UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional

**Nelson Braz da Silva Filho**

# O uso da tecnologia como ferramenta facilitadora no ensino de Funções Exponenciais e Progressões Geométricas: Uma Abordagem Relacional com o Auxílio do GeoGebra

RECIFE
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional

**Nelson Braz da Silva Filho**

# O uso da tecnologia como ferramenta facilitadora no ensino de Funções Exponenciais e Progressões Geométricas: Uma Abordagem Relacional com o Auxílio do GeoGebra

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Tarciana Maria Santos da Silva

RECIFE
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

S586u Silva Filho, Nelson Braz da.
O uso da tecnologia como ferramenta facilitadora no ensino de Funções exponenciais e progressões geométricas: uma abordagem relacional com o auxílio do GeoGebra / Nelson Braz da Silva Filho. – Recife, 2024.
f.76 : il.

Orientador: Tarciana Maria Santos da Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Mestrado Profissional em Matemática, Recife, BR-PE, 2024.
Inclui referências.

1.GeoGebra 2. Funções exponenciais 3. Progressão geométrica 4. Matemática – Estudo e ensino 5. Tecnologia educacional I. Silva, Tarciana Maria Santos da, orient. II. Título

CDD 510

NELSON BRAZ DA SILVA FILHO

**“O USO DA TECNOLOGIA COMO FERRAMENTA FACILITADORA NO ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS: UMA ABORDAGEM RELACIONAL COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA”**

*Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Aprovado em 03/09/2024

BANCA EXAMINADORA

**Profa. Dra. Tarciana Maria dos Santos Silva** (Orientadora) – UFRPE

**Profa. Dra. Crislene Santos Da Paixão** - IFS

**Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza**– PROFMAT/UFRPE

*A mimha esposa, filho e família*

# Agradecimentos

À minha esposa, Alessandra, cujo apoio e incentivo foram fundamentais em cada etapa deste processo. À minha família, que sempre esteve ao meu lado, torcendo pelo meu sucesso. Aos amigos de curso Jadson, Cleilton, Jhonatas e Rodrigo, cuja colaboração foi imprescindível para a conclusão dos créditos. À minha orientadora, Dra. Tarciana Maria Santos da Silva, cuja orientação e dedicação foram importantes para o desenvolvimento desta dissertação.

*“A educação é a arma mais*
*poderosa que você pode usar*
*para mudar o mundo."*
*(Nelson Mandela)*

# Resumo

Esta dissertação aborda a utilização de tecnologias educacionais no ensino de Funções Exponenciais e Progressões Geométricas, com ênfase no software GeoGebra. O estudo analisa como ferramentas digitais podem facilitar a compreensão de conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais interativo e visual. A pesquisa foi conduzida em uma escola de ensino médio, onde uma sequência didática foi aplicada com auxílio do GeoGebra para apoiar o ensino dos conteúdos referenciados. Os resultados indicaram que a tecnologia desempenha um papel significativo na melhoria da experiência de aprendizagem, especialmente ao permitir que os alunos explorem conceitos abstratos de maneira mais concreta e dinâmica. O GeoGebra demonstrou ser uma ferramenta eficaz para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, oferecendo aos alunos novas formas de interagir com o conteúdo e de desenvolver um entendimento mais profundo dos tópicos estudados. A dissertação conclui que, quando bem integrado ao currículo, o uso de tecnologias como o GeoGebra pode potencializar o ensino, promovendo um ambiente de aprendizagem mais engajador.

**Palavras-chave**: GeoGebra, Funções Exponenciais, Progressões Geométricas, Ensino de matemática, Tecnologia educacional.

# Abstract

This dissertation addresses the use of educational technologies in the teaching of Exponential Functions and Geometric Progressions, with an emphasis on the GeoGebra software. The study analyzes how digital tools can facilitate the understanding of mathematical concepts.The research was conducted in a high school, where a didactic sequence was applied with the help of GeoGebra to support the teaching of the referenced content. The results indicated that technology plays a significant role in improving the learning experience, especially by allowing students to explore abstract concepts in a more concrete and dynami. GeoGebra has proven to be an effective tool for enriching the teaching-learning process, offering students new ways to interact with the content and to develop a deeper understanding of the topics studied. The dissertation concludes that when well integrated into the curriculum, the use of technologies like GeoGebra can enhance teaching, promoting a more engaging learning

**Keywords**: GeoGebra, Exponential Functions, Geometric Progressions, Teaching mathematics, Educational technology.

# Lista de ilustrações

# Lista de tabelas

# Sumário

# Introdução

Vemos o quão importante a educação tem sido na formação do cidadão, pois é por meio dela que o indivíduo desenvolve competências que ampliam suas possibilidades de atuação no mundo, promovendo crescimento pessoal, social e profissional. Sendo assim a Matemática, desempenha um papel importante nesse processo, especialmente em um cotidiano cada vez mais permeado pela tecnologia. A disciplina de Matemática auxilia na organização do pensamento lógico e no desenvolvimento da capacidade de dedução, além de ajudar em tarefas básicas do dia a dia, como fazer compras ou decidir se é mais vantajoso comprar à vista ou a prazo.

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (Brasil. Ministério da Educação, 2002, p.40)

Durante minha carreira docente no ensino fundamental e médio, tanto na rede pública quanto na privada do estado de Pernambuco, sempre busquei e testemunhei a dedicação dos colegas professores de matemática em encontrar metodologias que tornassem as aulas mais envolventes e eficazes para os alunos. Embora nem sempre seja fácil superar os desafios, como a falta de internet de algumas escolas ou o apoio limitado da equipe pedagógica. Durante as aulas de matemática, podemos observar dois tipos de alunos: aqueles que gostam da disciplina e geralmente têm mais facilidade em aprender, e aqueles que não têm afinidade com a matéria, que infelizmente representam a maioria e enfrentam dificuldades. Mesmo os alunos que gostam de matemática se beneficiam de metodologias inovadoras, mas é especialmente importante encontrar abordagens eficazes para engajar aqueles que têm dificuldades. Além disso, o sistema educacional atual exige que os alunos respondam a exercícios, testes e provas, que muitas vezes não garantem que o conteúdo foi realmente aprendido, mas sim que foi apenas memorizado para o cumprimento das atividades. Como docentes, percebemos que pequenas mudanças em nossas abordagens podem fazer uma grande diferença. Ao implementar novas metodologias e ferramentas, temos observado alunos que antes demonstravam desinteresse pela Matemática começarem a se envolver mais ativamente e experimentarem satisfação ao resolver cálculos que anteriormente julgavam muito difíceis. Esses momentos de superação são inspiradores e mostram que, com a abordagem certa, podemos despertar o interesse e o entusiasmo dos alunos pelo aprendizado. O impacto positivo dessas mudanças vai muito além da sala de aula. Muitos alunos se tornam agentes de transformação em suas próprias vidas, sendo os primeiros de suas famílias a ingressarem em uma universidade, conquistarem uma vaga em um concurso público, empreenderem em negócios próprios, desenvolverem carreiras na área tecnológica, ou mesmo contribuírem ativamente para suas comunidades por meio de projetos sociais e culturais. Essas conquistas demonstram o poder da educação em abrir portas e ampliar horizontes, proporcionando realizações pessoais e coletivas. Esses sucessos nos motivam a continuar aprimorando nossas práticas e a acreditar no poder da educação para transformar vidas. É essa paixão pelo ensino e a busca constante por melhoria que me levaram a ingressar no mestrado, visando desenvolver ainda mais minhas habilidades e contribuir de maneira ativa para o aprendizado dos meus alunos.

Os PCN são documentos que orientam o currículo escolar brasileiro, estabelecendo diretrizes para garantir uma educação de qualidade e equitativa em todo o país. Eles enfatizam a importância de um aprendizado significativo, onde o aluno não apenas memorize, mas compreenda profundamente os conceitos. Ao analisarmos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, observamos que aprender Matemática deve ir além da memorização e reprodução de fórmulas prontas.

Quando o aluno se sente conectado com o conteúdo e compreende a aplicação de determinado teorema, a fixação do conhecimento se torna mais eficiente, pois evitamos a mera repetição mecânica. Dessa forma, ele pode incorporar esse conhecimento em seu contexto, aplicando-o de maneira prática e relevante em situações cotidianas.

Além disso, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, mais especificamente na competência 5, encontramos a seguinte diretriz:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (Brasil. Ministério da Educação, 2018, p.540)

Este trabalho tem como objetivo introduzir os conceitos de função exponencial e progressões geométricas(PG) aos alunos, utilizando o GeoGebra como ferramenta facilitadora. A partir do conhecimento prévio dos alunos sobre funções, potências e sequências, a abordagem se torna significativa ao explorar como esses conceitos se desenvolvem em funções exponenciais e progressões geométricas. O GeoGebra será essencial para visualizar e demonstrar de maneira interativa como esses conceitos se aplicam, proporcionando uma compreensão mais profunda e prática.

Dessa forma, percebemos uma excelente oportunidade de explorar a habilidade “(EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas." (Brasil. Ministério da Educação, 2018, p.541)

Uma das principais motivações deste trabalho foi a análise dos resultados das avaliações educacionais realizadas no Brasil, especialmente por meio do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Desde sua implementação em 1995, o SAEB tem se consolidado como uma ferramenta essencial para avaliar a qualidade da educação no país, abrangendo áreas como Língua Portuguesa e Matemática. Os dados gerados pelo SAEB são fundamentais para subsidiar políticas públicas e orientar práticas pedagógicas que busquem a melhoria do ensino em todas as etapas escolares.

O ano de 2007 marcou a primeira vez que o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) avaliou os alunos do 3º ano do Ensino Médio. Nesse contexto inicial, a média nacional de Matemática foi de 273,86 pontos, evidenciando os desafios enfrentados pelos estudantes para atingir os níveis esperados de aprendizagem nessa etapa escolar. Essa avaliação estabeleceu uma linha de base importante para o acompanhamento do desempenho ao longo dos anos.

Em 2021, o cenário foi avaliado sob condições bastante diferentes, considerando os impactos da pandemia de COVID-19 no sistema educacional. Nesse ano, 17% dos alunos de escolas de Ensino Médio tradicional e integral alcançaram o nível 5 ou superior, que exige habilidades avançadas como trabalhar com Funções Exponenciais. A média nacional, no entanto, permaneceu próxima da observada em 2007, alcançando 272,09 pontos, ainda abaixo do intervalo de 325 a 349 pontos esperado para o nível 5. Esse dado reforça que, apesar de algumas melhorias localizadas, o progresso em larga escala ainda é um desafio.

Esses resultados, apesar de evidenciar algumas melhorias, sugerem que os desafios na educação matemática permanecem. O avanço na proporção de alunos com desempenho elevado em 2021 pode refletir mudanças nas políticas educacionais e práticas pedagógicas, mas também exige uma análise cuidadosa para entender os impactos das diferentes metodologias de avaliação e das adversidades geradas pela pandemia.

Esses resultados destacam a importância de análises cuidadosas e intervenções pedagógicas efetivas para enfrentar as dificuldades estruturais da educação matemática no Brasil. As avaliações do SAEB ao longo dos anos fornecem informações importantes para a formulação de políticas públicas e estratégias educacionais que busquem melhorar o desempenho dos alunos, especialmente em contextos desafiadores como o enfrentado durante a pandemia.

Os índices abaixo do esperado indicam que o modo como o conteúdo é transmitido nem sempre é absorvido de maneira significativa pelos alunos, o que muitas vezes os impede de aplicá-lo em situações do cotidiano, levando à percepção de que a matemática carece de relevância fora da sala de aula. No entanto, é importante evitar a armadilha de pensar que qualquer proposta, por mais inovadora que seja, será a solução para todos os desafios. Mesmo com o uso de tecnologia, como o GeoGebra neste caso, as aulas podem ainda assim refletir características do ensino tradicional, resultando em resultados insatisfatórios. Portanto, além do conteúdo, é fundamental que o professor compreenda o propósito de uma aula significativa e explore todo o potencial de suas metodologias.

Assim, a escolha do tema de pesquisa surgiu da necessidade de responder a algumas questões, sendo a principal delas a possibilidade de ensinar matemática de maneira mais lúdica, incentivando os alunos a mudarem sua percepção sobre a disciplina. A escolha do GeoGebra como ferramenta foi feita para eliminar barreiras entre o conteúdo e os alunos, aproximando-os e demonstrando a viabilidade de relacionar a tecnologia ao ensino de maneira eficaz.

Dessa forma, fundamentado nos argumentos e questões apresentadas, o estudo proposto é: 'O uso da tecnologia como ferramenta facilitadora no ensino de funções exponenciais e progressões geométricas: Uma abordagem relacional com o auxílio do GeoGebra'. Com esta dissertação, busco não apenas explorar, mas também responder questões como: de que maneira o GeoGebra pode facilitar a compreensão dos padrões de crescimento e decrescimento nas funções exponenciais? De que maneira o uso do GeoGebra pode auxiliar na visualização das progressões geométricas e sua relação com as funções exponenciais? Em que medida as aulas de Matemática que utilizam o GeoGebra ajudam os alunos a entenderem melhor as propriedades e aplicações das progressões geométricas? Como podemos garantir que o GeoGebra não apenas complementa, mas transforma a forma tradicional de ensinar funções exponenciais e progressões geométricas? Além disso, é essencial questionar se o GeoGebra proporciona uma abordagem mais eficaz para a resolução de problemas envolvendo progressões geométricas e funções exponenciais. Essas questões orientam a reflexão e análise deste trabalho, sendo discutidas ao longo do texto e exemplificadas por meio da aplicação prática dos conceitos abordados.

# 1 Aprendizagem Significativa

Neste capítulo trataremos da importância e os princípios fundamentais da Teoria da Aprendizagem Significativa , destacando a necessidade de uma compreensão do conceito para evitar sua aplicação superficial no ambiente educacional. Baseando-se nas contribuições de Ausubel e de outros autores, os quais ressaltam que a aprendizagem significativa ocorre quando novas informações são integradas de maneira relevante ao conhecimento prévio do aluno, promovendo um aprendizado de forma mais consistente.

Atualmente, observa-se uma ampla utilização do conceito de aprendizagem significativa em pesquisas voltadas para o aprimoramento do processo educacional. No entanto, antes de adotarmos esse termo de forma generalizada, é importante que façamos uma análise cuidadosa de seu verdadeiro significado. Para isso, é necessário apoiar-nos nas contribuições dos principais autores que desenvolveram a Teoria da Aprendizagem Significativa. Isso nos permite entender que, ao contrário de outras abordagens pedagógicas, avaliar se a aprendizagem significativa foi alcançada com sucesso não é uma tarefa simples, pois envolve não apenas a aquisição de conteúdos, mas também a transformação pessoal e a integração do conhecimento com a experiência prévia do aluno.

Quanto a esses fatos, (COLL, 2002, p.147) destaca que ao empregarmos de maneira tão generalizada a aprendizagem significativa como elemento fundamental para a educação em nossas escolas, sem o devido embasamento teórico, isso pode acarretar confusão.

Dessa forma, faremos uma investigação para explorar o tema com base teórica na aprendizagem significativa, ancorada na teoria de aprendizado de Ausubel. A aprendizagem significativa é definida pelo processo no qual os alunos não apenas memorizam informações isoladamente, mas integram e relacionam essas informações ao seu conhecimento prévio, promovendo um aprendizado mais duradouro e aplicável.

> A aprendizagem significativa envolve a aquisição de novos significados e os novos significados, por sua vez, são produtos dá aprendizagem significativa. Ou seja, a emergência de novos significados no aluno reflete o complemento de um processo de aprendizagem significativa. Primeiramente, nos deteremos um pouco mais neste processo e suas implicações, para depois examinarmos mais detalhadamente tanto a natureza do significado propriamente dito como a sua relação com a aprendizagem significativa. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.34)

Ausubel destaca a importância do material institucional ser potencialmente significativo e organizado de forma clara, facilitando a assimilação e ancoragem do novo conhecimento na estrutura cognitiva do aluno.

Entretanto, é importante observar que a característica fundamental da aprendizagem significativa é que as novas informações apresentadas aos indivíduos devem ser transmitidas de maneira que sejam relevantes à sua estrutura cognitiva; de outra forma, a informação será perdida mais facilmente. As informações são assimiladas de maneira mais eficaz quando estão relacionadas a ideias, conceitos, teoremas e proposições que o indivíduo já aprendeu previamente e estão armazenados em sua rede de conhecimento.

A ideia de uma hierarquia na organização cognitiva auxilia os aprendizes a compreenderem melhor a inter-relação entre diferentes conceitos científicos e como esses se encaixam em um todo coerente. Essa abordagem facilita a assimilação e retenção do conhecimento científico, fornecendo uma base sólida para uma compreensão mais profunda e contextualizada da matéria.

Entendendo o processo de ensino-aprendizado como uma rede de conhecimentos, essa rede é percebida como sendo constantemente incompleta, composta pelo conjunto de conhecimentos presentes na bagagem que o aluno traz consigo. Os nós dessa rede estão em constante modificação, desvinculando-se e ligando-se para formar novos nós com novos conhecimentos. Essa dinâmica sugere que os fios antigos desempenham o papel de pontes necessárias para alcançar os novos conhecimentos.

Consequentemente, à medida que o tempo avança, a rede de conhecimentos adquirida torna-se mais complexa. Esse crescimento contínuo reflete a ideia de que, à medida que mais conexões são estabelecidas entre os conhecimentos, maior se torna a capacidade do aprendiz de compreender e integrar novas informações.

Quando o conhecimento não é adquirido de forma significativa, ou seja, quando uma informação da rede não se conecta com o novo conhecimento do discente, temos uma aprendizagem de forma mecânica. Dessa maneira, a chance do mesmo esquecer o conteúdo aprendido mais facilmente é bem maior, pois a informação é armazenada de forma arbitrária.

Conforme destacado por (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.22-23), a inter-relação entre as modalidades de aprendizagem, mecânica e significativa, é pautada por uma continuidade, eliminando-se a suposta separação entre ambas. A aprendizagem mecânica, longe de ser um fenômeno dissociado, sendo assim um estágio inevitável, desempenhando o papel de alicerce para o subsequente entrelaçamento com novos conhecimentos e sua transição para uma aprendizagem de caráter significativo.

Este princípio pode ser ilustrado de maneira elucidativa ao analisarmos o conceito de funções exponenciais. A compreensão profunda desse tema requer a superação de distintas etapas de aprendizado, proporcionando ao aluno a capacidade de estabelecer conexões e alcançar um patamar de aprendizagem significativa. Dessa forma, os conhecimentos prévios, tais como os relacionados à exponenciação e à definição de função, apresentam-se como pilares fundamentais na edificação do entendimento relativo às funções exponenciais. Este processo, intrinsecamente associado à continuidade entre aprendizagens, se mostra importante para a consolidação de uma abordagem mais abrangente e relacionada no âmbito educacional.

Com o objetivo de otimizar o processo de assimilação das ideias fundamentais para uma aprendizagem significativa, os autores (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.34) sugerem a modificação da estrutura cognitiva dos alunos por meio da introdução de organizadores prévios. Quando o estudante carece de conhecimentos prévios que funcionem como elementos de ligação, os autores sugerem a aplicação de organizadores prévios, consistindo na apresentação de um conteúdo mais abrangente do que será abordado, de forma a estabelecer conexões entre as ideias já presentes na estrutura cognitiva do aluno e aquelas propostas nas tarefas de aprendizagem. Essa abordagem do conteúdo deve ocorrer antes da realização da atividade, servindo como um nó entre o conhecimento existente e o que se pretende aprender, evitando, assim, a mera memorização mecânica e contribuindo para uma aprendizagem significativa.

(AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.120) destacam que a aprendizagem significativa apresenta quatro grandes vantagens sobre a aprendizagem por memorização ou mecânica. A primeira vantagem consiste na retenção prolongada, onde os conhecimentos adquiridos de maneira significativa tendem a ser retidos por períodos mais extensos. Além disso, a assimilação de informações resulta em uma ampliação da diferenciação das ideias ancoradoras, contribuindo para uma maior facilidade na aprendizagem subsequente de materiais relacionados. Mesmo as informações que não são prontamente lembradas após a assimilação deixam um efeito residual no conceito assimilado e, de fato, em todo o conjunto de conceitos inter-relacionados, caracterizando a terceira vantagem.

Por fim, a aplicabilidade em diversos contextos é ressaltada como quarta vantagem, destacando que as informações aprendidas de maneira significativa podem ser aplicadas em uma ampla variedade de novos problemas e contextos, demonstrando a versatilidade e a aplicabilidade prática desse tipo de aprendizagem.

A aprendizagem significativa, conforme proposto por (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980), relaciona novos conhecimentos ao que o aluno já sabe, promovendo uma compreensão mais profunda dos conteúdos. Em contraste, a aprendizagem mecânica baseia-se na memorização e repetição, muitas vezes desvinculadas do conhecimento prévio do aluno, o que resulta em uma compreensão superficial.

Portanto, é importante que o professor identifique o conhecimento prévio dos alunos antes de introduzir novos conteúdos. Essa prática não apenas facilita a compreensão, mas também proporciona uma melhor aprendizagem.

## 1.1 Formas e tipos da aprendizagem significativa

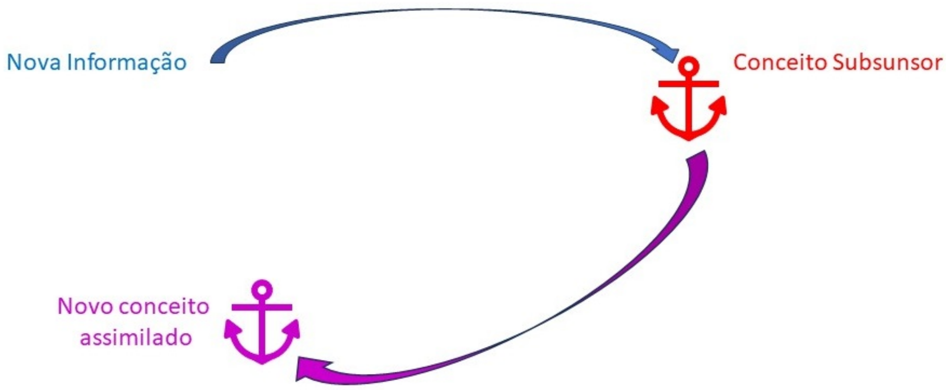
Nesta seção, iremos listar e dissertar um pouco sobre os tipos e formas da aprendizagem significativa onde segundo (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.41), podem se apresentar em três tipos sendo eles: Representacional (de representações), Conceitual (de conceitos) e Proposicional (de proposições). Vale salientar que os mesmos podem ser mescladas e apresentadas de forma conjunta para que possamos obter melhores resultados. Na aprendizagem representacional, ocorre uma associação simbólica primária. Isso pode ser exemplificado ao atribuir significados a símbolos específicos, como entender o papel da base $b$ e do expoente $x$ em uma função exponencial. Sendo necessário assim, a compreensão dos símbolos para a interpretação da função exponencial.

A aprendizagem de conceitos está acerca da representacional, alcançando um nível mais abstrato e abrangente. Considere a aplicação de uma função exponencial em um contexto prático, como modelar o crescimento populacional ao longo do tempo. Não apenas reconhecemos os elementos da função, mas entendemos como eles interagem para representar o fenômeno complexo, evidenciando uma aprendizagem mais profunda.

A aprendizagem proposicional, por sua vez, inverte a lógica da aprendizagem representacional. Ela requer um conhecimento prévio sólido de conceitos e símbolos exponenciais. Em vez de simples associações, seu objetivo é promover uma compreensão mais profunda por meio da soma de conceitos mais ou menos abstratos. Por exemplo, ao compreender as aplicações práticas de funções exponenciais em situações diversas, como modelar decaimentos radioativos, realizamos uma aprendizagem proposicional.

Temos que a incorporação do significado da estrutura cognitiva do aprendizado se da através da assimilação como exemplificada no esquema abaixo:

Figura 1 – Esquema de assimilação




Fonte: Produzido pelo autor

Em outras palavras, o processo de assimilação envolve a integração de uma nova informação, que desejamos assimilar, com um conceito âncora, que representa nosso conhecimento prévio. Ao relacionarmos ambos, o objetivo é que o novo conceito seja assimilado. Vamos ilustrar isso com a assimilação do conceito de potências:

1º **Nova informação:** Potências são operações matemáticas que representam a multiplicação repetida de um número por ele mesmo, um número específico de vezes. Por exemplo, $2^3$ significa multiplicar 2 por ele mesmo três vezes: $2 \times 2 \times 2 = 8$.

2º **Conceito âncora:** Multiplicação é um processo matemático que permite calcular a soma repetida de um número consigo mesmo. Por exemplo, $4 \times 3$ é o mesmo que somar o número 4 três vezes: $4 + 4 + 4 = 12$.

3º **Novo conceito assimilado sobre potências:** As potências são uma extensão da multiplicação, permitindo que representemos operações de multiplicação repetida de forma mais compacta. Em vez de escrever múltiplas multiplicações, podemos usar a notação de potência, como $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$, o que facilita o cálculo e a compreensão de grandes multiplicações de maneira mais eficiente.

Após esta etapa, ocorre a uma nova assimilação, na qual o conceito recém-assimilado, anteriormente nomeado como nova informação, integra-se de forma definitiva ao conceito âncora, impedindo qualquer desassociação posterior. No exemplo mencionado, o conceito de potência torna-se permanentemente incorporado ao conhecimento prévio, enriquecendo a rede Cognitiva de maneira mais prática e econômica do que se fosse armazenado separadamente.

A Aprendizagem Significativa pode adotar diferentes formas:

- **Subordinada:** A informação nova é assimilada pelo conhecimento prévio, alterando-o.
- **Superordenada:** Quando a informação nova é muito abrangente para ser assimilada por qualquer conhecimento prévio existente, ela passa a assimilá-los. Por exemplo, ao aprender o conceito geral de funções, que assimila os conhecimentos prévios pré-existentes de afim, quadrática e exponencial.
- **Combinatória:** A informação nova não é ampla o suficiente para absorver os conhecimentos prévios, mas é demasiadamente abrangente para ser absorvida por eles. Ela se associa de forma mais independente aos conceitos originais. Por exemplo, o conceito de gráfico da função relaciona-se com função afim e funções, mas mantém uma certa independência.

A categorização de aprendizagem significativa em subordinada, superordenada e combinatória reflete as categorias representacional, conceitual e proprosicional.

- Uma aprendizagem Representacional é geralmente Subordinada.
- Uma aprendizagem Conceitual pode ser Subordinada, mas tende mais a ser Superordenada e, menos frequentemente, Combinatória.
- Uma aprendizagem Proposicional tende mais a ser Superordenada ou Combinatória.

Na aprendizagem representacional, predominantemente subordinada, ocorre a diferenciação progressiva, na qual um conceito original é detalhado e especializado progressivamente, evoluindo através de assimilações subordinadas e resultando em um processo de análise.

Por outro lado, em uma aprendizagem com características superordenadas ou combinatórias, tende a ocorrer a reconciliação integrativa, na qual os conceitos originais buscam associações entre si, interligando-se de maneira expansiva e sintética.

Quando ocorre a interação entre o novo material de aprendizagem e os conhecimentos prévios do educando, forma-se uma conexão significativa que pode resultar em mudanças na estrutura cognitiva do aprendiz. Esse processo é chamado de aprendizagem significativa e é caracterizado pela integração do novo conteúdo com subsunçores préexistentes, que podem ser imagens, símbolos ou conceitos já consolidados na mente do aprendiz. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980) destaca que "o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo". Assim, a ideia de uma "aprendizagem transformadora" está associada à capacidade de o aprendiz reorganizar sua compreensão, ampliando sua visão de mundo e aplicando os novos conhecimentos. Entretanto, é importante contextualizar que tal transformação varia de acordo com a profundidade da integração e da relevância do novo aprendizado para o indivíduo.

## 1.2 Aprendizagem significativa no ensino de matemática

De acordo com a aprendizagem significativa, é essencial mostrar aos alunos a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos no cotidiano. Não basta apenas aprender a fórmula de "Bhaskara"; é necessário destacar que, ao adquirir um produto, o valor pago está relacionado a uma função de custo. Além disso, é importante compreender que recipientes possuem capacidade e volume, e que, ao analisar um produto, o comerciante deve considerar o lucro máximo ou mínimo, o que demanda o entendimento de funções quadráticas. São nesses detalhes que o aluno deve perceber como a matemática aprendida na escola se insere em sua vida, tornando a fórmula, muitas vezes criticada, aplicável e relevante. Conforme afirmam (MOREIRA; MASINI, 2001), a aprendizagem significativa é um processo no qual uma nova informação se relaciona a um aspecto relevante da rede de conhecimento do indivíduo, destacando a importância da conexão entre o ensino e o cotidiano do aluno.

Neste trabalho, buscamos aproximar o abstrato do concreto e promover a aprendizagem significativa por meio do uso do software GeoGebra (disponível em (GEOGEBRA, 2001). O GeoGebra permitiu que os alunos visualizassem sequências formadas por funções exponenciais por meio de gráficos e tabelas, atuando como agente facilitador na aprendizagem significativa.

Com o auxílio da calculadora gráfica, os alunos puderam analisar o crescimento e decrescimento das funções, além de verificar as mudanças nos gráficos de forma praticamente instantânea. Isso se mostrou mais eficiente em comparação ao quadro, considerando o tempo de aula limitado no novo Ensino Médio. Dessa forma, a utilização de ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, proporciona uma abordagem mais dinâmica e eficaz, permitindo que os alunos explorem conceitos matemáticos de maneira interativa.

Como alerta (D'AMBROSIO, 1986), embora a tecnologia seja uma ferramenta facilitadora, sua utilização deve ser planejada para evitar problemas. O autor destaca que, para muitos alunos, a tecnologia é uma presença orgânica desde os primeiros meses de vida, destacando a importância de incorporá-la de maneira pensada e eficaz no processo educacional.

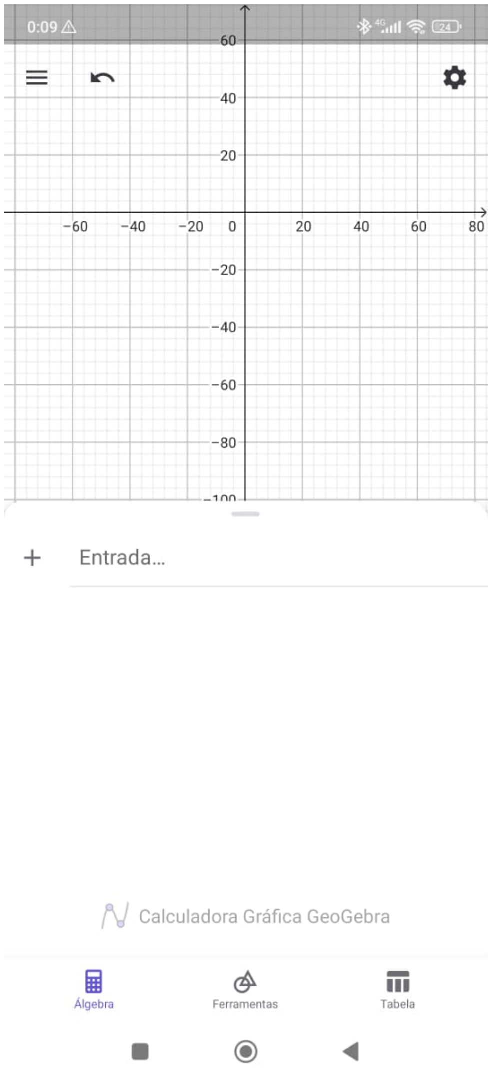
A escolha do Geogebra como calculadora gráfica foi devido à sua versatilidade em lidar com diversos conteúdos, tanto de álgebra quanto de geometria. Como pretendemos abordar as funções exponenciais, o programa é muito útil, pois nos mostra o gráfico das funções e suas respectivas tabelas de valores para as variáveis desejadas, facilitando a visualização das curvas, seus crescimentos e decréscimos.

Para o autor (PACHECO, 2019, p.199), O GeoGebra é um software de matemática dinâmica, que reúne Álgebra e Geometria. É desenvolvido para aprender e ensinar matemática nas escolas por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores", o autor ainda relata que,

> com o uso do GeoGebra, é possível dinamizar e enriquecer as atividades no processo de ensino e aprendizagem da matemática, pois é um software de Geometria Dinâmica, onde são contempladas as construções de pontos, vetores, segmentos, retas e secções cônicas. Por meio do GeoGebra é possível analisar equações, relacionar variáveis com números, encontrar raízes de equações. Permite ainda associar uma expressão algébrica à representação de um objeto da Geometria.(PACHECO, 2019, p.199)

A seguir, temos um exemplo da tela do celular vista pelos alunos ao abrir o aplicativo. Como a escola não dispunha de laboratório de informática e como forma de facilitar a ambientação dos discentes, optamos por utilizar o aplicativo para celular, já que a escola possuía rede Wi-Fi, os alunos puderam acompanhar de seus smartphones.

Figura 2 – Tela inicial do aplicativo GeoGebra




Fonte: Produzido pelo autor

O conteúdo abordado nesta dissertação foi o estudo das funções exponenciais, e um dos objetivos era vincular esse tema com as progressões geométricas, já que o software nos permite analisar uma sequência de pontos relacionados entre os valores de $x$ e seu $f(x)$. Ou seja, o GeoGebra se mostra não apenas como uma ferramenta eficaz para o ensino de matemática, mas também como um facilitador da interação entre professor e aluno.

## 1.3 Tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC)

Em relação às TDIC's, trata-se de um conjunto de tecnologias digitais que têm remodelado significativamente a maneira como obtemos informações e nos comunicamos.

> A presença da linguagem digital, expressa em múltiplas Tecnologias da Informação e Comunicação, vem impondo mudanças no modo como obtemos informação e nos comunicamos, e a chegada desses recursos na escola nos faz refletir sobre seu uso em sala de aula, analisando de que forma essas ferramentas podem contribuir para uma formação do aluno compatível com os avanços proporcionado pela sociedade da informação.(LOPES, 2013, p.633)

Ou seja a introdução desses recursos nas escolas nos instiga a refletir sobre sua aplicação em sala de aula, visto que essas ferramentas contribuem com a formação dos alunos, uma vez que estamos inseridos em uma sociedade cada vez mais tecnológica. A presença crescente das Tecnologias da Informação e Comunicação na educação oferece novas oportunidades de aprendizado, permitindo que os alunos acessem uma ampla gama de recursos educacionais, explorem diferentes perspectivas e desenvolvam habilidades essenciais para o século XXI, como pensamento crítico, resolução de problemas e colaboração.

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.(Brasil. Ministério da Educação, 2018, p. 9)

A BNCC ressalta a importância de desenvolver competências digitais que vão além do simples uso técnico de ferramentas tecnológicas. Nesse contexto, as tecnologias digitais devem ser compreendidas criticamente e utilizadas de maneira ética e significativa, não apenas para consumir, mas também para produzir conhecimento e resolver problemas. A integração dessas ferramentas às práticas escolares e sociais promove o protagonismo e a autoria dos estudantes, incentivando-os a exercerem autonomia e reflexão no uso dessas tecnologias. Dessa forma, a BNCC visa preparar cidadãos capazes de atuar em um mundo conectado, onde as tecnologias não são apenas instrumentos, mas também elementos essenciais de comunicação e interação no cenário contemporâneo.

> Não há dúvida de que as novas tecnologias de comunicação e informação trouxeram mudanças consideráveis e positivas para a educação. Vídeos, programas educativos na televisão e no computador, sites educacionais, softwares diferenciados transformam a realidade da aula tradicional, dinamizam o espaço de ensino-aprendizagem, onde, anteriormente, predominava a lousa, o giz, o livro e a voz do professor.(KENSKI, 2007, p.50)

Tendo em vista que o uso dessas ferramentas pode tornar o processo de ensino e aprendizagem mais dinâmico, envolvente e personalizado, atendendo às necessidades individuais dos alunos e promovendo a construção do conhecimento. No entanto, é importante que o uso das tecnologias da informação e comunicação na sala de aula seja cuidadosamente planejado e integrado ao currículo de forma significativa.

Ainda em sua obra *Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação* a autora (KENSKI, 2007, p.94-95) enfatiza que para que as Tecnologias da Informação e Comunicação sejam aplicadas de forma eficaz os educadores devem ser capacitados para utilizar essas ferramentas promovendo práticas pedagógicas inovadoras e alinhadas aos objetivos educacionais. Além disso, é importante considerar questões relacionadas à acessibilidade e equidade, garantindo que todos os alunos tenham oportunidades iguais de aprendizado.

A integração das TDIC's no processo de ensino e aprendizagem está diretamente relacionada à abordagem pedagógica adotada. Autores como (PONTE, 2003) ressaltam a importância dos professores de Matemática dominarem as ferramentas das TDIC's em suas salas de aula, incluindo softwares educacionais específicos para sua disciplina ou para a educação de forma mais ampla.

A autora (KENSKI, 2007, p.41) ressalta que tais tecnologias não se limitam a ser suportes tecnológicos na sala de aula; elas moldam nossa forma de pensar, interagir e adquirir conhecimento. Segundo ela, meios de comunicação como televisão e computador têm redefinido a educação, promovendo novas formas de interação entre professores e alunos, o que facilita a assimilação do conteúdo.

Nesse contexto, o aluno utiliza a tecnologia para resolver problemas, executando diversas tarefas como desenhar, escrever, construir e analisar. A construção do conhecimento ocorre à medida que o aluno busca novos conteúdos e estratégias para complementar o que já sabe sobre o assunto estudado.

A diferença fundamental em uma atividade com o uso de software é a capacidade de movimentar objetos e, a partir disso, permitir ao aluno investigar as mudanças em sua construção. Ele levanta hipóteses, questionando se a rede permanece inalterada ou se um simples movimento pode modificar suas características originais, entre outras questões, percebendo assim padrões e regularidades.

Para a elaboração das atividades da sequência didática, fundamentadas no uso de ferramentas digitais como o software GeoGebra, adotamos uma abordagem investigativa. Essa perspectiva envolve um constante diálogo entre as práticas de investigação no ensino de Matemática e a aplicação de recursos tecnológicos em sala de aula. Investigar significa explorar problemas, identificar estratégias de resolução e descobrir relações entre objetos matemáticos, com o objetivo de alcançar generalizações sobre o tema em estudo.

# 2 Funções exponenciais e suas características

Neste capítulo, estudaremos as funções exponenciais e suas características, que estão presentes em muitos ramos da matemática e de suas aplicações práticas. Nosso objetivo é fornecer uma compreensão da definição e das características dessa função.

## 2.1 Definição da função exponencial

***Definição:*** Seja $a$ um número real positivo e diferente de 1. A função exponencial de base $a$, denotada por $f(x) = a^x$, é uma função que mapeia o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, no conjunto dos números reais positivos, $\mathbb{R}^+$. Ou seja, $f$ é uma função definida como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, onde para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ é dado por $a^x$.

Uma função exponencial tem as seguintes propriedades:

**Propriedade 2.1:** A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

*Demonstração.* Seja $M \in \mathbb{R}^+$ um valor arbitrariamente grande. Queremos encontrar um valor $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x > M$. Como a função exponencial $f(x) = a^x$ cresce rapidamente à medida que $x$ aumenta (visto que $a > 1$), sabemos que $a^x \to \infty$ conforme $x \to \infty$.

Para encontrar o valor de $x$ correspondente a $a^x > M$, tomamos o logaritmo de ambos os lados da desigualdade:

$$a^x > M \quad \Rightarrow \quad x > \log_a(M)$$

Como $a > 1$, o logaritmo $\log_a(M)$ está bem definido e crescente. Portanto, para qualquer valor de $M$, podemos sempre escolher um $x$ suficientemente grande tal que $x > \log_a(M)$, o que implica que $a^x > M$.

Assim, para qualquer $M \in \mathbb{R}^+$, existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x$ ultrapassa $M$, mostrando que a função $f(x) = a^x$ não possui limite superior, ou seja, é ilimitada superiormente. $\square$

**Propriedade 2.2:** A função exponencial é contínua.

*Demonstração.* Isso significa que, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$, podemos tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto desejarmos, desde que $x$ esteja suficientemente próximo de

$x_0$. Em outras palavras, o limite de $a^x$ quando $x$ tende a $x_0$ é igual a $a^{x_0}$. Formalmente, $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. □

Podemos entender essa ideia de forma intuitiva ao observar que, para valores de $x$ próximos a $x_0$, a função exponencial $a^x$ varia de maneira contínua, ou seja, não há saltos ou quebras em seu comportamento. Essa continuidade é essencial para garantir que, à medida que fazemos $x$ se aproximar de $x_0$, o valor de $a^x$ também se aproxime de $a^{x_0}$ de forma controlada. Assim, a definição de limite da função exponencial é coerente com sua natureza contínua, o que formaliza esse conceito.

*Demonstração.* Para provar isso, podemos escrever $x = x_0 + h$, onde $h$ é pequeno. Então, $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|$. Conforme $h$ se aproxima de 0, $a^h$ se aproxima de 1, garantindo que $|a^h - 1|$ possa ser tão pequeno quanto desejado. Como $a^{x_0}$ é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0}|a^h - 1|$ tão próximo de 0 quanto quisermos. Portanto, $\lim_{x\to x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0$, o que implica $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. □

**Propriedade 2.3:** A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, onde $a > 1$ ou $0 < a < 1$, é sobrejetiva.

*Demonstração.* Primeiro, vamos entender o que significa uma função ser sobrejetiva. Quando dizemos que a função exponencial é sobrejetiva, isso quer dizer que para qualquer número positivo $b$, existe algum número real $x$ tal que $a^x = b$.

**1º Caso:** $a > 1$

Para o caso em que $a > 1$, a função exponencial cresce rapidamente à medida que aumentamos o valor de $x$. Podemos pensar em escolher potências de $a$, que são números que crescem progressivamente, e se aproximam do valor $b$. A continuidade da função garante que conseguimos aproximar $a^x$ do número $b$ tão próximo quanto quisermos. Então, mesmo que $x$ não seja um número inteiro, existe sempre um valor real $x$ tal que $a^x = b$. Isso acontece porque a função exponencial nunca "pula"valores, ela é contínua e sempre cobre todos os números positivos. Portanto, para $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é sobrejetiva.

**2º Caso:** $0 < a < 1$

Agora, se considerarmos o caso em que $0 < a < 1$, a situação é um pouco diferente, mas ainda assim a função continua sendo sobrejetiva. Nesse intervalo, a função exponencial decresce à medida que $x$ aumenta. Isso significa que conforme aumentamos $x$, o valor de $a^x$ se aproxima de zero, mas nunca o alcança. Da mesma forma, para valores negativos de $x$, $a^x$ cresce, pois estamos elevando uma fração a expoentes negativos, o que inverte a fração. Mesmo assim, para qualquer valor positivo $b$, existe um $x$ tal que $a^x = b$.

Mais uma vez, por ser contínua, a função $f(x) = a^x$ cobre todos os valores positivos, seja decrescendo ou crescendo, o que garante sua sobrejetividade para $0 < a < 1$ também.

Sendo assim tanto para $a > 1$, quanto para $0 < a < 1$ a função exponencial $f(x) = a^x$ consegue cobrir todos os números positivos, confirmando que ela é sobrejetiva.

$\square$

Assim, essa propriedade da função exponencial tanto em cenários de crescimento quanto de decaimento. Para $a > 1$, ela modela fenômenos de crescimento exponencial, como o aumento populacional ou o crescimento econômico. Já para $0 < a < 1$, a função é usada para descrever processos de decaimento, como a desintegração radioativa ou o esfriamento de um objeto. Em ambos os casos, a continuidade da função e sua capacidade de atingir qualquer valor positivo fazem dela uma ferramenta bastante utilizada nas ciências e na matemática.

### 2.1.1 Gráfico da função exponencial:

A função exponencial $f(x) = a^x$ é uma ferramenta matemática que descreve o crescimento ou decrescimento exponencial de uma quantidade em relação a uma base $a$, onde $a$ é uma constante positiva diferente de zero. Ao analisarmos o seu gráfico e propriedades, podemos destacar alguns pontos essenciais:

Primeiramente, a função é sempre positiva para qualquer $x$ real, já que $a^x$ é maior que zero para todos os valores de $x$. Isso significa que o gráfico de $f(x)$ está acima do eixo horizontal $x$ em todo o seu domínio.

Além disso, a interseção da curva com o eixo $y$ ocorre no ponto onde a ordenada (eixo y) é 1. Este ponto é caracterizado por $f(0) = a^0 = 1$, independentemente do valor da base $a$. Essa propriedade importante, pois estabelece que toda função exponencial passa pelo ponto $(0, 1)$.

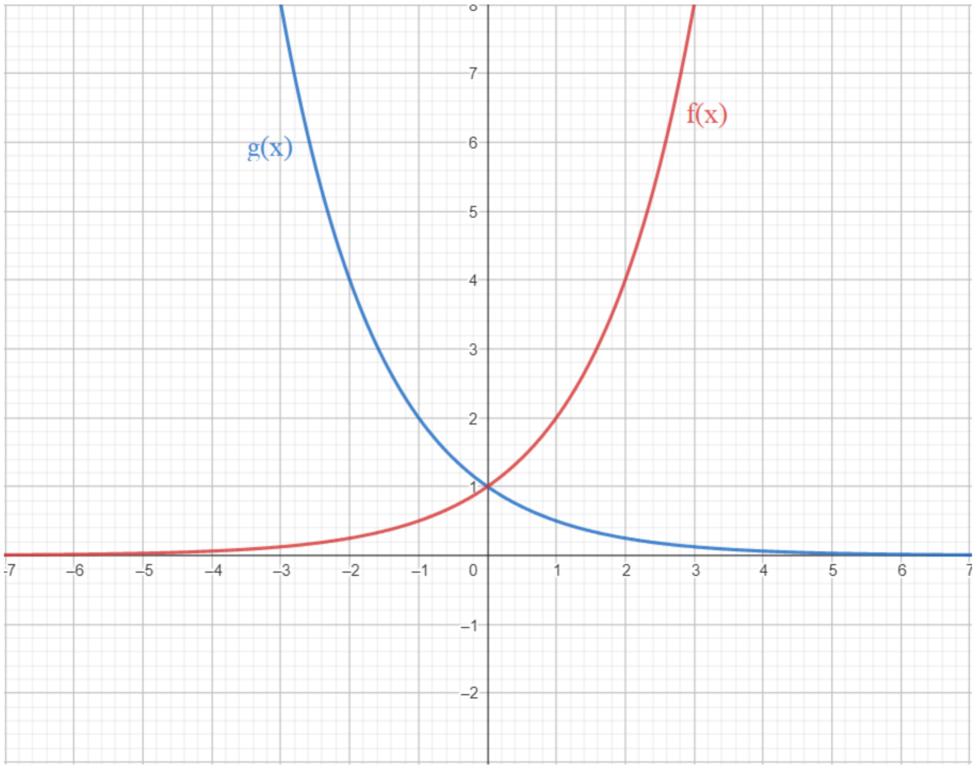
O comportamento da função em relação à base $a$ determina se $f(x)$ é crescente ou decrescente: - Quando $a > 1$, a função é crescente. Isso significa que, à medida que $x$ aumenta, $f(x)$ cresce exponencialmente mais rápido. Ou seja, se $x_1 < x_2$, então $a^{x_1} < a^{x_2}$. - Quando $0 < a < 1$, a função é decrescente. Neste caso, à medida que $x$ aumenta, $f(x)$ diminui exponencialmente. Assim, se $x_1 < x_2$, então $a^{x_1} > a^{x_2}$.

### 2.1.2 Caracterização da funções exponenciais

Durante o ensino médio, as Funções Exponenciais começam a aparecer com mais frequência nas aulas. Compreender essa função nos últimos anos escolares prepara os alunos para enfrentar desafios acadêmicos e profissionais futuros.

É importante destacar que, uma vez que o aluno identifica que o exercício em questão envolve uma função exponencial, o procedimento matemático se torna relativamente simples. No entanto, se o aluno não tiver esse conhecimento prévio, a resolução se torna

Figura 3 – Gráfico das funções $f(x) = 0.5^x$ e $g(x) = 2^x$




Fonte: Produzido pelo autor

mais complicada. Para que o estudante possa fazer essa identificação e escolha de maneira correta, é fundamental que ele entenda as características específicas de cada tipo de função. Nesta seção, exploraremos as características que definem as funções exponenciais.

**Teorema 2.4:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função crescente ou decrescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f(nx) = [f(x)]^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;
3. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

*Demonstração.* Provaremos as implicações $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

**a) $1 \Rightarrow 2$:**

Observamos que a hipótese 1 implica que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, $rn = m$, então podemos escrever $f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$. Logo,

$$f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r.$$

Assim, se definirmos $f(1) = a$, temos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Para completar a demonstração de que 1 $\Rightarrow$ 2, suponhamos, para fixar as ideias, que $f$ seja crescente. Assim, $1 = f(0) < f(1) = a$ e $a > 1$. Vamos admitir, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Seja $f(x) < a^x$, então em todo intervalo $(0, +\infty)$ existe uma potência $a^r$ com $r$ racional tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como $f$ é crescente, se $f(x) < f(r)$, concluímos que $x < r$. Por outro lado, também temos $a^r < a^x$, então $r < x$. Esta contradição completa a prova de que 1 $\Rightarrow$ 2.

**b) 2 $\Rightarrow$ 3:**

Suponha que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$.

Para demonstrar que 2 implica 3, precisamos mostrar que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Dado que $f(x) = a^x$, então temos:

$$f(x + y) = a^{x+y}.$$

Por outro lado,

$$f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Assim, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, o que completa a prova de que 2 implica 3.

Portanto, provamos que 2 $\Rightarrow$ 3 para a função exponencial definida por $f(x) = a^x$, onde $a = f(1)$.

Para provar que 3 implica 1, vamos usar a definição dada no Teorema 2.4, onde $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

**c) 3 $\Rightarrow$ 1:**

Suponha que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Queremos mostrar que $f(nx) = [f(x)]^n$ para todo número inteiro $n$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

- **Base da indução (n = 1):** Para $n = 1$, temos trivialmente $f(x) = f(x)$, o que é verdadeiro.

- **Passo da indução:** Suponha que a relação seja verdadeira para um $n \geq 1$, ou seja, $f(nx) = [f(x)]^n$.

  Queremos mostrar que $f((n + 1)x) = [f(x)]^{n+1}$.

  $$\begin{aligned} f((n+1)x) = f(nx + x) &= f(nx) \cdot f(x) \quad \text{(por 3)} \\ &= [f(x)]^n \cdot f(x) \quad \text{(pela hipótese de indução)} \\ &= [f(x)]^{n+1}. \end{aligned}$$

  Portanto, por indução, concluímos que $f(nx) = [f(x)]^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

Assim, provamos que 3 implica 1 para a função exponencial definida por $f(x) = a^x$, onde $a = f(1)$. □

Em seguida, vamos explorar as propriedades das funções exponenciais. O **Teorema 2.4**, será o ponto de partida de nossa análise. A demonstração deste teorema nos ajudará a entender melhor como as funções exponenciais funcionam.

O autor (LIMA, 2013, p.159) caracteriza uma função exponencial da seguinte forma: seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $g$ é do tipo exponencial quando $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a$ e $b$ são constantes positivas. Se $a > 1$, $g$ é crescente; se $0 < a < 1$, $g$ é decrescente.

Se a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo exponencial de base $a$, então para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h \quad \text{e} \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1$$

dependem apenas de $h$, mas não de $x$.

Isso significa que, para uma função exponencial, a razão entre o valor da função em $x + h$ e o valor da função em $x$ é sempre $a^h$. Ou seja, ao mover-se um certo $h$ ao longo do eixo $x$, o valor da função $g$ é multiplicado por $a^h$, independentemente de onde se começa no eixo $x$.

A segunda relação $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = a^h - 1$ mostra que a variação relativa na função $g$, ao mover-se $h$ unidades ao longo do eixo $x$, é sempre $a^h - 1$. Novamente, esta variação depende apenas de $h$ e não de $x$.

Essas propriedades são características fundamentais das funções exponenciais. Elas mostram que a taxa de crescimento ou decrescimento de uma função exponencial é constante em termos relativos e depende apenas da diferença $h$ e não da posição inicial $x$.

O próximo teorema caracteriza uma função do tipo exponencial, fornecendo uma condição que uma função deve satisfazer para ser considerada exponencial.

**Teorema 2.5:** Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função crescente ou decrescente, tal que, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, o acréscimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de $h$, mas não de $x$. Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

*Demonstração.* ($\Rightarrow$)

Supomos que a função, $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$ é independente de $x$. Isso significa que $\varphi(h)$ depende apenas de $h$, não importa o valor de $x$. Basicamente, a relação $\frac{g(x+h)}{g(x)}$ é a mesma para qualquer $x$ escolhido.

Para simplificar, substituímos $g(x)$ por uma nova função $f(x)$, onde $f(x) = \frac{g(x)}{b}$ e $b = g(0)$. Isso nos dá uma função $f$ que ainda é crescente ou decrescente e agora temos que $f(0) = 1$ porque:

$$f(0) = \frac{g(0)}{b} = \frac{b}{b} = 1.$$

Considerando a relação $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$ e sabendo que $\varphi(h)$ é independente de $x$, podemos colocar $x = 0$ para simplificar:

$$\varphi(h) = \frac{f(0+h)}{f(0)} = \frac{f(h)}{1} = f(h).$$

Portanto, $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$.

A função $f$ cumpre que $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$. Isso quer dizer que o valor de $f$ em $x+h$ é o produto dos valores de $f$ em $x$ e $h$. Em termos simples, a função se "multiplica" quando somamos os argumentos.

Pelo **Teorema 2.4**, sabemos que uma função que satisfaz $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ deve ser da forma $f(x) = a^x$. Logo, nossa função $f$ é:

$$f(x) = a^x.$$

($\Leftarrow$) Temos que, $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, podemos agora escrever $g(x)$ em termos de $f(x)$:

$$g(x) = b \cdot f(x) = b \cdot a^x.$$

Portanto, mostramos que a função original $g(x)$ tem a forma exponencial desejada:

$$g(x) = b \cdot a^x.$$

Assim, provamos que se $g$ é uma função crescente ou decrescente e o acréscimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ depende apenas de $h$, então $g(x)$ deve ser uma função exponencial. $\square$

## 2.2 Relação entre funções exponenciais e progressões geométricas:

Nesta seção, investigaremos a relação entre as funções exponenciais e as progressões geométricas, destacando suas conexões fundamentais.

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b \cdot a^x$, caracterizada como uma função exponencial. Seja $(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n\ ,\ \ldots)$ uma Progressão Aritmética com uma razão $h$. Podemos expressar os termos dessa sequência como $x_{n+1} = x_n + h$.

Avaliando a função exponencial nos termos da Progressão Aritmética, obtemos:

$$(f(x_1) = b \cdot a^{x_1},\ f(x_2) = b \cdot a^{x_2},\ \ldots\ ,\ f(x_n) = b \cdot a^{x_n},\ \ldots)$$

Observamos que a sequência dessas funções constitui uma progressão geométrica de razão $a^h$. Isso pode ser demonstrado pela relação:

$$f(x_{n+1}) = b \cdot a^{x_{n+1}} = b \cdot a^{x_n + h} = b \cdot a^{x_n} \cdot a^h = f(x_n) \cdot a^h.$$

Note que o $(n+1)$-ésimo termo da Progressão Aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + n \cdot h$, segue-se que $f(x_{n+1}) = f(x_1) \cdot A^n$, onde $A = a^h$. No caso de $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$ , dessa forma $f(x_{n+1}) = b \cdot A^n$.

Essa conclusão é importante para que possamos investigar os casos que temos crescimento ou decrescimento exponencial. Utilizaremos como exemplo o caso de um investimento cujo capital inicial é $c_0$ aplicado a uma taxa de juros fixos, após decorrido um período de tempo $t$, o capital resultante é dado através da expressão $c(t) = c_0.a^t$. Ao verificarmos essa conta nos períodos $t = 0$ , $t = h$ , $t = 2h$ , $t = 3h$ , ... termos os seguintes capitais:

Figura 4 – Substituindo $a^h$ por A

$$\begin{array}{lcl}
\bullet\ c(0) = c_0 & & \bullet\ c(0) = c_0 \\
\bullet\ c(h) = c_0 \cdot a^h & & \bullet\ c(h) = c_0 \cdot A^1 \\
 & \xrightarrow{A = a^h} & \\
\bullet\ c(2h) = c_0 \cdot a^{2h} & & \bullet\ c(2h) = c_0 \cdot A^2 \\
\bullet\ c(3h) = c_0 \cdot a^{3h} & & \bullet\ c(3h) = c_0 \cdot A^3
\end{array}$$

Fonte: Produzido pelo autor

Logo ao analizarmos a evolução do saldo em intervalos de tempos iguais a h unidades de tempo, é dado pela progressão geométrica:

$$(c_0\ ,\ c_0 \cdot A^1\ ,\ c_0 \cdot A^2\ ,\ c_0 \cdot A^3\ ,\ \dots)$$

Segundo o autor (LIMA, 2013, p.161), a progressão geométrica acima encontrada é uma característica das funções exponenciais e é formalizada pelo teorema a seguir o qual iremos demonstrar.

**Teorema 2.6:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função injetiva, crescente ou decrescente que transforma toda Progressão Aritmética $(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_n\ ,\ \dots)$ numa progressão geométrica $(y_1\ ,\ y_2\ ,\ \dots\ ,\ y_n\ ,\ \dots)$ onde $y_n = f(x_n)$ . Se pusermos $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ teremos $f(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

*Demonstração.* Seja $b = f(0)$. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{f(x)}{b}$. Esta função é contínua crescente ou decrescente, transformando Progressões Aritméticas em progressões geométricas, e agora, com a adição da condição $g(0) = 1$.

Para um $x$ pertencente aos reais arbitrários, os termos da sequência $(\ x\ ,\ 0\ ,\ -x)$ constitui uma Progressão Aritmética. Logo, $(\ g(x)\ ,\ g(0)\ ,\ g(-x)\ )$ são os termos de uma progressão geométrica com razão $g(-x)$. Consequentemente, $g(-x) = \frac{1}{g(x)}$.

Considerando $n$ como um número natural e $x$ como um número real, a sequência $(0\ ,\ x\ ,\ 2x\ ,\ \ldots\ ,\ nx\ ,\ \ldots)$ constitui uma Progressão Aritmética de razão $x$. Portanto, $(1\ ,\ g(x)\ ,\ g(2x)\ ,\ \ldots\ ,\ g(nx)\ ,\ \ldots)$ forma uma progressão geométrica com razão $g(x)$. O termo $(n+1)$-ésimo dessa progressão é $g(nx) = g(x)^n$.

De forma análoga a $n$, se $-n$ é um inteiro negativo, então $g(-nx) = \frac{1}{g(nx)} = \frac{1}{g(x)^n = g(x)^{-n}}$. Consequentemente, $g(-nx) = g(x)^{-n}$ para todos os $n$ inteiros e $x$ reais.

Sendo assim, considerando $a = g(1) = \frac{f(1)}{f(0)}$, conclui-se que $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = b \cdot a^x$ para todo $x$ pertencente aos reais.

$\square$

# 3 Procedimento da Abordagem

As características demográficas, os conhecimentos prévios e as atitudes em relação ao uso de tecnologias educacionais influenciam diretamente a dinâmica de aprendizagem e os resultados obtidos. A descrição detalhada do perfil dos participantes também ajuda a contextualizar os achados e a discutir a generalizabilidade dos resultados para outros contextos educacionais.

O estudo foi conduzido com quatro turmas do 1º ano do ensino médio, totalizando 180 alunos, sendo 45 alunos por turma, no turno da manhã. A faixa etária dos alunos varia entre 13 e 17 anos, e as turmas são mistas, com uma distribuição equilibrada entre meninos e meninas.

Uma parte significativa dos alunos possui um desempenho acadêmico mediano, caracterizado pela compreensão limitada de conceitos matemáticos, interesse moderado por tecnologias educacionais e dificuldades específicas na aplicação prática do conhecimento. Isso sugere a necessidade de intervenções pedagógicas que reforcem a aprendizagem de forma prática. Embora alguns apresentem dificuldades específicas na compreensão de conceitos matemáticos abstratos, esse panorama sugere uma discrepância no nível de compreensão matemática, o que pode influenciar a receptividade e o desempenho na sequência didática proposta.

Antes da implementação da sequência didática, foi realizada escuta breve para avaliar o interesse dos alunos em matemática e no uso de tecnologias digitais, como o GeoGebra. Os resultados dessa escuta indicaram um interesse moderado, com alguns alunos demonstrando entusiasmo pelo uso de ferramentas digitais. Esse dado é relevante, pois sugere que, embora nem todos os alunos estejam igualmente motivados, há uma abertura para métodos de ensino que integrem tecnologias digitais.

Os alunos já tiveram exposições anteriores aos conceitos básicos de funções e progressões geométricas, mas muitos apresentam déficit na aplicação prática desses conhecimentos. Sendo assim, durante a elaboração e a execução da sequência didática foi verificado a necessidade de reforçar esses conceitos de maneira prática e contextualizada, utilizando ferramentas que possam facilitar a visualização e a compreensão, como o GeoGebra.

## 3.1 Ambiente e contexto da pesquisa

A pesquisa foi realizada em uma Escola de Referência do Ensino médio, localizada na região metropolitana de Recife. A instituição conta com 13 salas de aula, auditório, biblioteca e um laboratório misto de Natureza e Matemática.

No contexto educacional, a escola enfrenta desafios comuns, refletidos nos índices de aprendizagem. Algumas ações visam à melhoria desses índices, buscando promover a qualidade do ensino. Para abordar as dificuldades dos alunos e aprimorar o desempenho escolar, foi utilizado o GeoGebra, como uma ferramenta que possibilita uma abordagem mais interativa no ensino de Matemática.

A escola dispõe de rede Wi-Fi, facilitando a implementação da sequência didática, visto que os alunos precisaram baixar o GeoGebra em seus dispositivos móveis, já que não há laboratório de informática disponível. Além disso, a instituição conta com equipamentos como aparelho de data show, essenciais para a implementação.

A pesquisa foi conduzida ao longo do mês de agosto de 2023, e as turmas, que têm 5 aulas semanais, com dois encontros em um dia e três em outro, participaram de encontros organizados da seguinte forma: análise de interesse e introdução a funções exponenciais (2 aulas); exploração de funções exponenciais com o GeoGebra (4 aulas); relações entre funções exponenciais e progressões geométricas (4 aulas); resolução de problemas (4 aulas); e avaliação final (4 aulas).

## 3.2 Primeiro momento: introdução às funções exponenciais.

No primeiro encontro, que ocupou duas aulas com cada turma, realizamos uma sondagem para avaliar o conhecimento prévio dos estudantes sobre os conceitos fundamentais. Isso porque a aprendizagem significativa depende de os alunos possuírem os conhecimentos básicos para fazer conexões com novas informações.

Como afirmado por (ZABALA, 1998, p.199), "Conhecer o que cada aluno sabe, sabe fazer e como é, é o ponto de partida que deve nos permitir, em relação aos objetivos e conteúdos de aprendizagem previstos, estabelecer o tipo de atividades e tarefas que devem favorecer a aprendizagem de cada menino e menina".

Ao percebermos que muitos alunos enfrentavam dificuldades para recordar os conceitos essenciais, decidimos revisá-los no início da sequência. Foi então que introduzimos os conceitos de potências, sequências e funções, destacando sua relevância tanto na matemática quanto em aplicações práticas.

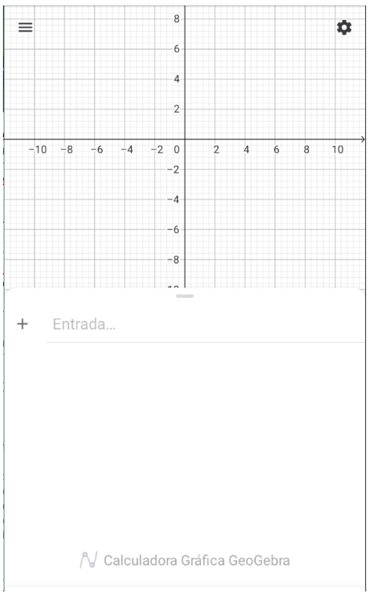
Esses conceitos são fundamentais para compreender as funções exponenciais, que são modelos de crescimento ou diminuição. Elas nos permitem entender como certos fenômenos se desenvolvem rapidamente, como o crescimento de uma população de bactérias ou a degradação da massa de um elemento radioativo ao longo do tempo. Ao compreendermos as funções exponenciais, podemos prever e entender uma variedade de fenômenos em diferentes áreas, desde a matemática até a biologia.

Finalizamos o nosso primeiro encontro com a percepção de que os alunos se mostraram bastante engajados e curiosos sobre como seria uma aula com o auxílio de uma tecnologia. Como destacado por (LIMA; ROCHA, 2022, p.733), "Durante a utilização das tecnologias na sala de aula, nota-se que os alunos se transformam em críticos e autônomos em seu processo de ensino e aprendizagem, expondo seus pensamentos, fazendo indagações e tirando conclusões". Esta constatação corrobora com a experiência observada em nossa prática educativa, onde a integração das tecnologias digitais não apenas enriquece o ambiente de aprendizagem com recursos adicionais, mas também promove uma participação mais ativa dos alunos, permitindo que se tornem mais críticos e autônomos.

## 3.3 Segundo momento: explorando funções exponenciais com o GeoGebra.

Neste segundo momento da sequência didática, que demandou quatro aulas, teremos uma breve explicação sobre a interface do GeoGebra e suas principais ferramentas. Nele os alunos foram introduzidos à calculadora gráfica Geogebra, a qual será instalada em seus celulares, uma vez que a escola não possui laboratório de informática. A ideia é que os alunos possam utilizar o software não apenas para funções exponenciais, mas também que desenvolvam familiaridade com ele para aplicar em outras situações, considerando sua versatilidade e potencial para diversas áreas do conhecimento.

Figura 5 – Tela de início do GeoGebra



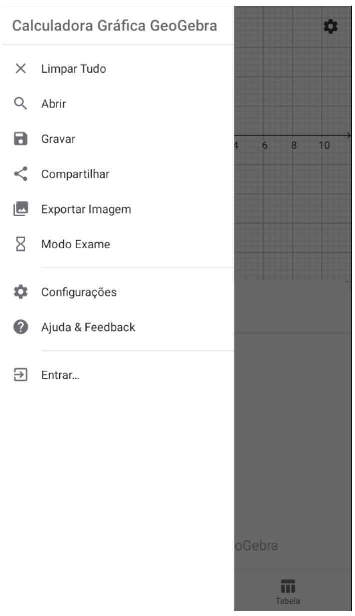

Fonte: Produzido pelo autor

Na tela inicial do GeoGebra, os alunos são introduzidos ao ambiente matemático do software. Ao clicarem na barra de entrada, eles foram instruídos de que poderiam inserir diversos elementos matemáticos, desde letras e letras gregas até números, funções e pontos. Esta funcionalidade não apenas facilita a entrada de dados, mas também encoraja a experimentação e a construção de conceitos matemáticos de forma interativa e intuitiva.

A barra de entrada no GeoGebra representa um ponto de partida para aguçar a criatividade e o conhecimento matemático dos alunos. Ao oferecer a capacidade de inserir uma variedade de elementos, desde expressões simples até construções mais complexas, os alunos são incentivados a experimentar e testar a ferramenta. Isso não apenas estimula a compreensão dos conceitos, mas também promove a descoberta e a resolução de problemas de maneira prática e acessível.

Clicando no canto superior esquerdo você encontrará uma variedade de opções para gerenciar sua experiência. Pode-se limpar todas as informações para iniciar uma nova atividade ou reiniciar a atividade atual, abrir uma atividade previamente salva, salvar o progresso atual, compartilhar ou exportar a atividade, além de acessar rapidamente o menu de configurações, que também está disponível ao clicar no canto superior direito do aplicativo. No entanto, é importante ressaltar aos alunos que não será necessário modificar as configurações do aplicativo para realizar a atividade proposta. A seguir temos as imagens das telas citadas acima.

Figura 6 – Menú superior esquerdo.



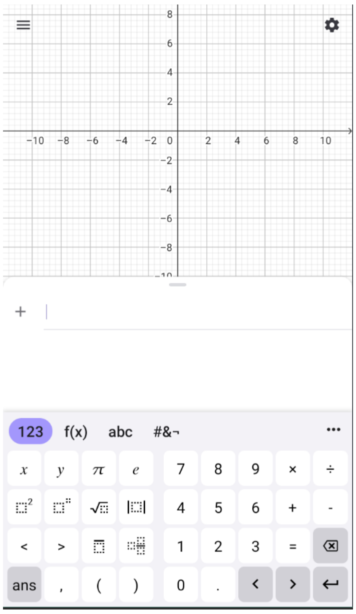

Fonte: Produzido pelo autor

Figura 7 – Configurações do GeoGebra.


Fonte: Produzido pelo autor

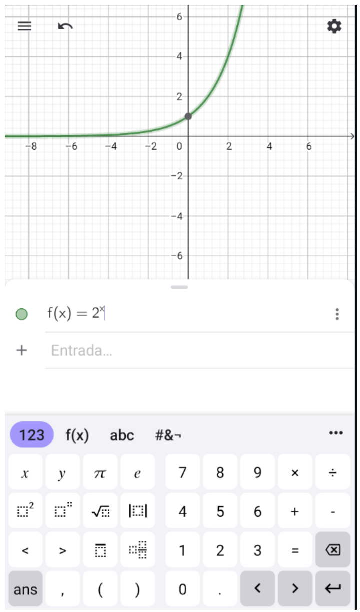
Após uma breve apresentação da interface do aplicativo clicando no menu entrada iremos nos deparar com alguns menus que são o teclado númerico, funções predefinidas, teclado alfabético e o teclado de símbolos e caractéres. A título de exemplo será solicitado para os alunos que insiram uma função exponencial simples $f(x) = 2^x$.

Figura 8 – Tela de início do GeoGebra.




Fonte: Produzido pelo autor

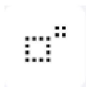
Figura 9 – Gráfico da função $f(x) = 2^x$




Fonte: Produzido pelo autor

Este exemplo foi muito importante, pois serviu para explicar a função potência, a qual está representada no GeoGebra pelo ícone abaixo:

Figura 10 – Função potência.

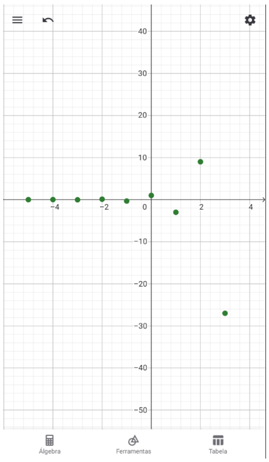


Fonte: Produzido pelo autor

Durante a atividade, os alunos foram orientados a explorar a função exponencial, experimentando com diferentes valores tanto para a base quanto para o expoente da potência. Isso permitiu que eles investigassem as diversas variações possíveis no gráfico da função. Duas situações particularmente interessantes emergiram durante essa exploração.

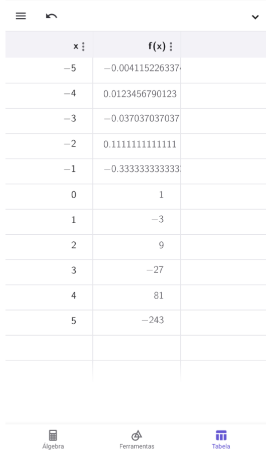
A primeira ocorreu quando os alunos optaram por utilizar um valor negativo para a base, ou seja, $a < 0$. Isso gerou um comportamento específico no gráfico que foi analisado e apresentado aos alunos visto que O comportamento das funções exponenciais com base negativa varia conforme o expoente, seja ele par ou ímpar. Quando o expoente é par, a função produzirá valores positivos. Por exemplo, $(-3)^2 = 9$. Entretanto, quando o expoente é ímpar, a função resultará em valores negativos, como em $(-3)^1 = -3$. Independentemente do expoente, a função exponencial com base negativa oscilará entre valores positivos e negativos ao variar o expoente entre inteiros consecutivos. Este comportamento decorre do fato de que elevar um número negativo a uma potência ímpar resulta em um número negativo, enquanto uma potência par resulta em um número positivo, segue abaixo o gráfico e a tabela de valores do mesmo.

Figura 11 – Gráfico da função $f(x) = (-3)^x$




Fonte: Produzido pelo autor

Figura 12 – Tabela de valores de $x$ na função $f(x) = (-3)^x$



| x | f(x) |
|---|---|
| −5 | −0.004115226337 |
| −4 | 0.0123456790123 |
| −3 | −0.037037037037 |
| −2 | 0.1111111111111 |
| −1 | −0.333333333333 |
| 0 | 1 |
| 1 | −3 |
| 2 | 9 |
| 3 | −27 |
| 4 | 81 |
| 5 | −243 |



Fonte: Produzido pelo autor

A segunda situação de interesse ocorreu quando a base da função estava no intervalo entre 0 e 1, ou seja, $0 < a < 1$. Quando a base de uma função exponencial está dentro desse intervalo, a função assume características específicas que são relevantes em diversos campos da matemática aplicada e teórica. Essas propriedades são cruciais para compreender os comportamentos das funções exponenciais e possuem aplicações significativas em áreas como modelagem matemática, análise de dados e teoria das probabilidades.

Uma das observações feitas foi o fenômeno do "decaimento exponencial". Com bases nesse intervalo, a função tende a se aproximar de zero conforme o valor de $x$ aumenta. Isso ocorre devido ao intervalo $0 < a < 1$, no qual elevar tais bases a potências crescentes resulta em valores cada vez menores. Por exemplo, $(0,5)^x$ tenderá a zero à medida que $x$ cresce.

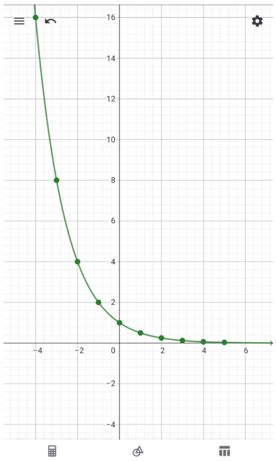
Assim sendo, o gráfico da função exponencial com base entre 0 e 1 é decrescente, refletindo a diminuição dos valores da função à medida que $x$ aumenta. Esse comportamento da função é expresso através da curva decrescente no gráfico.

Outro aspecto relevante é a presença de uma assíntota horizontal. Nesse contexto, podemos dizer que uma assíntota horizontal é uma linha que a função se aproxima à medida que o valor de $x$ fica muito grande (positivo ou negativo), mas nunca cruza. No caso desta função, conforme $x$ se aproxima de $-\infty$, a função se aproxima do eixo $x$ sem cruzá-lo. Isso significa que a função tem uma assíntota horizontal em $y = 0$, ou seja, a função tende a se aproximar de zero quando $x$ vai para $-\infty$.

Essas características das funções exponenciais com base entre 0 e 1 possuem implicações teóricas e práticas relevantes em diversos campos de estudo matemático. A compreensão desses padrões comportamentais são importantens para aplicar adequadamente esses modelos em contextos do mundo real e para o avanço na teoria matemática relacionada.

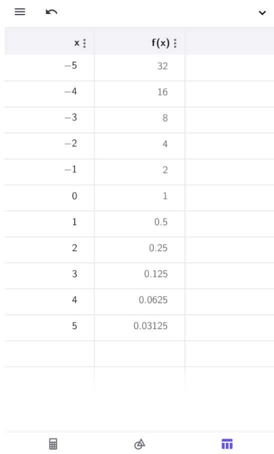
Para ilustrar essas observações, temos abaixo o gráfico correspondente a essa situação, acompanhado de uma tabela de valores para fornecer uma representação visual e numérica das conclusões obtidas durante a análise.

Figura 13 – Gráfico da função $f(x) = (0,5)^x$




Fonte: Produzido pelo autor

Figura 14 – Tabela de valores de $x$ na função $f(x) = (0,5)^x$



| x | f(x) |
|---|---|
| −5 | 32 |
| −4 | 16 |
| −3 | 8 |
| −2 | 4 |
| −1 | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | 0.5 |
| 2 | 0.25 |
| 3 | 0.125 |
| 4 | 0.0625 |
| 5 | 0.03125 |

Fonte: Produzido pelo autor

Após os alunos terem interagido com o aplicativo foi entregue aos mesmo uma pequena atividade com algumas funções para que eles respondessem e preenchessem uma tabela com algumas informações solicitadas, segue a imagem da atividade solicitada aos alunos.

Figura 15 – 1º Exercício - Conceitos da função exponencial e análise do gráfico

**Universidade Federal Rural de Pernambuco**

Tuma: 1º ano , Turma ______ , Turno : Manhã

Professor: Nelson Braz

Data : ______/______/______

**1º Exercício sobre funções exponenciais**

1º) Acesse o GeoGebra e abra uma nova planilha.

2º)Insira as seguintes funções exponenciais na planilha:

a) $f(x) = 2^x$
b) $f(x) = 3^x$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
d) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

3º) Utilize as ferramentas do GeoGebra para responder às seguintes questões sobre cada função:

a) Qual é o domínio da função?

b) Qual é a imagem da função?

c) A função é crescente ou decrescente?

d) Quando o valor de $x$ aumenta significativamente, para que valor $f(x)$ tende?

Fonte: Produzido pelo autor

Em sequência, após o fim do tempo estipulado para a conclusão da atividade foi aberto o espaço para que os alunos pudessem trocar suas informações e compararem suas respostas analisando os acertos e corrigindo os erros sendo o mais comum entre eles a dificuldade em responder o item d, no qual era perguntado qual seria o valor de $f(x)$ uma vez que o valor de $x$ fosse um valor muito grande. Assim sendo abrimos novamente o Geogebra para que eles pudessem ter uma melhor visualização do conceito desejado.

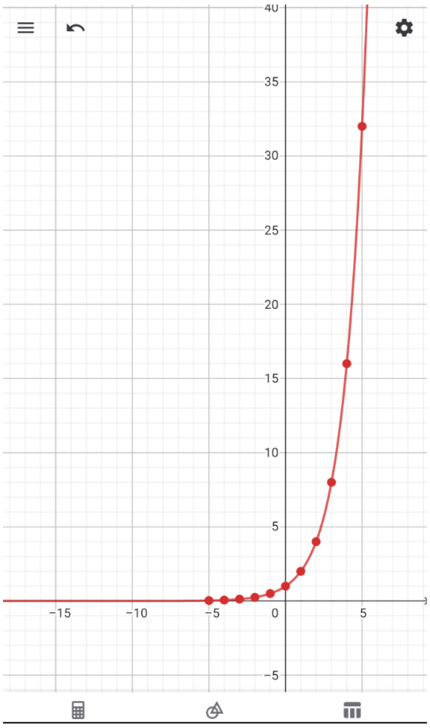
Uma vez aberto o geogebra, inserimos duas funções uma crescente e uma decrescente e analisamos como se comportavam as funções, escolhemos a letra $a$ e a letra $c$ da atividade.

Sendo assim, eles puderam perceber que existem dois tipos de respostas. Quando o valor da base $a > 1$, temos que quanto maior o valor de $x$, o valor de $f(x)$ tende ao infinito. E quando o valor da base $0 < a < 1$, o valor de $f(x)$ se aproxima muito do eixo $x$, entretanto nunca cruzando o eixo das abscissas. Isso introduz um pouco do conceito de limites e explicar a eles que esse conteúdo pode ser abordado de maneira mais formal em níveis educacionais mais avançados.

## 3.4 Terceiro momento: relação entre funções exponenciais e progressões geométricas.

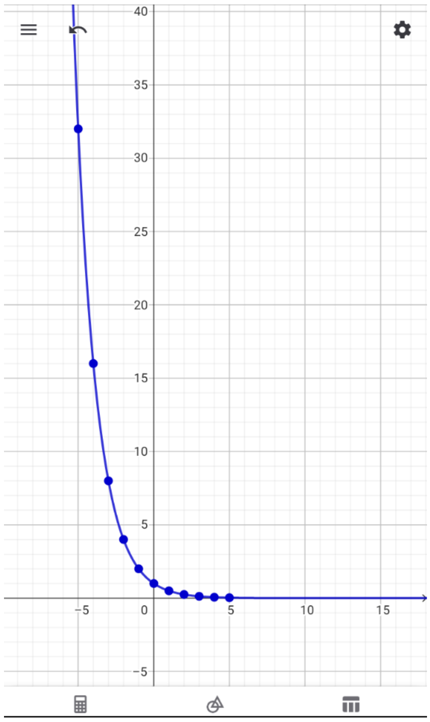
Nosso terceiro momento, que foi realizado em quatro aulas, começou com uma explicação teórica sobre a relação entre funções exponenciais e progressões geométricas,

Figura 16 – Letra a)




Fonte: Produzido pelo autor

Figura 17 – Letra c)




Fonte: Produzido pelo autor

onde mostramos aos alunos que esses dois conceitos matemáticos estavam conectados. Como os alunos já tinham conhecimento prévio sobre funções exponenciais, explicamos a seguir sobre progressões geométricas. Em seguida, mostramos que as funções exponenciais representavam um crescimento ou decaimento exponencial, enquanto as progressões geométricas eram sequências de números em que cada termo era obtido multiplicando o termo anterior por uma constante chamada razão.

Após essa introdução, relacionamos esses dois conceitos, mostrando a forma como as sequências eram construídas. Nas funções exponenciais, os termos eram obtidos elevando a uma potência fixa uma base constante. Nas progressões geométricas, os termos eram obtidos multiplicando o termo anterior pela mesma constante, chamada de razão.

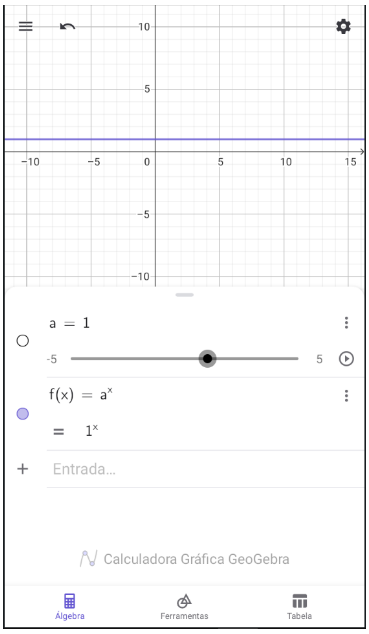
Sendo assim, mostramos a eles que uma progressão geométrica podia ser escrita na forma de uma função e vice-versa. De maneira mais formal, apresentamos a comparação entre as duas generalizações: se considerássemos uma progressão geométrica com o primeiro termo $a_1$ e razão $q$, poderíamos escrever o n-ésimo termo $a_n$ como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Esta fórmula era análoga à fórmula de uma função exponencial $f(x) = a \cdot q^x$, onde $a$ é a base da exponencial e $q$ é o expoente variável.

Dessa forma, era possível converter uma progressão geométrica em uma função exponencial de forma análoga a uma função exponencial em uma progressão geométrica, dependendo do contexto e da forma como os dados eram apresentados.

Em seguida, resolvemos alguns exercícios simples para facilitar a compreensão dos alunos, como por exemplo, a ideia de que, dada uma progressão geométrica como $(1\ ,\ 5\ ,\ 25\ ,\ 125\ ,\ 625\ ,\ \ldots)$ com razão $q = 5$, poderíamos explicar como interpretar esses termos como os valores de uma função exponencial com base 5, ou seja, $f(x) = 5^x$.

Para que os alunos pudessem visualizar este exemplo no GeoGebra, eles precisaram aprender um novo comando, que era o controle deslizante. No aplicativo para celular, o controle deslizante apareceria automaticamente ao adicionarmos a fórmula geral da função exponencial $f(x) = a^x$, bastando clicar na opção **Função Álgebra** e, em seguida, no menu **Entrada**, conforme mostrado na figura abaixo.

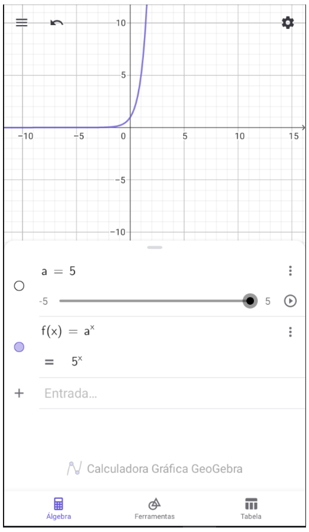
Figura 18 – Inserir a fórmula geral da função exponencial




Fonte: Produzido pelo autor

Logo após, alteramos o valor da variável $a$ para o valor da razão encontrada na progressão geométrica fornecida.

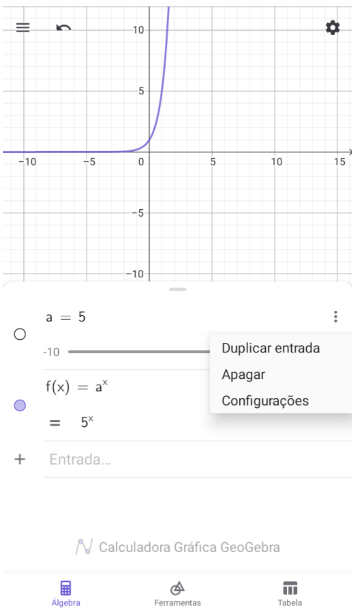
Figura 19 – Alterando o valor da variável $a$ para o valor desejado.




Fonte: Produzido pelo autor

Caso o valor de $a$ desejado não apareça no controle deslizante, devemos alterar o intervalo, que no caso está de $-5$ a 5. Isso pode ser feito clicando no menu com três pontos no lado direito, acima do controle deslizante. Após clicar no menu ”Configurações”, uma janela irá aparecer, na qual podemos mudar o intervalo e o incremento, que é a quantidade de casas decimais que queremos que o controle deslizante conte após a parte inteira.

Figura 20 – Entrando nas configurações.



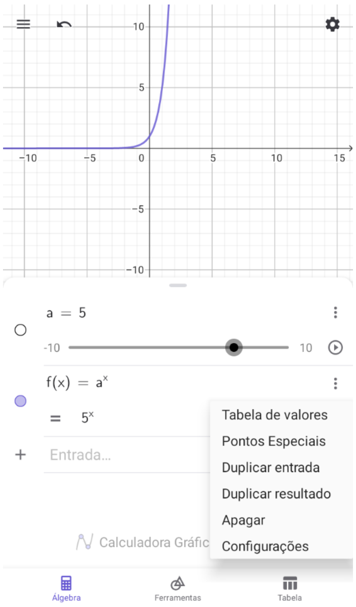

Fonte: Produzido pelo autor

Figura 21 – Mudando o intervalo.


Fonte: Produzido pelo autor

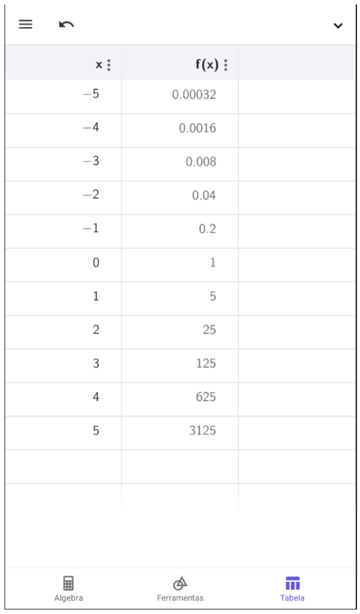
Após inserirem a função e alterarem a variável $a$, os alunos foram instruídos a clicar no menu no canto direito da função e selecionar a opção **Tabela de Valores**. Isso exibirá os pontos do domínio e da imagem da função, possibilitando uma visualização mais clara da sequência de valores, formando assim uma progressão geométrica correspondente à imagem da função desejada.

Figura 22 – Abrindo a tabela de valores.




Fonte: Produzido pelo autor

Figura 23 – Tabela com a sequência desejada.



| x | f(x) |
|---|---|
| −5 | 0.00032 |
| −4 | 0.0016 |
| −3 | 0.008 |
| −2 | 0.04 |
| −1 | 0.2 |
| 0 | 1 |
| 1 | 5 |
| 2 | 25 |
| 3 | 125 |
| 4 | 625 |
| 5 | 3125 |

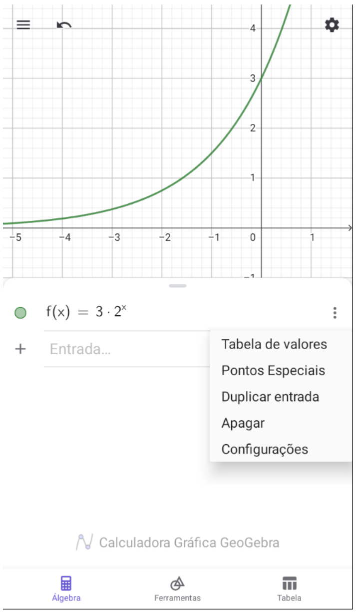


Fonte: Produzido pelo autor

E em seguida foi solicitado que fosse feito o seguinte exemplo, dada a função exponencial $f(x) = 3 \cdot 2^x$ explique como seus valores podem ser interpretados como os termos de uma progressão geométrica com primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $q = 2$.

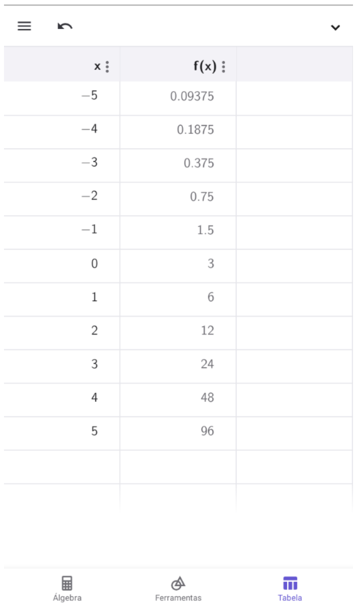
De maneira semelhante ao exemplo anterior, inserimos a função desejada no GeoGebra e, em seguida, abrir a tabela de valores para analisarmos a sequência desejada.

Figura 24 – Função $f(x) = 3 \cdot 2^x$




Fonte: Produzido pelo autor

Figura 25 – Tabela de valores da Função $f(x) = 3 \cdot 2^x$



| x | f(x) |
|---|---|
| −5 | 0.09375 |
| −4 | 0.1875 |
| −3 | 0.375 |
| −2 | 0.75 |
| −1 | 1.5 |
| 0 | 3 |
| 1 | 6 |
| 2 | 12 |
| 3 | 24 |
| 4 | 48 |
| 5 | 96 |



Fonte: Produzido pelo autor

O interessante deste exemplo foi que alguns grupos perceberam que, agora que existe uma constante 3 multiplicando a potência da função, o gráfico cruza o eixo das ordenadas (eixo $y$) exatamente no ponto (0,3). Então, deduziram que, nos exemplos anteriores, o gráfico cruzava o ponto (0,1) porque não havia "nenhum" valor multiplicando as potências. Foi monstrado que a função exponencial pode ser escrita na forma $f(x) = b \cdot a^x$, com $b \neq 0$ e $a > 0$.

Em seguida, fizemos uso da calculadora gráfica para visualizar da melhor forma possível essa interação entre os dois conteúdos. A sala foi dividida em grupos de 5 a 6 alunos e foi entregue a eles nosso segundo exercício para que pudessem praticar a conexão entre funções exponenciais e progressões geométricas.

Figura 26 – 2º Exercício - Relação entre funções exponenciais e progressões geométricas com o GeoGebra

**Universidade Federal Rural de Pernambuco**

Tuma: 1º ano , Turma ______ , Turno : Manhã

Professor: Nelson Braz

Data : ______/______/______

**2º Exercício sobre funções exponenciais**

UFRPE

PROFMAT

1º) Criando uma Função Exponencial Correspondente

- Dado o primeiro termo $a_1 = 3$ e a razão $q = 2$ de uma progressão geométrica, crie uma função exponencial correspondente no GeoGebra.
- Insira a função exponencial no GeoGebra e ajuste os parâmetros para refletir os valores dados da progressão geométrica.
- Compare os valores gerados pela função exponencial com os termos da progressão geométrica. Analise se há semelhanças ou diferenças e discuta suas observações com seu grupo.

2º) Encontrando a Razão da Progressão Geométrica

- Dada a função exponencial $f(x) = 5 \,.\, 2^x$ , determine a razão $q$ de uma progressão geométrica correspondente.
- Utilize o GeoGebra para inserir a função exponencial e explore como seus valores se relacionam aos termos de uma progressão geométrica.
- Baseado nos valores gerados pela função exponencial, determine a razão da progressão geométrica e discuta suas descobertas com seu grupo.

3º) Explorando as Mudanças nos Parâmetros da Função Exponencial

- Crie uma função exponencial e varie os parâmetros de uma função exponencial (base e expoente) no GeoGebra e observe como essas mudanças afetam o gráfico e os valores associados.
- Experimente diferentes valores para a base e o expoente e observe como o crescimento ou o decaimento da função é afetado.
- Registre suas observações e discuta com seu grupo sobre os padrões encontrados e como eles se relacionam com as propriedades das progressões geométricas.

Fonte: Produzido pelo autor

Após utilizar o GeoGebra para visualizar e analisar graficamente as relações entre os termos de uma progressão geométrica e os valores de uma função exponencial correspondente, os alunos podem inserir as expressões matemáticas no GeoGebra e observar como as mudanças nos parâmetros afetam os gráficos e os valores gerados.

Enquanto os alunos estão envolvidos na atividade prática, podemos circular pela sala, analisar o engajamento e o esforço deles na resolução dos problemas e, assim, atuar como mediadores, oferecendo suporte e esclarecendo possíveis dúvidas que possam surgir.

## 3.5 Quarto Momento: resolução de problemas.

Dando continuidade ao nosso conteúdo, este quarto momento foi realizado ao longo de quatro aulas, com o objetivo de proporcionar aos alunos a oportunidade de aplicar os conceitos de funções exponenciais e progressões geométricas na resolução de problemas. A principal ferramenta utilizada foi o GeoGebra, permitindo que os alunos visualizassem gráficos, identificassem padrões e resolvessem problemas de forma mais rápida.

Inicialmente, os alunos receberam uma lista de exercícios com questões contextualizadas. Nesse momento, a abordagem foi diferente das anteriores, pois não se tratava apenas de aplicar as funções ou identificar sequências no GeoGebra, mas de analisar as informações fornecidas nas questões e buscar a melhor forma de resolvê-las. Esses problemas englobaram uma variedade de contextos, como crescimento populacional, decaimento radioativo, investimentos financeiros, entre outros.

Ao utilizar o GeoGebra para resolver os problemas propostos, notamos uma maior participação e colaboração entre os alunos. Isso se deve ao fato de que, dessa forma, eles não apenas podem criar gráficos de funções exponenciais e visualizar progressões geométricas, mas também explorar dinamicamente como esses conceitos se relacionam entre si. Além disso, é importante ressaltar que, quando os alunos interagem com o aplicativo em questão, adotam uma abordagem mais investigativa e exploram formas diferentes de resolução. Isso permite que analisem os efeitos das mudanças de parâmetros sobre os gráficos e os resultados obtidos, promovendo assim um entendimento mais completo e significativo dos conceitos matemáticos abordados.

Durante a resolução dos problemas, observamos um aumento na participação e colaboração dos alunos. Isso ocorreu porque, ao utilizarem o GeoGebra, os alunos não apenas podiam criar gráficos de funções exponenciais e visualizar progressões geométricas, mas também explorar de forma dinâmica a relação entre esses conceitos. Além disso, a interação com o aplicativo possibilitou uma abordagem investigativa, na qual os alunos puderam explorar diferentes formas de resolução, analisar os efeitos das mudanças nos parâmetros e compreender melhor como esses ajustes influenciam os gráficos e os resultados obtidos.

Após a resolução dos problemas A.1, foi aberto um espaço para que os alunos compartilhassem as estratégias utilizadas e as soluções encontradas. Esse momento foi fundamental para consolidar o aprendizado e incentivar a troca de ideias entre os alunos. Estimular os alunos a expressarem seus raciocínios e desafios enfrentados durante a resolução dos problemas é crucial para promover o pensamento crítico e o aprendizado colaborativo.

Além disso, é importante promover uma análise coletiva dos padrões identificados nos problemas e como os conceitos de funções exponenciais e progressões geométricas foram aplicados na resolução. Isso estimula a aplicação desses conhecimentos em diferentes contextos, criando assim um conjunto de ferramentas novas, ou seja, nossos conceitos âncoras que serão acessados pelos alunos para enfrentar desafios matemáticos de forma mais confiante.

Além disso, promovemos uma análise coletiva dos padrões identificados nas questões e discutimos como os conceitos de funções exponenciais e progressões geométricas foram aplicados na resolução dos problemas. Esse tipo de análise estimula a aplicação desses conceitos em diferentes contextos, criando uma base de conhecimento que os alunos poderão acessar para resolver os desafios matemáticos.

# 4 Estrutura, conteúdo e descrição da avaliação final

A avaliação da sequência didática foi planejada para abranger os principais aspectos do aprendizado dos alunos e garantir uma análise de seu desempenho. Para isso, estruturamos o processo avaliativo em dois momentos complementares: uma prova escrita e uma conversa em grupo, cada qual com objetivos distintos e alinhados às competências previstas na BNCC.

A prova escrita, composta por questões objetivas e discursivas, foi projetada para avaliar a compreensão formal e prática dos conteúdos abordados, como funções exponenciais e progressões geométricas, além de sua aplicação em situações do mundo real. Por meio de problemas práticos, os alunos foram desafiados a identificar padrões, estabelecer conexões entre diferentes conceitos matemáticos e aplicar os conhecimentos adquiridos em contextos diversos.

Já as conversas em grupo tiveram como objetivo uma análise qualitativa mais detalhada, explorando o raciocínio coletivo, as estratégias de resolução de problemas e a capacidade de comunicação dos alunos. Nesse momento, perguntas direcionadas buscaram avaliar não apenas o conhecimento matemático, mas também a forma como os alunos relacionaram os conceitos aprendidos com situações práticas e cotidianas, atendendo às diretrizes da BNCC, com destaque para a habilidade (EM13MAT508) e a competência 5.

Para avaliar a eficácia do produto desenvolvido, dividimos as quatro turmas do primeiro ano em dois grupos distintos. Duas turmas participaram da implementação completa do produto, utilizando ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, e uma abordagem investigativa e dinâmica. As outras duas turmas seguiram o método de ensino tradicional, baseado em exposições teóricas e resolução de exercícios padronizados, sem o uso de recursos digitais.

A avaliação final foi planejada para medir tanto a eficácia das metodologias aplicadas quanto a proficiência dos alunos nos tópicos abordados. Os resultados consideraram tanto o desempenho quantitativo, obtido na prova escrita, quanto os aspectos qualitativos evidenciados durante as conversas em grupo. Este segundo momento foi importante para identificar o impacto do método investigativo na construção do conhecimento dos alunos e compreender como eles aplicaram os conceitos matemáticos em diferentes contextos.

Combinando a análise quantitativa e qualitativa, essa abordagem comparativa entre metodologias permitiu explorar como diferentes estratégias de ensino influenciam o aprendizado. Os dados coletados oferecem subsídios importantes para aprimorar a prática pedagógica e adaptar o produto a diferentes contextos educacionais, promovendo uma integração mais efetiva entre teoria, prática e tecnologia.

## 4.1 Critérios de análise e interpretação dos resultados

Os resultados da avaliação foram analisados com base em critérios específicos, considerando tanto o desempenho dos alunos na prova escrita quanto suas respostas durante as entrevistas e discussões em grupo.

Na prova escrita, os critérios de análise incluíram a precisão das respostas, a compreensão dos conceitos abordados, a capacidade de resolver problemas de forma eficaz e a clareza na exposição das ideias. Já nas conversas em grupo, os critérios de análise foram mais qualitativos, abrangendo a capacidade dos alunos de explicar seus processos de pensamento, identificar padrões e estabelecer conjecturas, conforme a BNCC.

A interpretação dos resultados levou em consideração não apenas o desempenho individual dos alunos, mas também as tendências gerais observadas em toda a turma. Os resultados foram utilizados para avaliar o progresso dos alunos ao longo da sequência didática e identificar áreas que necessitam de maior atenção e apoio. Além disso, os resultados foram discutidos com os alunos para fornecer um retorno construtivo e incentivar a reflexão sobre seu próprio aprendizado.

Esses critérios abrangem aspectos importantes da avaliação dos alunos e podem ser utilizados para fornecer uma análise do desempenho dos alunos nas questões relacionadas a funções exponenciais e progressões geométricas. A seguir temos uma tabela onde podemos analisar os critérios avaliados durante o produto aplicado.

Tabela 1 – Critérios de análise

| **Critérios de Análise** | **Descrição** |
|---|---|
| Precisão das respostas | Avaliação da exatidão e correção das respostas fornecidas pelos alunos. |
| Compreensão dos conceitos abordados | Verificação do entendimento dos conceitos fundamentais de funções exponenciais e progressões geométricas. |
| Capacidade de resolver problemas de forma eficaz | Observação da habilidade dos alunos em aplicar os conceitos matemáticos na resolução de problemas práticos. |
| Clareza na exposição das ideias | Análise da capacidade dos alunos em comunicar suas soluções de forma clara e organizada. |
| Capacidade de explicar processos de pensamento | Observação da habilidade dos alunos em explicar como chegaram às suas respostas, demonstrando raciocínio lógico e estratégias de resolução. |
| Identificação de padrões | Avaliação da capacidade dos alunos em reconhecer e descrever padrões matemáticos nas sequências numéricas e funções exponenciais. |
| Estabelecimento de conjecturas | Verificação da capacidade dos alunos em formular hipóteses e generalizações com base nos padrões observados. |

Fonte: Produzido pelo autor

## 4.2 Análise dos resultados

A avaliação diagnóstica teve como objetivo verificar a eficácia da sequência didática e o impacto do GeoGebra como ferramenta de ensino, comparando o desempenho dos alunos em relação ao método tradicional. Para isso, as quatro turmas do 1º ano foram divididas em dois grupos: as turmas A/B utilizaram o GeoGebra na sequência didática, enquanto as turmas C/D seguiram a mesma sequência sem o uso dessa ferramenta. Os critérios de avaliação incluíram a compreensão dos conceitos, a eficácia na resolução de problemas, a clareza e organização na exposição de ideias, a precisão das respostas, a explicação dos processos de pensamento, e a habilidade em identificar padrões matemáticos e estabelecer conjecturas.

A análise focou em verificar se os alunos conseguiram identificar e aplicar corretamente os princípios fundamentais das funções exponenciais em cada questão. Isso envolveu avaliar a compreensão do comportamento de crescimento ou decaimento das funções, a interpretação correta dos parâmetros das equações exponenciais e a capacidade de relacionar esses conceitos com os problemas propostos.

Além disso, foi avaliado como os alunos explicaram seus raciocínios, considerando a clareza e coerência na articulação das ideias e a profundidade na compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. O desempenho foi classificado em categorias como excelente, bom, razoável e fraco, de acordo com a precisão e a profundidade da compreensão demonstrada.

## 4.3 Resultados da avaliação diagnóstica

Nesta seção, apresentamos os resultados da avaliação diagnóstica aplicada às turmas A/B, que utilizaram o GeoGebra, e às turmas C/D, que não utilizaram a ferramenta. A análise dos dados permite comparar o desempenho dos alunos e avaliar a eficácia do uso do GeoGebra no ensino de funções exponenciais.

A avaliação consistiu em cinco questões que exploraram diferentes aspectos das funções exponenciais, desde a compreensão dos conceitos básicos até a resolução de problemas mais complexos.

A seguir, apresentamos um resumo dos resultados:

### 4.3.1 1ª Questão

Ao abordar a questão que envolve a concentração de um medicamento no organismo ao longo do tempo, utilizando o conceito de meia-vida, devemos considerar os conhecimentos prévios necessários para a resolução. Primeiramente, os alunos devem conhecer o conceito de meia-vida, que é o tempo necessário para que a quantidade inicial de uma substância no organismo seja reduzida pela metade. Esse conceito é importante para entender que a concentração do medicamento diminui exponencialmente ao longo do tempo.

A fórmula que descreve o decaimento da concentração de um medicamento é dada por:

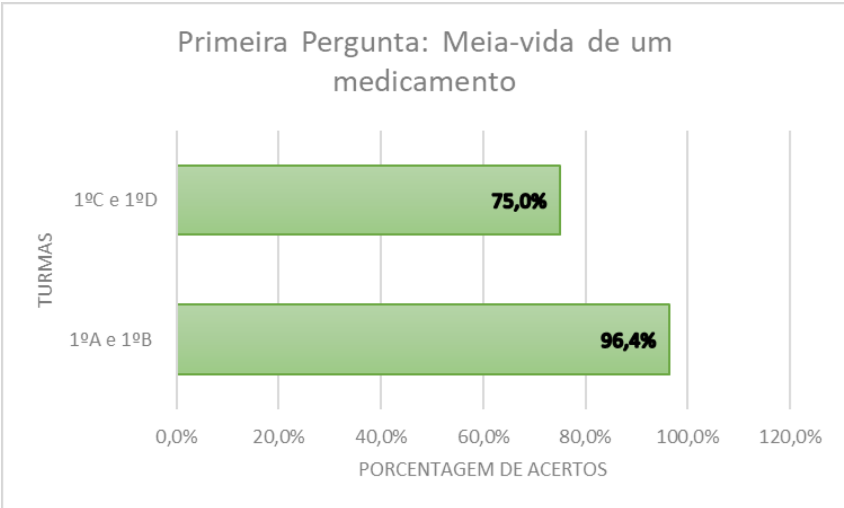
$$C(t) = C_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

em que $C(t)$ representa a concentração do medicamento no tempo $t$, $C_0$ é a concentração inicial, $T$ é a meia-vida do medicamento, e $t$ é o tempo decorrido.

Para resolver a questão, os alunos precisam aplicar este conceito e fórmula para calcular a concentração do medicamento em momentos específicos, dada a meia-vida e o tempo total decorrido. Além da abordagem exponencial, alguns alunos utilizaram o conceito de progressões geométricas e sequências, já que o decaimento exponencial pode ser interpretado como uma progressão geométrica, em que cada termo é metade do anterior.

A importância de conectar novos conhecimentos aos conhecimentos anteriores é evidenciada ao resolver a questão, utilizando o conceito de meia-vida. Os alunos devem perceber que a meia-vida está diretamente relacionada ao conceito de decaimento exponencial e entender como aplicar a fórmula correspondente para resolver problemas reais.

Figura 27 – Total de acertos da primeira pergunta da prova diagnóstica.




Fonte: Produzido pelo autor

A porcentagem de acertos nesta questão nas turmas A/B foi de 96,4%, refletindo um alto nível de entendimento e competência na resolução de problemas relacionados à meia-vida de medicamentos. Esse desempenho pode estar relacionado à aplicação de uma metodologia que favorece a aprendizagem. Ao usar ferramentas como o GeoGebra, os alunos podem ter sido capazes de ancorar novos conceitos de forma mais eficaz em seu conhecimento prévio, facilitando a compreensão e a retenção do conteúdo.

Nas turmas C/D, o percentual de acerto foi de 75%, um resultado também expressivo, mas inferior ao das turmas A/B. A diferença sugere que, sem o apoio de ferramentas interativas, os alunos podem enfrentar mais desafios na assimilação e aplicação de conceitos como a meia-vida. No entanto, isso não significa que a ausência do GeoGebra inviabilize o aprendizado, mas sim que diferentes abordagens podem impactar a profundidade da aprendizagem.

Em termos de compreensão conceitual, a maioria dos alunos das turmas A/B demonstrou excelente ou boa compreensão dos princípios relacionados à meia-vida, enquanto nas turmas C/D houve uma maior variação nas respostas, com uma distribuição mais equilibrada entre as diferentes categorias de compreensão.

Na resolução de problemas, a maioria dos alunos das turmas A/B conseguiu resolver as questões de maneira eficaz. Já nas turmas C/D, a capacidade de resolução variou mais significativamente, possivelmente refletindo diferentes níveis de compreensão conceitual ou a ausência de estratégias que facilitassem a aplicação prática dos conceitos.

A clareza na exposição das ideias foi outro aspecto em que as turmas A/B se destacaram, com muitos alunos apresentando suas soluções de forma organizada. Nas turmas C/D, os resultados foram mais uniformemente distribuídos entre as categorias de clareza, sugerindo que a exposição de ideias pode estar relacionada à compreensão do conteúdo.

No quesito precisão das respostas, as turmas A/B novamente obtiveram melhores resultados, com a maioria das respostas sendo classificadas como muito precisas ou precisas. Nas turmas C/D, observou-se uma maior dispersão entre as categorias de precisão, indicando que os alunos podem ter enfrentado dificuldades em calcular ou interpretar corretamente as informações fornecidas na questão.

Quanto à explicação dos processos de pensamento, a maioria dos alunos das turmas A/B articulou bem suas estratégias de resolução, enquanto nas turmas C/D os resultados foram mais equilibrados entre as diferentes categorias de explicação. A capacidade de explicar o raciocínio reflete uma compreensão mais profunda dos conceitos, que, segundo a teoria de Ausubel, ocorre quando os novos conhecimentos são significativamente integrados ao que já se sabe.

A identificação de padrões matemáticos foi mais evidente nas turmas A/B, nas quais muitos alunos identificaram corretamente os padrões nas sequências numéricas e funções. Em contraste, nas turmas C/D, essa habilidade foi menos desenvolvida, mas ainda presente. A formulação de conjecturas seguiu um padrão similar, com as turmas A/B se destacando na capacidade de estabelecer hipóteses baseadas nos padrões observados.

### 4.3.2 2ª questão

Ao examinar o desempenho na segunda questão, que envolvia a modelagem da disseminação de fofocas utilizando uma função exponencial, observamos um padrão semelhante ao encontrado na primeira questão. Essa questão demandava uma compreensão sólida de funções exponenciais para modelar o crescimento de um fenômeno social.

Para resolver a questão proposta, os alunos precisavam ter conhecimentos prévios sobre o formato e a interpretação de funções exponenciais. A função exponencial em questão é dada por $f(x) = b \cdot a^x$, onde $b$ representa o valor inicial e $a$ é a base da função, que determina a taxa de crescimento. No contexto da questão, a disseminação de fofocas é modelada por essa função, com $x$ representando o tempo em dias.

Os alunos deveriam interpretar que a quantidade de fofocas dobra a cada dia, o que indica que a base da função exponencial, $a$, é 2. Além disso, sabendo que o número inicial de fofocas é 1, então $b = 1$. A informação de que após 3 dias o número de fofocas atingiu 16 fornece uma verificação adicional, confirmando que a base da função é, de fato, 2. Assim, a função que descreve a quantidade de fofocas é $f(x) = 2^x$.

Com essa função, os alunos foram capazes de calcular o número de fofocas após 5 dias substituindo $x$ por 5. O resultado é $f(5) = 2^5 = 32$. Da mesma forma, para determinar o número de dias necessários para que o número de fofocas atinja 256, os alunos resolveram a equação $2^x = 256$. Sabendo que $256 = 2^8$, concluíram que $x = 8$.

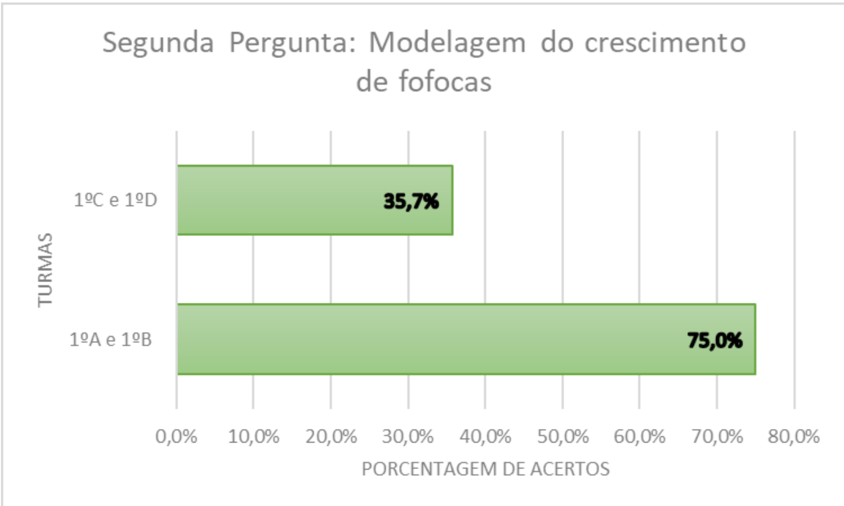
Entretanto alguns alunos utilizaram do conceito de sequências para resolver a questão onde a sequência encontrada foi:

$$(1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots)$$

podendo encontrar o resultado sem a utilização da função exponêncial.

A análise dos resultados evidenciou que a compreensão dos conceitos de sequências e funções exponenciais permitiu aos alunos modelar corretamente o crescimento das fofocas e responder às perguntas com precisão.

Figura 28 – Total de acertos da segunda pergunta da prova diagnóstica.




Fonte: Produzido pelo autor

Nas turmas que utilizaram o GeoGebra, aproximadamente 75% dos alunos acertaram todas as partes da questão, indicando uma compreensão robusta dos conceitos de função exponencial. A ferramenta parece ter facilitado a visualização e a manipulação da função, auxiliando na resolução dos problemas.

Por outro lado, nas turmas que não utilizaram o GeoGebra, apenas 35,7% dos alunos acertaram todas as partes, o que sugere que a falta dessa ferramenta pode ter dificultado a assimilação dos conceitos.

A compreensão dos conceitos foi superior nas turmas A/B, com 85,7% dos alunos demonstrando uma excelente ou boa compreensão, enquanto nas turmas C/D, a compreensão foi mais fragmentada.

A capacidade de resolver problemas também foi destacada nas turmas A/B, com a maioria dos alunos abordando as questões de forma eficaz. Nas turmas C/D, quase metade dos alunos enfrentou dificuldades na aplicação prática do conhecimento.

A clareza na exposição das ideias foi superior nas turmas A/B, em que grande parte dos alunos conseguiu comunicar suas soluções de maneira organizada. Nas turmas C/D, essa habilidade foi menos desenvolvida.

A precisão das respostas também foi mais alta nas turmas A/B, com a maioria das respostas sendo muito precisas ou precisas. Nas turmas C/D, houve uma maior variação na qualidade das respostas.

Os alunos das turmas A/B explicaram melhor seus processos de pensamento, enquanto nas turmas C/D essa habilidade foi menos evidente. Isso sugere que o GeoGebra pode ter ajudado os alunos a articular suas estratégias de resolução.

A identificação de padrões e o estabelecimento de conjecturas foram mais eficazes nas turmas A/B. O GeoGebra parece ter facilitado a exploração visual desses padrões, enquanto nas turmas C/D, essas habilidades estavam menos desenvolvidas.

### 4.3.3 3ª Questão

Ao avaliar a terceira questão, que envolvia a modelagem do crescimento de uma infecção viral usando funções exponenciais, observamos diferenças entre os grupos que usaram o GeoGebra e aqueles que não o fizeram. Para resolver essa questão, era necessário compreender os seguintes conceitos.

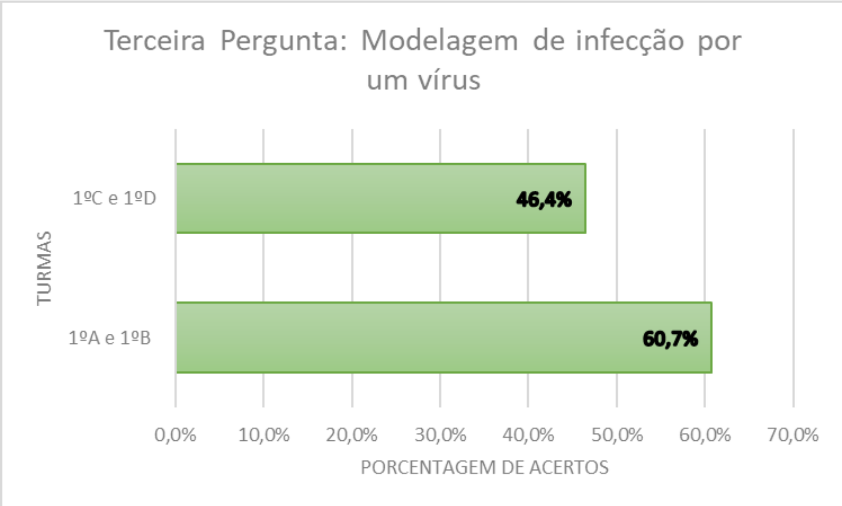
Primeiramente, os alunos precisavam modelar fenômenos de crescimento rápido utilizando funções exponenciais. A questão utilizava a função exponencial $f(x) = 2^x$ para modelar o número de pessoas infectadas após $x$ interações, começando com uma única pessoa infectada e assumindo que cada pessoa pode infectar duas novas pessoas a cada interação.

Além disso, era necessário compreender o conceito de progressão geométrica. A progressão geométrica com razão 2 descreve como o número de infectados dobra a cada nova interação, resultando em uma quantidade crescente de pessoas infectadas em cada etapa.

Outro aspecto era a aplicação prática desses conceitos para resolver problemas reais. Os alunos precisavam aplicar a função exponencial para determinar a quantidade de infectados em relação à população do município de Camaragibe, que é de 1024 habitantes.

Isso envolveu a capacidade de interpretar a função no contexto do problema e calcular o número de interações necessário para superar a população total.

Figura 29 – Total de acertos da terceira pergunta da prova diagnóstica.




Fonte: Produzido pelo autor

As turmas A/B, que utilizaram o GeoGebra, mostraram um nível superior de compreensão dos conceitos, com 35,7% dos alunos alcançando uma compreensão excelente, em comparação com 7,1% nas turmas C/D.

A eficácia na resolução de problemas foi igualmente destacada nas turmas A/B, com 57,1% dos alunos apresentando um desempenho excelente, enquanto nas turmas C/D, o índice foi de 28,6%.

A clareza na exposição das ideias foi mais pronunciada nas turmas A/B, com 32,1% dos alunos apresentando suas ideias de forma muito clara. Nas turmas C/D, apenas 14,3% atingiram esse nível.

A precisão das respostas foi também superior nas turmas A/B, com 50% dos alunos fornecendo respostas muito precisas, comparado a 32,1% nas turmas C/D. O GeoGebra pode ter facilitado a verificação e confirmação dos cálculos, reduzindo erros.

A explicação dos processos de pensamento foi mais desenvolvida nas turmas A/B, com 32,1% dos alunos articulando bem seus raciocínios, em contraste com 17,9% nas turmas C/D.

### 4.3.4 4ª questão

A análise da quarta questão, que abordava a depreciação exponencial de um celular, revelou diferenças marcantes entre as turmas. A questão exigia que os alunos aplicassem a teoria das funções exponenciais para modelar a depreciação de um bem ao longo do tempo. Para resolver essa questão, é importante que os alunos possuam conhecimentos prévios específicos.

Primeiramente, os alunos precisam compreender as funções exponenciais. A função dada na questão,

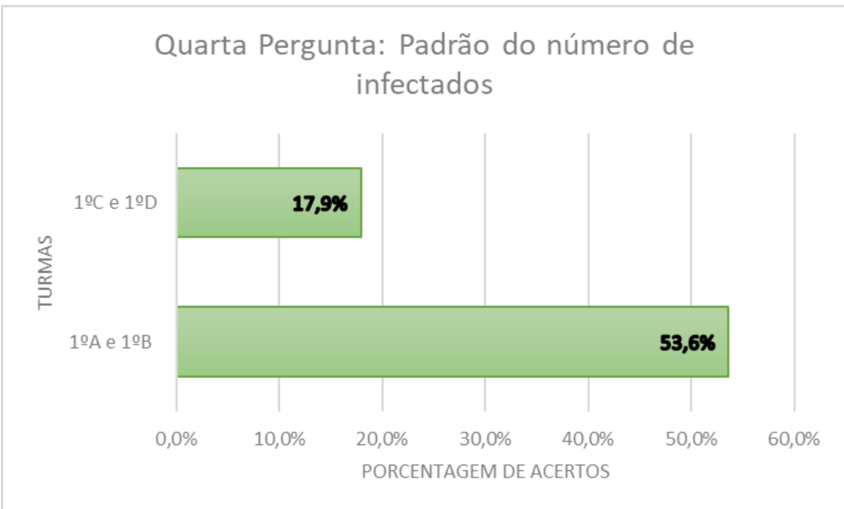
$$f(x) = b \cdot (1 - q)^x,$$

é uma representação matemática que descreve como o valor do celular diminui ao longo dos anos devido à depreciação. Compreender a estrutura dessa função e o papel de cada parâmetro é essencial, sendo $b$ o preço inicial do celular, $f(x)$ o valor do celular após $x$ anos, e $q$ a taxa de depreciação anual.

Além disso, é necessário compreender como a taxa de depreciação afeta o valor do bem ao longo do tempo. No caso da questão, a taxa de depreciação é de 50% ao ano. Isso significa que o valor do celular é reduzido para 50% do seu valor a cada ano. Os alunos devem saber aplicar essa taxa na fórmula para calcular o valor do celular em diferentes momentos, ou entender que o valor do celular, no caso, reduz pela metade a cada ano, podendo resolver o problema através do conceito de sequências, bem como entender o conceito de redução exponencial.

Por fim, os alunos devem ser capazes de realizar cálculos matemáticos específicos para determinar o valor do celular após um determinado período, identificar o tempo necessário para que o valor seja reduzido pela metade em relação ao preço inicial, e calcular o tempo até que o valor atinja um valor específico, como R$ 100,00. Essas habilidades matemáticas são essenciais para resolver problemas reais que envolvem modelos exponenciais.

Figura 30 – Total de acertos da quarta pergunta da prova diagnóstica.




Fonte: Produzido pelo autor

Nas turmas A/B, 53,6% dos alunos acertaram todas as partes da questão, indicando uma compreensão sólida dos conceitos. Em comparação, nas turmas C/D, apenas 17,9% dos alunos resolveram a questão corretamente, com 82,1% apresentando dificuldades significativas.

A resolução eficaz de problemas foi observada em 53,6% dos alunos das turmas A/B, enquanto nas turmas C/D, apenas 14,3% apresentaram soluções bem elaboradas. O GeoGebra pode ter facilitado a aplicação prática dos conceitos.

A clareza e a organização das ideias também foram melhores nas turmas A/B, com 39,3% dos alunos expondo suas ideias de forma clara, comparado a 10,7% nas turmas C/D.

A precisão das respostas foi superior nas turmas A/B, com 50% dos alunos fornecendo respostas muito precisas. Nas turmas C/D, apenas 14,3% alcançaram esse nível.

A explicação dos processos de pensamento foi mais eficaz nas turmas A/B, com 40,7% dos alunos apresentando explicações bem elaboradas, em contraste com 10,7% nas turmas C/D.

A identificação de padrões e o estabelecimento de conjecturas foram novamente mais eficazes nas turmas A/B, com 39,3% dos alunos mostrando um bom desempenho, enquanto nas turmas C/D, a porcentagem foi de 17,9%.

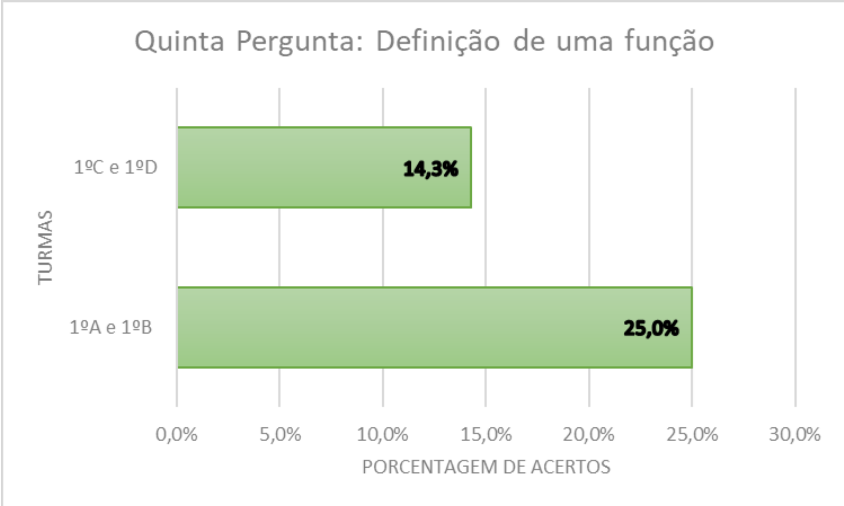
### 4.3.5 5ª Questão

Vamos examinar a quinta questão, que abordou a modelagem exponencial da popularidade de uma postagem em uma rede social. Para resolver essa questão, os alunos precisavam aplicar uma compreensão das funções exponenciais. A questão exigiu que os alunos entendessem a forma geral da função $f(x) = b \cdot a^x$, na qual $b$ representa o valor inicial e $a$ é a base da exponenciação, aplicando esse conhecimento para resolver problemas reais.

Além disso, foi necessário interpretar a taxa de crescimento exponencial, convertendo a taxa percentual de 20% em um fator multiplicador de $1,2$, o que envolveu habilidades de conversão de porcentagens para frações decimais e a aplicação dessas frações em contextos matemáticos. Os alunos tiveram que realizar cálculos de potências e substituir valores na função exponencial para encontrar o número de curtidas previsto para um intervalo de tempo específico.

Esse exercício não apenas testou a capacidade dos alunos de aplicar conceitos matemáticos de forma prática, mas também promoveu uma aprendizagem significativa ao conectar a teoria das funções exponenciais com uma situação do mundo real, permitindo que os alunos relacionassem o conhecimento com contextos práticos.

Figura 31 – Total de acertos da quinta pergunta da prova diagnóstica.




Fonte: Produzido pelo autor

Nas turmas A/B, que utilizaram o GeoGebra, 62,5% dos alunos acertaram todas as partes da questão, indicando uma compreensão sólida dos conceitos de funções exponenciais e uma aplicação eficaz dos mesmos.

Em contraste, nas turmas C/D, que não utilizaram o GeoGebra, apenas 25% dos alunos conseguiram resolver a questão corretamente.

A análise da compreensão dos conceitos revelou que 70% dos alunos das turmas A/B demonstraram uma excelente ou boa compreensão dos conceitos de funções exponenciais, em comparação com apenas 35% nas turmas C/D.

A eficácia na resolução de problemas foi notavelmente superior nas turmas A/B, com 62,5% dos alunos resolvendo a questão com sucesso. Nas turmas C/D, esse índice foi de 25%, refletindo uma dificuldade maior na aplicação prática dos conceitos.

A clareza na exposição das ideias foi mais evidente nas turmas A/B, com 55% dos alunos apresentando suas respostas de forma clara e organizada. Nas turmas C/D, essa porcentagem foi de 20%, indicando uma necessidade maior de desenvolvimento na comunicação das soluções.

A precisão das respostas também foi superior nas turmas A/B, com 60% dos alunos fornecendo respostas muito precisas. Nas turmas C/D, apenas 30% dos alunos atingiram esse nível de precisão, sugerindo que a falta de recursos visuais pode ter afetado a exatidão das respostas.

Quanto à explicação dos processos de pensamento, a maioria dos alunos das turmas A/B forneceu explicações claras e detalhadas. Nas turmas C/D, a capacidade de explicar os raciocínios foi menos desenvolvida, com apenas 25% dos alunos apresentando uma boa explicação.

A identificação de padrões matemáticos e o estabelecimento de conjecturas foram mais eficazes nas turmas A/B, com 55% dos alunos demonstrando habilidade nessa área. Nas turmas C/D, apenas 20% dos alunos conseguiram identificar padrões e estabelecer conjecturas com sucesso.

A análise das questões evidencia que o uso do GeoGebra pode ter contribuído positivamente para a aprendizagem significativa dos alunos, conforme sugerido pelos princípios de Ausubel. No entanto, é essencial reconhecer que essa ferramenta é apenas uma das várias estratégias pedagógicas que podem influenciar o desempenho dos estudantes. O aprendizado significativo não depende exclusivamente de uma única abordagem ou recurso, mas resulta da interação de diversos fatores, como o engajamento dos alunos, a clareza das instruções fornecidas pelos professores e a prática anterior com os conceitos matemáticos.

Em várias questões, as turmas que utilizaram o GeoGebra apresentaram desempenho superior, o que sugere que o GeoGebra pode ter facilitado a visualização e a compreensão dos conceitos. Entretanto, essa observação não deve ser interpretada como um indicativo de que o GeoGebra é a solução definitiva para os desafios educacionais. A eficácia na aprendizagem depende de um contexto mais amplo, no qual a combinação de diferentes métodos e recursos, aliados a um ambiente de ensino propício, promove uma compreensão mais profunda e duradoura. Assim, o GeoGebra deve ser visto como um complemento valioso dentro de uma abordagem pedagógica diversificada, que visa atender às diversas necessidades dos alunos e potencializar o aprendizado.

## 4.4 Eficácia da sequência didática

A eficácia da sequência didática pode ser avaliada de várias maneiras, incluindo a análise dos resultados da avaliação diagnóstica, a observação do envolvimento dos alunos durante as aulas, e as percepções dos próprios estudantes sobre o processo de aprendizagem. Os resultados obtidos indicam que a sequência didática adotada foi eficaz em promover a compreensão dos conceitos de Funções Exponenciais e em desenvolver as habilidades de resolução de problemas dos alunos.

### 4.4.1 Contribuição do GeoGebra para a compreensão dos conceitos

O GeoGebra, como uma ferramenta tecnológica de apoio ao ensino, mostrou-se eficaz na compreensão dos conceitos de Funções Exponenciais. A capacidade de visualizar e manipular gráficos de forma interativa oferece aos alunos uma maneira mais concreta de entender conceitos abstratos. Durante as aulas, os alunos das turmas A/B tiveram a oportunidade de usar o GeoGebra para explorar as características das Funções Exponenciais, como crescimento, decaimento, comportamento assintótico, e a relação entre a base da função e sua taxa de variação.

Os dados da avaliação diagnóstica revelaram que 82,14% dos alunos das turmas A/B acertaram as questões que envolviam a definição e características das Funções Exponenciais, em comparação a apenas 55% das turmas C/D, que não utilizaram o GeoGebra. Esta diferença pode ser atribuída à capacidade do GeoGebra de tornar visíveis as mudanças nos gráficos quando os parâmetros das funções são alterados, permitindo uma visualização imediata e intuitiva dos efeitos dessas mudanças.

Além disso, a utilização do GeoGebra promoveu um ambiente de aprendizagem mais dinâmico. Os alunos puderam alterar as funções e observar os resultados em tempo real, o que não só facilitou a compreensão dos conceitos mas também incentivou a exploração e a curiosidade. A visualização dinâmica do GeoGebra ajudou os alunos a fixarem os conceitos de uma forma que é difícil de alcançar apenas com métodos tradicionais de ensino.

### 4.4.2 Impacto nas habilidades de resolução de problemas dos alunos

As habilidades de resolução de problemas são fundamentais para o aprendizado em matemática, e os dados indicam que o uso do GeoGebra teve um impacto positivo. Pois os alunos das turmas A/B mostraram um desempenho superior na resolução de problemas aplicados, com 82,14% de acertos, em comparação a 55% das turmas C/D.

O GeoGebra permitiu que os alunos abordassem problemas complexos de forma mais sistemática e visual. Ao trabalhar com os gráficos, os alunos puderam identificar padrões e relações matemáticas mais facilmente, o que facilitou a formulação de estratégias de resolução mais eficazes. A capacidade de visualizar os problemas ajudou os alunos a entenderem melhor a natureza dos desafios que estavam enfrentando, permitindo que encontrassem outras formas de solucionar os problemas.

Um exemplo do impacto do GeoGebra nas habilidades de resolução de problemas pode ser visto em como os alunos abordaram questões que envolviam sequência, nas quais, ao utilizarem o GeoGebra, eles podiam abrir a ferramenta tabela e analisar, ao longo do gráfico de tempo, por exemplo, após quanto tempo determinado medicamento estaria na concentração desejada pelo enunciado, fazendo assim um link com o conteúdo de progressões geométricas, que era outro foco desejado do projeto.

Além disso, o uso do GeoGebra contribuiu para o desenvolvimento de uma abordagem mais investigativa ao resolver problemas. Os alunos relataram que se sentiram mais motivados a experimentar diferentes soluções e a verificar suas respostas de forma independente.

### 4.4.3 Percepções dos alunos

As percepções dos alunos sobre o uso do GeoGebra foram, em sua maioria, muito positivas, refletindo a eficácia da sequência didática. Em entrevistas e questionários aplicados após a avaliação diagnóstica, os alunos relataram que o GeoGebra tornou o aprendizado das Funções Exponenciais mais interessante e acessível. Muitos alunos destacaram que a capacidade de manipular gráficos e observar os resultados em tempo real ajudou a esclarecer dúvidas e consolidar o entendimento dos conceitos. A seguir temos um breve relato de um aluno sobre o uso do GeoGebra em sala de aula:

***"Gostei bastante dessa metodologia, pois tenho bastante dificuldade em matemática. E esse método com o GeoGebra me ajudou a resolver as funções e me auxiliou bastante. O app do GeoGebra é muito auto explicativo, ajuda bastante alunos como eu que tem dificuldade em matemática, o professor Nelson nos ajudou, explicou e exclareceu as minhas dificuldades. Aula excelente!"***

Um outro aluno comentou:

***"Antes de usar o GeoGebra, eu tinha dificuldades em entender como as mudanças nos parâmetros afetavam o gráfico de uma função exponencial. Com o GeoGebra, pude ver essas mudanças de imediato, o que tornou tudo mais claro."***

Os alunos também mencionaram que o uso do GeoGebra aumentou sua confiança na resolução de problemas. A ferramenta ofereceu um ambiente seguro para experimentar diferentes abordagens e verificar a correção de suas soluções. Um dos aspectos mais valorizados pelos alunos foi a capacidade de testar e validar suas ideias de forma imediata, o que contribuiu para um aprendizado mais ativo e participativo.

Além disso, as percepções positivas dos alunos sugerem que o GeoGebra pode desempenhar um papel importante na manutenção do engajamento e da motivação dos estudantes. A interação dinâmica e a visualização clara dos conceitos matemáticos tornam o aprendizado mais envolvente, ajudando a combater a desmotivação e o desinteresse que são comuns em disciplinas mais abstratas como a matemática.

Os resultados da avaliação diagnóstica, complementados pelas percepções dos alunos, apontam para a eficácia da sequência didática suportada pelo uso do GeoGebra. A ferramenta não apenas melhorou a compreensão dos conceitos de Funções Exponenciais, mas também fortaleceu as habilidades de resolução de problemas e aumentou o engajamento dos alunos no processo de aprendizagem.

O GeoGebra provou ser uma adição valiosa ao ensino tradicional, proporcionando uma abordagem mais visual e interativa que facilita a compreensão de conceitos abstratos e complexos. A habilidade de manipular gráficos e observar os resultados em tempo real permitiu aos alunos internalizarem os conceitos de maneira mais eficaz e intuitiva. Além disso, o uso do GeoGebra promoveu um ambiente de aprendizado mais ativo, no qual os alunos se sentiram motivados a explorar e experimentar diferentes soluções para os problemas apresentados.

Os dados indicam que os alunos que utilizaram o GeoGebra tiveram um desempenho superior nas avaliações e demonstraram uma maior confiança em suas habilidades de resolução de problemas. Esse impacto positivo sugere que a integração de ferramentas tecnológicas como o GeoGebra no ensino de matemática pode proporcionar uma experiência de aprendizagem mais rica e eficaz.

As percepções dos alunos também ressaltam a importância do uso de tecnologias educacionais para manter o engajamento e a motivação. A interação dinâmica e a possibilidade de visualização clara dos conceitos tornam o aprendizado mais envolvente, ajudando a combater o desinteresse.

Em suma, a sequência didática apoiada pelo GeoGebra demonstrou ser eficaz em promover uma compreensão mais profunda e uma maior habilidade na resolução de problemas, ao mesmo tempo em que aumentou o engajamento e a motivação dos alunos. Esses achados reforçam a importância da integração de ferramentas tecnológicas no ensino de matemática, oferecendo novas oportunidades para um aprendizado mais ativo e eficaz.

# 5 Análise dos resultados

Neste capítulo buscaremos compreender os resultados obtidos na pesquisa, sob a perspectiva da aprendizagem significativa de Ausubel. Esta seção tem como objetivo interpretar os dados coletados de acordo com o referencial teórico adotado, analisando as implicações pedagógicas dos resultados encontrados, destacando as limitações do estudo e oferecendo sugestões para estudos futuros. Por meio dessa análise, pretende-se contribuir para o avanço do conhecimento no campo da educação matemática, fornecendo informações relevantes para educadores, pesquisadores e demais interessados no tema.

## 5.1 Interpretação dos resultados à luz do referencial teórico

A interpretação dos resultados deste estudo, destaca a importância da conexão dos novos conhecimentos com a rede cognitiva prévia dos alunos. Os resultados indicam que a utilização do GeoGebra permitiu aos alunos estabelecerem conexões significativas entre os conceitos matemáticos abordados e seu conhecimento prévio.

De acordo com Ausubel, a aprendizagem significativa ocorre quando os novos conhecimentos são relacionados de maneira não arbitrária e substantiva com conceitos relevantes já existentes na rede cognitiva do aprendiz. Os resultados deste estudo sugerem que o GeoGebra proporcionou aos alunos a oportunidade de explorar os conceitos matemáticos de forma interativa e visual, facilitando a construção de significados e a integração desses conceitos em sua rede cognitiva.

Pois podemos constatar que o GeoGebra proporcionou aos alunos a oportunidade de explorar os conceitos matemáticos de forma interativa e visual a partir das evidências apresentadas no trabalho. O uso do GeoGebra permitiu que os alunos manipulassem gráficos e visualizassem as mudanças nos parâmetros das funções exponenciais e progressões geométricas em tempo real. Isso facilitou a construção de significados, uma vez que os alunos puderam observar diretamente as consequências de alterar variáveis em equações e gráficos, promovendo uma mlhor compreensão.

Além disso, a possibilidade de visualizar essas mudanças e interagir com o material proporcionou uma experiência de aprendizagem que integra os novos conceitos em sua rede cognitiva. A interatividade oferecida pelo GeoGebra promove a aprendizagem significativa, como descrito por Ausubel, pois permitem que os alunos relacionem novos conhecimentos com o que já sabem, fortalecendo a retenção e a compreensão dos conceitos abordados.

Sendo assim, Ausubel enfatiza a importância da organização e da redeção dos novos conhecimentos para facilitar a sua assimilação pelos alunos. Os resultados deste estudo mostram que o GeoGebra ajudou os alunos a organizar e reder os conceitos matemáticos de maneira clara e sistemática.

Outro aspecto relevante da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel é a importância da motivação e do interesse dos alunos no processo de aprendizagem. Os resultados deste estudo indicam que o GeoGebra despertou o interesse dos alunos e os motivou a explorar os conceitos matemáticos de forma ativa e participativa, contribuindo para uma aprendizagem mais engajadora.

Os resultados ressaltam a importância de buscar uma aprendizagem, na qual os alunos se envolvam de forma ativa na construção do conhecimento e consigam relacionar os novos conceitos discutidos em sala de aula com o que já conhecem. A análise comparativa do estudo revela que o uso do GeoGebra contribuiu para a compreensão e aplicação dos conceitos de funções exponenciais e progressões geométricas, facilitando a integração desses conceitos na estrutura cognitiva dos estudantes. No entanto, é fundamental reconhecer que o GeoGebra é apenas um componente dentro de um conjunto mais amplo de fatores pedagógicos necessários.

A incorporação de ferramentas tecnológicas como o GeoGebra pode ajudar os professores a promover uma aprendizagem mais ativa e engajada. Esses recursos possibilitam a criação de experiências de aprendizagem contextualizadas, nas quais os alunos podem explorar conceitos matemáticos de maneira prática e interativa, o que favorece um melhor entendimento dos conteúdos.

Além disso, a utilização de ferramentas como o GeoGebra pode contribuir para o aprimoramento de habilidades fundamentais, como o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a comunicação matemática. Ao explorar e investigar conceitos, os alunos têm a oportunidade de fortalecer sua compreensão e desenvolver maior confiança na aplicação dos conteúdos aprendidos.

Os resultados deste estudo ressaltam a importância de oferecer formação continuada para os professores, para que possam integrar tanto o GeoGebra como outras ferramentas tecnológicas de maneira produtiva em suas práticas pedagógicas. Desenvolver habilidades técnicas e pedagógicas é importante para que os professores possam utilizar essas ferramentas, potencializando seu uso como uma ferramenta complementar no ensino e na aprendizagem.

## 5.2 Limitações do estudo

Uma das limitações deste estudo é o tamanho da amostra. O estudo pode ter sido limitado pelo número relativamente pequeno de participantes, o que pode afetar a generalização dos resultados para uma população mais ampla. Um tamanho de amostra maior poderia fornecer uma visão mais abrangente e confiável dos efeitos do uso do GeoGebra no ensino de Funções Exponenciais e progressões geométricas.

Outra limitação está relacionada à duração do estudo. O período de tempo durante o qual os alunos foram expostos ao uso do GeoGebra pode não ter sido longo o suficiente para observar todos os efeitos potenciais da intervenção. Um estudo mais longo poderia fornecer informações mais detalhadas sobre a eficácia do GeoGebra ao longo do tempo e sua influência no desempenho acadêmico dos alunos.

## 5.3 Sugestões para estudos futuros

Com base no que foi feito até agora, vejo várias possibilidades para expandir minhas pesquisas no futuro. Em primeiro lugar, pretendo investigar como o GeoGebra pode influenciar o aprendizado em diferentes níveis de ensino, desde o ensino fundamental até o médio. Cada faixa etária apresenta desafios únicos e compreender como essa ferramenta interativa pode ser adaptada para maximizar seus benefícios em cada contexto educacional é algo que quero explorar mais a fundo. Por exemplo, no ensino fundamental, meu objetivo é introduzir o GeoGebra de forma lúdica e exploratória, enquanto no ensino médio, planejo utilizá-lo para aprofundar a compreensão de conceitos matemáticos mais complexos. Estou particularmente interessado em realizar um estudo comparativo entre esses diferentes níveis de ensino, para observar como os alunos de cada faixa etária reagem ao GeoGebra e qual é a eficácia da ferramenta em cada estágio do desenvolvimento educacional.

Além disso, vejo uma grande oportunidade para realizar uma pesquisa de longo prazo que analise os efeitos do uso contínuo do GeoGebra ao longo do tempo. Gostaria de avaliar o desempenho dos alunos em matemática em diferentes momentos, ao longo de um período prolongado, para entender como o GeoGebra impacta não apenas o aprendizado imediato, mas também o desenvolvimento de habilidades matemáticas ao longo do tempo. Esse estudo poderia envolver a coleta de dados sobre o desempenho dos alunos em testes padronizados e avaliações internas, bem como o acompanhamento da progressão deles em diferentes tópicos matemáticos. Com uma abordagem mais prolongada, pretendo investigar se os benefícios do GeoGebra se mantêm consistentes ou se há variações na sua eficácia ao longo do tempo. Acredito que essas informações serão extremamente valiosas para educadores e formuladores de políticas educacionais no que diz respeito ao papel do GeoGebra no desenvolvimento acadêmico dos alunos.

Essas novas linhas de pesquisa surgem como uma continuidade natural das descobertas deste estudo, que se concentrou nos resultados imediatos do uso do GeoGebra, os quais foram bastante positivos.

# Referências


AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Psicologia Educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

Brasil. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)*. [S.l.], 2002. Disponível em: <http://www.basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pcn/ciencian.pdf>.

Brasil. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: [s.n.], 2018.

COLL, C. *Aprendizagem Escolar e Construção do Conhecimento*. Porto Alegre: Editora Artmed, 2002.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo: Summus Editorial, 1986.

GEOGEBRA. *GeoGebra*. 2001. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>.

KENSKI, V. M. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. Campinas: Papirus Editora, 2007.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, M. G.; ROCHA, A. A. S. d. As tecnologias digitais no ensino de matemÁtica. *Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação*, v. 8, n. 5, p. 729–739, maio 2022. Disponível em: <https://periodicorease.pro.br/rease/article/view/5513>.

LOPES, M. M. Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software geogebra. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, SciELO Brasil, v. 27, p. 631–644, 2013.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel*. São Paulo: Centauro, 2001.

PACHECO, E. F. Utilizando o software geogebra no ensino da matemática: uma ferramenta para construção de gráficos de parábolas e elipses no 3° ano do ensino médio. *Debates em Educação*, v. 11, n. 24, p. 197–211, ago. 2019. Disponível em: <https://www.seer.ufal.br/index.php/debateseducacao/article/view/6905>.

PONTE, J. P. d. Investigação sobre investigações matemáticas em portugal. *Investigar em educação*, p. 93–169, 2003.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto alegre: Artmed, 1998.

# Anexos

# ANEXO A – Listas de exercícios

## A.1 3º Exercício - Resolução de problemas

Figura 32 – 3º Exercício - Resolução de Problemas

**Universidade Federal Rural de Pernambuco**
**Programa De Pós-Graduação Em Mestrado Profissional Em Matemática**
Tuma: 1º ano , Turma ______ , Turno : Manhã
Professor: Nelson Braz
Data : ______/______/______
**3º Exercício sobre funções exponenciais**

UFRPE

PROFMAT

1º) Uma empresa de tecnologia lançou um novo produto e espera que suas vendas cresçam de forma exponencial ao longo dos próximos meses. A empresa estima que as vendas do produto no primeiro mês serão de 100 unidades e que a razão de crescimento será de 2 vezes a cada mês.

a) Determine a expressão que representa o número de unidades vendidas pela empresa em cada mês, considerando que a relação entre as vendas mensais forma uma progressão geométrica.
b) Calcule o número de unidades vendidas pela empresa no quinto mês.
c) Qual será o total de unidades vendidas pela empresa nos primeiros seis meses?

2º) Uma população de bactérias em um experimento de laboratório cresce de acordo com uma função exponencial. Inicialmente, havia 500 bactérias, e a população triplica a cada 2 horas.

a) Escreva uma expressão para modelar o crescimento da população de bactérias em função do tempo, considerando t como o tempo em horas.
b) Quantas bactérias haverá após 6 horas?
c) Após quanto tempo a população de bactérias atingirá 2000 unidades?

3º) Considere uma sequência de números 2, 8, 32, 128, ... que forma uma progressão geométrica.

a) Determine a razão dessa progressão.
b) Escreva uma função exponencial que modele o comportamento dessa sequência.
c) Qual será o décimo termo dessa sequência?
d) Calcule a soma dos 6 primeiros termos dessa sequência.

4º) Uma fábrica produz um determinado item e estima que a demanda por esse item crescerá exponencialmente a uma taxa de 10% ao ano. No início do ano, a fábrica produziu 500 unidades desse item.

a) Determine a expressão que modela o número de unidades produzidas pela fábrica após t anos.
b) Quantas unidades serão produzidas no final do terceiro ano?
c) Em quantos anos a produção atingirá 1000 unidades?

5º) Um material radioativo tem uma meia-vida de 10 dias. Inicialmente, uma amostra do material tem uma massa de 100 gramas.

a) Escreva uma expressão para modelar a massa do material radioativo em função do tempo, considerando t em dias.
b) Qual será a massa do material radioativo após 20 dias?
c) Em quantos dias a massa do material radioativo será reduzida pela metade pela segunda vez?

6º) Uma empresa farmacêutica desenvolveu um medicamento que se espera que tenha uma taxa de absorção exponencial no organismo humano. O medicamento é administrado em uma dose inicial de 10 mg, e estima-se que a concentração do medicamento no sangue do paciente aumente em uma razão de 2 vezes a cada hora.

a) Determine a expressão que representa a concentração do medicamento no sangue do paciente em função do tempo, considerando que a relação entre as concentrações forma uma progressão geométrica.
b) Calcule a concentração do medicamento no sangue após 2 horas.
c) Qual será a concentração total do medicamento no sangue após 4 horas?

7º) Uma notícia intrigante começou a circular timidamente entre um pequeno grupo de amigos online. Com apenas 5 pessoas inicialmente cientes do assunto, sua repercussão cresceu exponencialmente. A cada hora, cada pessoa compartilhava a notícia com mais 2 amigos, alimentando o rápido espalhar da informação pelas redes sociais. O que começou como uma conversa entre poucos logo se transformou em um fenômeno viral, capturando a atenção de milhares de usuários em questão de horas.

a) Escreva uma expressão que modele o número de pessoas que conhecem a notícia em função do tempo, considerando t em horas.

b) Quantas pessoas conhecerão a notícia após 3 horas?

c) Em quantas horas a notícia será conhecida por mais de 50 pessoas?

Fonte: Produzido pelo autor

## A.2 Avaliação diagnóstica

Figura 33 – Avaliação diagnóstica

**Universidade Federal Rural de Pernambuco**
**Programa De Pós-Graduação Em Mestrado Profissional Em Matemática**
Tuma: 1º ano , Turma ______ , Turno : Manhã
Professor: Nelson Braz
Data : ______/______/______
**Atividade Diagnóstica de Mestrado**

1º) A concentração de alguns medicamentos no organismo está relacionada com a meia-vida, ou seja, o tempo necessário para que a quantidade inicial do medicamento no organismo seja reduzida pela metade. Considere que a meia – vida de um determinado medicamento é de 3 horas. Sabendo que um paciente ingeriu 120 mg desse medicamento às 10 horas, assinale a alternativa que representa a melhor aproximação para a concentração desse medicamento, no organismo desse paciente, às 16 horas do dia seguinte.

a) 27,5 mg
b) 30 mg
c) 60 mg
d) 90 mg
e) 15 mg

2º) Em uma pequena cidade, surgiram boatos de que a quantidade de fofocas sobre um certo evento está se espalhando de maneira exponencial. Suponha que o número de fofocas seja modelado pela função $f(x) = b.a^x$, onde x representa o tempo em dias. Os boatos começaram com uma única fofoca, e após 3 dias, a quantidade de fofocas atingiu 16. Além disso, soube-se que a cada dia, o número de fofocas dobra.

a) Encontre os valores de a e b na função $f(x)$ com base nas informações fornecidas.
b) Determine quantas fofocas são esperadas após 5 dias, usando a função exponencial.
c) Se a cidade não tomar medidas para conter as fofocas, em quantos dias se espera que o número de fofocas atinja 256?

3º) Suponha que um vírus tenha infectado apenas uma pessoa, ou seja, só existe um contaminado dentro de uma população e que, esta pessoa infectada pode infectar apenas duas pessoas sem nenhum tipo de proteção ou contenção dos riscos. Em seguida, cada uma das duas pessoas infectadas pode infectar outras duas, e assim por diante. Determine a função que determinará quantas pessoas estarão infectadas a cada interação e determine após quantas interações teremos uma quantidade de infectados superior que a população do município de Camaragibe. (Dados: Suponha que a população do município de Camaragibe seja de 1024 habitantes)

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

4º) Considere a situação em que um celular é adquirido por R$ 1.600,00. Devido à rápida evolução tecnológica e ao lançamento de novos modelos, o valor do celular diminui a uma taxa de 50% ao ano.

O modelo de depreciação do celular ao longo do tempo usando é dado pela função $f(x) = b.(1-q)^x$, onde b é o preço inicial do celular, $f(x)$ é o valor do celular após x anos, q é a taxa de depreciação e x é o tempo em anos.

a) Calcule o valor do celular após 2 anos.
b) Em quantos anos o valor do celular será reduzido pela metade em relação ao preço inicial?
c) Se você decidir vender o celular quando seu valor atingir R$ 100,00, quantos anos se passarão desde a compra até a venda?

5º) A popularidade de uma postagem em uma rede social, como o Instagram, pode ser modelada por uma função exponencial que descreve o número de curtidas ao longo do tempo. Considere a função $f(x) = b.a^x$, onde $x$ representa o tempo em horas após a postagem, e $f(x)$ é o número de curtidas na postagem. Sabendo que no momento da postagem, a publicação recebeu 50 curtidas, suponha que a postagem tenha uma taxa de crescimento de 20% por hora. Se a postagem foi feita às 14h e espera-se que o número de curtidas seja avaliado às 16h, quantas curtidas são previstas para esse intervalo de tempo?

Fonte: Produzido pelo autor