenvolvimento de um projeto que consolidasse o entendimento teórico e também explorasse a capacidade do Scratch em criar uma experiência interativa e dinâmica, visando alterar a percepção dos alunos de que a matemática é uma disciplina chata e difícil.

Cada equipe ficou responsável por desenvolver um miniprojeto que abarcasse elementos vivenciados nos encontros como: interface de introdução, implementação de botões de interação com o usuário, introduzir pelo menos três atores distintos, tempo, pontuação, criar cenários atrativos e, crucialmente, incorporar a aplicação da função quadrática de maneira criativa. A Figura 75 é um recorte do diário de bordo de um dos grupos relatando a importância da aula prática com o Scratch na construção do conhecimento.

Figura 75 – Diário de bordo



Fonte: Produzida pelo autor

Nesse período de seis encontros os grupos ficaram livres para traçar, alinhar e desenvolver seus projetos, esse momento permitiu que os grupos mergulhassem mais a fundo na programação e nas possibilidades do Scratch, fomentando a colaboração e a

aplicação prática dos conceitos matemáticos. Além disso, (CASTRO et al., 2017, p.39), afirma que:

O Scratch possibilita aos usuários aprender por meio de várias competências como: Raciocínio Lógico, Criatividade, Pensamento Sistemático, Resolução de Problemas, de uma maneira divertida e utilizando a tecnologia, ainda é possível trabalhar de forma colaborativa compartilhando os projetos no site do programa.

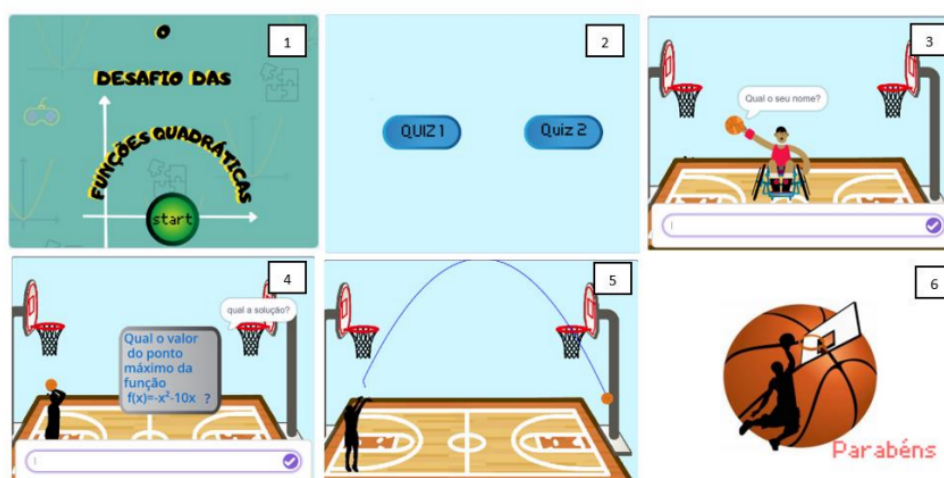
Ao abordar a função quadrática através deste projeto, os alunos não só consolidaram seus conhecimentos teóricos, mas também desenvolveram habilidades essenciais, como a resolução de problemas, a comunicação de ideias matemáticas e a criação de uma narrativa coerente dentro do ambiente digital.

4.5.1 Culminância dos projetos desenvolvidos na quarta etapa

Na culminância dos projetos, os participantes tiveram a oportunidade de compartilhar e apresentar os resultados de seus esforços e dedicação ao longo do processo de desenvolvimento desta etapa. Esse momento foi dedicado à exposição dos projetos, o que proporcionou um espaço valioso, pois os grupos demonstraram as habilidades adquiridas sobre o software e conseqüentemente do aprendizado matemático.

Grande parte dos projetos desenvolvidos concentrou-se na criação de jogos, com ênfase em Quiz. Os projetos que envolveram a criação de quiz exibiram uma ampla diversidade em suas abordagens e temas, refletindo a versatilidade e adaptabilidade dessa modalidade de atividade. A Figura 76 é um recorte de um dos trabalhos desenvolvidos.

Figura 76 – Projeto final



Fonte: Produzida pelo autor

O projeto intitulado “O Desafio das funções quadráticas” consiste em um quiz que segue a seguinte condição: o desempenho do arremesso de um jogador de basquete,

durante um lance livre, estará condicionado à sua habilidade de responder a uma pergunta relacionada à função polinomial do segundo grau. A pontuação será atribuída ao jogador somente se ele acertar a pergunta proposta. Ao responder à pergunta no quiz, o jogador realizará o arremesso da bola, e o trajeto percorrido pela mesma será desenhado. Esse desenho evidenciará que o deslocamento da bola segue uma trajetória em forma de parábola.

Ao final das apresentações eram feitas duas perguntas pelo pesquisador. São elas: O que motivou a concepção do projeto? E, adicionalmente, como o projeto desenvolvido poderia beneficiar outros alunos?

A justificativa apresentada pelo grupo foi a seguinte: sempre ver os colegas conectados em jogos pelo celular. E vê-los concentrados tentando superar os desafios nos jogos e ver a satisfação deles de se superar a cada hora, foi o que motivou o grupo a desenvolver o Quiz. Considerando essa experiência envolvendo os jogos fez com que o grupo pensasse no desenvolvimento de um jogo matemático. A expectativa era a de que, ao integrar a abordagem lúdica e desafiadora envolvendo conceitos matemática, em especial a função quadrática, os colegas demonstrariam um maior empenho nas aulas.

Durante as apresentações, os participantes exibiram o produto final de seus projetos, e compartilharam ideias sobre os desafios enfrentados na construção e na aplicação dos conceitos matemáticos exigidos, os erros e as soluções encontradas na construção dos Scripts e as experiências de aprendizado ao longo do caminho. Essa etapa não só foi importante para consolidar o conhecimento teórico adquirido, mas também realçou as habilidades práticas e competências desenvolvidas durante a execução dos projetos.

Além disso, a culminância dos projetos proporcionou um ambiente propício para a troca de ideias, participação e interação nos projetos dos envolvidos e o estímulo à comunicação entre os participantes. A interação durante as apresentações fortaleceu a compreensão mútua, e incentivou a criação de uma atmosfera colaborativa, onde o feedback construtivo e a troca de experiências enriqueceram ainda mais o aprendizado coletivo.

Este momento marcou o encerramento da quarta etapa e também representou um marco significativo no processo de aprendizagem, evidenciando o crescimento individual e coletivo alcançado ao longo do desenvolvimento dos projetos.

4.6 Resultados e discussões

A análise comparativa entre os resultados do pré-teste e pós-teste desempenha um papel importante na obtenção de conclusões significativas no âmbito da pesquisa. Nesse contexto, é notável destacar que as questões de numeração correspondente abordam habilidades específicas estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Essa estratégia permite uma avaliação detalhada e direcionada do progresso dos participantes,

pois associa a evolução de cada habilidade ao longo do período de intervenção. Ao analisar simultaneamente as avaliações, é possível identificar o desenvolvimento geral dos participantes e compreender de maneira mais refinada as nuances do aprendizado, contribuindo para uma abordagem mais precisa, flexível, eficiente e ajustada no processo de ensino.

4.6.1 Análise dos dados

A proposta da primeira questão, tanto no pré-teste quanto no pós-teste, visa abordar o conceito dos zeros da função quadrática. Esta questão destaca-se pela ênfase na Habilidade EM13MAT302, inseridas na área de Matemática e suas Tecnologias da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Pré-teste: Questão 1 -Determine os zeros da função: $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

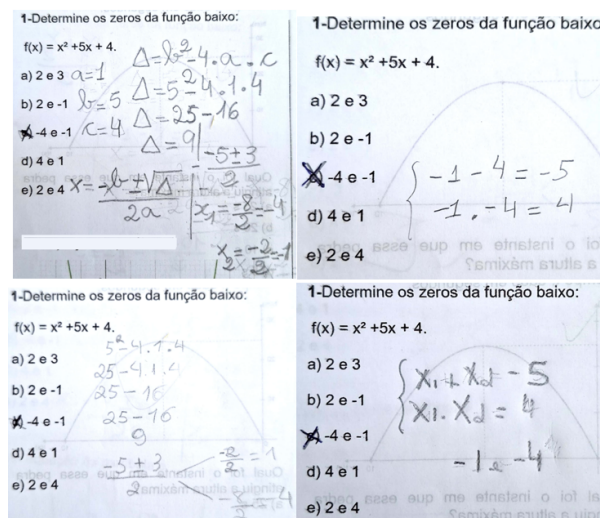
Verificou-se que apenas 12 dos 36 alunos participantes do pré-teste marcaram a alternativa correta, totalizando uma taxa de 33,3%. Ao analisar as soluções dadas pelos alunos, constatou-se que 3 utilizaram o método da soma e produto, 5 usaram a fórmula resolutiva e 4 restantes não apresentaram a solução.

Pós-teste: Questão 1 -Determine os zeros da função $f(x) = x^2 + 5x + 4$.

Já no pós-teste, observou-se que, dos 36 alunos, 26 marcaram a alternativa correta, totalizando uma taxa de 72,2%. Analisando as soluções apresentadas, constatou-se que 12 utilizaram o método da soma e produto, 8 usaram a fórmula resolutiva e 6 não apresentaram solução para o problema.

A análise dos resultados do pós-teste revela uma melhoria significativa no desempenho dos alunos, indicando um avanço na assimilação da habilidade trabalhada. Embora nem todos os alunos tenham superado as dificuldades anteriores, uma boa parte demonstrou progresso notável após a intervenção. A resolução dessa questão pelos alunos é apresentada na Figura 77.

Figura 77 – Resolução da primeira questão

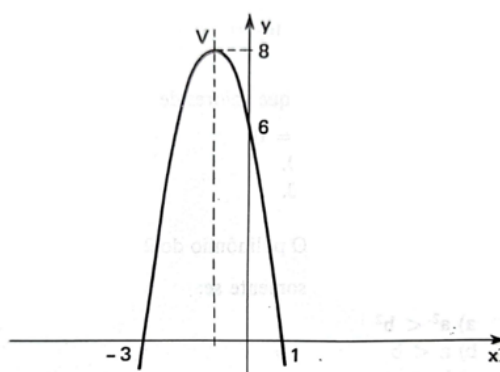


Fonte: Produzida pelo autor

A segunda questão pede a formulação da lei de formação de uma função quadrática com base em seu gráfico. O estudo deste tópico promove, de maneira mais destacada, o aprimoramento da habilidade, EM13MAT402, estabelecidas pela BNCC.

Pré-teste: Questão 2- A lei de formação que melhor representa o gráfico abaixo é:

Figura 78 – Parábola do pré-teste

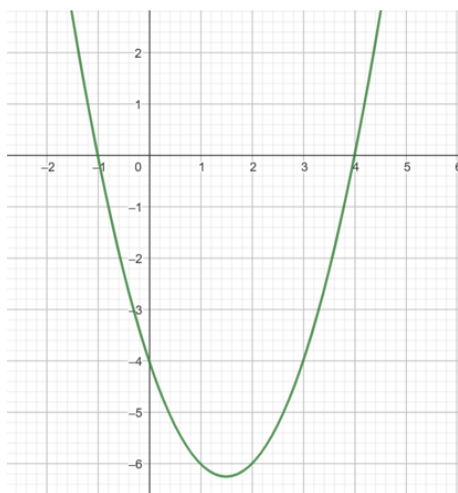


Fonte: Produzida pelo autor

Foi constatado que apenas 7 dos 36 participantes escolheram a alternativa correta, totalizando uma taxa de 19,5%. No entanto, ao analisar as respostas, observou-se que em 4 questões os alunos haviam riscado algumas alternativas, sugerindo que estavam comparando o comportamento do gráfico com a função dada nas opções. Dentre esses 7, 3 alunos não apresentaram solução para a questão.

Pós-teste: Questão 2- A lei de formação que melhor representa o gráfico abaixo é:

Figura 79 – Questão 3 Pré-teste

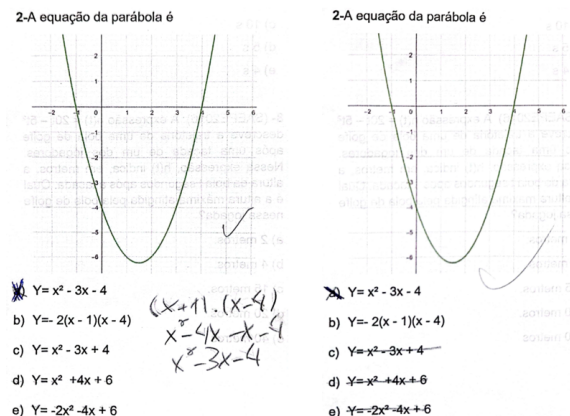


Fonte: *Produzida pelo autor*

No pós-teste, observou-se que 20 dos 36 participantes acertaram a questão, totalizando uma taxa de 55,6%. Ao analisar as respostas, constatou-se que 2 alunos utilizaram a forma fatorada da função quadrática a partir dos zeros da função plotados no gráfico. Além disso, notou-se que em 10 questões os alunos haviam riscado algumas alternativas, sugerindo, mais uma vez, que estavam comparando o comportamento do gráfico com a função dada nas opções.

Apesar do avanço observado no pós-teste muitos alunos recorreram a métodos indiretos, como eliminação e comparação visual, em vez de aplicar diretamente os conceitos trabalhados. Esse resultado demonstra progresso, mas também evidencia a necessidade de fortalecer a aplicação direta dos métodos ensinados. A Figura 80 mostra como os alunos resolveram essa questão.

Figura 80 – Resolução da segunda questão

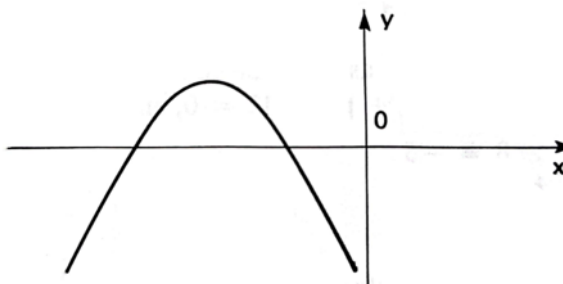


Fonte: Produzida pelo autor

A terceira questão aborda a representação gráfica da função polinomial de segundo grau com base nos valores dos coeficientes, concentrando-se especialmente no aprimoramento da habilidade específica da BNCC, (EM13MAT302), (EM13MAT402), (EM13MAT503).

Pré-teste: Questão 3- O trinômio $y = ax^2 + bx + c$ está representado na figura . A afirmativa que melhor representa os coeficientes é:

Figura 81 – Análise dos coeficientes

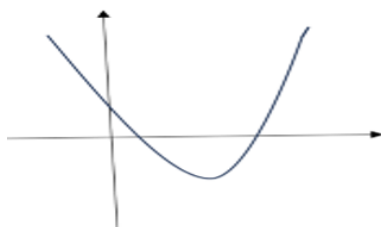


Fonte: Produzida pelo autor

No pré-teste, constatou-se que apenas 9 dos 36 estudantes marcaram a alternativa correta, totalizando uma taxa de 25%. Com base nas respostas, constatou-se que os estudantes enfrentavam dificuldades em identificar elementos fundamentais do gráfico da função quadrática. Aproximadamente 27,8% dos alunos não conseguiram reconhecer a posição correta da concavidade da parábola, e 25% tiveram dificuldade em identificar o termo independente no gráfico.

Pós-teste: Questão 3- A lei de formação $y = ax^2 + bx + c$ está representado na figura abaixo. A afirmativa que melhor representa os coeficientes é:

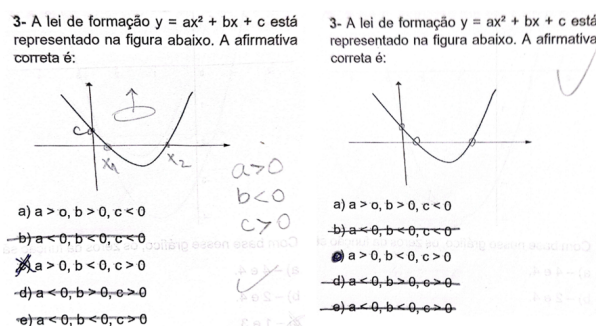
Figura 82 – Análise dos coeficientes 2



Fonte: Produzida pelo autor

No pós-teste, houve um aumento significativo, com 27 dos 36 alunos respondendo corretamente, resultando em uma taxa de acerto de 75%. O número de estudantes que não dominavam a noção básica da concavidade do gráfico da função reduziu para 2,8%, e o número de estudantes que não reconheciam o termo independente no gráfico diminuiu para 8,3%. A Figura 83 apresenta a resolução desta questão pelos alunos.

Figura 83 – Resolução da terceira questão



Fonte: Produzida pelo autor

A quarta questão envolve conceitos de otimização, especificamente na maximização de área, e está alinhada com as competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) na área de Matemática. As principais competências específicas são 3 e 5 e as habilidades abordadas são: (EM13MAT302), (EM13MAT503).

Pré-teste: Questão 4- Um pedaço de terra retangular encontra-se delimitado por uma cerca ao longo de três de seus lados e por um rio linear no quarto lado. Determine as dimensões desse terreno que maximizam a área contida, considerando que apenas 1.000 metros de cerca estão disponíveis.

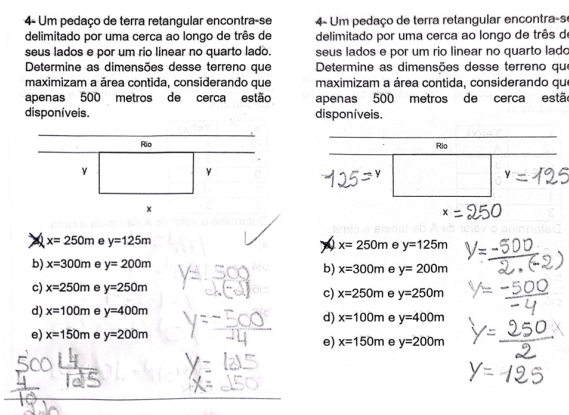
Apenas 9 dos 36 participantes marcaram a alternativa correta, resultando em uma taxa de acerto de 25%. No entanto, ao examinar a avaliação, constatou-se que apenas 2 alunos apresentaram soluções. Percebeu-se que os alunos estavam tentando resolver o

problema utilizando apenas o conceito de perímetro ou uma abordagem que envolvesse o cálculo do perímetro.

Pós-teste: Questão 4- Um pedaço de terra retangular encontra-se delimitado por uma cerca ao longo de três de seus lados e por um rio linear no quarto lado. Determine as dimensões desse terreno que maximizam a área contida, considerando que apenas 500 metros de cerca estão disponíveis.

No pós-teste, observou-se um notável progresso, com mais da metade dos estudantes, ou seja, 19 de 36, acertando a questão, correspondendo a uma taxa significativa de 52,8%. Ao analisar as soluções, observou-se que 10 dos 19 alunos resolveram a questão conforme foi trabalhado na sequência didática, enquanto apenas dois utilizaram o método convencional. Os outros sete não apresentaram solução. A Figura 84 apresenta a resolução desta questão pelos alunos.

Figura 84 – Resolução da quarta questão



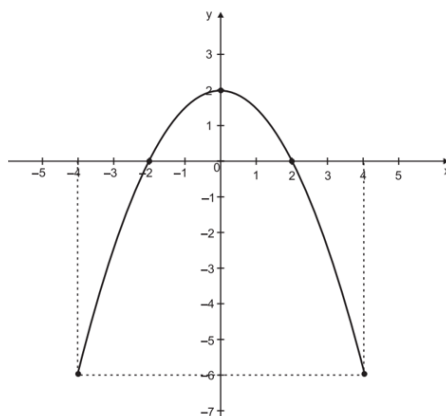
Fonte: Produzida pelo autor

A resolução dessa questão demonstra que o engajamento dos alunos na sequência didática foi importante para que eles conseguissem resolver o problema.

A quinta pergunta destaca a análise e identificação dos zeros de uma função quadrática, sendo realizada através da observação do seu gráfico no plano cartesiano. A o problema trabalhado nesta questão proporciona uma contribuição significativa para a ampliação e fortalecimento da competência específica 3, assim como para o desenvolvimento mais aprofundado da habilidade (EM13MAT302).

Pré-teste: Questão 5-(SAEPE 2019) O gráfico abaixo representa uma função quadrática no intervalo $[-4, 4]$. Com base nesse gráfico, os zeros da função são :

Figura 85 – Questão SAEPE

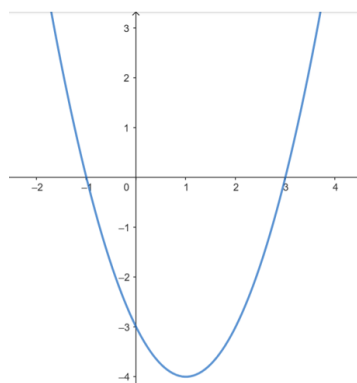


Fonte: *Produzida pelo autor*

Por ser uma questão de nível considerado bastante simples, no pré-teste, houve o maior número de acertos, com 19 alunos marcando a alternativa correta, representando uma taxa de acerto de 52,8%.

Pós-teste: Questão 5- O gráfico abaixo representa uma função quadrática no intervalo $[-2, 4]$. Com base nesse gráfico, os zeros da função são :

Figura 86 – Questão 5



Fonte: *Produzida pelo autor*

No pós-teste, constatou-se que 31 dos 36 participantes acertaram a questão, equivalendo a uma taxa de acerto mais elevada de 86,1%. A redução do número de alunos que não conseguiram resolver a questão, de 17 no pré-teste para apenas 5 no pós-teste, evidencia um progresso notável no entendimento dos conceitos ensinados.

A sexta questão tem como propósito instigar o aluno a identificar um valor específico em uma tabela através de sua análise. A questão busca avaliar a habilidade do aluno em

interpretar dados tabulares, relacionando-os ao contexto de uma função quadrática. Isso não apenas testa o entendimento conceitual da função, mas também a capacidade de interpretar e extrair informações relevantes, resolvendo assim problemas contextualizados. A questão prioriza, especialmente, a competência específica 5 e a habilidade (EM13MAT502).

Pré-teste: Questão 6- A seguir estão relacionadas as coordenadas de alguns pontos do gráfico da função quadráticas. Determine o valor de A na tabela:

Figura 87 – Tabela pré-teste

x	Y=f(x)
-2	A
-1	3
0	0
1	3
2	12

Fonte: Produzida pelo autor

No pré-teste, apenas 8 dos 36 estudantes acertaram a questão, resultando em uma taxa de acerto de 22,2%. Verificou-se que nenhum aluno apresentou uma solução para a questão.

Pós-teste: Questão 6- A seguir estão relacionadas as coordenadas de alguns pontos do gráfico da função Quadráticas. Determine o valor de A na tabela:

Figura 88 – Tabela pós-teste

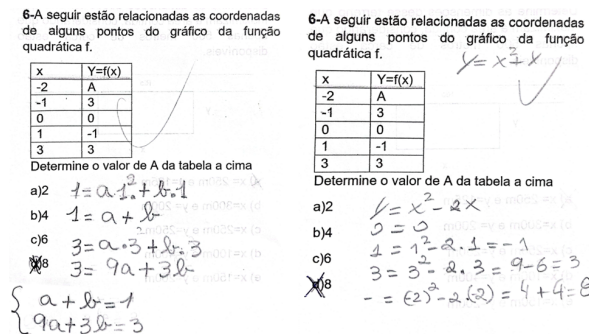
x	Y=f(x)
-2	A
-1	3
0	0
1	-1
3	3

Fonte: Produzida pelo autor

No pós-teste, observa-se um aumento moderado, com 13 estudantes marcando a alternativa correta, resultando na menor taxa de acertos, equivalente a 36,1%. Desses 13, apenas 2 apresentaram soluções. As respostas indicam que, embora os estudantes compreendessem o método, tiveram dificuldades em aplicá-lo corretamente, pois algumas

soluções estavam incompletas ou não se apresentasse de forma elementar. A Figura 89 traz os métodos utilizados pelos alunos.

Figura 89 – Resolução da sexta questão



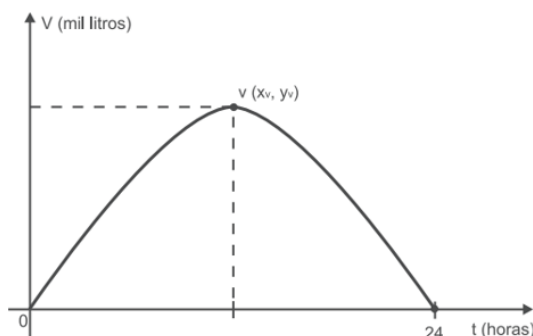
Fonte: Produzida pelo autor

Esse resultado evidencia uma melhoria significativa no desempenho dos estudantes, mesmo que o número de acertos na questão tenha sido baixo. No entanto, o aumento no número de soluções apresentadas no pós-teste demonstra um avanço na compreensão e na tentativa de resolução do problema.

A sétima questão tem como objetivo avaliar a habilidade do aluno na interpretação de gráficos e na aplicação de conceitos relacionados a pontos de máximo e mínimo, assim como valores máximos e mínimos. A abordagem desta questão contribui de maneira mais acentuada para o desenvolvimento da competência específica 5 e da habilidade EM13MAT503 da área de Matemática e suas tecnologias da BNCC.

Pré-teste: Questão 7- (SAEPE 2018) O volume (V) em um reservatório de água varia em função do tempo (t), em horas, conforme representado no gráfico da função quadrática abaixo. De acordo com esse gráfico, em quantas horas esse reservatório atinge seu volume máximo?

Figura 90 – Questão 7 pré-teste



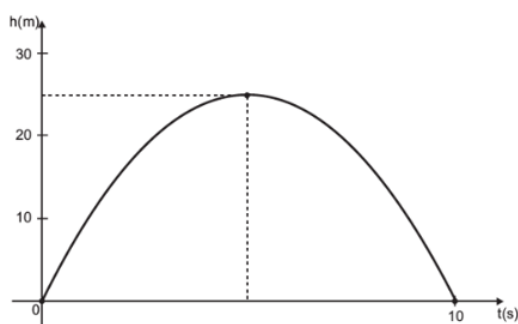
Fonte: Produzida pelo autor

No pré-teste, 13 dos 36 alunos marcaram a alternativa correta, o que corresponde a uma taxa de 36,1%. No entanto, nenhum desses alunos forneceu solução para a questão.

Além disso, o mesmo percentual de 36,1% escolheu uma alternativa errada devido à interpretação equivocada da questão. Esses alunos optaram pela alternativa com o maior valor no eixo das abcissas, que era 24, uma vez que o eixo das ordenadas não apresentava valores. Presume-se que associaram o volume máximo ao tempo máximo no gráfico.

Pós-teste: Questão 7- Uma pedra é atirada para cima e sua altura (h), em metros, é descrita pelo gráfico abaixo, que está em função do tempo t , dado em segundos. Qual foi o instante em que essa pedra atingiu a altura máxima?

Figura 91 – Questão 7 pós-teste



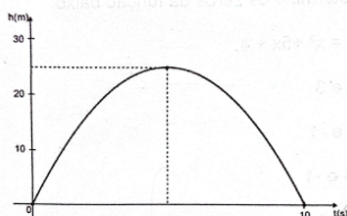
Fonte: Produzida pelo autor

No pós-teste, 14 alunos marcaram a alternativa correta, resultando em uma taxa de 38,9%. Desses, 10 apresentaram uma solução eficaz para a questão, enquanto os 4 restantes não forneceram nenhuma solução. Ao analisar os resultados, nota-se que 38,9% dos participantes escolheram a alternativa que fazia referência à altura máxima, apesar de o que se solicitava fosse o tempo para atingir essa altura máxima. Novamente, esse percentual assemelha-se ao número de acertos, indicando uma interpretação comum e equivocada por parte dos alunos em ambos os testes.

Apesar do resultado baixo e da dificuldade dos alunos em dominar os conceitos básicos, a quantidade de estudantes que conseguiram resolver o problema no pós-teste foi significativamente superior ao pré-teste. Isso demonstra um avanço no entendimento e na aplicação dos conhecimentos adquiridos ao longo da sequência didática.

Figura 92 – Ideia Correta

7 Uma pedra é atirada para cima e sua altura (h), em metros, é descrita pelo gráfico abaixo, que está em função do tempo t, dado em segundos.



Qual foi o instante em que essa pedra atingiu a altura máxima?

- a) 25 s
- b) 20 s
- c) 10 s
- ☒ d) 5 s
- e) 4 s

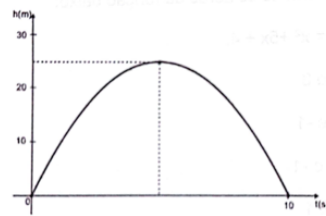
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 10$$

$$0 + 10 = \frac{10}{2} = 5$$

Fonte: Produzida pelo autor

Figura 93 – Ideia equivocada

7 Uma pedra é atirada para cima e sua altura (h), em metros, é descrita pelo gráfico abaixo, que está em função do tempo t, dado em segundos.



Qual foi o instante em que essa pedra atingiu a altura máxima?

- ☒ a) 25 s
- b) 20 s
- c) 10 s
- d) 5 s
- e) 4 s

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{10}{2} = 5$$

Fonte: Produzida pelo autor

A oitava questão abordou de maneira mais algébrica o tema da sétima questão, aprofundando-se na análise por meio da aplicação da fórmula do vértice da parábola, proporcionando uma abordagem mais detalhada e técnica. As habilidades e competências desta questão são semelhantes às da sétima questão, abrangendo a competência específica 5 e a habilidade EM13MAT503 da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Pré-teste: Questão 8- Jorge planta tomates em uma área de sua fazenda, e resolveu diminuir a quantidade Q (em mil litros) de agrotóxicos em suas plantações, usando a lei $Q(t) = 7 + t^2 - 5t$, onde t representa o tempo, em meses, contado a partir de $t=0$. Deste modo, é correto afirmar que a quantidade mínima de agrotóxicos usada foi atingida em:

No pré-teste, apenas 8 dos 36 participantes responderam corretamente a esta questão, correspondendo a uma taxa de acerto de 22,2%. Entre esses 8 acertos, nenhum aluno apresentou a solução do problema.

Pós-teste: Questão 8-(SAEPE2016) A expressão $h(t) = 20t - 5t^2$ descreve a trajetória de uma bola de golfe após uma tacada de um dos jogadores. Nessa expressão, $h(t)$ indica, em metros, a altura da bola t segundos após a tacada. Qual é a altura máxima atingida pela bola de golfe nessa jogada?

No pós-teste, 21 alunos marcaram a alternativa correta, alcançando uma taxa de acerto de 58,3%. Desses 21, 14 apresentaram uma solução para o problema, enquanto os 7 restantes não forneceram nenhuma solução. Ao analisar as respostas, percebe-se dois tipos de solução: uma mais completa e outra mais imediata.

Figura 94 – Resolução da oitava questão

8- (SAEPE2016) A expressão $h(t) = 20t - 5t^2$ descreve a trajetória de uma bola de golfe após uma tacada de um dos jogadores. Nessa expressão, $h(t)$ indica, em metros, a altura da bola t segundos após a tacada. Qual é a altura máxima atingida pela bola de golfe nessa jogada?

a) 2 metros.
b) 4 metros.
c) 15 metros.
☒ d) 20 metros.
e) 40 metros

8- (SAEPE2016) A expressão $h(t) = 20t - 5t^2$ descreve a trajetória de uma bola de golfe após uma tacada de um dos jogadores. Nessa expressão, $h(t)$ indica, em metros, a altura da bola t segundos após a tacada. Qual é a altura máxima atingida pela bola de golfe nessa jogada?

a) 2 metros.
b) 4 metros.
c) 15 metros.
☒ d) 20 metros.
e) 40 metros

Fonte: Produzida pelo autor

A análise dos resultados revela que o desempenho no teste realizado após as atividades de programação foi significativamente superior ao do pré-teste. Observou-se um aumento no número de acertos, principalmente em questões que não exigiam cálculos, e também um incremento nas respostas fornecidas no pós-teste. No entanto, alguns alunos não conseguiram desenvolver soluções para todos os problemas propostos. Apesar disso, o uso do software Scratch demonstrou ser positivo, contribuindo de forma eficaz para o engajamento e o desempenho geral da turma. A aplicação dos métodos trabalhados foi limitada, indicando que, embora o Scratch tenha mostrado benefícios, ainda há desafios a serem superados para maximizar a eficácia da estratégia de ensino.

Conclusão

Ao longo desta pesquisa, explorou-se o tema função quadrática, enfatizando o potencial do software Scratch como uma ferramenta eficiente no ensino e aprendizagem. Este trabalho de investigação buscou desenvolver uma sequência didática, examinar sua viabilidade e impacto dentro do contexto educacional. Ao chegarmos ao fim deste estudo, é pertinente revisitar as principais descobertas e refletir sobre suas implicações.

Primeiramente, os resultados obtidos durante a implementação da sequência didática demonstraram que o uso do Scratch oferece uma abordagem mais dinâmica e favorável para o ensino de conceitos matemáticos. Por meio das atividades práticas, os alunos compreenderam os fundamentos teóricos da função quadrática e os aplicaram de forma criativa em jogos, histórias, quizzes, entre outros. Por exemplo, um grupo de alunos elaborou um jogo envolvendo um arqueiro como personagem principal. Neste jogo, a missão do arqueiro era resgatar uma princesa que havia sido capturada por orques. Para alcançar esse objetivo, o arqueiro precisava demonstrar proficiência em função quadrática, uma vez que os orques lançavam desafios relacionados a esse tema. As flechas do arqueiro só seguiriam uma trajetória precisa se as respostas para os problemas propostos estivessem corretas. A oportunidade de criar projetos desse tipo estimulou os alunos no aprendizado da matemática, refletindo positivamente no desempenho do pós teste.

Além do aumento geral no engajamento dos alunos ao longo das atividades, identificou-se que os alunos se envolviam ativamente em discussões e colaboraram uns com os outros para resolver problemas durante o processo de criação de projetos, o que contribuiu para um ambiente de aprendizagem dinâmico e participativo. Essa observação indica que a metodologia adotada, centrada na programação e na criação de projetos, apoiada pelo software já mencionado, é eficaz no processo de assimilação de conceitos matemáticos, em especial da função quadrática, fortalecendo assim o processo de aprendizagem. Um outro ponto a se destacar foi a capacidade dos alunos dentro do ambiente virtual do Scratch, a experiência de experimentar, testar e errar, possibilitou aos alunos entender que cometer erros é uma etapa natural do processo de aprendizagem. Ao refletirem sobre seus próprios erros e ao buscar diversas estratégias para superá-los, os alunos internalizaram essa valiosa lição.

No entanto, é importante reconhecer que a pesquisa também identificou algumas limitações e desafios. A falta de familiaridade prévia dos alunos com o computador e o software demandou um período de adaptação mais extenso, mesmo sendo para uma turma que optou pela trilha de tecnologia. Além disso, a disponibilidade limitada de computadores e a má conexão com a internet representaram obstáculos significativos para

a implementação dessa abordagem na escola.

À luz dessas considerações, é sugerido que futuras pesquisas se dediquem ao desenvolvimento de estratégias que promovam a integração do pensamento computacional e a utilização de softwares, como o Scratch, no currículo escolar e na formação de professores. Ademais, é essencial embasar essas recomendações em teorias educacionais pertinentes, como a teoria construcionista de aprendizagem, para garantir um alicerce teórico sólido e coerente.

Em última análise, este estudo destaca a importância de abordagens pedagógicas tecnologicamente orientadas para promover uma educação matemática mais significativa. O uso do software Scratch permite aos educadores motivar os alunos a explorar conceitos matemáticos de forma inovadora, em conformidade com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que enfatizam o uso de tecnologias e o desenvolvimento do pensamento computacional para promover uma educação mais eficaz. Além disso, apresenta instruções práticas para uma implementação de projetos bem-sucedidos, preparando, assim, os alunos para os desafios contemporâneos.

Referências

- BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. [S.l.]: Cortez editora, 2012.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2012.
- BRASÃO, M. R. Logo—uma linguagem de programação voltada para a educação. *Cadernos da FUCAMP*, v. 6, n. 6, 2007.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base: Ensino Fundamental*. Brasília: MEC, 2018.
- CASTRO, A. d. et al. *O uso da programação Scratch para o desenvolvimento de habilidades em crianças do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2017.
- EVES, H. W. et al. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Unicamp Campinas, 2011.
- FEDERAL, S. *LDB: Lei de diretrizes e bases da educação nacional*. Brasília: Coordenação de Edições Técnicas, 2017. 58 p. Conteúdo: Leis de diretrizes e bases da educação nacional – Lei no 9.394/1996 – Lei no 4.024/1961. ISBN 978-85-7018-787-1.
- FINO, C. N. Dewey, papert, construcionismo e currículo. *(Contra) tempos de educação e democracia, evocando John Dewey*, Centro de Investigação em Educação, Universidade da Madeira, p. 21–30, 2017.
- FUENTE, H. Arranz de la. *La enseñanza de la programación informática en Educación Primaria: situación actual, análisis y presentación de experiencias de aula en España*. [S.l.: s.n.], 2014–15.
- LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 1.
- LIMA, E. L. et al. *Temas e Problemas Elementares*. [S.l.]: SBM, 2010.
- MARJI, M. *Aprenda a programar com Scratch: uma introdução visual à programação com jogos, arte, ciência e matemática*. [S.l.]: Novatec Editora, 2014.
- PEDROSO, H. A. Uma breve história da equação do 2º grau. *Revista Eletrônica de matemática*, p. 1–13, 2010.
- PINTO, A. S. *Scratch Na Aprendizagem da Matemática No 1. Ciclo do Ensino Básico: Estudo de Caso Na Resolução de Problemas*. Tese (Doutorado) — Universidade do Minho (Portugal), 2010.
- RAMOS, I. R.; ROMÃO, P. N. F. *Introdução ao scratch: Uma nova perspectiva ao ensino de matemática*. 2016.
- ROQUE, T. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- SESSA, C. Iniciação ao estudo didático da álgebra: origens e perspectivas. *São Paulo: Edições SM*, 2009.
- SOUZA, M. F. de; COSTA, C. S. *SCRATCH: Guia Prático para aplicação na Educação Básica*. 1. ed. Rio de Janeiro: Imperial, 2018. 78 p.
- VARELA, H. *Scratch: um jeito divertido de aprender programação*. [S.l.]: Editora Casa do Código, 2017.
- ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. [S.l.]: Penso Editora, 2015.