



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Rodrigo de Oliveira Melo Dantas Mendes**

**Explorando a Geometria Inversiva: Da Teoria às Práticas  
Educacionais**

RECIFE  
2025



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Rodrigo de Oliveira Melo Dantas Mendes**

## **Explorando a Geometria Inversiva: Da Teoria às Práticas Educaionais**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera

RECIFE  
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Bibliotecário(a): Auxiliadora Cunha – CRB-4 1134

M538e Mendes, Rodrigo de Oliveira Melo Dantas.  
Explorando a geometria inversiva: da teoria às  
práticas educacionais / Rodrigo de Oliveira Melo  
Dantas Mendes. – Recife, 2025.  
62 f.; il.

Orientador(a): Jorge Antonio Hinojosa Vera.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal  
Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado  
Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife,  
BR-PE, 2025.

Inclui referências.

1. Geometria euclidiana. 2. Geometria não-  
Euclidiana. 3. Inversão Geométrica. 4. Geometria -  
Didática I. Vera, Jorge Antonio Hinojosa, orient. II.  
Título

CDD 510

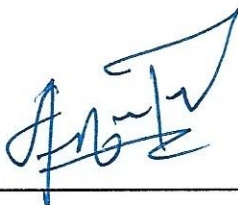
RODRIGO DE OLIVEIRA MELO DANTAS MENDES

**"Explorando a Geometria Inversiva: Da Teoria às Práticas Educacionais"**

*Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Aprovado em 21/02/2025

BANCA EXAMINADORA



---

**Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera (Orientador) – UFRPE**



---

**Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera – UFPB**



---

**Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva – PROFMAT/UFRPE**

*À minha esposa, ao meus pais, aos meus parentes e amigos*

# Agradecimentos

À minha esposa Elaine, por sempre me apoiar nessa empreitada, me incentivando e não permitindo que eu desistisse dessa jornada tão difícil.

Aos meus pais que puderam com muito esforço me proporcionar a melhor educação para que eu pudesse ter condições de atingir os meus objetivos.

Ao meu orientador Jorge Hinojosa, que se dispôs a trabalhar no meu projeto, acreditando em mim e sempre disponível para me acompanhar e me orientar, tornando possível a finalização deste trabalho.

À minha cunhada Thaylane e seu esposo Victor que sempre que possível se dispuseram a me ajudar, acrescentando conteúdos e ideias de grande valia para esse trabalho.

Aos meus colegas de curso, Jadson, Néelson, Cleilton e Jhonata que foram muito importantes para conclusão deste curso, sempre ajudando um ao outro, estudando todos os dias para termos êxito em cada uma das disciplinas.

E por fim a todos que de alguma forma sempre me apoiou para a realização desse sonho.

*"Seja você quem for, seja qual for a posição social que  
você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa,  
tenha sempre como meta muita força, muita determinação  
e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus,  
que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá."  
(Ayrton Senna)*

# Resumo

Esta dissertação apresenta um estudo aprofundado sobre a geometria inversiva, uma área da matemática com forte apelo teórico e prático. Inicia-se com a definição formal e propriedades básicas da inversão, abordando as transformações fundamentais, como a inversão de retas e circunferências, acompanhadas de casos específicos que ilustram sua aplicação.

No âmbito prático, explora-se o uso da geometria inversiva na resolução de problemas complexos, com destaque para olimpíadas de matemática, onde sua aplicabilidade se mostra particularmente eficiente.

Além disso, propõe-se uma sequência didática estruturada em quatro aulas, voltada para a introdução e adaptação do tema ao contexto do ensino médio. Essa abordagem busca tornar acessíveis conceitos avançados, promovendo o desenvolvimento do raciocínio geométrico e a ampliação do repertório matemático dos alunos.

**Palavras-chave:** Geometria euclidiana. Geometria inversiva. Inversão Geométrica. Retas. Círculos. Aplicações. Didática. Vestibulares. Ensino médio.

# Abstract

This dissertation provides an in-depth study of inversive geometry, a mathematical field with significant theoretical and practical appeal. It begins with the formal definition and fundamental properties of inversion, addressing key transformations such as the inversion of lines and circles, complemented by specific cases illustrating their applications.

On a practical level, the study explores the use of inversive geometry in solving complex problems, with a focus on mathematics olympiads, where its applicability proves particularly effective.

Additionally, a four-lesson didactic sequence is proposed, aimed at introducing and adapting the topic to the high school context. This approach seeks to make advanced concepts accessible, fostering geometric reasoning and broadening students' mathematical repertoire.

**Keywords:** Euclidean geometry. Inversive geometry. Lines. Circle. Applications. Didactic. Entrance exams. High school

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Semelhança de Triângulos . . . . .	16
Figura 2 – Caso L.L.L. . . . .	17
Figura 3 – Caso L.A.L . . . . .	17
Figura 4 – Caso A.A. . . . .	17
Figura 5 – Triângulo retângulo . . . . .	18
Figura 6 – Ângulo Central . . . . .	19
Figura 7 – Ângulo inscrito . . . . .	19
Figura 8 – Ângulo excêntrico interno . . . . .	20
Figura 9 – Ângulo excêntrico externo . . . . .	20
Figura 10 – Caso 1 . . . . .	21
Figura 11 – Caso 2 . . . . .	22
Figura 12 – Caso da tangente . . . . .	22
Figura 13 – Jacob Steiner . . . . .	24
Figura 14 – Inversão respeito de $\mathcal{C}(O, r)$ . . . . .	24
Figura 15 – Triângulos semelhantes . . . . .	26
Figura 16 – Inversão da reta $\ell$ que não passa pelo centro da inversão . . . . .	28
Figura 17 – Reta exterior a circunferência . . . . .	28
Figura 18 – Reta tangente a circunferência . . . . .	29
Figura 19 – Reta secante a circunferência . . . . .	29
Figura 20 – Inversão da reta que passa pelo centro de inversão . . . . .	29
Figura 21 – Inversão da circunferência $\Gamma$ . . . . .	31
Figura 22 – Inversão de circunferências exteriores . . . . .	31
Figura 23 – Inversão de circunferências Secantes . . . . .	31
Figura 24 – Inversão em circunferências ortogonais . . . . .	32
Figura 25 – Inversão de circunferências tangentes . . . . .	33
Figura 26 – Circunferências ortogonais . . . . .	33
Figura 27 – Ângulo entre duas circunferências . . . . .	34
Figura 28 – Conservação dos ângulos entre dois objetos, sendo um deles uma reta que passa pelo centro da inversão . . . . .	35
Figura 29 – Conservação dos ângulos entre retas . . . . .	36
Figura 30 – Teorema de Ptolomeu . . . . .	37
Figura 31 – Demonstração Teorema de Ptolomeu . . . . .	38
Figura 32 – Pentágono Inscrito . . . . .	40
Figura 33 – Figura da aplicação 2 . . . . .	41
Figura 34 – Inversão dos círculos . . . . .	42
Figura 35 – Solução da aplicação 2 . . . . .	42

Figura 36 – Continuação da solução da aplicação 2 . . . . .	43
Figura 37 – Aplicação 3 - OBM - Nível 2 - 2019 . . . . .	44
Figura 38 – Aplicação 3 - Solução . . . . .	45
Figura 39 – Lema 3.5 . . . . .	45
Figura 40 – Aplicação 4 . . . . .	46
Figura 41 – Aplicação 4 - Solução . . . . .	47
Figura 42 – Aplicação 5 . . . . .	47
Figura 43 – Aplicação 5 - solução . . . . .	48
Figura 44 – Construção por meio de régua e compasso . . . . .	50
Figura 45 – Construção do inverso de um ponto . . . . .	51
Figura 46 – 1º passo: Construa uma circunferência de raio qualquer. . . . .	52
Figura 47 – 2º passo: Construa uma reta que passa pelo centro da circunferência. . . . .	53
Figura 48 – 3º passo: Construa uma reta exterior a circunferência que passa pela reta anteriormente construída. . . . .	53
Figura 49 – 4º passo: Clique na reta em seguida no botão inversão e posteriormente clique na circunferência, o círculo interior é a inversão da reta. . . . .	53
Figura 50 – Após concluir os passos 1º e 2º, construa outro círculo com qualquer medida de raio. . . . .	54
Figura 51 – Após construir o círculo, clique no mesmo e posteriormente clique no botão de inversão. O círculo inverso irá aparecer. . . . .	54
Figura 52 – Circunferências tangentes . . . . .	55
Figura 53 – Circunferências secantes . . . . .	55

# Lista de abreviaturas e siglas

OBM	Olimpíadas Brasileira de Matemática
ITA	Instituto Tecnológico de Aeronáutica
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

# Sumário

	Introdução . . . . .	14
1	<b>CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA</b> . . . . .	15
1.1	Semelhança de Triângulos . . . . .	15
1.2	Relações Métricas no Triângulo Retângulo . . . . .	18
1.3	Ângulos na Circunferência . . . . .	19
1.4	O Teorema das Cordas e Potência de Pontos . . . . .	21
2	<b>GEOMETRIA INVERSIVA</b> . . . . .	23
2.1	Definição e Construção . . . . .	24
2.2	Propriedade Fundamental . . . . .	25
2.3	A inversão de retas . . . . .	27
2.4	Inversão de Circunferências . . . . .	30
2.5	A Inversão e os Ângulos . . . . .	34
3	<b>APLICAÇÕES DA GEOMETRIA INVERSIVA</b> . . . . .	37
3.1	O Teorema de Ptolomeu e Suas Aplicações . . . . .	37
3.2	Aplicação 2 . . . . .	41
3.3	Aplicação 3 - Problema de Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível 2 . . . . .	44
3.4	Aplicação 4 . . . . .	45
3.5	Aplicação 5 . . . . .	47
4	<b>SEQUÊNCIA DIDÁTICA</b> . . . . .	49
4.1	1ª Aula: Conceitos básicos de geometria inversiva . . . . .	49
4.1.1	Construção do inverso de um ponto . . . . .	50
4.2	2ª Aula: Construção do inverso de uma reta e um círculo . . . . .	51
4.2.1	Construção da inversão de uma reta no GeoGebra: . . . . .	52
4.2.2	Construção da inversão do círculo no GeoGebra: . . . . .	53
4.3	3ª Aula: Aplicações de problemas de olimpíadas de matemática . . . . .	55
4.4	4ª Aula: Atividade avaliativa . . . . .	57
	Conclusão . . . . .	60
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	61

# Introdução

O ensino da geometria acompanha toda a vida escolar do aluno do ensino básico, desde seu primeiro contato, conhecendo figuras concretas até o ensino dos conceitos elementares da geometria euclidiana, passando para a geometria analítica. No entanto o conhecimento de geometria que os estudantes obtém no ensino básico se limita apenas a geometria euclidiana estabelecida no currículo escolar e nada se trabalha com esses alunos sobre outros tópicos importantes desta geometria.

Uma dessas áreas de conhecimento é a geometria inversiva que, ao se pensar no contexto histórico é um estudo recente visto que data do século XIX, criada pelo matemático suíço Jacob Steiner (1796 - 1863). Esse trabalho serviu como base para a resolução de problemas que até então não poderiam ser resolvidos com os resultados conhecidos. Um desses problemas é o conhecido problema dos três círculos de Apolônio que propõe encontrar um círculo tangente a três outros círculos, podendo estes ser degenerados em retas (círculo de raio infinito) ou pontos (círculo de raio zero), veja [Bibliografia]. Para outros mostrou-se uma ferramenta eficaz para resolver problemas de olimpíadas matemáticas e resultados conhecidos da geometria como por exemplo o teorema de Ptolomeu que estabelece a relação entre os quatro lados e duas diagonais de um quadrilátero cíclico.

Desse modo, de acordo com OLIVEIRA P.M.(2007, p.76)

"as bases da geometria inversiva, tem apresentado novas perspectivas sobre o que é a geometria, combatendo mesmo preceitos firmados de definições estanques que limitam a capacidade de explorar o conhecimento."

Diante do exposto por se tratar de um assunto que está fora da base curricular obrigatória e por se tratar de um conceito elementar no campo da Matemática e, simultaneamente, possibilitar uma abordagem didática acessível, a geometria inversiva configura-se como uma temática propícia ao aprofundamento dos estudos geométricos, tanto do ponto de vista teórico quanto pedagógico, fazendo com que o aluno desperte seu interesse para novas descobertas no ramo da matemática, assim como a geometria inversiva tem um importância na preparação de alunos que tem interesse em participar de olimpíadas de matemática no Brasil e pelo mundo, como também alunos que tem objetivo em serem aprovados em concursos de academias militares brasileiras, que cobram um nível de conhecimento bem além do que é ensinado no currículo básico.

Esta dissertação tem como principal objetivo auxiliar professores de ensino médio que tem interesse em trabalhar o conteúdo da geometria inversiva nas suas aulas, proporcionando um maior acesso ao conhecimento historicamente produzido aos seus discentes.

Especificamente iremos fazer uma introdução de conteúdos da geometria euclidiana plana necessários para o aprendizado da geometria inversiva, como: semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, ângulos na circunferência e o teorema das cordas e ponto potência. Em seguida daremos início ao estudo da geometria inversiva, trazendo sua definição e propriedades básicas, seguindo com a inversão de retas e circunferências, seus casos e suas propriedades. O trabalho segue com as aplicações, sendo cinco aplicações retiradas de olimpíadas nacionais e internacionais e do concurso do ITA. Finalizaremos esta dissertação trazendo um modelo de aula, voltado para alunos do ensino médio, mostrando como trabalhar a geometria inversiva, utilizando recursos como régua e compasso, GeoGebra, sugestões de aplicações e um modelo de exercício avaliativo para ser aplicado com os alunos.

Desta forma, nosso estudo está dividido em três partes. Na primeira, temos a fundamentação teórica, na segunda as aplicações e a terceira parte a sequência didática.

# 1 Conceitos Básicos de Geometria Euclidiana Plana

A geometria plana oferece um terreno fértil para a investigação de propriedades fundamentais das figuras, especialmente dos triângulos e das circunferências. Neste capítulo, exploramos conceitos interligados que desempenham papéis centrais tanto na resolução de problemas geométricos quanto na formulação de teoremas mais avançados.

Iniciaremos com a semelhança de triângulos, uma ferramenta poderosa que estabelece uma correspondência proporcional entre lados e ângulos de triângulos semelhantes. Analisaremos os critérios que garantem essa relação e discutiremos como aplicá-los em contextos variados.

Em seguida, mergulharemos nas relações métricas no triângulo retângulo, destacando a interação entre os lados e as alturas desse triângulo especial. Esses resultados, além de fornecerem ideias sobre as propriedades do triângulo retângulo, são amplamente utilizados em problemas práticos e teóricos.

Por fim, abordaremos o conceito de potência de ponto, que conecta propriedades métricas dos triângulos com as relações estabelecidas pelas circunferências. Nesse contexto, o teorema das cordas será tratado como um caso particular, oferecendo um elo elegante entre retas e círculos.

Esses tópicos foram cuidadosamente selecionados de acordo com [6], [2] e [1] para fornecer uma base teórica robusta, necessária para o estudo da geometria inversiva. A partir desse entendimento, poderemos abordar suas propriedades com confiança e aplicá-las em contextos práticos, expandindo nossa compreensão das transformações geométricas e de suas aplicações em diversas áreas do conhecimento.

## 1.1 Semelhança de Triângulos

**Definição 1.1.** Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja constantes.

Na prática dois triângulos semelhantes são ampliação ou redução um do outro, translação e reflexão um do outro.

Observe na figuras 1, os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes, e seus vértices

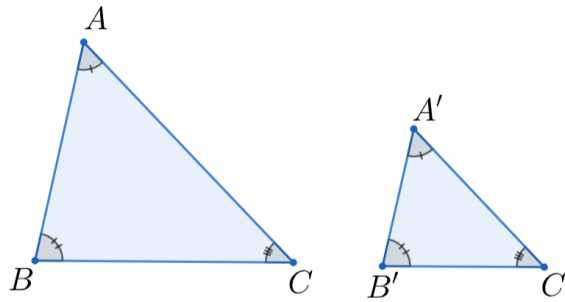


Figura 1 – Semelhança de Triângulos

$A$  e  $A'$ ,  $B$  e  $B'$  e  $C$  e  $C'$  são correspondentes. Desta forma os ângulos correspondentes de cada vértice não congruente  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$  e  $\hat{C} = \hat{C}'$ , e existe uma razão de semelhança  $k$  entre os lados correspondentes de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$$

e  $k$  é um real positivo.

Escrevemos  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  para denotarmos que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A'$ ,  $B \leftrightarrow B'$  e  $C \leftrightarrow C'$ .

Veremos a seguir três proposições que estabelecem as condições suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes, essas proposições também são conhecidas como casos de semelhança de triângulos. Suas demonstrações são consequências do teorema de Tales e fica a cargo do leitor.

**Proposição 1.2.** *Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  triângulos no plano, tais que*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

*Então  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A'$ ,  $B \leftrightarrow B'$  e  $C \leftrightarrow C'$ . Em particular,  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$  e  $\hat{C} = \hat{C}'$ . Esse caso de semelhança é conhecido como caso Lado - Lado - Lado (L.L.L.).*

**Proposição 1.3.** *Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  triângulos no plano, tais que*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \quad e \quad \hat{B} = \hat{B}'.$$

*Então  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A'$ ,  $B \leftrightarrow B'$  e  $C \leftrightarrow C'$ . Em particular  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{C} = \hat{C}'$  e  $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$ . Esse caso de semelhança é conhecido como caso Lado - Ângulo - Lado (L.A.L.).*

**Proposição 1.4.** *Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  triângulos do plano, tais que*

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad e \quad \hat{B} = \hat{B}'.$$

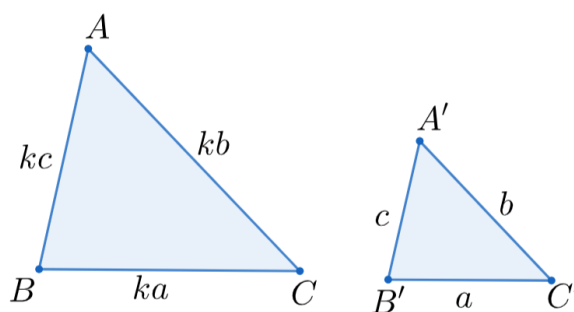


Figura 2 – Caso L.L.L.

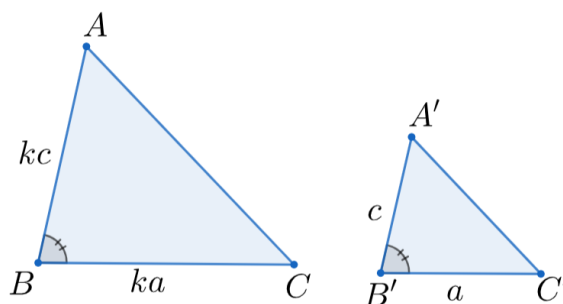


Figura 3 – Caso L.A.L

Então  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A'$ ,  $B \leftrightarrow B'$  e  $C \leftrightarrow C'$ .

Em Particular

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Esse caso de semelhança é conhecido como caso Ângulo - Ângulo (A.A.).

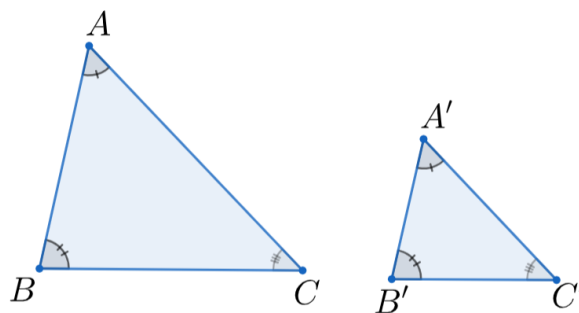


Figura 4 – Caso A.A.

As proposições 1.2; 1.3 e 1.4 estão demonstradas em [1].

## 1.2 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Como consequência dos casos de semelhança, vistos na seção anterior, estabelecemos as seguintes proposições.

**Proposição 1.5.** *Em todo triângulo retângulo, a altura do vértice do ângulo reto é a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

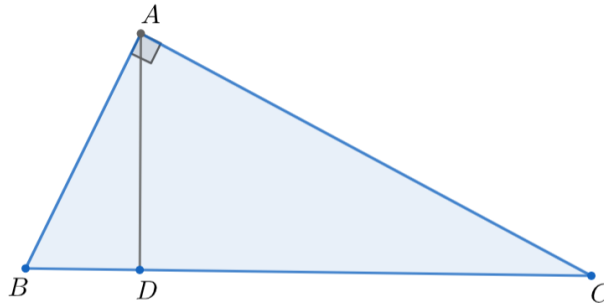


Figura 5 – Triângulo retângulo

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{DC}$$

**Proposição 1.6.** *Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento do cateto é igual ao produto entre o comprimento de sua projeção sobre a hipotenusa e o comprimento da hipotenusa.*

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BC}$$

ou

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{BC}$$

**Teorema 1.7 (Pitágoras).** *Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

As proposições 1.5 e 1.6 e o teorema 1.7 estão demonstrados em [1].

### 1.3 Ângulos na Circunferência

**Definição 1.8 (ângulo central).** O ângulo central relativo a uma circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. Dizemos que  $\widehat{AB}$  é o arco compreendido por  $\angle AOB$

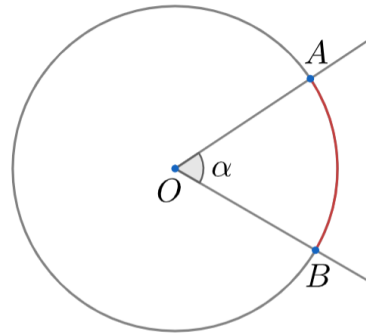


Figura 6 – Ângulo Central

**Definição 1.9.** A medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente.

$$m(\widehat{AB}) = \alpha$$

**Definição 1.10 (ângulo inscrito).** O ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela.

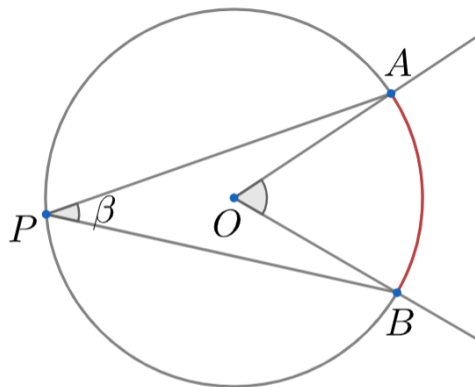


Figura 7 – Ângulo inscrito

Na figura  $\angle APB$  é o ângulo inscrito que compreende o arco  $\widehat{AB}$

**Teorema 1.11.** *Todo ângulo inscrito em um círculo tem a metade da medida do arco correspondente.*

$$\beta = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$

**Definição 1.12 (ângulo excêntrico interno).** Se duas cordas se cortam em um ponto interior a uma circunferência, distinto do centro, então qualquer um dos ângulos que elas formam é chamado ângulo excêntrico interno.

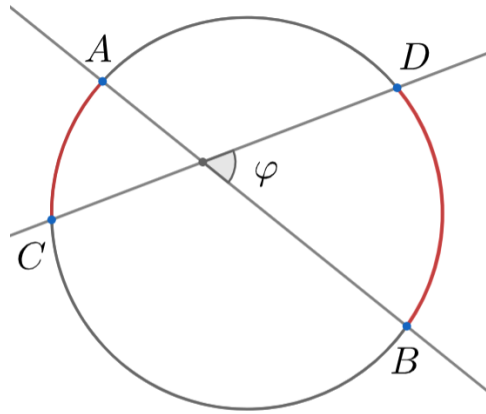


Figura 8 – Ângulo excêntrico interno

**Teorema 1.13.** A medida do ângulo excêntrico interior é dado por

$$\varphi = \frac{m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BD})}{2}$$

**Definição 1.14 (ângulo excêntrico externo).** Se com origem num ponto exterior a uma circunferência traçamos duas semirretas, ambas secantes à circunferência, ou ambas tangentes ou uma secante e a outra tangente, então estas semirretas formam um ângulo que é chamado ângulo excêntrico externo.



Figura 9 – Ângulo excêntrico externo

**Teorema 1.15.** A medida do ângulo excêntrico externo é dado por

$$\gamma = \frac{m(\widehat{BD}) - m(\widehat{AC})}{2}$$

As demonstrações dos teoremas 1.11; 1.13 e 1.15 estão em [2]

## 1.4 O Teorema das Cordas e Potência de Pontos

Nesta seção, serão apresentadas duas proposições fundamentais relacionadas à potência de um ponto, conceitos que desempenham um papel crucial na demonstração de teoremas significativos da geometria inversiva.

**Definição 1.16.** Seja  $\mathcal{C}$  uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ , e seja  $P$  um ponto qualquer do plano de  $\mathcal{C}$ . Definimos a potência de um ponto  $P$  em relação a uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  por

$$Pot_{(\mathcal{C})}P = \overline{PO}^2 - r^2.$$

**Proposição 1.17.** *Sejam  $A, B, C, D$  e  $P$ , pontos distintos no plano e seja  $P$  o ponto do plano tal que:*

- i)  $P$  é a interseção dos segmentos  $AB$  e  $CD$ .*
- ii)  $P$  pertence à interseção do prolongamento dos segmentos.*

então

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

A proposição 1.17 pode ser dividida em dois casos. No primeiro caso o ponto  $P$  é interior a circunferência que contém o quadrilátero  $A, B, C, D$  inscrito. No segundo caso o ponto  $P$  é exterior interior a circunferência que contém o quadrilátero  $A, B, C, D$  inscrito (Ver figura 10 e 11).

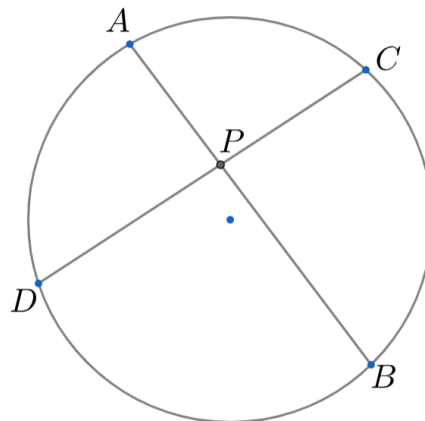


Figura 10 – Caso 1

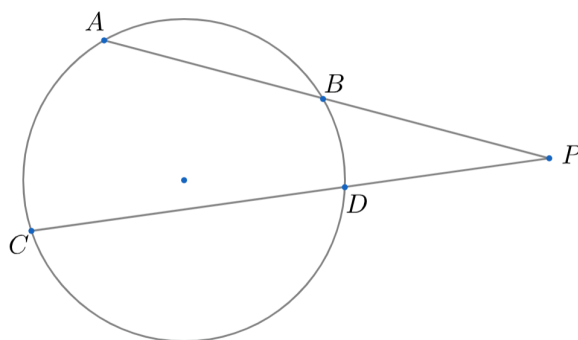


Figura 11 – Caso 2

**Proposição 1.18.** *Se  $A, B, C$  e  $P$  são pontos distintos no plano, com  $A, B$  e  $P$  colineares e  $A, B$  e  $C$  não colineares, então*

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$$

*se e somente se o círculo circunscrito ao triângulo  $ABC$  for tangente à reta  $\overleftrightarrow{PC}$  em  $C$ .*

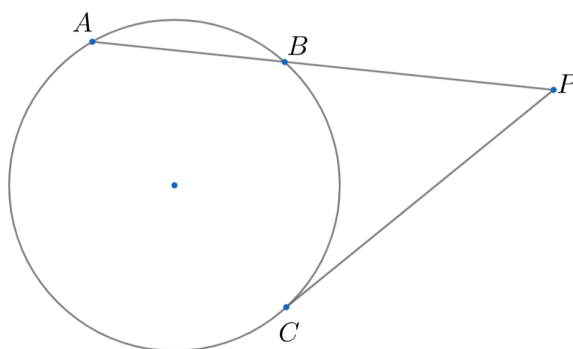


Figura 12 – Caso da tangente

As demonstrações das proposições 1.17 e 1.18 são encontradas em [2]

## 2 Geometria Inversiva

A geometria inversiva é um fascinante ramo da matemática que estuda transformações baseadas na inversão em circunferências. Surgida como uma abordagem aprofundada da geometria euclidiana, ela permite analisar figuras geométricas sob uma nova perspectiva, superando certas limitações clássicas e revelando conexões mais profundas entre os elementos do plano.

Embora o conceito de inversão em si não tenha sido formalmente utilizado na Antiguidade, muitos fundamentos da geometria que a embasa podem ser traçados até os gregos. Matemáticos como Euclides e Apolônio de Perga estabeleceram noções fundamentais sobre circunferências, tangências e construções geométricas que mais tarde se tornariam centrais para a geometria inversiva.

O surgimento da geometria inversiva como um campo específico ocorre no século XIX, durante um período de intensa expansão dos horizontes matemáticos, quando os fundamentos da geometria euclidiana começaram a ser desafiados. A inversão em círculos foi introduzida formalmente por Jules Antoine Lissajous em 1831, mas foi Jacob Steiner (1796–1863) quem primeiro a utilizou de maneira sistemática para resolver problemas geométricos complexos, percebendo seu potencial como ferramenta de simplificação e generalização.

Contudo, foi com o matemático alemão August Ferdinand Möbius (1790–1868) que a geometria inversiva ganhou maior profundidade. Möbius introduziu conceitos ligados à transformação e à dualidade no plano, influenciando profundamente o campo. Paralelamente, Joseph Liouville e Bernhard Riemann também contribuíram para o entendimento das transformações conformes e da relação entre geometria e análise complexa.

A geometria inversiva consolidou-se como uma teoria poderosa com os trabalhos de William Thomson (Lord Kelvin) e Joseph Liouville, principalmente motivados por aplicações físicas. A inversão mostrou-se extremamente útil na solução de problemas de potencial na física matemática, como a eletrostática e a hidrodinâmica, em que simetrias e preservação de ângulos desempenham papéis fundamentais.

Esse legado deixado por Steiner nos possibilitou não só resolvermos esses problemas, como pavimentou as bases do que conhecemos hoje como Geometria Inversiva.

Este capítulo se dedica à exploração detalhada da geometria inversiva, partindo de suas definições fundamentais até a análise de suas propriedades mais marcantes. Além disso, abordaremos exemplos que ilustram como essa teoria pode ser aplicada para resolver problemas clássicos e modernos da matemática, enriquecendo o campo da geometria e



Figura 13 – Jacob Steiner

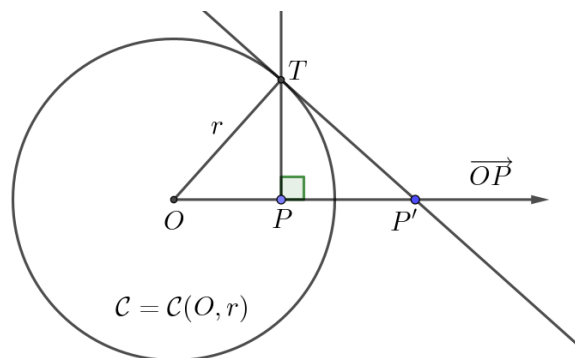
suas aplicações. Nos fundamentaremos teoricamente para desenvolver esse capítulo em [8], [4], [9] e [7].

## 2.1 Definição e Construção

**Definição 2.1.** Dada uma circunferência  $\mathcal{C}$  de centro  $O$  e raio  $r$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ , uma inversão respeito de  $\mathcal{C}$  é a transformação que faz corresponder, a cada ponto  $P$  do plano, diferente de  $O$ , o ponto  $P'$  que se encontra na semirreta  $\overrightarrow{OP}$  e que satisfaz

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$

**Construção 2.2 (geométrica da inversão).** Seja  $P$  um ponto interior de  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ , distinto de  $O$ . Seja  $T$  um dos pontos da interseção de  $\mathcal{C}$  com a perpendicular à semirreta  $\overrightarrow{OP}$ , que passa por  $P$ . Então,  $P'$  é a interseção da semirreta  $\overrightarrow{OP}$  com a reta tangente a  $\mathcal{C}(O, r)$  em  $T$ .

Figura 14 – Inversão respeito de  $\mathcal{C}(O, r)$

Com efeito, temos que os triângulos  $\triangle OPT$  e  $\triangle OTP'$  são semelhantes, por serem retângulos com um ângulo em comum, portanto

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP'}} \quad (\overline{OT} = r),$$

Isto é,  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ .

Reciprocamente, se  $P'$  é um ponto exterior a  $\mathcal{C}$ , então sua inversão em relação a  $\mathcal{C}$  é  $(P')' = P$ . De fato, considere uma reta tangente a  $\mathcal{C}$  passando por  $P'$  e denote por  $T$  tal ponto de tangência. O ponto  $(P')'$  será o pé da perpendicular baixada de  $T$  para a semirreta  $\overrightarrow{OP'}$ . Daí, pela construção acima, obtemos  $(P')' = P$ .

Observamos que, segundo esta transformação, a inversão respeito à circunferência  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ , os pontos da região interior de  $\mathcal{C}$  tem imagem um ponto da região exterior  $\mathcal{C}$  e reciprocamente. Os pontos da circunferência permanecem invariante, isto é, são pontos fixos pela transformação. Ainda, está transformação é uma bijeção sobre o plano menos o centro da circunferência, ponto  $O$ .

Considerando a inversão em relação a um círculo  $\mathcal{C}$  de centro  $O$ , e que  $P'$  é o inverso de  $P$  e logicamente  $P$  é o inverso de  $P'$ , temos as seguintes propriedades:

**Propriedade 2.3.** As inversões são involutivas. Ou seja, a composição de inversões é a aplicação identidade, isto é,  $\phi \circ \phi = Id$

## 2.2 Propriedade Fundamental

**Propriedade 2.4 (fundamental).** Se  $A, B$  e o centro de inversão  $O$  não são colineares, e sejam  $A', B'$  os respectivos inversos de  $A$  e  $B$  com relação a circunferência  $\mathcal{C}$  de centro  $O$  e raio  $r$ , então os triângulos  $\triangle OAB$  e  $\triangle OB'A'$  são semelhantes e os pontos  $A, B, B'$  e  $A'$  são concíclicos.

*Demonstração.* Considere a circunferência  $\mathcal{C}$  de centro  $O$  e raio  $r$ , temos que pela definição de inversão:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$$

e

$$\overline{OB} \cdot \overline{OB'} = r^2$$

Logo, temos que:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} \Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA'}} \quad (2.1)$$

observe que nos triângulos  $\triangle OAB$  e  $\triangle OB'A'$  os ângulos  $\angle AOB$  e  $\angle B'OA'$  são congruentes e os lados  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB'}$  são proporcionais assim como  $\overline{OB}$  e  $\overline{OA'}$  também são proporcionais

por 2.1. Desta forma, pela proposição 1.3, os triângulos  $\triangle OAB$  e  $\triangle OB'A'$  são semelhantes.

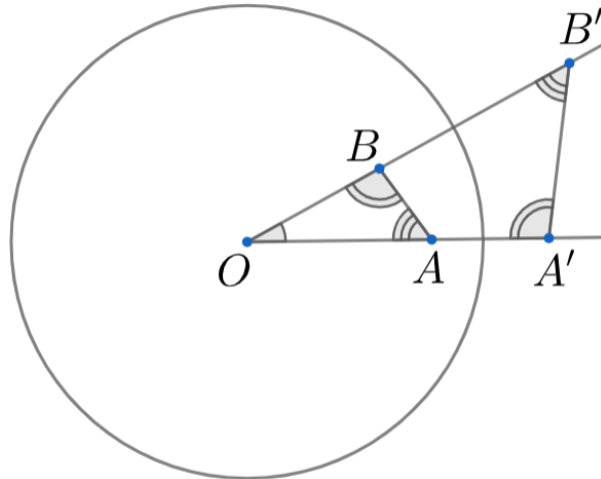


Figura 15 – Triângulos semelhantes

Observe que os ângulos  $\angle AA'B'$  e  $\angle ABB'$  são suplementares, logo os vértices  $A, B, B'$  e  $A'$  estão inscritos em uma mesma circunferência.

□

**Definição 2.5 (Razão dupla generalizada).** Dados quatro pontos arbitrários  $A, B, C, D$  do plano, definimos a razão dupla generalizada por:

$$[AB, CD] = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{AD} \cdot \overline{BD}}$$

**Propriedade 2.6.** As inversões conservam a razão dupla generalizada.

*Demonstração.* Consideramos a inversão de centro  $O$  e raio  $r$ , e denotemos por  $A', B', C', D'$  respectivamente as transformações dos pontos  $A, B, C, D$ . Teremos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{OC'}} \cdot \frac{\overline{OD'}}{\overline{A'D'}}$$

Pela propriedade 2.4

Mas igualmente

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{OC'}} \cdot \frac{\overline{OD'}}{\overline{B'D'}}$$

e portanto

$$[AB, CD] = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{OC'}} \cdot \frac{\overline{OD'}}{\overline{A'D'}} \cdot \frac{\overline{OC'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{B'D'}}{\overline{OD'}} = \frac{\overline{A'C'} \cdot \overline{B'D'}}{\overline{A'D'} \cdot \overline{B'C'}} = [A'B', C'D']$$

□

## 2.3 A inversão de retas

Nesta seção, exploraremos um dos conceitos centrais da geometria inversiva: a inversão de retas. Mostraremos o resultado de inverter uma reta em relação a uma circunferência e quais as consequências desta transformação.

Analisaremos também os principais casos de inversão envolvendo retas, um aspecto fundamental da geometria inversiva.

A inversão geométrica, definida como uma transformação que mapeia pontos em relação a um círculo fixo, apresenta propriedades notáveis, como a preservação de ângulos e a capacidade de transformar retas e circunferências de maneira específica. No caso particular das retas, a inversão revela uma simetria intrigante: dependendo de sua relação com o círculo inversor, uma reta pode ser mapeada em outra reta ou em uma circunferência. Esta seção foi fundamentado teoricamente por [8] e [4].

**Proposição 2.7 (Inversão de reta que passa pelo centro de inversão).** *A inversão de uma reta que passa pelo centro de inversão é fixa. Ou seja, se  $\ell$  é uma reta que passa pelo centro de  $O$  da inversão, então  $(\ell - \{O\})' = \ell - \{O\}$*

*Demonstração.* De fato, se  $P \in \ell$ ,  $P \neq O$ , então a semirreta  $\overrightarrow{OP}$  está contida em  $\ell$  e como  $P' \in \overrightarrow{OP}$ , segue que  $P' \in \ell$ . Convencionando-se que "o infinito" do plano, denotado pelo símbolo  $\infty$ , pertence a toda reta. Teremos, o inverso de  $O$  é o  $\infty$  ( $O' = \infty$ ). Come esta convenção, temos que  $\ell' = \ell$ . □

**Teorema 2.8 (Inversão de reta).** *O inverso de uma reta que não passa pelo centro de inversão, é uma circunferência que passa pelo centro de inversão. Adicionalmente, a reta tangente à inversão da reta no centro da circunferência de inversão é paralela à reta.*

*Demonstração.* A seguir vamos a inverter a reta  $\ell$  em relação à circunferência  $\mathcal{C}(O, r)$ , tal inversão a denotaremos por  $\ell'$ .

Por outro lado, quando a reta  $\ell$  não passa pelo centro de inversão, é transformada em uma circunferência com diâmetro  $OP'$ , sendo  $P$  a projeção ortogonal de  $O$  sobre  $\ell$  e  $P'$  o inverso de  $P$ .

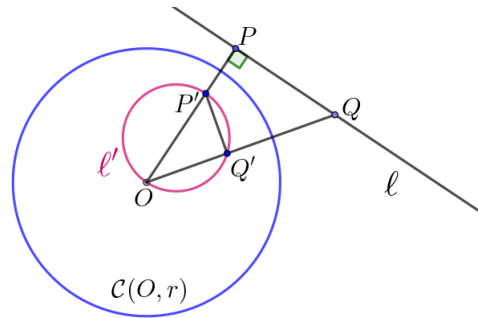


Figura 16 – Inversão da reta  $\ell$  que não passa pelo centro da inversão

Com efeito, se consideramos qualquer outro ponto  $Q$  da reta  $\ell$ , diferente de  $P$ , com inverso  $Q'$ , teremos

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} \Rightarrow \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ'}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}.$$

Esta última relação, junto com  $\angle P'OQ' = \angle QOP$ , fornece que os triângulos  $OPQ$  e  $OQ'P'$  são semelhantes. Daí, o ângulo  $OQ'P'$  é reto, pois é congruente ao ângulo reto  $OPQ$ , resultando que  $Q'$  está na circunferência de diâmetro  $OP'$ . Ainda, sendo  $OP'$  diâmetro de  $\ell'$  com  $P$  a projeção ortogonal de  $O$  sobre  $\ell$ , segue que a reta tangente a  $\ell'$  em  $O$  é paralela a  $\ell$ .  $\square$

### Casos de inversão 2.9 (de retas).

#### 1. Reta exterior à circunferência de inversão

Neste primeiro caso, a inversão da reta  $a$  exterior a circunferência de inversão  $\mathcal{C}$  e raio  $r$  é uma circunferência  $\mathcal{C}'$  interior a circunferência  $\mathcal{C}$  que passa pelo centro de inversão  $O$  e não intersecta a reta  $a$ .

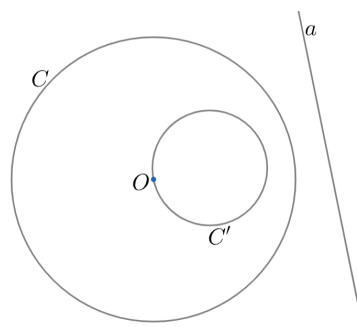


Figura 17 – Reta exterior a circunferência

#### 2. Reta tangente à circunferência de inversão

Tomando o caso em que a reta  $a$  é tangente a circunferência de inversão  $\mathcal{C}$  e raio  $r$  em  $A$ , a inversão da reta  $a$  é uma circunferência  $\mathcal{C}'$  tangente internamente a  $\mathcal{C}$  em  $A$ .

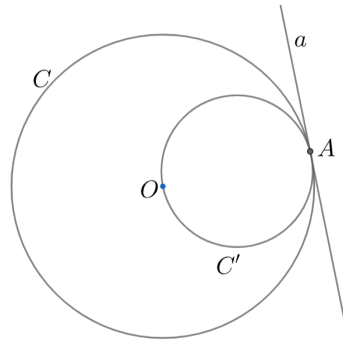


Figura 18 – Reta tangente a circunferência

### 3. Reta secante à circunferência de inversão

Dado a reta  $a$  secante a circunferência  $C$  de raio  $r$  nos pontos  $A$  e  $B$ , a inversão de  $a$  com relação a  $C$  é uma circunferência  $C'$  secante a  $C$  e a  $a$  em  $A$  e  $B$ .

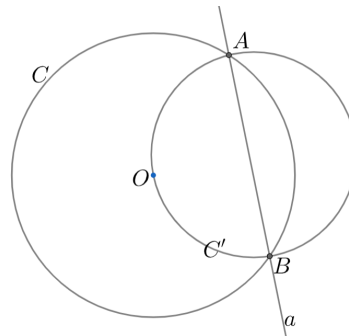


Figura 19 – Reta secante a circunferência

### 4. Inversão de reta que passa pelo centro de inversão

O inverso de uma reta que passa pelo centro de inversão é a própria reta.

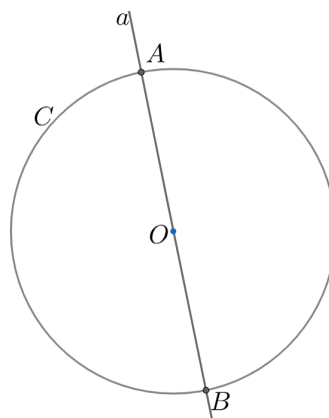


Figura 20 – Inversão da reta que passa pelo centro de inversão

## 2.4 Inversão de Circunferências

A seção mostra o resultado de inverter uma circunferência que não passa pelo centro de inversão e seus resultados. Demonstraremos o teorema de inversão de circunferência e faremos uma análise dos principais casos de inversão.

A inversão, enquanto transformação geométrica, desempenha um papel fundamental na compreensão de como figuras são mapeadas e alteradas em relação a um círculo fixo, chamado círculo de inversão. Especificamente, a análise será direcionada aos efeitos dessa transformação sobre circunferências, abrangendo diferentes configurações geométricas que destacam propriedades essenciais da inversão, como preservação do ângulo entre curvas e a transformação de figuras em seus correspondentes inversivos.

Este estudo não apenas exemplifica a aplicação das propriedades teóricas da inversão, mas também ilustra como tais transformações podem ser utilizadas para resolver problemas geométricos de forma elegante e simplificada. Casos como circunferências concêntricas ao círculo de inversão, circunferências externas ou tangentes, e situações em que a circunferência de inversão passa pelo centro de outras figuras serão discutidos em detalhe.

A análise destes casos permitirá consolidar a compreensão da inversão como uma ferramenta poderosa e versátil no estudo das relações geométricas, estabelecendo pontes entre a geometria euclidiana clássica e técnicas mais avançadas de manipulação de figuras geométricas. Esta seção, portanto, assume uma posição central na investigação da geometria inversiva, oferecendo uma base sólida para aplicações futuras e aprofundamentos teóricos. A base teórica para construção desta seção está em [4], [5] e [3].

**Teorema 2.10 ( Inversão de circunferência).** *O inverso de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão é também uma circunferência que não passa pelo centro de inversão. Adicionalmente, os centros das três circunferências envolvidas são colineares.*

*Demonstração.* Consideremos a inversão relativa à circunferência  $\mathcal{C}(O, r)$ . Seja  $\Gamma$  uma circunferência que não passa por  $O$  e seja  $AB$  um diâmetro de  $\Gamma$  tal que a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  passa pelo centro da inversão. Os pontos  $A'$  e  $B'$  denotam os inversos de  $A$  e  $B$ , respectivamente. Sejam  $P \in \Gamma$  e  $P'$  seu inverso. Pela Proposição 2.4, obtemos  $\angle OBP = \angle OP'B'$  e  $\angle OAP = \angle OP'A'$ . Portanto,

$$\angle ABP = \angle OP'B' \quad \text{e} \quad \angle BAP = \angle PP'A'.$$

Dai, segue que  $\angle A'P'B' = \angle APB = 90^\circ$ . Isto fornece que  $P'$  está sobre circunferência de diâmetro  $A'B'$ . Finalmente, como os pontos  $O, A, B, A'$  e  $B'$  são colineares, segue que os centros das três circunferências envolvidas são colineares.  $\square$

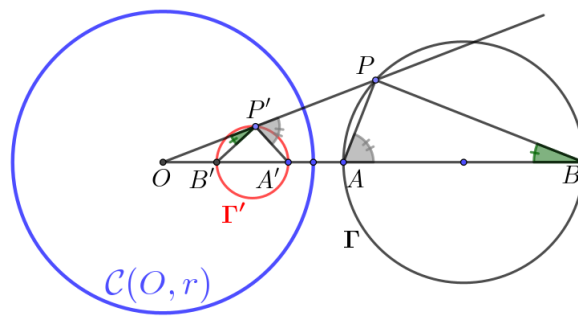


Figura 21 – Inversão da circunferência  $\Gamma$

**Casos de inversão 2.11 (de Circunferência).**

1. **Inversão de Circunferências Exteriores** Seja a circunferência  $\lambda$  de centro  $O$  e raio  $r$ , e seja  $\phi$  uma circunferência que é exterior a  $\lambda$ . A inversa de  $\phi$  com relação a  $\lambda$  é uma circunferência  $\varphi$  que é interior a  $\lambda$  e não passa pelo centro de inversão.

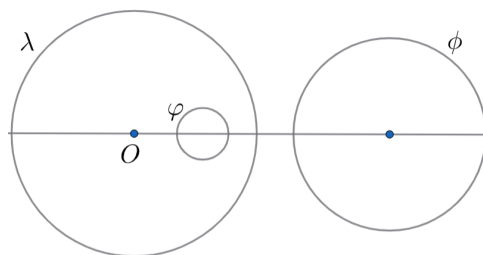


Figura 22 – Inversão de circunferências exteriores

2. **Inversão de Circunferências Secantes**

Seja a circunferência  $\lambda$  de centro  $O$  e raio  $r$ , e seja  $\phi$  uma circunferência que não passa pelo centro  $O$  e é secante a  $\lambda$  nos pontos  $A$  e  $B$ . A inversa de  $\phi$  com relação a  $\lambda$  é uma circunferência  $\varphi$  que também passa pelos pontos secantes entre  $\lambda$  e  $\phi$  que são  $A$  e  $B$ , como mostra a figura.

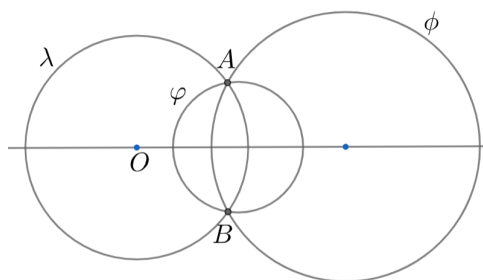


Figura 23 – Inversão de circunferências Secantes

### 3. Inversão de Circunferências Ortogonais

As Circunferências ortogonais estão intimamente relacionadas com a inversão, motivo pelo qual dedicamos uma seção para o seu estudo.

**Definição 2.12.** Duas circunferências secantes são ortogonais quando se cortam formando ângulo reto, ou seja, quando suas tangentes (aos raios) em um dos pontos de intersecção são perpendiculares.

Note que a condição de ortogonalidade das circunferências secantes  $\mathcal{C}(A, r)$  e  $\mathcal{C}(B, s)$  equivale a  $\overline{AB}^2 = r^2 + s^2$ .

**Proposição 2.13.** A inversão de uma circunferência ortogonal à circunferência de inversão é invariante.

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{C}(A, r)$  e  $\mathcal{C}(B, s)$  circunferências ortogonais e seja  $T$  um dos pontos da intersecção dessas circunferências. Se  $P$  e  $P'$  são os pontos de intersecção de uma reta que passa por  $A$  com a circunferência  $\mathcal{C}(B, s)$ , a potencia do ponto  $A$  em relação à circunferência  $\mathcal{C}(B, s)$ , fornece a relação:

$$\overline{AP} \cdot \overline{AP'} = \overline{AT}^2 = r^2$$

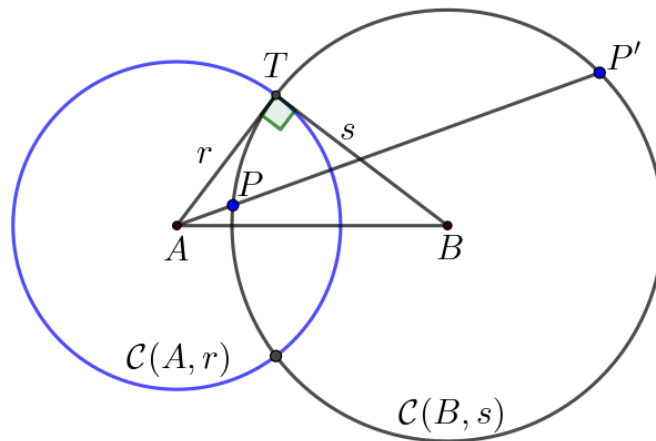


Figura 24 – Inversão em circunferências ortogonais

Isto é, o ponto  $P'$  é o ponto inverso de  $P$  respeito à inversão definida pela circunferência  $\mathcal{C}(A, r)$ . □

### 4. Inversão de Circunferências Tangentes

Seja a circunferência  $\lambda$  de centro  $O$  e raio  $r$ , e seja  $\phi$  uma circunferência que não passa pelo centro  $O$  e é tangente exteriormente a  $\lambda$  no pontos  $A$ . A inversa de  $\phi$  com

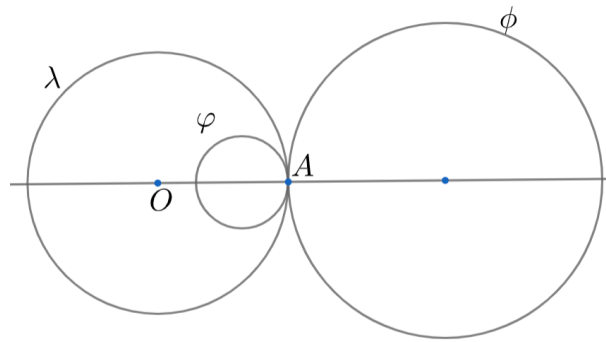


Figura 25 – Inversão de circunferências tangentes

relação a  $\lambda$  é uma circunferência  $\varphi$  que é tangente a  $\lambda$  internamente no ponto  $A$  e tangente a  $\phi$  externamente em  $A$ , como mostra a figura.

Como as inversões são involutivas, se a circunferência  $\phi$  for tangente interna no ponto  $A$  com relação a  $\lambda$ , então a inversa de  $\phi$  com relação a  $\lambda$  será uma circunferência  $\varphi$  tangente a  $\lambda$  em  $A$  exteriormente e tangente a  $\phi$  em  $A$  também exteriormente, como vemos na figura.

**Propriedade 2.14.** Sejam  $P$  e  $P'$  pontos inversos em relação a  $\mathcal{C}$ , e seja  $\tilde{\mathcal{C}}$  uma circunferência qualquer que passe por  $P$  e  $P'$ . Então,  $\mathcal{C}$  e  $\tilde{\mathcal{C}}$  são ortogonais.

*Demonstração.* Considere uma circunferência  $\mathcal{C}$  de centro  $O$  e raio  $r$ . Tomemos ao acaso um ponto  $P \neq O$  que não esteja sobre a circunferência.

Seja  $\tilde{\mathcal{C}}$  uma circunferência qualquer que passe por  $P$  e  $P'$ . Então  $O$  é exterior a  $\tilde{\mathcal{C}}$ , pois se fosse interior, estaria no interior do segmento  $PP'$ , e conseqüentemente entre  $P$  e  $P'$ .

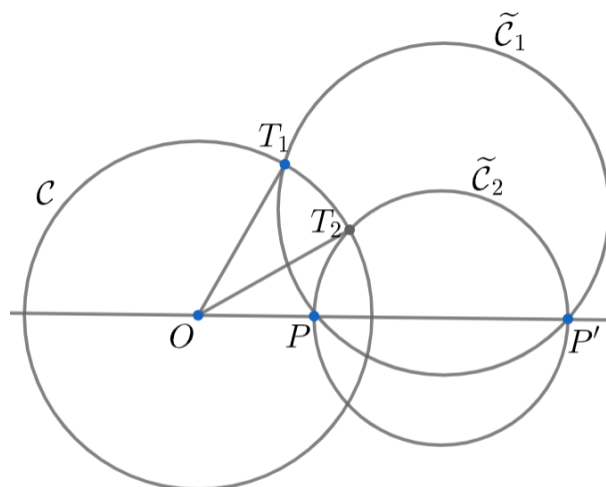


Figura 26 – Circunferências ortogonais

Seja  $Q$  um dos pontos de interseção das circunferências, logo

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}$$

Por outro lado,  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'}$  é a potencia de  $O$  com relação a  $\tilde{\mathcal{C}}$ , portanto

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OT}^2$$

onde  $T$  é o ponto de interseção da tangente à  $\tilde{\mathcal{C}}$  que passa por  $O$  com  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Pelas relações acima, temos que  $T \in \mathcal{C}$  e portanto o raio  $\overline{OT}$  de  $\mathcal{C}$  coincide com a tangente a  $\tilde{\mathcal{C}}$  que passa por  $O$ . Segue portanto que as circunferências são ortogonais.  $\square$

## 2.5 A Inversão e os Ângulos

A seguir, usando a ideia intuitiva que, a tangente a uma curva, quando existe, é a posição limite das secantes, vamos mostrar inicialmente que as inversões preservam ângulos de objetos que se intersectam, sendo um desses objetos uma reta que passa pelo centro da inversão. Também mostraremos que a inversão preserva o ângulo de duas retas que se intersectam e que não passam pelo centro da inversão

**Definição 2.15.** O ângulo entre duas curvas que se intersectam é o menor ângulo formado pelas retas tangentes (quando existem) no ponto de interseção. As curvas são ortogonais, quando esse ângulo é reto. As curvas são tangentes, quando as retas tangentes no ponto de interseção coincidem.

Em particular, temos

**Definição 2.16.** Por ângulo entre duas circunferências que se intersectam entendemos que é o menor ângulo formado pelas tangentes a cada uma delas em um dos pontos de interseção.

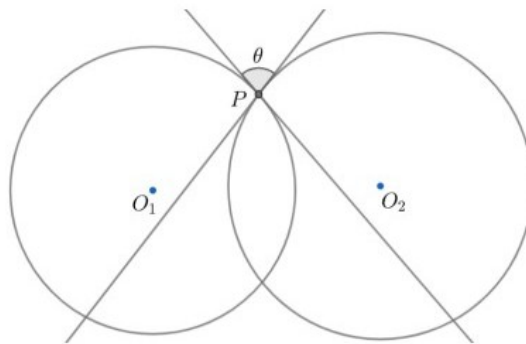


Figura 27 – Ângulo entre duas circunferências

Sabe-se que duas circunferências ou não se intersectam ou têm um ponto em comum ou têm dois pontos em comum. Nesse último caso, a definição de ângulo que acabamos

de dar não depende de qual dos dois pontos comuns se considere. Se elas têm apenas um ponto em comum, são chamadas de circunferências tangentes, e seu ângulo é zero.

Note que inversões de curvas tangentes, são tangentes. Isto segue pelo fato das inversões serem bijetivas.

**Proposição 2.17.** *As inversões preservam ângulos de objetos que se intersectam sendo um desses objetos uma reta que passa pelo centro da inversão.*

*Prova.* Sem perda de generalidade, podemos supor que o outro objeto é uma circunferência. Seja  $\mathcal{C}$  tal circunferência e  $\mathcal{C}'$  sua inversão. Sejam  $A \in \mathcal{C}$  e  $A' \in \mathcal{C}'$  seu inverso. A reta  $r$  que passa por  $A$  e pelo centro da inversão é fixa. Assim, é suficiente provar que o ângulo entre a reta  $r$  e  $\mathcal{C}$  no ponto  $A$  é o mesmo que o ângulo entre  $r$  e  $\mathcal{C}'$  no ponto  $A'$ . Seja  $P \in \mathcal{C}$  um ponto arbitrário e seja  $P' \in \mathcal{C}'$  seu inverso. Na figura abaixo a inversão é em relação à circunferência  $\Gamma$ .

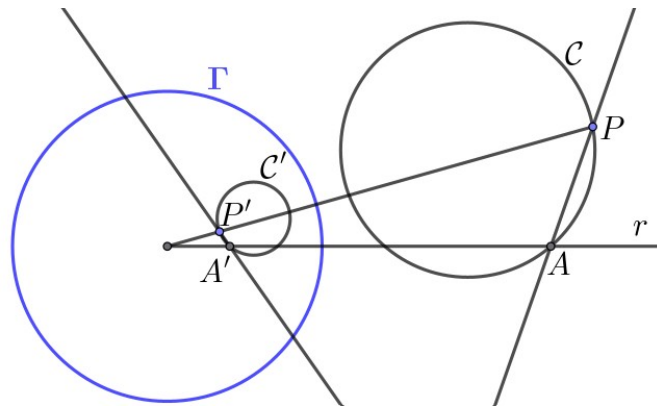


Figura 28 – Conservação dos ângulos entre dois objetos, sendo um deles uma reta que passa pelo centro da inversão

Note que, quando  $P$  tende ao ponto  $A$  ao longo de  $\mathcal{C}$ , a posição limite da reta secante  $\overleftrightarrow{AP}$  será a reta tangente a  $\mathcal{C}$  em  $A$ , assim como, a posição limite da reta secante  $\overleftrightarrow{A'P'}$  será a reta tangente a  $\mathcal{C}'$  no ponto  $A'$ . Assim, o ângulo entre  $r$  e  $\mathcal{C}$  no ponto  $A$  e o ângulo entre  $r$  e  $\mathcal{C}'$  no ponto  $A'$  são, respectivamente:

$$\lim_{P \rightarrow A} (\pi - \angle OAP) \text{ e } \lim_{P \rightarrow A} \angle OA'P'$$

Pela Proposição 2.4, temos

$$\angle OP'A' = \angle OAP. \tag{2.2}$$

Ainda, pelo teorema do ângulo externo, temos que

$$\angle PP'A' = \angle P'OA' + \angle OA'P'. \tag{2.3}$$

É claro que,

$$\lim_{P \rightarrow A} \angle P'OA' = 0^\circ, \tag{2.4}$$

segue usando as relações acima,

$$\begin{aligned} \angle(r, \mathcal{C}) &= \lim_{P \rightarrow A} (\pi - \angle OAP) \stackrel{(2.2)}{=} \lim_{P \rightarrow A} (\pi - \angle OP'A') \\ &= \lim_{P \rightarrow A} (\angle PP'A') \stackrel{(2.3)}{=} \lim_{P \rightarrow A} (\angle P'OA' + \angle OA'P') \\ &\stackrel{(2.4)}{=} \lim_{P \rightarrow A} \angle OA'P' = \angle(r, \mathcal{C}'), \end{aligned}$$

o que mostra a proposição □

Finalizamos esta seção mostrando que as inversões preservam ângulos entre retas

**Teorema 2.18 (Inversão preserva o ângulo entre retas).** *Sejam  $\mu$  e  $\nu$  duas retas que intersectam-se no ponto  $P$ , que formam um ângulo  $\alpha$  e que não passam pelo centro da inversão relativa à circunferência  $\mathcal{C}(O, r)$ . Sejam  $P'$ ,  $\mu'$  e  $\nu'$  os inversos de  $P$ ,  $\mu$  e  $\nu$  respectivamente. Então, o ângulo entre  $\mu'$  e  $\nu'$  em  $P'$  é  $\alpha$ .*

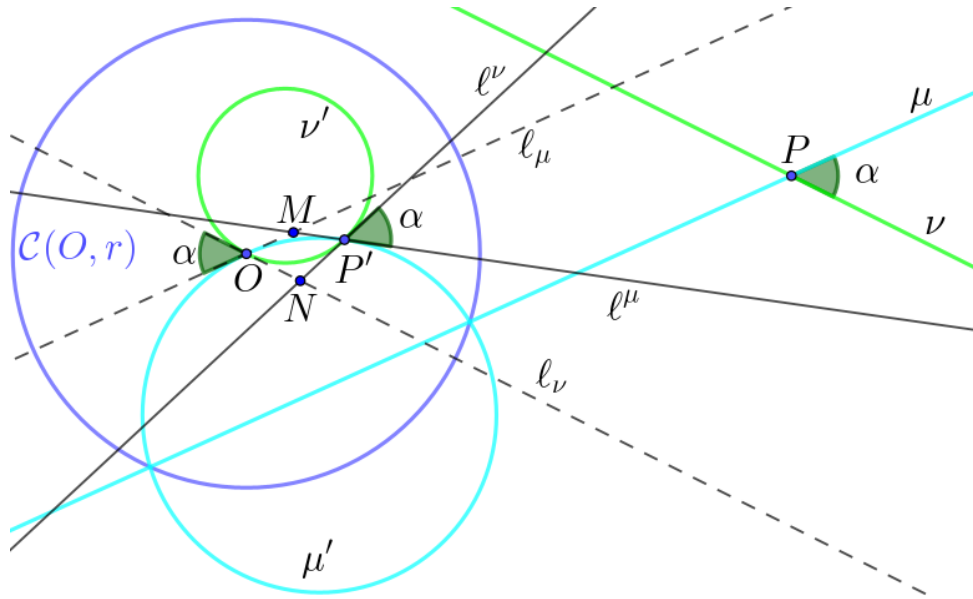


Figura 29 – Conservação dos ângulos entre retas

*Demonstração.* Como as retas  $\mu$  e  $\nu$  não passam por  $O$ , pelo Teorema 2.8, suas inversões  $\mu'$  e  $\nu'$  são circunferências que passam por  $O$ . Sejam  $l_\mu$  e  $l_\nu$  as retas tangentes a  $\mu'$  e  $\nu'$  no ponto  $O$ . Novamente, pelo Teorema 2.8, obtemos que  $l_\mu$  e  $l_\nu$  são paralelas, respectivamente a  $\mu$  e  $\nu$ . Logo, o ângulo formado por  $l_\mu$  e  $l_\nu$  é  $\alpha$ . Considere as retas  $l_\nu'$  e  $l_\mu'$  tangentes a  $\nu'$  e  $\mu'$  em  $P'$ , respectivamente. Sejam  $\{M\} = l_\mu \cap l_\nu'$  e  $\{N\} = l_\nu \cap l_\mu'$ . Como os triângulos  $ONP'$  e  $OMP'$  são isósceles de base  $OP'$ , o ângulo entre as retas  $l_\mu'$  e  $l_\nu'$  também é  $\alpha$ . □

## 3 Aplicações da geometria inversiva

Neste capítulo, exploraremos as aplicações práticas das transformações por inversão. Vamos utilizar o conhecimento teórico sobre inversões para resolver problemas clássicos da matemática, buscando resultados que contribuam significativamente para o aprofundamento da nossa compreensão.

### 3.1 O Teorema de Ptolomeu e Suas Aplicações

**Teorema 3.1 (Ptolomeu).** *O produto das diagonais de um quadrilátero inscrito em uma circunferência é igual a soma dos produtos dos lados opostos.*

Podemos compreender melhor o teorema de Ptolomeu, observando a figura 30 e sua representação através da fórmula.

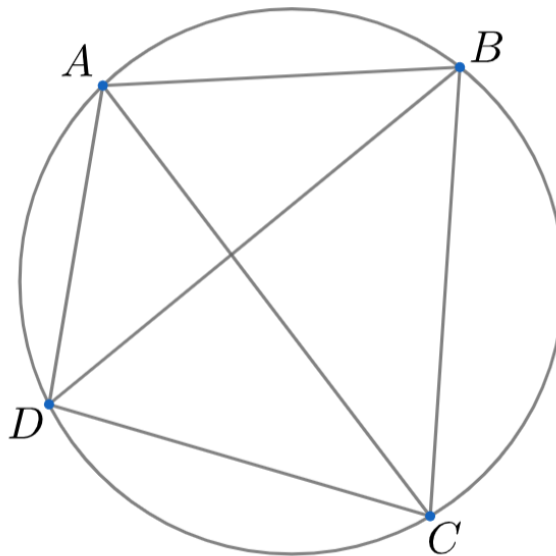


Figura 30 – Teorema de Ptolomeu

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

*Demonstração.* Queremos demonstrar que se  $ABCD$  é um quadrilátero inscrito, então

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

Para demonstrarmos esse teorema, utilizaremos a inversão de pontos concíclicos por uma circunferência.

Dado o quadrilátero  $ABCD$  inscrito, por  $D$  traçamos uma circunferência  $\mathcal{C}$  de raio  $r$ . Iremos fazer a inversão do ponto  $A$ ,  $B$  e  $C$  com relação a  $\mathcal{C}$ , obtendo desta forma  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  de modo que pelo teorema de inversão de reta, podemos garantir que  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são colineares, pois estão na mesma circunferência que passa pelo centro de inversão. (Ver figura 31)

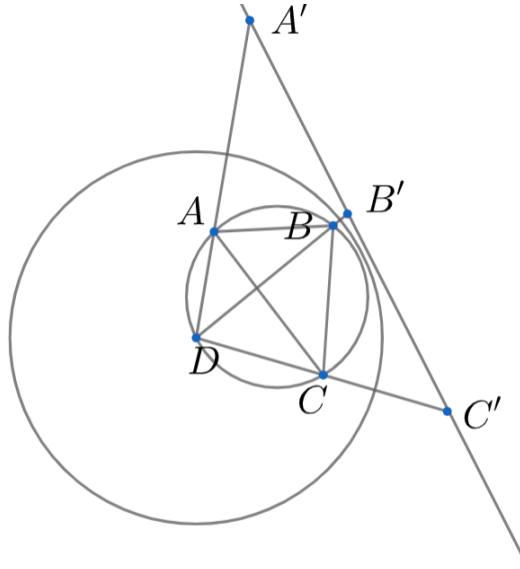


Figura 31 – Demonstração Teorema de Ptolomeu

Pela definição de inversão temos que:

$$\overline{AD} \cdot \overline{A'D} = \overline{BD} \cdot \overline{B'D} = \overline{CD} \cdot \overline{C'D} = r^2$$

e desta forma podemos concluir que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{B'D}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{A'D}}, \quad \frac{\overline{BD}}{\overline{C'D}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{B'D}} \quad e \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{C'D}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{A'D}}$$

Pela proposição 2.4 os triângulos  $\triangle ADB$  e  $\triangle B'DA'$  são semelhantes, os triângulos  $\triangle BDC$  e  $\triangle C'DB'$  são semelhantes e os triângulos  $\triangle ADC$  e  $\triangle C'DA'$  também são semelhantes, então temos que;

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{A'D}} \Rightarrow \overline{A'B'} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{A'D}}{\overline{BD}} \tag{3.1}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{C'D}} \Rightarrow \overline{B'C'} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{C'D}}{\overline{BD}} \tag{3.2}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{C'D}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{A'D}} \Rightarrow \overline{A'C'} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{C'D}}{\overline{AD}} \tag{3.3}$$

Como

$$\overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$$

e substituindo por 3.1, 3.2 e 3.3, respectivamente em  $\overline{A'C'}$ ,  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC} \cdot \overline{C'D}}{\overline{AD}} &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{A'D}}{\overline{BD}} + \frac{\overline{BC} \cdot \overline{C'D}}{\overline{BD}} \\ \frac{\overline{AC} \cdot \overline{C'D}}{\overline{AD}} &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{A'D} + \overline{BC} \cdot \overline{C'D}}{\overline{BD}} \quad (\times \overline{BD} \cdot \overline{AD}) \\ \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{C'D} &= \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{A'D} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{C'D} \quad (\times \overline{CD}) \\ \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot (\overline{C'D} \cdot \overline{CD}) &= \overline{AB} \cdot (\overline{AD} \cdot \overline{A'D}) \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot (\overline{C'D} \cdot \overline{CD}) \end{aligned}$$

Como  $\overline{C'D} \cdot \overline{CD} = r^2$  e  $\overline{A'D} \cdot \overline{AD} = r^2$ , então

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot r^2 &= \overline{AB} \cdot r^2 \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot r^2 \quad (\div r^2) \\ \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{BC} \end{aligned}$$

□

**Exercício 3.2** (ITA - 1995). O comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:

- (a)  $x^2 + x - 2 = 0$
- (b)  $x^2 - x - 2 = 0$
- (c)  $x^2 - 2x + 1 = 0$
- (d)  $x^2 + x - 1 = 0$
- (e)  $x^2 - x - 1 = 0$

*Solução:* Inicialmente vamos traçar o pentágono regular  $ABCDE$  de lado 1 unidade e inscrito em uma circunferência  $\mathcal{C}$ . Neste pentágono traçamos as diagonais  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$  e  $\overline{CE}$ , como mostra a figura 32.

Como,

$$\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{CE} = x$$

Podemos considerar o quadrilátero  $ACDE$  inscrito em  $\mathcal{C}$  e aplicar o teorema de Ptolmeu para determinarmos o valor  $x$  das diagonais. Desta forma:

$$\overline{AD} \cdot \overline{CE} = \overline{AE} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DE}$$

$$x \cdot x = 1 \cdot 1 + x \cdot 1$$

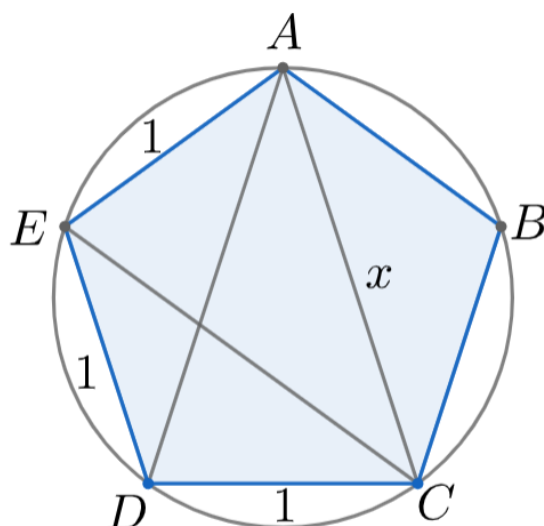


Figura 32 – Pentágono Inscrito

$$x^2 = 1 + x$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$

**Resposta:** *Letra E*

## 3.2 Aplicação 2

**Exercício 3.3.** Observe a figura abaixo. Dada a circunferência  $\mathcal{C}_1$  de diâmetro  $AB$  medindo 8 unidades seja a circunferência  $\mathcal{C}_2$  que tangencia internamente  $\mathcal{C}_1$  no ponto  $O$  e tangencia  $AB$  em  $P$ , de raio 2 unidades de medida, calcule o raio da circunferência  $\mathcal{C}_3$  que tangencia  $\mathcal{C}_1$  internamente e  $\mathcal{C}_2$  externamente e tangencia  $AB$ .

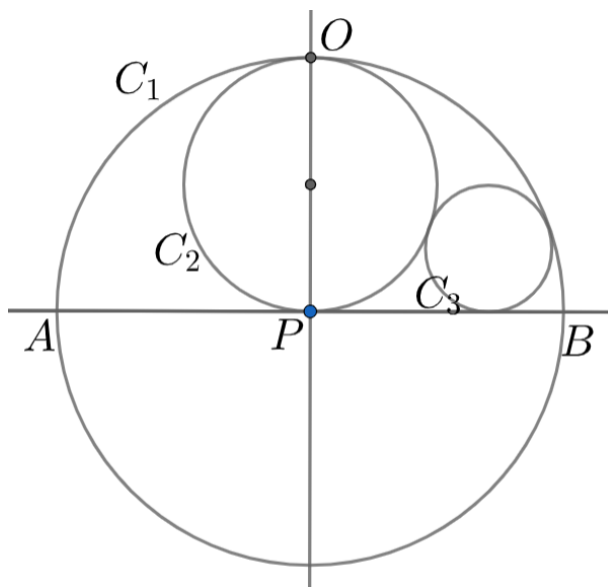


Figura 33 – Figura da aplicação 2

*Solução:* Queremos calcular o valor do raio da circunferência  $\mathcal{C}_3$ , para isso tomaremos como referência a circunferência  $\mathcal{C}$  que está centrada em  $O$  e passa pelos pontos  $A$  e  $B$ . A inversa da circunferência  $\mathcal{C}_1$  com relação a  $\mathcal{C}$  é a reta  $\mathcal{C}'_1$  que passa por  $A$  e  $B$ , pois pelo teorema da inversão de retas, como o círculo passa pelo centro de inversão, então sua inversa é uma reta. Analogamente, invertamos a circunferência  $\mathcal{C}_2$  com relação a  $\mathcal{C}$  e obtemos a reta  $\mathcal{C}'_2$  que tangencia  $\mathcal{C}_1$  em  $P'$ , como mostra a figura 34.

Observe que pela definição de inversão, temos que:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2,$$

sendo  $\overline{OP} = 4$  e  $\overline{OP'} = 8$  e  $r$  o raio de  $\mathcal{C}$ , logo podemos calcular o raio  $r$ :

$$4 \cdot 8 = r^2$$

$$r^2 = 32$$

$$r = 4\sqrt{2}$$

Prosseguindo com a resolução, determinaremos a inversa de  $\mathcal{C}_3$  com relação a  $\mathcal{C}$ , que será a circunferência  $\mathcal{C}'_3$  - pois pelo teorema de inversão de circunferências, a inversa

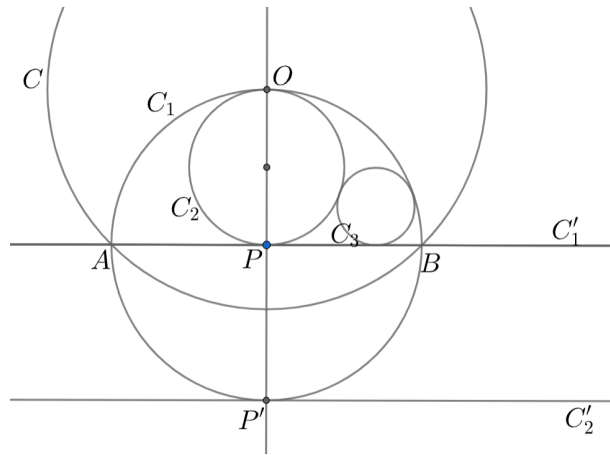


Figura 34 – Inversão dos círculos

de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão é uma circunferência que também não passa pelo centro de inversão - que tangencia as retas  $C'_1$  e  $C'_2$ , pois  $C_3$  tangencia  $C_1$  e  $C_2$ , como mostra a figura 35.

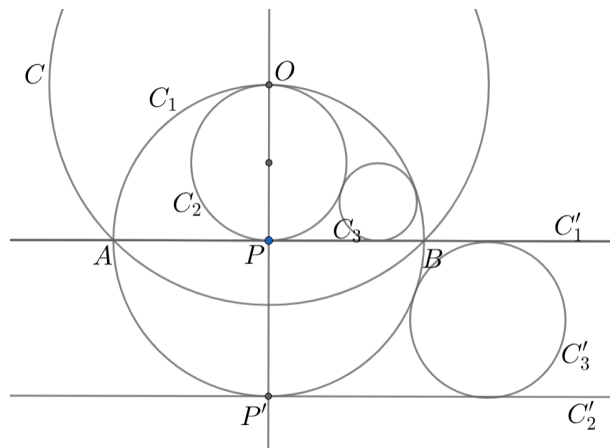


Figura 35 – Solução da aplicação 2

Unindo os pontos  $O$ ,  $T$  e  $T'$  que são colineares e os pontos  $O$ ,  $Q$  e  $Q'$ , também colineares, obtemos os triângulos  $\triangle OQT$  e  $\triangle OT'Q'$  semelhantes pela propriedade 2.4. Queremos determinar a distância  $\overline{QT}$  que é o raio de  $C_3$ . Para isso faremos:

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{OQ'}} = \frac{\overline{QT}}{\overline{Q'T'}} \tag{3.4}$$

Para isso temos que:  $\overline{Q'T'} = 2$ , e precisamos determinar  $\overline{OT}$  e  $\overline{OQ'}$ . Portanto, inicialmente, seja  $X$  a projeção de  $Q'$  em  $OP'$ , calcularemos a distância  $\overline{Q'X}$ , utilizando o teorema de Pitágoras, no triângulo  $\triangle PXQ'$

$$\overline{PQ'}^2 = \overline{PX}^2 + \overline{Q'X}^2$$

$$6^2 = 2^2 + \overline{Q'X}^2$$



Por 3.4, temos que:

$$\frac{\frac{8}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{17}} = \frac{r}{2}$$

$$2\sqrt{17} \cdot r = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{8}{\sqrt{51}}$$

### 3.3 Aplicação 3 - Problema de Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível 2

**Exercício 3.4** (OBM - Nível 2 - 2019). Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo inscrito em um círculo  $\Gamma$  de centro  $O$ . Seja  $D$  o pé da altura relativa ao vértice  $A$ . Sejam  $E$  e  $F$  pontos sobre  $\Gamma$  tais que  $\overline{AE} = \overline{AD} = \overline{AF}$ . Sejam  $P$  e  $Q$  os pontos de interseção da reta  $\overleftrightarrow{EF}$  com os lados  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. Seja  $X$  o segundo ponto de interseção de  $\Gamma$  com o círculo circunscrito ao triângulo  $APQ$ . Mostre que as retas  $\overleftrightarrow{XD}$  e  $\overleftrightarrow{AO}$  encontram-se em um ponto que está sobre  $\Gamma$ .

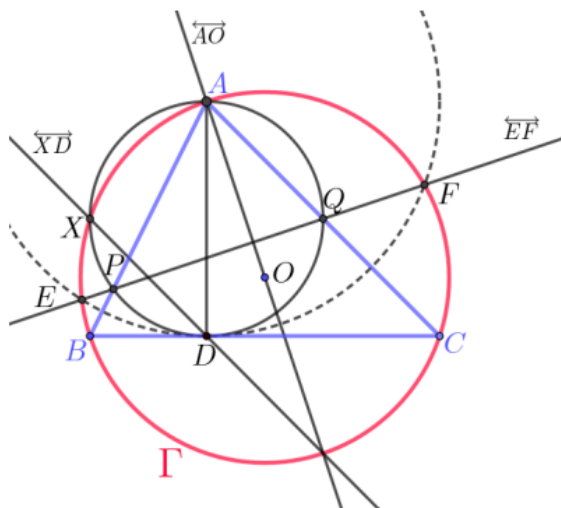


Figura 37 – Aplicação 3 - OBM - Nível 2 - 2019

*Solução:* Note que a reta  $\overleftrightarrow{AO}$  encontra  $\Gamma$  em um ponto  $R$ , sendo o segmento  $AR$  o diâmetro de  $\Gamma$ . Queremos mostrar que a reta  $\overleftrightarrow{XD}$  também intersecta a circunferência  $\Gamma$  em  $R$ . Como  $AR$  é diâmetro de  $\Gamma$ , basta mostrar que  $\angle AXR$  é reto.

Ainda, se  $R \in \overleftrightarrow{AO}$ ,  $\angle AXR = \angle AXD$ . Assim, para mostrar que  $\angle AXR$  é reto, bastará mostrar que  $\angle AXD$  é reto.

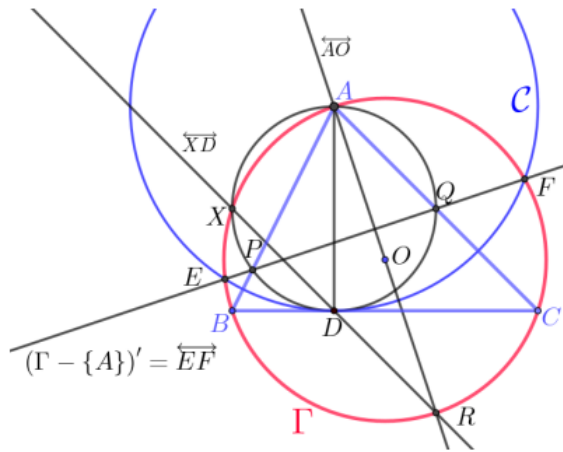


Figura 38 – Aplicação 3 - Solução

Tome a circunferência  $C$  que passa pelos pontos  $E$ ,  $D$  e  $F$  e está centrada em  $A$ , como a circunferência de inversão. Sabemos que a inversão da reta  $\overleftrightarrow{EF}$  é uma circunferência que "passa" pelo centro da inversão. Logo, tal inversão é a circunferência  $AEF$ , pois  $E$  e  $F$  são pontos fixos dessa inversão. Logo,  $(\Gamma - \{A\})' = \overleftrightarrow{EF}$ . Agora o inverso de  $B \in \Gamma$  é um ponto em  $\overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{AB}$ , daí  $B' = P$ . Analogamente,  $C' = Q$ . Com isso temos que a inversão de  $\overleftrightarrow{BC}$  é a circunferência  $APQ$ . Como  $D \in \overleftrightarrow{BC} \cap C$ , o ponto  $D' = D$  pertence à circunferência  $APQ$ . Ainda,  $AD \perp BC$  e  $BC$  tangente a circunferência de  $APQ$ , segue que  $AD$  é diâmetro da circunferência  $APQ$  e, portanto,  $\angle AXD = 90^\circ$ , pois  $X$  é um ponto da circunferência  $APQ$ .

### 3.4 Aplicação 4

**Lema 3.5.** Na figura abaixo, os pontos  $BCC'B'$  são concíclicos. Se  $AD$  é bissetriz de  $\angle BAC$  e  $TM$  é bissetriz de  $\angle DTF$ , então  $\angle TMA$  é reto.

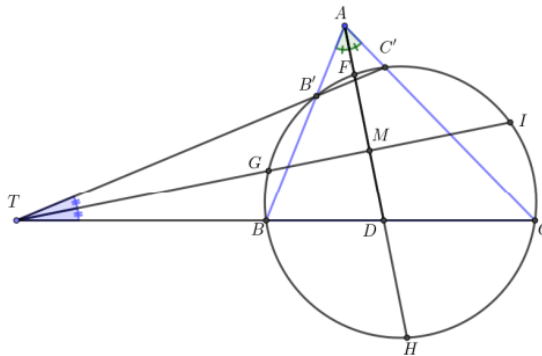


Figura 39 – Lema 3.5

*Demonstração.* Pelas hipóteses e os teoremas 1.13 e 1.15, temos

$$\angle BAD = \frac{\widehat{BH} - \widehat{FB'}}{2} = \frac{\widehat{HC} - \widehat{C'F}}{2} = \angle DAC, \quad (3.5)$$

$$\angle DTM = \frac{\widehat{CI} - \widehat{GB}}{2} = \frac{\widehat{IC'} - \widehat{B'G}}{2} = \angle MTF, \quad (3.6)$$

$$\angle GMF = \frac{\widehat{FG} + \widehat{HI}}{2} = \frac{\widehat{FB'} + \widehat{B'G} + \widehat{HC} + \widehat{CI}}{2} \quad (3.7)$$

$$\angle GMH = \frac{\widehat{GH} + \widehat{IF}}{2} = \frac{\widehat{GB} + \widehat{BH} + \widehat{IC'} + \widehat{C'F}}{2} \quad (3.8)$$

De 3.7 e 3.8, obtemos:

$$\begin{aligned} \angle GMF - \angle GMH &= \frac{\widehat{FB'} - \widehat{BH}}{2} + \frac{\widehat{B'G} - \widehat{IC'}}{2} + \frac{\widehat{HC} - \widehat{C'F}}{2} + \frac{\widehat{CI} - \widehat{GB}}{2} \\ &= -\angle BAD - \angle MTF + \angle DAC + \angle DTM = 0 \end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade usamos as equações 3.5 e 3.6 e a terceira igualdade segue pois o segmento  $AD$  é bissetriz de  $\angle BAC$  e  $TM$  é bissetriz de  $\angle DTF$ .  $\square$

**Exercício 3.6** (Romênia, 1997). Dado um triângulo  $ABC$  e um ponto  $D$  sobre  $BC$ . Considere duas circunferências tangentes exteriormente a  $BC$  no mesmo ponto  $M$  e cada uma delas tangente à circunferência circunscrita do triângulo  $ABC$  e ao lado  $BC$ , a primeira sobre o segmento  $BD$  e a outra sobre o segmento  $DC$ . Demonstrar que  $AD$  é a bissetriz do ângulo  $A$ .

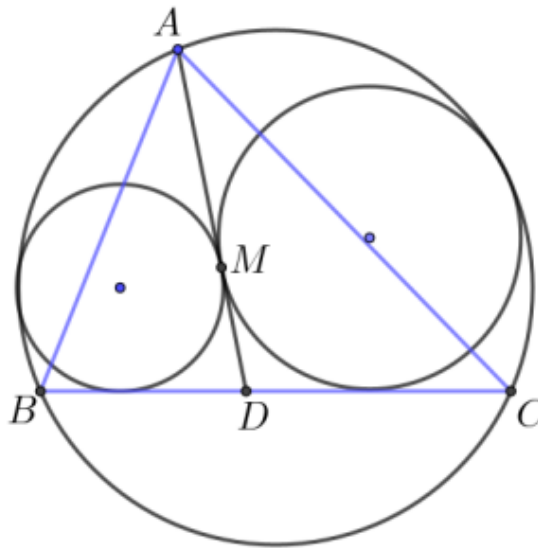


Figura 40 – Aplicação 4

*Solução:* Seja  $T$  o ponto de interseção da reta que une os centros das circunferências com a reta  $\overleftrightarrow{BC}$ . Consideremos a inversão em relação à circunferência de centro  $A$  e raio

$AM$ , que denotaremos por  $\mathcal{C}$ . Como as duas circunferências pequenas são ortogonais a  $\mathcal{C}$  em  $M$ , são fixas pela inversão. Sendo a circunferência  $\Gamma = (ABC)$  tangente às circunferências pequenas, sua inversão é reta tangente a tais circunferências que não é a reta  $\overleftrightarrow{BC}$ .

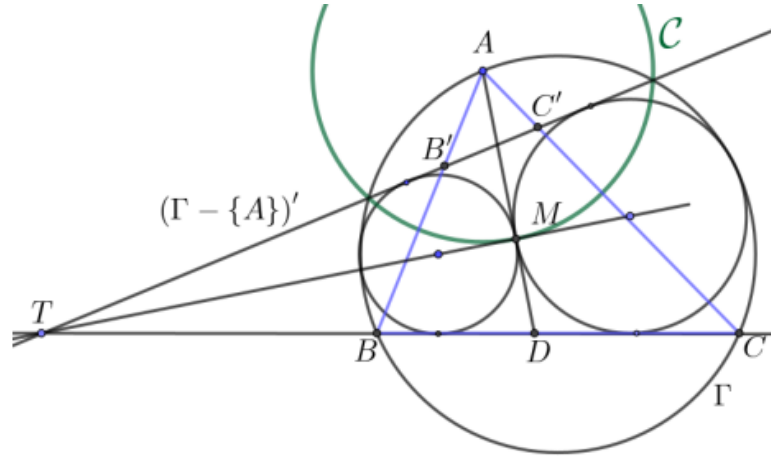


Figura 41 – Aplicação 4 - Solução

O inverso do ponto  $B \in \Gamma$  é o ponto  $B' \in \Gamma' \cap \overrightarrow{AB}$ . Analogamente,  $C' \in \Gamma' \cap \overrightarrow{AC}$ . Assim, os pontos  $BCC'B'$  são concíclicos. O lema 3.5, fornece que as bissetrizes de  $\angle BTB'$  e  $\angle BAC$  são perpendiculares. Mas,  $TM$  é a bissetriz de  $\angle BTB'$  e  $AM \perp TM$ , o que implica que  $AD$  é a bissetriz do ângulo  $A$ .

### 3.5 Aplicação 5

**Exercício 3.7** (IMO-1986). A circunferência inscrita no triângulo  $ABC$  é tangente aos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  em  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente.  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são pontos médios de  $EF$ ,  $FD$  e  $DE$ , respectivamente. Provar que os centros do círculo inscrito e das circunferências circunscritas de  $XYZ$  e  $ABC$  são colineares.

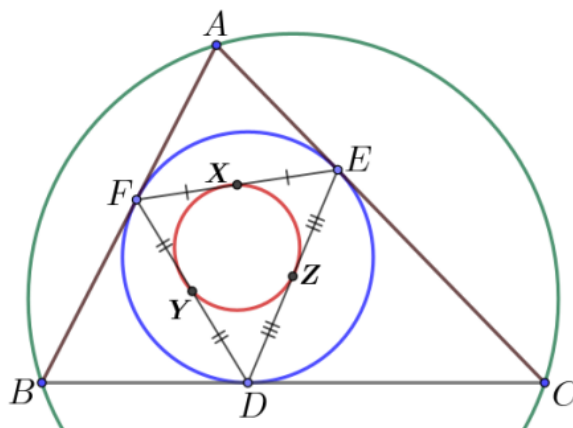


Figura 42 – Aplicação 5

*Solução:* Sejam  $O$ ,  $I$  e  $J$  os centros dos círculos circunscritos aos triângulos  $ABC$ ,  $DEF$  e  $XYZ$ , respectivamente. Considere a inversão relativa à circunferência inscrita ao triângulo  $ABC$ , ou seja, a circunferência de centro  $I$  e raio  $IE$ , que denotaremos por  $\mathcal{C}$ .

Como  $\overline{AF} = \overline{AE}$  e  $\overline{FX} = \overline{XE}$ , o segmento  $AX$  é altura (e bissetriz relativa ao vértice  $A$ ) do  $\triangle AFE$ . Ainda, sendo  $IE \perp AE$ , segue que  $XE$  é altura do  $\triangle IEA$  e logo, o inverso de  $A$  é  $X$ . Analogamente, o inverso de  $B$  é  $Y$  e o inverso de  $C$  é  $Z$ , ou seja,  $B' = Y$  e  $C' = Z$ . Segue daí, que o inverso da circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$ , que denotamos por  $\Gamma$ , é a circunferência circunscrita ao triângulo  $XYZ$

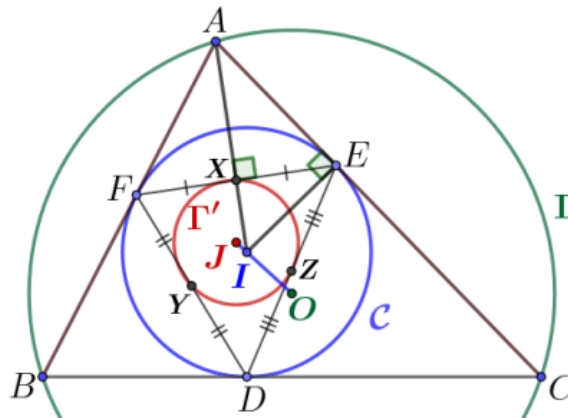


Figura 43 – Aplicação 5 - solução

Como o centro de uma circunferência é colinear com o centro de sua inversa e o centro da inversão, concluímos que  $O$  (centro de  $\Gamma$ ),  $J$  (centro da inversão) e  $I$  (centro de  $\Gamma'$ ) são colineares.

## 4 Sequência didática

Neste capítulo, apresentaremos uma sequência didática estruturada para quatro aulas, com o objetivo de introduzir aos alunos do ensino médio — especialmente àqueles interessados em participar de olimpíadas de matemática e concursos militares — os conceitos fundamentais da geometria inversiva.

A proposta consiste em um planejamento de ensino voltado a professores que desejam explorar esse tema com seus estudantes, oferecendo sugestões metodológicas, estratégias para o uso de softwares, como o GeoGebra, atividades de construção com régua e compasso, além de exercícios e instrumentos avaliativos. O desenvolvimento de cada aula será detalhado ao longo da sequência, proporcionando uma abordagem completa e integrada das atividades.

### 4.1 1ª Aula: Conceitos básicos de geometria inversiva

**Turma:** 3º ano do ensino médio

**Tema específico:** Introdução a geometria Inversiva

**Habilidades prioritárias:** (EM13MAT512)<sup>1</sup> Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos;

**Objeto do conhecimento:** Teorema de Thales; Semelhança de triângulos; Relações métricas no triângulo retângulo; Potência de ponto e Geometria inversiva

**Objetivos:** Resgatar o conhecimento histórico referente a geometria euclidiana; apresentar o conceito básico da geometria inversiva; experimentar a inversão da geometria; identificar as propriedades geométricas

**Metodologias e Recursos:** No primeiro momento da aula, após a realização da chamada, iniciaremos com um conversa provocativa afim de introduzir os conceitos básicos de geometria inversiva, não obstante, será feito um resgate dos conteúdos previamente aprendidos sobre a geometria euclidiana. No segundo momento, ocorrerá a construção de inversão com régua e compasso, utilizando um círculo, uma reta que passa pelo centro do círculo e um ponto contido nessa reta que não é o centro da circunferência ( esse ponto deverá estar no interior do círculo, pois facilitará

---

<sup>1</sup> Código da BNCC

a construção e aprendizado dos estudantes. Posteriormente, será apresentado aos estudantes com o software do GeoGebra a inversão com o ponto no exterior), preparando assim, os discentes para conhecer os diversos casos de inversão.

Os recursos utilizados para a aula serão: laptop; projetor; software(GeoGebra); internet; régua; compasso; quadro; pinceis marcadores; apagador.

**Avaliação/verificação de aprendizagem:** A avaliação será formativa e ocorrerá com a realização da atividade proposta pelo professor (construção da inversão do ponto utilizando o círculo como referência).

### 4.1.1 Construção do inverso de um ponto

Passo 1: Construir uma circunferência  $\mathcal{C}$  de raio arbitrário  $R$ .

Passo 2: Trace uma reta  $r$  que passe pelo centro da circunferência construída.

Passo 3: Marque um ponto  $P$  na reta no interior da circunferência  $\mathcal{C}$ .

Passo 4: Trace uma perpendicular  $t$  a reta  $r$  passando por  $P$ .

Passo 5: Marque um ponto  $Q$  onde a perpendicular  $t$  intersecta a circunferência  $\mathcal{C}$  (Observe que essa perpendicular intersecta a circunferência em dois pontos, fica a cargo do leitor escolher um desses pontos).

Passo 6: Trace a reta  $s$  tangente a circunferência  $\mathcal{C}$  em  $Q$

Passo 7: O ponto  $P'$  de interseção entre a reta  $r$  e a tangente  $s$  é o inverso do ponto  $P$  com relação a  $\mathcal{C}$

Observe na figura 44 o resultado desta construção por meio de régua e compasso.

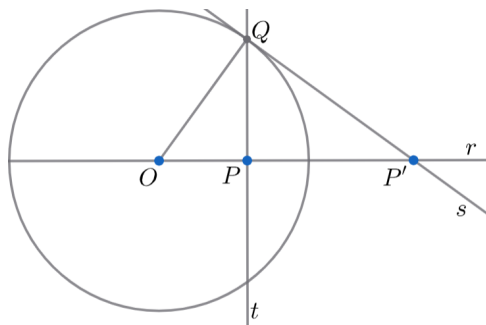


Figura 44 – Construção por meio de régua e compasso

A demonstração desta construção foi feita na seção 2.1.

Podemos construir o inverso de um ponto de outra forma, utilizando apenas a régua. A seguir veremos o passo a passo desta construção.

- Passo 1: Construir uma circunferência  $\mathcal{C}$  de raio arbitrário  $R$ .
- Passo 2: Trace uma reta  $r$  que passe pelo centro da circunferência construída.
- Passo 3: Trace uma perpendicular  $t$  a reta  $r$  passando pelo centro  $O$ . Essa perpendicular  $t$  intersecta a circunferência  $\mathcal{C}$  em dois pontos  $T_1$  e  $T_2$ .
- Passo 4: Na reta  $r$  marque um ponto  $P$  arbitrariamente.
- Passo 5: Por  $T_2$  (Fica a cargo do leitor escolher  $T_1$  ou  $T_2$ ), trace uma reta  $s$  que passe por  $P$  e intersecte a circunferência  $\mathcal{C}$  em um ponto  $Q$ .
- passo 6: Pelo outro ponto  $T_1$  traçamos uma reta  $q$  passando pelo ponto  $Q$  e intersectando a reta  $r$  em  $P'$ . Esse ponto  $P'$  é o inverso de  $P$  com relação a  $\mathcal{C}$ .

O resultado desta construção está na figura 45.

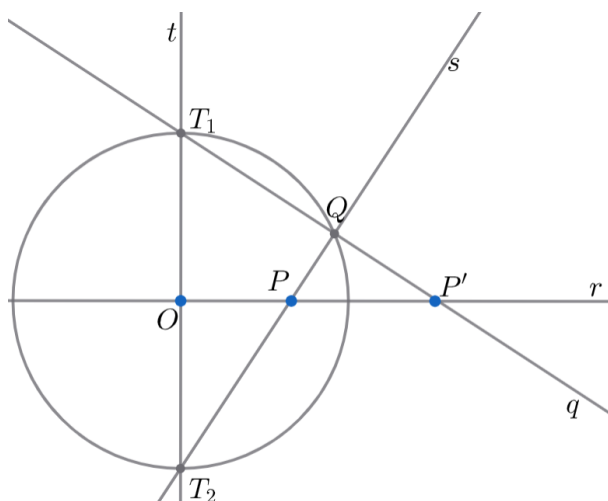


Figura 45 – Construção do inverso de um ponto

Fica a cargo do leitor fazer a demonstração desta construção.

## 4.2 2ª Aula: Construção do inverso de uma reta e um círculo

**Turma:** 3º ano do ensino médio

**Tema específico:** Análise de propriedades e teoremas

**Habilidades prioritárias:** (EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos;

**Objeto do conhecimento:** Teorema de Thales; Semelhança de triângulos; Relações métricas no triângulo retângulo; Potência de ponto e Geometria inversiva.

**Objetivos:** Sistematizar as experimentações da geometria inversiva no GeoGebra; experimentar a inversão da geometria; identificar os elementos constitutivos da geometria inversiva.

**Metodologias e recursos:** Neste segundo encontro iniciaremos a aula com o resgate dos conceitos trabalhados na aula anterior e aprofundando em seguida para os casos de inversão de retas e circunferências analisando os teoremas e as propriedades envolvidas em cada caso. utilizaremos o GeoGebra como plataforma de auxílio para entendimento prático sobre os procedimentos adotados em cada caso de inversão. Em seguida os alunos terão tempo para explorar a plataforma do GeoGebra e tirarem suas próprias conclusões sobre cada caso de inversão.

Os recursos utilizados para a aula serão: laptop; projetor; software(GeoGebra); internet; régua; compasso; quadro; pinças marcadores; apagador.

**Avaliação/verificação de aprendizagem:** A avaliação será formativa e ocorrerá com a realização da atividade proposta pelo professor (construção da inversão de retas e circunferências utilizando o GeoGebra).

### 4.2.1 Construção da inversão de uma reta no GeoGebra:

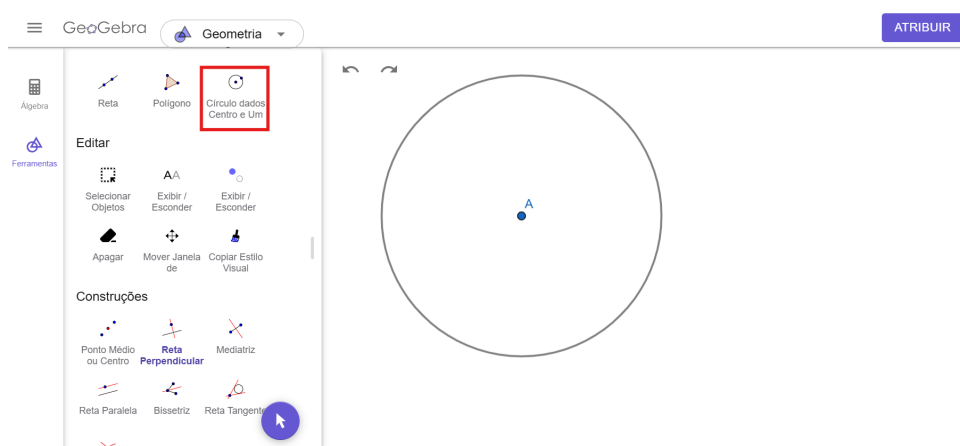


Figura 46 – 1º passo: Construa uma circunferência de raio qualquer.

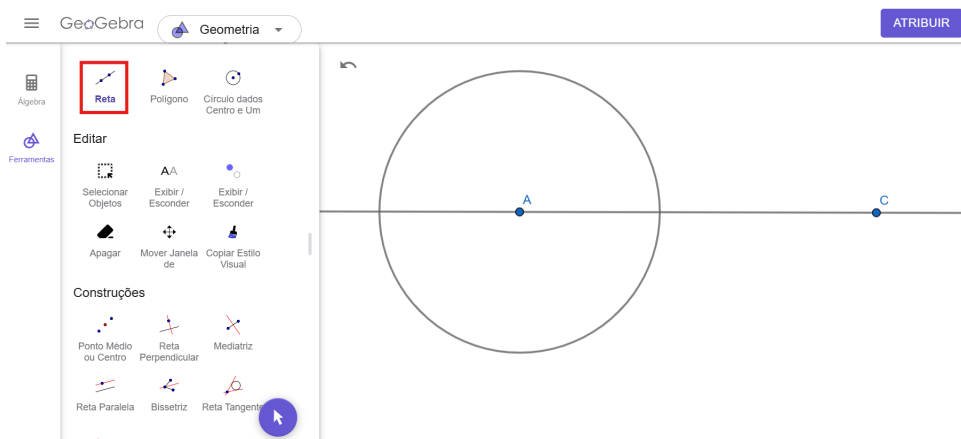


Figura 47 – 2º passo: Construa uma reta que passa pelo centro da circunferência.

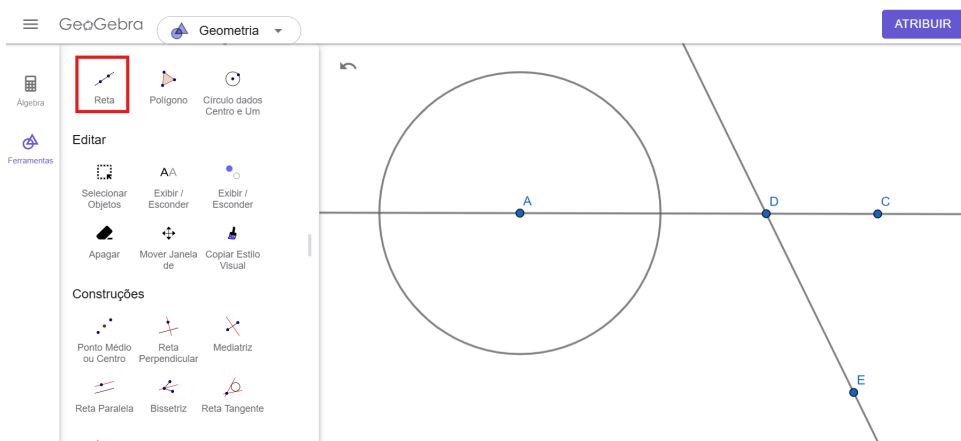


Figura 48 – 3º passo: Construa uma reta exterior a circunferência que passa pela reta anteriormente construída.

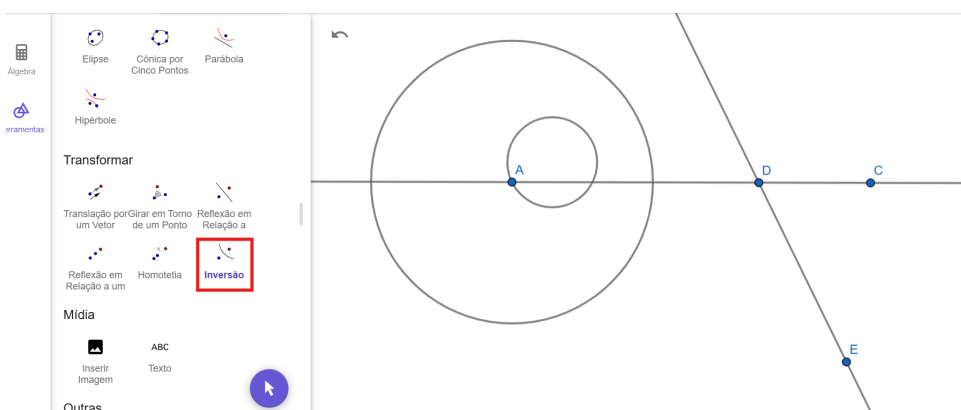


Figura 49 – 4º passo: Clique na reta em seguida no botão inversão e posteriormente clique na circunferência, o círculo interior é a inversão da reta.

### 4.2.2 Construção da inversão do círculo no GeoGebra:

Os passos iniciais para a construção da inversão do círculo no GeoGebra são iguais aos dois primeiros passos da construção da reta. Desta forma não será necessário

repetir esses tópicos. Partiremos para os passos finais que são o 3º e o 4º.

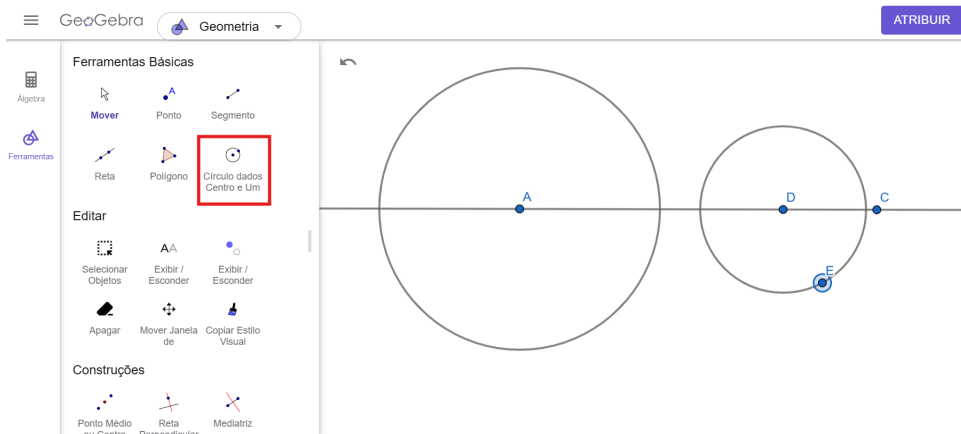


Figura 50 – Após concluir os passos 1º e 2º, construa outro círculo com qualquer medida de raio.

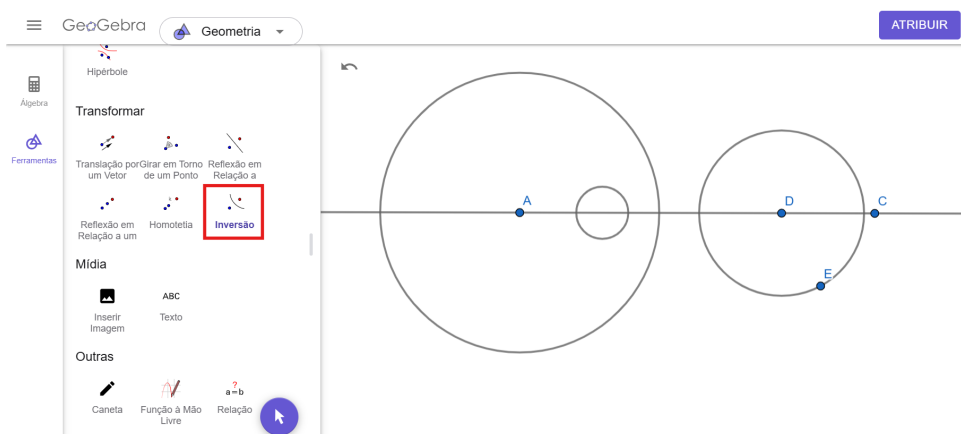


Figura 51 – Após construir o círculo, clique no mesmo e posteriormente clique no botão de inversão. O círculo inverso irá aparecer.

Podemos mostrar como a posição do círculo que será invertido com relação ao círculo que contém o centro de inversão altera o círculo inverso. Mostraremos o caso do círculo tangente e do círculo secante.

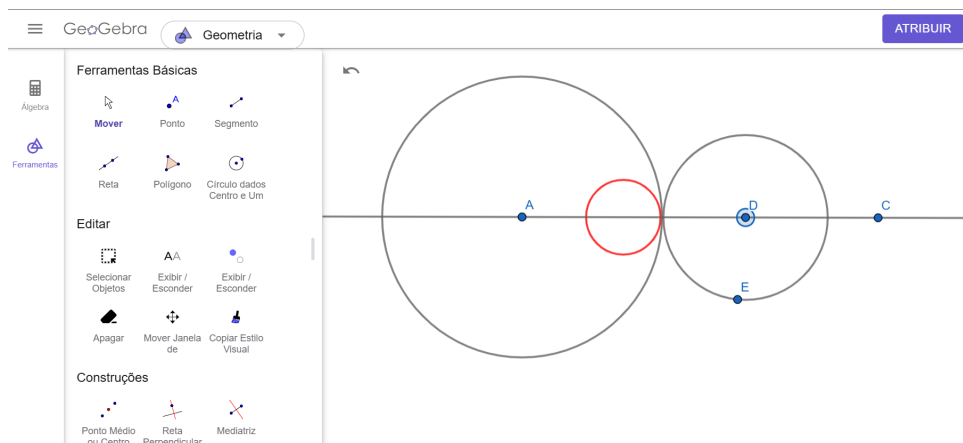


Figura 52 – Circunferências tangentes

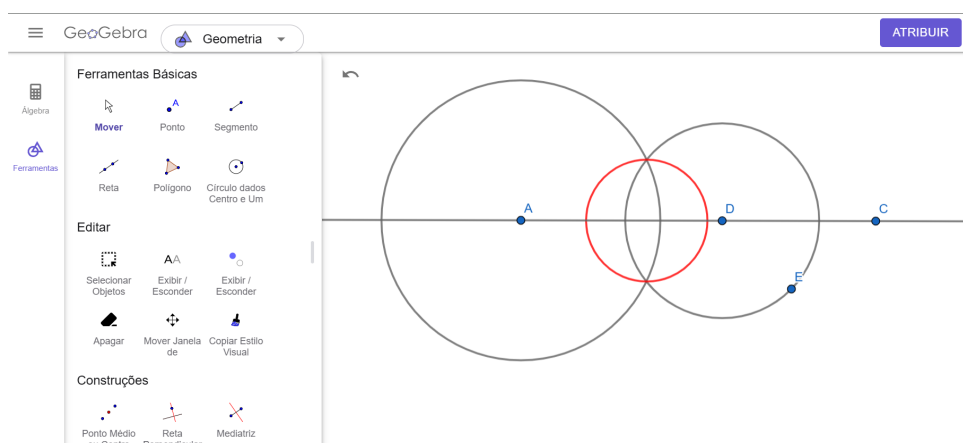


Figura 53 – Circunferências secantes

### 4.3 3ª Aula: Aplicações de problemas de olimpíadas de matemática

**Turma:** 3º ano do ensino médio

**Tema específico:** Aplicações de problemas de olimpíadas de matemática

**Habilidades prioritárias:** (EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos;

**Objeto do conhecimento:** Teorema de Thales; Semelhança de triângulos; Relações métricas no triângulo retângulo; Potência de ponto e Geometria inversiva.

**Objetivos:** Sistematizar as experimentações da geometria inversiva no GeoGebra; experimentar a inversão da geometria; identificar os elementos constitutivos da geometria inversiva.

**Metodologias e recursos:** Neste terceiro encontro daremos início a aula lembrando aos alunos os principais teoremas, propriedades e definições aprendidos na aula anterior como a definição de inversão, os teoremas de inversão de retas e circunferências e suas respectivas propriedades, necessários para a resolução dos problemas que serão propostos para resolução.

Após esse momento inicial de retomada, prosseguiremos com as aplicações, iniciaremos com o teorema de Ptolomeu, enunciando esse teorema e em seguida demonstraremos esse teorema para os alunos, utilizando os conceitos de inversão, como é mostrado no teorema 2.8 desta dissertação. Em seguida aplicaremos esse teorema em uma questão retirada da prova do ITA, no exercício 3.2. A proposta desta dinâmica é utilizar o teorema Ptolomeu para aplicar no exercício 3.2, o professor deverá ceder aos alunos um tempo para que possam fazer o exercício e se houver dúvida ao término desse tempo, o professor resolver o exercício.

Terminada a primeira aplicação, iniciaremos a aplicação 2, que está localizada neste trabalho como exercício 3.3. Esta aplicação exigirá mais dos alunos, e é recomendado ao professor que resolva conjuntamente com os alunos, utilizando o GeoGebra como uma ferramenta de fundamental auxílio para melhor entendimento dos passos que serão dados para essa resolução.

Finalizaremos essa aula com a aplicação 3 que está mostrada no exercício 3.4. Uma questão de olimpíadas, retirada da OBM - nível 2, que se resolvida utilizando a geometria inversiva, traz um solução mais simples. O professor, pode optar em mostrar a solução utilizando geometria euclidiana também, para comparar os resultados junto aos alunos. Nesta aplicação também é recomendado o uso do GeoGebra, ou a utilização de régua e compasso para um melhor entendimento da resolução por parte dos alunos.

Os recursos utilizados para a aula serão: laptop; projetor; software(GeoGebra); internet; régua; compasso; quadro; pinceis marcadores; apagador.

**Avaliação/verificação de aprendizagem:** Nesta aula iremos avaliar a capacidade de entendimento dos alunos sobre as aplicações e a habilidade de resolução dessas aplicações, assim como a participação do aluno durante a resolução das aplicações.

## 4.4 4<sup>a</sup> Aula: Atividade avaliativa

**Turma:** 3<sup>o</sup> ano do ensino médio

**Tema específico:** Atividade avaliativa

**Habilidades prioritárias:** (EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos;

**Objeto do conhecimento:** Teorema de Thales; Semelhança de triângulos; Relações métricas no triângulo retângulo; Potência de ponto e Geometria inversiva.

**Objetivos:** Sistematizar as experimentações da geometria inversiva no GeoGebra; experimentar a inversão da geometria; identificar os elementos constitutivos da geometria inversiva.

**Metodologias e recursos:** Para esta última aula aplicaremos uma atividade em forma de lista de exercícios, com objetivo de avaliar o aprendizado individual de cada aluno. Cada discente disponibilizará de todo o período da aula para executar as atividades propostas nesta lista, respondendo as atividades em uma folha a parte que será disponibilizada pelo professor. Os alunos contarão com o auxílio de materiais como régua e compasso além de acesso a computadores para utilização do software GeoGebra. Segue a lista com as atividades propostas para avaliação do aprendizado dos alunos. Os critérios a serem observados pelo professor para a correção são: respostas corretas e bem fundamentadas, clareza na resolução dos cálculos e justificativas, organização e apresentação.

## Atividade de Geometria Inversiva

Nome: \_\_\_\_\_

Turma: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

### Instruções:

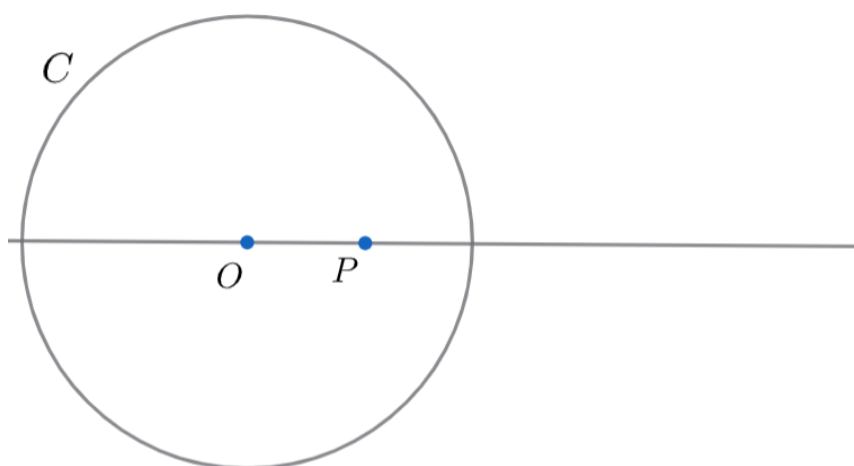
Leia atentamente as questões e resolva-as com clareza. Justifique suas respostas quando solicitado.

### Parte 1: Revisão de conceitos básicos

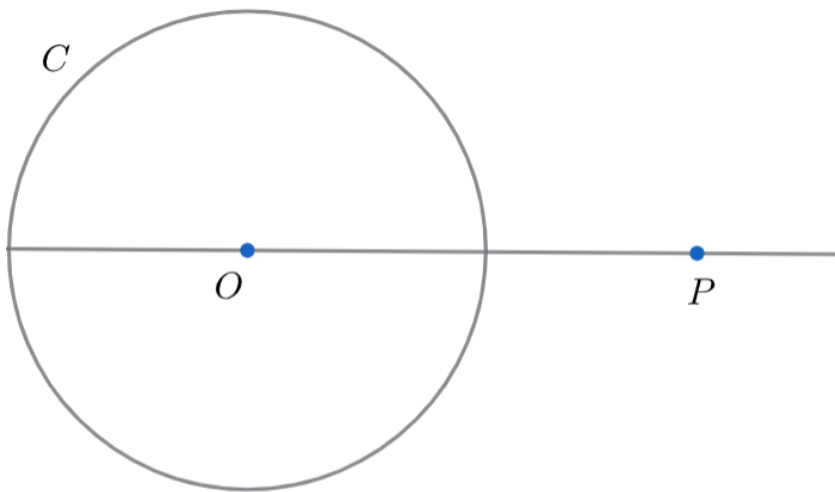
- Um triângulo retângulo tem catetos medindo 6 cm e 8 cm.
  - Determine o comprimento da hipotenusa.
  - Calcule a altura relativa à hipotenusa e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.
- No círculo de centro  $O$  e raio 5 cm, um ponto  $P$  fora do círculo está a 13 cm de  $O$ . Uma reta tangente ao círculo passa por  $P$ . Determine o comprimento da tangente.
- Considere um ponto  $P$  em relação a uma circunferência de centro  $O$ . Explique como a potência de  $P$  em relação à circunferência é definida.

### Parte 2: Inversão geométrica

- Seja uma inversão com centro  $O$  e raio  $r$ .
  - Qual é a imagem de uma reta que não passa por  $O$ ?
  - Qual é a imagem de uma circunferência que não passa por  $O$ ?
- Considere uma inversão com raio  $r=4$  cm e centro  $O$ . A imagem do ponto  $A$ , situado a 8 cm de  $O$ , é  $A'$ . Determine a distância de  $A'$  a  $O$ .
- Determine utilizando régua e compasso o inverso do ponto  $P$  com relação a circunferência  $C$  de centro  $O$  da figura abaixo.



7. Determine utilizando apenas régua o inverso do ponto  $P$  com relação a circunferência  $C$  na figura abaixo.



# Conclusão

Ao abordar um conteúdo que não está presente no currículo das escolas, trazemos um grande desafio de motivar os alunos na aprendizagem desse conhecimento. Optamos neste trabalho trazer para alunos do ensino básico uma proposta de estudo de uma geometria não euclidiana, e o maior desafio dessa abordagem é fazer com que esse conhecimento seja acessível a esse aluno e que o mesmo possa ter condições de aprender e se interessar em conhecer outras geometrias que não são estudadas no ensino básico no Brasil.

A escolha da geometria inversiva como foco deste estudo mostrou-se relevante não apenas pela sua beleza teórica, mas também por sua aplicabilidade em problemas geométricos e sua conexão com outros tópicos do currículo escolar, como semelhança de triângulos, ângulos na circunferência e relações métricas. A parte teórica do trabalho desempenhou um papel fundamental ao construir uma base sólida para a compreensão do conceito de inversão, suas propriedades e suas implicações, permitindo que o leitor reconheça a elegância e a profundidade dessa área da matemática.

Além disso, as aplicações desenvolvidas ao longo do trabalho demonstraram como a geometria inversiva pode ser uma ferramenta poderosa para resolver problemas complexos, incluindo aqueles encontrados em olimpíadas de matemática e vestibulares militares. Essas aplicações foram essenciais para ilustrar que o estudo de geometrias não euclidianas não se restringe ao campo teórico, mas pode também oferecer soluções práticas e criativas para desafios reais.

Um ponto de destaque foi a sequência didática elaborada para adaptar esse tema ao ensino médio. Dividida em quatro aulas, ela permitiu que os alunos revisassem conceitos fundamentais da geometria euclidiana, fossem introduzidos à inversão geométrica e explorassem suas propriedades, além de aplicarem esse conhecimento em situações práticas. O uso do software GeoGebra foi um recurso estratégico, pois proporcionou aos alunos uma experiência visual e interativa, facilitando a compreensão de conceitos abstratos e estimulando o interesse pelo tema.

Por fim, a aplicação de um exercício avaliativo para consolidar o aprendizado, permitindo não apenas verificar o nível de compreensão dos alunos, mas também reforçar a importância de conectar teoria e prática no processo de ensino e aprendizagem.

Concluimos que a abordagem proposta neste trabalho não apenas enriquece o ensino de matemática, mas também estimula a curiosidade e o pensamento crítico dos alunos. Esperamos que essa iniciativa inspire educadores a explorar novos caminhos no ensino de geometria, promovendo um ensino mais inclusivo e desafiador, que vá além dos limites do currículo tradicional.

# Referências

- [1] Barbosa, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. SBM, 1985.
- [2] Dolce, O., and Pompeo, J. N. *Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana*. Atual, 1993.
- [3] Duran, F. Transformações de möbius e inversões. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2013.
- [4] Mesquita, R. R. *Geometria Inversiva*. Editora Ciência Moderna, 2022.
- [5] Munaretto, A. C. C., and Siqueira, P. H. Solução do problema de apolônio utilizando geometria inversiva. In *Graphica Rio 2011* (2011).
- [6] Neto, A. C. M. *Geometria*. SBM Rio de Janeiro, Brasil, 2022.
- [7] Oliveira, P. M. *Notas sobre o Ensino da Geometria: Será o infinito um ponto?* Educação e Matemática n.95, 2007.
- [8] Reventós Tarrida, A. Geometría inversiva. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 6 (2003), 39–79.
- [9] Vilumbrares, L. U. Geometría inversiva.