



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Roberta Santos Oliveira**

**Círculos: Propriedades e Aplicações**

RECIFE  
2025





UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Roberta Santos Oliveira**

## **Círculos: Propriedades e Aplicações**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adriano Regis Rodrigues

RECIFE  
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

O48c Oliveira, Roberta Santos.  
Círculos : propriedades e aplicações / Roberta Santos Oliveira. – Recife, 2025.  
156 f. : il.

Orientador(a): Adriano Regis Rodrigues.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco,  
Mestrado Profissional em Matemática, Recife, BR-PE, 2025.  
Inclui referências.

1.Círculos 2. Geometria 3. Questões olímpicas I. Rodrigues, Adriano Regis,  
orient. II. Título

CDD 510

*À minha mãe e minhas irmãs*



# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por estar sempre ao meu lado acompanhando minha jornada e me fortalecendo.

À minha mãe e minhas irmãs, por todo apoio emocional e cuidado comigo e com meu filho. Sem elas eu não teria conseguido chegar até aqui.

Além disso, também gostaria de agradecer ao meu orientador, por toda paciência e leveza em nossas reuniões.



*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da mente,  
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:  
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.  
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)*



# Resumo

Pesquisas mostram que há um considerável déficit educacional de geometria no ensino básico e apontam que parte substancial dos alunos não entende seus conceitos mais simples. O presente trabalho busca estimular o ensino de geometria euclidiana, facilitar sua aprendizagem e contribuir para divulgação de conhecimentos geométricos importantes. Para isso, torna-se fundamental o estudo das principais figuras planas e, dentre elas, o círculo tem um papel de destaque. Entender suas propriedades ajuda a construir uma base sólida para os fundamentos da geometria e, sobretudo, colabora para qualificar e caracterizar outros objetos, figuras e lugares geométricos. Neste sentido, tratamos da elaboração de uma enciclopédia de círculos, com suas principais propriedades e consequências, além de aplicações em questões olímpicas. Este conteúdo encontra-se disperso em diferentes fontes e idiomas, o que ocasionalmente acarreta dificuldade aos estudantes e pesquisadores em suas investigações sobre o tema.

**Palavras-chave:** círculos; geometria; questões olímpicas.



# Abstract

Some works in the literature shown there is a noticeable educacional deficit on geometry in basic education and that a lot of students do not understand its simplest concepts. The present work pursuit to stimulate the teaching of euclidean geometry, to facilitate its learning by them and to contribute to disclosure of important geometric knowledge. For that, it is crucial the study of plane figures and, among them, the circle has an important role. To understand its proprieties helps to build a solid base to the geometry foundations and, especially, collaborates to qualify and characterize others objects, figures and locus. For that matter, we propose a encyclopedia of circles, that has its main proprieties and consequences, in addition to applications in olympiad problems. This content is dispersed in many source and languages, which occasionally result in having more difficulty to students and researches in their investigations about the topic.

**Keywords:** circles; geometry; olympiad problems.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Segmentos tangentes a um círculo - elaborado pela autora. . . . .	26
Figura 2 – Ceviana qualquer no triângulo $ABC$ - elaborado pela autora. . . . .	27
Figura 3 – Teorema de Tales - elaborado pela autora. . . . .	27
Figura 4 – Mediana $AM$ no triângulo $ABC$ - elaborado pela autora. . . . .	27
Figura 5 – Teorema da base média - elaborado pela autora. . . . .	29
Figura 6 – Ângulo inscrito e semi-inscrito - elaborado pela autora. . . . .	29
Figura 7 – Relação entre o ângulo inscrito e o central de um mesmo arco - elaborado pela autora. . . . .	30
Figura 8 – Arco capaz - elaborado pela autora. . . . .	30
Figura 9 – Teorema das bissetrizes - elaborado pela autora. . . . .	31
Figura 10 – Conjugados harmônicos e as bissetrizes - elaborado pela autora. . . . .	32
Figura 11 – Triângulo medial - elaborado pela autora. . . . .	33
Figura 12 – Lei dos cossenos - elaborado pela autora. . . . .	33
Figura 13 – Teorema de Ceva - Elaborado pela autora . . . . .	34
Figura 14 – Definição de ângulos isogonais - elaborado pela autora. . . . .	36
Figura 15 – Retas e pontos isogonais em um triângulo - elaborado pela autora. . . . .	36
Figura 16 – Razão das distâncias aos lados de $\angle A$ - elaborado pela autora. . . . .	37
Figura 17 – As isogonais de $AP$ , $BP$ e $CP$ são concorrentes - elaborado pela autora . . .	38
Figura 18 – Ortocentro e circuncentro como conjugados isogonais - elaborado pela autora. . . . .	39
Figura 19 – Perpendiculares partindo de um ponto de uma das retas isogonais no triângulo - elaborado pela autora. . . . .	39
Figura 20 – Demonstração das perpendiculares partindo de um ponto de uma das retas isogonais no triângulo - elaborado pela autora. . . . .	40
Figura 21 – Simediana - elaborado pela autora. . . . .	40
Figura 22 – Caracterização do ponto simediano $K$ - elaborado pela autora. . . . .	41
Figura 23 – Simediana e a razão entre os lados - elaborado pela autora. . . . .	42
Figura 24 – Demonstração do teorema das cordas - elaborado pela autora. . . . .	43
Figura 25 – Demonstração da recíproca do teorema das cordas - elaborado pela autora. . . . .	43
Figura 26 – Demonstração do círculo inscrito ao triângulo - elaborado pela autora. . . . .	45
Figura 27 – Círculo inscrito ao triângulo $ABC$ - elaborado pela autora. . . . .	46
Figura 28 – Círculo inscrito ao triângulo $ABC$ nomeando cada lado - elaborado pela autora. . . . .	47
Figura 29 – Propriedade do incentro - elaborado pela autora. . . . .	48
Figura 30 – Os três círculos exinscritos a um triângulo - elaborado pela autora. . . . .	49
Figura 31 – Círculo A-exinscrito - elaborado pela autora. . . . .	49

Figura 32 – Demonstração da relação entre o raio do círculo inscrito e do exinscrito - elaborado pela autora. . . . .	50
Figura 33 – Propriedade do exincentro - elaborado pela autora. . . . .	51
Figura 34 – Círculo circunscrito a um polígono - elaborado pela autora. . . . .	52
Figura 35 – Consequência da propriedade - elaborado pela autora. . . . .	53
Figura 36 – Observação sobre o circuncentro - elaborado pela autora. . . . .	53
Figura 37 – Lema do incentro e exincentro - elaborado pela autora. . . . .	54
Figura 38 – Quadrilátero cíclico - elaborado pela autora. . . . .	55
Figura 39 – Demonstração quadrilátero cíclico - elaborado pela autora. . . . .	56
Figura 40 – Teorema de Pitot - elaborado pela autora. . . . .	57
Figura 41 – Demonstração do teorema de Pitot - elaborado pela autora. . . . .	57
Figura 42 – Lei dos senos - elaborado pela autora. . . . .	58
Figura 43 – Retas antiparalelas - elaborado pela autora. . . . .	58
Figura 44 – Paralelas e antiparalelas - elaborado pela autora. . . . .	59
Figura 45 – Paralela e antiparalela coincidentes - elaborado pela autora. . . . .	59
Figura 46 – Relação da paralela e antiparalela com a mediana e a simediana - elaborado pela autora. . . . .	60
Figura 47 – Demonstração de que a simediana divide os segmentos antiparalelos de um triângulo ao meio - elaborado pela autora. . . . .	60
Figura 48 – A reta de Simson - elaborado pela autora. . . . .	61
Figura 49 – Demonstração da reta de Simson - elaborado pela autora. . . . .	62
Figura 50 – Triângulo órtico - elaborado pela autora. . . . .	62
Figura 51 – Triângulo pedal - elaborado pela autora. . . . .	63
Figura 52 – Triângulo órtico - elaborado pela autora. . . . .	63
Figura 53 – Demonstração do triângulo órtico - elaborado pela autora. . . . .	64
Figura 54 – Ponto de Nagel - elaborado pela autora. . . . .	64
Figura 55 – Demonstração do ponto de Nagel - elaborado pela autora. . . . .	65
Figura 56 – Círculo de Apolônio - elaborado pela autora. . . . .	67
Figura 57 – Demonstração do círculo de Apolônio - elaborado pela autora. . . . .	68
Figura 58 – Círculo de 9 pontos - elaborado pela autora. . . . .	69
Figura 59 – Primeira parte da demonstração do círculo de 9 pontos - elaborado pela autora. . . . .	70
Figura 60 – Segunda parte da demonstração do círculo de 9 pontos - elaborado pela autora. . . . .	71
Figura 61 – Triângulo anticomplementar - elaborado pela autora. . . . .	73
Figura 62 – Círculo anticomplementar - elaborado pela autora. . . . .	74
Figura 63 – Disponível em: < <a href="https://www.imo-official.org/year_info.aspx?year=1999">https://www.imo-official.org/year_info.aspx?year=1999</a> >. . . . .	75
Figura 64 – Círculos de Johnson - elaborado pela autora. . . . .	75
Figura 65 – Demonstração do círculo de Johnson - elaborado pela autora. . . . .	76

Figura 66 – Demonstração do ponto de encontro dos círculos de Johnson - elaborado pela autora. . . . .	77
Figura 67 – Círculos de Johnson e círculo anticomplementar - elaborado pela autora. . . . .	77
Figura 68 – Paralelogramo de Varignon - elaborado pela autora. . . . .	79
Figura 69 – Círculo de 8 pontos - elaborado pela autora. . . . .	80
Figura 70 – Círculo pedal de $(X, P)$ - elaborado pela autora. . . . .	81
Figura 71 – Demonstração do círculo pedal - elaborado pela autora. . . . .	82
Figura 72 – Cleaver - elaborado pela autora. . . . .	83
Figura 73 – Demonstração do paralelismo do cleaver com a bissetriz - elaborado pela autora. . . . .	84
Figura 74 – Triângulo medial - elaborado pela autora . . . . .	84
Figura 75 – Círculo de Spieker - elaborado pela autora. . . . .	85
Figura 76 – Demonstrando que $G$ divide o segmento $IM$ em três partes iguais (parte 1) - elaborado pela autora. . . . .	86
Figura 77 – Demonstrando que $G$ divide o segmento $IM$ em três partes iguais (parte 2) - elaborado pela autora. . . . .	86
Figura 78 – Demonstrando que $S$ divide $M$ ao meio - elaborado pela autora. . . . .	89
Figura 79 – O incentro $I$ de um triângulo $ABC$ é o ponto de Nagel de seu triângulo medial - elaborado pela autora. . . . .	89
Figura 80 – Triângulo congruente ao triângulo medial, no qual o círculo de Spieker também é inscrito - elaborado pela autora. . . . .	90
Figura 81 – Círculo de Fuhrmann - elaborado pela autora. . . . .	91
Figura 82 – Círculo de Fuhrmann destacando um de seus diâmetros - elaborado pela autora. . . . .	91
Figura 83 – Propriedade do prolongamento da altura - elaborado pela autora. . . . .	92
Figura 84 – Encontro da bissetriz de um ângulo e da mediatriz do lado oposto - elaborado pela autora. . . . .	92
Figura 85 – Demonstração do círculo de Fuhrmann - parte 1 - elaborado pela autora. . . . .	93
Figura 86 – Demonstração do círculo de Fuhrmann - parte 2 - elaborado pela autora. . . . .	94
Figura 87 – Demonstração do círculo de Fuhrmann - parte 3 - elaborado pela autora. . . . .	94
Figura 88 – Círculo de Droz-Farny - elaborado pela autora. . . . .	97
Figura 89 – Demonstração do círculo de Droz-Farny - elaborado pela autora. . . . .	98
Figura 90 – Círculos centrados nos pés das alturas passando pelo centro do círculo circunscrito ao triângulo - elaborado pela autora. . . . .	99
Figura 91 – Círculos centrados nos pontos médios passando pelo ortocentro do triângulo - elaborado pela autora. . . . .	100
Figura 92 – Os dois círculos de Lemoine - elaborado pela autora. . . . .	101
Figura 93 – Círculo de Tucker - elaborado pela autora. . . . .	102
Figura 94 – Hexágono de Tucker - elaborado pela autora. . . . .	103

Figura 95 – Hexágono de Tucker com todos os ângulos nomeados - elaborado pela autora.	104
Figura 96 – Demonstração do centro do círculo de Tucker - elaborado pela autora. . . .	104
Figura 97 – Demonstração do centro do círculo de Tucker, parte final - elaborado pela autora. . . . .	105
Figura 98 – Círculo de Tucker com as paralelas e antiparalelas fora do triângulo - elaborado pela autora. . . . .	106
Figura 99 – Demonstração da existência do primeiro círculo de Lemoine - elaborado pela autora. . . . .	106
Figura 100 – Ponto de Gergonne - elaborado pela autora. . . . .	109
Figura 101 – Círculo de Adam - elaborado pela autora. . . . .	110
Figura 102 – Demonstração do círculo de Adams - parte 1 - elaborado pela autora. . . .	111
Figura 103 – Demonstração do círculo de Adams - parte 2 - elaborado pela autora. . . .	111
Figura 104 – Círculo de Adams de $ABC$ é o primeiro círculo de Lemoine de $XYZ$ - elaborado pela autora. . . . .	112
Figura 105 – Círculo de Taylor . . . . .	113
Figura 106 – Primeira parte da demonstração do círculo de Taylor - elaborado pela autora.	114
Figura 107 – Segunda parte da demonstração do círculo de Taylor - elaborado pela autora.	114
Figura 108 – Terceira parte da demonstração do círculo de Taylor - elaborado pela autora.	116
Figura 109 – Círculos de Miquel com todos os pontos nos lados do triângulo - elaborado pela autora. . . . .	117
Figura 110 – Primeira parte da demonstração do círculo de Miquel - elaborado pela autora.	117
Figura 111 – Segunda parte da demonstração do círculo de Miquel - elaborado pela autora.	118
Figura 112 – Círculos de Miquel com um dos pontos fora do lado do triângulo - elaborado pela autora. . . . .	119
Figura 113 – Círculos de Miquel com $P$ externo ao triângulo - elaborado pela autora. . .	119
Figura 114 – Círculos de Miquel - elaborado pela autora. . . . .	120
Figura 115 – O pé das perpendiculares traçadas a partir do ponto de Miquel são colineares - elaborado pela autora. . . . .	121
Figura 116 – Roto-homotetia centrada em $O$ - elaborado pela autora. . . . .	121
Figura 117 – Círculos se intersectando e o centro da roto-homotetia - elaborado pela autora. . . . .	122
Figura 118 – Roto-homotetia construída a partir da interseção dos segmentos $AD$ e $BC$ - elaborado pela autora. . . . .	123
Figura 119 – Centros dos círculos de Miquel formando um novo círculo que também passa pelo ponto de Miquel - elaborado pela autora. . . . .	123
Figura 120 – Demonstração do círculo formado pelos centros dos círculos de Miquel - parte 1 - elaborado pela autora. . . . .	124
Figura 121 – Demonstração do círculo formado pelos centros dos círculos de Miquel - parte 2 - elaborado pela autora. . . . .	124

Figura 122 – Demonstração do círculo formado pelos centros dos círculos de Miquel - parte 3 - elaborado pela autora. . . . .	125
Figura 123 – Círculo inscrito em um segmento - elaborado pela autora. . . . .	127
Figura 124 – Demonstração da semelhança entre os triângulos $TMB$ e $BMK$ - elaborado pela autora. . . . .	128
Figura 125 – Círculo inscrito curvilíneo - elaborado pela autora. . . . .	129
Figura 126 – Demonstração que $C, L, I$ e $T$ são concíclicos - elaborado pela autora. . . . .	129
Figura 127 – Triângulos $MKI$ e $MIT$ - elaborado pela autora. . . . .	130
Figura 128 – Demonstração da semelhança entre os triângulos $MKI$ e $MIT$ - elaborado pela autora. . . . .	130
Figura 129 – Círculo inscrito A-mixtilíneo - elaborado pela autora. . . . .	132
Figura 130 – Demonstração que $\angle ATK$ e $\angle LTI$ têm a mesma medida - elaborado pela autora. . . . .	133
Figura 131 – Lema do círculo inscrito mixtilíneo - elaborado pela autora. . . . .	134
Figura 132 – Os pontos de Brocard - elaborado pela autora. . . . .	135
Figura 133 – Demonstração do ângulo formado pelos pontos de Brocard - elaborado pela autora. . . . .	136
Figura 134 – Construção do triângulo $A'B'C'$ - elaborado pela autora. . . . .	139
Figura 135 – Primeiro ponto de Brocard de um triângulo é também o primeiro ponto de Brocard do triângulo pedal de $\Omega_1$ - elaborado pela autora. . . . .	140
Figura 136 – Círculo de Brocard - elaborado pela autora. . . . .	141
Figura 137 – Ponto simediano e suas distâncias aos lados do triângulo - elaborado pela autora. . . . .	141
Figura 138 – Demonstração do círculo de Brocard - elaborado pela autora. . . . .	142
Figura 139 – O ponto de Brocard no triângulo equilátero - elaborado pela autora. . . . .	143
Figura 140 – Primeiro triângulo de Brocard - elaborado pela autora. . . . .	145
Figura 141 – Segundo triângulo de Brocard - elaborado pela autora. . . . .	145
Figura 142 – Imagem utilizada na resolução do exercício 3.29 (CHEN, 2021, p.249) - elaborado pela autora . . . . .	147
Figura 143 – Imagem utilizada na resolução do exercício 10.20 (CHEN, 2021, p. 279) - elaborado pela autora. . . . .	148
Figura 144 – Figura para auxiliar na resolução da questão - elaborado pela autora. . . . .	149



# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>1</b>	<b>RESULTADOS PRELIMINARES</b> . . . . .	<b>25</b>
1.1	Lugares Geométricos Básicos . . . . .	25
1.2	Teorema dos Segmentos Tangentes ao Círculo . . . . .	25
1.3	Divisão de segmentos . . . . .	26
1.4	Teorema de Tales . . . . .	26
1.5	Propriedade das Medianas . . . . .	27
1.6	Mediana Relativa à Hipotenusa . . . . .	29
1.7	Teorema da Base Média para Triângulos . . . . .	29
1.8	Ângulo Inscrito e Semi-inscrito a um Círculo . . . . .	29
1.9	Ângulo Externo de um Triângulo . . . . .	30
1.10	Arco Capaz . . . . .	30
1.11	Teorema das Bissetrizes . . . . .	31
1.12	Triângulo Medial . . . . .	33
1.13	Lei dos Cossenos . . . . .	33
1.14	Teorema de Ceva . . . . .	34
1.15	Conjugados Isogonais . . . . .	36
1.15.1	Retas e Pontos Isogonais . . . . .	36
1.15.2	A Simediana e o Ponto Simediano (ou Ponto de Lemoine) . . . . .	40
1.16	Teorema das Cordas . . . . .	42
1.17	Homotetia . . . . .	43
<b>2</b>	<b>CÍRCULOS PRINCIPAIS</b> . . . . .	<b>45</b>
2.1	Círculo Inscrito . . . . .	45
2.2	Círculo Exinscrito . . . . .	48
2.3	Círculo Circunscrito . . . . .	52
2.4	O Lema do Incentro e Exincentro . . . . .	53
<b>3</b>	<b>RESULTADOS BÁSICOS</b> . . . . .	<b>55</b>
3.1	Quadrilátero Cíclico . . . . .	55
3.2	Teorema de Pitot . . . . .	56
3.3	Lei dos Senos . . . . .	58
3.4	Paralelas e Antiparalelas . . . . .	58
3.5	Reta de Simson . . . . .	61
3.6	O Triângulo Órtico . . . . .	62

3.7	Ponto de Nagel . . . . .	64
4	CÍRCULO DE APOLÔNIO . . . . .	67
5	CÍRCULO DE 9 PONTOS OU CÍRCULO DE EULER . . . . .	69
6	CÍRCULO ANTICOMPLEMENTAR . . . . .	73
7	CÍRCULOS DE JOHNSON . . . . .	75
8	CÍRCULO DE 8 PONTOS . . . . .	79
8.1	Paralelogramo de Varignon . . . . .	79
8.2	O círculo de 8 pontos . . . . .	79
9	CÍRCULO PEDAL . . . . .	81
10	CÍRCULO DE SPIEKER . . . . .	83
10.1	Cleaver . . . . .	83
10.2	Círculo de Spieker . . . . .	85
10.3	O Ponto de Nagel e o Círculo de Spieker . . . . .	85
11	CÍRCULO DE FUHRMANN . . . . .	91
12	CÍRCULO DE DROZ-FARNY . . . . .	97
13	OS CÍRCULOS DE LEMOINE E O CÍRCULO DE TUCKER . . . . .	101
13.1	Os círculos de Lemoine . . . . .	101
13.2	Círculo de Tucker . . . . .	102
13.3	Demonstração da existência do primeiro círculo de Lemoine . . . . .	106
14	CÍRCULO DE ADAMS . . . . .	109
14.1	O Ponto de Gergonne . . . . .	109
14.2	O Círculo de Adams . . . . .	110
15	CÍRCULO DE TAYLOR . . . . .	113
16	CÍRCULO DE MIQUEL . . . . .	117
17	CÍRCULO INSCRITO MIXTILINEAR OU CÍRCULO DE MANNHEIM . . . . .	127
17.1	Círculo Inscrito em um Segmento . . . . .	127
17.2	Círculo Inscrito Curvilíneo . . . . .	129
17.3	Círculo Inscrito Mixtilíneo ou Círculo de Mannheim . . . . .	132
18	CÍRCULO DE BROCARD . . . . .	135

<b>18.1</b>	<b>Os Pontos de Brocard</b> . . . . .	<b>135</b>
<b>18.2</b>	<b>O Círculo de Brocard</b> . . . . .	<b>140</b>
<b>18.3</b>	<b>Os triângulos de Brocard</b> . . . . .	<b>144</b>
<b>18.3.1</b>	<b>O primeiro triângulo de Brocard</b> . . . . .	<b>144</b>
<b>18.3.2</b>	<b>O segundo triângulo de Brocard</b> . . . . .	<b>145</b>
<b>19</b>	<b>QUESTÕES DE OLIMPÍADAS</b> . . . . .	<b>147</b>
<b>19.1</b>	<b>Alguns problemas e suas soluções</b> . . . . .	<b>147</b>
<b>19.2</b>	<b>Problemas propostos</b> . . . . .	<b>148</b>
	<b>Conclusão</b> . . . . .	<b>151</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>153</b>



# Introdução

De acordo com a BNCC, o estudo da geometria envolve “um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (BRASIL, 2018, p. 271), contudo, há um déficit considerável no aprendizado de seus conceitos fundamentais. De acordo com Sant’ana “a geometria está sendo pouco estudada nas escolas” (SANT’ANA, 2009, p.10).

Pavanello (1993) afirma que, após a promulgação da Lei 5692/71, que mudou a organização do ensino no Brasil, muitos professores de matemática deixaram de incluir a Geometria em seus planos de aula por insegurança. Outros apenas a incluíam no final do programa, mas acabavam sem ensiná-la, com a desculpa de faltar tempo.

Pinheiro (2019) analisou diversos autores em seu trabalho, além de realizar uma pesquisa de campo com 27 alunos do 7º ano em uma escola do Pará, utilizando a teoria de Van Hiele, que separa em seis os níveis de aprendizagem de geometria dos alunos, indo de “sem nível” e depois do nível 0 ao nível 4. Apenas um terço dos alunos alcançaram o nível 0, os demais, ficaram no “sem nível”.

Sant’ana (2009) realizou uma pesquisa com 219 estudantes da 8ª série da rede estadual de Niterói e identificou que 120 alunos não se enquadram em nível algum do estudo. Os demais ficaram no “sem nível”, que trata apenas de identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas.

Para estimular o estudo da geometria e disseminar suas propriedades básicas, o conhecimento das principais figuras planas é fundamental, com destaque para o círculo. Existem diversos círculos notáveis, desde os mais comuns — como o inscrito e o circunscrito a um polígono — até os mais específicos, como os círculos de Miquel e de Brocard.

Contudo, o principal desafio é que este conteúdo se encontra disperso em diferentes fontes, o que dificulta significativamente a pesquisa sobre o tema. Além da carência de um material que consolide esses conhecimentos, alguns tópicos, como o Círculo de Adam, não foram encontrados nos textos em português durante nossa pesquisa. Essa falta de material específico prejudica principalmente os estudantes em preparação para olimpíadas de matemática.

Para suprir a lacuna identificada, este trabalho tem como objetivo principal a criação de uma enciclopédia de círculos, visando incentivar o ensino e a aprendizagem da geometria na educação básica. O material reúne e caracteriza um vasto número de círculos, descrevendo suas propriedades, os passos para suas construções e suas principais consequências. Com isso, busca-se facilitar estudos, pesquisas, a resolução de problemas e assegurar a autonomia

do estudante em suas investigações.

Desse modo, o conteúdo beneficiará tanto estudantes em diferentes etapas de formação quanto professores, que poderão utilizá-lo na preparação de aulas e no treinamento de turmas para exames, concursos e olimpíadas.

Ao final, são propostos exercícios de vestibulares e olimpíadas que aplicam os conceitos estudados. Para aprofundamento, as soluções de alguns desses problemas podem ser consultadas na obra *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads* (2021).

A principal fonte de pesquisa para a elaboração deste trabalho foi o livro *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry* (1995), que serviu de base para diversas demonstrações.

# 1 Resultados Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados preliminares fundamentais que serão utilizados no desenvolvimento dos capítulos subsequentes, iniciando pela definição do próprio círculo. É importante ressaltar que não faremos distinção entre a definição de círculo e circunferência. Algumas demonstrações consideradas elementares foram suprimidas, ficando a cargo do leitor, caso necessário, desenvolvê-las.

## 1.1 Lugares Geométricos Básicos

**Definição 1.1** (Círculo como um lugar geométrico). Dado um ponto  $O$  e um  $r > 0$ , o círculo de centro  $O$  e raio  $r$  é o lugar geométrico de todos os pontos num plano cuja distância a  $O$  é igual à distância  $r$  dada.

**Definição 1.2** (Mediatriz). A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio.

**Proposição 1.3** (Mediatriz como um lugar geométrico). *A mediatriz de um segmento  $AB$  é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de  $A$  e de  $B$ .*

**Definição 1.4** (Bissetriz). A bissetriz é a reta que divide um ângulo ao meio.

**Definição 1.5** (Bissetriz Externa). A bissetriz externa de um ângulo divide o ângulo externo adjacente ao ângulo interno em dois ângulos congruentes.

**Proposição 1.6** (Bissetriz como um lugar geométrico). *A bissetriz é o lugar geométrico dos pontos no interior do ângulo equidistante aos seus lados.*

## 1.2 Teorema dos Segmentos Tangentes ao Círculo

Dizemos que uma reta  $r$  é tangente a um círculo no ponto  $P$ , se  $P$  é o único ponto comum entre a reta e o círculo.

**Teorema 1.7** (Reta tangente ao círculo). *Seja  $r$  uma reta que passa por um ponto  $P$  de um círculo de centro  $O$ . Então  $r$  é tangente ao círculo em  $P$  se, e somente se,  $OP \perp r$ .*

**Teorema 1.8** (Teorema dos Segmentos Tangentes). *Sejam  $AP$  e  $AQ$  retas tangentes a um círculo nos pontos  $P$  e  $Q$ , respectivamente, passando por um ponto  $A$  do seu exterior. Os segmentos  $AP$  e  $AQ$  são congruentes.*

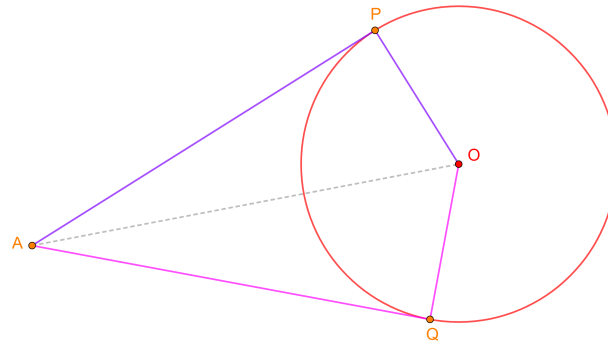


Figura 1 – Segmentos tangentes a um círculo - elaborado pela autora.

### 1.3 Divisão de segmentos

Dizemos que um ponto  $P$  divide um segmento (não orientado)  $AB$  na razão  $k > 0$  quando  $P$  pertence a reta  $AB$  e  $\frac{PA}{PB} = k$ .

Se o ponto  $P$  pertence ao segmento  $AB$ , dizemos que  $P$  divide  $AB$  internamente.

Se o ponto  $P$  pertence a reta  $AB$  mas não pertence ao segmento  $AB$ , dizemos que  $P$  divide  $AB$  externamente.

**Proposição 1.9.** *Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos e  $k$  um real positivo. Então:*

- (i) *Existe um único ponto  $P$  que divide internamente o segmento  $AB$  na razão  $k$ .*
- (ii) *Se  $k \neq 1$ , existe um único ponto  $Q$  que divide externamente o segmento  $AB$  na razão  $k$ .*

*Observação 1.10.* O ponto médio de um segmento é o único ponto que o divide na razão 1.

**Definição 1.11** (Divisão Harmônica). Dizemos que  $X$  e  $Y$  dividem harmonicamente o segmento  $AB$  se, sendo  $X, A, Y$  e  $B$  colineares,  $\frac{AX}{AY} = \frac{BX}{BY}$ .

*Observação 1.12.*  $X$  e  $Y$  dividem harmonicamente o segmento  $AB$ , assim como  $A$  e  $B$  dividem o segmento  $XY$  harmonicamente. Dizemos, então, que  $(AB; XY)$  é uma quádrupla harmônica.

### 1.4 Teorema de Tales

**Proposição 1.13.** *Dado  $ABC$  um triângulo, com  $D$  um ponto qualquer em  $BC$ ,  $AD$  dividirá o triângulo em dois  $ADB$  e  $ADC$ , de modo que a razão das áreas dos triângulos formados é igual a razão na qual  $D$  divide o lado  $BC$ , ou seja,  $\frac{[ADB]}{[ADC]} = \frac{DB}{DC}$ .*

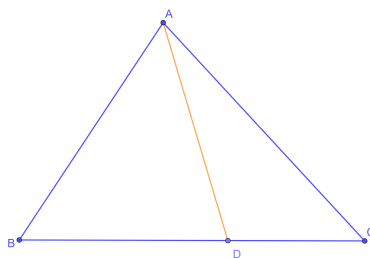


Figura 2 – Ceviana qualquer no triângulo  $ABC$  - elaborado pela autora.

**Teorema 1.14** (Teorema de Tales). *Um feixe de retas paralelas determina sobre duas retas transversais segmentos proporcionais.*

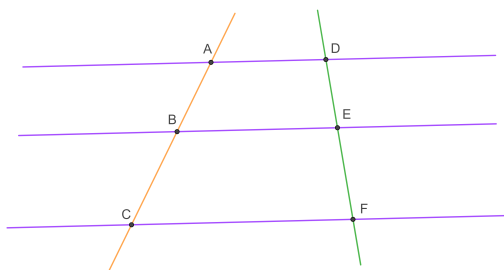


Figura 3 – Teorema de Tales - elaborado pela autora.

Nesse caso, teríamos

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

## 1.5 Propriedade das Medianas

**Proposição 1.15** (Propriedade das Medianas). *Seja  $AM$  a mediana de um triângulo  $ABC$  relativa ao lado  $BC$ . Então  $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$ .*

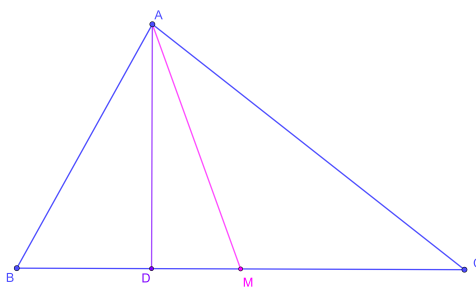


Figura 4 – Mediana  $AM$  no triângulo  $ABC$  - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Sendo  $AM$  mediana e  $AD$  altura do triângulo  $ABC$ , ambas relativas ao lado  $BC$ . Usando o teorema de Pitágoras, temos as seguintes equações

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \quad (1.1)$$

$$AC^2 = CD^2 + AD^2. \quad (1.2)$$

Somando as equações (1.1) e (1.2), temos

$$AB^2 + AC^2 = BD^2 + CD^2 + 2AD^2. \quad (1.3)$$

Agora observe o triângulo retângulo  $ADM$ , também por Pitágoras, podemos escrever

$$AM^2 = AD^2 + DM^2$$

$$AD^2 = AM^2 - DM^2. \quad (1.4)$$

Vamos, então, substituir a equação (1.4) em (1.3)

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BD^2 + CD^2 + 2(AM^2 - DM^2) \\ &= 2AM^2 + BD^2 + CD^2 - 2DM^2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Perceba que

$$BD^2 = (BM - DM)^2$$

$$\Rightarrow BD^2 = BM^2 - 2 \cdot BM \cdot DM + DM^2$$

$$\Rightarrow BD^2 - DM^2 = BM^2 - 2 \cdot BM \cdot DM. \quad (1.6)$$

De maneira análoga,

$$CD^2 = (CM + DM)^2$$

$$\Rightarrow CD^2 = CM^2 + 2 \cdot CM \cdot DM + DM^2$$

$$\Rightarrow CD^2 - DM^2 = CM^2 + 2 \cdot CM \cdot DM. \quad (1.7)$$

Agora vamos substituir as equações (1.6) e (1.7) em (1.5)

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 2AM^2 + BD^2 - DM^2 + CD^2 - DM^2 \\ &= 2AM^2 + BM^2 - 2 \cdot BM \cdot DM + CM^2 + 2 \cdot CM \cdot DM \\ &= 2AM^2 + BM^2 + CM^2 \\ &= 2AM^2 + 2BM^2. \end{aligned}$$



## 1.6 Mediana Relativa à Hipotenusa

**Teorema 1.16.** *A mediana relativa a hipotenusa de um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa.*

## 1.7 Teorema da Base Média para Triângulos

**Teorema 1.17** (Teorema da base média de um triângulo). *Seja  $ABC$  um triângulo,  $B_1$  e  $C_1$  os pontos médios dos lados  $AC$  e  $AB$ , respectivamente. O segmento  $B_1C_1$  é denominado base média do triângulo, é paralelo ao lado oposto  $BC$  e mede metade do segmento  $BC$ .*

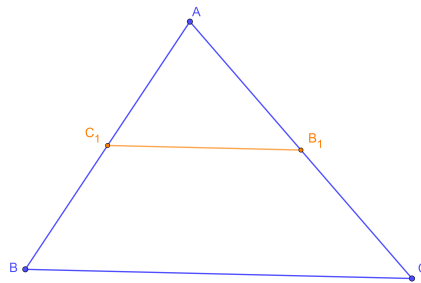


Figura 5 – Teorema da base média - elaborado pela autora.

## 1.8 Ângulo Inscrito e Semi-inscrito a um Círculo

**Definição 1.18** (Ângulo inscrito). Um ângulo inscrito a um círculo é o ângulo cujo vértice pertence ao círculo e os lados são secantes a ele.

**Definição 1.19** (Ângulo semi-inscrito). Um ângulo semi-inscrito a um círculo é o ângulo com um lado secante e o outro tangente ao círculo.

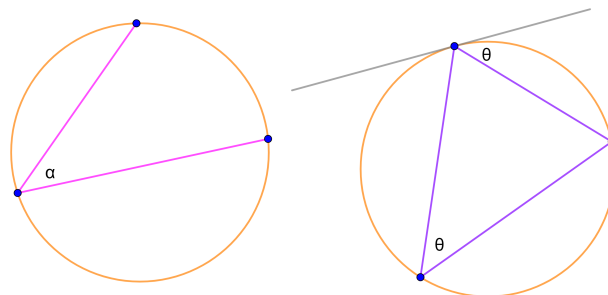


Figura 6 – Ângulo inscrito e semi-inscrito - elaborado pela autora.

**Proposição 1.20.** *Os ângulos inscritos e semi-inscritos em um círculo têm medida igual a metade do ângulo central daquele mesmo arco.*

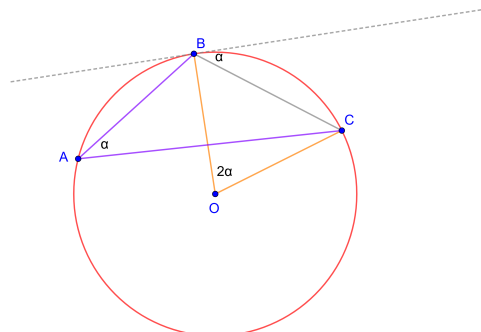


Figura 7 – Relação entre o ângulo inscrito e o central de um mesmo arco - elaborado pela autora.

*Observação 1.21.* O ângulo semi-inscrito é congruente ao ângulo inscrito com vértices nos pontos em que a reta secante ao círculo o intersecta.

## 1.9 Ângulo Externo de um Triângulo

**Proposição 1.22.** *O ângulo externo de um triângulo ABC é igual a soma dos dois ângulos não adjacentes a ele.*

## 1.10 Arco Capaz

**Proposição 1.23 (Arco Capaz).** *Dado um segmento AB e um ângulo  $\alpha$ , tal que  $0 < \alpha < 180^\circ$ , o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que  $\angle APB = \alpha$  é a união de dois arcos de círculo, simétricos em relação a reta AB, onde os pontos A e B são extremos desses arcos. Cada um dos arcos é chamado de arco capaz de  $\alpha$  em relação a AB.*

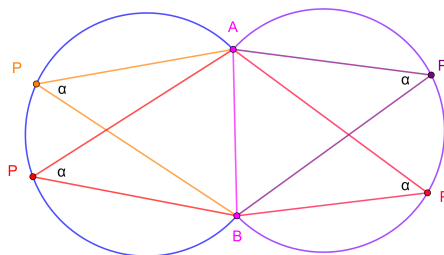


Figura 8 – Arco capaz - elaborado pela autora.

## 1.11 Teorema das Bissetrizes

**Teorema 1.24** (Teorema das Bissetrizes). *As bissetrizes interna e externa de um triângulo com respeito a um de seus vértices dividem o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.*

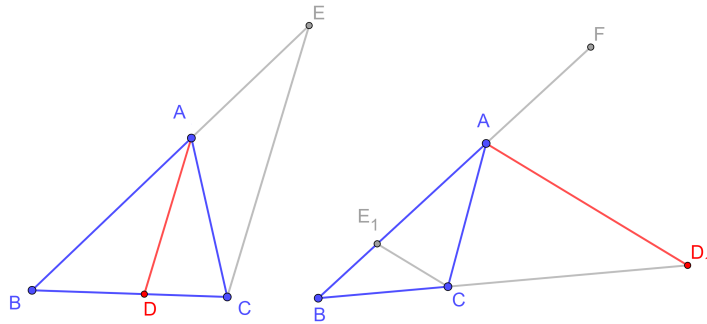


Figura 9 – Teorema das bissetrizes - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Sendo  $AD$  bissetriz interna do triângulo  $ABC$ , traçando uma reta paralela a  $AD$  passando por  $C$ , de modo que o prolongamento de  $AB$  encontra essa reta no ponto  $E$ . Como  $AD \parallel CE$ ,  $\angle BAD = \angle BEC$ , pois são ângulos correspondentes, e  $\angle DAC = \angle ACE$ , são alternos internos. Então o triângulo  $ACE$  é isósceles e  $AC = AE$ . Portanto

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{DC} = \frac{AC}{DC}.$$

Para o caso da bissetriz externa o raciocínio será muito semelhante. Sendo  $AD_1$  bissetriz externa de  $ABC$ , traçando uma reta paralela a  $AD_1$  passando por  $C$ , essa reta passará por  $AB$  no ponto  $E_1$ . Como  $CE_1 \parallel AD_1$ ,  $\angle D_1AC = \angle ACE_1$  e  $\angle FAD_1 = \angle AE_1C$ , então  $AE_1C$  é isósceles e  $AE_1 = AC$ .

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AC} &= \frac{BD_1}{CD_1} = \frac{AB}{AE_1} \\ \Rightarrow \frac{AC}{CD} &= \frac{AB}{BD}. \end{aligned}$$

■

**Proposição 1.25.** *As bissetrizes interna e externa que partem de um mesmo vértice de um triângulo dividem o lado oposto harmonicamente na mesma razão dos lados adjacentes.*

*Demonstração.* Seja  $\frac{AB}{AC} = k$ . Pelo teorema (1.24), temos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{BD_1}{CD_1} = k.$$

**Proposição 1.26.** *As bissetrizes interna e externa de um mesmo ângulo são perpendiculares.*

*Demonstração.* Considerando o triângulo na figura (9), sendo  $\angle DAC = \alpha$  e  $\angle CAD_1 = \beta$ , então

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

**Teorema 1.27.** *Seja  $X, A, Y$  e  $B$  colineares nessa ordem e seja  $P$  um ponto qualquer fora dessa reta. Então, quaisquer duas das afirmações abaixo, implicam na terceira.*

- $(AB; XY)$  é uma quádrupla harmônica;
- $\angle XPY = 90^\circ$ ;
- $PY$  é bissetriz de  $APB$ .

*Demonstração.* Seja  $(A, B; X, Y)$  uma quádrupla harmônica e  $P$  um ponto fora desta reta. Traçando uma reta paralela a  $XP$  passando por  $Y$ , ela intersecta  $AP$  em  $E$  e  $BP$  em  $F$ .

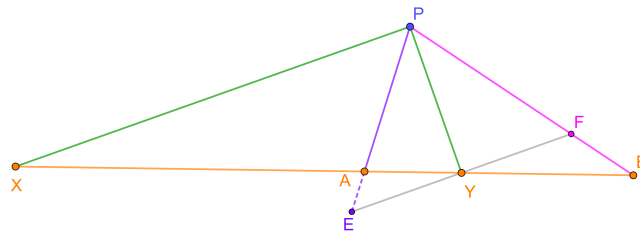


Figura 10 – Conjugados harmônicos e as bissetrizes - elaborado pela autora.

$\angle PXA = \angle AYE$ , são alternos internos, então  $APX$  é semelhante a  $AEY$ , pelo critério AA. Portanto

$$\begin{aligned} \frac{EY}{PX} &= \frac{AY}{AX} \\ EY &= \frac{AY}{AX} \cdot PX. \end{aligned} \quad (1.8)$$

$\angle PXB = \angle BYF$  e  $\angle XPB = \angle YFB$ , são ângulos correspondentes, fazendo com que os triângulos  $XPB$  e  $YFB$  sejam semelhantes. Então

$$\begin{aligned} \frac{FY}{PX} &= \frac{BY}{BX} \\ FY &= \frac{BY}{BX} \cdot PX. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Dividindo as equações (1.8) e (1.9)

$$\frac{EY}{FY} = \frac{\frac{AY}{AX} \cdot PX}{\frac{BY}{BX} \cdot PX} = \frac{AY \cdot BX}{AX \cdot BY}. \quad (1.10)$$

Como  $(A, B; X, Y)$  é uma quádrupla harmônica, então  $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{BY}$ , logo  $\frac{EY}{FY} = 1$  e  $EY = FY$ . Fazendo com que os triângulos  $PYE$  e  $PYF$  sejam semelhantes, portanto  $PY \perp EF$  e  $PY \perp PX$ , e o triângulo  $PEF$  é isósceles, ou seja  $PY$  é bissetriz de  $\angle APB$ .

■

## 1.12 Triângulo Medial

**Definição 1.28** (Triângulo Medial). O triângulo medial é o triângulo formado pelos pontos médios dos lados de um triângulo dado.

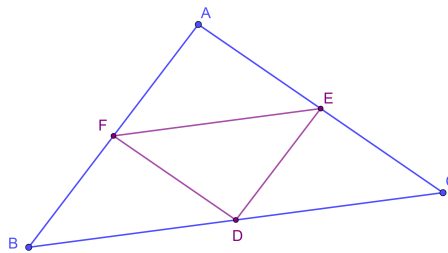


Figura 11 – Triângulo medial - elaborado pela autora.

## 1.13 Lei dos Cossenos

**Teorema 1.29** (Lei dos Cossenos). O quadrado de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto entre esses lados e o cosseno do ângulo entre eles.

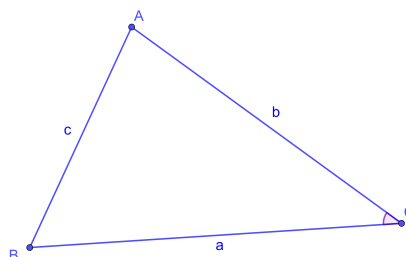


Figura 12 – Lei dos cossenos - elaborado pela autora.

Em outras palavras,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$ .

## 1.14 Teorema de Ceva

**Definição 1.30** (Cevianas). Uma Ceviana de um triângulo é um segmento de reta que liga um vértice do triângulo a um ponto da reta suporte do lado oposto, distinto dos outros dois vértices do triângulo.

Portanto, um lado do próprio triângulo não é considerado ceviana dele. Existem cevianas internas e externas ao triângulo. São externas quando conecta um vértice a um ponto do prolongamento do lado oposto, ou seja, externo ao lado. Dizemos que as cevianas de um triângulo são concorrentes quando as retas que as contem se intersectam em um único ponto. Foram nomeadas em homenagem a Giovanni Ceva (1647 - 1734), que em 1678 publicou o seguinte teorema:

**Teorema 1.31** (Teorema de Ceva). *Sejam  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  cevianas internas de um triângulo  $ABC$ . Então  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  concorrem em um único ponto se, e somente se, o produto das razões dos segmentos divididos por  $D$ ,  $E$  e  $F$  é igual a 1. Ou seja,*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

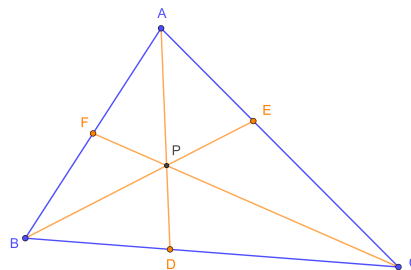


Figura 13 – Teorema de Ceva - Elaborado pela autora

*Demonstração.* Queremos demonstrar que as cevianas se encontram num único ponto  $\Leftrightarrow \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ .

Daremos início demonstrando que as retas se encontrarem em um único ponto  $P$  implica  $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ .

Vamos representar por colchetes a área do triângulo, quando escrevermos, por exemplo,  $[ABC]$ , estamos falando da área do triângulo  $ABC$ .

Da proposição (1.13) e pelas propriedades das proporções, temos

$$\frac{DB}{DC} = \frac{[ADB]}{[ADC]} = \frac{[PDB]}{[PDC]} = \frac{[ADB] - [PDB]}{[ADC] - [PDC]} = \frac{[ABP]}{[APC]}$$

De forma análoga é possível encontrar que

$$\frac{[APC]}{[BPC]} = \frac{AF}{BF}$$

e

$$\frac{[BPC]}{[BPA]} = \frac{CE}{AE}.$$

Temos então

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = \frac{[APC]}{[BPC]} \cdot \frac{[ABP]}{[APC]} \cdot \frac{[BPC]}{[BPA]} = 1$$

Reciprocamente, se  $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ , então as retas se encontram em  $P$ .

Seja  $P$  o ponto de encontro de  $AD$  e  $BE$ . Queremos provar que  $CF$  também passa por  $P$ . Para isso, suponha  $CQ$  uma ceviana que passa por  $P$  e corta  $AB$  em  $Q$ . Já demonstramos que se as cevianas se encontram em um único ponto, vale que

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Por hipótese, temos que

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Daí, segue então que

$$\begin{aligned} \frac{AQ}{QB} &= \frac{AF}{FB} \\ \Rightarrow \frac{AQ}{QB} + 1 &= \frac{AF}{FB} + 1 \\ \Rightarrow \frac{AQ}{QB} + \frac{QB}{QB} &= \frac{AF}{FB} + \frac{FB}{FB} \\ \Rightarrow \frac{AQ + QB}{QB} &= \frac{AF + FB}{FB} \\ \Rightarrow \frac{AB}{QB} &= \frac{AB}{FB} \\ \Rightarrow QB &= FB \\ \Rightarrow Q &= F \end{aligned}$$

Então,  $Q$  e  $F$  são o mesmo ponto, logo, as três cevianas,  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  se encontram em um único ponto  $P$ .



## 1.15 Conjugados Isogonais

### 1.15.1 Retas e Pontos Isogonais

Nesta seção abordaremos os conceitos de retas isogonais e pontos conjugados isogonais, em relação a um determinado triângulo. Essas noções serão fundamentais para compreensão de alguns dos círculos que trataremos nos próximos capítulos. Veremos que o par de pontos bem conhecidos, ortocentro e o circuncentro de um triângulo, são conjugados isogonais.

**Definição 1.32.** Dizemos que duas retas que passam pelo mesmo vértice  $A$  de um dado ângulo são isogonais (com respeito a esse ângulo), se uma é a reflexão da outra em relação à bissetriz do ângulo  $\angle A$ .

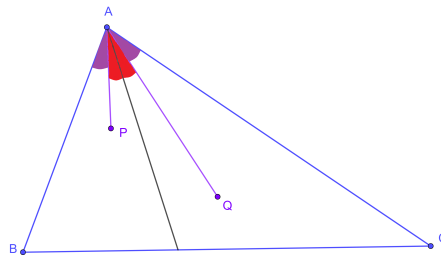


Figura 14 – Definição de ângulos isogonais - elaborado pela autora.

Equivalentemente, as retas  $AP$  e  $AQ$  são isogonais com respeito ao ângulo  $\angle BAC$  se  $\angle BAP = \angle QAC$ , como mostra a figura (14). Observe que nesse caso precisamos ficar atentos à orientação dos ângulos, uma vez que a reflexão inverte a orientação.

**Lema 1.33.** Os pontos  $P$  e  $Q$  pertencem a retas isogonais com relação a  $\angle A$  se, e somente se, o par de distâncias de  $P$  aos lados de  $\angle A$  são inversamente proporcionais ao par de distâncias correspondentes partindo de  $Q$ , isto é, o produto da distância de  $P$  a um lado pela distância de  $Q$  ao mesmo lado é constante para ambos os lados do ângulo.

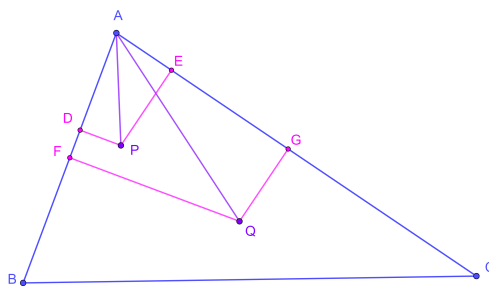


Figura 15 – Retas e pontos isogonais em um triângulo - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Sejam  $D$  e  $E$  pontos em  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, de modo que  $PD \perp AB$  e  $PE \perp AC$ . Do mesmo modo,  $F$  e  $G$ , em  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, com  $QF \perp AB$  e  $QG \perp AC$ . Vamos demonstrar que  $P$  e  $Q$  pertencem a retas isogonais com relação ao ângulo  $\angle A \Leftrightarrow \frac{DP}{EP} = \frac{GQ}{FQ}$ . Vamos iniciar com a volta, ou seja, assumir  $\frac{DP}{EP} = \frac{GQ}{FQ}$  para concluir que  $P$  e  $Q$  pertencem a retas isogonais.

$$(\Leftarrow) \text{ Suponha } \frac{DP}{EP} = \frac{GQ}{FQ}.$$

Como  $\angle ADP$  e  $\angle AEP$  são retos, o quadrilátero  $ADPE$  é cíclico, então existe um círculo que passa por todos os pontos do quadrilátero. Desse modo, os ângulos  $\angle DEP$  e  $\angle DAP$  são ângulos inscritos associados ao mesmo arco, portanto são congruentes. Analogamente,  $\angle AFQ$  e  $\angle AGQ$  são retos, fazendo com que o quadrilátero  $AFQG$  seja cíclico e  $\angle GAQ = \angle GFQ$ , pois ângulos inscritos associados ao mesmo arco.

Perceba que  $\angle DPE = \angle FQG$ , porque os quadriláteros  $ADPE$  e  $AFQG$  são cíclicos e quadriláteros cíclicos possuem ângulos opostos suplementares, então o ângulo  $\angle BAC$  é suplementar aos dois simultaneamente, fazendo com que eles tenham a mesma medida.

Como  $\frac{DP}{EP} = \frac{GQ}{FQ}$  e  $\angle DPE = \angle FQG$ , então os triângulos  $DPE$  e  $GQF$  são semelhantes pelo critério LAL. Desse modo, temos  $\angle GAQ = \angle GFQ = \angle DEP = \angle DAP$ . Assim,  $\angle BAP$  e  $\angle CAQ$  são congruentes, então são isogonais.

$$(\Rightarrow) \text{ Suponha que } AP \text{ e } AQ \text{ são conjugados isogonais, então } \angle DAP = \angle GAQ.$$

O quadrilátero  $ADPE$  é cíclico, porque  $\angle ADP = \angle AEP = 90^\circ$ . Então  $\angle DAP = \angle DEP$ , pois ângulos inscritos associados ao mesmo arco.  $AFQG$  também é cíclico, porque  $\angle AFQ = \angle AGQ = 90^\circ$ , então  $\angle GAQ = \angle GFQ$ , ângulos inscritos associados ao mesmo arco. Além disso,  $\angle DPE$  e  $\angle FQG$  são suplementares do mesmo ângulo, então são congruentes. Logo, os triângulos  $DPE$  e  $GQF$  são semelhantes pelo critério AA, fazendo com que  $\frac{DP}{EP} = \frac{GQ}{FQ}$ . ■

*Observação 1.34.* A razão das distâncias aos lados de um ângulo  $\angle A$  é a mesma para todos os pontos em uma mesma reta passando por  $A$ .

$$\text{Na figura (16), temos } \frac{AB}{AC} = \frac{a}{b} \text{ e } \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}, \text{ portanto } \frac{a}{b} = \frac{m}{n}.$$

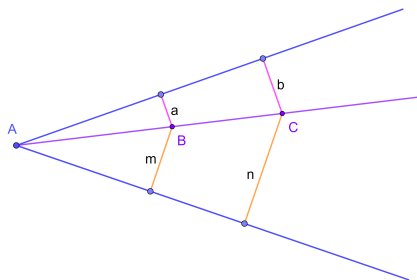


Figura 16 – Razão das distâncias aos lados de  $\angle A$  - elaborado pela autora.

**Teorema 1.35.** Sendo  $P$  um ponto qualquer em um triângulo  $ABC$ , as isonogais de  $AP$ ,  $BP$  e  $CP$  são concorrentes.

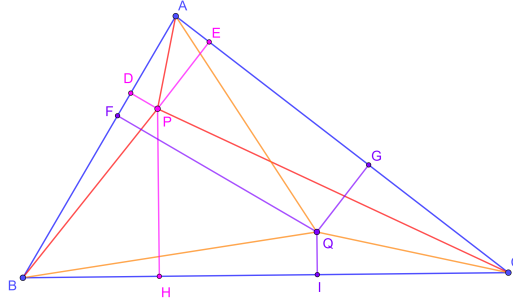


Figura 17 – As isonogais de  $AP$ ,  $BP$  e  $CP$  são concorrentes - elaborado pela autora

*Demonstração.* Seja  $Q$  o ponto de encontro das isonogais de  $AP$  e  $BP$ , vamos mostrar que a isogonal de  $CP$  se encontra no mesmo ponto.

Pelo teorema (1.33), temos

$$\frac{PD}{PE} = \frac{QG}{QF} \Rightarrow PE = \frac{PD \cdot QF}{QG} \quad (1.11)$$

$$\frac{PD}{PH} = \frac{QI}{QF} \Rightarrow PH = \frac{PD \cdot QF}{QI}. \quad (1.12)$$

Dividindo a equação (1.11) por (1.12)

$$\frac{PE}{PH} = \frac{\frac{PD \cdot QF}{QG}}{\frac{PD \cdot QF}{QI}} = \frac{QI}{QG}.$$

Sendo  $\frac{QI}{QG}$  exatamente a distância do ponto  $Q$  aos lados do ângulo  $\angle ACB$ , a isogonal de  $CP$  também passa por  $Q$ . ■

De acordo com o teorema anterior, se três cevianas de um triângulo concorrem num ponto  $P$ , então as cevianas isogonais concorrem num ponto  $Q$ , chamado de conjugado isogonal de  $P$ .

**Definição 1.36** (Conjugados Isogonais). Dado  $P$  um ponto em um triângulo  $ABC$ , o conjugado isogonal de  $P$  é construído a partir da reflexão das retas  $PA$ ,  $PB$  e  $PC$  com relação às bissetrizes de cada vértice. Essas três retas concorrem em um único ponto  $Q$ , denominado o conjugado isogonal de  $P$ .

*Observação 1.37.* Conjugados isogonais ocorrem em pares, isto é,  $P$  é conjugado isogonal de  $Q$  e  $Q$  é conjugado isogonal de  $P$ .

*Observação 1.38.* Os pontos  $P$  e  $Q$  não precisam estar dentro do triângulo.

**Proposição 1.39.** *Em um triângulo  $ABC$ , o ortocentro e o circuncentro são conjugados isogonais.*

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo,  $D$  o pé da altura relativa ao vértice  $A$  e  $E$  o ponto de interseção da reta  $AO$  com o círculo circunscrito de  $ABC$ .

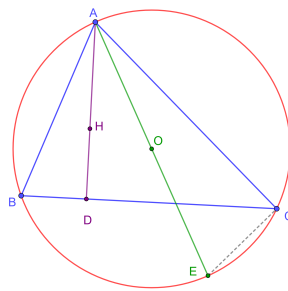


Figura 18 – Ortocentro e circuncentro como conjugados isogonais - elaborado pela autora.

Observe que  $\angle ABC = \angle AEC$ , pois são ângulos inscritos a um mesmo arco. Além disso, os dois triângulos  $ADB$  e  $ACE$  são retângulos, então são semelhantes e, conseqüentemente,  $\angle BAD = \angle EAC$ . O mesmo acontece para os vértices  $B$  e  $C$ , logo, o ortocentro  $H$  e o circuncentro  $O$  são conjugados isogonais. ■

**Proposição 1.40.** *Num triângulo  $ABC$ , suponha que  $D$  é um ponto em uma das retas isogonais  $AX$  e  $AY$  partindo de  $A$ . Então a reta  $EF$ , que une os pés das perpendiculares partindo de  $D$  até  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, é perpendicular a outra reta do par isogonal.*

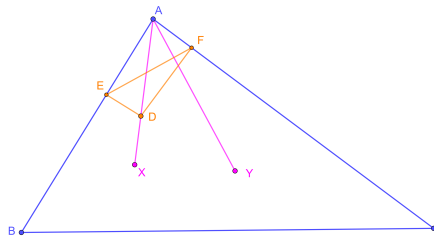


Figura 19 – Perpendiculares partindo de um ponto de uma das retas isogonais no triângulo - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Suponha  $AX$  e  $AY$  retas isogonais e, sem perda de generalidade, seja  $D$  um ponto pertencente a  $AX$ . Traçando as perpendiculares partindo de  $D$  aos lados  $AB$  e  $AC$ , temos as retas  $DE$  e  $DF$ , respectivamente.

Observe que o quadrilátero  $AEDF$  é cíclico, pois os ângulos  $\angle AED$  e  $\angle AFD$  são retos. Logo,  $\angle ADE = \angle AFE$  (ângulos inscritos associados ao mesmo arco).

O triângulo  $ADE$  é retângulo em  $E$ , portanto,  $\angle EDA + \angle EAD = 90^\circ$ . Seja  $P$  o ponto de encontro entre as retas  $AY$  e  $EF$ . Como  $AX$  e  $AY$  são isogonais, temos  $\angle EAD = \angle PAF$ .

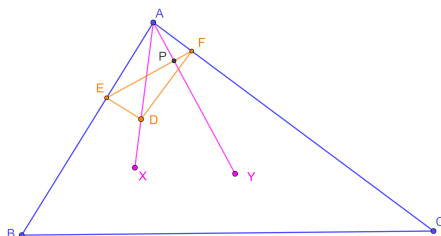


Figura 20 – Demonstração das perpendiculares partindo de um ponto de uma das retas isogonais no triângulo - elaborado pela autora.

Considerando ângulo externo  $\angle APE$ , temos

$$\angle APE = \angle PAF + \angle AFP = \angle EAD + \angle EDA = 90^\circ.$$



### 1.15.2 A Simediana e o Ponto Simediano (ou Ponto de Lemoine)

**Definição 1.41.** As isogonais das medianas de um triângulo são denominados simedianas, e seu ponto de concorrência, isto é, o conjugado isogonal do baricentro  $G$ , é o ponto simediano  $K$ , também conhecido como ponto de Lemoine<sup>1</sup>.

**Teorema 1.42.** *Uma ceviana do triângulo é uma simediana se, e somente se, as distâncias de um ponto qualquer da ceviana aos lados adjacentes são proporcionais aos próprios lados do triângulo.*

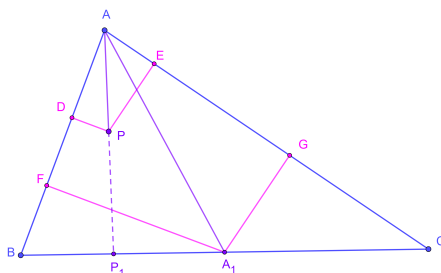


Figura 21 – Simediana - elaborado pela autora.

<sup>1</sup> Émile Lemoine (1840-1912) foi um engenheiro civil, matemático e geômetra francês. Os círculos de Lemoine serão trabalhados na seção 13.1.

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Considere a ceviana  $AP_1$  de um triângulo  $ABC$ . Pela observação (1.34), basta verificar a afirmação para o ponto  $P$  pertencente à ceviana. Sejam  $PD$  e  $PE$  as distâncias de  $P$  aos lados  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, assim como  $A_1F$  e  $A_1G$  são as distâncias do ponto médio  $A_1$  de  $BC$  para os mesmos lados.

Perceba que a reta  $AP$  e a mediana  $AA_1$  são um par de retas isogonais em  $A$ , pelo teorema (1.33).

$$\frac{PD}{PE} = \frac{A_1G}{A_1F}. \quad (1.13)$$

A mediana divide o triângulo em dois de mesma área, então a área de  $ABA_1$  é igual a área de  $ACA_1$ , então temos que

$$\begin{aligned} \frac{AB \cdot A_1F}{2} &= \frac{AC \cdot A_1G}{2} \\ AB \cdot A_1F &= AC \cdot A_1G \\ \frac{AB}{AC} &= \frac{A_1G}{A_1F}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Substituindo a equação (1.13) em (1.14)

$$\frac{PD}{PE} = \frac{AB}{AC}.$$

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente, suponha  $\frac{PD}{PE} = \frac{AB}{AC}$ .

Acabamos de demonstrar que, para a mediana  $AA_1$ ,  $\frac{A_1G}{A_1F} = \frac{AB}{AC}$ . Então  $\frac{PD}{PE} = \frac{A_1G}{A_1F}$ , o que implica, pelo teorema (1.33), que  $AP$  e  $AA_1$  são conjugados isogonais, portanto  $AP$  é simediana.

■

O ponto simediano do triângulo é o único ponto cujas distâncias para os três lados do triângulo são diretamente proporcionais aos respectivos lados. Então ocorre  $\frac{KH}{BC} = \frac{KE}{AC} = \frac{KD}{AB}$ .

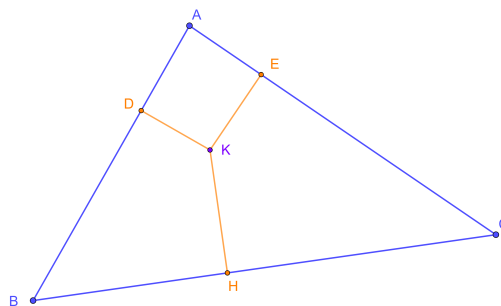


Figura 22 – Caracterização do ponto simediano  $K$  - elaborado pela autora.

Sabemos que a bissetriz de um ângulo interno do triângulo divide o lado oposto na mesma razão dos lados que compõem o ângulo, pelo teorema (1.24). O teorema a seguir estabelece que a razão na qual a simediana correspondente divide o lado é o quadrado da razão dos lados adjacentes.

**Teorema 1.43.** *A simediana relativa a um vértice do triângulo, divide o lado oposto na razão dos quadrados dos lados adjacentes.*

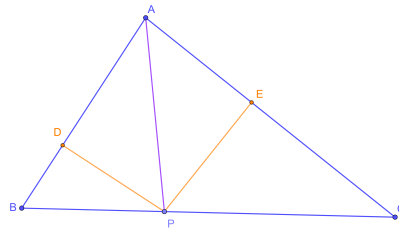


Figura 23 – Simediana e a razão entre os lados - elaborado pela autora.

Em outros termos, a simediana  $AP$  do triângulo  $ABC$ , divide o lado  $BC$  na razão dos quadrados dos lados adjacentes ao vértice  $A$ , ou seja,  $\frac{PB}{PC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ .

*Demonstração.* Sendo  $AP$ , na figura (23), simediana, pelo teorema (1.42), sabemos que  $\frac{PD}{PE} = \frac{AB}{AC}$ . Representando a área de  $ABP$  por  $[ABP]$  e a área de  $APC$  por  $[APC]$ , observe que

$$\frac{BP}{CP} = \frac{[ABP]}{[APC]} = \frac{\frac{AB \cdot PD}{2}}{\frac{AC \cdot PE}{2}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{PD}{PE} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

■

## 1.16 Teorema das Cordas

**Proposição 1.44** (Teorema das Cordas). *Sejam os pontos  $A, B, C$  e  $D$  de modo que as retas  $AB$  e  $CD$  se intersectam em um único ponto  $P$ , externo a ambos os segmentos ou interno também a ambos. Existe um círculo passando por  $ABCD$  se, e somente se,  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Por hipótese existe um círculo passando por  $A, B, C$  e  $D$ . Observe a figura (24), quando  $P$  é externo a ambos os segmentos,  $\angle PCA$  é externo do triângulo  $CAD$ , então  $\angle PCA = \angle CAD + \angle CDA$ . Perceba que  $\angle CAD = \angle CBD$  e  $\angle CDA = \angle CBA$ , então  $\angle PCA = \angle CBA + \angle CBD = \angle ABD$ , fazendo com que os triângulos  $PAC$  e  $PDB$  sejam semelhantes

pelo critério AA. Quando  $P$  é interno aos segmentos (figura da direita), é fácil ver essa mesma semelhança. Temos então

$$\begin{aligned}\frac{PA}{PC} &= \frac{PD}{PB} \\ PA \cdot PB &= PC \cdot PD.\end{aligned}$$

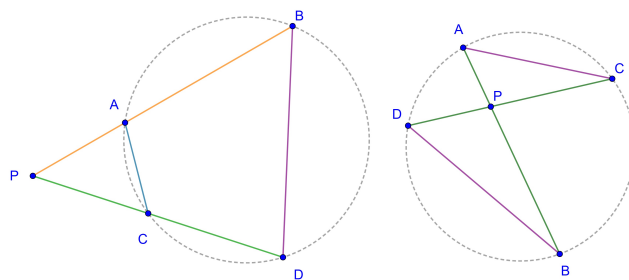


Figura 24 – Demonstração do teorema das cordas - elaborado pela autora.

( $\Leftarrow$ ) Para a recíproca, sabemos que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ . Dessa maneira,  $PAC \sim PDB$ , então  $\angle PBD = \angle PCA$  e  $\angle BDC = \angle BAC$ , como na figura (25). Logo, por arco capaz (1.23),  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  estão em um mesmo círculo. ■

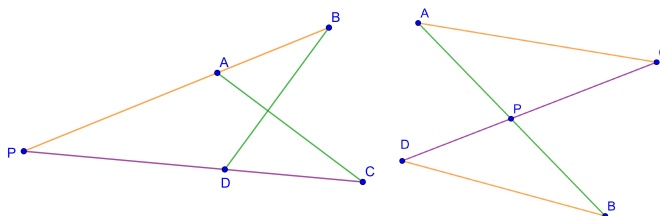


Figura 25 – Demonstração da recíproca do teorema das cordas - elaborado pela autora.

## 1.17 Homotetia

**Definição 1.45** (Homotetia). É uma transformação geométrica responsável por ampliar ou reduzir proporcionalmente distâncias, preservando os ângulos.

A notação que usaremos é  $P(n)$ , sendo  $P$  o centro da homotetia e  $n$  o fator multiplicativo que vai ampliar ou reduzir a figura geométrica dada.



## 2 Círculos Principais

### 2.1 Círculo Inscrito

**Definição 2.1** (Círculo Inscrito). O círculo inscrito a um polígono é aquele em que o círculo tangencia todos os lados do polígono.

**Teorema 2.2.** *Um polígono é circunscritível, isto é, um polígono está circunscrito a um círculo se, e somente se, as bissetrizes dos seus ângulos internos concorrem em um mesmo ponto, centro do círculo inscrito, denominado incentro do polígono.*

*Demonstração.* Segue-se da proposição 1.6 e do teorema 1.7. ■

**Proposição 2.3.** *Em um triângulo  $ABC$ , as bissetrizes dos ângulos concorrem em um único ponto  $I$ , denominado o incentro de  $ABC$ , que é o centro do círculo inscrito a  $ABC$ .*

*Demonstração.* Seja  $I$  o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos  $\angle ABC$  e  $\angle ACB$ . Seja  $D$ ,  $E$  e  $F$  as projeções ortogonais de  $I$  a cada um dos lados do triângulo. Como  $BI$  é bissetriz,  $\angle FBI = \angle DBI$ , além disso, os triângulos  $FBI$  e  $BDI$  são retângulos e possuem o lado  $BI$  em comum, então, pelo critério  $LAA_0$ , os triângulos são congruentes, fazendo com que  $FI = DI$ .

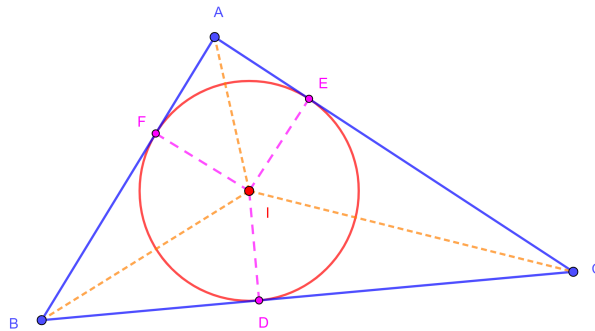


Figura 26 – Demonstração do círculo inscrito ao triângulo - elaborado pela autora.

De forma análoga,  $DI = EI$ . Por transitividade,  $FI = EI$ . Então,  $I$  é o centro do círculo e seu raio mede  $DI = FI = EI$ , e esse círculo é tangente a todos os lados do triângulo. ■

**Corolário 2.4.** *A área de um triângulo  $ABC$  pode ser calculada como o produto entre o semiperímetro e o raio do círculo inscrito ao triângulo.*

*Demonstração.* Seja  $a$  o lado oposto ao vértice  $A$ ,  $b$  oposto a  $B$  e  $c$  oposto a  $C$  os lados do triângulo  $ABC$ ,  $p$  o semiperímetro e  $r$  o raio do círculo inscrito, temos

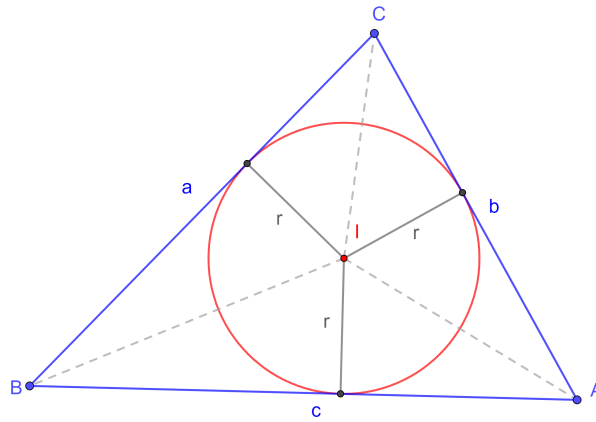


Figura 27 – Círculo inscrito ao triângulo  $ABC$  - elaborado pela autora.

$$\begin{aligned}
 [ABC] &= [BCI] + [ABI] + [ACI] \\
 &= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} \\
 &= \frac{(a+b+c)r}{2} \\
 &= \frac{2pr}{2} \\
 &= pr.
 \end{aligned}$$

■

Considerando a mesma notação da demonstração anterior, temos o seguinte corolário.

**Corolário 2.5.** Sendo  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pontos de tangência do círculo inscrito a um triângulo  $ABC$ , então  $AE = AF = p - a$ ,  $BF = BD = p - b$  e  $CD = CE = p - c$ .

*Demonstração.* Sabe-se que  $AF = AE = x$ , proposição (2.3), considerando os segmentos  $BC = BD = y$  e  $CE = CD = z$ . Então

$$a = y + z \quad (2.1)$$

$$b = x + z \quad (2.2)$$

$$c = x + y. \quad (2.3)$$

Somando as equações (2.2), (2.3) e (2.3), temos

$$\begin{aligned}
 a + b + c &= 2x + 2y + 2z \\
 2p &= 2(x + y + z) \\
 p &= x + y + z \\
 x &= p - (y + z) \\
 x &= p - a.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

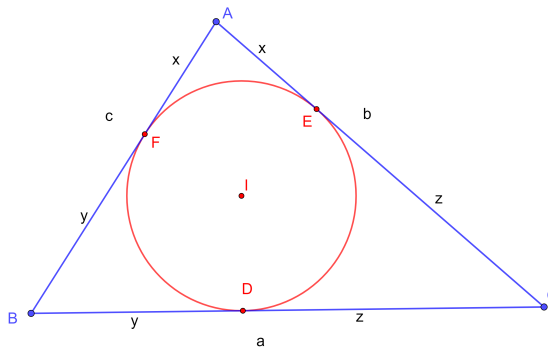


Figura 28 – Círculo inscrito ao triângulo  $ABC$  nomeando cada lado - elaborado pela autora.

O resultado é análogo para os demais lados do triângulo. ■

**Proposição 2.6.** Sendo  $I$  o incentro de  $ABC$ , então  $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \angle BAC$ .

*Demonstração.* A soma dos ângulos internos de  $ABC$  é

$$\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ. \tag{2.5}$$

No triângulo  $BIC$  tem-se

$$\beta + \gamma + \angle BIC = 180^\circ. \tag{2.6}$$

Multiplicando a equação (2.6) por 2

$$\begin{aligned}
 2\beta + 2\gamma + 2\angle BIC &= 360^\circ \\
 2\beta + 2\gamma + 2\angle BIC - 180^\circ &= 180^\circ.
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

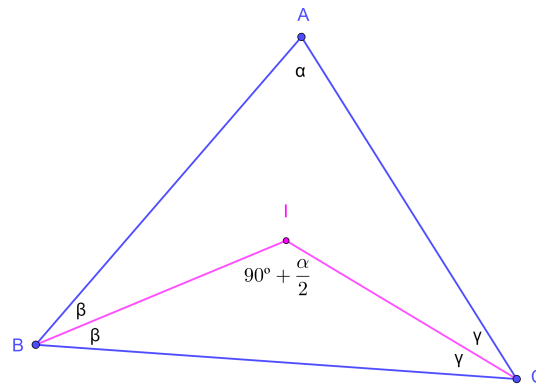


Figura 29 – Propriedade do incentro - elaborado pela autora.

Igualando as equações (2.5) e (2.7)

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 2\gamma &= 2\beta + 2\gamma + 2\angle BIC - 180^\circ \\ \Rightarrow 2\angle BIC &= 180^\circ + \alpha \\ \Rightarrow \angle BIC &= 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \alpha \\ \Rightarrow \angle BIC &= 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \angle BAC. \end{aligned}$$

■

## 2.2 Círculo Exinscrito

**Definição 2.7.** O círculo exinscrito a um polígono é um círculo externo ao polígono que tangencia a reta suporte de cada um dos lados do polígono.

**Proposição 2.8.** Cada triângulo possui três círculos exinscritos, cada um tangenciando externamente um lado diferente.

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo. As bissetrizes externas dos ângulos  $\angle B$  e  $\angle C$  se encontram no ponto  $I_A$ . Pela definição de bissetriz como um lugar geométrico na proposição (1.6),  $I_A$  equidista dos lados dos ângulos, então existe um círculo centrado em  $I_A$  que tangencia  $BC$  e as retas suportes de  $AB$  e  $AC$ , depois de  $B$  e de  $C$ , respectivamente. Como  $AB$  e  $AC$  são os lados do ângulo  $\angle A$ , a bissetriz interna do vértice  $A$  também passa por  $I_A$ .

O raciocínio é análogo para os demais vértices do triângulo, então serão três círculos exinscritos ao triângulo. ■

No plano que contém um triângulo  $ABC$  qualquer, existem quatro pontos que equidistam de seus lados, são eles o incentro e os três exincentros.

O centro de um círculo exinscrito é conhecido como um exincentro do triângulo e é o encontro das bissetrizes externas de dois vértices com a bissetriz interna do terceiro vértice.

Cada círculo tangencia o lado (ou sua reta suporte) no pé da perpendicular traçada a partir do seu centro a cada um dos lados.

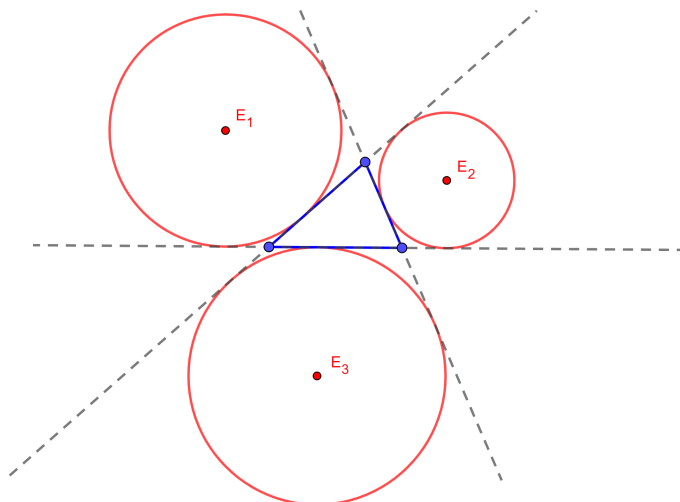


Figura 30 – Os três círculos exinscritos a um triângulo - elaborado pela autora.

O círculo A-exinscrito é aquele que tangencia o lado  $BC$  e as semirretas  $AB$  e  $AC$ , fora dos lados. O A-exincentro, é o centro do círculo A-exinscrito.

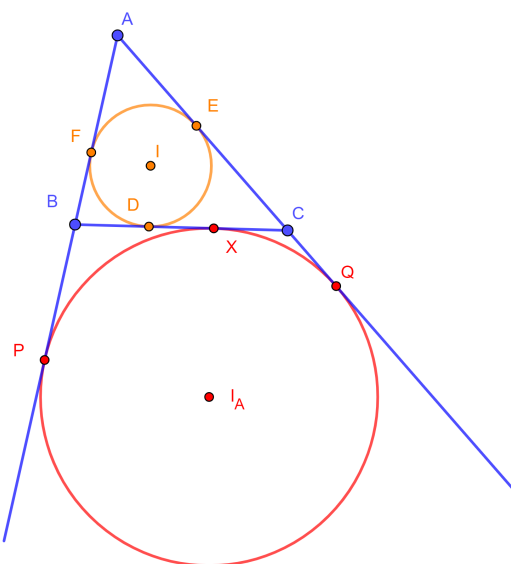


Figura 31 – Círculo A-exinscrito - elaborado pela autora.

**Teorema 2.9.** *Se  $AP$  e  $AQ$  são tangentes ao círculo A-exinscrito e sendo  $p$  o semiperímetro do triângulo, então  $AP = AQ = p$ .*

*Demonstração.* Já foi demonstrado que  $AP = AQ$ , na proposição (1.8), basta então provar que é igual a  $p$ .

$$\begin{aligned} AP + AQ &= AB + BP + AC + CQ \\ &= AB + BX + AC + CX \\ &= AB + AC + BC \\ &= 2p. \end{aligned}$$

Como  $AP = AQ$ , então  $AP = AQ = p$ . ■

**Teorema 2.10.** Sendo  $r$  o raio do círculo inscrito e  $r_a$  o raio do círculo A-exinscrito do triângulo  $ABC$ , temos que  $r_a = \frac{p}{p-a} r$ .

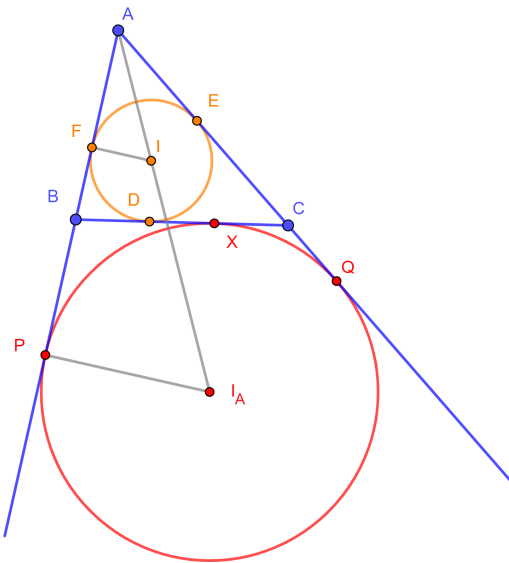


Figura 32 – Demonstração da relação entre o raio do círculo inscrito e do exinscrito - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Os triângulos  $AIF$  e  $AI_A P$ , na figura (32), são semelhantes pelo critério AA. Sendo  $IF = r$  e  $I_A P = r_a$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{AF}{AP} &= \frac{r}{r_a} \\ \Rightarrow \frac{r_a}{r} &= \frac{AP}{AF} \\ \Rightarrow r_a &= \frac{AP}{AF} r. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Já sabemos que  $AP = p$  e que  $AF = p - a$ , pelo corolário (2.5), então

$$r_a = \frac{p}{p-a}r.$$

■

**Proposição 2.11.** Se  $ABC$  um triângulo qualquer e  $I_A$  o  $A$ -exincentro, então  $\angle ABC = 2\angle AI_A C$  e  $\angle BI_A C = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ .

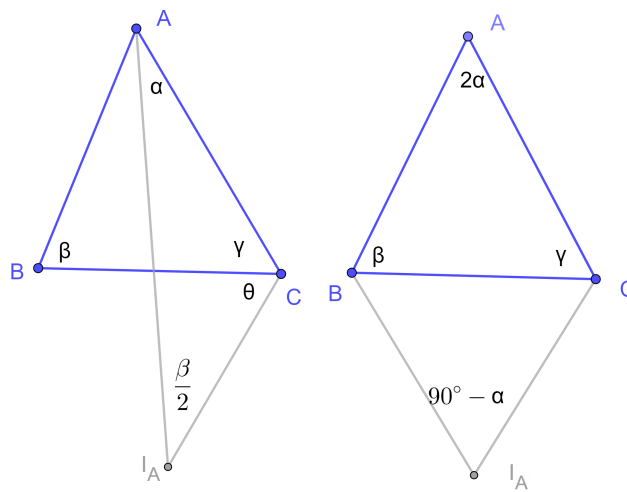


Figura 33 – Propriedade do exincentro - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Primeiro será demonstrado que  $\angle ABC = 2\angle AI_A C$ . Considerando o ângulo  $\angle ACB = \gamma$  e o ângulo externo ao triângulo com relação ao vértice  $C$  igual a  $2\theta$ . Então

$$\gamma + 2\theta = 180^\circ. \quad (2.9)$$

Além disso, como  $CI_A$  é bissetriz externa,  $\angle BCI_A = \theta$ . Sendo  $\angle CAI_A = \angle BAI_A = \alpha$ ,

$$\begin{aligned} 2\theta &= 2\alpha + \beta \\ \Rightarrow \theta &= \alpha + \frac{\beta}{2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

No triângulo  $ACI_A$ ,

$$\alpha + \gamma + \theta + \angle AI_A C = 180^\circ. \quad (2.11)$$

Igualando as equações (2.9) e (2.11), além de substituir o valor de  $\theta$  da equação (2.10),

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma + \theta + \angle AI_A C &= \gamma + 2\theta \\ \Rightarrow \alpha + \angle AI_A C &= \theta \\ \Rightarrow \alpha + \angle AI_A C &= \alpha + \frac{\beta}{2} \\ \Rightarrow \angle AI_A C &= \frac{\beta}{2} \\ \Rightarrow \angle ABC &= 2\angle AI_A C. \end{aligned}$$

Agora demonstraremos que  $\angle BI_A C = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ . Considerando os ângulos  $\angle BAC = 2\alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle ACB = \gamma$ .

Pelo resultado anterior, temos  $\angle AI_A B = \frac{\gamma}{2}$  e  $\angle AI_A C = \frac{\beta}{2}$ , portanto,  $\angle BI_A C = \frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \alpha$ . ■

## 2.3 Círculo Circunscrito

O círculo circunscrito a um polígono é o círculo que passa por todos os seus vértices.

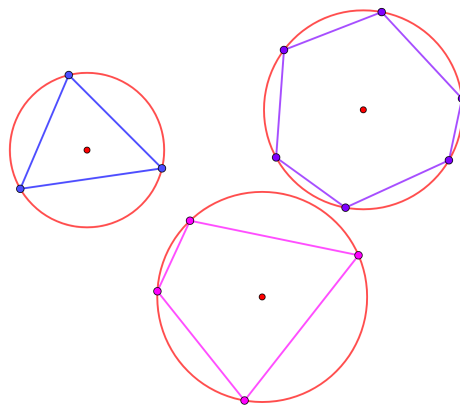


Figura 34 – Círculo circunscrito a um polígono - elaborado pela autora.

**Teorema 2.12.** *Um polígono está inscrito em um círculo se, e somente se, as mediatrizes dos lados se encontram em um único ponto  $O$ , que é o centro do círculo, denominado circuncentro do polígono.*

Como  $AO = CO$ , então o triângulo  $AOC$  é isósceles. Ao traçar a perpendicular a partir do vértice  $O$ , chegará ao ponto médio  $M$  de  $AC$ ,  $OM$  também é bissetriz do ângulo  $\angle AOC$ . Sendo assim,  $\angle ABC = \angle COM = \angle AOM$ .

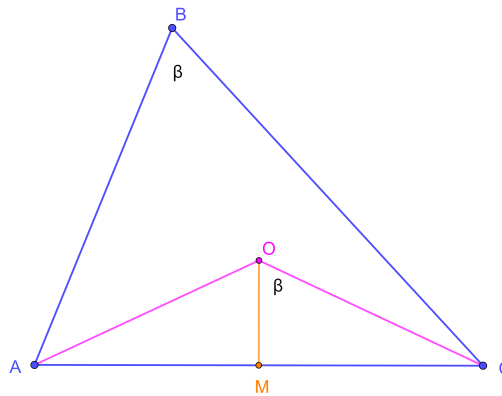


Figura 35 – Consequência da propriedade - elaborado pela autora.

**Lema 2.13.** *Em um triângulo  $ABC$ , se  $D$  é um ponto no mesmo semiplano de  $B$  com relação a  $AC$ ,  $AB = BC$  e  $\angle ABC = 2\angle ADC$ , então  $B$  é o circuncentro do triângulo  $ACD$ . Além disso,  $BA = BC = BD$ .*

*Demonstração.* Segue das relações de arco capaz. ■

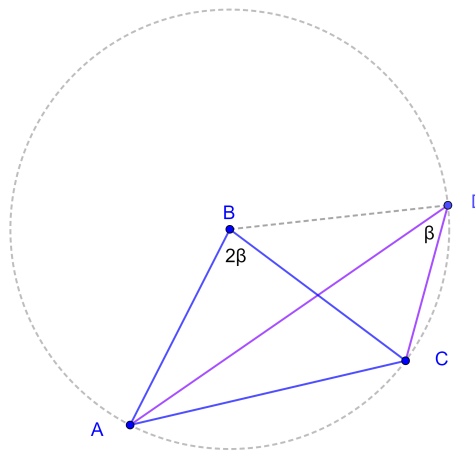


Figura 36 – Observação sobre o circuncentro - elaborado pela autora.

## 2.4 O Lema do Incentro e Exincentro

**Lema 2.14** (Lema do Incentro e Exincentro). *Considere  $ABC$  um triângulo com incentro  $I$  e a reta  $AI$  que encontra o círculo circunscrito a  $ABC$  em  $L$ . Refletindo  $I$  sobre  $L$  encontramos  $I_A$ . Então*

- (a) *Os pontos  $I$ ,  $B$ ,  $C$  e  $I_A$  estão em um mesmo círculo de centro  $L$ . Em particular  $LI = LB = LC = LI_A$ ;*

(b) As retas  $BI_A$  e  $CI_A$  são bissetrizes externas do triângulo  $ABC$ .

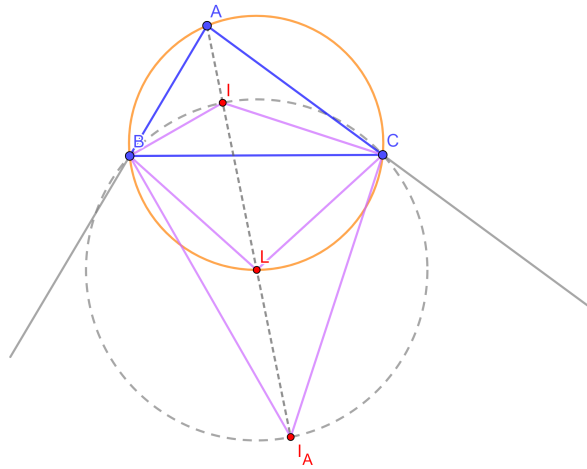


Figura 37 – Lema do incentro e exincentro - elaborado pela autora.

*Demonstração.* (a) Como  $I_A$  é um reflexo de  $I$  em relação a  $L$ , então  $LI = LI_A$ .  $AI$  é bissetriz do ângulo, portanto  $\angle BAL = \angle BCL = \angle LAC = \angle LBC = \alpha$  (ângulos inscritos associados ao mesmo arco no círculo circunscrito a  $ABC$ ). Então o triângulo  $LBC$  é isósceles e  $LB = LC$ .

Considerando  $\angle ABC = 2\beta$ , como  $\angle BIL$  é externo ao triângulo  $ABI$ , então  $\angle BIL = \alpha + \beta$ . Agora, olhando para o triângulo  $BIL$ , temos  $\angle IBC + \angle CBL = \beta + \alpha$ , fazendo com que  $LBI$  seja isósceles, portanto  $LI = LB$  e por transitividade  $LI_A = LI = LB = LC$ .

(b) Como  $II_A$  é diâmetro,  $\angle IBI_A = 90^\circ$  e  $BI$  é bissetriz interna, então, pelo corolário (1.26),  $BI_A$  é bissetriz externa. O argumento é análogo para  $CI_A$ . ■

## 3 Resultados Básicos

### 3.1 Quadrilátero Cíclico

**Definição 3.1.** Um quadrilátero qualquer é dito cíclico quando o mesmo é inscritível em um círculo, ou ainda, quando seus vértices pertencem a um círculo.

**Proposição 3.2.** *Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo. As seguintes afirmações são equivalentes acerca deste quadrilátero:*

- i.  $ABCD$  é cíclico;*
- ii. as mediatrizes relativas aos lados de  $ABCD$  concorrem em um único ponto.*
- iii. possui um par de ângulos opostos suplementares;*
- iv. possui um ângulo interno congruente ao seu ângulo externo oposto;*
- v. o ângulo formado por um dos lados e uma diagonal de  $ABCD$  é congruente ao ângulo formado pela outra diagonal e o lado oposto ao primeiro;*

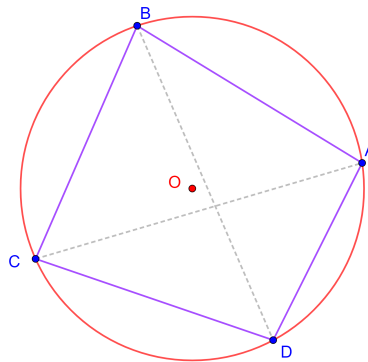


Figura 38 – Quadrilátero cíclico - elaborado pela autora.

*Demonstração.*  $(i) \Leftrightarrow (ii)$  Como os vértices do quadrilátero  $ABCD$  estão todos em um círculo, são todos equidistantes do centro, portanto, as mediatrizes concorrem no centro do círculo.

Reciprocamente, seja  $O$  o ponto de concorrência das mediatrizes. Então, pela proposição (1.3),  $OA = OB = OC = OD$ , então, existe um círculo que passa por  $A, B, C$  e  $D$  centrado em  $O$ .

$(i) \Leftrightarrow (iii)$  Seja  $ABCD$  um quadrilátero cíclico, suponha a medida do arco  $ABC$  igual a  $\alpha$  e a do arco  $ADC$  igual a  $\beta$ . Temos então  $\angle ADC = \frac{\alpha}{2}$  e  $\angle ABC = \frac{\beta}{2}$ .

Portanto,  $\angle ADC + \angle ABC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ .

Para a recíproca, suponha  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ . Seja  $O$  o centro do círculo que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ ,  $\angle AOC = 360^\circ - 2\angle B$ , como na figura (39).

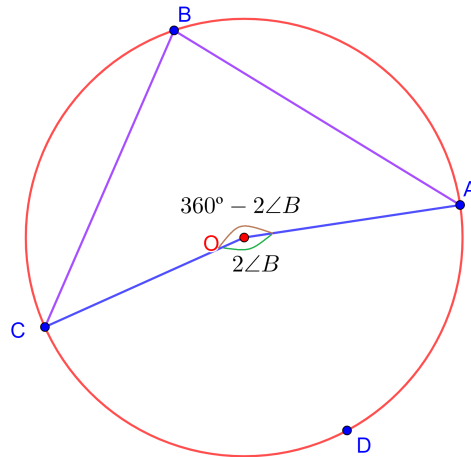


Figura 39 – Demonstração quadrilátero cíclico - elaborado pela autora.

O ângulo inscrito nesse círculo que contém o arco  $ABC$ , será igual a  $180^\circ - \angle B$ . Pela proposição (1.23),  $D$  pertence ao círculo.

(iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) O quadrilátero  $ABCD$  possui ângulos opostos suplementares, então  $\angle ABC = 180^\circ - \angle CDA$ . Como os ângulos externo e interno de um mesmo vértice em um polígono convexo são suplementares,  $\angle ABC$  é exatamente a medida do ângulo externo de  $\angle CDA$ .

Reciprocamente, como  $\angle ABC$  é congruente ao externo de  $\angle CDA$ , é congruente ao suplementar deste. Então  $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ .

(i)  $\Leftrightarrow$  (v) Sendo  $ABCD$  cíclico, os ângulos  $\angle ABD$  e  $\angle ACD$  são ambos inscritos no círculo e ângulos inscritos associados ao mesmo arco  $AD$ , então são congruentes. Perceba que  $AC$  e  $BD$  são as diagonais do quadrilátero, então o resultado segue.

A recíproca é consequência da proposição de arco capaz (1.23). ■

## 3.2 Teorema de Pitot

**Teorema 3.3** (Teorema de Pitot). *Um quadrilátero convexo  $ABCD$  é circunscritível se, e somente se, as somas dos comprimentos dos lados opostos são iguais, ou seja  $AB + CD = AD + BC$ .*

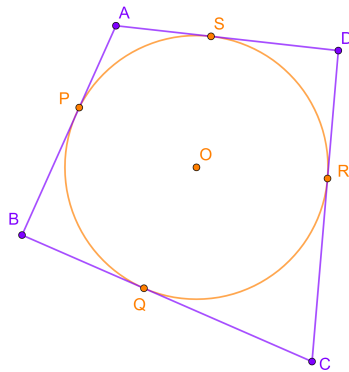


Figura 40 – Teorema de Pitot - elaborado pela autora.

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Sejam  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  os pontos de tangência do círculo com os lados do quadrilátero  $ABCD$ . Usando o teorema (1.8),  $AP = AS$ ,  $BP = BQ$ ,  $CQ = CR$  e  $DR = DS$ , portanto

$$AB + CD = AP + BP + DR + CR = AS + BQ + DS + CQ = AD + BC.$$

( $\Leftarrow$ ) Temos  $AB + CD = AD + BC$ , sem perda de generalidade, suponha  $AD \geq AB$  e  $CD \geq BC$ . Desse modo, seja  $E$  em  $AD$  de modo que  $AE = AB$  e  $F$  em  $CD$  com  $CF = BC$ .

$$AB + CD = AD + BC$$

$$AB + CF + DF = AE + DE + BC$$

$$DF = DE. \tag{3.1}$$

São formados os triângulos  $ABE$ ,  $BCF$  e  $DEF$ , todos isósceles. Então as bissetrizes, alturas e medianas com relação ao lado não congruente coincidem, sendo elas também mediatrizes dos segmentos  $BE$ ,  $BF$  e  $EF$ . Considerando o triângulo  $BEF$ , as mediatrizes se encontram em um único ponto  $O$ .

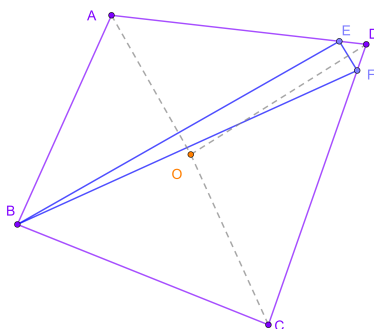


Figura 41 – Demonstração do teorema de Pitot - elaborado pela autora.

Como  $O$  é o encontro das bissetrizes dos ângulos  $\angle A$ ,  $\angle C$  e  $\angle D$ , então, pela proposição (1.6),  $O$  é equidistante de todos os lados do quadrilátero. Portanto, existe um círculo centrado em  $O$  que tangencia cada lado do quadrilátero. ■

### 3.3 Lei dos Senos

**Teorema 3.4** (Lei dos Senos). *A razão entre um lado de um triângulo qualquer e o ângulo oposto a ele é igual ao diâmetro do círculo circunscrito.*

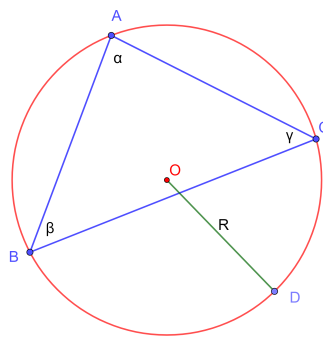


Figura 42 – Lei dos senos - elaborado pela autora.

Em outros termos, dado  $ABC$  um triângulo qualquer e sendo  $R$  o raio de seu círculo circunscrito,

$$\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta} = 2R.$$

### 3.4 Paralelas e Antiparalelas

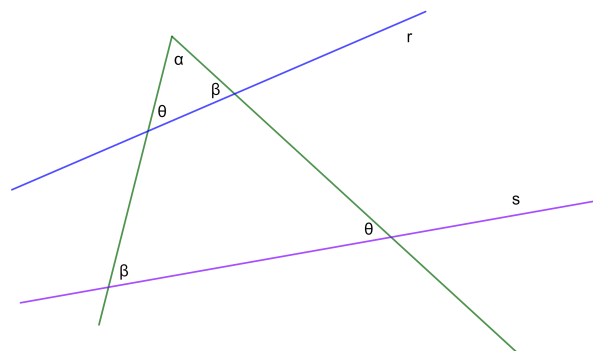


Figura 43 – Retas antiparalelas - elaborado pela autora.

**Definição 3.5.** As retas  $r$  e  $s$  são ditas antiparalelas em relação a um ângulo  $\alpha$  se o ângulo interno que  $r$  forma com um dos lados de  $\alpha$  é igual ao ângulo interno que  $s$  forma com o outro lado de  $\alpha$ .

Sendo  $ABC$  um triângulo, existem duas maneiras de escolher os pontos  $D$  e  $E$  sobre os lados adjacentes ao vértice  $A$ , de forma que os triângulos  $ABC$  e  $ADE$  sejam semelhantes.

Nos dois triângulos da figura (44),  $BC$  e  $DE$  formam o mesmo ângulo com os lados de  $\angle A$ , no entanto, enquanto na figura da esquerda os ângulos são correspondentes, na figura da direita as retas formam o mesmo ângulo com lados distintos do ângulo. Como consequência, os triângulos  $ADE$  e  $ABC$  são semelhantes e o quadrilátero  $BCDE$ , na figura da direita, é cíclico.

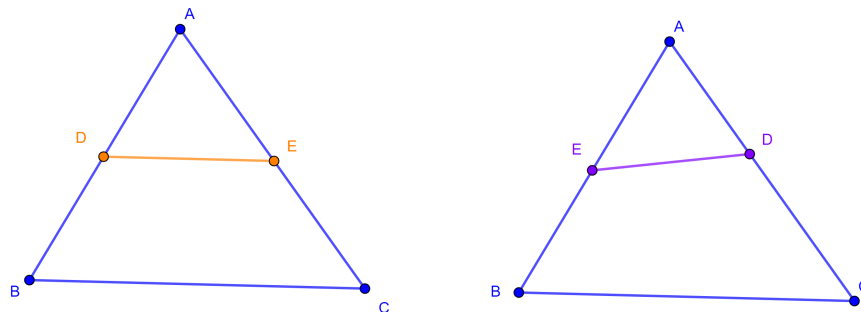


Figura 44 – Paralelas e antiparalelas - elaborado pela autora.

As retas dos lados opostos de qualquer quadrilátero cíclico são antiparalelas uma para a outra.

Perceba que quando temos ângulos adjacentes congruentes, como no caso do triângulo isósceles, as retas paralelas e antiparalelas coincidem.

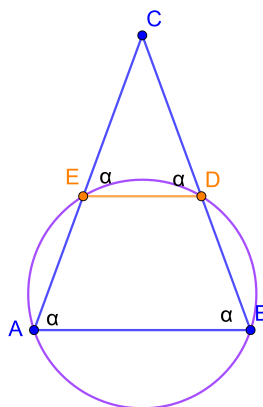


Figura 45 – Paralela e antiparalela coincidentes - elaborado pela autora.

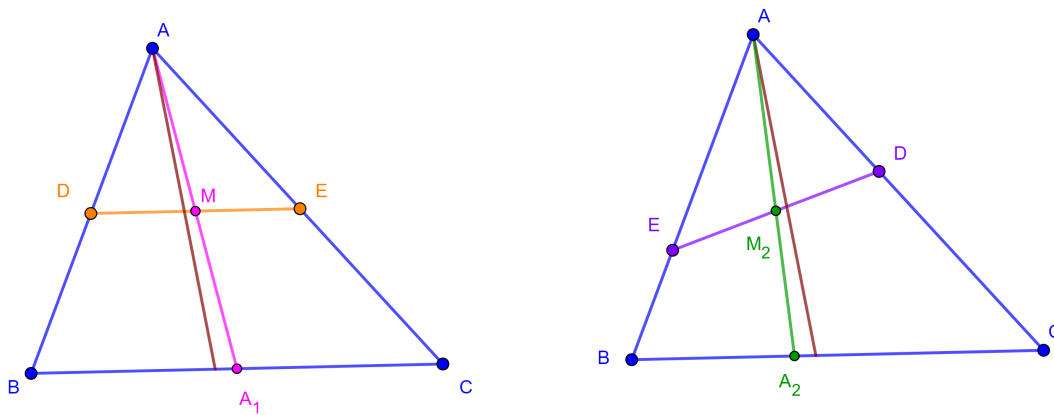


Figura 46 – Relação da paralela e antiparalela com a mediana e a simediana - elaborado pela autora.

Observe a figura (46), sendo  $A_1$  o ponto médio de  $BC$ ,  $AA_1$  é mediana de  $ABC$ , que é conhecido que irá dividir ao meio qualquer segmento paralelo a  $BC$ . Portanto, sendo  $M$  o ponto médio de  $DE$ ,  $AA_1$  passa por  $M$ .

Ao refletir a mediana e o segmento  $DE$  com relação a bissetriz,  $AA_1$  vai de mediana a  $AA_2$  simediana, definição (1.41), e  $DE$  vai de paralela a antiparalela, mas perceba que  $AA_2$  ainda divide  $DE$  ao meio. Então podemos concluir que a mediana divide todos os segmentos paralelos ao meio e a simediana divide todos os segmentos antiparalelos ao meio.

**Teorema 3.6.** *A simediana divide todos os segmentos antiparalelos ao meio.*

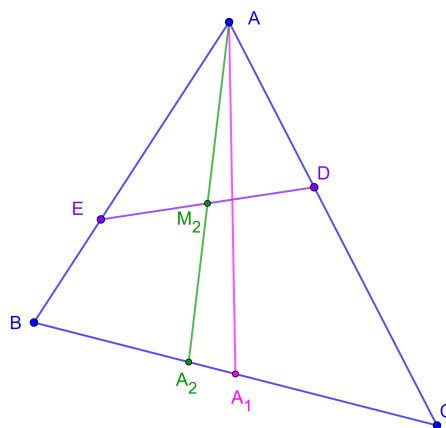


Figura 47 – Demonstração de que a simediana divide os segmentos antiparalelos de um triângulo ao meio - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Sendo  $AA_1$  mediana do triângulo  $ABC$ , com  $A_1$  ponto médio do lado  $BC$ , e  $AA_2$  simediana,  $\angle A_1AC = \angle BAA_2$ . Além disso,  $DE$  é antiparalela de  $BC$ ,  $\angle AEM_2 = \angle ACB$ , fazendo com que os triângulos  $ACA_1$  e  $AEM_2$  sejam semelhantes pelo critério AA.

Perceba que também temos  $ADE \sim ABC$ , portanto segue que

$$\frac{EM_2}{CA_1} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{EM_2}{CA_1} = \frac{DE}{BC}.$$

Concluindo, assim, que  $M_2$  é ponto médio de  $DE$ . ■

### 3.5 Reta de Simson

**Teorema 3.7** (Reta de Simson). *Escolhendo aleatoriamente um ponto no círculo circunscrito de um triângulo e traçando as perpendiculares a partir dele até cada um dos lados do triângulo, os três pontos de encontro com cada lado são colineares.*

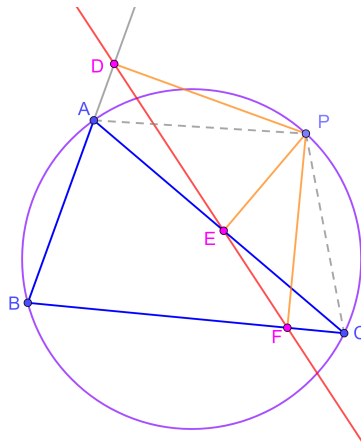


Figura 48 – A reta de Simson - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Sendo  $ABC$  um triângulo e  $P$  um ponto em seu círculo circunscrito, ao traçarmos as perpendiculares a partir de  $P$  até cada um dos lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$ , os pontos de encontro das retas serão  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente.  $\angle PEC = \angle PFC = 90^\circ$ , então o quadrilátero  $PEFC$  é cíclico e  $PC$  é diâmetro. Além disso,  $\angle FEC = \angle FPC = \alpha$ , ângulos inscritos associados ao mesmo arco.

$PDAE$  também é cíclico, então  $\angle APD = \angle AED = \theta$ . Resta-nos provar que  $\alpha = \theta$ .  $PFC$  é um triângulo retângulo, assim como  $PDA$ . Mas perceba que  $PABC$  é cíclico,  $\angle DAP = \angle PCB = \beta$ .

Pelo triângulo  $PAD$ ,  $\theta + \beta = 90^\circ$ , e, pelo triângulo  $PFC$ ,  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Então  $\alpha = \theta$  e os ângulos  $\angle DEA$  e  $\angle FEC$  são opostos pelo vértice, portanto  $D$ ,  $E$  e  $F$  são colineares. ■

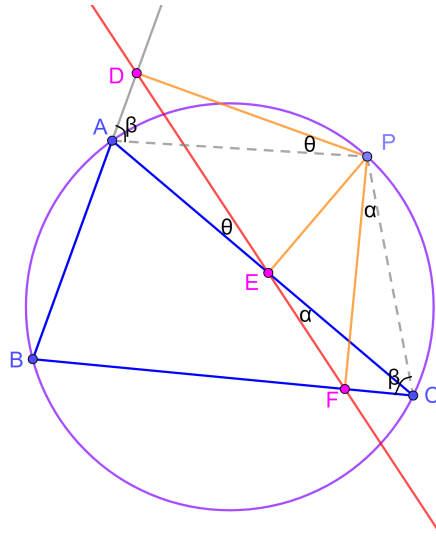


Figura 49 – Demonstração da reta de Simson - elaborado pela autora.

### 3.6 O Triângulo Órtico

**Definição 3.8** (Triângulo Órtico). O triângulo cujos vértices são os pés<sup>1</sup> das alturas de um triângulo  $ABC$  é chamado de Triângulo Órtico do triângulo  $ABC$ .

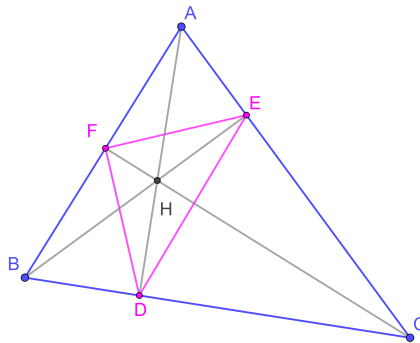


Figura 50 – Triângulo órtico - elaborado pela autora.

Note que um triângulo retângulo não possui triângulo órtico, pois dois dos pés das alturas coincidem com o vértice do ângulo reto. No caso de  $ABC$  ser obtusângulo, seu triângulo órtico coincide com o triângulo órtico do triângulo acutângulo  $ABH$ , onde  $H$  é o ortocentro de  $ABC$ .

<sup>1</sup> É comum chamar a projeção ortogonal de um ponto  $P$  sobre uma reta  $r$  de pé da perpendicular baixada  $P$  a  $r$ , isto é, a interseção de  $r$  com sua perpendicular passando por  $P$ .

**Definição 3.9** (Triângulo Pedal). Seja  $P$  um ponto qualquer do plano de um triângulo  $ABC$ . O triângulo cujos vértices são as projeções ortogonais de  $P$  sobre as retas  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  é chamado de triângulo pedal do ponto  $P$  em relação ao triângulo  $ABC$ .

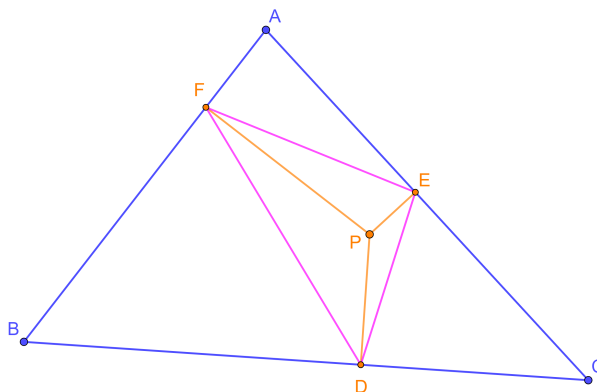


Figura 51 – Triângulo pedal - elaborado pela autora.

É possível mostrar que o triângulo pedal de  $P$  existe se, e somente se,  $P$  não pertence ao círculo circunscrito do triângulo  $ABC$ . Neste caso, o triângulo se degenera numa reta chamada de Reta de Simson, como no teorema (3.7).

Observe que o triângulo pedal do ortocentro de  $ABC$  é seu triângulo órtico. Já o pedal do circuncentro é seu triângulo medial (1.28) e o pedal do incentro é o triângulo dos pontos de contato de  $ABC$  com seu círculo inscrito.

**Teorema 3.10.** *O ortocentro de um triângulo é o incentro do seu triângulo órtico.*

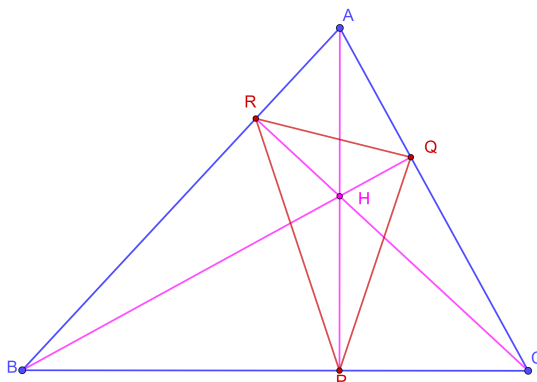


Figura 52 – Triângulo órtico - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Observando a figura (53), sendo  $H$  o ortocentro e  $PQR$  o triângulo órtico de  $ABC$ , os triângulos  $ABQ$  e  $ACR$ , ambos são retos e possuem o ângulo  $\angle BAC = \alpha$ , portanto  $\angle ABQ = \angle ACR = \theta$ .

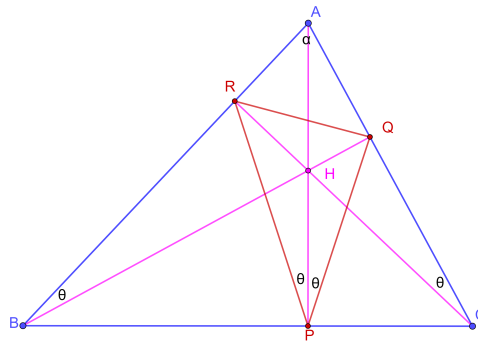


Figura 53 – Demonstração do triângulo órtico - elaborado pela autora.

O quadrilátero  $PHRB$  é cíclico, pois os ângulos em  $P$  e em  $R$  são retos, então  $\angle RBH = \angle RPH = \theta$ , ângulos inscritos associados ao mesmo arco. Agora olhando para o quadrilátero  $CQHP$ , que também é cíclico,  $\angle QCH = \angle QPH = \theta$ . Logo, a reta  $PH$  divide o ângulo  $\angle RPQ$  ao meio. O argumento é análogo para os demais ângulos, fazendo de  $H$  o incentro do triângulo  $PQR$ . ■

**Teorema 3.11.** *Seja  $PQR$  o triângulo órtico de  $ABC$ . Os lados de  $PQR$  são antiparalelos aos respectivos lados não adjacentes de  $ABC$ .*

*Demonstração.* Na demonstração do teorema (3.10), foi mostrado que  $\angle ABQ = \angle ACR = \theta$ . Então, o quadrilátero  $BCQR$  é cíclico, fazendo com que  $\angle ABC = \angle RQA$  e  $\angle ACB = \angle ARQ$ . Concluindo que  $RQ$  é antiparalela a  $BC$ . O argumento é análogo para os demais lados. ■

### 3.7 Ponto de Nagel

**Teorema 3.12** (Ponto de Nagel). *As cevianas que ligam cada vértice de um triângulo com os pontos de contato do círculo exinscrito relativo ao lado oposto são concorrentes em um ponto, chamado ponto de Nagel.*

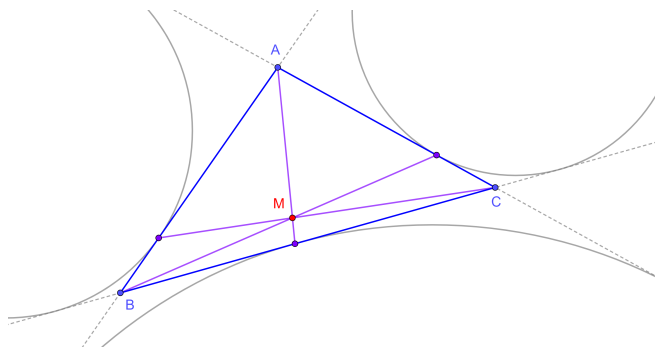


Figura 54 – Ponto de Nagel - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Para a demonstração do Ponto de Nagel, observe a figura (55). Pelo teorema (1.8) sabemos que

$$\begin{aligned} BU &= BT \\ \Rightarrow AB + AU &= BC + CT \\ \Rightarrow AB + AE &= BC + CE. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Observe que

$$\begin{aligned} AC &= AE + CE \\ AE &= AC - CE. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Substituindo (3.3) em (3.2) temos

$$\begin{aligned} AB + AC - CE &= BC + CE \\ \Rightarrow AB + AC &= BC + 2CE \\ \Rightarrow CE &= \frac{AB + AC - BC}{2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

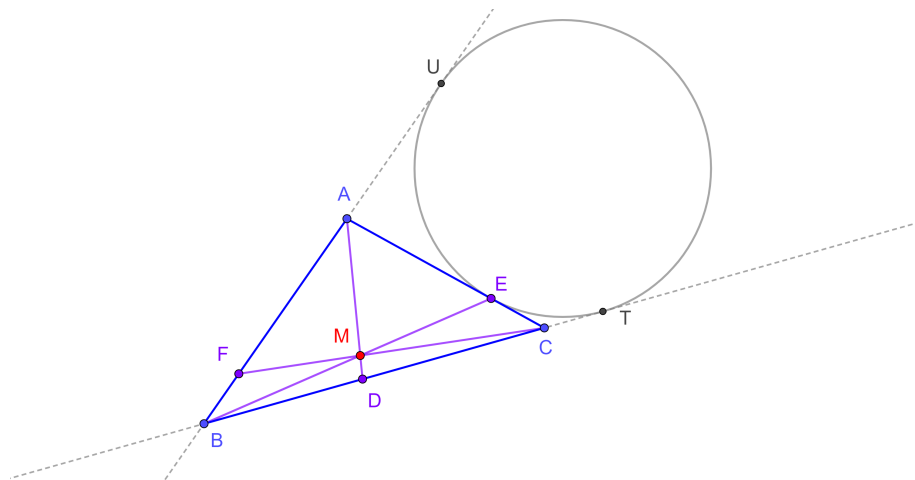


Figura 55 – Demonstração do ponto de Nagel - elaborado pela autora.

De maneira análoga a (3.4), encontramos

$$\begin{aligned} AE &= \frac{AC + BC - AB}{2} \\ AF &= \frac{AB + BC - AC}{2} \\ BF &= \frac{AB + AC - BC}{2} \\ BD &= \frac{AC + BC - AB}{2} \\ CD &= \frac{AB + BC - AC}{2}. \end{aligned}$$

Agora observe que  $AE = BD$ ,  $AF = CD$  e  $CE = BF$ , então, temos

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$$

Então, pelo Teorema de Ceva (1.31), as três cevianas  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  se encontram em um único ponto  $M$ . ■

*Observação 3.13.* Em um triângulo, a ceviana que passa pelo ponto  $M$  de Nagel divide o perímetro do triângulo ao meio.

## 4 Círculo de Apolônio

Apolônio de Perga (262 a.C. - 194 a.C.) foi um astrônomo e matemático grego, chamado de *O Grande Geômetra*. Este capítulo teve como principal fonte de pesquisa o livro *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads* (2021).

**Teorema 4.1** (Círculo de Apolônio). *Dados dois pontos  $A, B$  e o número real positivo  $k \neq 1$ , o lugar geométrico dos pontos  $P$  do plano tais que  $\frac{PA}{PB} = k$  é um círculo cujo diâmetro  $XY$  é definido pelos conjugados harmônicos  $X$  e  $Y$  do segmento  $AB$  de razão  $k$ . Este é o círculo de Apolônio do segmento  $AB$  e razão  $k$ .*

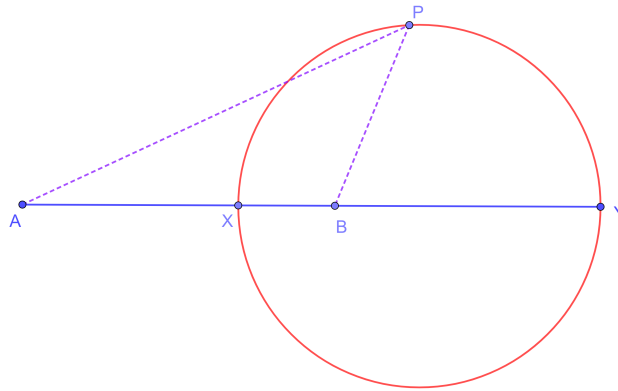


Figura 56 – Círculo de Apolônio - elaborado pela autora.

*Observação 4.2.* Pelo teorema das bissetrizes (1.24), este é também o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $PX$  e  $PY$  são bissetrizes internas e externas do ângulo  $APB$ .

*Demonstração.* Seja  $P$  um ponto arbitrário no lugar geométrico em questão, com  $P$  diferente de  $X$  e  $Y$ .

$$\frac{XA}{XB} = \frac{YA}{YB} = k = \frac{PA}{PB}.$$

Pelo teorema das bissetrizes (1.24),  $PX$  é bissetriz do triângulo  $PAB$ .

$$\frac{YA}{YB} = k = \frac{PA}{PB}.$$

Pelo mesmo teorema,  $PY$  é bissetriz externa do triângulo  $PAB$ . O ângulo formado pelas bissetrizes interna e externa que partem de um mesmo vértice é  $90^\circ$ , logo  $PX \perp PY$ . Dessa maneira, conclui-se que  $P$  pertence ao círculo de diâmetro  $XY$ .

Reciprocamente, seja  $P$  um ponto do círculo diferente de  $X$  e  $Y$ . Considere uma paralela a reta  $XP$  passando por  $B$  e uma paralela a  $PY$  passando também por  $B$ . Ambas as retas irão concorrer com  $AP$  nos pontos  $E$  e  $D$ , respectivamente, como na figura (57).

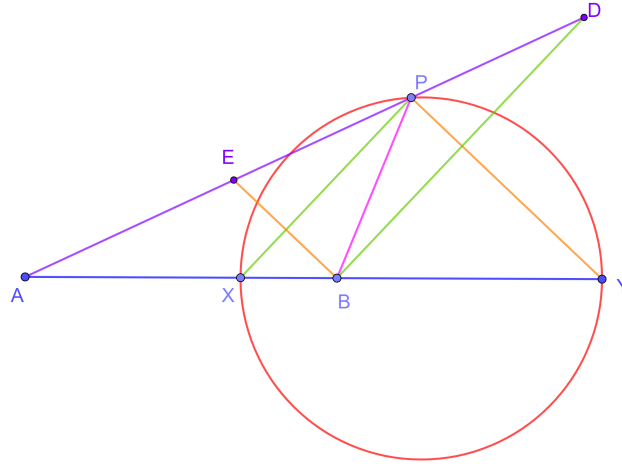


Figura 57 – Demonstração do círculo de Apolônio - elaborado pela autora.

Como  $XP \parallel BD$ , pelo Teorema de Tales (1.14),  $\frac{PA}{PD} = \frac{XA}{XB} = k$ . Como  $PY \parallel BE$ , então  $\frac{PA}{PE} = \frac{YA}{YB} = k$ .

Então,

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PA}{PE} = k.$$

O que implica que  $PE = PD$ . Perceba que  $\angle DBE = \angle XPY = 90^\circ$ , logo, o triângulo  $DBE$  é retângulo em  $B$  e  $PB$  é mediana relativa à hipotenusa. Diante disso, pelo teorema (1.16),  $PB = PD = PE$ . Concluindo, assim, que  $\frac{PA}{PD} = \frac{PA}{PB} = k$ .

■

## 5 Círculo de 9 Pontos ou Círculo de Euler

O matemático Leonhard Euler (1707 - 1783) sabia algumas das propriedades do círculo de 9 pontos, mas foi o matemático francês Jean Victor Poncelet (1788 - 1867) quem primeiro as demonstrou, em 1821. Um dos trabalhos mais notáveis de Poncelet foi em geometria projetiva, teoria que Pascal e Desargues iniciaram no século XVII.

**Definição 5.1** (Pontos de Euler). Os pontos de Euler são os pontos médios entre o ortocentro e cada vértice do triângulo.

O teorema a seguir estabelece que os triângulos medial e órtico de um triângulo qualquer possuem o mesmo círculo circunscrito (razão pela qual este círculo é também chamado de círculo de 6 pontos). Além disso, este mesmo círculo também passa pelos pontos de Euler do triângulo dado, completando assim os 9 pontos. Veremos mais adiante (capítulo 9) que este círculo é um caso particular de um círculo pedal.

**Teorema 5.2** (Círculo de Nove Pontos). *Em qualquer triângulo, os pontos médios dos lados, os pés das alturas e os pontos de Euler, pertencem a um mesmo círculo, chamado de círculo de Euler ou círculo de nove pontos.*

O círculo de nove pontos tem esse nome porque passa por 9 pontos notáveis do triângulo:

- 3 pontos médios dos lados,
- 3 pés das alturas e
- 3 pontos de Euler.

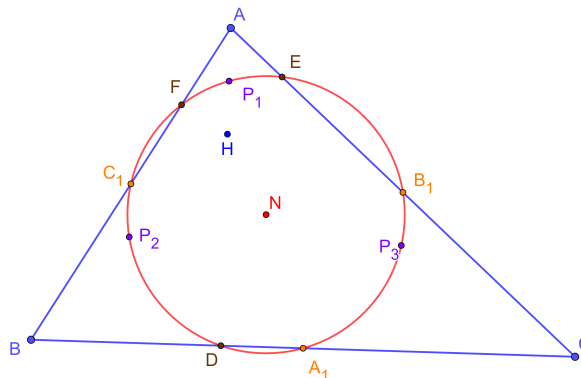


Figura 58 – Círculo de 9 pontos - elaborado pela autora.

Observe na figura (58):

- $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  são pontos médios dos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respectivamente,
- $H$  é o ortocentro,
- $D$ ,  $E$  e  $F$  são os pés das alturas,
- $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  são os pontos de Euler e
- $N$  é o centro do círculo de nove pontos.

*Demonstração.* De acordo com as propriedades do triângulo órtico, proposição (3.10), temos que  $FC$  é bissetriz de  $\angle EFD$ . Logo,  $\angle EFD = 2 \cdot \angle HFD = 2\angle HBD$ , uma vez que  $BDHF$  é cíclico. Por outro lado, como o triângulo  $BEC$  é retângulo e  $A_1E$  é a mediana relativa à hipotenusa, temos  $BA_1 = EA_1$ , donde  $\angle BEA_1 = \angle EBA_1$ .

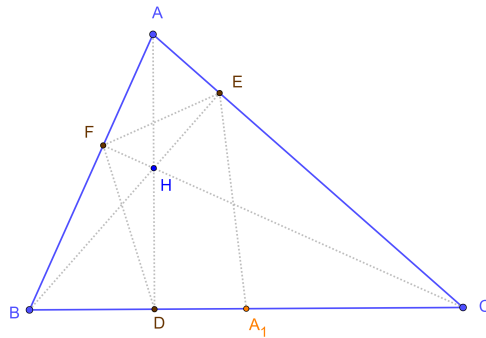


Figura 59 – Primeira parte da demonstração do círculo de 9 pontos - elaborado pela autora.

Implica que  $\angle EA_1C = \angle BEA_1 + \angle EBA_1 = 2\angle HBD = \angle EFD$ . Segue-se que  $DFEA_1$  é cíclico, ou seja, o ponto médio  $A_1$  do lado  $BC$  pertence ao círculo que passa pelos pés das alturas do triângulo. O argumento é análogo para os demais pontos médios.

Agora, provaremos que os pontos de Euler também pertencem ao círculo que passa pelos pés das alturas. O argumento será similar, mostrar que  $EFDP_3$  é um quadrilátero cíclico.

Pelo argumento anterior,

$$\angle EFD = 2 \cdot \angle HBD = 2\angle EBC = 180^\circ - 2\angle ACB.$$

Note que  $HC$  é diâmetro do círculo circunscrito a  $DCEH$  cujo centro é o ponto  $P_3$ .

Daí,

$$\angle EP_3D = 2 \cdot \angle ECD = 2\angle ACB,$$

pois são, respectivamente, ângulos central e inscrito associado ao mesmo arco  $ED$ .

Ou seja,  $\angle EFD$  e  $\angle EP_3D$  são suplementares e verifica-se que o quadrilátero  $EFDP_3$  é cíclico. O argumento é análogo para os demais pontos de Euler.

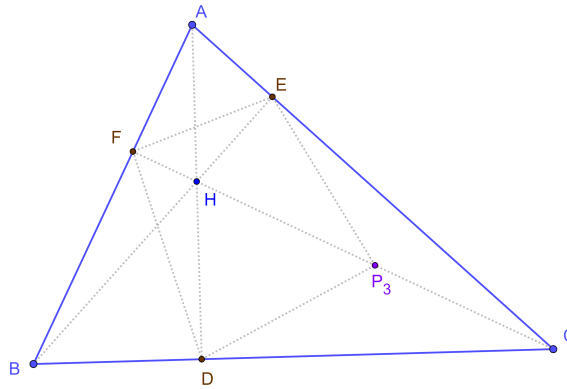


Figura 60 – Segunda parte da demonstração do círculo de 9 pontos - elaborado pela autora.

Desse modo, temos que os pontos médios e os pontos de Euler pertencem ao círculo que passa pelos três pés das alturas de um triângulo. Provando, assim, a existência do círculo de 9 pontos.

■

*Observação 5.3.* O círculo de nove pontos é circunscrito ao triângulo medial, então seu raio mede a metade do raio do círculo circunscrito do triângulo a que pertence.



## 6 Círculo Anticomplementar

**Definição 6.1** (Triângulo Anticomplementar). O triângulo anticomplementar de um triângulo  $ABC$  é aquele em que  $ABC$  é seu triângulo medial.

O círculo que apresentaremos mais adiante está associado ao triângulo anticomplementar ou triângulo antimedial de um dado triângulo  $ABC$ . Este triângulo é frequentemente utilizado nos textos didáticos como uma das estratégias para demonstrar que as três alturas do triângulo  $ABC$  são concorrentes, considerando que as mediatrizes do seu triângulo anticomplementar são concorrentes. De fato, como veremos, o ortocentro de um triângulo é o circuncentro do seu triângulo anticomplementar.

**Proposição 6.2.** *Dado um triângulo  $ABC$ , as retas que passam por cada vértice, sendo paralelas ao lado oposto, se intersectam nos pontos  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$ . Então, o triângulo  $ABC$  é o triângulo medial de  $A_1B_1C_1$ . Ou seja,  $A_1B_1C_1$  é o triângulo anticomplementar do triângulo  $ABC$ .*

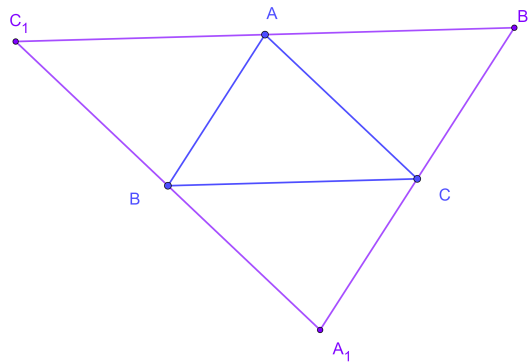


Figura 61 – Triângulo anticomplementar - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Por construção, os quadriláteros  $ABCB_1$  e  $ACBC_1$  são paralelogramos. Logo,  $AB_1 = BC = AC_1$ , isto é,  $A$  é ponto médio de  $B_1C_1$ . Do mesmo modo conclui-se que  $B$  e  $C$  são pontos médios dos segmentos  $A_1C_1$  e  $A_1B_1$ , respectivamente. ■

*Observação 6.3.* Na referência “*Advanced Euclidean Geometry*” (2013) temos as seguintes definições:

**Definição 6.4.** A reta que passa por um vértice de um triângulo, paralela ao lado oposto é chamada de uma ex-mediana do triângulo relativa ao vértice correspondente. O ponto de interseção de duas ex-mediana é um ponto ex-mediano. Nesses termos, os pontos ex-medianos de um triângulo são os vértices do seu triângulo anticomplementar.

**Definição 6.5.** A isogonal de uma ex-mediana é chamada de ex-simedianas.

**Definição 6.6.** O círculo anticomplementar é o círculo circunscrito ao triângulo anticomplementar de um triângulo dado.

**Proposição 6.7.** Sendo  $r$  o raio do círculo circunscrito a  $ABC$  e  $r_A$  o raio do círculo anticomplementar,

$$r_A = 2r.$$

*Demonstração.* O baricentro é o mesmo para um triângulo e seu medial, então, a partir da homotetia  $G(-2)$ , o círculo circunscrito ao triângulo  $ABC$  é transformado no círculo circunscrito ao triângulo  $A_1B_1C_1$ , e seu raio dobra de tamanho. ■

**Proposição 6.8.** O circuncentro de  $A_1B_1C_1$  é o ortocentro  $H$  de  $ABC$ .

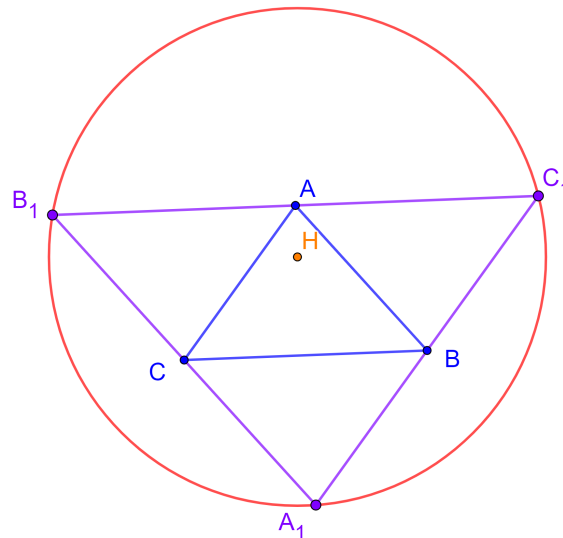


Figura 62 – Círculo anticomplementar - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Note que, pelo paralelismos dos lados dos triângulos, as retas contendo as alturas de  $ABC$  são mediatrizes de  $A_1B_1C_1$ . Logo o ponto de interseção dessas mediatrizes, que é o circuncentro do triângulo anticomplementar, é o ortocentro de  $ABC$ . ■

*Observação 6.9.* O círculo circunscrito a  $ABC$  é o círculo de 9 pontos do triângulo anticomplementar.

## 7 Círculos de Johnson

Nesta seção, abordaremos um problema que envolve uma configuração de três círculos congruentes passando por um ponto em comum, que é conhecido, principalmente na Romênia, como o problema da moeda de cinco lei<sup>1</sup>. Foi descoberto pelo matemático romeno Gheorghe Titeica ao desenhar círculos com uma moeda e proposto como um problema na competição organizada pela Gazeta Matemática. De forma independente, o mesmo resultado foi apresentado em 1916 por Johnson<sup>2</sup> (1916), a quem se atribui o nome desses círculos e pode ser encontrado em seu renomado livro *Advanced Euclidean Geometry*, (1929).

A disposição em que se encontram esses círculos no problema pode ser entrada de forma similar em algumas figuras interessantes como no símbolo dos jogos olímpicos e já foi usado explicitamente como inspiração e homenagem na logomarca da 40ª Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) realizada na Romênia em 1999.



Figura 63 – Disponível em: <[https://www.imo-official.org/year\\_info.aspx?year=1999](https://www.imo-official.org/year_info.aspx?year=1999)>.

**Teorema 7.1** (Círculos de Johnson). *Se três círculos congruentes se intersectam em um mesmo ponto, então o círculo que passa pelos outros três pontos de interseção é congruente aos demais círculos. Esses quatro círculos são chamados os Círculos de Johnson.*

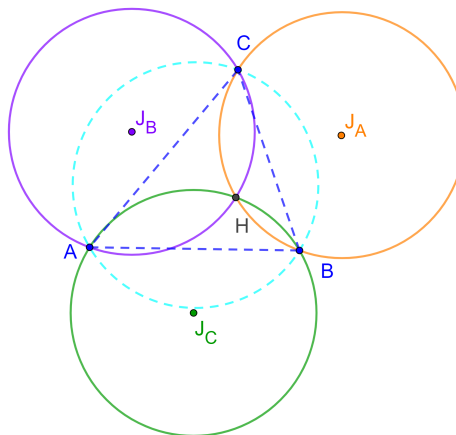


Figura 64 – Círculos de Johnson - elaborado pela autora.

<sup>1</sup> plural em romeno para o "leu", moeda oficial da Romênia

<sup>2</sup> Roger Arthur Johnson (1890-1954) foi um geômetra nascido em Gardner, Massachusetts.

*Demonstração.* Seja  $H$  o ponto comum aos três círculos de raio  $r$ . Denotemos por  $A$ ,  $B$  e  $C$  os outros pontos de interseções dos círculos e sejam  $J_A$ ,  $J_B$  e  $J_C$  os centros dos círculos que não passam pelos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Como  $HJ_A = HJ_B = HJ_C = r$ , então  $H$  é circuncentro de  $J_AJ_BJ_C$ .

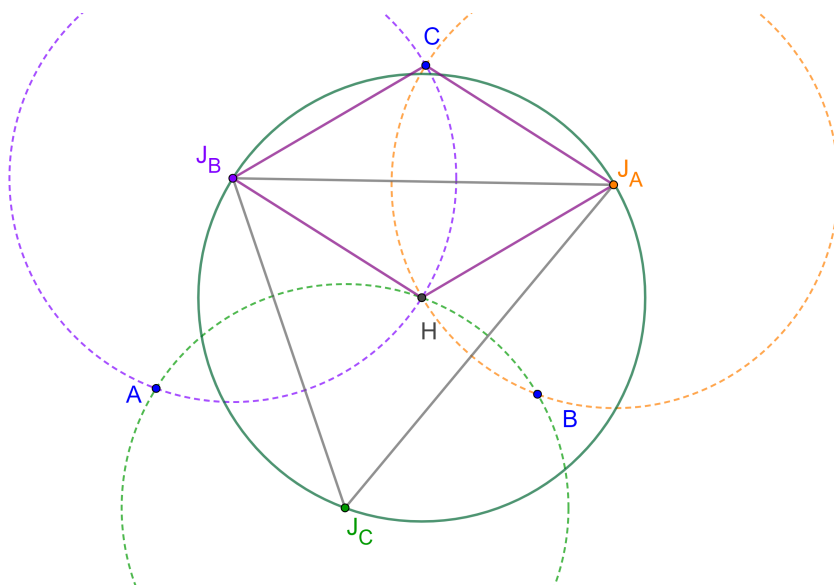


Figura 65 – Demonstração do círculo de Johnson - elaborado pela autora.

Note que os quadriláteros  $HJ_ACJ_B$ ,  $HJ_BAJ_C$  e  $HJ_ABJ_C$  são losangos cujos lados tem medida igual ao raio  $r$  dos círculos. Sabendo que as diagonais de um losango cortam-se ao meio e são perpendiculares, podemos concluir que as retas dos centros dos círculos são mediatrizes dos segmentos que ligam  $H$  aos vértices de  $ABC$ .

Além disso, temos que  $J_BC \parallel HJ_A \parallel J_CB$ . Logo  $J_BCBJ_C$  é um paralelogramo. Portanto  $J_BJ_C = BC$ . Analogamente,  $J_AJ_B = AB$  e  $J_AJ_C = AC$ . Sendo assim, os triângulos  $ABC$  e  $J_AJ_BJ_C$  são congruentes e, por isso, o circuncírculo de  $ABC$  também tem raio  $r$ . ■

Durante a argumentação da demonstração anterior, nos deparamos com um novo círculo de mesmo raio dos anteriores, circunscrito ao triângulo  $J_AJ_BJ_C$  (o triângulo de Johnson dos círculos) e que pode também ser considerado um dos círculos Johnson. Esse sistema de círculos e triângulos possuem propriedades interessantes relacionadas à alguns dos círculos que apresentamos anteriormente que destacamos a seguir.

**Proposição 7.2.** *Considere a mesma notação definida na demonstração do teorema anterior, sendo  $A$ ,  $B$  e  $C$  os pontos de concorrência dos círculos, o ortocentro de  $ABC$  é o ponto onde os três passam ao mesmo tempo.*

*Demonstração.* Já sabemos que os triângulos  $ABC$  e  $J_AJ_BJ_C$  são congruentes. Como  $CH \perp J_AJ_B$  e  $J_AJ_B \parallel AB$ , então  $CH \perp AB$ . Utilizando o mesmo raciocínio,  $AH \perp BC$  e  $BH \perp AC$ . Concluindo, assim, que  $H$  é o ortocentro do triângulo  $ABC$ .

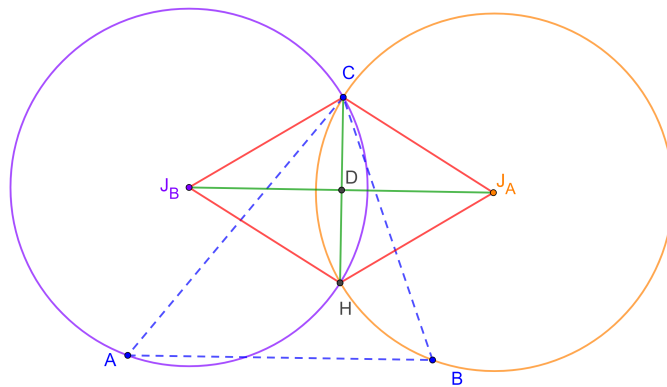


Figura 66 – Demonstração do ponto de encontro dos círculos de Johnson - elaborado pela autora.

■

Ao traçarmos as retas partindo de  $H$  aos centros de cada um dos três círculos, como na figura (67), os pontos de encontro de cada uma das três retas com cada um dos círculos formam o triângulo anticomplementar de  $ABC$ . Então, o círculo anticomplementar circunscrito a ele terá centro  $H$  e raio  $2r$ , sendo  $r$  o raio dos círculos de Johnson.

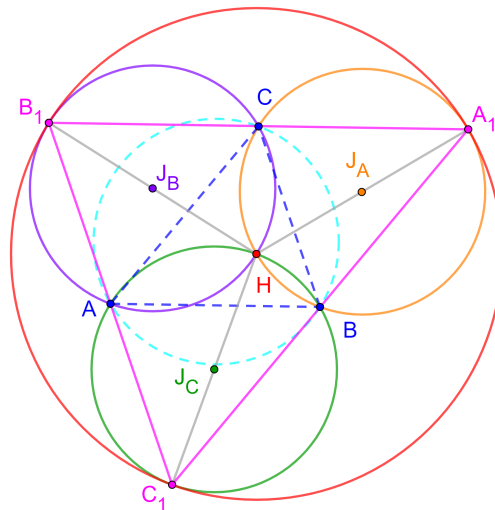


Figura 67 – Círculos de Johnson e círculo anticomplementar - elaborado pela autora.



## 8 Círculo de 8 Pontos

### 8.1 Paralelogramo de Varignon

**Teorema 8.1** (Paralelogramo de Varignon). *Dado um quadrilátero qualquer, o quadrilátero formado a partir da união dos pontos médios de cada lado será um paralelogramo chamado de paralelogramo de Varignon.*

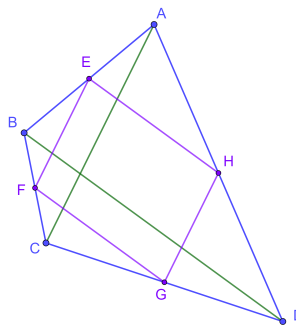


Figura 68 – Paralelogramo de Varignon - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Considere  $ABCD$  um quadrilátero qualquer e  $E, F, G$  e  $H$  os pontos médios dos lados  $AB, BC, CD$  e  $AD$ , respectivamente.

Dado o triângulo  $ABC$ ,  $EF$  é base média, ou seja,  $EF \parallel AC$ . Do mesmo modo,  $GH \parallel AC$ , concluindo que  $EF \parallel GH$ . Analogamente,  $EF \parallel FG$ , então  $EFGH$  é um paralelogramo. Quando as diagonais  $AC$  e  $BD$  forem perpendiculares,  $EFGH$  será um retângulo. ■

### 8.2 O círculo de 8 pontos

**Teorema 8.2.** *Dado  $ABCD$  um quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares. Os pontos médios dos lados junto com os quatro pés das perpendiculares traçadas a partir de cada ponto médio até o lado oposto, pertencem a um único círculo, o círculo de 8 pontos.*

*Demonstração.* Como as diagonais de  $ABCD$  são perpendiculares,  $EFGH$  é um retângulo e já existe um círculo que passa pelos seus quatro vértices, com centro no encontro de suas diagonais, ou seja, em  $M$ . Observando o triângulo  $EGE_1$ , é retângulo em  $E_1$ , por construção, e  $EG$  é diâmetro do círculo, então  $E_1$  pertence ao círculo. O argumento é análogo para os demais pés das perpendiculares, então o círculo passa por todos os oito pontos:  $E, E_1, F, F_1, G, G_1, H$  e  $H_1$ . ■

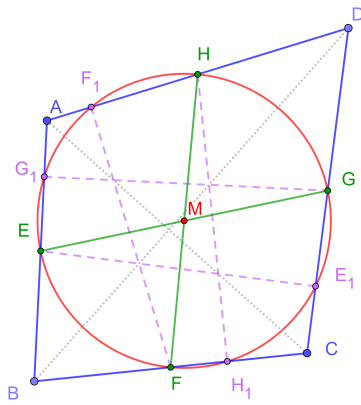


Figura 69 – Círculo de 8 pontos - elaborado pela autora.

## 9 Círculo Pedal

De acordo com a definição (3.9), o triângulo pedal de um ponto  $P$  no plano de um triângulo  $ABC$  é o triângulo cujos vértices são os pés das perpendiculares traçadas de  $P$  aos lados de  $ABC$ . Todo ponto  $P$  desse plano admite um triângulo pedal, exceto quando  $P$  pertence ao círculo circunscrito de  $ABC$  (teorema 3.7).

**Teorema 9.1** (Círculo Pedal). *Os triângulos de um par de pontos conjugados isogonais possuem um mesmo círculo circunscrito, chamado de Círculo Pedal de  $(X, P)$ .*

Em outros termos, os seis vértices dos dois triângulos pedais de um par de pontos conjugados isogonais  $(X, P)$  estão em um mesmo círculo, cujo centro é o ponto médio  $M$  do segmento  $XP$ .

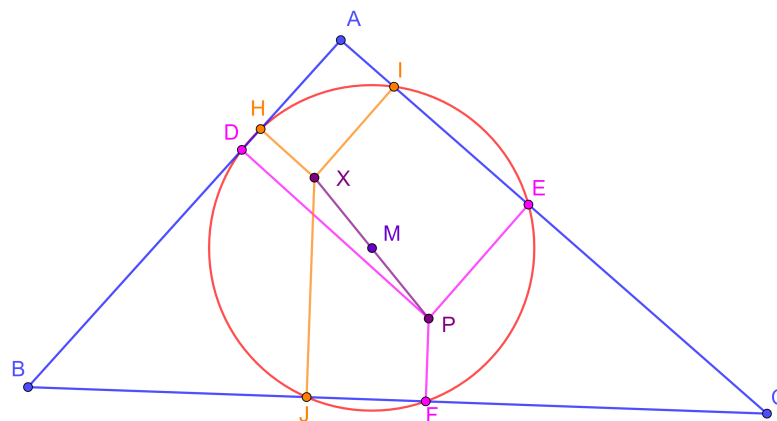


Figura 70 – Círculo pedal de  $(X, P)$  - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Sejam  $X$  e  $P$  conjugados com relação a um triângulo  $ABC$  e sejam  $DEF$  e  $HIJ$  seus respectivos triângulos pedais. Como  $X$  e  $P$  são conjugados isogonais, pela proposição (1.40), sabemos que a reta  $AX$  é perpendicular a reta  $DE$ , seja  $Q$  o ponto de encontro dessas retas.

Perceba que são cíclicos os quadriláteros  $XHDQ$ , porque possuem um par de ângulos opostos retos, e  $XQIE$ , pois  $\angle XQE = \angle XIE = 90^\circ$ . Pela proposição (1.44), como  $XHDQ$  pertence a um círculo, temos  $AH \cdot AD = AX \cdot AQ$  e, de maneira análoga,  $AI \cdot AE = AX \cdot AQ$ . Igualando as equações, temos

$$AH \cdot AD = AI \cdot AE.$$

Mostrando que o quadrilátero  $DHIE$  é cíclico. O argumento é análogo partindo de qualquer vértice do triângulo.

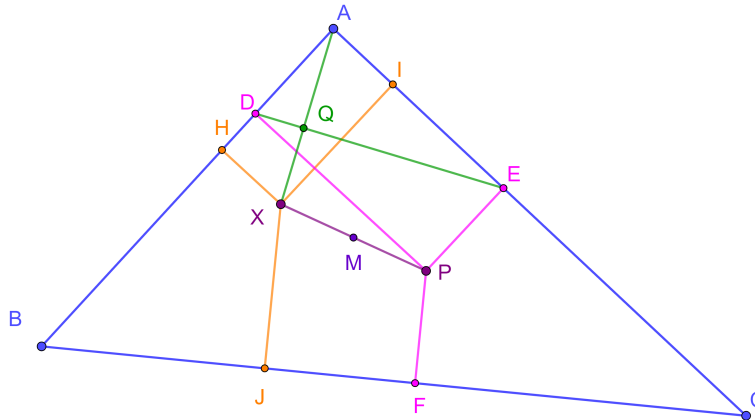


Figura 71 – Demonstração do círculo pedal - elaborado pela autora.

Para ficar provado que os seis pontos pertencem a um único círculo, vamos demonstrar que o centro é o mesmo independente da escolha dos quatro pontos. Para isto, basta encontrar a interseção das mediatrizes dos pontos. Observe que, como  $XI \perp AC$  e  $PE \perp AC$ , então a mediatriz de  $IE$  passará exatamente no ponto médio  $M$  de  $XP$ . O raciocínio é análogo para os segmentos  $HD$  e  $JF$ , fazendo com que o ponto médio  $M$  do conjugado isogonal  $(X, P)$  seja o centro do círculo pedal.

■

*Observação 9.2.* O círculo de 9 pontos (capítulo 5) é um caso particular do círculo pedal, para o par de conjugados isogonais  $(H, O)$ , o ortocentro e o circuncentro.

# 10 Círculo de Spieker

O círculo de Spieker tem esse nome em homenagem ao matemático alemão Theodor Spieker, que viveu no século XIX. O estudo deste círculo é de grande importância principalmente na física e na mecânica, pois seu centro é o centro de gravidade do triângulo original.

## 10.1 Cleaver

**Definição 10.1** (Cleaver). Cleaver é um segmento que liga dois lados do triângulo, sendo uma das extremidades do segmento o ponto médio do lado, dividindo o perímetro do triângulo ao meio.

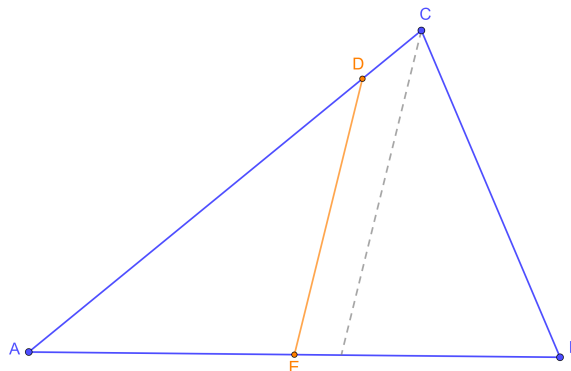


Figura 72 – Cleaver - elaborado pela autora.

Em outras palavras, seja  $E$  ponto médio de  $AB$  e  $D$  um ponto de  $AC$  (conforme a figura 72), então  $ED$  é um cleaver do triângulo  $ABC$  se  $AD = DC + CB$ .

Note que isso equivale a dizer que os valores  $EA + AD$  e  $EB + BC + CD$  são iguais e correspondem a metade do perímetro do triângulo  $ABC$ . Equivalentemente, os polígonos  $AED$  e  $EBCD$  possuem o mesmo perímetro.

Para cada lado do triângulo, temos um cleaver associado ao seu ponto médio. Um cleaver coincide com uma mediana se, e somente se, os outros dois lados são congruentes (triângulo isóceles).

**Proposição 10.2.** *Seja  $E$  o ponto médio de  $AB$ , se  $DE$  é um cleaver do triângulo  $ABC$ , então o segmento  $DE$  é paralelo à bissetriz do ângulo  $C$ .*

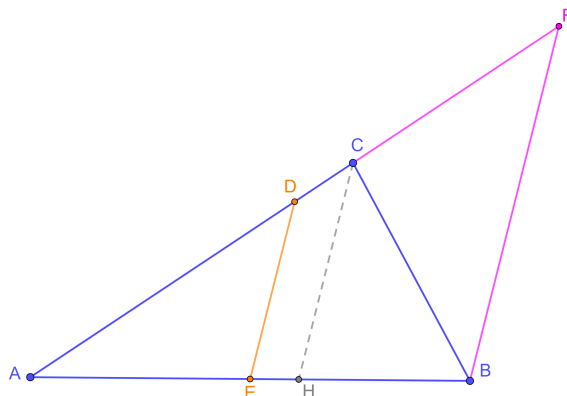


Figura 73 – Demonstração do paralelismo do cleaver com a bissetriz - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Prolongando  $AC$  a partir do ponto  $C$  de modo que  $CF = BC$ , o triângulo  $BCF$  é isósceles. Considerando  $\angle ACB = 2\theta$ , este ângulo é externo ao triângulo  $BCF$ , então  $\angle CBF = \angle BFC = \theta$ .

Como  $DE$  é um cleaver, sabemos que  $AD = DC + BC$ , então  $D$  é ponto médio de  $AF$ , além disso  $E$  é ponto médio de  $AB$ , implicando que  $DE$  é base média de  $ABF$ , logo  $DE \parallel BF$ . Sendo  $CH$  bissetriz,  $\angle ACH = \angle AFB = \theta$ , são ângulos correspondentes determinados por  $AC$  em  $CH$  e  $BF$ , portanto  $CH \parallel BF$ . Então, por transitividade,  $DE \parallel CH$ .

■

**Corolário 10.3.** *Em todo triângulo, os três segmentos cleavers são concorrentes e o ponto de encontro é denominado centro de cleavance, que é o incentro do seu triângulo medial.*

Observe o triângulo medial  $EFG$  do triângulo  $ABC$  na figura (74). Como  $DE \parallel CH$  (bissetriz de  $\angle ACB$ ), figura (73),  $DE$  é bissetriz de  $\angle GEF$ . As bissetrizes do triângulo medial serão cleavers do triângulo original. E o centro cleavance é o encontro destas bissetrizes, ou seja, o incentro do triângulo medial. A partir disso, percebemos que cada bissetriz do triângulo medial divide o perímetro do triângulo original ao meio.

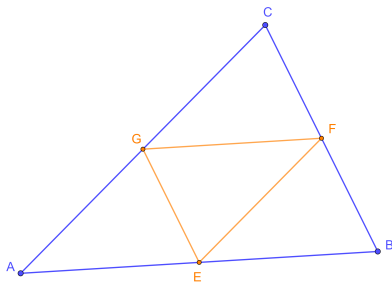


Figura 74 – Triângulo medial - elaborado pela autora

## 10.2 Círculo de Spieker

**Definição 10.4** (Círculo de Spieker). O círculo de Spieker de um triângulo é o círculo inscrito em seu triângulo medial.

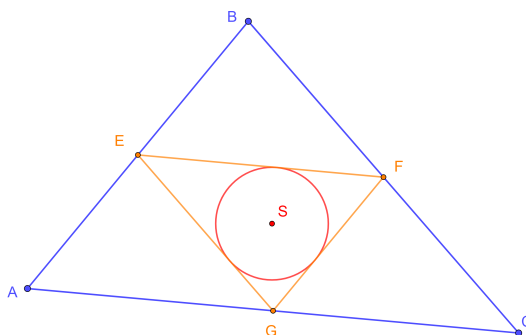


Figura 75 – Círculo de Spieker - elaborado pela autora.

O ponto  $S$  de Spieker é o incentro do triângulo medial. Então, o ponto de Spieker é o centro de cleavance.

## 10.3 O Ponto de Nagel e o Círculo de Spieker

**Proposição 10.5.** Sendo  $I$  o incentro (encontro das bissetrizes e centro do círculo inscrito no triângulo),  $G$  o baricentro (encontro das medianas de um triângulo),  $M$  o ponto de Nagel (teorema (3.12)) e  $S$  o ponto de Spieker de um triângulo  $ABC$ :

- $I$ ,  $G$  e  $M$  são sempre colineares;
- $G$  divide em três partes iguais o segmento  $IM$ , isto é,  $GM = 2 \cdot IG$ ;
- $S$  é ponto médio do segmento  $IM$ .

*Esses quatro pontos são sempre colineares e a reta que os contém é a de Reta de Nagel.*

*Demonstração.* Primeiro vamos demonstrar que  $G$  divide  $IM$  em três partes iguais:

O baricentro  $G$  divide a mediana de forma que  $AG = 2 \cdot GA_1$ , sendo  $A_1$  o ponto médio do lado  $BC$ .

Seja  $L$  um ponto na reta suporte de  $IG$  de modo que  $2 \cdot IG = GL$ . Observe os triângulos  $AGL$  e  $A_1GI$ <sup>1</sup>, são semelhantes pelo critério LAL, pois o ângulo em  $G$  é o mesmo (opostos pelo

<sup>1</sup> Esses triângulos só existem se  $ABC$  não for isósceles. Entretanto, caso  $ABC$  seja isósceles, os pontos são colineares trivialmente, pois as principais cevianas relativas a base coincidem. Logo esses pontos pertencem à mediatriz da base

vértice),  $2 \cdot A_1G = AG$  e  $2 \cdot IG = GL$ . Implicando que  $\angle ALG = \angle A_1IG$ . Deste modo, podemos verificar que  $A_1I \parallel AL$ .

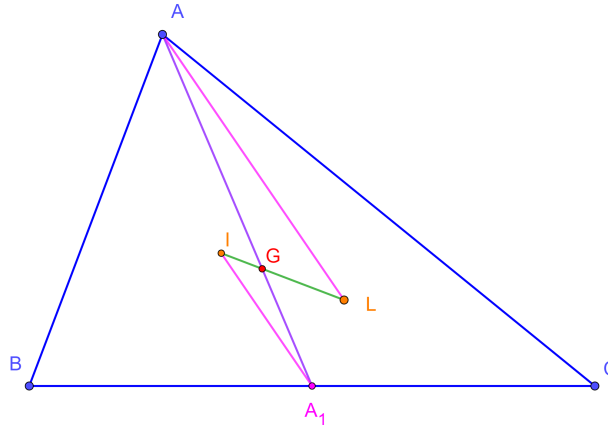


Figura 76 – Demonstrando que  $G$  divide o segmento  $IM$  em três partes iguais (parte 1) - elaborado pela autora.

Seja  $E$  o ponto de encontro da reta  $AL$  com o lado  $BC$  do triângulo (figura (77)). Para mostrar que  $L$  é o ponto de Nagel, precisamos demonstrar que  $AB + BE = EC + AC = p$  (teorema (3.12)).

Denominando os lados  $AB = c$ ,  $AC = b$  e  $BC = a$ , sejam  $AD \perp BC$  e  $IF \perp BC$ . Note que  $AB + BE = p \Leftrightarrow BE = p - AB = p - c$ . Basta então provar que  $BD + DE$  é de fato  $p - c$ .

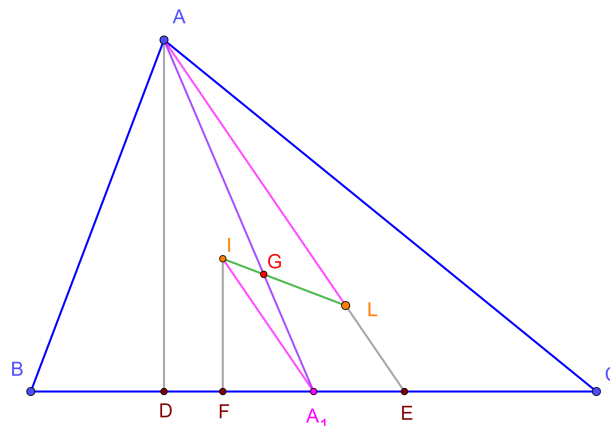


Figura 77 – Demonstrando que  $G$  divide o segmento  $IM$  em três partes iguais (parte 2) - elaborado pela autora.

(i) O comprimento de  $DE$ :

Como  $AE \parallel IA_1$ , os triângulos  $AED$  e  $IA_1F$  são semelhantes, pelo critério AA, então

$$\frac{DE}{FA_1} = \frac{AD}{IF}. \quad (10.1)$$

$IF$  é o raio  $r$  do círculo inscrito a  $ABC$ . De acordo com o corolário (2.4), a área do triângulo pode ser calculada das seguintes maneiras:

$$[ABC] = r \cdot p \quad (10.2)$$

$$[ABC] = \frac{a \cdot AD}{2}. \quad (10.3)$$

Igualando as equações (10.2) e (10.3), temos

$$\begin{aligned} r \cdot p &= \frac{a \cdot AD}{2} \\ r &= \frac{a \cdot AD}{2 \cdot p}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Agora utilizando as equações (10.1), (10.4) e o fato que  $IF = r$

$$\begin{aligned} \frac{DE}{FA_1} &= \frac{AD}{r} = \frac{AD}{\frac{a \cdot AD}{2 \cdot p}} \\ \Rightarrow \frac{DE}{FA_1} &= \frac{AD \cdot 2 \cdot p}{a \cdot AD} = \frac{2 \cdot p}{a} \\ \Rightarrow DE &= \frac{2 \cdot p}{a} \cdot FA_1. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Perceba que

$$FA_1 = BA_1 - BF. \quad (10.6)$$

E, pelo corolário (2.5),  $BF = p - b$ . Então,

$$\begin{aligned} FA_1 &= \frac{a}{2} - (p - b) \\ &= \frac{a}{2} - p + b \\ &= \frac{a}{2} - \frac{(a + b + c)}{2} + b \\ &= -\frac{(b + c)}{2} + b \\ &= \frac{b - c}{2}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Agora vamos substituir a equação (10.7) em (10.5)

$$DE = \frac{2 \cdot p}{a} \cdot \frac{(b - c)}{2} = \frac{p \cdot (b - c)}{a}. \quad (10.8)$$

(ii) O comprimento de  $BD$ :

Para o triângulo  $ABD$  temos

$$\begin{aligned}\cos \angle ABD &= \frac{BD}{c} \\ \Rightarrow BD &= c \cdot \cos \angle ABD.\end{aligned}\tag{10.9}$$

Pela lei dos cossenos,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle ABD.\tag{10.10}$$

Substituindo a equação (10.9) em (10.10),

$$\begin{aligned}b^2 &= a^2 + c^2 - 2aBD \\ 2aBD &= a^2 + c^2 - b^2 \\ BD &= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}.\end{aligned}\tag{10.11}$$

(iii)  $BE = BD + DE$ :

Substituindo os valores de  $BD$  na equação (10.11) e  $DE$  em (10.8), temos

$$\begin{aligned}BE &= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} + \frac{p \cdot (b - c)}{a} \\ &= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} + \frac{2p \cdot (b - c)}{2a} \\ &= \frac{a^2 - b^2 + c^2 + (a + b + c) \cdot (b - c)}{2a} \\ &= \frac{a^2 - b^2 + c^2 + ab - ac + b^2 - bc + cb - c^2}{2a} \\ &= \frac{a^2 + ab - ac}{2a} \\ &= \frac{a + b - c}{2} \\ &= \frac{a + b + c - c - c}{2} \\ &= \frac{a + b + c}{2} - c \\ &= p - c.\end{aligned}$$

Então, podemos concluir que  $BE$  é a diferença entre o semiperímetro e o lado  $AB$ , logo,  $AE$  é uma ceviana de Nagel. Procedendo de modo análogo para os vértices  $B$  e  $C$ , conclui-se que  $L$  é o ponto em comum, ou seja, o ponto de Nagel (teorema 3.12). Além disso,  $IG = \frac{IM}{3}$ .

Agora iremos demonstrar que  $S$  divide  $IM$  ao meio.

Como o baricentro  $G$  divide cada mediana em três partes iguais, a homotetia de centro  $G$  e razão  $\left(\frac{-1}{2}\right)$ , denominada  $G\left(\frac{-1}{2}\right)$ , transforma o triângulo  $ABC$  em seu triângulo medial  $A_1B_1C_1$ . Nessa transformação, o círculo inscrito do triângulo  $ABC$  é transformado no círculo inscrito do triângulo  $A_1B_1C_1$ , que é o círculo de Spieker de  $ABC$ , levando o incentro  $I$  no ponto de Spieker  $S$ . Como essa homotetia foi feita em torno do baricentro,  $I$ ,  $G$  e  $S$  devem ser colineares e, como foi usado  $G\left(\frac{-1}{2}\right)$ ,  $IG = 2GS$ .

Como  $IG = \frac{IM}{3}$ , então  $GS = \frac{IM}{6}$ . Além disso, temos

$$IS = IG + GS = \frac{IM}{3} + \frac{IM}{6} = \frac{IM}{2}.$$

Podemos, então, concluir que  $S$  divide  $IM$  ao meio. ■

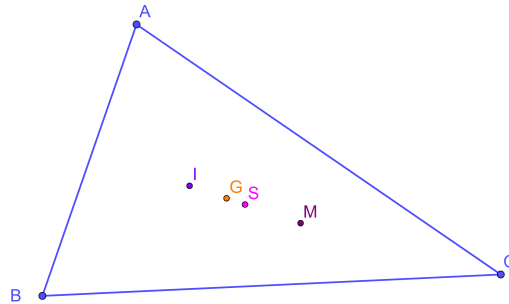


Figura 78 – Demonstrando que  $S$  divide  $M$  ao meio - elaborado pela autora.

**Corolário 10.6.** *O incentro de um triângulo é o ponto de Nagel de seu triângulo medial.*

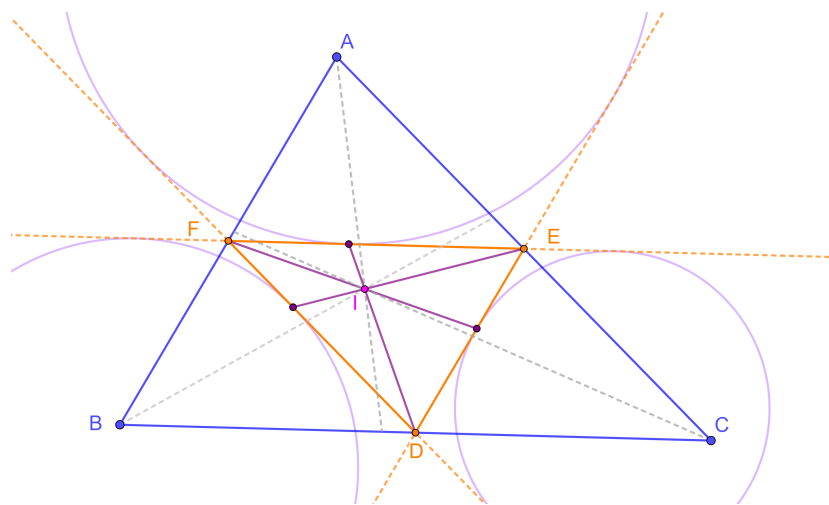


Figura 79 – O incentro  $I$  de um triângulo  $ABC$  é o ponto de Nagel de seu triângulo medial - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Na demonstração acima, é possível verificar que a homotetia  $G\left(\frac{-1}{2}\right)$ , centrada no baricentro  $G$ , leva o incentro  $I$  do triângulo  $ABC$ , no ponto  $S$  de Spieker. Usando o mesmo raciocínio, como  $GM = 2 \cdot IG$ , então o ponto  $M$  de Nagel de  $ABC$  será levado ao incentro  $I$ . ■

**Proposição 10.7.** *Os pontos médios dos segmentos que unem os vértices de um triângulo ao seu ponto de Nagel formam um triângulo congruente ao triângulo medial, e ambos são inscritos no mesmo círculo.*

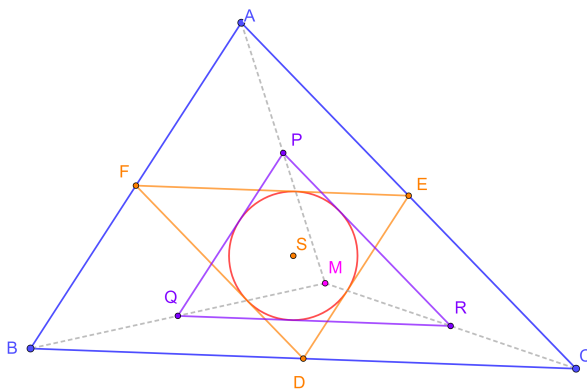


Figura 80 – Triângulo congruente ao triângulo medial, no qual o círculo de Spieker também é inscrito - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Dado o triângulo  $ABC$ , sejam  $DEF$  seu triângulo medial,  $M$  seu ponto de Nagel e  $PQR$  o triângulo construído a partir dos pontos médios entre cada vértice e o ponto de Nagel.

Primeiro será demonstrado que  $PQR$  é congruente ao triângulo medial de  $ABC$ . Observando o triângulo  $MAB$ , como  $P$  é ponto médio de  $AM$  e  $Q$  é ponto médio de  $BM$ , os triângulos  $MPQ$  e  $MAB$  são semelhantes, pelo critério LAL. Então  $PQ$  possui metade do comprimento de  $AB$ . O raciocínio é análogo para os demais lados, logo,  $PQR$  possui todos os lados medindo metade dos lados correspondentes de  $ABC$ , então  $PQR$  é congruente a  $DEF$  (triângulo medial de  $ABC$ ).

Sabe-se que o ponto  $S$  de Spieker, centro do círculo inscrito ao triângulo medial de  $ABC$ , está na reta  $IM$ . Além disso, já foi demonstrado que  $IG = 2GS$ . Realizando a homotetia  $M(2)$ , centrada no ponto de Nagel  $M$ , o ponto  $S$  é levado ao incentro  $I$  de  $ABC$ , o triângulo  $PQR$  dobra de tamanho e é levado em  $ABC$ , assim como seu círculo inscrito e incentro é levado ao círculo inscrito e ao incentro de  $ABC$ , respectivamente. Agora utilizando a homotetia  $G\left(\frac{-1}{2}\right)$ ,  $ABC$  é transportado ao seu triângulo medial  $DEF$ , e seu incentro é levado à  $S$ . Desse modo,  $S$  volta a ele mesmo, sendo ele sua própria imagem na composição das homotetias. Então os círculos inscritos a  $PQR$  e  $DEF$  possuem o mesmo centro  $S$  e o mesmo raio, já que os triângulos são congruentes, então o círculo de Spieker também é inscrito a  $PQR$ . ■

# 11 Círculo de Fuhrmann

Wilhelm Ferdinand Fuhrmann (1833 - 1904) foi um matemático alemão; o círculo e o triângulo de Fuhrmann foram assim nomeados em sua memória. Nas seções anteriores estudamos dois círculos importantes que estão fortemente associados aos pontos notáveis do triângulo, a saber, os círculos de Euler e Spieker, cujos centros são pontos médios dos segmentos  $HO$  (ortocentro - circuncentro) e  $IM$  (incentro - ponto de Nagel), respectivamente. Nesta seção apresentaremos um novo círculo com essas características ainda mais marcantes. De fato, o círculo de Fuhrmann passa efetivamente pelos pontos associados  $H$  e  $M$ , um de cada círculo mencionado antes. Mais precisamente, veremos que  $HM$  é o diâmetro deste círculo, que passa por pelo menos 8 pontos especiais do triângulo.

**Definição 11.1** (Círculo de Fuhrmann). Dado um triângulo  $ABC$  e seu círculo circunscrito, sejam  $X_1$ ,  $Y_1$  e  $Z_1$  os pontos médios dos arcos determinados pelos lados do triângulo. Ao refletir esses pontos em relação aos lados correspondentes, obtém-se um triângulo, denominado de triângulo de Fuhrmann  $XYZ$ . O círculo circunscrito a esse triângulo é denominado círculo de Fuhrmann.

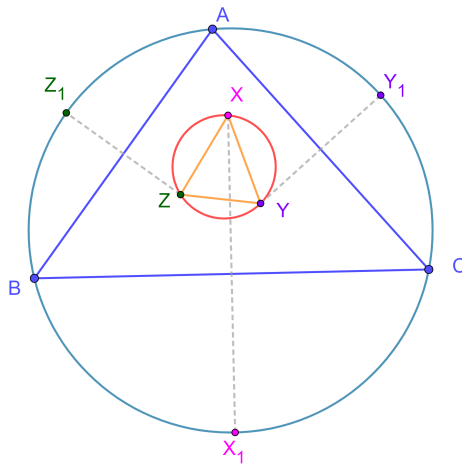


Figura 81 – Círculo de Fuhrmann - elaborado pela autora.

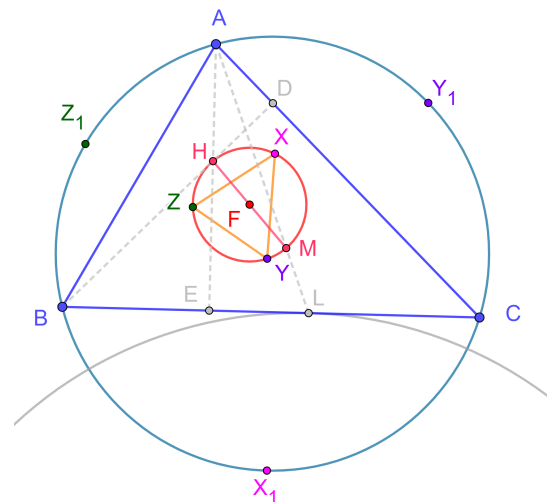


Figura 82 – Círculo de Fuhrmann destacando um de seus diâmetros - elaborado pela autora.

A proposição a seguir servirá de auxílio na demonstração de algumas propriedades mais adiantes.

**Proposição 11.2.** *O reflexo do ortocentro em relação aos lados do triângulo pertencem ao círculo circunscrito ao triângulo.*



*Demonstração.* De fato, a bissetriz interna relativa ao vértice  $A$  do triângulo  $ABC$  encontra seu círculo circunscrito no ponto  $D$ , que é ponto médio do arco  $BC$  que não contém o ponto  $A$ . Um fato básico e bastante conhecido é que cordas de um círculo associadas a arcos de mesma medida são congruentes, portanto  $BD = DC$ . Sendo  $D$  equidistante de  $B$  e  $C$  temos que  $D$  pertence a mediatriz de  $BC$ . Uma vez que  $AB \neq AC$  temos que esta bissetriz não coincide com a mediatriz de  $BC$  e, conseqüentemente,  $D$  é o único ponto em comum. ■

**Teorema 11.4.** *O círculo de Fuhrmann de um triângulo é o círculo tal que os extremos de um de seus diâmetros são o ortocentro e o ponto de Nagel do triângulo.*

*Demonstração.* Essa demonstração é baseada na resolução de John Rigby (1995).

Como  $X_1$  é ponto médio do arco  $BC$ , sua imagem  $X$  pertence à mediatriz de  $BC$ , ou seja, ao diâmetro  $X_1L$  do círculo circunscrito de  $ABC$ . Seja  $D_1$  o reflexo de  $H$  em relação a  $BC$  que, pela proposição (11.2), pertence ao círculo circunscrito de  $ABC$ ,  $AD_1$  também é perpendicular a  $BC$ , então  $AD_1 \parallel LX_1$ . Seja  $EF$  o diâmetro do círculo circunscrito de  $ABC$  que é perpendicular a  $X_1L$ , fazendo a reflexão com relação a  $EF$ ,  $L$  é levado em  $X_1$  e  $A$  é levado em  $D_1$ , então  $AL$  é levado em  $D_1X_1$ . Além disso, também leva o ângulo  $\angle OLA$  em  $\angle OX_1D_1$ .

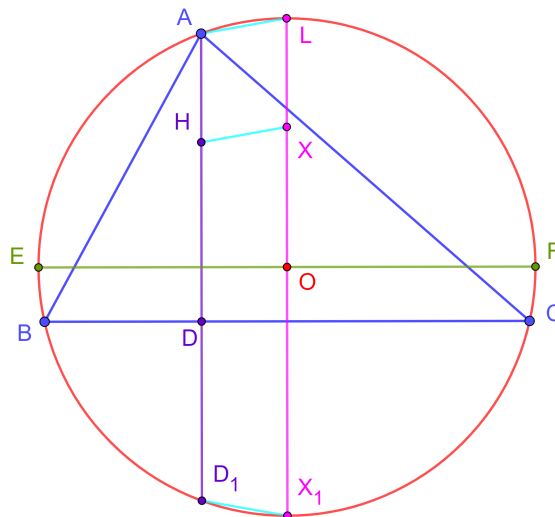


Figura 85 – Demonstração do círculo de Fuhrmann - parte 1 - elaborado pela autora.

Por outro lado, a reflexão em torno de  $BC$  leva  $D_1X_1$  em  $HX$  e  $\angle OX_1D_1$  em  $\angle OXH$ . Logo,  $AL \parallel HX$ . Sabendo que  $LX_1$  é diâmetro do círculo circunscrito de  $ABC$ , temos que  $\angle LAX_1$  é reto, implica que  $HX \perp AX_1$ .

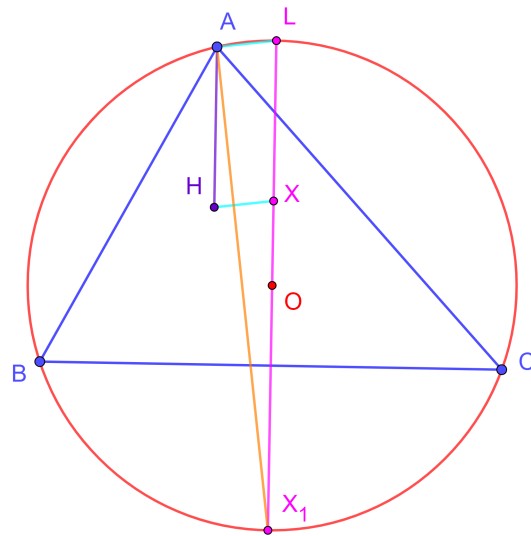


Figura 86 – Demonstração do círculo de Fuhrmann - parte 2 - elaborado pela autora.

Traçando o triângulo anticomplementar de  $ABC$ ,  $PQR$ , de modo que  $A$  seja ponto médio de  $RQ$ ,  $B$  seja ponto médio de  $PR$  e  $C$  de  $PQ$ , como na figura (87).

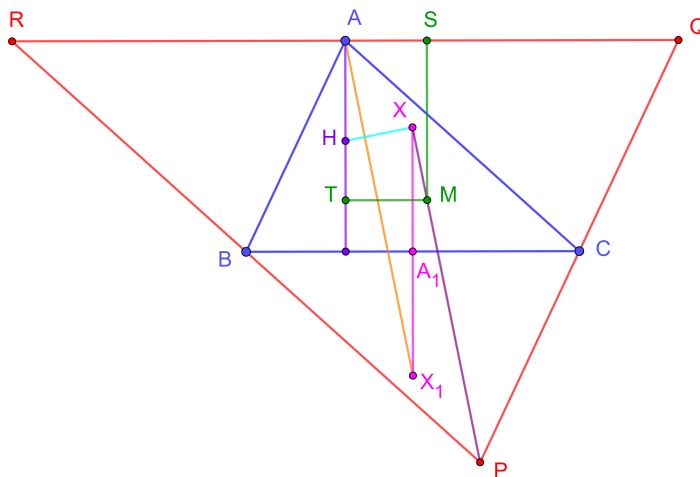


Figura 87 – Demonstração do círculo de Fuhrmann - parte 3 - elaborado pela autora.

Sendo  $M$  o ponto de Nagel de  $ABC$ , o objetivo dessa parte da demonstração é provar que  $X$ ,  $M$  e  $P$  são colineares. Pelo corolário (10.6),  $M$  então é o incentro de  $PQR$ , fazendo de  $MP$  bissetriz de  $\angle RPQ$ .

Observando o paralelogramo  $ABPC$ , suas diagonais se encontram no ponto médio  $A_1$  de ambas, logo  $AA_1 = A_1P$ . Como  $A_1X_1 = A_1X$ , segue-se que  $AX_1PX$  é um paralelogramo, pois suas diagonais cortam-se ao meio. Logo,  $AX_1$  é paralela a  $PX$ . Como  $X_1$  é ponto médio do arco  $BC$  do círculo circunscrito a  $ABC$ ,  $AX_1$  é bissetriz de  $\angle BAC$ .

De acordo com a proposição (10.2), sabemos que a bissetriz de um triângulo é paralela a bissetriz correspondente de seu triângulo medial, logo  $AX_1 \parallel PM$ . Temos  $PX$  e  $PM$  paralelas a  $AX_1$  passando por  $P$ , conseqüentemente  $X$ ,  $P$  e  $M$  são colineares.

Como  $HX \perp AX_1$  e  $AX_1 \parallel XM$ , então  $HX \perp XM$ . Portanto,  $\angle HXM$  é reto, e o círculo de diâmetro  $HM$  contém  $X$ . O argumento é similar para  $Y$  e  $Z$ , então trata-se do círculo de Fuhrmann. ■

Segue-se da demonstração do teorema anterior o seguinte corolário:

**Corolário 11.5.** *O círculo de Fuhrmann passa pelo ponto da altura do triângulo cuja distância para o seu vértice relativo é igual ao dobro do raio do círculo inscrito ao triângulo.*

*Demonstração.* Observe a figura (87), o comprimento da perpendicular  $MS$  que parte do incentro  $M$  de  $PQR$  para o lado  $QR$  é o raio do círculo inscrito a  $PQR$ . A perpendicular  $MT$  na altura  $AH$  constrói o retângulo  $ATMS$ , fazendo com que  $AT = MS$ , que é o raio do círculo inscrito.

Como  $\angle HTM$  é reto, o círculo de Fuhrmann também passa por  $T$ , implicando que ele intersecta a altura no ponto cuja distância ao vértice associado é igual ao raio de círculo inscrito a  $PQR$ , o raciocínio é análogo para os demais lados. Mas os lados de  $PQR$  medem o dobro dos lados de  $ABC$ , então, o raio  $MS$  é o dobro do raio do círculo inscrito a  $ABC$ .

Portanto, sendo  $r$  o raio do círculo inscrito a  $ABC$ , a distância de  $T$  ao vértice  $A$  é  $2r$ . Adicionando, assim, três pontos notáveis ao círculo de Fuhrmann, um de cada lado do triângulo. Estes pontos, juntamente com os três pontos simétricos dos pontos médios dos arcos em relação aos lados do triângulo, além do ortocentro e do ponto de Nagel, torna o círculo de Fuhrmann também conhecido como um círculo de 8 pontos do triângulo. ■



## 12 Círculo de Droz-Farny

Arnold Droz-Farny (1856 - 1912) foi um matemático suíço, mais conhecido pelo teorema da reta de Droz-Farny. Para os leitores que tiverem interesse em conhecer mais sobre a história de Droz-Farny, recomendamos a leitura de (10).

Tem um par de círculos de Droz-Farny para cada par de conjugados isogonais  $(P, Q)$  em um triângulo.

**Teorema 12.1.** *Suponha um par de conjugados isogonais  $P$  e  $Q$  em um triângulo  $ABC$  e  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pés das perpendiculares traçadas a partir do ponto  $P$ , por exemplo, sem perda de generalidade. Traçando os círculos de centro  $D$ ,  $E$  e  $F$  e raios  $DQ$ ,  $EQ$  e  $FQ$ , respectivamente, então os seis pontos que esses círculos intersectam os lados do triângulo pertencem a um mesmo círculo de centro  $P$ . Os dois círculos que podem ser construídos dessa maneira são congruentes.*

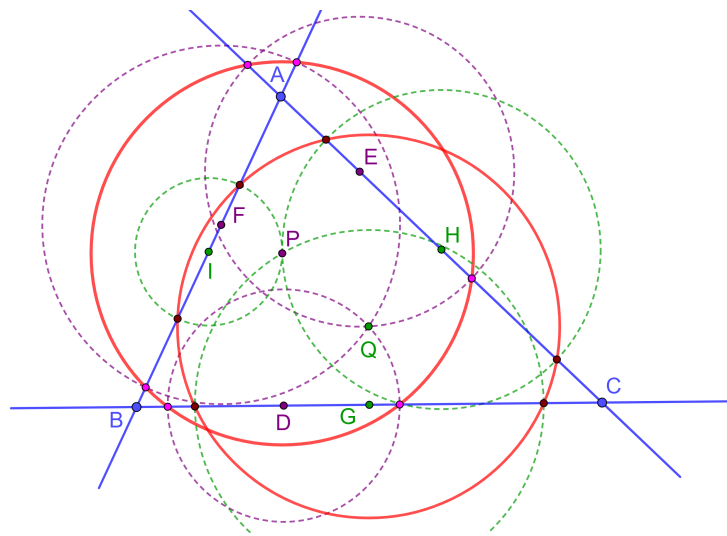


Figura 88 – Círculo de Droz-Farny - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer e  $(P, Q)$  um par de conjugados isogonais desse triângulo.

Sendo  $D$  o pé da perpendicular partindo de  $Q$  ao lado  $BC$  e  $X$  o ponto de encontro do círculo de centro  $D$  e raio  $DP$  com  $BC$ .  $M$  é o ponto médio de  $PQ$  e centro do círculo pedal (capítulo 9).

Usando Pitágoras no triângulo  $DQX$ , temos

$$QX^2 = DQ^2 + DX^2. \quad (12.1)$$

Perceba que  $DX = DP$ , pois  $D$  é o centro e os dois pontos pertencem ao círculo. Então podemos substituir a equação (12.1) com

$$QX^2 = DQ^2 + DP^2. \quad (12.2)$$

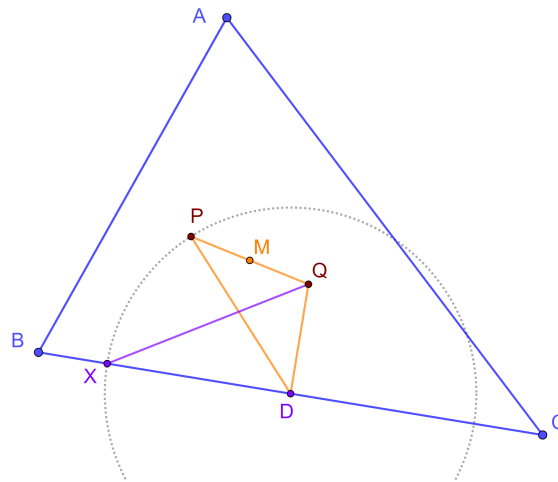


Figura 89 – Demonstração do círculo de Droz-Farny - elaborado pela autora.

Pela propriedade das medianas (1.15), podemos escrever

$$DP^2 + DQ^2 = 2DM^2 + 2PM^2. \quad (12.3)$$

Substituindo a equação (12.3) em (12.2),

$$\begin{aligned} QX^2 &= 2DM^2 + 2PM^2 \\ &= 2DM^2 + 2\left(\frac{PQ}{2}\right)^2 \\ &= 2DM^2 + \frac{PQ^2}{2}. \end{aligned}$$

Observe que  $QX$  é o raio de um dos círculos de Droz-Farny, centrado em  $Q$ , e ele depende apenas de  $DM$  (que é o raio do círculo pedal, já demonstrado no capítulo (9)) e da distância entre  $P$  e  $Q$ .

Ou seja,  $QX$  independe do  $Q$  e do  $X$ , então a distância do ponto  $X$  ao ponto  $Q$  é a mesma, fazendo com que os pontos estejam no círculo centrado em  $Q$  e raio  $QX$ .



Um caso particular dos círculos de Droz-Farny é utilizando o par de conjugados isogonais  $(H, O)$ . Seja  $ABC$  um triângulo qualquer,  $H$  seu ortocentro e  $O$  o circuncentro.

- (i) Sejam  $D, E$  e  $F$  os pés das alturas relativas aos lados  $BC, AC$  e  $AB$ , respectivamente.

Pegando o círculo de centro  $D$  e raio  $DO$ , ele intersecta a aresta  $BC$  nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

Agora o círculo de centro  $E$  e raio  $EO$ , intersecta a aresta  $AC$  em  $Q_1$  e  $Q_2$ .

Finalmente, o círculo de centro  $F$  e raio  $FO$ , passa por  $AB$  em  $R_1$  e  $R_2$ .

Esses seis pontos  $P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1$  e  $R_2$  estão em um mesmo círculo de centro  $H$ .

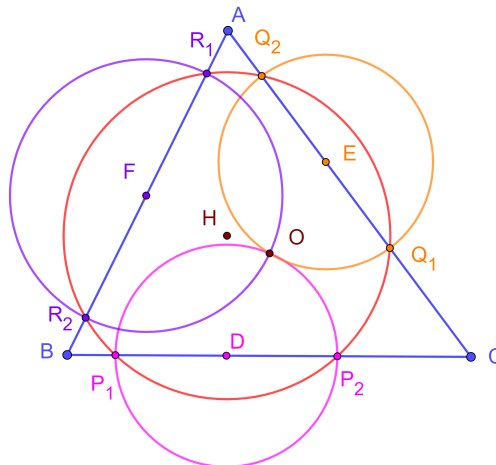


Figura 90 – Círculos centrados nos pés das alturas passando pelo centro do círculo circunscrito ao triângulo - elaborado pela autora.

- (ii) Agora vamos utilizar o mesmo raciocínio, mas desta vez utilizaremos os pontos médios de cada lado no lugar dos pés das alturas e o ortocentro no lugar do centro do círculo circunscrito.

Então o círculo de centro  $A_1$  e raio  $HA_1$ , vai passar por  $BC$  em  $X_1$  e  $X_2$ . O de centro  $B_1$  e raio  $HB_1$ , vai passar por  $AC$  em  $Y_1$  e  $Y_2$ . E o de centro  $C_1$  e raio  $HC_1$ , vai passar por  $AB$  em  $Z_1$  e  $Z_2$ .

Esses seis pontos  $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1$  e  $Z_2$  pertencem a um único círculo de centro  $O$ .

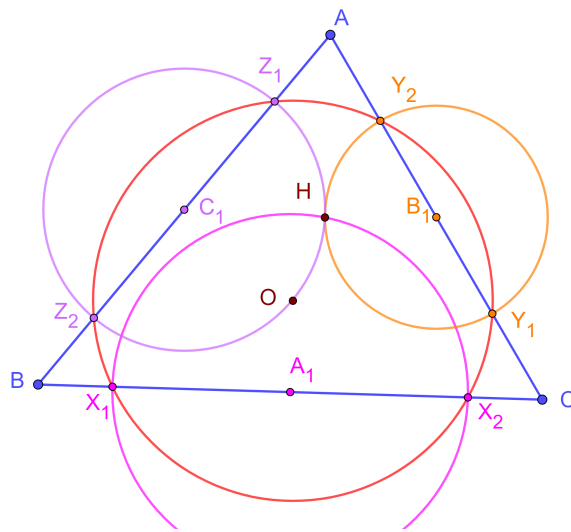


Figura 91 – Círculos centrados nos pontos médios passando pelo ortocentro do triângulo - elaborado pela autora.

# 13 Os Círculos de Lemoine e o Círculo de Tucker

## 13.1 Os círculos de Lemoine

Émile Michel Hyacinthe Lemoine (1840 - 1912) foi engenheiro, matemático e geômetra francês, é mais conhecido pela demonstração do ponto de Lemoine, também denominado de ponto simediano (seção 1.15.2). Lemoine se referia ao ponto simediano como o encontro das medianas das antiparalelas.

**Teorema 13.1** (Os círculos de Lemoine). *Seja  $K$  o ponto simediano (ponto de Lemoine) de um triângulo qualquer. Cada reta paralela a um dos lados do triângulo passando por  $K$ , corta o triângulo em dois pontos. Então, os seis pontos obtidos desta forma, dois em cada lado do triângulo, pertencem a um mesmo círculo, chamado o primeiro círculo de Lemoine. De modo análogo, as retas antiparalelas aos lados do triângulo passando por  $K$  determinam seis pontos no triângulo, dois em cada lado, que pertencem a um mesmo círculo denominado segundo círculo de Lemoine.*

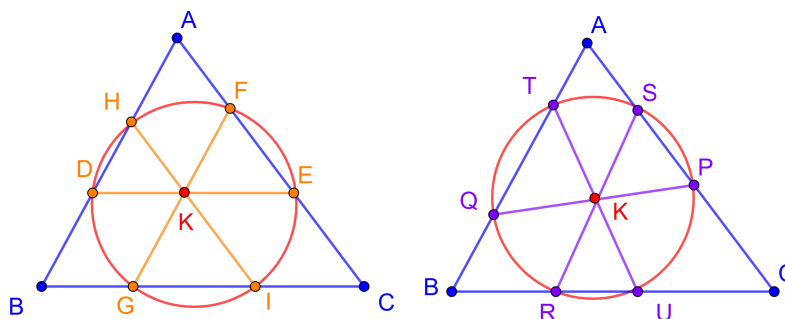


Figura 92 – Os dois círculos de Lemoine - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Vamos iniciar a demonstração pelo segundo círculo de Lemoine, ou seja, pelo que é construído traçando as antiparalelas a cada lado do triângulo passando pelo ponto simediano  $K$  (na figura (92) é o círculo da direita). Sejam  $P, Q, R, S, T$  e  $U$  os pontos de interseção das antiparalelas com cada lado do triângulo.

Sabemos que cada simediana divide as antiparalelas correspondentes ao meio (teorema 3.6). Como  $K$  pertence às três simedias, temos  $KP = KQ$ ,  $KS = KR$  e  $KT = KU$ . Como as antiparalelas formam com o lado oposto do triângulo um quadrilátero cíclico (consequência da definição 3.5), observando os quadriláteros  $ABRS$  e  $ACUT$ , podemos verificar que  $\angle BAC = \angle KRU$  e  $\angle BAC = \angle KUR$ , então  $\angle KRU = \angle KUR$ , fazendo do triângulo  $KUR$  isósceles, então  $KS = KR = KU = KT$ . O raciocínio é análogo para os demais triângulos  $KTQ$  e

$KPS$ , fazendo com que os segmentos  $KP$ ,  $KS$ ,  $KT$ ,  $KQ$ ,  $KR$  e  $KU$  tenham a mesma medida, e portanto pertencem a um mesmo círculo centrado em  $K$ . ■

Perceba que os triângulos  $KRU$  e  $KTS$  são congruentes pelo critério LAL, já que os ângulos  $\angle TKS$  e  $\angle UKR$  são opostos pelo vértice, então seus ângulos da base possuem a mesma medida, fazendo com que  $TS \parallel RU \Rightarrow TS \parallel BC$ . O mesmo pode ser feito para os demais triângulos, então temos  $QR \parallel AC$  e  $PU \parallel AB$ .

Note que temos um conjunto de seis segmentos consecutivos alternando entre paralelos e antiparalelos aos lados do triângulo,  $TS$  é paralelo,  $SR$  é antiparalelo,  $RQ$  é paralelo,  $QP$  antiparalelo,  $PU$  paralelo e  $UT$  antiparalelo.

A demonstração do primeiro círculo de Lemoine será realizada logo após a prova do círculo de Tucker.

## 13.2 Círculo de Tucker

**Teorema 13.2** (Círculo de Tucker). *Partindo de um ponto  $D$  qualquer em um dos lados de um triângulo  $ABC$  dado e desenhando alternadamente segmentos paralelos e antiparalelos aos lados, o sexto segmento sempre retorna ao ponto de partida  $D$ , formando o Hexágono de Tucker  $DEHIFG$  cíclico. E o círculo determinado é o Círculo de Tucker.*

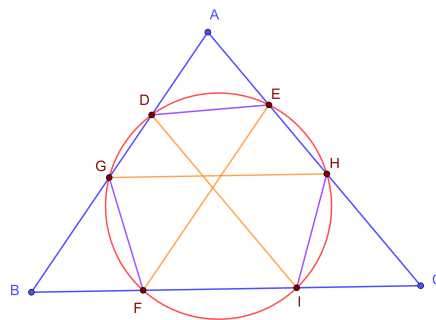


Figura 93 – Círculo de Tucker - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Vamos começar demonstrando que ao construir o último segmento ele de fato volta ao ponto de partida. Precisamos mostrar os dois casos: iniciar traçando um segmento antiparalelo e iniciar traçando um segmento paralelo.

(i) Iniciar traçando um segmento antiparalelo:

Traçando a partir de  $D$  em  $AB$  um segmento antiparalelo, chegando a  $AC$  em  $E$ . A partir de  $E$  uma paralela a  $AB$ , chegando em  $BC$  em  $F$ . Agora uma antiparalela a  $AC$  partindo

de  $F$ , chegando a  $AB$  em  $G$ . Então uma paralela a  $BC$ , chegando a  $AC$  em  $H$ . E uma antiparalela a  $AB$ , chegando em  $BC$  em  $I$ . Precisamos demonstrar, então, que  $DI \parallel AC$ .

Como  $DE$ ,  $FG$  e  $HI$  são antiparalelas, temos

$$\angle A = \angle BFG = \angle CIH = \alpha$$

$$\angle B = \angle AED = \angle CHI = \beta$$

$$\angle C = \angle ADE = \angle BGF = \gamma.$$

Como  $DE$  e  $FG$  têm a mesma inclinação com relação a  $AB$  e  $EF \parallel AB$ , segue-se que  $DE$  e  $FG$  são congruentes e o trapézio  $DEFG$  é isósceles. O mesmo ocorre com  $FG$  e  $HI$ , e com  $HI$  e  $DE$ . Perceba que  $DE$  e  $HI$  têm a mesma medida e a mesma inclinação com relação a  $AC$ , então  $DEHI$  é um trapézio isósceles e  $AC \parallel DI$ .

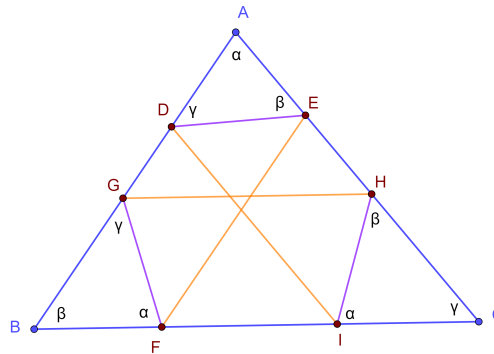


Figura 94 – Hexágono de Tucker - elaborado pela autora.

(ii) Iniciar traçando um segmento paralelo:

Iniciando agora a partir do ponto  $E$ , traçando uma paralela a  $AB$ , chegando em  $BC$  em  $F$ , e assim por diante. Obtendo os segmentos  $EF$ ,  $GH$  e  $DI$  paralelos e os segmentos  $FG$  e  $HI$  antiparalelos. Queremos demonstrar que  $DE$  é antiparalelo ao segmento  $BC$ .

Suponha, por absurdo, que  $DE$  não seja antiparalela, logo existe um ponto  $E_1$  em  $AC$ , tal que  $E \neq E_1$ , e  $DE_1$  seja antiparalela a  $BC$ . Podemos voltar ao primeiro caso e construir o hexágono iniciando com o traçado de um segmento antiparalelo  $FG$  a partir de  $F$ .

Temos  $FG$  antiparalelo,  $GH$  paralelo,  $HI$  antiparalelo,  $DI$  paralelo,  $DE_1$  antiparalelo e  $E_1F$  paralelo. Perceba que traçamos  $EF$  e  $E_1F$  paralelos ao segmento  $AB$ , gerando um absurdo, já que não podemos ter duas paralelas a uma mesma reta passando por um mesmo ponto. Logo,  $E = E_1$  e, por consequência,  $DE$  é antiparalelo ao segmento  $BC$ .

Agora vamos demonstrar que o hexágono é cíclico. Para isso, observe a figura (95). Os ângulos nomeados são alternos internos, alternos externos ou correspondentes aos que já havíamos encontrado.

O quadrilátero  $DEHG$  é cíclico, já que  $\angle DEH$  e  $\angle DGH$  são suplementares.  $DEHI$  também é cíclico, basta observar os ângulos  $\angle DIH$  e  $\angle DEA$ . Mas três pontos definem um único círculo, então o círculo circunscrito ao quadrilátero  $DEHG$  é o mesmo circunscrito a  $DEHI$ . De maneira análoga, é o mesmo círculo circunscrito ao quadrilátero  $DEFG$  e a  $FGHI$ . Então, existem um único círculo passando pelos seis pontos do hexágono. ■

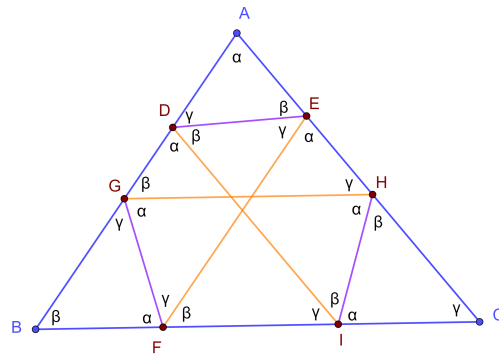


Figura 95 – Hexágono de Tucker com todos os ângulos nomeados - elaborado pela autora.

O hexágono de Tucker pode partir de qualquer ponto nos lados do triângulo, então ele possui diferentes formas e tamanhos, no entanto, o centro de todo círculo de Tucker está no segmento  $KO$ , entre o ponto simediano e o circuncentro do triângulo.

**Teorema 13.3.** *O centro de qualquer círculo de Tucker de um triângulo pertence ao segmento  $KO$ .*

*Demonstração.* A presente demonstração é baseada na prova de Honsberger (1995) e faz-se necessário analisar a figura (96).

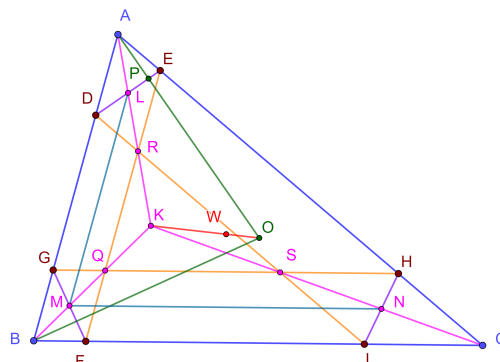


Figura 96 – Demonstração do centro do círculo de Tucker - elaborado pela autora.

Considerando o hexágono de Tucker partindo da antiparalela  $DE$ .  $EF$  encontra  $DI$  em  $R$ , formando o paralelogramo  $ADRE$ , então suas diagonais  $AR$  e  $DE$  se encontram no ponto médio  $L$  de ambas. Analogamente,  $M$  é ponto médio de  $BQ$  e  $N$  é de  $HI$ .

Já foi demonstrado que as antiparalelas que formam o hexágono de Tucker têm a mesma medida, logo  $DL = EL = GM = FM = HI = NI$ . Além disso, sabemos que a simediana divide a antiparalela ao meio, então  $AR$  é a simediana partindo de  $A$ ,  $BQ$  a partindo de  $B$  e  $CS$  a partindo de  $C$ , todas se encontrando no ponto simediano  $K$ .

Como  $DE = FG$  e  $L$  e  $M$  são seus respectivos pontos médios,  $LM$  é base média do trapézio  $DEFG$ , então  $LM \parallel EF \parallel AB$ . Assim como  $MN \parallel BC$  e  $LM \parallel AC$ . Observando os triângulos  $ABK$  e  $BCK$ , como  $LM \parallel AB$ , então os triângulos  $ABK$  e  $LMK$  são semelhantes, fica claro que  $L$  e  $M$  dividem  $AK$  e  $BK$ , respectivamente, na mesma razão, na qual  $N$  divide  $CK$ .

Sendo  $\frac{KL}{KA} = \mu$ , a homotetia de centro  $K$  e razão  $(\mu)$  leva o triângulo  $ABC$  e seu circuncentro  $O$  no triângulo  $LMN$ , de circuncentro  $W$ , que está no segmento  $KO$  (devido ao paralelismo entre os lados dos triângulos). Temos então  $AO \parallel LW$ .

Note que o triângulo  $ABO$  é isósceles e que  $\angle AOB = 2 \cdot \angle ACB = 2\gamma$ . Então os ângulos  $\angle OAB$  e  $\angle OBA$  são iguais a  $\frac{180^\circ - 2\gamma}{2} = 90^\circ - \gamma$ .

Observe que  $\angle ADP = \gamma$  e  $\angle DAP = \angle BAO = 90^\circ - \gamma$ , então o triângulo  $APD$  é retângulo em  $P$ , implicando que  $AO \perp DE$ . Como  $LW \parallel AO$ , temos  $LW \perp DE$ . Analogamente,  $MW \perp FG$  e  $NW \perp HI$ .

Olhando para o triângulo  $DEW$ , como  $L$  é ponto médio,  $LW$  é altura e mediana, então  $DEW$  é isósceles. Da mesma forma,  $FGW$  e  $HIW$  também são. E, como  $W$  é circuncentro de  $LMN$ , os três triângulos são congruentes, logo  $DW = EW = GW = FW = HW = IW$ , mostrando que há um círculo centrado em  $W$  passando pelos seis pontos. Como sabemos que se trata do círculo de Tucker,  $W$  é o centro deste. ■

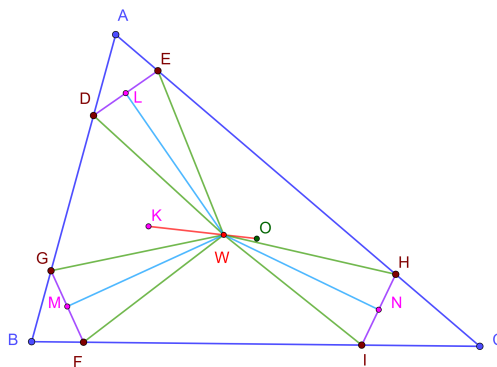


Figura 97 – Demonstração do centro do círculo de Tucker, parte final - elaborado pela autora.

Perceba que o Primeiro Círculo de Lemoine é um Círculo de Tucker em que as paralelas se encontram no ponto simediano, como mostra a figura (92). Nesse caso,

$$\frac{KL}{KA} = \frac{1}{2}$$

então o centro do Primeiro Círculo de Lemoine é o ponto médio  $W$  do segmento  $KO$ .

*Observação 13.4.* Nem sempre as paralelas e antiparalelas serão traçadas internamente ao triângulo. Quando isso acontecer,  $W$  ainda estará na reta  $KO$ , mas não mais no segmento.

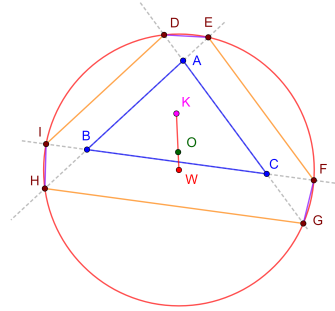


Figura 98 – Círculo de Tucker com as paralelas e antiparalelas fora do triângulo - elaborado pela autora.

### 13.3 Demonstração da existência do primeiro círculo de Lemoine

*Demonstração.* Vamos, agora, passar para a demonstração da existência do primeiro círculo de Lemoine. Sendo  $D, E, F, G, H$  e  $I$  os pontos de interseção das paralelas de cada um dos lados do triângulo, temos  $DE \parallel BC$ ,  $FG \parallel AB$  e  $HI \parallel AC$ , queremos então mostrar que os segmentos  $DG, EI$  e  $FH$  são antiparalelas para que possamos demonstrar que o primeiro círculo de Lemoine é um caso particular do círculo de Tucker.

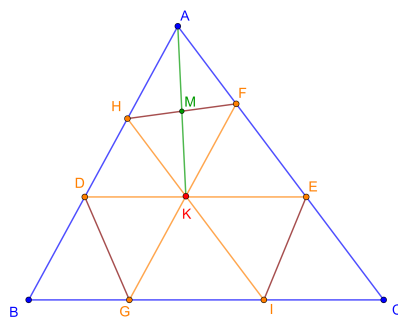


Figura 99 – Demonstração da existência do primeiro círculo de Lemoine - elaborado pela autora.

O quadrilátero  $AHKF$  é um paralelogramo, então suas diagonais se encontram no ponto médio  $M$  de cada uma, ou seja,  $AK$  divide  $HF$  ao meio, e é conhecido que a simediana divide as antiparalelas ao meio, vamos demonstrar que  $HF$  é de fato antiparalela.

Suponha, por absurdo, que existe um ponto  $J$  em  $AC$ , diferente de  $F$ , de modo que  $HJ$  seja o segmento antiparalelo ao lado  $BC$ . Logo a simediana  $AK$  corta  $HJ$  em seu ponto médio  $L$ . Portanto  $LM$  é base média do triângulo  $FHJ$ , relativa ao lado  $FJ$ , e conseqüentemente  $LM \parallel FJ$ . Isto é um absurdo, pois  $LM$  e  $FJ$  se encontram no ponto  $A$ . Concluindo, assim, que  $HF$  é o segmento antiparalelo ao lado  $BC$ .

O raciocínio é análogo para  $DG$  e  $EI$ , fazendo com que o conjunto de retas  $DE$ ,  $EI$ ,  $HI$ ,  $FH$ ,  $FG$  e  $DG$  seja uma alternância entre segmentos paralelos e antiparalelos aos lados do triângulo, recaindo no hexágono de Tucker, que já ficou provado que os pontos estão em um mesmo círculo, logo,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $I$  pertencem a um mesmo círculo. E seu centro pertence à reta  $KO$ .

■



## 14 Círculo de Adams

Dentre os círculos notáveis associados ao triângulo, o círculo de Adams apresenta uma conexão direta com o primeiro círculo de Lemoine, especialmente por também estar relacionado ao ponto de Lemoine (ou ponto simediano). Além disso, o centro do círculo de Adams é o incentro do próprio triângulo, ou seja, o círculo de Adams é concêntrico com o círculo inscrito ao triângulo. Karl Adams (1811 - 1849) foi um matemático e professor suíço, especialista em geometria sintética.

### 14.1 O Ponto de Gergonne

**Definição 14.1** (Triângulo de Gergonne). O triângulo de Gergonne, ou triângulo dos contatos, é determinado pelos três pontos de contato do círculo inscrito com os lados do triângulo.

**Proposição 14.2** (Ponto de Gergonne). *O ponto de Gergonne é o ponto de encontro das retas que unem cada vértice do triângulo ao ponto de contato do círculo inscrito com o lado oposto.*

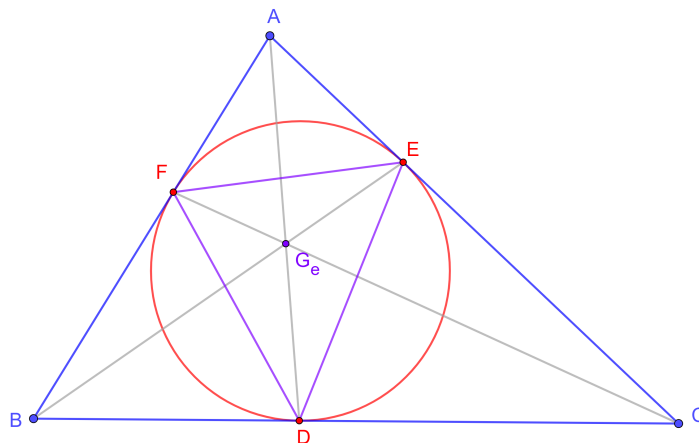


Figura 100 – Ponto de Gergonne - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Sejam  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pontos de contato (ou tangência) do círculo inscrito ao triângulo  $ABC$ , conforme a figura 100. Vamos demonstrar que  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  se encontram em um único ponto. Por hipótese, os segmentos apresentados já são cevianas do triângulo, por definição (1.30).

Sabemos que  $AF = AE$ ,  $BF = BD$  e  $CD = CE$ , então

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Então, pelo Teorema de Ceva (1.31), fica provado que os três segmentos se encontram no ponto  $G_e$  de Gergonne. ■

## 14.2 O Círculo de Adams

**Teorema 14.3** (Círculo de Adams). *Seja  $ABC$  um triângulo e  $G_e$  seu ponto de Gergonne. As três retas passando por  $G_e$ , paralelas a cada um dos lados do triângulo de Gergonne (dos contatos), intersectam os lados do triângulo  $ABC$  em seis pontos que pertencem a um mesmo círculo, chamado de círculo de Adams.*

Adams provou, em 1843, que esses seis pontos pertencem a um mesmo círculo e este é concêntrico com o círculo inscrito de  $ABC$ .

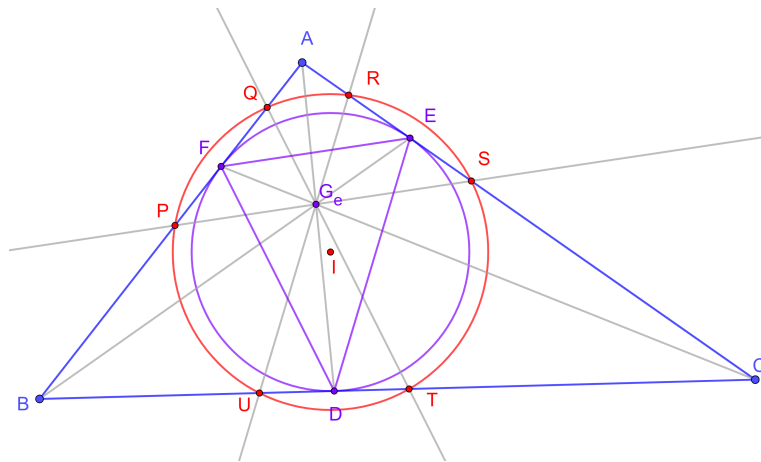


Figura 101 – Círculo de Adam - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo e  $G_e$  seu ponto de Gergonne. Traçando três retas, cada uma paralela a um lado do triângulo  $DEF$  de Gergonne e todas passando pelo ponto de Gergonne. Fica então determinado seis pontos de encontro com o triângulo  $ABC$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$  e  $U$ .

Primeiro é necessário demonstrar que os seis pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$  e  $U$  estão a uma mesma distância de  $I$ .  $ID$ ,  $IE$  e  $IF$  fazem  $90^\circ$  com os lados de  $ABC$ , já que são os raios do círculo inscrito ao triângulo.

Pelo teorema (1.8),  $CD = CE$ , então o triângulo  $CDE$  é isósceles. Como  $DE \parallel UR$ , então  $CDE$  e  $CUR$  são semelhantes e as diferenças  $DU$  e  $ER$  têm a mesma medida. Analogamente para os demais vértices, conclui-se que  $DT = FQ$  e  $FP = ES$ .

A reta paralela  $BC$  passando por  $A$  corta as retas  $DF$  e  $DE$  no pontos  $H$  e  $J$ , respectivamente. Os ângulos  $\angle ECD$  e  $\angle EAJ$  são alternos internos e, por isso, congruentes. Além disso,  $\angle AEJ = \angle CED$ , são opostos pelo vértice. Então  $CED$  e  $AEJ$  são semelhantes, pelo critério

AA, fazendo de  $AEJ$  isósceles,  $AE = AJ$ . De forma análoga, tem-se  $AH = AF$ . Como  $AE = AF$ , pelo teorema (1.8),  $AH = AF = AE = AJ$ . O ponto  $A$  é, então, o ponto médio de  $HJ$ , portanto  $DA$  é mediana de  $DHJ$ .

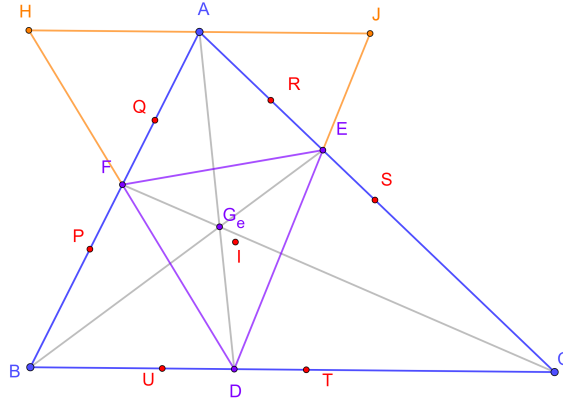


Figura 102 – Demonstração do círculo de Adams - parte 1 - elaborado pela autora.

Construindo o segmento  $LM$  passando pelo ponto  $G_e$  de Gergonne e paralelo a  $HJ$  e a  $BC$ , segue-se que  $G_e$  é ponto médio de  $LM$ .

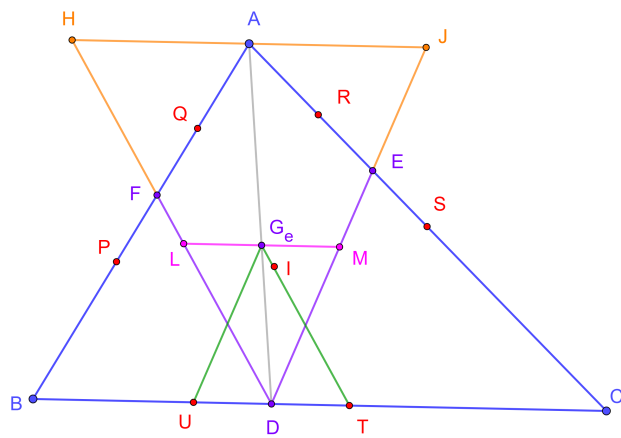


Figura 103 – Demonstração do círculo de Adams - parte 2 - elaborado pela autora.

Então formam-se os paralelogramos  $G_eLDT$  e  $G_eMDU$ , já que  $LM \parallel UT$ ,  $LD \parallel G_eT$  e  $DM \parallel G_eU$ . Desse modo,  $DU = G_eM$  e  $DT = G_eL$ , como  $G_e$  é ponto médio de  $LM$ ,  $G_eL = G_eM$ , portanto  $DU = DT$ . De forma análoga,  $ER = ES$  e  $FQ = FP$ . Conclui-se, dessa maneira, que  $DU = DT = ES = ER = FQ = FP$ .

Os triângulos retângulos  $IDT$ ,  $IDU$ ,  $IES$ ,  $IER$ ,  $IFQ$  e  $IFP$  são congruentes, então  $IT = IU = IP = IQ = IR = IS$  e assim existe um círculo centrado em  $I$  que passa pelos pontos  $P, Q, R, S, T$  e  $U$ .



**Corolário 14.4.** *Considere o triângulo  $XYZ$  cujos vértices são os pontos de interseções das retas  $PU$ ,  $QR$  e  $ST$ . Segue-se das construções da demonstração do teorema anterior as seguintes propriedades:*

- Os quadriláteros  $PSRT$ ,  $UTSR$  e  $UTQP$  são trapézios isósceles;*
- O triângulo  $XYZ$  é a imagem do triângulo de Gergonne  $DEF$  pela homotetia de centro  $G_e$  (ponto de Gergonne) e razão 2. Em particular, os pontos  $A$ ,  $G_e$ ,  $D$  e  $X$  são colineares, assim como  $B$ ,  $G_e$ ,  $E$ ,  $Y$  e também  $C$ ,  $G_e$ ,  $F$  e  $Z$ ;*
- As retas  $YZ$  e  $UT$  são antiparalelas em relação ao ângulo  $\angle ZXY$ . Do mesmo modo,  $XY$  e  $PQ$  são antiparalelas com respeito a  $\angle XZY$ , e  $XZ$  e  $RS$  são antiparalelas em relação a  $\angle XYZ$ . Ou seja,  $UTQPSR$  é um hexágono de Tucker (13.2) do triângulo  $XYZ$ .*
- Sabemos que se uma ceviana corta uma antiparalela ao meio, então esta ceviana é uma simediana (3.6). Como  $D$ ,  $E$  e  $F$  são os pontos médios dos segmentos  $UT$ ,  $RS$  e  $PQ$  respectivamente, então o ponto de Gergonne  $G_e$  de  $ABC$  é o ponto simediano (ou de Lemoine) do triângulo  $XYZ$ . Consequentemente, o círculo de Adams do triângulo  $ABC$  é o primeiro círculo de Lemoine de  $XYZ$ .*

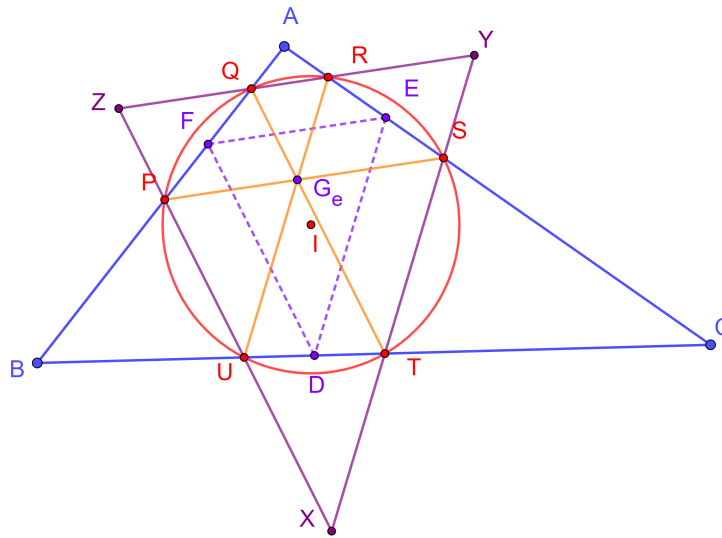


Figura 104 – Círculo de Adams de  $ABC$  é o primeiro círculo de Lemoine de  $XYZ$  - elaborado pela autora.

*Observação 14.5.* Com frequência, círculos aparentemente "novos" em um triângulo correspondem, na verdade, a círculos previamente estudados em outro triângulo associado.

## 15 Círculo de Taylor

O círculo que estudaremos neste capítulo trata de mais um membro da família do círculo de Tucker (capítulo 13).

**Teorema 15.1** (Círculo de Taylor). *A partir dos pés das alturas de cada vértice de um triângulo  $ABC$ , traçam-se duas perpendiculares aos outros dois lados do triângulo. Os seis pés dessas perpendiculares pertencem a um mesmo círculo, denominado Círculo de Taylor.*

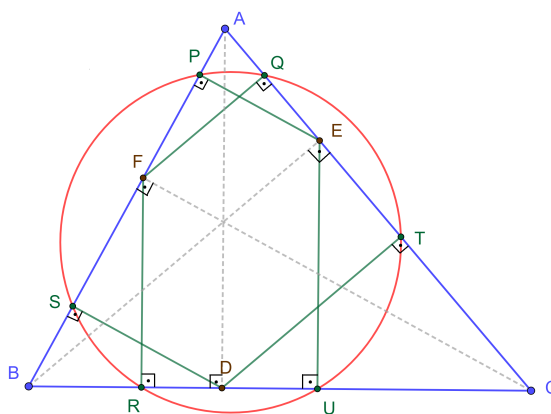


Figura 105 – Círculo de Taylor

*Demonstração.* Sejam os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pés das alturas relativas aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Traçando a partir de  $D$  duas perpendiculares aos demais lados do triângulo, encontramos os pontos  $S$  e  $T$  de modo que  $DS \perp AB$  e  $DT \perp AC$ . De maneira análoga, construímos  $EP \perp AB$ ,  $EU \perp BC$ ,  $FQ \perp AC$  e  $FR \perp BC$ .

Para demonstrar que esses seis pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$  e  $U$  pertencem a um mesmo círculo, basta provar que a partir deles forma-se o hexágono  $PQRSTU$  de Tucker, que é cíclico. Então precisamos provar que há uma alternância de segmentos antiparalelos e paralelos com relação aos lados do triângulo nos pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$  e  $U$ .

Inicialmente, considere a construção a partir de qualquer um dos pés das alturas, por exemplo,  $D$ . Vamos verificar que  $ST$  e  $BC$  são antiparalelas. Observe que o quadrilátero  $ASDT$  é cíclico, pois os ângulos opostos em  $S$  e  $T$  são retos. Então  $\angle AST = \angle ADT$ , pois são ângulos inscritos associados ao mesmo arco. Os triângulos  $ADT$  e  $ADC$  são triângulos retângulos que compartilham o ângulo agudo do vértice  $A$ , logo  $\angle ADT = \angle ACD$ . Daí,  $\angle AST = \angle ACB$  e segue-se que  $ST$  é anti paralela a  $BC$  (3.5). Analogamente, considerando a mesma construção a partir dos outros pés das perpendiculares  $E$  e  $F$ , podemos concluir que  $PU$  é antiparalela a  $AC$  e  $QR$  é antiparalela a  $AB$ .

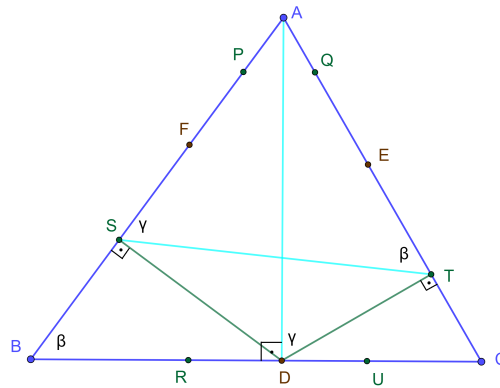


Figura 106 – Primeira parte da demonstração do círculo de Taylor - elaborado pela autora.

Agora apenas precisamos demonstrar que  $PQ$ ,  $RS$  e  $TU$  são paralelas aos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respectivamente. Perceba que as antiparalelas são igualmente inclinadas, com relação aos lados que tocam. Ou seja,  $\angle QRD = \angle PUD$ ,  $\angle STE = \angle RQE$  e  $\angle UPF = \angle TSF$ . O objetivo aqui será demonstrar que todas as antiparalelas possuem a mesma medida.

Mas antes, veja que o triângulo  $DEF$  é o triângulo órtico (definição (3.8)). Pelo teorema (3.11), é conhecido que os lados do triângulo órtico são antiparalelos aos lados do triângulo original.

Observando inicialmente  $ST$ , que é antiparalelo a  $BC$ , como  $EF$  é um lado do triângulo órtico, também é antiparalelo a  $BC$ , então  $ST \parallel EF$ , já que possuem a mesma inclinação. Desse modo, temos que os triângulos  $AST$  e  $AFE$ , na figura (107) são semelhantes, então

$$\frac{EF}{ST} = \frac{AE}{AT}. \tag{15.1}$$

Como  $BE$  e  $DT$  são perpendiculares a mesma reta,  $BE \parallel DT$ , então  $HE \parallel DT$ . Fazendo com que os triângulos  $AHE$  e  $ADT$  sejam semelhantes, logo

$$\frac{AH}{AD} = \frac{AE}{AT}. \tag{15.2}$$

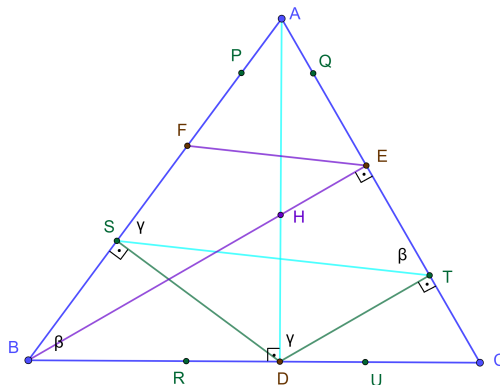


Figura 107 – Segunda parte da demonstração do círculo de Taylor - elaborado pela autora.

Igualando as equações (15.1) e (15.2),

$$\begin{aligned} \frac{EF}{ST} &= \frac{AH}{AD} \\ \Rightarrow ST &= AD \cdot \frac{EF}{AH}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Agora precisamos calcular  $\frac{EF}{AH}$ . O quadrilátero  $AFHE$  é cíclico, já que os ângulos em  $F$  e em  $E$  são retos. Os ângulos  $\angle AEF$  e  $\angle AHF$  são congruentes, já que são ângulos inscritos associados ao mesmo arco, então podemos aplicar a lei dos senos. Considerando esse ângulo como  $\delta$ , temos

$$\frac{EF}{\sin \alpha} = \frac{AF}{\sin \delta}. \quad (15.4)$$

Olhando para o triângulo retângulo  $AHF$ , temos

$$\sin \delta = \frac{AF}{AH}. \quad (15.5)$$

Substituindo a equação (15.5) em (15.4)

$$\begin{aligned} \frac{EF}{\sin \alpha} &= \frac{AF}{\frac{AF}{AH}} \\ \Rightarrow \frac{EF}{\sin \alpha} &= AF \cdot \frac{AH}{AF} \\ \Rightarrow \frac{EF}{\sin \alpha} &= AH \\ \Rightarrow \sin \alpha &= \frac{EF}{AH}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Fazendo a substituição da equação (15.6) na (15.3)

$$ST = AD \cdot \sin \alpha. \quad (15.7)$$

$AD$  é altura de  $ABC$ , então podemos calcular a área  $T$  como

$$\begin{aligned} T &= \frac{AD \cdot BC}{2} \\ AD &= \frac{2T}{BC}. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Substituindo a equação (15.8) na (15.7)

$$ST = 2T \cdot \frac{\sin \alpha}{BC}.$$

De forma análoga encontramos

$$\begin{aligned} QR &= 2T \cdot \frac{\sin \gamma}{AB} \\ PU &= 2T \cdot \frac{\sin \beta}{AC}. \end{aligned}$$

Na lei dos senos é colocado que a razão do lado com o seno do seu ângulo oposto é sempre a mesma, ou seja,

$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin \alpha} = 2R. \quad (15.9)$$

Sendo  $R$  o raio do círculo circunscrito ao triângulo. Então, a partir da equação (15.9), podemos fazer as devidas substituições

$$\begin{aligned} ST &= 2T \cdot \frac{1}{2R} \\ QR &= 2T \cdot \frac{1}{2R} \\ PU &= 2T \cdot \frac{1}{2R}. \end{aligned}$$

Percebendo, dessa maneira, que as três antiparalelas  $ST$ ,  $QR$  e  $PU$  possuem o mesmo comprimento.

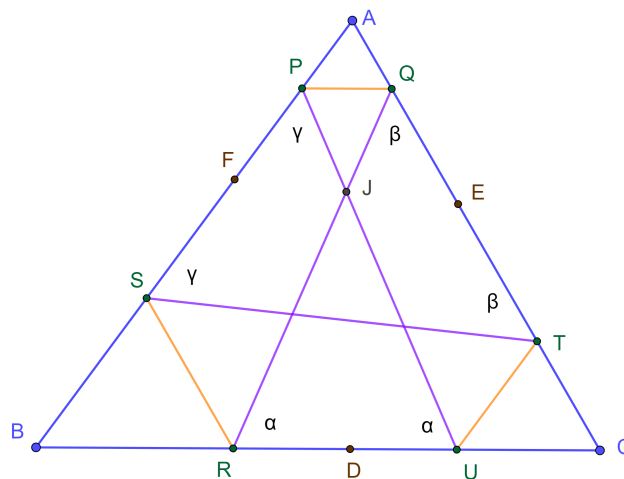


Figura 108 – Terceira parte da demonstração do círculo de Taylor - elaborado pela autora.

Observando  $QR$  e  $PU$ , ambas possuem o mesmo comprimento e a mesma inclinação com relação a  $BC$ . Os ângulos  $\angle RJU$  e  $\angle Pjq$  são congruentes, pois são opostos pelo vértice, temos então que os triângulos  $Pjq$  e  $RJU$  são semelhantes. Logo,  $\angle QPJ = \angle PQJ = \alpha$ , fazendo com que os segmentos  $PQ$  e  $BC$  sejam paralelos. O argumento é análogo para  $RS$  e  $TU$ , ou seja  $RS \parallel AC$  e  $TU \parallel AB$ . Então esses pontos formam um hexágono de Tucker, que é cíclico, concluindo que os seis pontos  $P, Q, R, S, T$  e  $U$  pertencem a um único círculo, o círculo de Taylor. ■

## 16 Círculo de Miquel

Louis Joseph Augustin Miquel (1816 - 1851), conhecido como Auguste Miquel, foi um matemático francês, autor de alguns teoremas geométricos sobre círculos e polígonos no plano.

**Teorema 16.1** (Teorema de Miquel para triângulos). *Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Escolhendo aleatoriamente três pontos nas retas  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$ , diferentes de  $A$ ,  $B$  e  $C$ , formam-se três círculos, circunscritos aos triângulos formados por cada vértice e os dois pontos das retas dos lados adjacentes. Esses três círculos são os círculos de Miquel e são concorrentes no ponto  $P$ , o ponto de Miquel.*

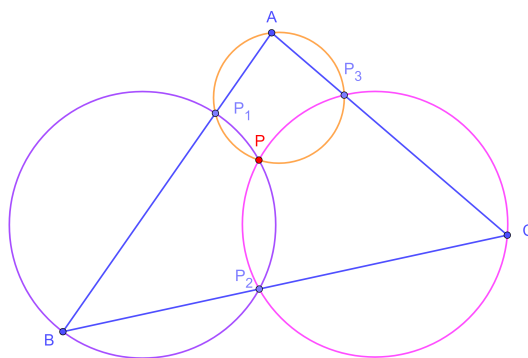


Figura 109 – Círculos de Miquel com todos os pontos nos lados do triângulo - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Sejam  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  pontos das retas  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$  respectivamente. Considere os círculos  $\omega_A$  e  $\omega_B$  circunscritos aos triângulos  $AP_1P_3$  e  $BP_1P_2$ , respectivamente. Provaremos que o círculo circunscrito de  $CP_2P_3$  concorre com os outros dois em um mesmo ponto  $P$ .

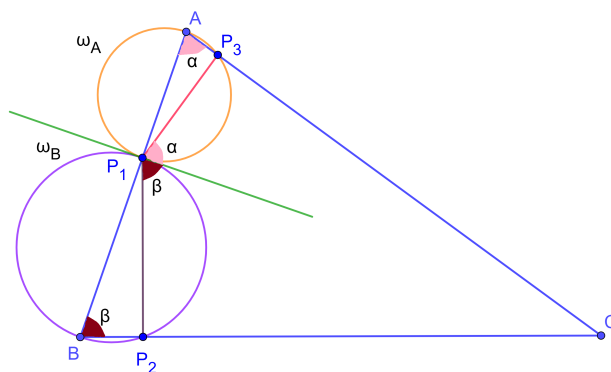


Figura 110 – Primeira parte da demonstração do círculo de Miquel - elaborado pela autora

Suponha que  $\omega_A$  e  $\omega_B$  se intersectam nos pontos  $P_1$  e  $P$  (eventualmente coincidentes). Note que para se obter o resultado desejado, basta provarmos que os pontos  $P, P_2, C$  e  $P_3$  são concíclicos. Para isto, usaremos as condições estabelecidas na proposição (3.2).

Primeiramente, se  $\omega_A$  e  $\omega_B$  possuem apenas o ponto  $P_1$  em comum (tangentes), então  $P = P_1$  será o ponto de Miquel.

De fato, considerando a reta tangente comum aos dois círculos em  $P_1$ , temos em cada círculo, ângulos semi-inscritos (proposição 1.19) congruentes aos respectivos ângulos inscritos associados ao mesmo arco. No caso da figura (110) verifica-se:

$$\angle P_2P_1P_3 = \angle ABC + \angle CAB.$$

Daí o quadrilátero  $P_1P_2CP_3$  é cíclico, pois

$$\angle P_2P_1P_3 + \angle BCA = \angle ABC + \angle CAB + \angle BCA = 180^\circ.$$

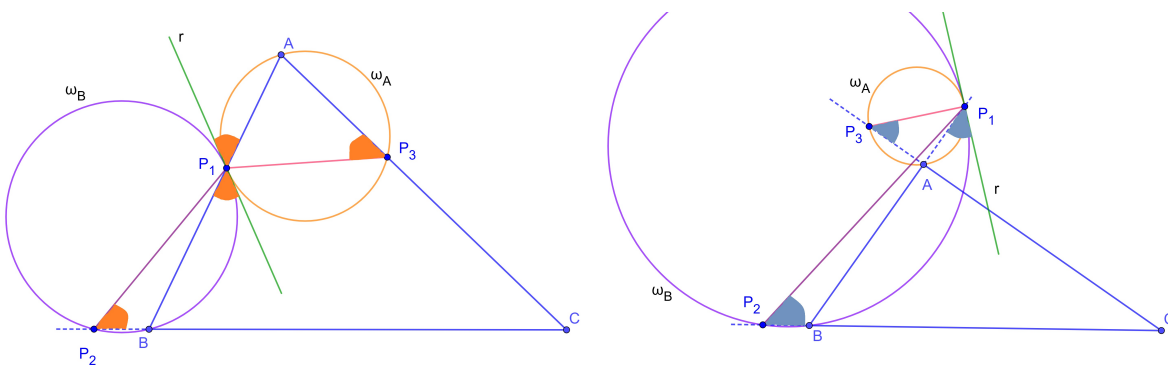


Figura 111 – Segunda parte da demonstração do círculo de Miquel - elaborado pela autora.

No caso das figuras em (111), os ângulos semi-inscritos associados aos arcos  $AP_1$  e  $BP_1$  são congruentes. Logo os ângulos inscritos correspondentes são congruentes

$$\angle P_1P_2B = \angle AP_3P_1 \iff \angle PP_2C = PP_3C.$$

Isso implica que os pontos  $P_1, P_2, P_3$  e  $C$  pertencem ao mesmo círculo, de acordo com a proposição 3.2, itens (iv) e (v), respectivamente.

Existem várias configurações possíveis para o posicionamento dos pontos sobre as retas dos lados do triângulo e do próprio ponto de Miquel. Os argumentos são sempre baseados na proposição 3.2, com pequenos ajustes dependendo de cada configuração<sup>1</sup>.

Agora, suponha que  $\omega_A$  e  $\omega_B$  se intersectam em um ponto  $P$  distinto de  $P_1$ . Se  $P$  coincide com  $P_2$  ou  $P_3$  não há o que provar. Portanto, podemos considerar que os quatro pontos  $P_1, P_2, P_3$  e  $P$  são distintos.

<sup>1</sup> Esses casos poderiam ser tratados de maneira mais geral considerando-se ângulos orientados, mas optamos por não abordar tal conceito neste trabalho.

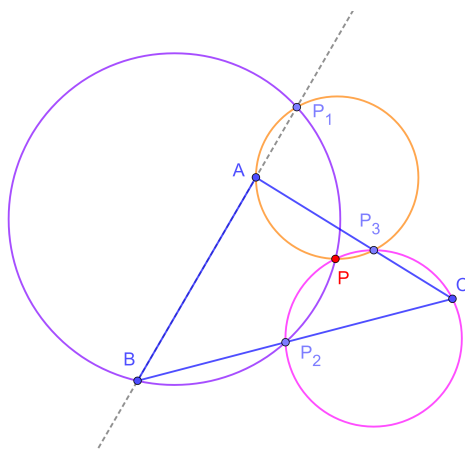


Figura 112 – Círculos de Miquel com um dos pontos fora do lado do triângulo - elaborado pela autora.

$$\begin{aligned}\angle PP_1A &= 180^\circ - \angle AP_3P \\ 180^\circ - \angle AP_3P &= \angle PP_3C.\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}180^\circ - \angle AP_1P &= \angle PP_1B \\ \angle PP_1B &= 180^\circ - \angle PP_2B \\ 180^\circ - \angle PP_2B &= \angle PP_2C.\end{aligned}$$

Concluindo, assim, que  $\angle PP_1A = \angle PP_3C$  e  $180^\circ - \angle AP_1P = \angle PP_2C$ , logo,  $180^\circ - \angle PP_3C = \angle PP_2C$ . Consequentemente, o quadrilátero  $PP_2CP_3$  é cíclico. Então, os três círculos se encontram em um mesmo ponto  $P$ .

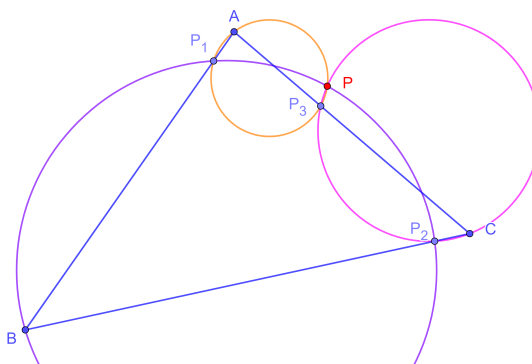


Figura 113 – Círculos de Miquel com  $P$  externo ao triângulo - elaborado pela autora.

Os demais casos podem ser deduzidos de maneira semelhante.



O ponto  $P$  de interseção é o ponto de Miquel de  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  relativo ao triângulo  $ABC$ . Os círculos envolvidos são os Círculos de Miquel e o triângulo  $P_1P_2P_3$  é o triângulo de Miquel do ponto  $P$ . O ponto  $P$  resulta em uma infinidade de triângulos de Miquel, então não é possível garantir o triângulo de Miquel apenas a partir do ponto  $P$ .

**Teorema 16.2** (Teorema de Miquel). *Sejam as retas  $r$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $u$  de modo que não haja três concorrentes em um único ponto e nem duas paralelas. Os círculos circunscritos aos quatro triângulos determinados pelas quatro retas se encontram no ponto  $P$ , o ponto de Miquel do quadrilátero completo. Os quatro círculos são os círculos de Miquel do quadrilátero completo.*

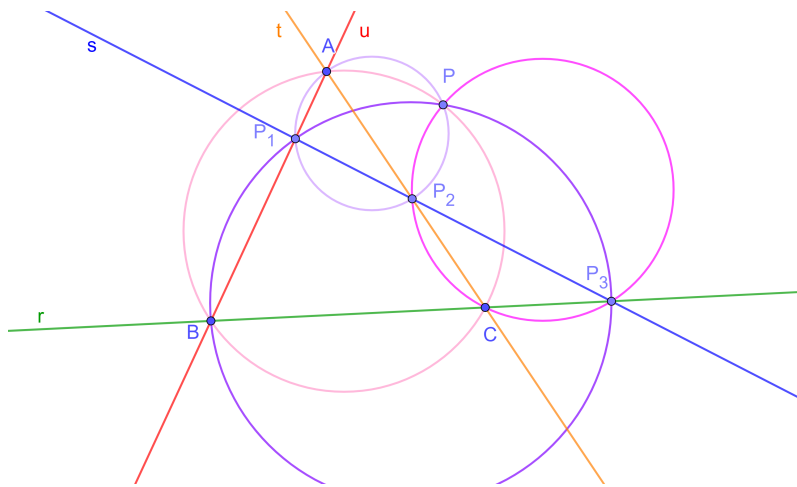


Figura 114 – Círculos de Miquel - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Seja  $A$  o ponto de interseção das retas  $u$  e  $t$ ,  $B$  a interseção entre  $u$  e  $r$  e  $C$  a interseção entre  $r$  e  $t$ . E sejam  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  a interseção da reta  $s$  com as retas  $u$ ,  $t$  e  $r$ , respectivamente.

No teorema anterior (16.1) já foi demonstrado que os círculos  $AP_1P_2$ ,  $BP_1P_3$  e  $CP_2P_3$  se intersectam no ponto  $P$  de Miquel. Agora resta demonstrar que o círculo circunscrito ao triângulo  $ABC$  também passa por  $P$ .

$$\angle PAB = \angle PAP_1 = 180^\circ - \angle PP_2P_1 = \angle PP_2P_3 = \angle PCP_3 = 180^\circ - \angle PCB.$$

Logo, o quadrilátero  $PABC$  é cíclico, então seus pontos pertencem a um mesmo círculo.

Todos os quatro círculos circunscritos dos quatro triângulos formados pelos pontos de interseção das quatro retas se encontram no ponto  $P$ . ■

**Lema 16.3.** *Os pés das perpendiculares traçadas a partir do ponto  $P$  de Miquel até cada uma das quatro retas, são colineares.*

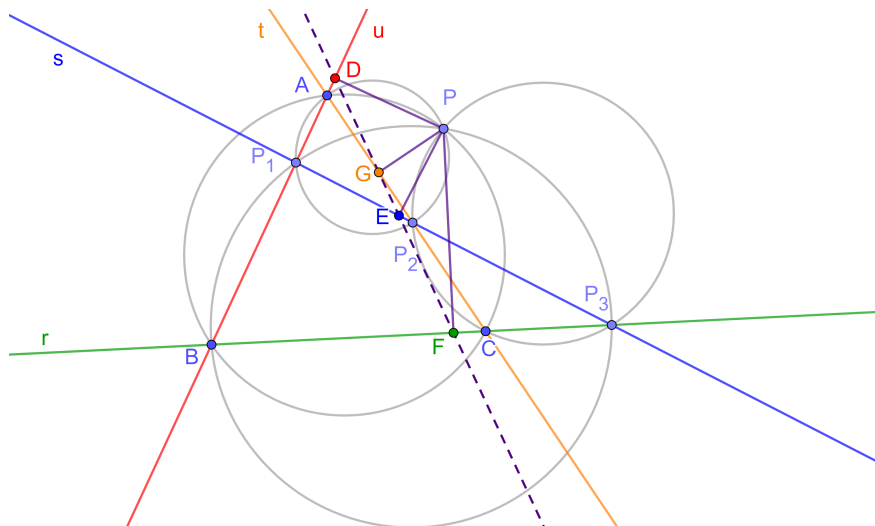


Figura 115 – O pé das perpendiculares traçadas a partir do ponto de Miquel são colineares - elaborado pela autora.

*Demonstração.* A reta de Simson, teorema (3.7), mostra que a partir de um ponto qualquer do círculo circunscrito a um triângulo, traçando perpendiculares a cada um dos lados, os pés das perpendiculares são colineares. Nesse caso temos quatro triângulos, e os pés das perpendiculares baixadas a partir do ponto de Miquel  $P$  vão ser três a três colineares. Ou seja, para o triângulo  $ABC$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$  são colineares. Para o triângulo  $AP_1P_2$ , os pontos  $D$ ,  $G$  e  $E$  são colineares. Como dois pontos distintos definem uma única reta, a reta que passa por  $D$  e  $E$  também vai passar por  $F$  e  $G$ . Portanto, os quatro pontos são colineares. ■

Uma roto-homotetia de centro  $O$  é uma composição de uma homotetia com uma rotação centrada em  $O$ . O caso mais comum de roto-homotetia é entre dois segmentos não paralelos, levando  $AB$  em  $CD$  e, claro, conclui-se que os triângulos  $OAB$  e  $OCD$  são semelhantes.

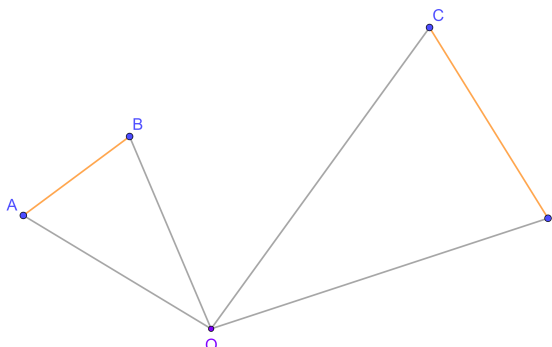


Figura 116 – Roto-homotetia centrada em  $O$  - elaborado pela autora.

**Lema 16.4.** *Sejam os segmentos  $AB$  e  $CD$  e seja  $X$  a interseção entre  $AC$  e  $BD$ . Se os círculos circunscritos a  $ABX$  e a  $CDX$  se encontram novamente em  $O$ , então  $O$  é o centro da única roto-homotetia que leva  $AB$  em  $CD$ .*

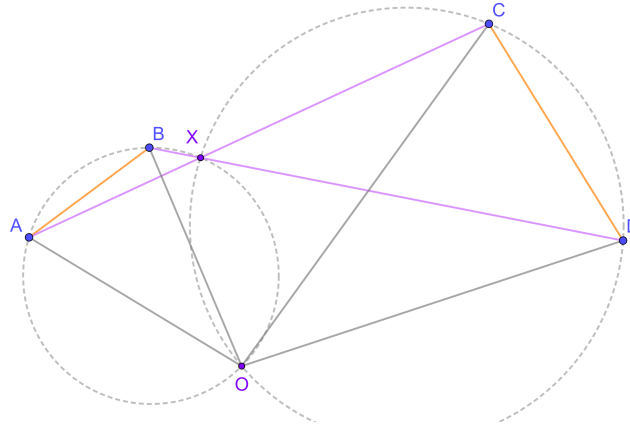


Figura 117 – Círculos se intersectando e o centro da roto-homotetia - elaborado pela autora.

*Demonstração.*  $\angle AOB = \angle AXB = \angle DXC = \angle DOC = \alpha$ . Sendo  $\angle OBA = \angle OXA = \delta$  e  $\angle DCO = \angle DXO = \beta$ , perceba que  $\alpha$  é suplementar de  $\beta + \delta$ , então, considerando o triângulo  $XDC$ , temos

$$\begin{aligned}\beta + \delta &= \angle XCD + \angle XDC \\ \beta + \delta &= \angle XCO + \angle DCO + \angle XDC \\ \beta + \delta &= \angle XDO + \beta + \angle XDC \\ \delta &= \angle CDO.\end{aligned}$$

Esse resultado nos mostra que  $\angle OBA = \angle ODC$ , então, pelo critério AA, os triângulos  $AOB$  e  $COD$  são semelhantes. ■

**Proposição 16.5.** *O centro da roto-homotetia que leva  $AB$  em  $CD$  é o mesmo da roto-homotetia que leva  $AC$  em  $BD$ .*

*Demonstração.* Sabemos que  $\angle AOB = \angle COD = \alpha$  e  $\angle BOC$  é comum, então  $\angle AOC = \angle BOD$ . Além disso,  $\angle XAO = \angle XBO$ , pois ângulos inscritos associados ao mesmo arco. Pelo critério AA, temos  $OAC \sim OBD$ . ■

A roto-homotetia pode ser dada tanto pela interseção dos segmentos  $AC$  e  $BD$ , quanto pelos segmentos  $AD$  e  $BC$ . Continuando com  $OAB \sim ODC$ .

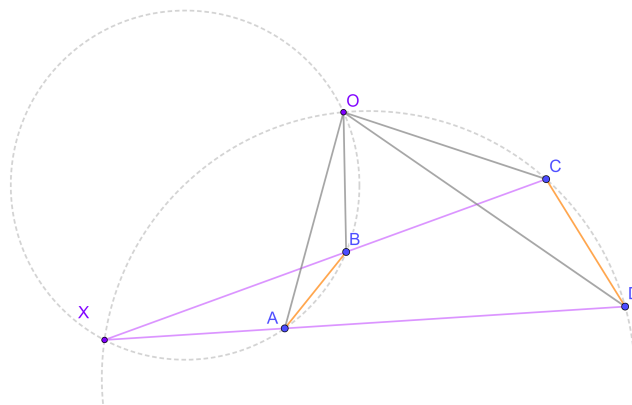


Figura 118 – Roto-homotetia construída a partir da interseção dos segmentos  $AD$  e  $BC$  - elaborado pela autora.

Perceba que o ponto  $P$  de Miquel é o centro da roto-homotetia, enviando  $P_1P_2$  em  $BC$  e  $P_2C$  em  $P_1B$ . Além disso,  $PP_1P_2 \sim PBC$  e  $PP_2C \sim PP_1B$ .

**Lema 16.6.** *Os quatro centros dos quatro círculos de Miquel  $AP_1P_2$ ,  $ABC$ ,  $CP_2P_3$  e  $BP_1P_3$ , pertencem a um mesmo círculo que passa pelo ponto  $P$  de Miquel.*

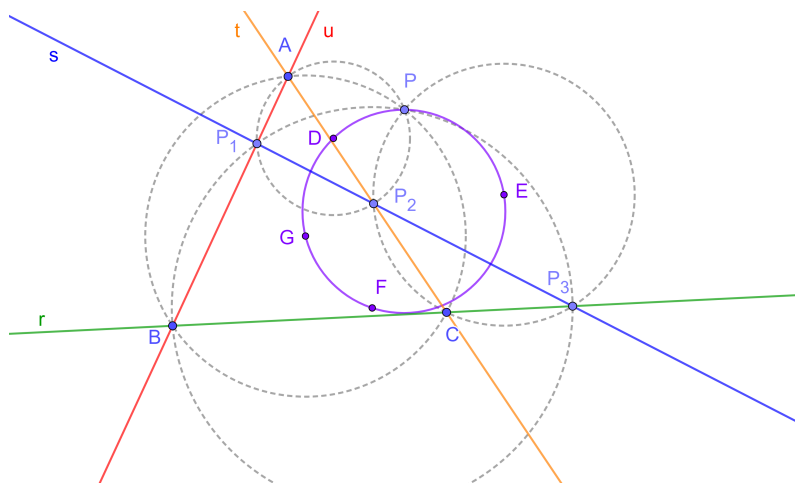


Figura 119 – Centros dos círculos de Miquel formando um novo círculo que também passa pelo ponto de Miquel - elaborado pela autora.

*Demonstração.* A reta dos centros de dois círculos secantes divide o arco cujos extremos são os pontos de interseção dos círculos ao meio. Logo:

$$\angle PGD = \frac{1}{2} \angle PGA = \angle PCA = \angle PCP_2.$$

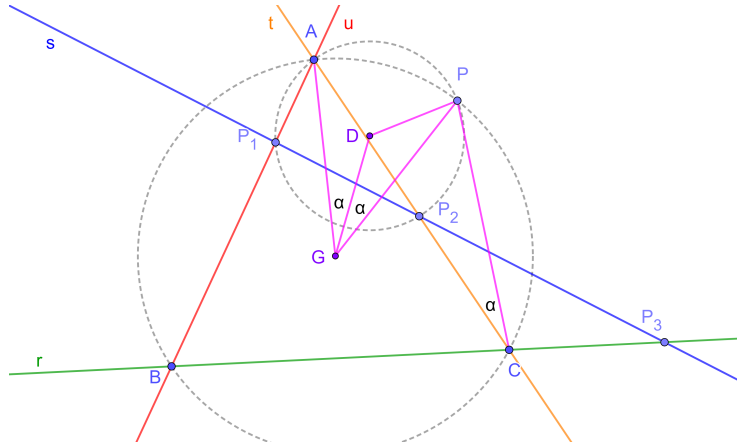


Figura 120 – Demonstração do círculo formado pelos centros dos círculos de Miquel - parte 1 - elaborado pela autora.

A partir disso, vemos que  $G$  pertence ao arco capaz do segmento  $PD$  com respeito ao ângulo  $\angle PCP_2$ .

$$\angle PFD = \frac{1}{2} \angle PFP_1 = \angle PBP_1 = \angle PBA = \angle PCA = \angle PCP_2.$$

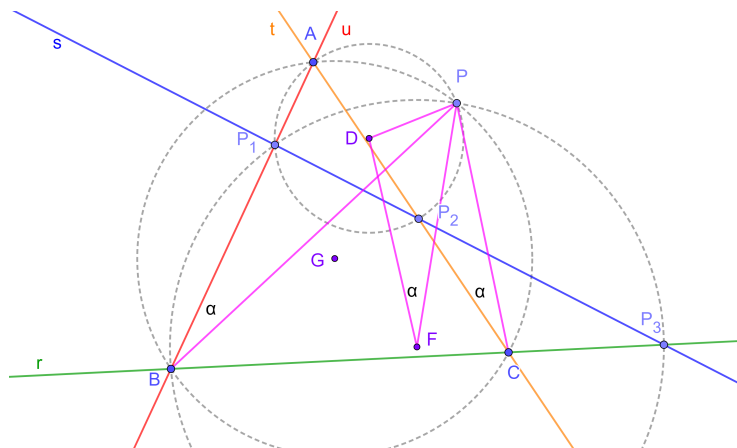


Figura 121 – Demonstração do círculo formado pelos centros dos círculos de Miquel - parte 2 - elaborado pela autora.

$F$  pertence ao mesmo arco capaz mencionado anteriormente.

$$\angle PED = \frac{1}{2} \angle PEP_2 = \angle PCP_2.$$

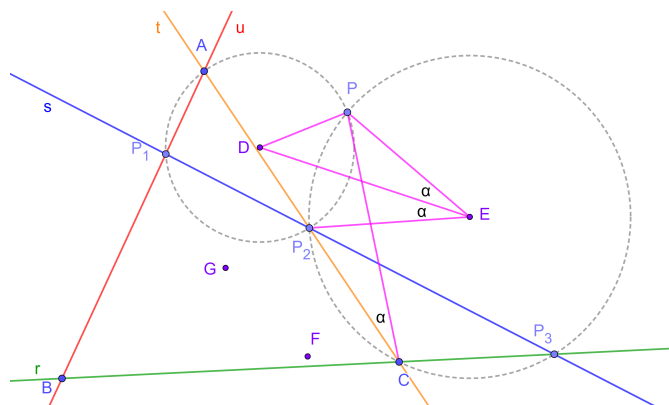


Figura 122 – Demonstração do círculo formado pelos centros dos círculos de Miquel - parte 3 - elaborado pela autora.

$E$  pertence ao mesmo arco capaz que passa pelos pontos  $P$ ,  $D$ ,  $F$  e  $G$ , então estes cinco pontos pertencem a um mesmo círculo, o círculo de Miquel. ■



# 17 Círculo Inscrito Mixtilinear ou Círculo de Mannheim

Este capítulo teve como principal fonte de estudo o livro *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads* (2021).

## 17.1 Círculo Inscrito em um Segmento

**Definição 17.1** (Círculo inscrito em um segmento). Seja  $\Omega$  um círculo de centro  $O$  e uma corda  $AB$ . O círculo inscrito a um segmento é o círculo  $\omega$  de centro  $P$  tangente interno a  $\Omega$  em  $T$  e tangente a corda  $AB$  em  $K$ .

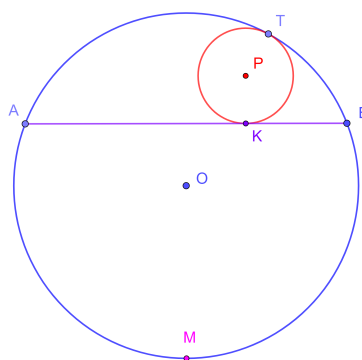


Figura 123 – Círculo inscrito em um segmento - elaborado pela autora.

**Proposição 17.2.** Os centros de  $\Omega$  e  $\omega$  e o ponto  $T$  de tangência entre elas são colineares. Além disso, existe uma homotetia em  $T$  que leva  $\omega$  em  $\Omega$ .

*Demonstração.* Para demonstrar que  $O$ ,  $P$  e  $T$  são colineares basta traçar uma reta  $r$  tangente aos círculos em  $T$ . Note que  $OT$  é perpendicular a  $r$  em  $T$ , já que qualquer reta tangente a um círculo é perpendicular a outra traçada a partir de seu centro até o ponto de tangência. Pelo mesmo motivo,  $PT \perp r$ . Então há duas retas perpendiculares a  $r$  passando pelo ponto  $T$ . Como passam pelo mesmo ponto, não podem ser paralelas, portanto são coincidentes,  $OT$  e  $PT$  são a mesma reta, fazendo com que os três pontos  $O$ ,  $P$  e  $T$  sejam colineares.

Como os três pontos são colineares, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que  $\lambda \cdot TP = TO$ . Considerando  $\lambda = \frac{R}{r}$ , com  $R$  o raio de  $\Omega$  e  $r$  o de  $\omega$ , então

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{R}{r} \cdot r \\ r_1 &= R. \end{aligned}$$

Ou seja, o raio de  $\omega$  é levado no raio de  $\Omega$ . Então, como a homotetia leva o centro  $P$  no centro  $O$  e o raio  $r$  no raio  $R$ , então levará todo o círculo  $\omega$  em  $\Omega$ . ■

**Proposição 17.3.** *Sendo  $M$  o ponto médio do arco  $AB$  que não contém  $T$ , existe uma homotetia centrada em  $T$  e que leva  $K$  em  $M$  e  $T, K$  e  $M$  são colineares.*

*Demonstração.*  $PK \perp AB$ , pois  $AB$  é tangente a  $\omega$ , e  $MO \perp AB$ , já que  $MO$  é mediatriz da corda, então  $PK \parallel MO$ . Como  $T, P$  e  $O$  são colineares,  $\angle TPK = \angle TOM$ . Sabe-se, também, que existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que  $\lambda \cdot TP = TO$ , portanto  $TPK$  é semelhante a  $TOM$ , então  $\lambda \cdot TK = TM$ , mostrando que há uma homotetia centrada em  $T$  que leva  $K$  em  $M$ . Como  $\angle PTK = \angle OTM$  e  $O, P$  e  $T$  são colineares, isso implica que  $T, K$  e  $M$  também são colineares. ■

**Proposição 17.4.** *Considere a notação fixada na proposição anterior, os triângulos  $TMB$  e  $BMK$  são semelhantes.*

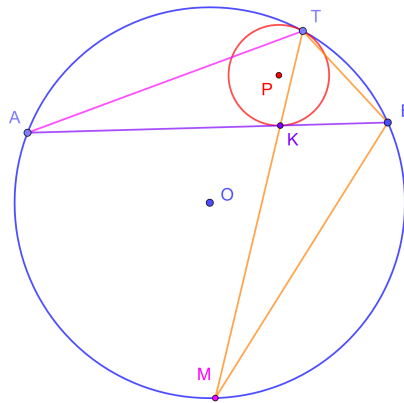


Figura 124 – Demonstração da semelhança entre os triângulos  $TMB$  e  $BMK$  - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Sabemos que existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que  $TM = \lambda TK$ , pela homotetia já demonstrada.  $\angle TAB = \angle TMB = \alpha$ ,  $\angle ATM = \angle ABM = \theta$ , então os triângulos  $ATK$  e  $MBK$  são semelhantes.

Como  $M$  é ponto médio do arco  $AB$ , então o triângulo  $MAB$  é isósceles e  $\angle MAB = \theta$ . Mas  $\angle MAB$  e  $\angle MTB$  ângulos inscritos associados ao mesmo arco, então  $\angle MTB = \theta$ .

Temos então  $\angle MTB = \angle KBM$  e o ângulo em  $M$  comum, então, pelo critério AA,  $TMB$  é semelhante a  $BKM$ .

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{MB}{MT} &= \frac{MK}{MB} \\ MB^2 &= MK \cdot MT. \end{aligned}$$

■

## 17.2 Círculo Inscrito Curvilinear

**Definição 17.5** (Círculo inscrito curvilinear). Seja  $ABC$  um triângulo e  $\Omega$  seu círculo circunscrito. O círculo  $\omega$  é denominado círculo inscrito curvilinear de  $ABC$  se  $\omega$  tangencia  $\Omega$  no ponto  $T$ , pertencente ao arco  $ACB$ , tangencia o lado  $AB$  no ponto  $K$  e, sendo um ponto  $D \in AB$ , também tangencia  $CD$  no ponto  $L$ .

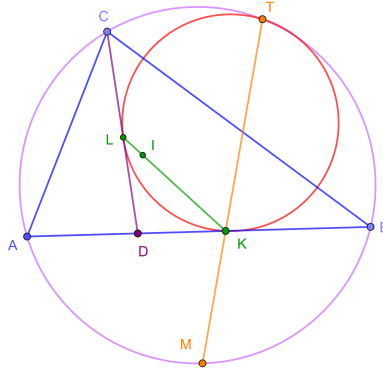


Figura 125 – Círculo inscrito curvilinear - elaborado pela autora.

**Proposição 17.6.** Os pontos  $C, L, I$  e  $T$  são concíclicos.

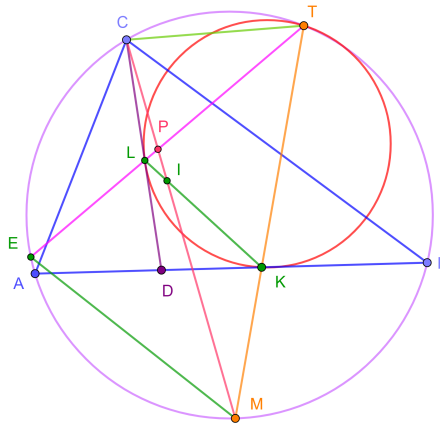


Figura 126 – Demonstração que  $C, L, I$  e  $T$  são concíclicos - elaborado pela autora.

*Demonstração.* Seja  $P$  o ponto de encontro das retas  $CI$  e  $LT$ . Prolongando  $TL$  até encontrar  $\Omega$  no ponto  $E$ ,  $\angle ETC = \angle EMC$  e  $\angle TEM = \angle TCM$ , então os triângulos  $PTC$  e  $PME$  são semelhantes.

Como há uma homotetia que leva  $TK$  em  $TM$ , essa mesma homotetia leva  $TL$  em  $TE$ .  $TLK$  é semelhante a  $TEM$ . Logo,  $EM \parallel LK$  e  $\angle EMC = \angle LIC = \angle LTC$ , então  $C, L, I$  e  $T$  pertencem a um mesmo círculo. ■

**Proposição 17.7.** *Os triângulos MKI e MIT são semelhantes.*

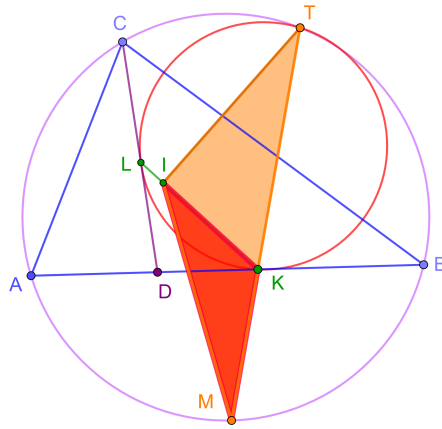


Figura 127 – Triângulos MKI e MIT - elaborado pela autora.

*Demonstração.*  $\angle DLK = \angle DKL = \alpha$ , são ângulos semi-inscritos a uma mesma corda, desse modo,  $\angle LTK = \alpha$ . Como CM é bissetriz,  $\angle ACM = \angle MCB = \theta$ .  $\angle ACI$  é semi-inscrito, então é igual a  $\angle CTI = \theta$ .

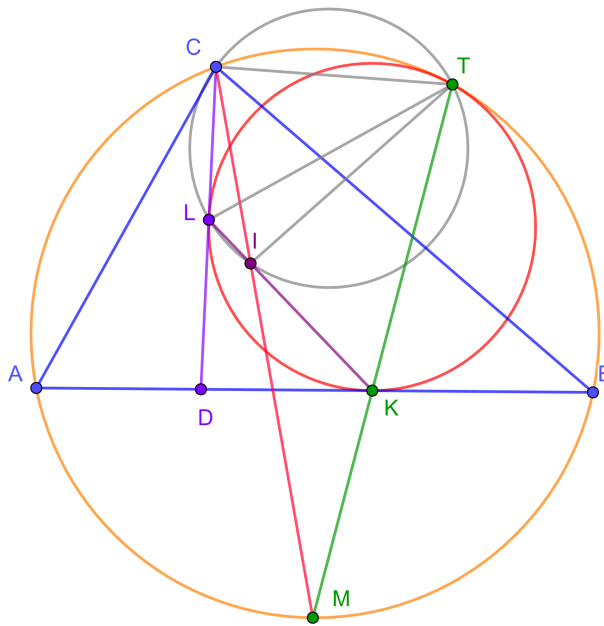


Figura 128 – Demonstração da semelhança entre os triângulos MKI e MIT - elaborado pela autora.

$\angle LTI = \angle LCI = \beta$  e  $\angle CTL = \theta - \beta = \delta$ .  $\angle TKB$  é semi-inscrito, então é igual a  $\angle TLK = \gamma = \angle AKM$ .  $\angle MIK = \angle LIC = \delta$ .  $\angle TCB = \angle TMB = \phi$ .  $\angle TIK = \mu$  e  $\angle TKA = \psi$ .

Perceba que

$$\gamma + \psi = 180^\circ. \tag{17.1}$$

Olhando para o triângulo  $TIK$ , temos

$$\begin{aligned}
 (\psi - \alpha) + \mu + (\alpha - \beta) &= 180^\circ \\
 \psi + \mu - \beta &= 180^\circ \\
 \gamma &= \mu - \beta \\
 \gamma &= \mu - (\theta - \delta) \\
 \gamma &= \mu + \delta - \theta.
 \end{aligned} \tag{17.2}$$

Vamos agora observar o ângulo externo do triângulo  $CLT$

$$\gamma + \alpha = \beta + \theta + \phi + \delta \tag{17.3}$$

$$\tag{17.4}$$

No triângulo  $CIT$ , temos

$$\mu + \delta = 2\theta + \phi. \tag{17.5}$$

Sabemos que  $\delta + \beta = \theta$ , então, na equação (17.3), temos

$$\begin{aligned}
 \gamma + \alpha &= 2\theta + \phi \\
 \mu - \beta + \alpha &= \mu + \delta \\
 \alpha - \beta &= \delta.
 \end{aligned} \tag{17.6}$$

Então  $\angle ITK = KIM$ , portanto,  $MKI$  é semelhante a  $MIT$ . ■

**Corolário 17.8.** *Seja  $ABC$  um triângulo e  $D$  um ponto em  $AB$ . Sendo  $\omega$  o círculo tangente a  $CD$  em  $L$ , a  $AB$  em  $K$  e ao círculo circunscrito ao triângulo  $ABC$  em  $T$ . Então o incentro  $I$  de  $ABC$  pertence ao segmento  $LK$ .*

*Demonstração.* Pela proposição (17.7), temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
 \frac{MK}{MI} &= \frac{MI}{MT} \\
 MI^2 &= MK \cdot MT.
 \end{aligned}$$

A proposição (17.4) nos mostrou que  $MB^2 = MK \cdot MT$ , então temos  $MI^2 = MB^2$  e  $MI = MB$ . Pelo lema (2.14), se  $I$  é o incentro, então  $MI = MB = MA$ , portanto,  $I$  é de fato o incentro de  $ABC$ . ■

### 17.3 Círculo Inscrito Mixtilinear ou Círculo de Mannheim

**Definição 17.9** (Círculo inscrito mixtilinear ou círculo de Mannheim). O círculo inscrito mixtilinear é o círculo tangente ao círculo circunscrito de um triângulo e a dois de seus lados.

O círculo inscrito mixtilinear é um caso particular do inscrito curvilinear, onde o círculo  $\omega$  é tangente ao círculo circunscrito de  $ABC$  e a dois de seus lados, ou seja, para cada triângulo há três círculos inscritos mixtilineares. O círculo  $\omega_A$ , ou A-mixtilinear, é o círculo tangente aos lados  $AB$  e  $AC$ . Além disso,  $T$ ,  $L$  e  $M_B$  (ponto médio do arco  $AC$ ) são colineares, assim como  $T$ ,  $K$  e  $M_C$  (ponto médio do arco  $AB$ ) também são.

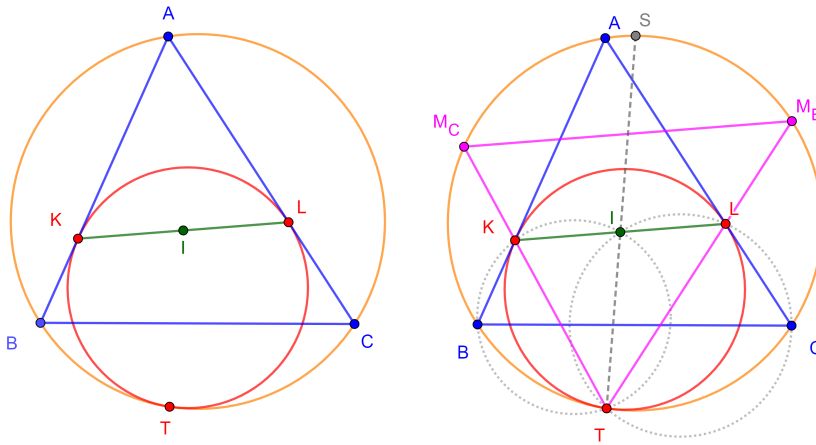


Figura 129 – Círculo inscrito A-mixtilinear - elaborado pela autora.

**Proposição 17.10.**  $I$  é o ponto médio de  $KL$ .

*Demonstração.* Observando o triângulo  $AKL$ ,  $AK = AL$ , pelo teorema (1.8), então  $AKL$  é isósceles e, como  $I$  é o incentro,  $AI$  é bissetriz e mediana, portanto  $KI = LI$ . ■

**Proposição 17.11.**  $\angle ATK$  e  $\angle LTI$  têm a mesma medida.

*Demonstração.* Como existe uma homotetia que leva  $TK$  em  $TM_C$  e  $TL$  em  $M_B$ ,  $KL \parallel M_B M_C$ .  $\angle KIB = \angle M_C M_B B = \angle M_B I L = \alpha$ .  $\angle CIL = \angle KIM_C = \angle CM_C M_B = \beta$ .

$\angle M_B I L$  é semi-inscrito, então é igual a  $\angle LTI = \angle M_B T S = \alpha$ . Queremos chegar a conclusão que  $\angle ATM_C = \angle ATK$  seja igual a  $\alpha$ .

$\angle KIM_C$  é semi-inscrito e, portanto, igual a  $\angle KTI = \angle M_C T S = \beta$ .

$\angle SCM_B = \alpha$  e  $\angle M_B A C = \beta$ . Mas, perceba que o triângulo  $ACM_B$  é isósceles, já que  $M_B$  faz parte da mediatriz de  $AC$ , então  $\angle ACM_B = \beta$ .

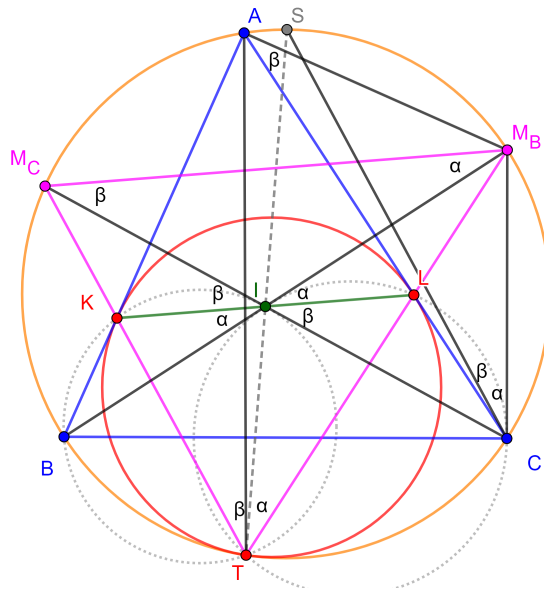


Figura 130 – Demonstração que  $\angle ATK$  e  $\angle LTI$  têm a mesma medida - elaborado pela autora.

Temos

$$\begin{aligned} \angle ACM_B &= \angle ACS + \angle SCM_B \\ \beta &= \angle ACS + \alpha \\ \beta &= \angle ATS + \alpha \\ \angle M_CTS &= \angle ATS + \alpha \\ \angle M_CTS - \angle ATS &= \alpha \\ \angle ATK &= \alpha. \end{aligned}$$

■

**Proposição 17.12.** *S é ponto médio do arco BC que não contém T.*

*Demonstração.* Utilizando os mesmos ângulos da proposição anterior,  $\angle SCM_B = \angle SBM_B = \alpha$ ,  $\angle M_BM_C C = \angle M_BBC = \beta$ , daí temos  $\angle SBC = \alpha + \beta$ .

$$\angle M_CTS = \angle M_CCS = \beta, \angle M_CM_BB = \angle M_CCB = \alpha, \text{ logo, } \angle SCB = \alpha + \beta.$$

Com isso, encontramos que o triângulo  $SBC$  é isósceles, então  $SB = SC$  e  $S$  pertence a mediatriz de  $BC$  e é o ponto médio do arco. ■

O lema a seguir consiste na síntese das proposições previamente demonstradas.

**Lema 17.13** (Círculo Inscrito Mixtilinear). *Seja  $ABC$  um triângulo e seja A-mixtilinear o círculo tangente a  $AB$ ,  $AC$  e o círculo circunscrito de  $ABC$ , em  $K$ ,  $L$  e  $T$ , respectivamente. Seja  $D$  e  $E$  o ponto de contato do círculo inscrito e do A-exinscrito em  $BC$ , respectivamente, então:*

- a. o ponto médio  $I$  de  $KL$  é o incentro de  $ABC$ ;
- b. as retas  $TK$  e  $TL$  passam pelo ponto médio dos arcos  $AB$  e  $AC$  que não contém  $T$ ;
- c. a reta  $TI$  passa pelo ponto médio do arco  $BC$  que contém  $A$ ;
- d.  $\angle BAT$  é igual a  $\angle CAE$ ;
- e.  $\angle BTA$  é igual a  $\angle CTD$ ;
- f. os quadriláteros  $BKIT$  e  $CLIT$  são cíclicos.

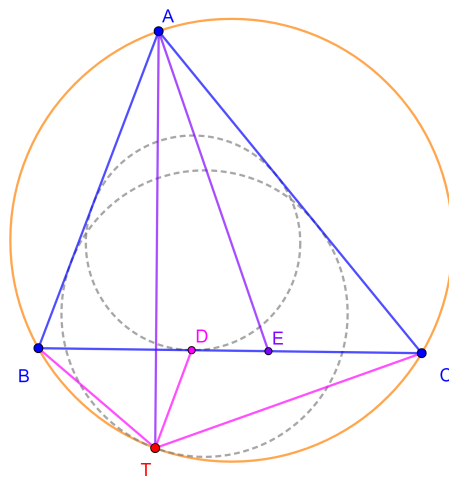


Figura 131 – Lema do círculo inscrito mixtilinear - elaborado pela autora.

# 18 Círculo de Brocard

Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard (1845 - 1922) foi um matemático e oficial francês, ficou conhecido pela descoberta das propriedades dos pontos, círculo e triângulo de Brocard.

## 18.1 Os Pontos de Brocard

**Definição 18.1.** Seja  $\Omega_1$  o primeiro ponto de Brocard. Ele é construído de forma que ao ligar  $\Omega_1$  a cada vértice do triângulo, o mesmo ângulo é formado entre o segmento formado e o lado a sua direita. O segundo ponto de Brocard,  $\Omega_2$  tem a mesma propriedade, mas com o ângulo formado entre o segmento e o lado a sua esquerda.

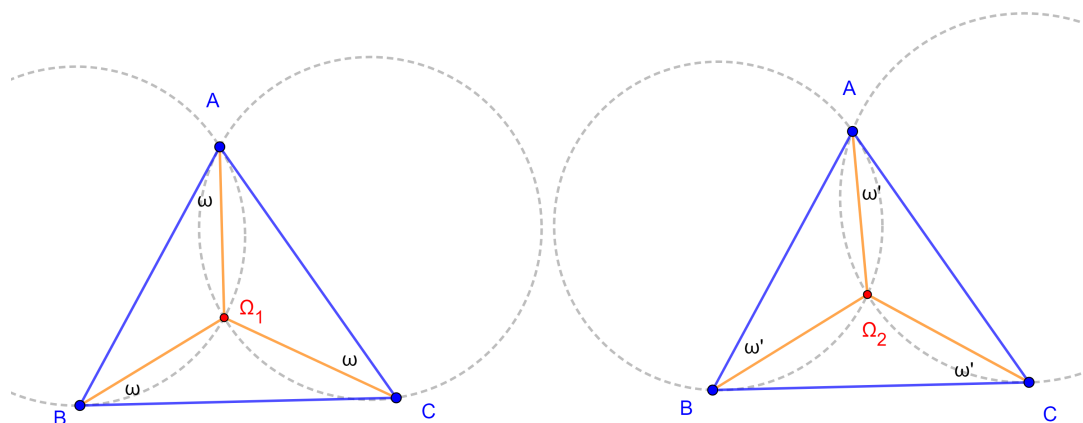


Figura 132 – Os pontos de Brocard - elaborado pela autora.

Para a construção do primeiro ponto de Brocard,  $\Omega_1$ , primeiro trace um círculo tangente a  $BC$  em  $B$ , passando por  $A$ . Depois trace outro círculo, desta vez tangente a  $AB$  em  $A$  e passando também por  $C$ . O ponto de encontro desses círculos é o ponto de Brocard.

$\angle \Omega_1 BC$  é semi-inscrito, portanto é igual a  $\angle BA\Omega_1$ . Mas  $\angle BA\Omega_1$  é semi-inscrito ao segundo círculo construído, então é igual a  $\angle AC\Omega_1$ .

Para o segundo ponto de Brocard,  $\Omega_2$ , a construção é similar, no entanto, o círculo que passa por  $A$  e  $C$ , vai tangenciar  $BC$  em  $C$  e o que passa por  $AB$  vai tangenciar  $AC$  em  $A$ . E o ponto de encontro dos dois círculos é exatamente  $\Omega_2$ .

**Proposição 18.2.** *Os ângulos formados por  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são iguais, ou seja,  $\omega = \omega'$ .*

*Demonstração.* Suponha  $P$  o conjugado isogonal de  $\Omega_1$ . A característica do conjugado isogonal é possuir um ângulo congruente ao primeiro, mas com o outro lado do triângulo. Como  $\Omega_1$  faz o mesmo ângulo  $\omega$  com todos os lados,  $P$  fará o mesmo ângulo com o outro lado. Como os pontos de Brocard são os únicos com essa propriedade,  $P = \Omega_2$  e  $\omega = \omega'$ . ■

**Proposição 18.3.** *A medida de  $\omega$  pode ser calculada como  $\cot \omega = \cot \angle A + \cot \angle B + \cot \angle C$ .*

*Demonstração.* Traçando uma reta paralela a  $BC$  passando por  $A$ , ela encontra  $B\Omega_1$  em  $P$ .  $\angle APB = \omega = \angle PBC$ , pois são ângulos alternos internos. Traçando o segmento  $PC$ , o quadrilátero  $APC\Omega_1$  é cíclico, já que  $\angle \Omega_1 CA = \angle \Omega_1 PA = \omega$ .

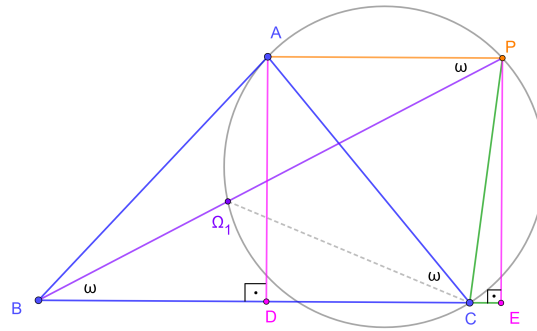


Figura 133 – Demonstração do ângulo formado pelos pontos de Brocard - elaborado pela autora.

Baixando a perpendicular a partir de  $P$ , ela encontra  $BC$  no ponto  $E$ .  $\angle BAC$  é semi-inscrito, então  $\angle APC = \angle BAC = \angle A$ .  $\angle PCE = \angle APC$ , são alternos internos. Sendo  $AD$  a altura do triângulo  $ABC$ ,  $AD = PE$ , temos então

$$\tan \angle A = \frac{PE}{CE} \quad (18.1)$$

$$\tan \angle B = \frac{PE}{BD} \quad (18.2)$$

$$\tan \angle C = \frac{PE}{CD}. \quad (18.3)$$

Pelo triângulo  $BPE$  temos

$$\begin{aligned} \tan \omega &= \frac{PE}{BE} \\ \tan \omega &= \frac{PE}{BD + CD + CE}. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Isolando  $CE$ ,  $BD$  e  $CD$  nas equações (18.1), (18.2) e (18.3), respectivamente,

$$BD = \frac{PE}{\tan \angle B} \quad (18.5)$$

$$CD = \frac{PE}{\tan \angle C} \quad (18.6)$$

$$CE = \frac{PE}{\tan \angle A}. \quad (18.7)$$

Substituindo as equações (18.5), (18.6) e (18.7) em (18.5)

$$\begin{aligned}\tan \omega &= \frac{PE}{\frac{PE}{\tan \angle B} + \frac{PE}{\tan \angle C} + \frac{PE}{\tan \angle A}} \\ \frac{PE}{\tan \omega} &= PE \cdot \left( \frac{1}{\tan \angle A} + \frac{1}{\tan \angle B} + \frac{1}{\tan \angle C} \right) \\ \frac{1}{\tan \omega} &= \frac{1}{\tan \angle A} + \frac{1}{\tan \angle B} + \frac{1}{\tan \angle C} \\ \cot \omega &= \cot \angle A + \cot \angle B + \cot \angle C.\end{aligned}$$

■

**Proposição 18.4.** Para todo triângulo  $ABC$ ,  $\cot \angle A + \cot \angle B + \cot \angle C \geq \sqrt{3}$ .

*Demonstração.* Sabemos que  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C)$ .

$$\begin{aligned}S &= \cot \angle A + \cot \angle B + \cot \angle C \\ &= \cot[180^\circ - (\angle B + \angle C)] + \cot \angle B + \cot \angle C \\ &= -\cot(\angle B + \angle C) + \cot \angle B + \cot \angle C \\ &= \cot \angle B + \cot \angle C - \frac{\cot \angle B \cdot \cot \angle C - 1}{\cot \angle B + \cot \angle C}.\end{aligned}\tag{18.8}$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar que a altura  $AD$  é interna ao triângulo e a medida de  $AD$  sendo unitária, além de  $BD = x$  e  $CD = a - x$ , então temos os triângulos retângulos  $ABD$  e  $ACD$ .

$$\cot \angle B = \frac{x}{1} = x\tag{18.9}$$

$$\cot \angle C = \frac{a-x}{1} = a-x.\tag{18.10}$$

Substituindo as equações (18.9) e (18.10) em (18.8), temos

$$\begin{aligned}S &= x + a - x - \frac{[x(a-x) - 1]}{x + a - x} \\ S &= a - \frac{(ax - x^2 - 1)}{a} \\ S &= \frac{a^2 - ax + x^2 + 1}{a} \\ aS &= a^2 - ax + x^2 + 1.\end{aligned}\tag{18.11}$$

Para resolver essa equação, podemos utilizar o método de completar quadrados.

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 - ax + \frac{a^2}{4}.\tag{18.12}$$

Percebemos, a partir da comparação entre as equações (18.12) e (18.11) que temos  $a^2$  e  $\frac{a^2}{4}$ , então o que falta é  $\frac{3a^2}{4}$ . Portanto

$$\left(\frac{\sqrt{3}a}{2} - 1\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \sqrt{3}a + 1.\tag{18.13}$$

Substituindo as equações (18.12) e (18.13) em (18.11)

$$aS = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} - 1\right)^2 + \sqrt{3}a. \quad (18.14)$$

Como temos dois quadrados nessa equação, sabemos que esses valores serão maiores ou iguais a zero. Ou seja,  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \geq 0$  e  $\left(\frac{\sqrt{3}a}{2} - 1\right)^2 \geq 0$ , portanto, podemos reescrever a equação (18.14) como

$$\begin{aligned} aS &\geq \sqrt{3}a \\ S &\geq \sqrt{3} \\ \cot \angle A + \cot \angle B + \cot \angle C &\geq \sqrt{3}. \end{aligned} \quad (18.15)$$

■

Observe que  $S$  vai ser igual a  $\sqrt{3}$  quando  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 0$  e  $\left(\frac{\sqrt{3}a}{2} - 1\right)^2 = 0$ . Então  $\frac{\sqrt{3}a}{2} = 1$  e  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$  e  $x = \frac{a}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Então  $x$  seria exatamente a metade do lado e  $AD$ , além de altura, é também mediana. Como a escolha do lado foi aleatória,  $S = \sqrt{3}$  quando o triângulo for equilátero.

A partir disso, podemos perceber que o maior valor possível para  $\cot \omega$  é  $\sqrt{3}$ , então o maior valor possível para  $\omega$  é  $30^\circ$ .

**Proposição 18.5** (Desigualdade de Weitzenbock). *Seja  $T$  a área do triângulo  $ABC$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}T$ .*

*Demonstração.* Considerando a altura do triângulo  $ABC$  relativa ao lado  $BC$  igual a 1, temos

$$T = \frac{a}{2}. \quad (18.16)$$

Aplicando Pitágoras em  $ADB$  e  $ADC$ , temos

$$c^2 = 1^2 + x^2 \quad (18.17)$$

$$b^2 = 1^2 + (a-x)^2. \quad (18.18)$$

Somando as equações (18.17) e (18.18)

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= 2 + x^2 + a^2 - 2ax + x^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 2 + 2x^2 + a^2 - 2ax + a^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 2 + 2x^2 + 2a^2 - 2ax \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 2(1 + x^2 + a^2 - ax). \end{aligned} \quad (18.19)$$

Perceba que, pela equação (18.16),  $a = 2T$ , podemos substituir  $a$  e a equação (18.11) em (18.19)

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 2aS \\ &= 2 \cdot 2T \cdot S \\ &= 4TS. \end{aligned} \tag{18.20}$$

Como  $S \geq \sqrt{3}$ ,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}T. \tag{18.21}$$

■

**Corolário 18.6.**  $\cot \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4T}$ .

*Demonstração.* Pela equação (18.20), temos

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 4TS \\ S &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4T}. \end{aligned}$$

Como  $S = \cot \omega$ ,

$$\cot \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4T}. \tag{18.22}$$

■

Prolongando os segmentos que partem de cada vértice ao ponto de Brocard  $\Omega_1$  até encontrarem o círculo circunscrito a  $ABC$ , temos que o prolongamento de  $A\Omega_1$  encontra o círculo em  $B'$ ,  $B\Omega_1$  encontra em  $C'$  e  $C\Omega_1$  em  $A'$ , como na figura (134).

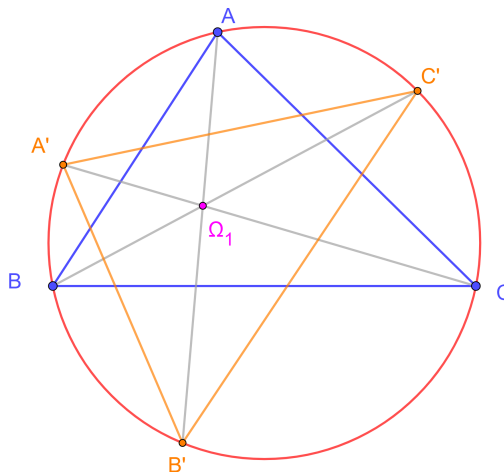


Figura 134 – Construção do triângulo  $A'B'C'$  - elaborado pela autora.

O triângulo  $A'B'C'$  é congruente a  $ABC$ . Basta verificar que  $\angle B'AC = \angle B'A'C$  e  $\angle CA'C' = \angle CBC' = \omega = \angle BAB'$ , então  $\angle A = \angle A'$ . Fazendo isso para os demais ângulos e considerando que os triângulos são inscritos no mesmo círculo, eles são congruentes.

A partir desse resultado, percebe-se que o primeiro ponto de Brocard de  $ABC$  é o segundo ponto de Brocard de  $A'B'C'$ . Além disso,  $\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC' = 2\omega$ .

Fazendo a rotação  $O(2\omega)$  na direção correta, leva  $A'B'C'$  em  $ABC$  e leva o segundo ponto de Brocard de  $A'B'C'$  ( $\Omega_1$ ), no segundo ponto de Brocard de  $ABC$  ( $\Omega_2$ ). Então

- $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são equidistantes do circuncentro  $O$ :  $O\Omega_1 = O\Omega_2$ ;
- $\angle \Omega_1 O \Omega_2 = 2\omega$ .

**Proposição 18.7.** *O primeiro ponto de Brocard,  $\Omega_1$ , é também o primeiro ponto de Brocard do triângulo pedal de  $\Omega_1$ .*

*Demonstração.* Baixando a perpendicular a partir de  $\Omega_1$  até cada lado de  $ABC$ , forma-se o triângulo  $A'B'C'$ . Como  $\angle \Omega_1 C'B = \angle \Omega_1 A'B = 90^\circ$ , o quadrilátero  $A'BC'\Omega_1$  é cíclico e  $\angle \Omega_1 BA' = \angle \Omega_1 C'A' = \omega$ , porque ângulos inscritos associados ao mesmo arco. O raciocínio é análogo para os demais ângulos, fazendo com que  $\Omega_1$  seja o primeiro ponto de Brocard tanto de  $ABC$  quanto de  $A'B'C'$ . ■

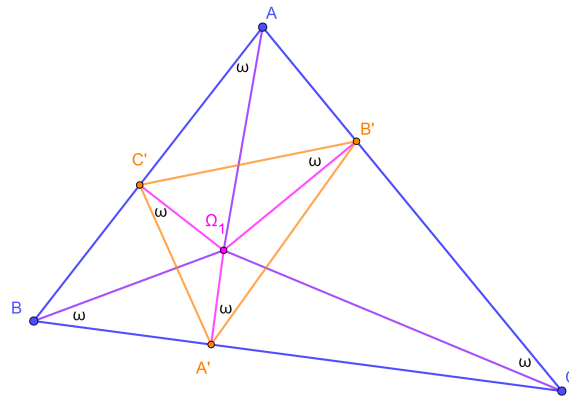


Figura 135 – Primeiro ponto de Brocard de um triângulo é também o primeiro ponto de Brocard do triângulo pedal de  $\Omega_1$  - elaborado pela autora.

## 18.2 O Círculo de Brocard

**Teorema 18.8** (Círculo de Brocard). *O círculo de Brocard é o círculo em que um dos diâmetros é o segmento que vai do ponto simediano  $K$  ao circuncentro  $O$ .*

Não há qualquer relação entre o ponto simediano e os pontos de Brocard, mas sempre que se é construído o círculo cujo diâmetro seja  $KO$ , ele passa pelos dois pontos de Brocard, então esse círculo é denominado de círculo de Brocard.

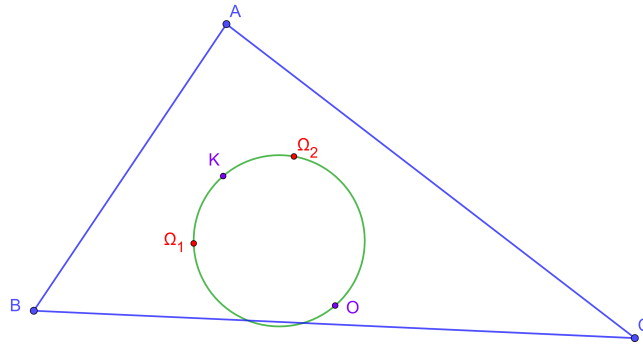


Figura 136 – Círculo de Brocard - elaborado pela autora.

Lembrando que  $K$  é o único ponto em que a distância até cada lado é proporcional ao próprio lado. Ou seja, sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$  as distâncias de  $K$  aos lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente, sendo  $m \in \mathbb{R}$ , temos

$$m = \frac{x}{a} \Rightarrow x = ma \quad (18.23)$$

$$m = \frac{y}{b} \Rightarrow y = mb \quad (18.24)$$

$$m = \frac{z}{c} \Rightarrow z = mc. \quad (18.25)$$

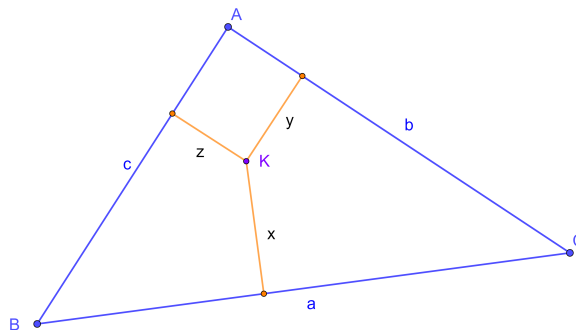


Figura 137 – Ponto simediano e suas distâncias aos lados do triângulo - elaborado pela autora.

Ao somarmos as áreas dos triângulos  $AKB$ ,  $AKC$  e  $BKC$ , temos que encontrar a área

$T$  de  $ABC$ , então

$$T = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} \quad (18.26)$$

$$2T = ax + by + cz$$

$$2T = a(ma) + b(mb) + c(mc)$$

$$2T = m(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$m = \frac{2T}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (18.27)$$

Na equação 18.22, mostramos que  $\cot \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4T} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 4T \cot \omega$ , substituindo esse resultado em 18.27

$$\begin{aligned} m &= \frac{2T}{4T \cot \omega} \\ &= \frac{2}{4 \cot \omega} \\ &= \frac{\tan \omega}{2}. \end{aligned} \quad (18.28)$$

Substituindo o valor de  $m$  nas equações (18.23), (18.24) e (18.25)

$$x = \frac{a \tan \omega}{2} \quad (18.29)$$

$$y = \frac{b \tan \omega}{2} \quad (18.30)$$

$$z = \frac{c \tan \omega}{2}. \quad (18.31)$$

*Demonstração.* Após os resultados acima, podemos dar início à demonstração de que o círculo de diâmetro  $KO$  passa pelos dois pontos de Brocard.

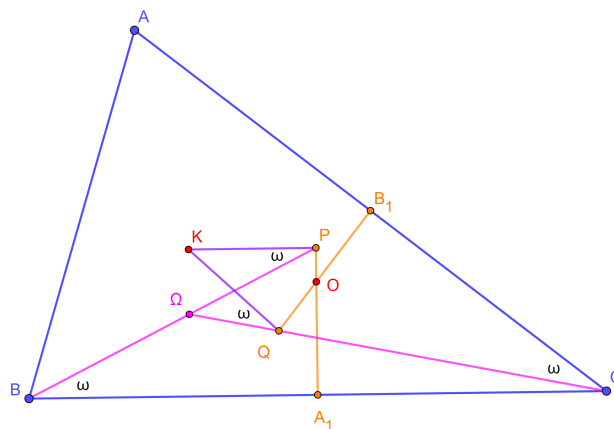


Figura 138 – Demonstração do círculo de Brocard - elaborado pela autora.

Seja  $A_1$  ponto médio de  $BC$ , denominando o primeiro ponto de Brocard de  $\Omega$ . Prolongando o segmento  $B\Omega$ , ele vai encontrar a mediatriz  $OA_1$  em  $P$ . Então  $BA_1 = \frac{a}{2}$  e  $\angle PBA_1 = \omega$ .

$$\begin{aligned}\tan \omega &= \frac{PA_1}{BA_1} \\ PA_1 &= \frac{a \tan \omega}{2}.\end{aligned}\tag{18.32}$$

Pela equação (18.29), percebemos que  $PA_1 = x$ , que é a distância de  $K$  ao lado  $BC$ , portanto  $KP \parallel BC$ ,  $\angle KPB = \omega$  e  $\angle KPO = 90^\circ$ , que indica que  $P$  pertence ao círculo de diâmetro  $KO$ .

De maneira análoga, sendo  $Q$  a interseção da mediatriz  $OB_1$  com  $C\Omega$ , então  $KQ \parallel AC$  e  $\angle KQO = 90^\circ$ , então  $Q$  também pertence ao círculo de diâmetro  $KO$ .

$\angle KQ\Omega = \angle AC\Omega = \omega$ , são ângulos correspondentes, então  $\Omega$  também pertence ao círculo de diâmetro  $KO$ . O raciocínio é o mesmo para o segundo ponto de Brocard  $\Omega_2$ , então o círculo de diâmetro  $KO$  passa pelos dois pontos de Brocard.

■

Perceba que o centro do primeiro círculo de Lemoine é o ponto médio de  $KO$ , assim como é o centro do círculo de Brocard. Portanto, o primeiro círculo de Lemoine e o círculo de Brocard são concêntricos.

**Proposição 18.9.** *No triângulo equilátero só há um ponto de Brocard, que coincide com o ortocentro, baricentro, incentro e circuncentro.*

*Demonstração.* Sabemos que no triângulo equilátero o ortocentro, o baricentro, o incentro e o circuncentro coincidem, então basta demonstrar que o ponto de Brocard  $\Omega$  coincide com um deles.

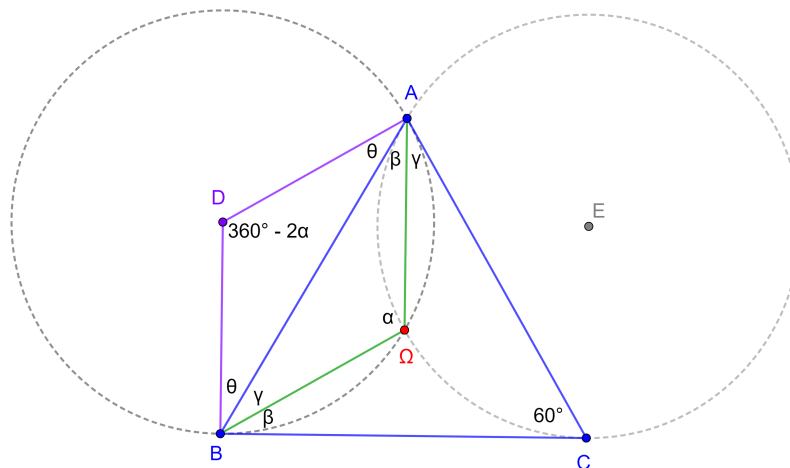


Figura 139 – O ponto de Brocard no triângulo equilátero - elaborado pela autora.

Como  $\Omega$  é o ponto de Brocard,  $\angle\Omega AB = \angle\Omega BC = \beta$  e, sendo  $ABC$  equilátero,  $\angle CA\Omega = \angle AB\Omega = \gamma$ .

Pela construção do ponto de Brocard, há um círculo passando por  $A$ ,  $B$  e  $\Omega$ , então  $DA = DB = r$ , sendo  $r$  o raio do círculo centrado em  $D$  e que passa por  $A$  e  $B$ . Considerando  $\angle A\Omega B$  como  $\alpha$ , concluímos que  $\angle ADB = 360^\circ - 2\alpha$ . Além disso,  $\angle DAB = \angle DBA = \theta$ .

Pelo triângulo  $ADB$ , temos

$$\begin{aligned} 360^\circ - 2\alpha + 2\theta &= 180^\circ \\ 360^\circ - 180^\circ + 2\theta &= 2\alpha \\ 180^\circ + 2\theta &= 2\alpha \\ 90^\circ + \theta &= \alpha. \end{aligned}$$

Agora pelo triângulo  $AB\Omega$ ,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \\ 90^\circ + \theta + \beta + \gamma &= 180^\circ \\ \theta + \beta + \gamma &= 180^\circ - 90^\circ \\ \theta + \beta + \gamma &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Então,  $\angle CAD = \angle CBD = 90^\circ$  e o quadrilátero  $ADBC$  é cíclico. No entanto, por três pontos distintos e não colineares, passa um único círculo, ou seja,  $D$  pertence ao círculo circunscrito de  $ABC$  e  $DC$  é diâmetro.

$\angle ADB$  e  $\angle ACB$  são suplementares, portanto,  $\angle ADB = 360^\circ - 2\alpha = 120^\circ$ , fazendo com que o valor de  $\alpha$  seja  $120^\circ$ . Pela proposição (1.20), o ângulo formado pelo circuncentro é o dobro do formado pelo vértice correspondente, ou seja,  $\Omega$  coincide com o circuncentro de  $ABC$ . ■

**Teorema 18.10.** *Os pontos de Brocard são simétricos com relação a reta  $KO$ .*

*Demonstração.* Os triângulos  $K\Omega_1O$  e  $K\Omega_2O$  são ambos retângulos, estão inscritos ao mesmo círculo e possuem a mesma hipotenusa, fazendo com que sejam congruentes. Então o triângulo  $K\Omega_1\Omega_2$  é isósceles,  $\Omega_1\Omega_2 \perp KO$  e as distâncias de cada ponto de Brocard à reta  $KO$  é a mesma, concluindo, assim, que são simétricos com relação a  $KO$ . ■

## 18.3 Os triângulos de Brocard

### 18.3.1 O primeiro triângulo de Brocard

O primeiro triângulo de Brocard é construído a partir da interseção da reta que liga cada vértice do triângulo ao primeiro ponto de Brocard e o círculo de Brocard. Observe a

figura (140),  $P$  pertence ao segmento  $A\Omega_1$ ,  $Q$  pertence à  $B\Omega_1$  e  $R$  à  $C\Omega_1$ . O triângulo  $PQR$  é chamado o primeiro triângulo de Brocard.

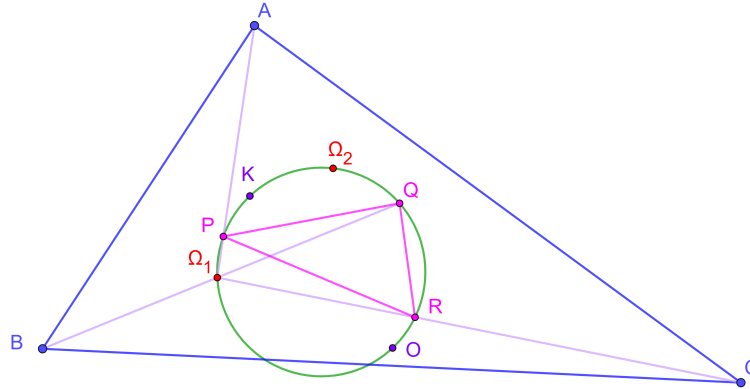


Figura 140 – Primeiro triângulo de Brocard - elaborado pela autora.

### 18.3.2 O segundo triângulo de Brocard

Enquanto que o primeiro triângulo de Brocard é construído a partir das retas que ligam os vértices ao primeiro ponto de Brocard, o segundo é encontrado de maneira similar, mas, ao invés de  $\Omega_1$ , usamos o ponto simediano  $K$ .

Traçando a reta  $AK$ , ela vai intersectar o circuncentro de  $ABC$  no ponto  $D$ . O ponto médio de  $AD$  é  $X$ , que pertence ao círculo de Brocard. De maneira análoga, encontramos  $Y$  e  $Z$  e, assim, o segundo triângulo de Brocard  $XYZ$ .

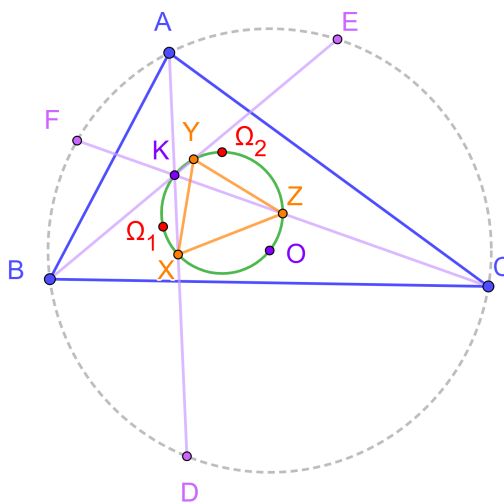


Figura 141 – Segundo triângulo de Brocard - elaborado pela autora.



# 19 Questões de Olimpíadas

## 19.1 Alguns problemas e suas soluções

**Exemplo 19.1** (USA TST 2011/4 - Círculo de 9 Pontos). O triângulo acutângulo  $ABC$  é inscrito no círculo  $\omega$ . Sejam  $H$  e  $O$  o ortocentro e o circuncentro, respectivamente. Sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios dos lados  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. As retas  $MH$  e  $NH$  encontram  $\omega$  em  $P$  e  $Q$ , respectivamente. As retas  $MN$  e  $PQ$  se encontram em  $R$ . Prove que  $OA \perp RA$ .

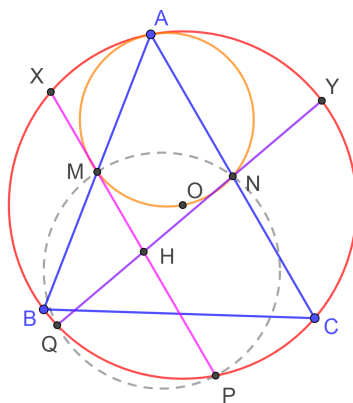


Figura 142 – Imagem utilizada na resolução do exercício 3.29 (CHEN, 2021, p.249) - elaborado pela autora

(Solução de CHEN, 2021, p. 249). O objetivo principal do problema é provar que o quadrilátero  $MNPQ$  é cíclico. Primeiro vamos definir eixo radical, que é simplesmente o lugar geométrico dos pontos que possuem a mesma potência com relação a dois círculos não concêntricos. A partir disso, podemos aplicar o eixo radical aos círculos  $AMN$ ,  $ABC$  e  $MNPQ$  e deduzir que o centro radical (que é o ponto de encontro dos eixos radicais) é o ponto  $R$ , descrito no problema.

Suponha que a homotetia que leva o círculo de 9 pontos de  $ABC$  ao círculo circunscrito desde triângulo, leva  $M$  e  $N$  nos pontos  $X$  e  $Y$ , respectivamente, no círculo circunscrito de  $ABC$ . De outra maneira, sejam  $X$  e  $Y$  as reflexões de  $H$  sobre  $M$  e  $N$ . Utilizando a proposição (1.44), sabemos que  $XH \cdot HP = YH \cdot HQ$ . Como  $MH = \frac{1}{2}XH$  e  $NH = \frac{1}{2}YH$ , segue que  $MH \cdot HP = NH \cdot HQ$ , e o problema está resolvido. ■

**Exemplo 19.2** (USA TST 2007/1 - Círculo de Miquel). Os círculos  $\omega_1$  e  $\omega_2$  se encontram em  $P$  e em  $Q$ . Os segmentos  $AC$  e  $BD$  são cordas de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , respectivamente, o segmento  $AB$  e

a reta  $CD$  se encontram em  $P$ . A reta  $BD$  e o segmento  $AC$  se encontram em  $X$ . O ponto  $Y$  está em  $\omega_1$  e  $PY \parallel BD$ . O ponto  $Z$  está em  $\omega_2$  e  $PZ \parallel AC$ . Prove que os pontos  $Q, X, Y$  e  $Z$  são colineares.

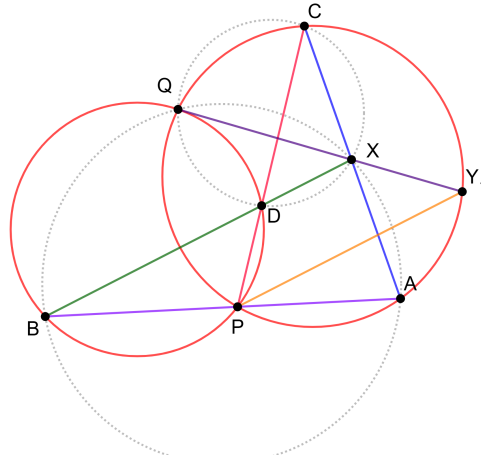


Figura 143 – Imagem utilizada na resolução do exercício 10.20 (CHEN, 2021, p. 279) - elaborado pela autora.

(Solução de CHEN, 2021, p. 279). Sendo  $Y'$  a segunda interseção da reta  $QX$  com  $\omega_1$ . Provamos que  $PY' \parallel BD$ , que implica que  $Q, X$  e  $Y$  são colineares. (Analogamente para o ponto  $Z$ ).

Essa condição implica que  $Q$  é o ponto de Miquel do quadrilátero completo  $DXAP$ . Os quadriláteros  $CQDX$  e  $BQXA$  é cíclico. Então  $\angle QY'P = \angle QCP = \angle QCD = \angle QXD = \angle QXB$ , que implica em  $PY' \parallel BX$ . ■

**Exemplo 19.3** (IMO 2009 - Círculo de Droz-Farny). Seja  $H$  o ortocentro de um triângulo agudo  $ABC$ . O círculo  $\Gamma_A$  tem seu centro no ponto médio de  $BC$  e passando por  $H$ , intersecta a reta  $BC$  nos pontos  $A_1$  e  $A_2$ . Analogamente definem-se os pontos  $B_1, B_2, C_1$  e  $C_2$ . Prove que esses seis pontos  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  e  $C_2$  são cíclicos.

A solução do exemplo (19.3) é a demonstração do círculo de Droz-Farny, que se encontra no capítulo 12.

## 19.2 Problemas propostos

**Exemplo 19.4** (Teste Cone Sul 2019 - Brasil - Círculo de Miquel). Sendo  $ABC$  um triângulo e  $E$  e  $F$  dois pontos arbitrários sobre os lados  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. O círculo circunscrito do triângulo  $AEF$  encontra o círculo circunscrito de  $ABC$  novamente no ponto  $M$ . O ponto  $D$  é tal que  $EF$  é a mediatriz do segmento  $MD$ . Finalmente,  $O$  é o circuncentro do triângulo

$ABC$ . Prove que  $D$  está sobre a reta  $BC$  se, e somente se,  $O$  pertence ao círculo circunscrito do triângulo  $AEF$ .

**Exemplo 19.5** (ENEM 2018 - Círculo de Apolônio). Para apagar os focos  $A$  e  $B$  de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco  $A$ , de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco  $B$ , de temperatura menos elevada. Nessas condições, a maior distância, em metros, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é

- a) 30;                      b) 40;                      c) 50;                      d) 60;                      e) 68;

**Exemplo 19.6** (ELMO Shortlist 2013 - Círculo de 9 Pontos). Seja  $ABC$  um triângulo inscrito no círculo  $\omega$ , e as medianas partindo de  $B$  e  $C$  encontram  $\omega$  em  $D$  e  $E$ , respectivamente. Seja  $O_1$  o centro do círculo que passa por  $D$  e é tangente a  $AC$  em  $C$ . E seja  $O_2$  o centro do círculo que passa por  $E$  e é tangente a  $AB$  em  $B$ . Provar que  $O_1$ ,  $O_2$  e o centro do círculo de 9 pontos de  $ABC$  são colineares.

**Exemplo 19.7** (EGMO 2013/5 - Círculo Inscrito Mixtilinear). Seja  $\Omega$  o círculo circunscrito do triângulo  $ABC$ . O círculo  $\omega$  é tangente aos lados  $AC$  e  $BC$ , e é tangente interno a  $\Omega$  no ponto  $P$ . Uma reta paralela a  $AB$  intersecta o interior do triângulo  $ABC$  é tangente a  $\omega$  em  $Q$ . Prove que  $\angle ACP = \angle QCB$ .

**Exemplo 19.8** (OBMEP 2024 - Círculo de Miquel). Seja  $ABC$  um triângulo escaleno. Sejam  $E$  e  $F$  os pontos médios dos lados  $AC$  e  $AB$ , respectivamente, e seja  $D$  um ponto qualquer no segmento  $BC$ . As circunferências circunscritas aos triângulos  $BDF$  e  $CDE$  intersectam a reta  $EF$  em  $K \neq F$  e  $L \neq E$ , respectivamente, e intersectam-se em  $X \neq D$ . O ponto  $Y$  está sobre a reta  $DX$  de modo que  $AY$  é paralelo a  $BC$ . Prove que os pontos  $K$ ,  $L$ ,  $X$  e  $Y$  estão sobre uma mesma circunferência.

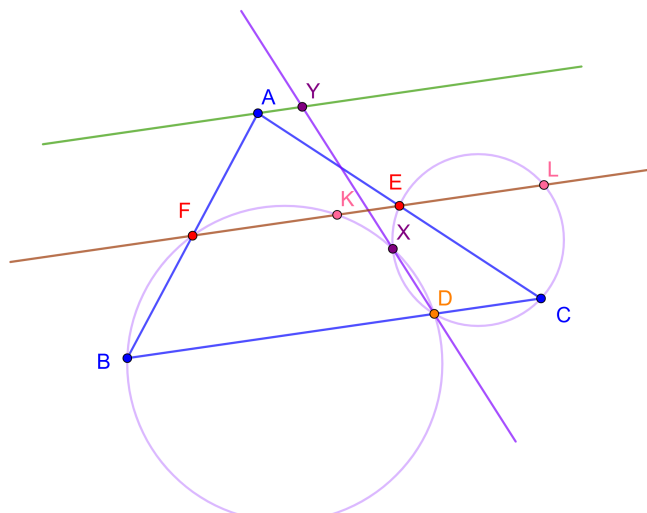


Figura 144 – Figura para auxiliar na resolução da questão - elaborado pela autora.

**Exemplo 19.9** (Spanish Mathematical Olympiad 1992 P5 - Ponto de Brocard). Dado um triângulo  $ABC$ , mostre como construir um ponto  $P$  tal que  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ .

**Exemplo 19.10** (OBM 1999 - Ponto de Brocard). Dado um triângulo qualquer  $ABC$ , mostre como construir  $A'$  no lado  $AB$ ,  $B'$  no lado  $BC$  e  $C'$  no lado  $AC$ , de maneira que  $ABC$  e  $A'B'C'$  sejam semelhantes (com  $\angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'$ ,  $\angle C = \angle C'$ ) e  $A'B'C'$  tem a menor área possível.

**Exemplo 19.11** (USA December TST for 57th IMO 2016 - Círculo Inscrito Mixtilinear). Seja  $ABC$  um triângulo escaleno com  $\Omega$  sendo o seu círculo circunscrito, e suponha que o círculo inscrito a  $ABC$  tangencia  $BC$  no ponto  $D$ . O ângulo que bissecta  $\angle A$  encontra  $BC$  e  $\Omega$  no ponto  $E$  e  $F$ . O círculo circunscrito do triângulo  $DEF$  intersecta o círculo  $A$ -exinscrito em  $S_1$  e  $S_2$ , e  $\Omega$  em  $T \neq F$ . Prove que a reta  $AT$  passa por  $S_1$  ou por  $S_2$ .

**Exemplo 19.12** (IMO 2019 - Círculo Inscrito Mixtilinear). Seja  $I$  o incentro de um triângulo agudo  $ABC$  com  $AB \neq AC$ . O círculo inscrito  $\omega$  de  $ABC$  é tangente aos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  em  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente. A reta que passa por  $D$  e é perpendicular a  $EF$  encontra  $\omega$  em  $R$ . A reta  $AR$  encontra  $\omega$  novamente em  $P$ . O círculo circunscrito do triângulo  $PCE$  e  $PBF$  se encontram novamente em  $Q$ . Mostre que as retas  $DI$  e  $PQ$  se encontram na reta perpendicular a  $AI$  passando por  $A$ .

**Exemplo 19.13** (Sharygin Geometry Olympiad Correspondence Round P22 2011 - Círculo de Nove Pontos). Seja  $CX$  e  $CY$  tangentes no vértice  $C$  do triângulo  $ABC$  ao círculo passando pelos pontos médios dos lados do triângulo. Prove que as retas  $XY$ ,  $AB$  e a tangente ao círculo circunscrito de  $ABC$  no ponto  $C$  são concorrentes.

**Exemplo 19.14** (Sharygin 2025 - Círculo de Nove Pontos). Seja  $H$  o ortocentro do triângulo  $ABC$ , e  $M$  e  $N$  os pontos médios dos segmentos  $BC$  e  $AH$ , respectivamente. A perpendicular de  $MH$  passando por  $N$  encontra  $BC$  no ponto  $A'$ . Os pontos  $B'$  e  $C'$  são definidos de maneira similar. Prove que  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são colineares.

## Conclusão

Conforme abordado na introdução, foram realizadas pesquisas demonstrando que grande parte dos estudantes possuem um conhecimento geométrico insuficiente. Em muitos casos o conteúdo é tratado de maneira superficial ou até mesmo negligenciado pelos docentes. Isso reforça a necessidade de intervenções educativas mais eficazes e de uma maior valorização da geometria no currículo escolar.

Neste contexto, alguns círculos, como o de 8 pontos, o de Adams, o de Droz-Farny, de Taylor e de Miquel, podem ser explicados de maneira acessível utilizando apenas conteúdos escolares simples. Sugerimos a criação de uma disciplina eletiva dedicada exclusivamente ao estudo da geometria plana e espacial. Esta disciplina teria como objetivo principal estimular a curiosidade e a percepção geométrica do alunado, começando pelo básico, como nomenclatura, ângulo, polígonos, poliedros e o cálculo de perímetro, área e volume. Uma abordagem mais prática e exploratória pode despertar o interesse dos estudantes e ajudá-los a construir uma base sólida para o aprendizado de conceitos mais avançados.

A complexidade e a riqueza da geometria vão além desses exemplos, abrangendo também círculos como o *Círculo Baricêntrico*, que para sua construção é necessário o conhecimento de coordenadas baricêntricas, o *Círculo Unitário*, que utiliza números complexos, o *Círculo de Ford*, o *Círculo Trigonométrico*, entre outros. Estes conceitos não apenas ilustram a diversidade e a profundidade da geometria, mas também destacam a interconexão entre diferentes áreas da matemática.

Ademais, o desenvolvimento de recursos educacionais focados na aplicação da geometria em problemas do cotidiano e em contextos competitivos pode servir como um incentivo adicional para o estudo da disciplina. Tais recursos poderiam incluir materiais didáticos específicos, como livros, aplicativos interativos e plataformas de ensino online, que permitam uma aprendizagem mais dinâmica e acessível.

Por fim, é importante destacar que o estudo da geometria é tão importante quanto os demais conteúdos matemáticos e devem ser tratados prioritariamente pelos educadores. A formação contínua de professores, a atualização dos currículos e a integração de tecnologias educacionais são elementos-chave para garantir que todos os alunos tenham acesso a uma educação matemática de qualidade.

Assim, concluímos que a valorização e a melhoria do ensino da geometria são essenciais não apenas para o sucesso acadêmico dos alunos, mas também para o desenvolvimento de habilidades críticas que serão úteis ao longo de suas vidas.



# Referências

- 1 CHEN, E. *Euclidean geometry in mathematical olympiads*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2021. v. 27.
- 2 BRASIL. Base nacional comum curricular. *MEC*, 2018.
- 3 SANT'ANA, E. C. Geometria segundo modelo de van hiele: uma análise do nível de pensamento geométrico dos alunos ao final do ensino fundamental. 2009.
- 4 PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, v. 1, n. 1, 1993.
- 5 PINHEIRO, G. F. et al. Percepções geométricas: as dificuldades na aprendizagem da geometria. 2019.
- 6 HONSBERGER, R. *Episodes in nineteenth and twentieth century Euclidean geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. v. 37.
- 7 JOHNSON, R. A. *Advanced euclidean geometry*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013.
- 8 JOHNSON, R. A. A circle theorem. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 23, n. 5, p. 161–162, 1916.
- 9 JOHNSON, R. A. *Modern geometry: an elementary treatise on the geometry of the triangle and the circle*. [S.l.]: Houghton, Mifflin Company, 1929.
- 10 O'CONNOR J J O; ROBERTSON, E. F. *Arnold Droz-Farny*. 2006. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Droz-Farny/>>. Acesso em 07 de agosto de 2025.
- 11 COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. *Geometry revisited*. [S.l.]: MAA, 1967. v. 19.
- 12 ANDREESCU, T.; KORSKY, S.; POHOATA, C. *Lemmas in Olympiad Geometry*. [S.l.]: XYZ Press, 2016.
- 13 JÚNIOR, J. C.; SILVA, J. A geometria pela ótica da teoria de van hiele: uma análise do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos de um curso de licenciatura em matemática. *Encontro Paraibano de Educação Matemática*, v. 8, p. 1–13, 2014.
- 14 MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. *Geometria II*. [S.l.]: FC e Z Livros, 2002.
- 15 JASCKSON, Frank; WEISSTEIN, Eric W. *Johnson's Circle*. 2022. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/JohnsonCircles.html>>. Acesso em: 28 de julho de 2024.
- 16 FILHO, J. F. d. Q. et al. A reta de nagel: uma abordagem geométrica e algébrica de um alinhamento notável. Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2017.
- 17 WEISSTEIN, Eric W. *Anticomplementary Circle*. 2022. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/AnticomplementaryCircle.html>>. Acesso em: 28 de julho de 2024.

- 18 ESPIRITU, S. F. *Puntos Notables*. [S.l.]: Lumbreras.
- 19 WEISSTEIN, Eric W. *Eight-Point Circle Theorem*. 2022. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/Eight-PointCircleTheorem.html>>. Acesso em: 28 de julho de 2024.
- 20 LINH, N. V. Hagge circles revisited. *Foreign Trade University of Vietnam*, 2011.
- 21 WEISSTEIN, E. W. *Neuberg Circles*. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/NeubergCircles.html>>. Acesso em 06 de março de 2025.
- 22 HEISS, M. *The Three McCay Circles, the First and Second Brocard Triangle*. 2024. Disponível em: <<https://mccay-circles.jimdofree.com/>>. Acesso em 06 de março de 2025.
- 23 RANGEL-MONDRAGON, J. *The Brocard Points and Neuberg Circles of a Triangle*. 2012. Disponível em: <<https://demonstrations.wolfram.com/TheBrocardPointsAndNeubergCirclesOfATriangle/>>. Acesso em 07 de março de 2025.