

2025

Alessandro Carlos de Assis

PROFMAT / UFOP

Universidade Federal de Ouro Preto

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede

Nacional - PROFMAT

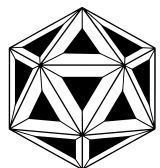
Dissertação

**Propriedade Focal das
Cônicas e atividades
práticas usando dobraduras
e software educacional**

Alessandro Carlos de Assis

Ouro Preto
2025





DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO



PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

Alessandro Carlos de Assis

**Propriedade Focal das Cônicas e Atividades
Práticas Usando Dobraduras e Software
Educativo**

Ouro Preto - MG, Brasil

Março 2025

Alessandro Carlos de Assis

Propriedade Focal das Cônicas e Atividades Práticas Usando Dobraduras e Software Educacional

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)

Departamento de Matemática (DEMAT)

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Orientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira

Coorientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza

Ouro Preto - MG, Brasil

Março 2025

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

A848p Assis, Alessandro Carlos de.
Propriedade focal das cônicas e atividades práticas usando dobraduras e software educacional. [manuscrito] / Alessandro Carlos de Assis. - 2025.
83 f.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira.
Coorientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza.
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

1. Matemática- Estudo e Ensino. 2. Geometria. 3. Álgebra. 4. Seções cônicas. 5. GeoGebra (Software). I. Ferreira, Geraldo César Gonçalves. II. Souza, Gil Fidelix de. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 51

Bibliotecário(a) Responsável: Soraya Fernanda Ferreira e Souza - SIAPE: 1.763.787



FOLHA DE APROVAÇÃO

Alessandro Carlos de Assis

Propriedade Focal das Cônicas e atividades práticas usando dobraduras e software educacional

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de mestre

Aprovada em 24 de abril de 2025

Membros da banca

Prof. Dr. Geraldo Cesar Goncalves Ferreira - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza - Coorientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Antonio Marcos da Silva - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Tulio Vales Deslandes Ferreira - Universidade Federal de Viçosa

Prof. Dr. Geraldo Cesar Goncalves Ferreira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 24/04/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Geraldo Cesar Goncalves Ferreira, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 24/04/2025, às 10:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0899958** e o código CRC **388B04BE**.

“O bom juiz não deve ser jovem, mas ancião, alguém que aprendeu tarde o que é a injustiça, sem tê-la sentido como experiência pessoal e ínsita na sua alma; mas por tê-la estudado, como uma qualidade alheia, nas almas alheias.”
(Platão)

Agradecimentos

Agradeço à minha família que é e sempre foi meu porto seguro. Que ajudou a me tornar a pessoa que sou, buscando ser a cada dia uma pessoa melhor e fazer sempre o meu melhor em tudo, com humildade, fé, esforço e dedicação.

Meus amigos e colegas de trabalho por sempre me incentivar, apoiar e mostrar caminhos para que eu continue a buscar desenvolver me como profissional. Meus amigos de curso Augusto, Kátia, Gabriel e Shamylla pelas conversas, desabafos, risadas. Juntos enfrentamos os momentos difíceis, desfrutamos os bons, criamos várias memórias que guardarei para sempre.

Os professores e todos que de algum modo fizeram parte desse período de estudos, por compartilharem um pouco de suas experiências e proporcionarem que construísse as minhas.

Todos os educadores que fizeram parte da minha vida acadêmica até esse momento por terem me mostrado muito do mundo, despertado o interesse em conhecer e aprender cada vez mais.

Resumo

Este trabalho explora as cônicas — circunferência, elipse, hipérbole e parábola — com foco em suas equações, propriedades focais e reflexivas. O estudo também tem um enfoque metodológico, utilizando atividades práticas divididas em duas abordagens: construções geométricas tradicionais com dobraduras e a aplicação de recursos tecnológicos, como o software educacional GeoGebra. Por meio dessas atividades, busca-se uma compreensão mais visual e interativa das cônicas e suas propriedades. São realizadas simulações no GeoGebra para demonstrar e validar a propriedade reflexiva das cônicas, uma característica fundamental em aplicações como a engenharia e a óptica. O trabalho tem como objetivo contribuir para o ensino e aprendizagem da geometria a alunos do ensino básico, por meio de métodos interativos, visando potencializar a assimilação de conceitos matemáticos e suas aplicações práticas. Fortalece e amplia o estudo do tema cônicas para além daquilo que é exigido para alunos do ensino fundamental e médio de acordo com as diretrizes educacionais da (BNCC...).

Palavras chaves: Cônicas; Propriedades, Educação Básica, GeoGebra.

Abstract

This work explores conics — circumference, ellipse, hyperbola and parabola — focusing on their equations, focal and reflective properties. The study also has a methodological focus, using practical activities divided into two approaches: traditional geometric constructions with folds and the application of technological resources, such as the GeoGebra educational software. Through these activities, we seek a more visual and interactive understanding of conics and their properties. Simulations are carried out in GeoGebra to demonstrate and validate the reflective property of conics, a fundamental characteristic in applications such as engineering and optics. The aim of the work is to contribute to the teaching and learning of geometry to primary school students, through interactive methods, aiming to enhance the assimilation of mathematical concepts and their practical applications. Strengthens and expands the study of the topic of conics beyond what is required for elementary and secondary school students in accordance with the educational guidelines of the national common curriculum base, ([BNCC...](#),).

keywords: Conics; Properties, Basic Education, Geogebra.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Cônicas	16
Figura 2 – Incidência de raios de luz em um farol	18
Figura 3 – Ponte Juscelino Kubitschek	18
Figura 4 – Incidência de raios em uma antena	19
Figura 5 – Órbitas Elípticas dos planetas no sistema solar	20
Figura 6 – Esquema típico de um Refletor de Newton	20
Figura 7 – Telescópio Original de Newton	21
Figura 8 – Catedral de Brasília	21
Figura 9 – Bilhar Elíptico, Hipérbolico e Parabólico	22
Figura 10 – Circunferência de centro O e raio r	23
Figura 11 – Elipse	24
Figura 12 – Elipse paralela ao eixo OX	26
Figura 13 – Hipérbole	28
Figura 14 – Hipérbole paralela ao eixo OY	30
Figura 15 – Parábola	32
Figura 16 – círculo e reta tangentes	36
Figura 17 – Reta normal ao círculo em um ponto	36
Figura 18 – Ângulo de segmento	37
Figura 19 – Ângulo de incidência e reflexão na Elipse	39
Figura 20 – Ângulo de incidência e reflexão na elipse	40
Figura 21 – Ângulo de incidência e reflexão na elipse	43
Figura 22 – Ângulo de incidência e reflexão na Hipérbole (1)	45
Figura 23 – Ângulo de incidência e reflexão na Hipérbole (2)	48
Figura 24 – Ângulo de incidência e reflexão na Parábola	49
Figura 25 – Elipse a partir de dobraduras no papel vegetal	53

Figura 26 – Hipérbole a partir de dobraduras no papel vegetal	54
Figura 27 – Parábola a partir de dobraduras no papel vegetal	55
Figura 28 – Pontos aleatórios na elipse	56
Figura 29 – Pontos aleatórios na hipérbole	57
Figura 30 – Pontos aleatórios na parábola	58
Figura 31 – Elipse criada no GeoGebra	59
Figura 32 – Elipse criada no GeoGebra por retas tangentes	60
Figura 33 – Hipérbole	61
Figura 34 – Hipérbole criada no Geogbra por retas tangentes	62
Figura 35 – Parábola	64
Figura 36 – Parábola criada no GeoGebra por retas tangentes	65
Figura 37 – Ângulo de incidência e reflexão na Elipse	66
Figura 38 – Ângulos de incidência e reflexão na Hipérbole	68
Figura 39 – Ângulo de incidência e reflexão na Parábola	70
Figura 40 – Dobraduras em sala de aula	72
Figura 41 – Hipérboles construídas pelos alunos	73
Figura 42 – Parábolas e Hipérboles construídas pelos alunos	73
Figura 43 – Atividades no Geogebra	74
Figura 44 – Atividades no Geogebra	75

Sumário

Introdução	13
1 BREVE RESUMO SOBRE AS CÔNICAS	15
2 CÔNICAS	23
2.1 Circunferência	23
2.2 Equação Reduzida de uma Circunferência	23
2.3 Elipse	24
2.3.1 Equação Reduzida de uma Elipse com Centro (x_0, y_0) e Eixos Paralelos	25
2.4 Hipérbole	28
2.4.1 Equação Reduzida de uma Hipérbole com Centro na Origem e Focos sobre o Eixo OY	29
2.5 Parábola	31
2.5.1 Equação Reduzida de uma Parábola com Vértice na Origem	32
3 PROPRIEDADES FOCAIS DAS CÔNICAS	35
3.1 Propriedade focal na Elipse	39
3.2 Propriedade focal na Hipérbole	44
3.3 Propriedade focal na Parábola	49
4 ROTEIRO DE ATIVIDADES	51
4.1 ATIVIDADE 1: CONSTRUÇÃO DE CÔNICAS USANDO DOBRADURAS	52
4.1.1 CONSTRUÇÃO DA ELIPSE	52
4.1.2 CONSTRUÇÃO DA HIPÉRBOLE	52
4.1.3 CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA	53
4.2 ATIVIDADE 2: UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA PARA CONSTRUIR AS CÔNICAS	55
4.2.1 CONSTRUÇÃO DA ELIPSE	56
4.2.2 CONSTRUÇÃO DA HIPÉRBOLE	59
4.2.3 CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA	62

4.3	ATIVIDADE 3: UTILIZAR O SOFTWARE GEOGEBRA PARA COMPROVAÇÃO DA PROPRIEDADE REFLEXIVA DAS CÔNICAS	64
4.3.1	PROPRIEDADE REFLEXIVA NA ELIPSE	64
4.3.2	PROPRIEDADE REFLEXIVA NA HIPÉRBOLA	66
4.3.3	PROPRIEDADE REFLEXIVA NA PARÁBOLA	67
Conclusão	71
REFERÊNCIAS	77

Introdução

Esse é um trabalho de conclusão para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Neste trabalho, procuramos aprofundar o estudo das cônicas para temas além do que é visto normalmente em sala de aula no Ensino Médio e mostrando novos caminhos a serem explorados ao se trabalhar com o tema. Incrementando o modo teórico e de apresentação de fórmulas com opções para se explorar, visualizar a construção do conhecimento. Utilizar de situações mais concretas ao se estudar o tema torna mais fácil a compreensão e fixação.

E as cônicas apresentam um campo vasto de aplicações cotidianas que tornam o assunto mais próximo de quem o estuda e que, se bem explorado, pode ajudar e muito na aprendizagem e construção de novos conhecimentos. Além da Geometria Plana, Trigonometria, Geometria Analítica podem ser acrescentados o estudo com programas computacionais, como o GeoGebra. A utilização de recursos tecnológicos como esse facilita a exploração de novas situações, possibilidades e descobertas para além do que se consegue alcançar com a utilização de materiais comuns de uma sala de aula tradicional.

No primeiro capítulo é apresentado um pouco da história do surgimento das cônicas e alguns dos matemáticos que estudaram e desenvolveram esse tema até o que atualmente conhecemos. O capítulo seguinte vem apresentar o assunto do modo como é trabalhado geralmente na educação básica. Introduzimos o conceito de circunferência, elipse, hipérbole e parábola; damos a definição e deduzimos as fórmulas para algumas situações mais comumente apresentadas nos livros didáticos. Sem contudo explorar todas as particularidades de cada cônica, visto que não é o objetivo principal do trabalho e porque na educação básica o tema é visto de modo mais resumido.

O capítulo 3 explora temas mais avançados que geralmente não são trabalhados com alunos do ensino básico, principalmente em escolas públicas. Se explora mais o estudo de circunferência e parábola e menos ou quase nada dos conceitos de elipse e hipérbole. Neste capítulo falamos um

pouco sobre a importância de algumas propriedades das cônicas, bem como um pouco de suas aplicações no dia a dia. São apresentadas em especial a propriedade refletora das cônicas, cujo estudo proporcionou e proporciona aplicações diversas e de grande importância, sendo que muito ainda há para ser estudado.

Como dito anteriormente, o tema cônicas é explorado de modo bem resumido no ensino básico ou as vezes nem é estudado. Quando falamos de ensino fundamental, o nível de cobrança do assunto se resume a conceitos preliminares sobre a circunferência e parábolas. Como os alunos ainda são muito iniciantes em conteúdos mais exigentes da matemática como as cônicas, são necessários modos diferentes de trabalhar. Baseado em atividades propostas para estudantes do ensino médio, o quarto capítulo apresenta um roteiro de atividades que podem ser utilizadas com alunos de anos anteriores. Tais atividades servem para apresentar o tema e descobrir certas características de cada uma das cônicas sem entrar em tópicos complexos e ir além do nível de compreensão dos alunos neste momento da vida acadêmica.

Esperamos que esse trabalho proporcione reflexões sobre como o tema cônicas tem sido tratado atualmente no ensino fundamental e médio. De acordo com as exigências curriculares da base nacional comum curricular (BNCC. . . ,) e do Currículo Referência de Minas Gerais (PLANOS. . . ,) é exigido em relação a circunferência, o estudo da definição, comprimento, área, arco e ângulos, no ensino fundamental e identificação de uma equação de segundo grau como representação de uma circunferência, no ensino médio. A parábola da mesma forma é introduzida apenas como a representação de uma função quadrática. Dado o vasto campo de aplicação das cônicas e suas propriedades é importante que o tema seja mais explorado já na educação básica. As atividades propostas no capítulo 4 demonstram que com recursos didáticos simples e sem tornar o assunto complexo, é possível acrescentar o estudo de elipse e da hipérbole ao que já é cobrado sobre cônicas.

Breve resumo sobre as Cônicas

A descoberta das seções cônicas, segundo os historiadores, deve-se ao astrônomo e geômetra grego Menaecmo (380 - 320 a.C. aproximadamente). Ele foi o primeiro a avançar nos estudos das cônicas, enquanto trabalhava na solução do clássico problema da duplicação do cubo. Descobriu as curvas que hoje chamamos de seções cônicas. Menaecmus deu não apenas uma, mas duas soluções para a duplicação do cubo, utilizando as duas curvas, parábola e a hipérbole. Consequentemente, a elipse surgiu mais tarde quando se seccionou uma superfície cônica perpendicularmente a sua geratriz (PEREIRA, 2013). Outro matemático que estudou as cônicas foi o grego, Euclides de Alexandria (325 - 265 a.C), que escreveu um trabalho sobre cônicas composto de quatro volumes. Porém muitos de seus trabalhos foram perdidos, vindo a ser de conhecimento por comentários posteriores. Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) também dedicou um pouco da sua vida ao estudo das cônicas, tendo calculado as áreas da elipse (RODRIGUES, 2021). Para Menaecmus e Euclides cada cônica era obtida por um tipo diferente de cone, através de seções de cones circulares retos com planos perpendiculares a uma geratriz do cone, obtendo três tipos distintos de curvas, conforme a secção meridiana do cone fosse um ângulo agudo, um ângulo reto ou um ângulo obtuso.

A denominação das cônicas não é creditada a Menaecmo. As cônicas somente foram nomeadas pelo astrônomo e matemático Apolônio de Perga (262-190 a. C.) em sua obra *Seções Cônicas* na qual aprimorou e aperfeiçoou o que se conhecia até o momento sobre o assunto. Esta obra, define as seções cônicas do modo mais geral possível, como seções de cones, usando métodos característicos do livro *Os Elementos* de Euclides de Alexandria. Apolônio de Perga conseguiu mostrar que a partir de um único cone poderíamos obter qualquer uma das três espécies de seções (parábola, elipse e hipérbole) variando apenas a inclinação do plano de interseção. Além disso, foi ele quem batizou as cônicas de parábola, elipse e hipérbole. Foi ele também o responsável pelo cone de duas folhas e consequentemente do formato atual da hipérbole com dois ramos (CERQUEIRA, 2017). Mostrou que o cone de onde se obtém as seções cônicas não precisa ser reto, podendo ser oblíquo ou escaleno. Apolônio estudou também as propriedades de assíntotas, hipérbole conjugadas

e do traçado de tangentes. Fez estudos sobre tangentes e normais a uma curva, abordando as normais como segmentos de reta máximos e mínimos tirados a um ponto da curva e ocupou-se da construção e enumeração de normais por um ponto dado. Descreveu sobre a igualdade e semelhança das cônicas além de demonstrar que todas as parábolas são semelhantes e que uma parábola não pode ser semelhante a uma elipse ou uma hipérbole, nem uma elipse a uma hipérbole (BOYER; MERZBACH, 2019). O estilo de Apôlonio segue o estilo formal de Euclides, seus resultados parecem uma tentativa de estender, adaptar, os métodos anteriormente empregados no estudo de cônicas. Sua obra juntamente com *Os Elementos* de Euclides formam o ápice da matemática grega. Os estudos e métodos de Apolônio não são diferentes do uso de sistemas de coordenadas, sendo semelhantes aos atuais da Geometria Analítica de Fermat e Descartes.

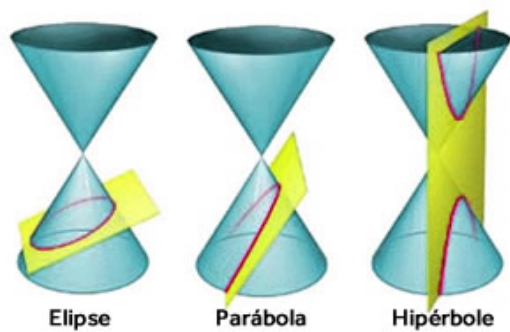


Figura 1 – Cônicas

Fonte: <https://www.somatematica.com.br/emedio/conicas/conicas.php>

Segundo Delgado, Frensel e Crissaff (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013), outra obra de Apôlonio de Perga, *Plane Loci*, foi restaurada mediante referências contidas na *Coleção matemática*, de Pappus (290 e 350 d.C), por Pierre de Fermat (1601 - 1665) na sua obra *Ad locos planos et solidos isagoge*, escrita antes de 1637, mas publicada postumamente, apenas em 1679; na qual estabelece um sistema de coordenadas na Geometria Euclidiana. A aplicação da Álgebra combinada com a natureza particular dos lugares geométricos estudados em *Plane Loci* revelou a Fermat que todos os lugares geométricos discutidos por Apolônio poderiam ser apresentados na forma de equações algébricas com duas variáveis.

No século XVII, Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) desenvolveram a Geometria Analítica, relacionando as cônicas a equações algébricas. Fermat mostrou que as secções cônicas de Apolônio podem ser escritas como equações do segundo grau nas coordenadas (x, y) , (RODRIGUES, 2021). Utilizou mudanças de coordenadas para descobrir que tipo de lugar correspondia a uma equação de primeira ou segunda ordem. Ele também mostrou qual equação do segundo grau corresponde a uma cônica, um par de retas ou uma reta contada duas vezes. Descobriu as equações da reta, da circunferência e as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole. Ele também descobriu que se a equação envolve três incógnitas, ela não pode ser de um

ponto ou uma curva, mas sim de uma superfície, (PEREIRA, 2013). Os estudos de Fermat deram origem a sete equações que podem obter formas irredutíveis a partir da equação geral do segundo grau com duas variáveis.

René Descartes iniciou uma nova forma de classificação das curvas por meio de equações. Conhecendo as propriedades geométricas de uma curva, ele representava todos os pontos dela por meio de equações. Não tinha o objetivo de fazer um estudo mais aprofundado das cônicas, tal interesse pelas cônicas se deu por causa de seu uso na solução do famoso problema de Pappus. No entanto, a forma como Descartes resolveu o problema de Pappus foi de tal importância que muitos matemáticos têm-na como a base para o desenvolvimento de toda a Geometria Analítica atual. Fermat era avesso a publicar seus trabalhos, anunciava as suas descobertas em cartas aos amigos, às vezes anotava resultados nas margens dos seus livros. Disso resulta, em parte, o fato de René Descartes (1596 - 1650) comumente ser mais lembrado como criador da Geometria Analítica.

Descartes e Fermat sofreram a influência de François Viète (1540 — 1603), mas continuaram os seus estudos em direções diferentes, (RAMOS, 2013). Descartes adotou um dos propósitos de Viète – a construção geométrica das raízes de equações algébricas – e deu continuidade a ele juntamente com o simbolismo algébrico moderno. Descartes, que publicou a sua *La Géométrie* em 1637, detalha um programa inovador para a resolução de problemas geométricos – o que ele chama de “cálculo geométrico” que se baseia em uma abordagem distinta da relação entre álgebra e a geometria, oferecendo técnicas algébricas inovadoras para analisar problemas geométricos, uma nova forma de compreender a ligação entre a construção de uma curva e a sua equação algébrica e uma classificação algébrica de curvas que se baseia no grau das equações utilizadas para representar estas curvas. As técnicas de resolução de problemas e os resultados matemáticos que Descartes apresenta em *La Géométrie* foram novos e incrivelmente influentes na prática da matemática moderna. Também podemos encontrar em *La Géométrie* um significado filosófico: a mistura de álgebra e geometria e a abordagem peculiar ao estatuto “geométrico” das curvas que caracterizam o programa matemático de Descartes e que permanecem como contribuições notáveis para os debates filosóficos em curso que cercaram a prática matemática moderna.

Fermat e Descartes traduziram por equações e letras o que os gregos já tinham escrito por palavras e com proporções e, introduziram o método das coordenadas na geometria. A introdução das coordenadas, teve como imediata consequência a redução dos estudos feitos sobre a resolução gráfica de equações. Da aplicação dos métodos analíticos à geometria, deduziram que os problemas da interpolação de duas ou mais medidas proporcionais, o problema da triseção do ângulo, etc., não podem ser resolvidos com a régua e o compasso. A Geometria Analítica, como é hoje, pouco se assemelha às contribuições deixadas por Fermat e Descartes, (DOMINGUES, 2013). Inclusive sua marca mais característica, um par de eixos ortogonais, não usada por nenhum deles. Mas, cada um a seu modo, sabia que a ideia central era associar equações a curvas e superfícies. Neste particular,

Fermat foi mais feliz. Descartes superou Fermat na notação algébrica. De acordo com os estudos e análises de Fermat, em sua linguagem atual, as equações são descritas por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Dessa equação podemos obter os lugares geométricos: elipse, parábola e hipérbole. Esses lugares geométricos aparecem em nosso cotidiano em várias situações e o seu estudo proporcionaram e proporcionam diversas aplicações da vida moderna.

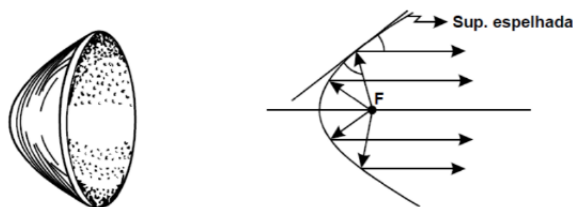


Figura 2 – Incidência de raios de luz em um farol

Fonte: <https://wp.ufpel.edu.br/nucleomateceng/files/2012/07/C>

As propriedades refletoras da parábola contribuem para a construção de telescópios, antenas, radares, faróis, etc. Nos telescópios, a maior parte dos espelhos são parabólicos. Os refletores parabólicos de faróis e lanternas permitem que a luz da lâmpada localizada no foco se propague em raios paralelos ao eixo da parábola formando o feixe.



Figura 3 – Ponte Juscelino Kubitschek

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte_Juscelino_Kubitschek

A partir da propriedade refletora das parábolas, os engenheiros civis constroem pontes de suspensão parabólica. Um bom exemplo é a ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília, também conhecida como Ponte JK ou Terceira Ponte (Figura 3), que utiliza três arcos parabólicos em sua sustentação.

As antenas parabólicas, que captam ondas eletromagnéticas dos satélites em órbita ao redor da terra refletem o conjunto de raios recebidos em um único ponto (o foco da parábola). Os radares

operam de forma semelhante às antenas parabólicas, recebendo o eco de pulsos eletromagnéticos. Uma onda de rádio encontrando uma antena receptora parabólica, numa direção paralela ao seu eixo, será refletida na direção do foco da parábola que gera a superfície parabólica. Isso justifica a razão das antenas que captam sinais do espaço serem de formato parabólico, pois é necessário captar os sinais e concentrá-los em um único ponto para serem tratados, de acordo com o fim a que se destinam.

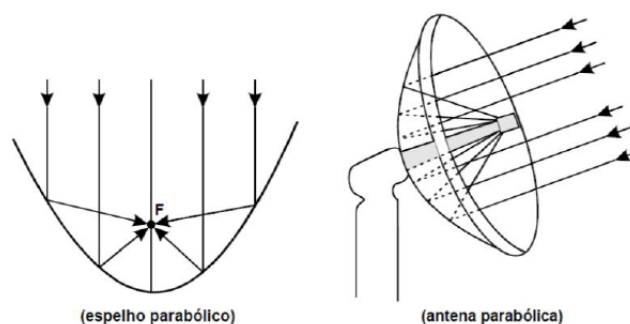


Figura 4 – Incidência de raios em uma antena

Fonte: <https://wp.ufpel.edu.br/nucleomatceng/files/2012/07/C>

A aplicação da elipse é frequentemente usada na Arquitetura, no Design e na Engenharia, podendo ser aplicada também em vários assuntos para o estudo da matemática e da física. Uma das aplicações concretas da elipse está no sistema solar, uma vez que a órbita dos planetas ao redor do Sol é elíptica, conforme enunciado por Johannes Kleper (1571 - 1630), alemão nascido perto da cidade de Stuttgart. Kleper realizou diversas contribuições no campo da matemática e da astronomia, adepto da teoria copernicana e influenciado pelos estudos dos gregos. Formula as três leis que são consideradas marcos na história da astronomia, dentre elas a que descreve como elíptica a trajetória orbital dos planetas: “os planetas movem-se em torno do Sol em trajetórias elípticas com o Sol num dos focos”, (MIRANDA, 2013). Algumas órbitas são mais “achatadas” do que as outras, pelo fato das órbitas serem elipses distintas (com excentricidades distintas). A órbita da Terra, por exemplo, é quase circular.

Podemos também observar outra aplicação óptica da elipse, que pode ser encontrada no dispositivo de iluminação dos dentistas. Este consiste num espelho com a forma de um arco de elipse e numa lâmpada que se coloca no foco mais próximo. A luz da lâmpada é concentrada através do espelho no outro foco, que é ajustado pelo dentista para estar num ponto dentro da boca de seu paciente.

Aplicações da hipérbole ocorrem em diversas áreas profissionais como na óptica, na mecânica celeste, na mecânica dos fluidos, na engenharia e na arquitetura. Na segunda metade do mesmo séc. XVII em que Galileu fez descobertas pioneiras com os seus refractores, surgiu o telescópio refletor, que, depois de dois séculos de concorrência com o refrator, se tornou definitivamente dominante



Figura 7 – Telescópio Original de Newton

Fonte: <https://www.insightobservatory.com/2018/03/how-newtons-telescope-changed-world.html>

aplicando-se um espelho secundário hiperbólico (no modelo gregoriano o espelho secundário era elipsoidal).

Na Mecânica Celeste, a trajetória de um cometa, dependendo de sua velocidade, pode descrever uma órbita elíptica, parabólica ou hiperbólica. Um exemplo de utilização da hipérbole em construções pode ser vista na Catedral de Brasília, uma obra-prima do renomado arquiteto Oscar Niemeyer, e seu estilo arquitetônico único e inovador. A catedral é construída utilizando hipérboles de concreto, que se elevam em direção ao céu, criando uma estrutura imponente e única. Essas hipérboles representam os braços abertos de uma pessoa, simbolizando acolhimento e paz.



Figura 8 – Catedral de Brasília

Fonte: <https://www.qualviagem.com.br/5-obras-de-oscar-niemeyer-em-brasilia-para-se-maravilhar/>

Os bilhares cônicos são outros exemplos de aplicação das cônicas e sua propriedade refletora. Eles são uma aplicação direta dessa propriedade, possibilitando uma melhor interpretação da mesma,

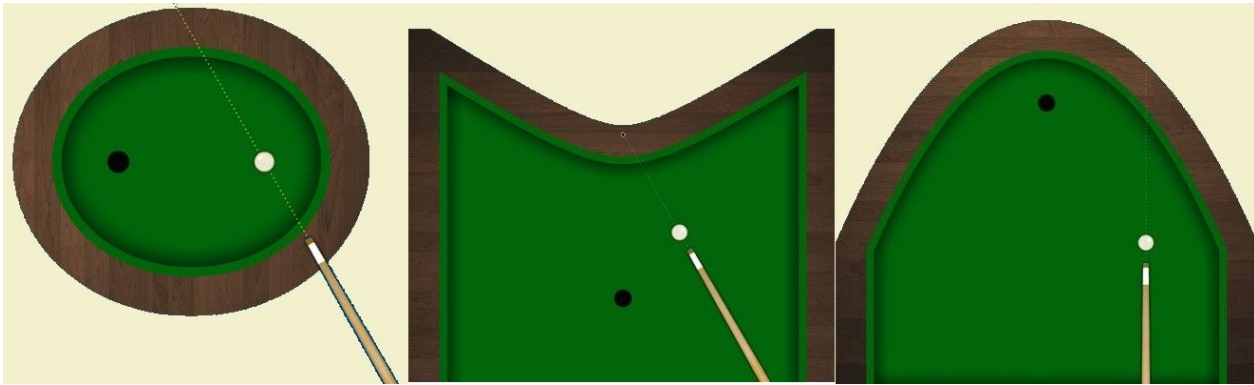


Figura 9 – Bilhar Elíptico, Hipérbolico e Parabólico

Fonte: <https://www.atractor.pt/geral/temp/BilharConico.html>

pois ao entrar em movimento a trajetória da bola irá descrever um ponto sobre a mesa do bilhar, que ao atingir a tabela será refletida para a caçapa. Essa propriedade de reflexão, contida nos bilhares cônicos, ocorre pelo fato de que o ângulo de incidência, ou seja, o ângulo de chegada quando a bola atinge a tabela, é igual ao ângulo de reflexão. Sendo que para cada bilhar ocorrerá de maneira diferente, a depender da posição da bola na mesa e das especificidades de cada cônica, (OLIVEIRA, 2019).

Cônicas

2.1 Circunferência

Definição 1. *Circunferência é o conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância dada. O ponto dado é o centro e a distância é o raio da circunferência. Dados um plano α , um ponto O desse plano e um distância r , a circunferência de centro O e raio r é representada por;*

$$\lambda(O, r) = \{P \in \alpha \mid d(P, O) = r\}$$

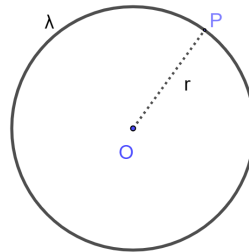


Figura 10 – Circunferência de centro O e raio r

Fonte: Autor

2.2 Equação Reduzida de uma Circunferência

Proposição 1 (Circunferência). *Seja λ uma circunferência de centro $O = (x_0, y_0)$ e raio $r > 0$. Então um ponto $P = (x, y)$ pertence a λ se, e somente se,*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Demonstração. Por definição de circunferência, a distância entre um ponto $P = (x, y)$ pertencente à circunferência e o centro $O = (x_0, y_0)$ é igual ao raio r . Logo,

$$d(P, O) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

O argumento recíproco vale da mesma forma: se a distância satisfaz essa igualdade, então P está a uma distância r do centro O , logo pertence à circunferência. \square

2.3 Elipse

Definição 2. Uma elipse de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P pertencentes ao plano α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior que a distância entre os focos $2c > 0$. Ou seja, sendo $0 < c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$, (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013)

$$elipse = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

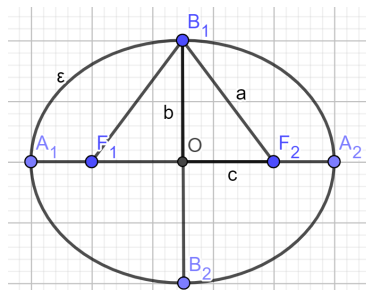


Figura 11 – Elipse

Fonte: Autor

De acordo com a Figura 11 podemos destacar os seguintes elementos principais da Elipse:

- F_1 e F_2 são os focos
- O ponto O é o centro
- $\overline{B_1B_2}$ é o eixo menor
- $\overline{A_1A_2}$ é o eixo maior
- $2b$ é a medida do eixo menor

- $2c$ é a distância focal
- $2a$ é a medida do eixo maior
- $\frac{c}{a}$ é a excentricidade.

Quanto maior for a excentricidade, mais achatada será a elipse. Como $a > c$, então ao dividirmos c por a , vamos encontrar sempre um número maior que 0 e menor do que 1, ou seja, $0 < \frac{c}{a} < 1$. Quanto mais próximo de 1, mais achatada será a elipse, e quanto mais próximo de 0, mais redonda será essa elipse, aproximando-se cada vez mais de uma circunferência.

Podemos observar na Figura 11 que o triângulo B_1OF_2 é retângulo em O , logo temos a relação notável

$$a^2 = b^2 + c^2$$

2.3.1 Equação Reduzida de uma Elipse com Centro (x_0, y_0) e Eixos Paralelos

Proposição 2 (Elipse). *Seja \mathcal{E} uma elipse de centro $O = (x_0, y_0)$, com focos F_1 e F_2 alinhados paralelamente ao eixo X . Suponha que a medida do semi-eixo maior seja $a > 0$, a do semi-eixo menor seja $b > 0$ e da semi-distância focal seja c tal que $c^2 = a^2 - b^2$. Então, para um ponto $P = (x, y)$,*

$$P \in \mathcal{E} \iff \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Demonstração. Por definição, a elipse \mathcal{E} é o conjunto de pontos $P = (x, y)$ para os quais a soma das distâncias aos dois focos F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Na Figura 12 temos uma elipse de centro $O = (x_0, y_0)$, coordenadas dos focos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

Calculando separadamente $d(P, F_1)$ e $d(P, F_2)$ obtemos:

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x - x_0 + c)^2 + (y - y_0)^2} \quad e \quad d(P, F_2) = \sqrt{(x - x_0 - c)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Para simplificar a notação, definimos:

$$m = x - x_0, \quad n = y - y_0.$$

Logo, $d(P, F_1) = \sqrt{(m + c)^2 + n^2} = \sqrt{m^2 + 2mc + c^2 + n^2}$ e

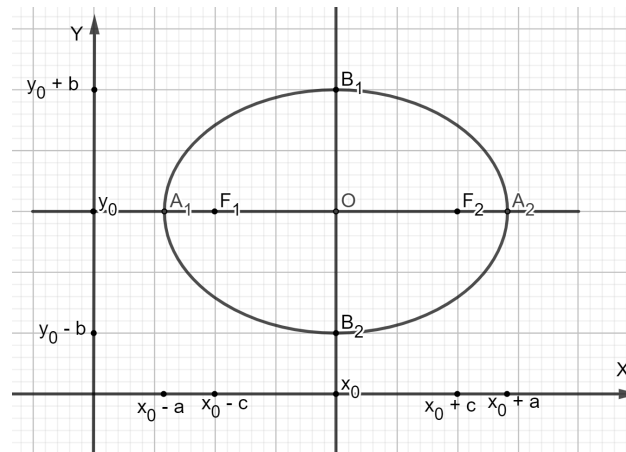


Figura 12 – Elipse paralela ao eixo OX

Fonte: Autor

$$d(P, F_2) = \sqrt{(m - c)^2 + n^2} = \sqrt{m^2 - 2mc + c^2 + n^2}.$$

Da definição de elipse:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \quad \implies \quad d(P, F_1) = 2a - d(P, F_2).$$

Elevamos os dois lados da igualdade ao quadrado e desenvolvemos o quadrado da diferença que aparece no segundo membro,

$$[d(P, F_1)]^2 = [2a - d(P, F_2)]^2$$

$$[d(P, F_1)]^2 = 4a^2 - 4a \cdot d(P, F_2) + [d(P, F_2)]^2$$

Organizamos os termos e usando os valores de $d(P, F_1)$ e $d(P, F_2)$ calculados anteriormente:

$$[d(P, F_1)]^2 - [d(P, F_2)]^2 = 4a^2 - 4a \cdot d(P, F_2)$$

$$\left[\sqrt{m^2 + 2mc + c^2 + n^2} \right]^2 - \left[\sqrt{m^2 - 2mc + c^2 + n^2} \right]^2 = 4a^2 - 4a \sqrt{m^2 - 2mc + c^2 + n^2}$$

$$(m^2 + 2mc + c^2 + n^2) - (m^2 - 2mc + c^2 + n^2) = 4a^2 - 4a \sqrt{m^2 - 2mc + c^2 + n^2}$$

Eliminamos os parênteses e agrupamos termos semelhantes,

$$m^2 + 2mc + c^2 + n^2 - m^2 + 2mc - c^2 - n^2 = 4a^2 - 4a \sqrt{m^2 - 2mc + c^2 + n^2}$$

$$4mc = 4a^2 - 4a\sqrt{m^2 - 2mc + c^2 + n^2}$$

$$4a\sqrt{m^2 - 2mc + c^2 + n^2} = 4a^2 - 4mc$$

Reorganizamos a igualdade e dividimos ambos os membros por 4,

$$a\sqrt{m^2 - 2mc + c^2 + n^2} = a^2 - mc$$

Para eliminar a raiz, elevamos novamente a igualdade ao quadrado e desenvolvemos o quadrado da diferença que surge no segundo membro,

$$(a\sqrt{m^2 - 2mc + c^2 + n^2})^2 = (a^2 - mc)^2$$

$$a^2(m^2 - 2mc + c^2 + n^2) = a^4 - 2a^2mc + m^2c^2$$

Efetuamos a multiplicação de polinômios do primeiro membro e agrupamos os termos semelhantes,

$$a^2m^2 - 2a^2mc + a^2c^2 + a^2n^2 = a^4 - 2a^2mc + m^2c^2$$

$$a^2m^2 - m^2c^2 + 2a^2mc - 2a^2mc + a^2n^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$a^2m^2 - m^2c^2 + a^2n^2 = a^4 - a^2c^2$$

Fazemos a fatoração pelo fator comum em evidência,

$$m^2(a^2 - c^2) + a^2n^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a \neq c$, podemos dividir ambos os membros da igualdade por $a^2(a^2 - c^2)$ obtendo:

$$\frac{m^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{a^2n^2}{a^2(a^2 - c^2)} = 1$$

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Da relação notável $a^2 = b^2 + c^2$ observamos que $a^2 - c^2 = b^2$ e como usamos as igualdades $x - x_0 = m$ e $y - y_0 = n$, temos a equação da elipse de centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo X :

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = 1 \implies \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

□

2.4 Hipérbole

Definição 3. Uma hipérbole H de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$, (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013), ou seja:

$$\text{hipérbole} = \{P \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}, 0 \leq a < c, d(F_1, F_2) = 2c$$

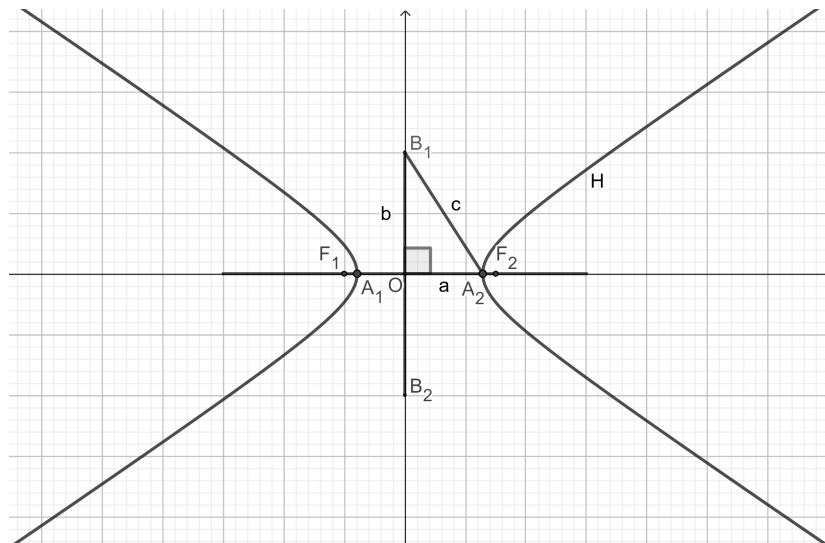


Figura 13 – Hipérbole

Fonte: Autor

De acordo com a Figura 13 podemos destacar os seguintes elementos principais da Hipérbole:

- F_1 e F_2 são os focos
- O ponto O é o centro
- $\overline{B_1B_2}$ é o eixo imaginário
- $\overline{A_1A_2}$ é o eixo real ou transverso

- $2b$ é a medida do eixo imaginário
- $2c$ é a distância focal
- $2a$ é a medida do eixo real
- $\frac{c}{a}$ é a excentricidade.

Observamos também que o triângulo OB_1F_2 da Figura 13 é retângulo e pelo Teorema de Pitágoras temos a relação notável,

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2.4.1 Equação Reduzida de uma Hipérbole com Centro na Origem e Focos sobre o Eixo OY

Proposição 3 (Hipérbole). *Considere a hipérbole \mathcal{H} com centro na origem $(0, 0)$, focos em $(0, -c)$ e $(0, c)$ e diferença (em valor absoluto) das distâncias a cada foco igual a $2a$. Então sua equação reduzida é*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

onde $c^2 = a^2 + b^2$.

Demonstração. Na Figura 14 temos os seguintes pontos, $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$. Por definição, para um ponto $P = (x, y)$ na hipérbole,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a,$$

onde $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$.

Calculando a distância entre os pontos,

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - (-c))^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y + c)^2} = \sqrt{x^2 + (y + c)^2}$$

e

$$d(P, F_2) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} = \sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

Da condição de existência da hipérbole:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a,$$

substituímos os valores de $d(P, F_1)$ e $d(P, F_2)$, manipulamos os termos e elevamos ambos os membros ao quadrado para eliminar o radical,

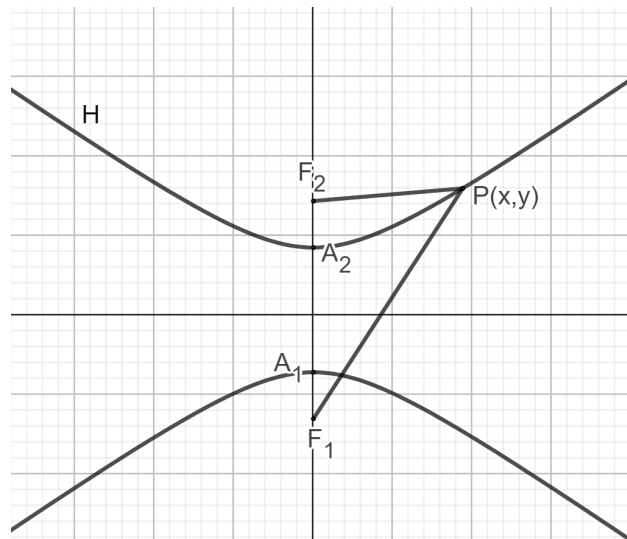


Figura 14 – Hipérbole paralela ao eixo OY

Fonte: Autor

$$\sqrt{x^2 + (y + c)^2} - \sqrt{x^2 + (y - c)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y + c)^2} = \sqrt{x^2 + (y - c)^2} \pm 2a$$

$$x^2 + (y + c)^2 = x^2 + (y - c)^2 \pm 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + 4a^2$$

Desenvolvemos os quadrados da soma e da diferença e em seguida agrupamos os termos semelhantes,

$$x^2 + y^2 + 2yc + c^2 = x^2 + y^2 - 2yc + c^2 \pm 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + 4a^2$$

$$x^2 + y^2 + 2yc + c^2 - x^2 - y^2 + 2yc - c^2 - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

$$4yc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

Agora dividimos todos os termos da igualdade por 4 e em seguida eliminamos o radical elevando os membros ao quadrado,

$$yc - a^2 = \pm a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

$$(yc - a^2)^2 = a^2(x^2 + (y - c)^2)$$

Desenvolvemos os quadrados das diferenças e efetuamos a multiplicação que aparece no segundo membro,

$$y^2c^2 - 2a^2yc + a^4 = a^2(x^2 + y^2 - 2yc + c^2)$$

$$y^2c^2 - 2a^2yc + a^4 = a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2yc + a^2c^2$$

Organizamos os termos e fazemos a fatoração por fator comum,

$$y^2c^2 - a^2y^2 - 2a^2yc + 2a^2yc - a^2x^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$y^2c^2 - a^2y^2 - a^2x^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$y^2(c^2 - a^2) - a^2x^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Podemos dividir os membros da igualdade por $a^2(c^2 - a^2)$ visto que $a \neq c$,

$$\frac{y^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)} - \frac{a^2x^2}{a^2(c^2 - a^2)} = \frac{a^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)}$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{(c^2 - a^2)} = 1$$

Substituindo $c^2 - a^2$ por b^2 de acordo com a relação notável, chegamos a equação reduzida da hipérbole paralela ao eixo OY :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

□

2.5 Parábola

Definição 4. Considere um ponto F e uma reta d , pertencentes a um plano α , com $F \notin d$. Seja p a distância entre F e d . Parábola P é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de F e d , (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013), ou seja:

$$\text{Parábola} = \{P \in \alpha \mid d(P, F) = d(P, d)\}$$

Na Figura 15 podemos identificar os seguintes elementos principais da parábola:

- F é o foco
- d é a diretriz

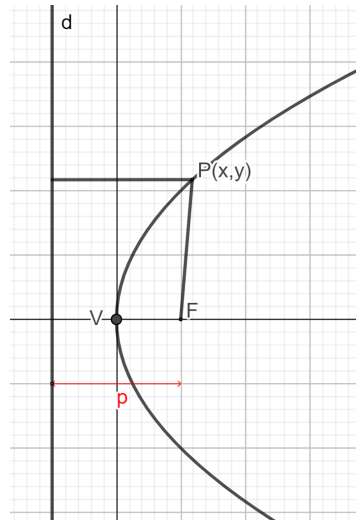


Figura 15 – Parábola

Fonte: Autor

- p é o parâmetro
- V é o vértice
- \overline{VF} é o eixo de simetria
- Relação notável: a distância entre o vértice e o foco da parábola é metade do parâmetro, $\overline{VF} = \frac{p}{2}$

2.5.1 Equação Reduzida de uma Parábola com Vértice na Origem

Proposição 4 (Parábola). *Seja \mathcal{P} uma parábola com vértice na origem $(0, 0)$, foco em $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ e diretriz $x = -\frac{p}{2}$, onde $p > 0$. Então sua equação reduzida é*

$$y^2 = 2px.$$

Caso o foco se localize no eixo Y (com diretriz horizontal), a equação reduzida é

$$x^2 = 2py.$$

Demonstração. Por definição, a parábola é o conjunto de pontos $P = (x, y)$ equidistantes do foco e da diretriz.

Aqui:

$$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad d: x = -\frac{p}{2}.$$

Assim,

$$d(P, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad e \quad d(P, d) = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

A condição $d(P, F) = d(P, d)$ desdobra-se em:

$$\sqrt{x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2} = x + \frac{p}{2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2} = -\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

Elevando ao quadrado e simplificando, em ambos os casos obtém-se a equação reduzida da parábola que abre para a direita.

$$\begin{aligned}x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2 &= x^2 + \frac{2xp}{2} + \frac{p^2}{4} \\y^2 &= xp + xp \\y^2 &= 2px\end{aligned}$$

No caso de foco sobre o eixo Y e, portanto, diretriz $y = -\frac{p}{2}$, a dedução análoga resulta em

$$x^2 = 2py.$$

□

Propriedades focais das Cônicas

As cônicas são curvas que possuem propriedades que as tornam especiais e aplicáveis em várias áreas, as quais nos deparamos constantemente em nosso cotidiano. Frequentemente usadas na Arquitetura, no Design e na Engenharia, (HABIB, 2013), podendo ser aplicada também em vários assuntos para estudo da física, como a óptica, na mecânica celeste, na mecânica dos fluidos.

Uma das aplicações concretas da elipse está no sistema solar, uma vez que a órbita dos planetas ao redor do Sol é elíptica. Outras aplicações criam condições acústicas especiais em auditórios e catedrais, construções de salas de sussurros, luminárias com lentes elípticas, antenas parabólicas, telescópios, radares, fogão solar. Os cabos que sustentam algumas pontes suspensas possuem formato de parábolas, as chaminés das usinas nucleares e de algumas construções possuem o formato de hipérbolas. Os faróis de automóveis que tem o formato parabólico bem como as lanternas de uso doméstico, os retrovisores externos de automóveis que fornece imagens reduzidas dos objetos. Aplicações na área da saúde, seja na medicina, fonoaudiologia, fisioterapia, odontologia como os espelhos odontológicos (dispositivo de iluminação), aparelhos de radioterapia dentre outros.

Uma dessas essenciais propriedades é o princípio de Reflexão das cônicas. Tal propriedade decorre diretamente das propriedades geométricas de suas retas tangentes ou suas retas normais.

Definição 5. *Um círculo C e uma reta t são tangentes ou, a reta t é tangente ao círculo C se tiverem exatamente um ponto em comum. Esse ponto é chamado de ponto de tangência de t e C .*

Proposição 5. *Sejam C um círculo de centro O e P um ponto de C . Se t é a reta que passa por P e é perpendicular a \overleftrightarrow{OP} então t é tangente a C .*

Demonstração. Supondo por absurdo que t não é tangente a C . Existe P' diferente de P tal que P' pertence a $C \cap t$. O triângulo OPP' da Figura 16 é isósceles com base $\overline{PP'}$, pois \overline{OP} e $\overline{OP'}$ possuem medidas iguais ao raio. Assim teríamos que os ângulos $\widehat{OPP'}$ e $\widehat{OP'P}$ medem 90° . (Absurdo). Logo $P' \notin C$ e assim P é o único ponto comum a t e a C .

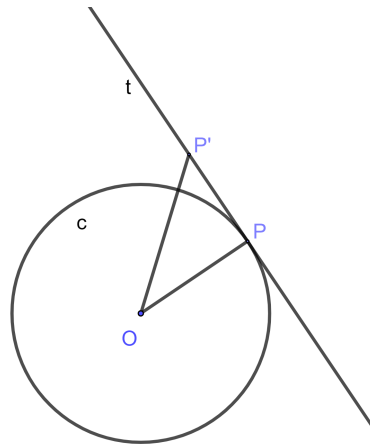


Figura 16 – círculo e reta tangentes

Fonte: Autor

Definição 6. Define-se reta normal como a reta que é perpendicular à reta tangente em seu ponto de tangência.

Proposição 6. A reta normal a uma circunferência C , de centro O e raio r , em um ponto P pertencente à circunferência C , determina ângulos cuja soma é igual a 90° .

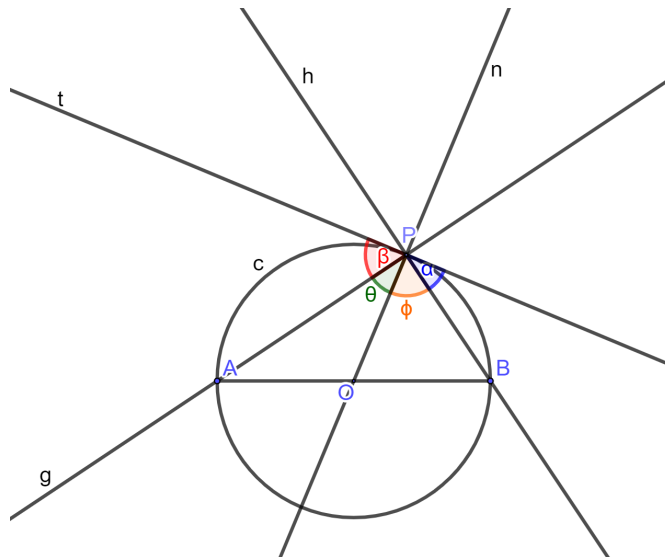


Figura 17 – Reta normal ao círculo em um ponto

Fonte: Autor

Demonstração. O triângulo APO da Figura 17 é isósceles de base AP . Como $\overline{AO} = \overline{OP} = r$, os ângulos \widehat{APO} e \widehat{OAP} são iguais a θ . O triângulo OPB é isósceles de base PB , pois $\overline{OP} = \overline{OB} = r$.

Logo os ângulos \widehat{OPB} e \widehat{OBP} são iguais a ϕ . O ângulo \widehat{AOP} é externo ao triângulo OPB e sua medida de acordo com o teorema do ângulo externo de um triângulo é igual a 2ϕ . Então no triângulo AOP teremos como soma dos ângulos internos:

$$\widehat{APO} + \widehat{OAP} + \widehat{AOP} = 180^\circ$$

$$\theta + \theta + 2\phi = 180^\circ$$

$$2\theta + 2\phi = 180^\circ$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por 2, obtemos:

$$\theta + \phi = 90^\circ$$

□

Definição 7. *Ângulo de segmento ou ângulo semi-inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência, um lado secante e o outro tangente à circunferência.*

Proposição 7. *Um ângulo de segmento é metade do ângulo central correspondente ou a medida de um ângulo de segmento é metade da medida do arco correspondente, [Dolce e Pompeo \(1997\)](#).*

Proposição 8. *Ângulo central relativo a uma circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência.*

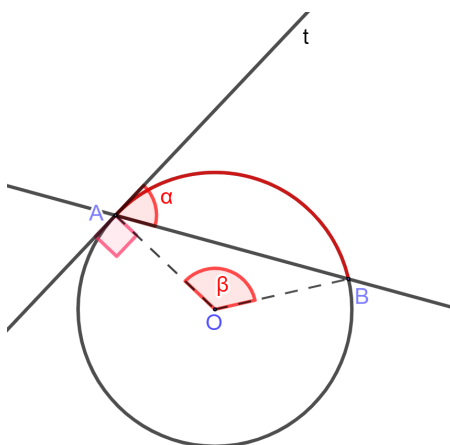


Figura 18 – Ângulo de segmento

Fonte: Autor

Demonstração. O triângulo ABO da Figura 18 é isósceles de base \overline{AB} pois \overline{OA} e \overline{OB} são os raios do círculo de centro O . Podemos afirmar que os ângulos \hat{A} e \hat{B} são congruentes.

Vamos, primeiramente, calcular a medida do ângulo \hat{A} . Pela soma dos ângulos internos do triângulo temos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \beta = 180^\circ$$

Como \hat{A} e \hat{B} são congruentes.

$$\hat{A} + \hat{A} + \beta = 180^\circ$$

e

$$2\hat{A} + \beta = 180^\circ$$

Adicionando $-\beta$ em ambos os lados da igualdade,

$$2\hat{A} + \beta - \beta = 180^\circ - \beta$$

chegamos a:

$$2\hat{A} = 180^\circ - \beta$$

Por fim, dividimos a igualdade por 2 nos dois lados e chegamos ao valor do ângulo \hat{A} em função de β .

$$\hat{A} = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

A reta t é tangente ao círculo no ponto A , então temos a soma:

$$\hat{A} + \alpha = 90^\circ$$

Subtrairemos o valor de α em ambos os lados da igualdade e chegamos à medida de \hat{A} em função de α ,

$$\hat{A} + \alpha - \alpha = 90^\circ - \alpha$$

e

$$\hat{A} = 90^\circ - \alpha$$

Igualando os dois valores obtidos para o ângulo \hat{A} , e em seguida subtrairemos -90° em cada lado da igualdade

$$90^\circ - \alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

$$90^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

$$-\alpha = -\frac{\beta}{2}.$$

Multiplicando a igualdade obtida por -1 chegamos a medida do ângulo de segmento α :

$$\alpha = \frac{\beta}{2}.$$

□

3.1 Propriedade focal na Elipse

Proposição 9. *Seja P um ponto da elipse ε , de focos F_1 e F_2 , e t a reta tangente à elipse no ponto $P(x_0, y_0)$. Os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ formam ângulos congruentes, α e β , com a reta t .*

Demonstração. Considerando uma elipse de centro na origem $O = (0, 0)$ e vértices sobre os eixos OX e OY temos alguns pontos triviais a serem levados em consideração, (FERREIRA, 2023).

i) Se tivermos $P = V_1 = (-a, 0)$ ou $P = V_2 = (a, 0)$, os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ são perpendiculares a reta r tangente à elipse. Assim temos que $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$.

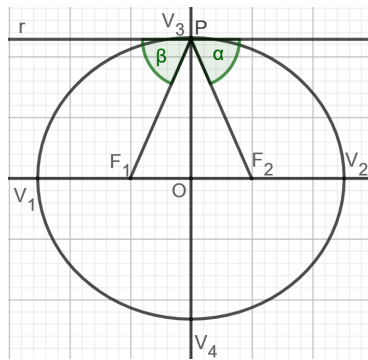


Figura 19 – Ângulo de incidência e reflexão na Elipse

Fonte: Autor

ii) Se tivermos $P = V_3 = (0, b)$ ou $P = V_4 = (0, -b)$.

Na Figura 19 podemos ver que o triângulo F_1PF_2 é isósceles de base $\overline{F_1F_2}$, logo os ângulos $\widehat{OF_1V_3}$ e $\widehat{OF_2V_3}$ são congruentes.

Como a reta r é paralela ao eixo maior da elipse e o segmento $\overline{F_1P}$ pertence à reta transversal que corta as paralelas, os ângulos $\widehat{OF_1V_3} = \beta$ e $\widehat{OF_2V_3} = \alpha$ pois são alternos internos.

Então $\beta = \alpha$.

Nos pontos não triviais, quando P não está nos vértices da elipse, também temos dois casos a considerar:

iii) no primeiro caso a abscissa do ponto P é diferente das abscissas dos focos da elipse, ou seja, $x_0 \neq c$ ou $x_0 \neq -c$.

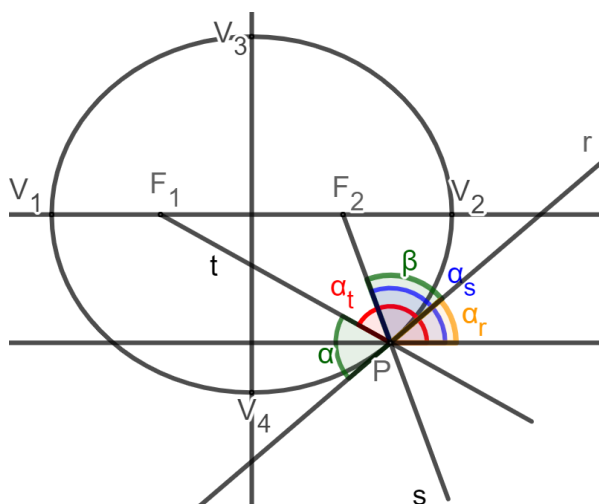


Figura 20 – Ângulo de incidência e reflexão na elipse

Fonte: Autor

Temos, na Figura 20, que a inclinação da reta t é α_t e seu coeficiente angular é dado por:

$$m_t = \frac{y_0 - 0}{x_0 - (-c)} = \frac{y_0}{x_0 + c}.$$

A reta r tangente à elipse em P tem inclinação α_r e considerando sua equação como $y - y_0 = m_r(x - x_0)$ podemos encontrar o coeficiente angular derivando a equação da elipse em relação a x no ponto P , ou seja:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0, y=y_0} = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}.$$

Então $m_r = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$.

Observamos em relação à reta tangente que, $\pi - \alpha = \alpha_t - \alpha_r$, ou seja, $\alpha = \pi + \alpha_r - \alpha_t$, o que implica que $\text{tg} \alpha = \text{tg}(\pi + \alpha_r - \alpha_t) = \text{tg}(\alpha_r - \alpha_t)$.

Usando a trigonometria temos:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\alpha_r - \alpha_t) &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha_r) - \operatorname{tg}(\alpha_t)}{1 + \operatorname{tg}\alpha_r \times \operatorname{tg}\alpha_t} \\
 &= \frac{m_r - m_t}{1 + m_r \times m_t} \\
 &= \frac{\frac{-b^2x_0}{a^2y_0} - \frac{y_0}{x_0 + c}}{1 + \left(\frac{-b^2x_0}{a^2y_0}\right) \times \left(\frac{y_0}{x_0 + c}\right)} \\
 &= \left[\frac{-b^2x_0^2 + cb^2x_0 + a^2y_0^2}{a^2y_0(x_0 + c)} \right] \times \left[\frac{a^2(x_0 + c)}{a^2(x_0 + c) - b^2x_0} \right]
 \end{aligned}$$

Como a equação da elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e estamos considerando o ponto $P(x_0, y_0)$ temos a equação $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

Multiplicando os membros da igualdade por a^2b^2 :

$$\frac{x_0^2 \cdot a^2b^2}{a^2} + \frac{y_0^2 \cdot a^2b^2}{b^2} = 1 \cdot a^2b^2 \quad \Rightarrow \quad x_0^2b^2 + y_0^2a^2 = a^2b^2$$

Usando a igualdade acima e a relação especial $b^2 = a^2 - c^2$ chegamos a:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_r - \alpha_t) &= \frac{a^2b^2 + cb^2x_0}{y_0 [a^2(x_0 + c) - b^2x_0]} \\
 &= \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{y_0 [a^2x_0 + a^2c - (a^2 - c^2)x_0]} \\
 &= \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{y_0 [a^2x_0 + a^2c - a^2x_0 + c^2x_0]} \\
 &= \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{y_0 [c(a^2 + cx_0)]} \\
 &= \frac{b^2}{y_0c}.
 \end{aligned}$$

A inclinação da reta s é α_s e seu coeficiente angular é dado por:

$$m_s = \frac{y_0 - 0}{x_0 - c} = \frac{y_0}{x_0 - c}.$$

De acordo com a Figura 20, $\beta = \alpha_s - \alpha_r$ assim temos:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \times m_r}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{y_0}{x_0 - c} - \frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 + \left(\frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0}\right) \times \left(\frac{y_0}{x_0 - c}\right)} \\
&= \left[\frac{a^2 y_0^2 - cb^2 x_0 + b^2 x_0^2}{a^2 y_0 (x_0 - c)} \right] \times \left[\frac{a^2 y_0 (x_0 - c)}{a^2 y_0 (x_0 - c) - b^2 x_0} \right]
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição usando as igualdades $x_0^2 b^2 + y_0^2 a^2 = a^2 b^2$ e $b^2 = a^2 - c^2$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \beta &= \frac{a^2 b^2 - cb^2 x_0}{y_0 [a^2 (x_0 - c) - b^2 x_0]} \\
&= \frac{b^2 (a^2 - cx_0)}{y_0 [a^2 x_0 - a^2 c - (a^2 - c^2) x_0]} \\
&= \frac{b^2 (a^2 - cx_0)}{y_0 [a^2 x_0 - a^2 c - a^2 x_0 + c^2 x_0]} \\
&= \frac{b^2 (a^2 - cx_0)}{-y_0 [c(a^2 - cx_0)]} \\
&= -\frac{b^2}{y_0 c}.
\end{aligned}$$

Então $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ o que mostra que $\alpha = \beta$.

iv) Para o caso em que a abscissa do ponto P é igual a abscissa de um dos focos da elipse, ou seja, $x_0 = c$ ou $x_0 = -c$.

A reta t é perpendicular no ponto $P(c, y_0)$ e pela Figura 21 observa-se que $\frac{\pi}{2} = \alpha + \alpha_r$, então $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_r$, então:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{m_r} = -\frac{y_0 a^2}{-x_0 b^2} = -\frac{y_0 a^2}{-cb^2} = -\frac{\frac{b^2}{a} \cdot a^2}{-cb^2} = -\frac{b^2 a}{-cb^2} = -\frac{a}{-c} = \frac{a}{c}.$$

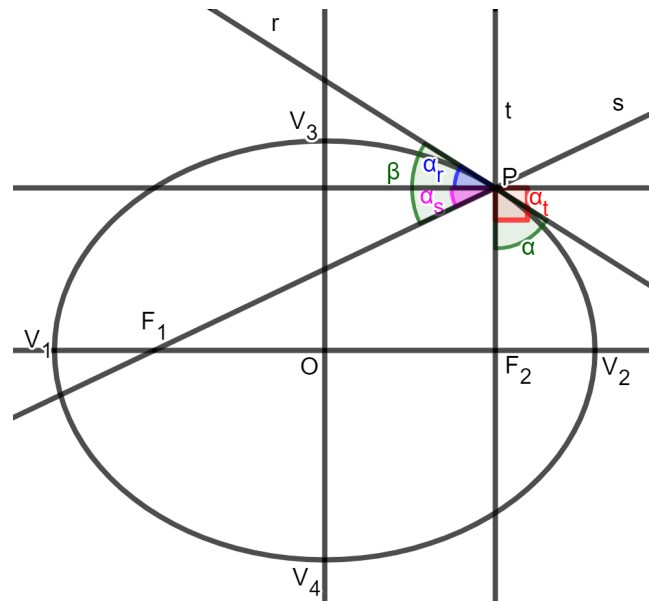


Figura 21 – Ângulo de incidência e reflexão na elipse

Fonte: Autor

Na igualdade acima fizemos a substituição de $y_0 = \frac{b^2}{a}$, pois trocando $x_0 = c$ na equação da elipse:

$$x_0^2 b^2 + y_0^2 a^2 = a^2 b^2$$

$$c^2 b^2 + y_0^2 a^2 = a^2 b^2$$

$$y_0^2 a^2 = a^2 b^2 - c^2 b^2$$

$$y_0^2 a^2 = b^2 (a^2 - c^2)$$

$$y_0^2 a^2 = b^4$$

$$y_0^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

$$y_0 = \frac{b^2}{a}$$

Ainda observando a Figura 21 podemos concluir que $\beta = \alpha_s + \alpha_r$. Assim temos:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\alpha_s + \alpha_r)$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \alpha_s - \operatorname{tg} \alpha_r}{1 + \alpha_s \cdot \alpha_r}$$

$$= \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$$

Em que,

$$m_s = \frac{y_0 - 0}{x_0 - (-c)} = \frac{y_0}{c + c} = \frac{\frac{b^2}{a}}{2c} = \frac{b^2}{2ac}$$

$$m_r = \frac{-x_0 b^2}{y_0 a^2} = \frac{-c b^2}{\frac{b^2}{a} \cdot a^2} = -\frac{c}{a}.$$

Por fim chegamos a:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{\frac{b^2}{2ac} - \frac{-c}{a}}{1 + \frac{b^2}{2ac} \cdot \frac{-c}{a}} \\ &= \frac{\frac{b^2}{2ac} + \frac{c}{a}}{1 - \frac{b^2}{2a^2}} \\ &= \frac{\frac{b^2 + 2c^2}{2ac}}{\frac{2a^2 - b^2}{2a^2}} \\ &= \left[\frac{b^2 + 2c^2}{2ac} \right] \cdot \left[\frac{2a^2}{2a^2 - b^2} \right] \\ &= \frac{a(b^2 + 2c^2)}{c(-b^2 + 2a^2)} \\ &= \frac{a(a^2 - c^2 + 2c^2)}{c(-a^2 + c^2 + 2a^2)} = \frac{a(a^2 + c^2)}{c(a^2 + c^2)} \\ &= \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Encontramos os valores de $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{c}$, então podemos concluir que $\alpha = \beta$, ou seja, o ângulo de incidência é congruente ao ângulo de reflexão. \square

3.2 Propriedade focal na Hipérbole

Proposição 10. *Seja P um ponto da hipérbole h , de focos F_1 e F_2 , e t a reta tangente à hipérbole no ponto $P(x_0, y_0)$. Os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ formam ângulos congruentes, α e β , com a reta t .*

Demonstração. Considerando uma hipérbole de centro na origem $O = (0, 0)$ e vértices sobre os eixos OX e OY temos alguns pontos triviais a serem levados em consideração, (SOUZA, 2014)

i) Se tivermos $P = V_1 = (-a, 0)$ ou $P = V_2 = (a, 0)$, os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ são perpendiculares a reta t tangente à hipérbole. Assim temos que $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$.

Nos pontos não triviais, quando P não está nos vértices da hipérbole, temos dois casos a considerar:

ii) no primeiro caso a abscissa do ponto P é diferente das abscissas dos focos da hipérbole, ou seja, $x_0 \neq c$ ou $x_0 \neq -c$.

Temos que a inclinação da reta g é α_g e seu coeficiente angular é dado por:

$$m_g = \frac{y_0 - 0}{x_0 - (-c)} = \frac{y_0}{x_0 + c}.$$

A reta t tangente à hipérbole em P tem inclinação α_t e considerando sua equação como $y - y_0 = m_t(x - x_0)$ podemos encontrar o coeficiente angular derivando a equação da hipérbole em relação a x no ponto P , ou seja:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0, y=y_0} = \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}.$$

Então $m_t = \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$.

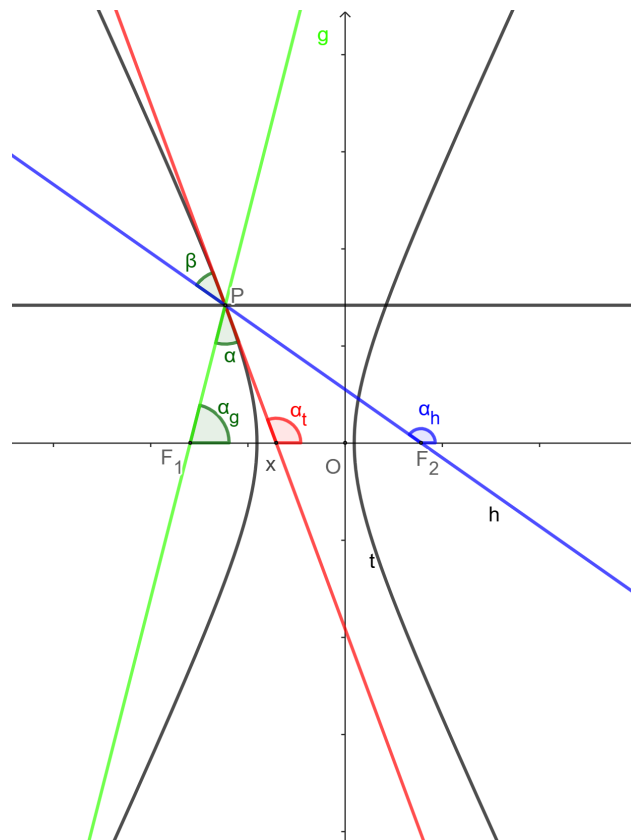


Figura 22 – Ângulo de incidência e reflexão na Hipérbole (1)

Fonte: Autor

Na Figura 22 observamos em relação ao triângulo PF_1X que $\alpha = \alpha_t - \alpha_g$, o que implica que

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_t - \alpha_g).$$

Usando a trigonometria temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha_t - \alpha_g) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha_t - \operatorname{tg}\alpha_g}{1 + \operatorname{tg}\alpha_t \times \operatorname{tg}\alpha_g} \\ &= \frac{m_t - m_g}{1 + m_t \times m_g} \\ &= \frac{\frac{b^2x_0}{a^2y_0} - \frac{y_0}{x_0 + c}}{1 + \left(\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\right) \times \left(\frac{y_0}{x_0 + c}\right)} \\ &= \left[\frac{b^2x_0^2 + cb^2x_0 - a^2y_0^2}{a^2y_0(x_0 + c)} \right] \times \left[\frac{a^2y_0(x_0 + c)}{a^2y_0(x_0 + c) + b^2y_0x_0} \right]. \end{aligned}$$

Como a equação da hipérbole é $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e estamos considerando o ponto $P(x_0, y_0)$ temos a equação $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

Multiplicando os membros da igualdade por a^2b^2 :

$$\frac{x_0^2 \cdot a^2b^2}{a^2} - \frac{y_0^2 \cdot a^2b^2}{b^2} = 1 \cdot a^2b^2 \Rightarrow x_0^2b^2 - y_0^2a^2 = a^2b^2.$$

Usando a igualdade acima e a relação especial $c^2 = a^2 + b^2$ chegamos a:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{a^2b^2 + cb^2x_0}{y_0 [a^2(x_0 + c) + b^2x_0]} \\ &= \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{y_0 [a^2x_0 + a^2c + b^2x_0]} \\ &= \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{y_0 [x_0(a^2 + b^2) + a^2c]} \\ &= \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{y_0 [c^2x_0 + a^2c]} \\ &= \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{y_0c(cx_0 + a^2)} \\ &= \frac{b^2}{y_0c}. \end{aligned}$$

A inclinação da reta h é α_h e seu coeficiente angular, é dado por:

$$m_h = \frac{y_0 - 0}{x_0 - c} = \frac{y_0}{x_0 - c}.$$

De acordo com a Figura 22, $\beta = \alpha_h - \alpha_t$ assim temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta &= \frac{m_h - m_t}{1 + m_h \times m_t} \\ &= \frac{\frac{y_0}{x_0 - c} - \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 + \left(\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}\right) \times \left(-\frac{y_0}{x_0 - c}\right)} \\ &= \left[\frac{-b^2 x_0(x_0 - c) + y_0^2 a^2}{a^2 y_0(x_0 - c)} \right] \times \left[\frac{a^2 y_0(x_0 - c)}{a^2 y_0(x_0 - c) + b^2 y_0 x_0} \right] \end{aligned}$$

Fazendo a substituição usando as igualdades $x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2 = a^2 b^2$ e $c^2 = a^2 + b^2$ obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta &= \frac{-b^2 x_0^2 + c b^2 x_0 + y_0^2 a^2}{y_0 [a^2(x_0 - c) + b^2 x_0]} \\ &= \frac{x_0 b^2 c - (x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2)}{y_0 [a^2 x_0 - a^2 c + b^2 x_0]} \\ &= \frac{x_0 b^2 c - a^2 b^2}{y_0 [a^2 x_0 - a^2 c + b^2 x_0]} \\ &= \frac{b^2 (c x_0 - a^2)}{y_0 [x_0 (a^2 + b^2) - a^2 c]} \\ &= \frac{b^2 (c x_0 - a^2)}{y_0 [x_0 c^2 - a^2 c]} \\ &= \frac{b^2 (c x_0 - a^2)}{y_0 c [c x_0 - a^2]} \\ &= \frac{b^2}{y_0 c}. \end{aligned}$$

Então $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, o que mostra que $\alpha = \beta$.

iii) Para o caso em que a abscissa do ponto P é igual a abscissa de um dos focos da hipérbole, ou seja, $x_0 = c$ ou $x_0 = -c$.

Na Figura 23, temos que a reta g é perpendicular no ponto $P(-c, y_0)$ e observamos que $\frac{\pi}{2} = \alpha_t - \alpha$, então $\alpha = \alpha_t - \frac{\pi}{2}$, e:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{m_t} = -\frac{y_0 a^2}{x_0 b^2} = -\frac{y_0 a^2}{-c b^2} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{a^2}{c b^2} = \frac{b^2 a}{c b^2} = \frac{a}{c}.$$

Na igualdade acima fizemos a substituição de $y_0 = \frac{b^2}{a}$, pois trocando $x_0 = -c$ na equação da hipérbole:

$$x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2 = a^2 b^2$$

$$(-c)^2 b^2 - y_0^2 a^2 = a^2 b^2$$

$$y_0^2 a^2 = c^2 b^2 - a^2 b^2$$

$$y_0^2 a^2 = b^2 (c^2 - a^2)$$

$$y_0^2 a^2 = b^4$$

$$y_0^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

$$y_0 = \frac{b^2}{a}.$$

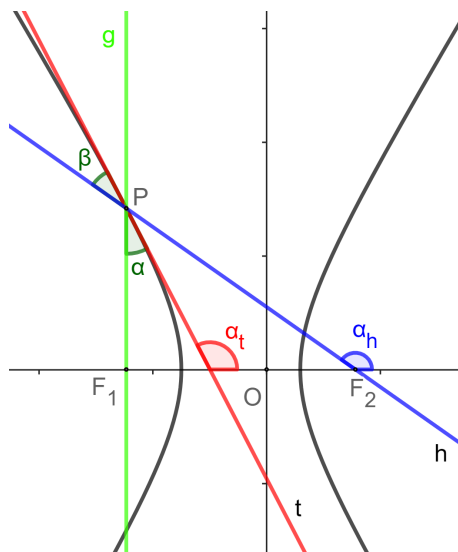


Figura 23 – Ângulo de incidência e reflexão na Hipérbole (2)

Fonte: Autor

Como calculado anteriormente, $\beta = \alpha_h - \alpha_t$ e $\text{tg}\beta = \frac{b^2}{y_0 c}$. Fazendo a substituição de $y_0 = \frac{b^2}{a}$, obtemos:

$$\text{tg}\beta = \frac{b^2}{y_0 c} = \frac{b^2}{\frac{b^2}{a} \cdot c} = \frac{b^2 a}{b^2 c} = \frac{a}{c}.$$

Encontramos os valores de $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{c}$ então podemos concluir que $\alpha = \beta$, ou seja, o ângulo de incidência é congruente ao ângulo de reflexão. \square

3.3 Propriedade focal na Parábola

Proposição 11. *Seja P um ponto da Parábola de foco F_1 , r a reta tangente à parábola no ponto $P(x_0, y_0)$ e a reta t paralela ao eixo X e que passa pelo ponto P . Os ângulos α e β que a reta r faz com as retas, s que passa pelo foco da parábola e a reta t , respectivamente, são iguais.*

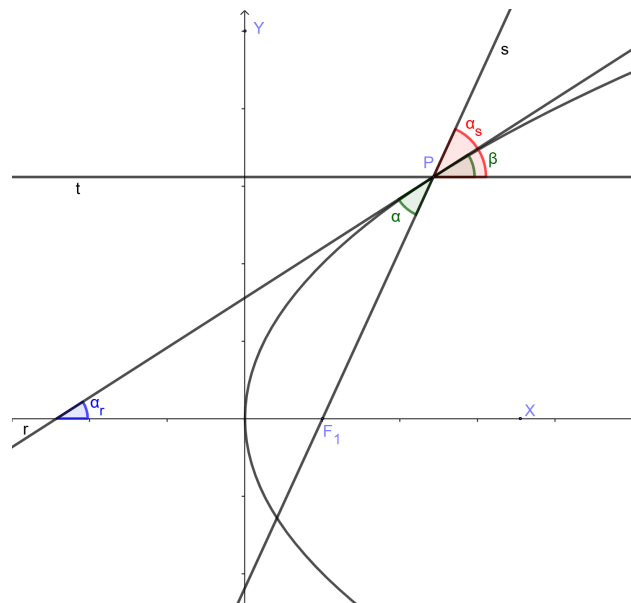


Figura 24 – Ângulo de incidência e reflexão na Parábola

Fonte: Autor

Demonstração. Considerando a parábola da Figura 24 de vértice $(0, 0)$, foco $F_1 = (p, 0)$ e equação $y^2 = 4px$, (SOUZA, 2014)

Consideremos os seguintes casos:

i) se o ponto P tiver coordenadas $(0, 0)$, teremos que a reta s será perpendicular à reta tangente r e assim os ângulos serão $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$.

ii) para o caso em que $x_0 \neq p$ e $x_0 \neq 0$. Seja α_r a inclinação da reta tangente à parábola de equação $y^2 = 4px$, então seu coeficiente angular m_r será dado por:

$$y^2 = 4px \implies 2y \frac{dy}{dx} = 4p \implies m_r = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=y_0} = \frac{4p}{2y_0} = \frac{2p}{y_0}$$

ou seja

$$m_r = \frac{2p}{y_0} = \frac{2py_0}{y_0^2} = \frac{2py_0}{4x_0} = \frac{y}{2x_0}.$$

Desde que t é paralela ao eixo x , teremos $m_r = \operatorname{tg}\beta = \frac{y_0}{2x_0}$.

Por outro lado o coeficiente angular da reta s é;

$$m_s = \frac{0 - y_0}{p - x_0} = \frac{y_0}{x_0 - p}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \\ &= \frac{\frac{y_0}{x_0 - p} - \frac{y_0}{2x_0}}{1 + \frac{y_0}{2x_0} \cdot \frac{y_0}{x_0 - p}} \\ &= \frac{2x_0y_0 - y_0(x_0 - p)}{2x_0(x_0 - p)} \\ &= \frac{1 + \frac{y_0^2}{2x_0(x_0 - p)}}{\frac{2x_0y_0 - y_0x_0 + y_0p}{2x_0(x_0 - p)}} \\ &= \frac{2x_0y_0 - y_0x_0 + y_0p}{2x_0(x_0 - p) + y_0^2} \\ &= \frac{x_0y_0 + y_0p}{2x_0^2 - 2x_0p + y_0^2} \\ &= \frac{x_0y_0 + y_0p}{2x_0^2 - 2x_0p + 4x_0p} \\ &= \frac{y_0(x_0 + p)}{2x_0(x_0 - p + 2p)} = \frac{y_0}{2x_0}. \end{aligned}$$

Chegamos ao resultado $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{y_0}{2x_0}$, logo os ângulos $\alpha = \beta$.

Para o caso em que $x_0 \neq -p$ e $x_0 \neq 0$ a demonstração é análoga.

□

Roteiro de atividades

No ensino de Geometria, especialmente para alunos de ensino fundamental, faz-se necessário o uso de atividades práticas que proporcione a manipulação manual de materiais para desenhar, colorir, colar e, aos poucos ir adquirindo o conhecimento esperado. Esse tipo de abordagem, é geralmente, mais atrativa e eficaz no ensino e aprendizagem da disciplina, pois proporciona o sentimento de descoberta e uma aula mais interessante aos alunos.

Utilizando recursos didáticos comuns do cotidiano dos alunos é possível desenvolver uma atividade de construção de cônicas por dobraduras em papel vegetal. Caseando-se em conceitos já estudados como retas - particularmente perpendiculares e tangentes - e circunferência, pode-se mostrar como construir, de modo bem simples, uma elipse, uma hipérbole e uma parábola. Essas construções em dobraduras proporcionam aos estudantes mais do que a execução de instruções. Experimentar, refletir e trocar aprendizados, dúvidas e descobertas entre si, enriquecem o aprendizado.

Fazendo uso de laboratório de informática e programas específicos como o GeoGebra, podemos produzir ainda mais conhecimento a partir de atividades manuais. Com a ajuda da tecnologia as construções geométricas se tornam mais visíveis e as possibilidades de explorar situações diversas que não são possíveis ou são muito complexas quando se trabalha manualmente. Podemos simular fenômenos e processos, desenvolver o potencial criativo, explorar as relações entre as diferentes linguagens e suas práticas, apropriar-se das linguagens da cultura digital, de diferentes linguagens e mídias, e ferramentas digitais para aprender e refletir sobre o mundo além de desenvolver a capacidade de compreender e interpretar conteúdos veiculados em ambientes digitais (BNCC...).

4.1 ATIVIDADE 1: CONSTRUÇÃO DE CÔNICAS USANDO DOBRADURAS

A primeira atividade foi adaptada do Minicurso do 6º encontro da Revista do Professor de Matemática, (SALLUM, 2013) e da dissertação de Mestrado de Eder Regioli Dias, "Cônicas: Atividades aplicáveis no Ensino Médio com auxílio de Geometria Dinâmica e Dobraduras", (DIAS, 2014). Para realização dessa atividade é necessário somente: folha de papel vegetal, régua graduada em centímetros, compasso e caneta ou lápis.

4.1.1 CONSTRUÇÃO DA ELIPSE

Devemos seguir as etapas seguintes:

1ª) **etapa:** Na folha de papel vegetal, com o compasso, construímos uma circunferência utilizando o máximo possível da folha. Em seguida marcar um ponto, diferente do centro, no interior da circunferência.

2ª) **etapa:** Ao longo de toda a circunferência, inserir pontos de maneira que a distância entre eles seja de aproximadamente 1 cm.

3ª) **etapa** Para cada ponto sobre a circunferência fazer uma dobradura de forma que esse ponto sobreponha o ponto interno na circunferência.

4ª) **etapa** Após a realização da etapa 3 teremos a formação de uma Elipse como na Figura 25.

4.1.2 CONSTRUÇÃO DA HIPÉRBOLE

Devemos seguir as etapas seguintes:

1ª) **etapa:** Na folha de papel vegetal, com o compasso, construímos uma circunferência não muito grande para que o desenho da hipérbole fique mais nítido. Em seguida marcar um ponto exterior à circunferência.

2ª) **etapa** Ao longo de toda a circunferência, inserir pontos de maneira que a distância entre eles seja de aproximadamente 0,5 cm.

3ª) **etapa** Para cada ponto sobre a circunferência fazer uma dobradura de forma que esse ponto sobreponha o ponto exterior à circunferência.

4ª) **etapa** Após a realização da etapa 3 teremos a formação de uma Hipérbole como na Figura 26.

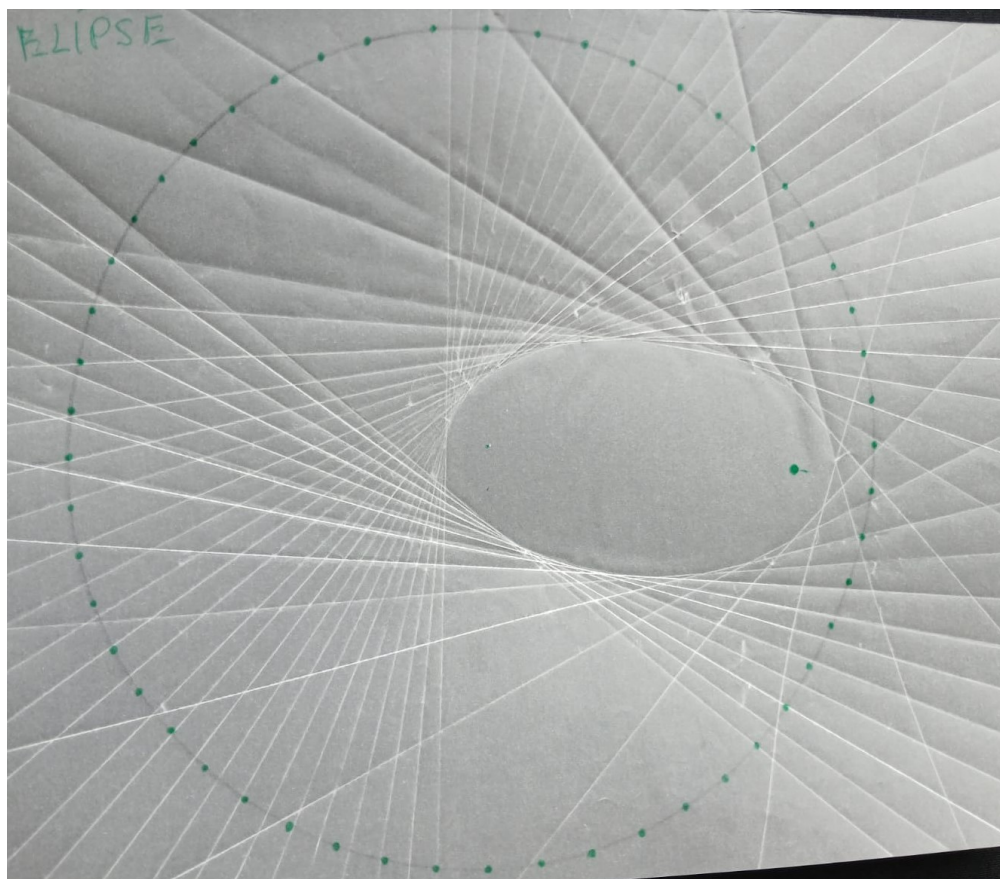


Figura 25 – Elipse a partir de dobraduras no papel vegetal

Fonte: Autor

4.1.3 CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA

Devemos seguir as etapas seguintes:

1ª) etapa: Com a utilização da régua devemos desenhar uma reta a mais ou menos dois centímetros da borda da folha de papel vegetal e em seguida um ponto não pertencente a ela.

2ª) etapa Ao longo de toda a reta, inserimos pontos de maneira que a distância entre eles seja de aproximadamente 0,5 cm.

3ª) etapa Para cada ponto sobre a reta, fazer uma dobradura de forma que esse ponto sobreponha o ponto desenhado fora da reta.

4ª) etapa Após a realização da etapa 3 teremos a formação de uma Parábola como na Figura 27.

Durante e após o desenvolvimento da atividade, alguns questionamentos podem ser feitos para mensurar a compreensão e o conhecimento adquirido a respeito do conteúdo visto. Um deles é a mudança que acontece em cada cônica de acordo com a variação da posição do ponto desenhado

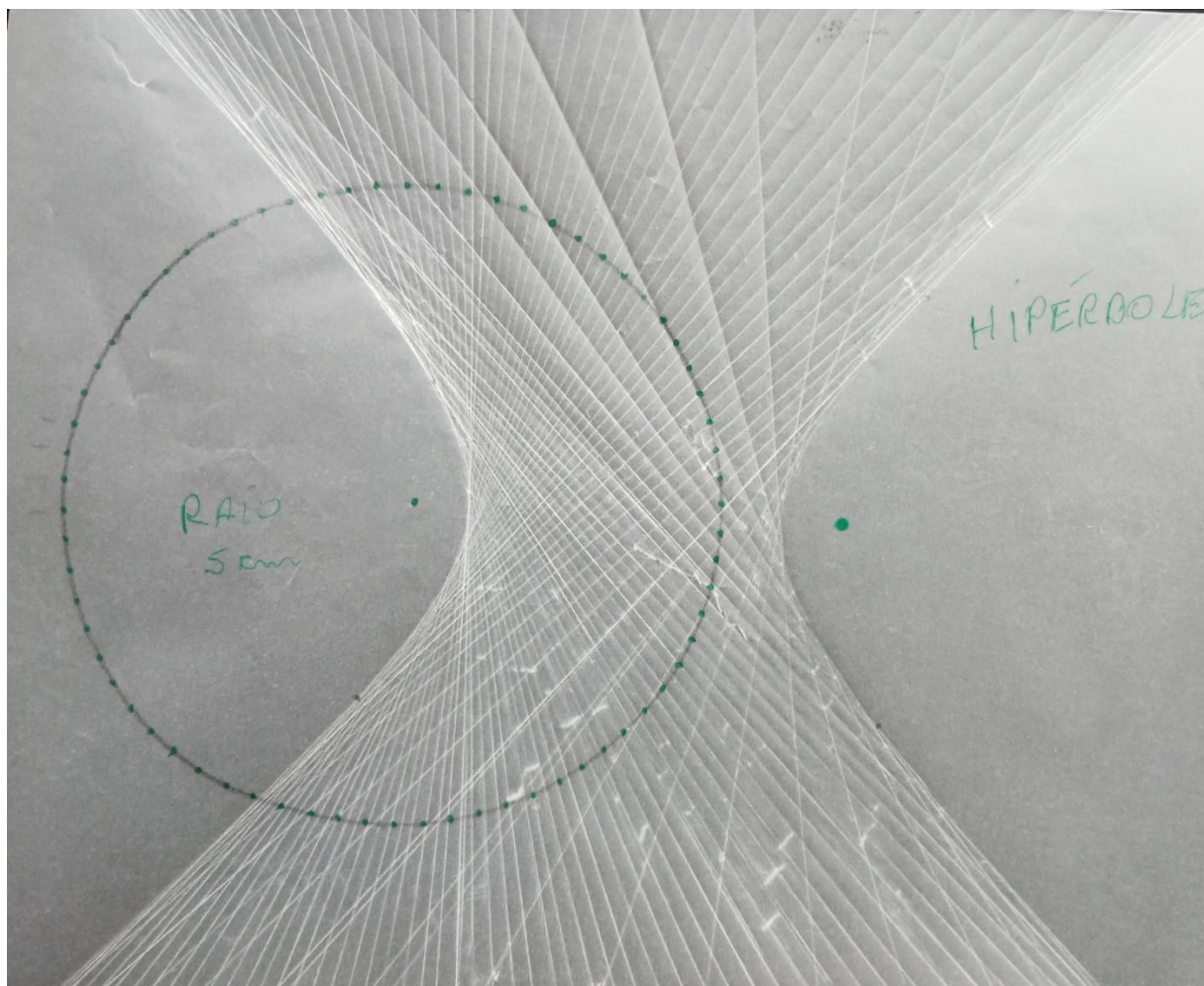


Figura 26 – Hipérbole a partir de dobraduras no papel vegetal

Fonte: Autor

interior ou exterior à circunferência, quando ele estiver mais próximo ou mais distante dela. Bem como quando o ponto desenhado ficar mais perto ou mais longe da reta no caso da parábola. Outro seria em relação as dobraduras feitas a partir dos pontos marcados sobre a circunferência, no caso da elipse e da hipérbole, e fora da reta na construção da parábola, no intuito de avaliar se houve a percepção de que essas dobraduras formam retas tangentes às cônicas.

Como atividade avaliativa pode-se marcar alguns pontos aleatórios em cada cônica obtida a partir das dobraduras, como nas Figuras 28, 29 e 30.

E utilizando as definições de elipse, hipérbole e parábola, pedir aos alunos que façam as medições e os cálculos necessários para comprovar se as figuras obtidas estão de acordo com as definições de cada cônica.

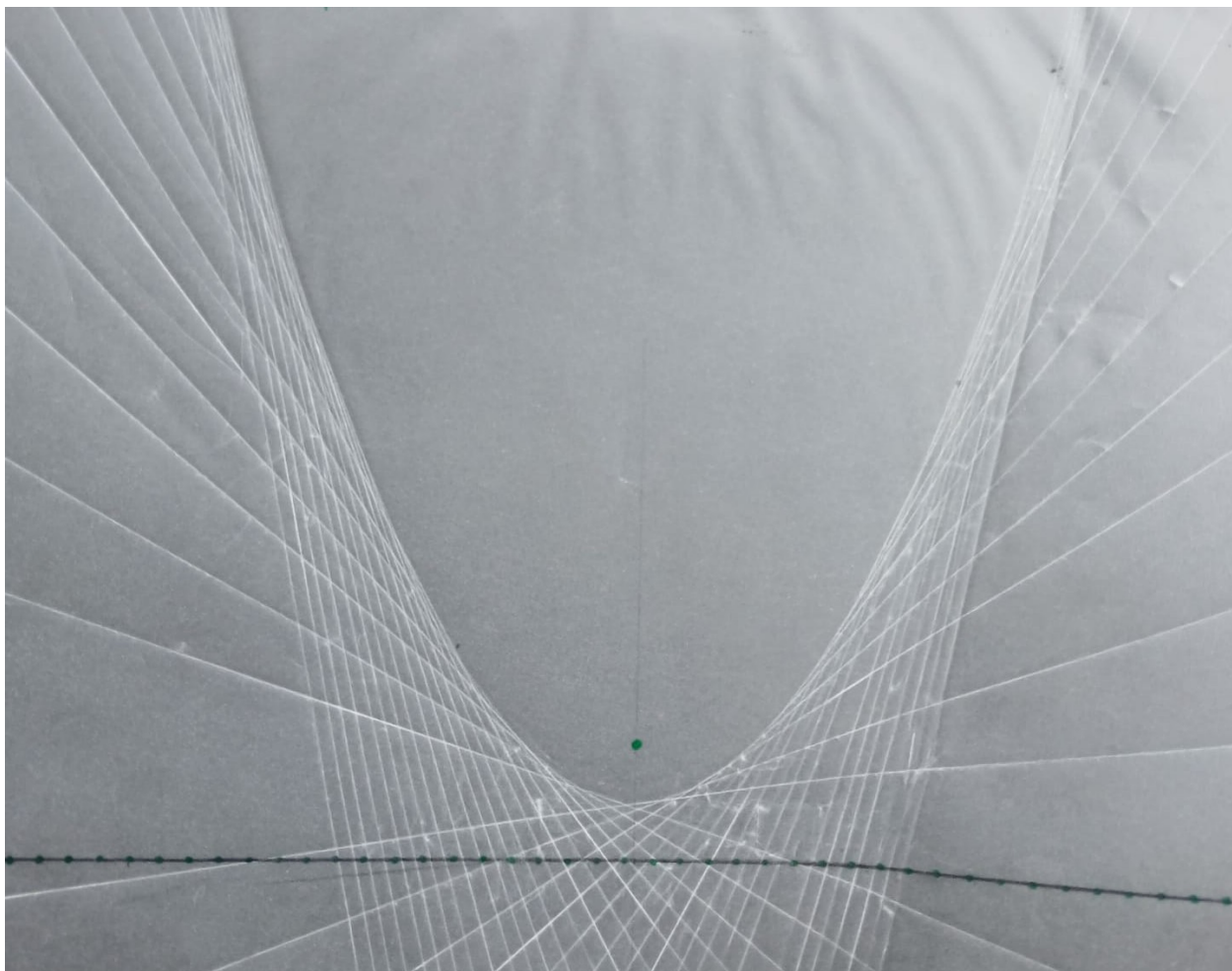


Figura 27 – Parábola a partir de dobraduras no papel vegetal

Fonte: Autor

4.2 ATIVIDADE 2: UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA PARA CONSTRUIR AS CÔNICAS

Essa atividade é baseada na atividade 1 e utiliza o programa GeoGebra para complementar o estudo, facilitar a visualização em situações difíceis de alcançar na prática manual bem como proporcionar novas descobertas. A proposta é apresentar algumas possibilidades de práticas pedagógicas que favoreçam uma aprendizagem significativa dos conceitos geométricos. A escolha do software GeoGebra, por ser livre, dinâmico e de interface simples, possibilita uma interatividade do estudante e o conteúdo, na construção do conhecimento. O objetivo é contribuir com a prática docente nos processos das aprendizagens relacionadas às habilidades ainda não consolidadas pelos estudantes referentes ao eixo da geometria, por meio do trabalho com o GeoGebra. Refletir sobre o desenvolvimento de competências e habilidades para melhoria da aprendizagem. Apresentar

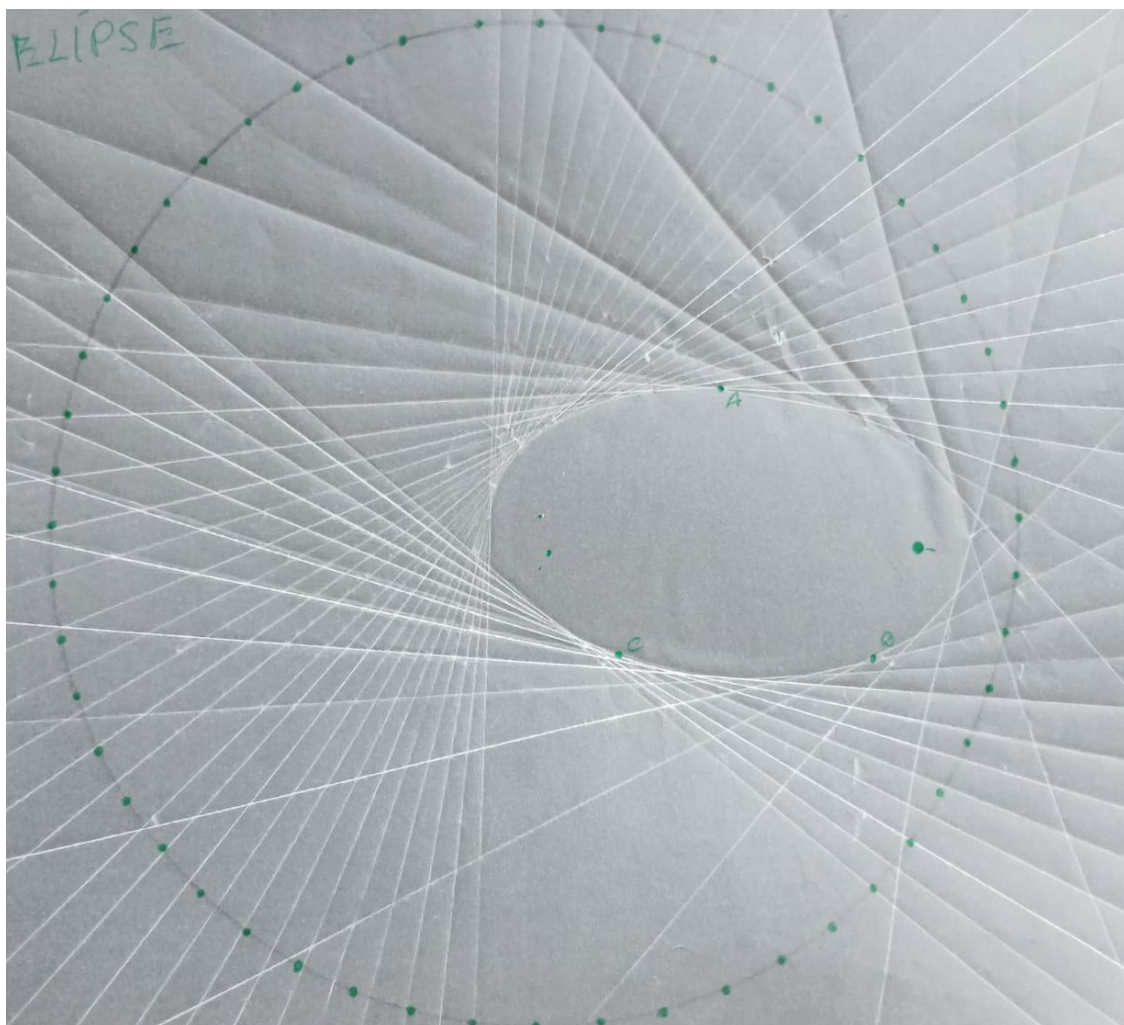



Figura 28 – Pontos aleatórios na elipse

Fonte: Autor

estratégias práticas para motivar os estudantes e professores, propostas metodológicas e materiais de apoio para o desenvolvimento das habilidades não consolidadas bem como dicas de atividades de avaliação do processo de aprendizagem, (CURSO...,).

4.2.1 CONSTRUÇÃO DA ELIPSE

- **etapa 1:** Com a tela do GeoGebra aberta, clicar no ícone  e selecione **Ponto**. Clique sobre a zona gráfica e crie os pontos **A** e **B** distintos.
- **etapa 2:** Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto **A** e selecione **Renomear**. Troque **A** por **F₁** e clique em **OK**. Faça o mesmo processo para o ponto **B** e trocando-o por **F₂**.

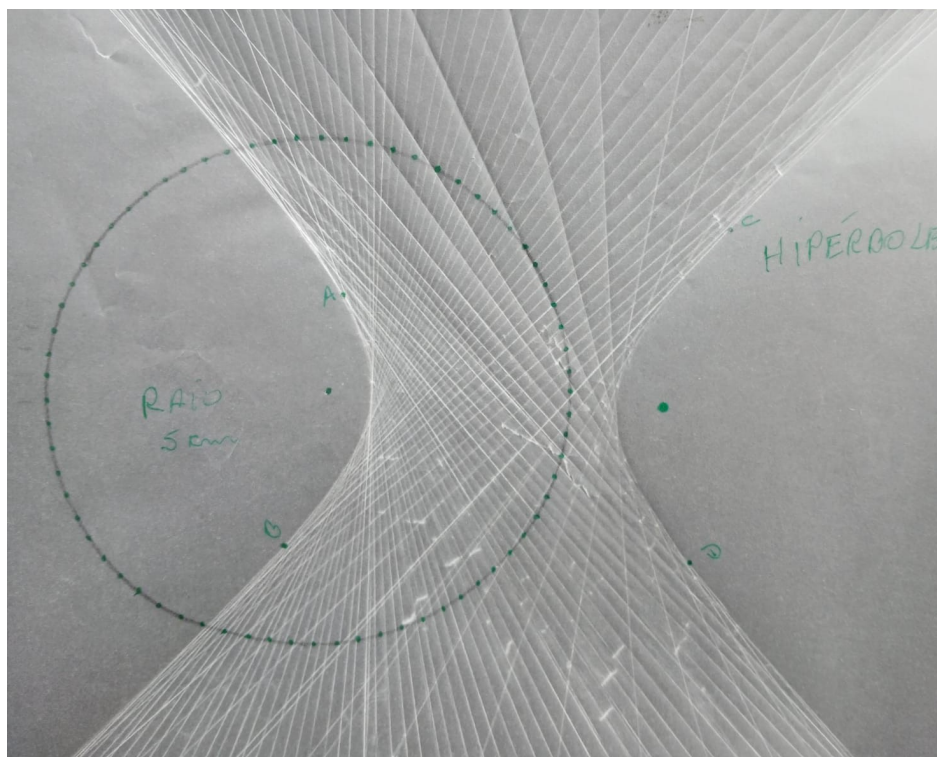






Figura 29 – Pontos aleatórios na hipérbole

Fonte: Autor

- **etapa 3:** Clique em  e selecione **Semirreta**. Clique sobre o ponto F_1 e em seguida sobre F_2 para criar a semirreta de origem em F_1 e passando por F_2 .
- **etapa 4:** Clique no ícone  e selecione **Circulo dado Centro e um de seus pontos**. Selecione como centro o ponto F_1 e o outro ponto de tal forma que F_2 esteja no interior do círculo. Esse outro ponto criado será nomeado de ponto **A**.
- **etapa 5:** Clique no ícone  e selecione **Ponto**. Marque um ponto no círculo de tal forma que ele não pertença à semirreta $\overrightarrow{F_1F_2}$ e seja distinto de **A**. Esse novo ponto será nomeado de ponto **B**.
- **etapa 6:** Clique no ícone  e selecione **Segmento**. Trace os segmentos $\overline{BF_1}$ e $\overline{BF_2}$. Basta clicar em **B** e F_1 em sequência.

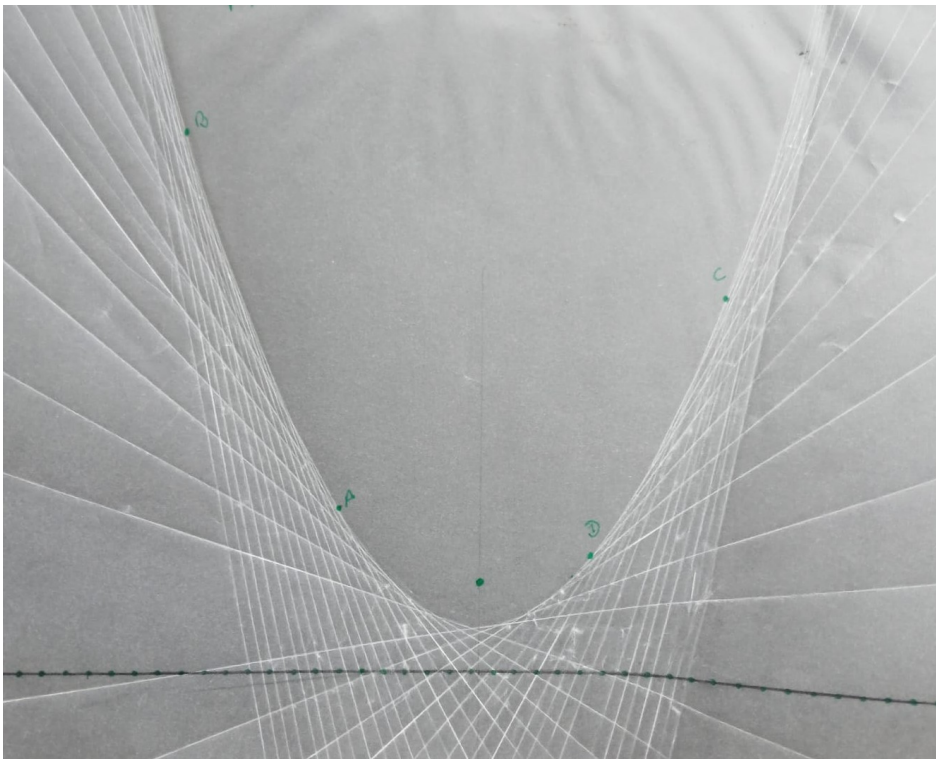





Figura 30 – Pontos aleatórios na parábola

Fonte: Autor

- **etapa 7:** Clique no ícone  e selecione **Mediatriz**. Clique no segmento $\overline{BF_2}$ para criar a sua mediatriz.
- **etapa 8:** Clique no ícone  e selecione **Interseção de Dois Objetos**. Clique no ponto de interseção da mediatriz do segmento $\overline{BF_2}$ com o segmento $\overline{BF_1}$. Esse ponto será nomeado ponto C.
- **etapa 9:** Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto C e selecione **Exibir Rastro**.
- **etapa 10:** Clique no ícone  e selecione **Mover**. Clique sobre o ponto B e mova-o ao longo do círculo. Assim teremos criado uma elipse.

Para visualizar a construção da elipse como feito na atividade 1, com as dobraduras representado retas tangentes à elipse seguiremos os seguintes passos:

- **etapa 11:** Desabilitar a exibição de rastro para o ponto C. Para isso basta clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto C e selecionar **Exibir Rastro**.

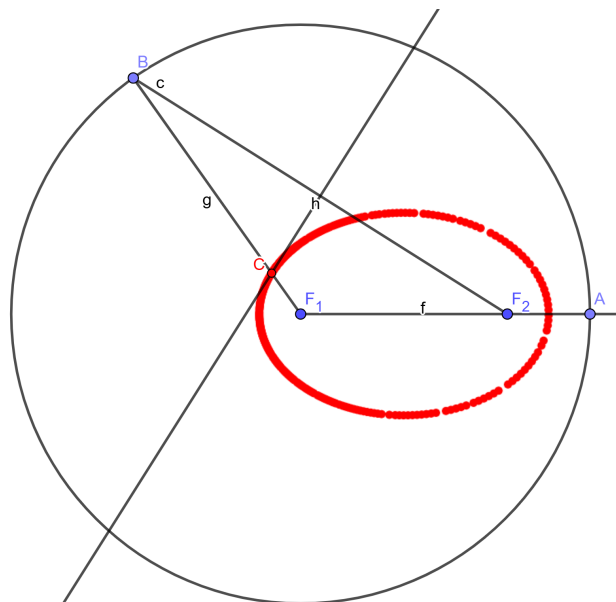





Figura 31 – Elipse criada no GeoGebra

Fonte: Autor

- **etapa 12:** Clique com o botão direito do mouse sobre a reta que é mediatriz do segmento $\overline{BF_2}$ e selecione **Exibir Rastro**.
- **etapa 13:** Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto **B** e selecione **Animação**. Teremos a formação da imagem como na Figura 32.

4.2.2 CONSTRUÇÃO DA HIPÉRBOLE

- **etapa 1:** Com a tela do GeoGebra aberta, clicar no ícone  e selecione **Ponto**. Clique sobre a zona gráfica e crie os pontos **A** e **B** distintos.
- **etapa 2:** Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto **A** e selecione **Renomear**. Troque **A** por **F₁** e clique em **OK**. Faça o mesmo processo para o ponto **B** e troque-o por **F₂**.
- **etapa 3:** Clique em  e selecione **Semirreta**. Clique sobre o ponto **F₁** e em seguida sobre **F₂** para criar a semirreta de origem em **F₁** e passando por **F₂**.
- **etapa 4:** Clique em  e selecione **Ponto**. Escolha uma ponto na semirreta de modo que ele esteja entre **F₁** e **F₂**. Esse será o ponto **A**.

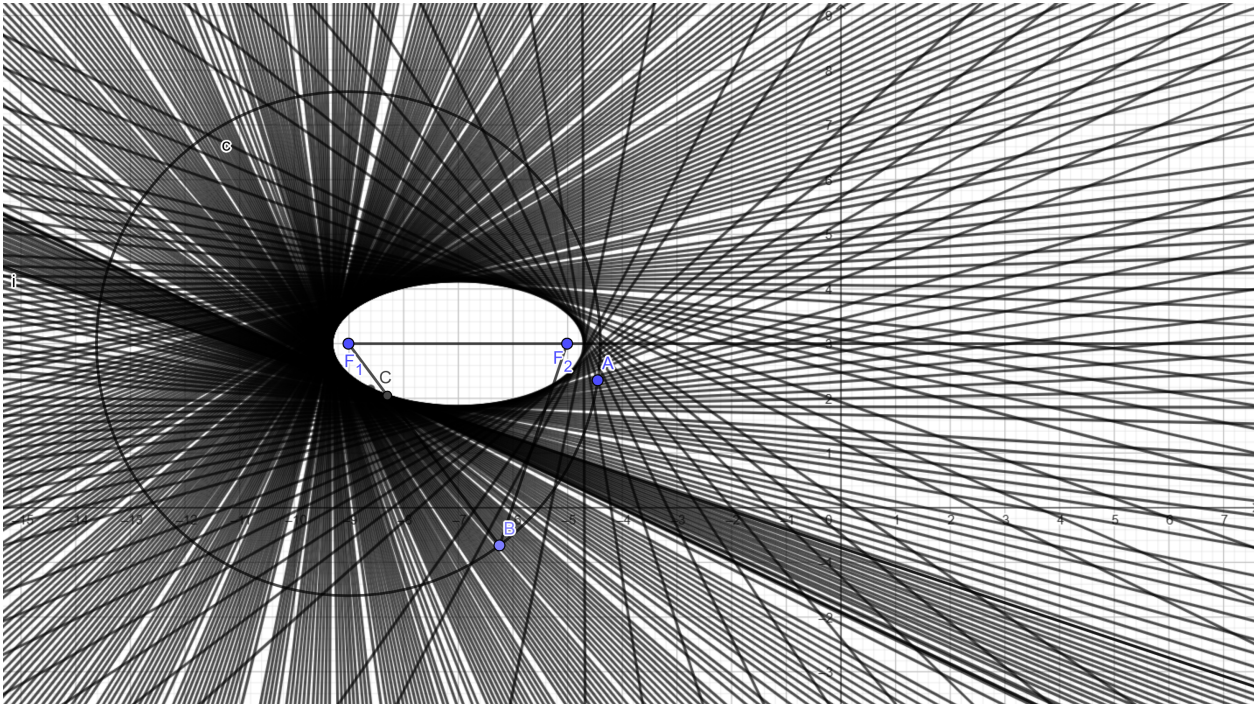




Figura 32 – Elipse criada no GeoGebra por retas tangentes

Fonte: Autor

- **etapa 5:** Clique no ícone e selecione **Círculo dado o Centro e um de seus Pontos**. Escolha F_1 como centro e A como um ponto desse círculo, clicando em cada um em sequência.
- **etapa 6:** Clique no ícone e selecione **Ponto**. Escolha um ponto no círculo de modo que seja distinto de A . Esse será o ponto B .
- **etapa 7:** Clique no ícone e selecione **Reta**. Clique sobre o ponto F_1 e sobre o ponto B para traçar a reta $\overleftrightarrow{F_1B}$.
- **etapa 8:** Clique no ícone e selecione **Segmento**. Trace o segmento $\overline{BF_2}$ clicando em sequência nos pontos B e F_2 .
- **etapa 9:** Clique no ícone e selecione **Mediatriz**. Clique sobre o segmento $\overline{BF_2}$ para formar sua mediatriz.

- **etapa 10:** Clique no ícone  e selecione **Interseção de Dois Objetos**. Clique na interseção da mediatriz do segmento $\overline{BF_2}$ com a reta $\overleftrightarrow{F_1B}$. Esse será o ponto **C**.
- **etapa 11:** Clique sobre o ponto **C** com o botão direito do mouse e selecione **Exibir rastro**.
- **etapa 12:** Clique no ícone  e selecione **Mover**. Clique sobre o ponto **B** e mova-o ao longo do círculo para criar a hipérbole como mostrado na Figura 33.

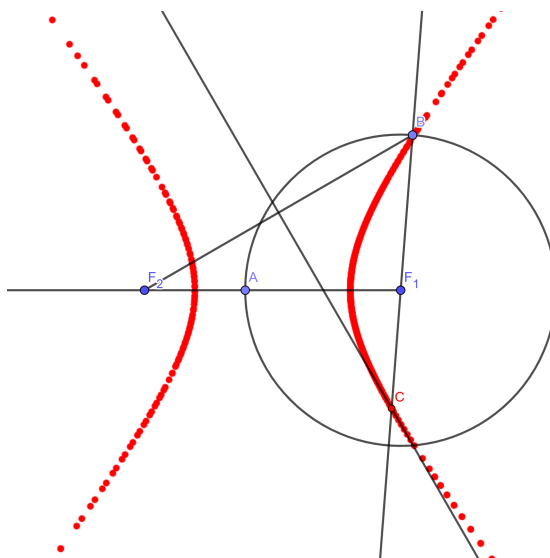


Figura 33 – Hipérbole

Fonte: Autor

Para visualizar a construção da hipérbole, como feito na atividade 1, seguiremos as seguintes etapas:

- **etapa 13:** Desabilitar a exibição de rastro para o ponto **C**. Para isso basta clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto **C** e selecionar **Exibir Rastro**.
- **etapa 14:** Clique com o botão direito do mouse sobre a reta que é mediatriz do segmento $\overline{BF_2}$ e selecione **Exibir Rastro**.
- **etapa 15:** Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto **B** e selecione **Animação**. Teremos a formação da hipérbole como na Figura 34.

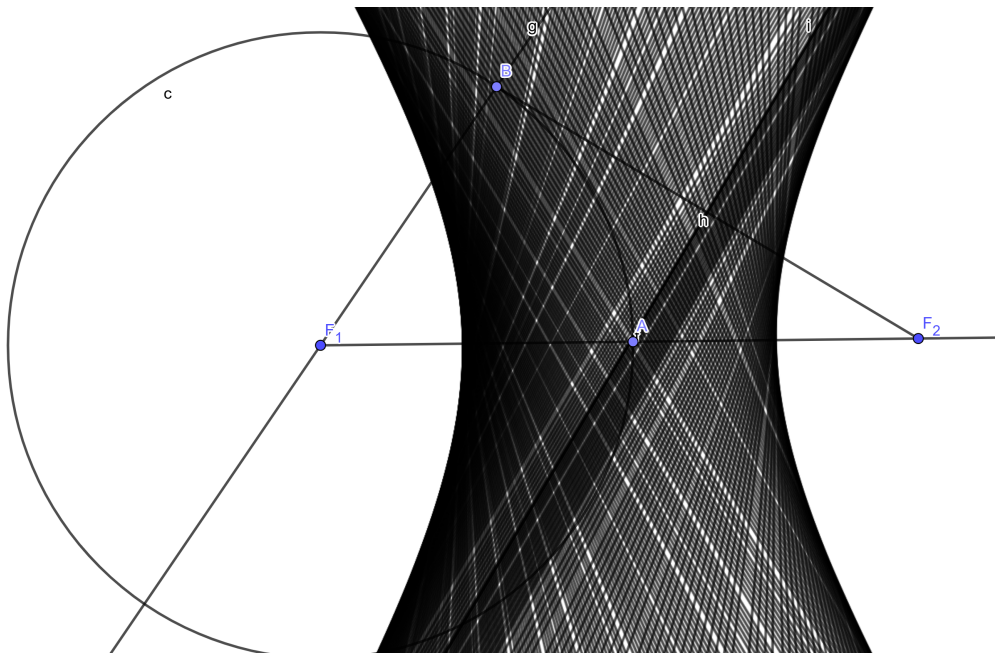











Figura 34 – Hipérbole criada no Geogbra por retas tangentes

Fonte: Autor

4.2.3 CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA

Continuando utilizando o programa GeoGebra, vamos executar as seguintes etapas:

- **etapa 1:** Clique no ícone . Na zona gráfica, crie os pontos **A** e **B** distintos.
- **etapa 2:** Clique em  e selecione **Reta**. Trace a reta que passa por **A** e **B**. Basta clicar sobre os pontos em sequência.
- **etapa 3:** Clique com o botão direito do mouse sobre a reta e selecione **Renomear**. Renomeie a reta para **d**.
- **etapa 4:** Clique em  e selecione **Ponto**. Escolha um ponto fora (acima, por exemplo) da reta **d**. Esse ponto será o ponto **C**.
- **etapa 5:** Clique no ícone  e selecione **Ponto**. Escolha um ponto sobre a reta **d**, distinto de **A** e **B**. Esse ponto será o ponto **D**.

- **etapa 6:** Clique no ícone  e selecione **Segmento**. Clique no ponto **C** e em seguida no ponto **D** para criar o segmento \overline{CD} .
- **etapa 7:** Clique no ícone  e selecione **Mediatriz**. A mediatriz será criada automaticamente quando clicarmos sobre o segmento \overline{CD} .
- **etapa 8:** Clique com o botão direito do mouse sobre a mediatriz e selecione **Renomear**. Renomeie a mediatriz para **m**.
- **etapa 9:** Clique no ícone  e selecione **Reta Perpendicular**. Clique sobre a reta **d** e em seguida sobre o ponto **D**.
- **etapa 10:** Clique com o botão direito do mouse sobre a reta perpendicular à reta **d** que passa pelo ponto **D** e selecione **Renomear**. Renomeie a reta para **t**.
- **etapa 11:** Clique no ícone  e selecione **Interseção de Dois Objetos**. Clique na interseção da reta **m** com a reta **t**. Esse ponto criado será o ponto **E**.
- **etapa 12:** Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto **E** e selecione **Exibir rastro**.
- **etapa 13:** Clique no ícone  e selecione **Mover**. Clique sobre o ponto **D**, mantenha pressionado e arraste-o ao longo da reta **d** para criar a parábola como exemplificado na Figura 35.

Podemos visualizar a construção como feito na atividade 1, siga as etapas apresentadas a seguir:

- **etapa 14:** Desabilitar a exibição de rastro para o ponto **E**. Para isso basta clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto **E** e selecionar **Exibir Rastro**.
- **etapa 15:** Selecione **Exibir Rastro** após clicar com o botão direito do mouse sobre a reta que é mediatriz do segmento \overline{CD} .
- **etapa 16:** Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto **D** e selecione **Animação**. A imagem formada será como na Figura 36.

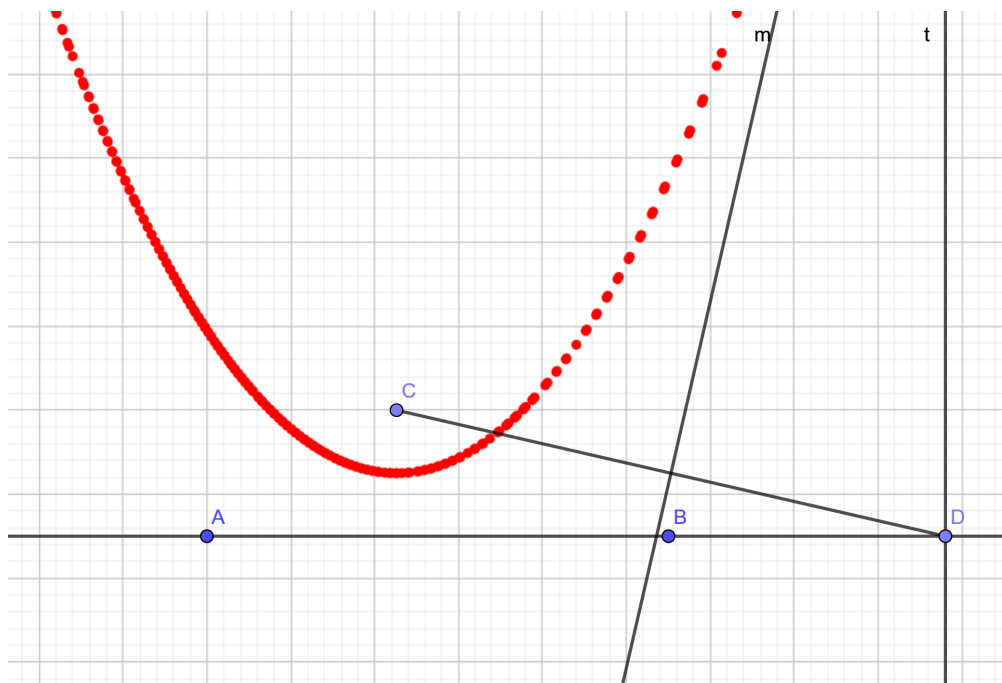



Figura 35 – Parábola

Fonte: Autor

4.3 ATIVIDADE 3: UTILIZAR O SOFTWARE GEOGEBRA PARA COMPROVAÇÃO DA PROPRIEDADE REFLEXIVA DAS CÔNICAS

Essa atividade permite a comprovação da propriedade reflexiva de cada uma das cônicas, pois pela construção e manipulação do programa GeoGebra fica simples visualizar o comportamento dos ângulos de incidência e de reflexão, de acordo com o movimento de variados pontos pertencentes à figura utilizada. Apresenta um novo modo de construir cônicas no programa, revisa conceitos de retas perpendiculares, retas tangentes, de segmentos e de ângulos.

4.3.1 PROPRIEDADE REFLEXIVA NA ELIPSE

- **etapa 1:** Com a tela do GeoGebra aberta, clicar no ícone  e selecione **Ponto**. Clique sobre a zona gráfica e crie os pontos **A** e **B** distintos.
- **etapa 2:** Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto **A** e selecione **Renomear**. Troque **A** por **F₁** e clique em **OK**. Faça o mesmo processo para o ponto **B** e trocando-o por **F₂**.

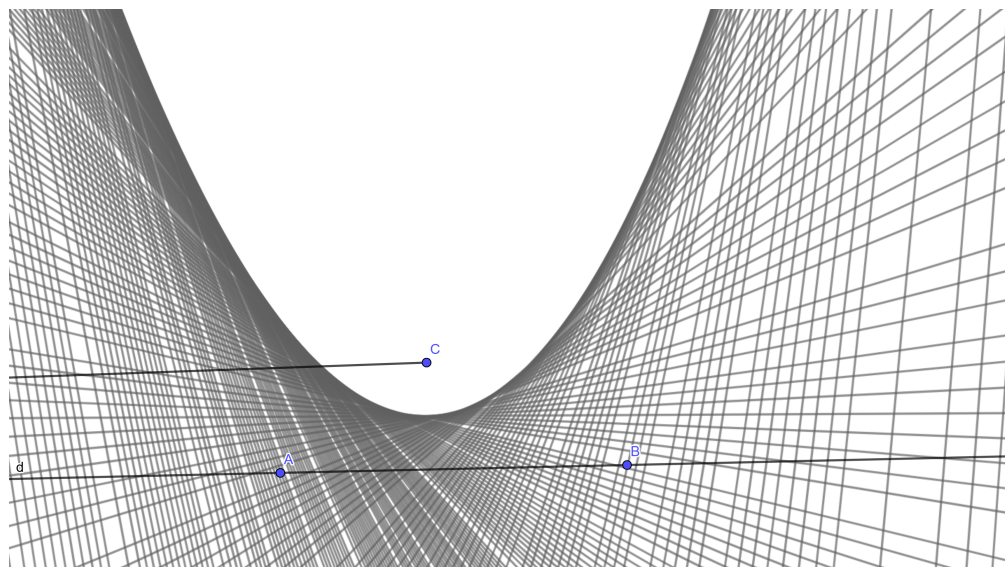









Figura 36 – Parábola criada no GeoGebra por retas tangentes

Fonte: Autor

- **etapa 3:** Clique no ícone  e selecione **Elipse**. Selecione os focos F_1 , F_2 e, depois um ponto da elipse. Esse ponto será automaticamente nomeado de **A**.
- **etapa 4:** Clique no ícone  e selecione **Reta Tangente**. Clique no ponto **A** e em seguida na elipse.
- **etapa 5:** Clique no ícone  e selecione **Reta**. Clique em sequência nos pontos **A** e F_1 para criar a reta $\overleftrightarrow{AF_1}$. Repita o processo para os pontos **B** e F_2 .
- **etapa 6:** Clique no ícone  e selecione **Ponto**. Marque dois pontos na reta tangente à elipse de modo que o ponto **A** fique entre eles. Os pontos criados serão nomeados de **B** e **C** automaticamente.
- **etapa 7:** Clique no ícone  e selecione **Ângulo**. Clique em sequência nos pontos **B**, **A** e F_1 para criar o ângulo entre a reta $\overleftrightarrow{AF_1}$ e a reta tangente à elipse no ponto **A**.
- **etapa 8:** Clique no ícone  e selecione **Ângulo**. Clique em sequência nos pontos F_2 , **A** e **C** para criar o ângulo entre a reta $\overleftrightarrow{AF_2}$ e a reta tangente à elipse no ponto **A**.

- **etapa 9:** Clique no ícone  e selecione **Mover**. Clique no ponto **A**, mantendo-o pressionado e mova-o ao longo da elipse. Observe o comportamento dos ângulos como na Figura 37.

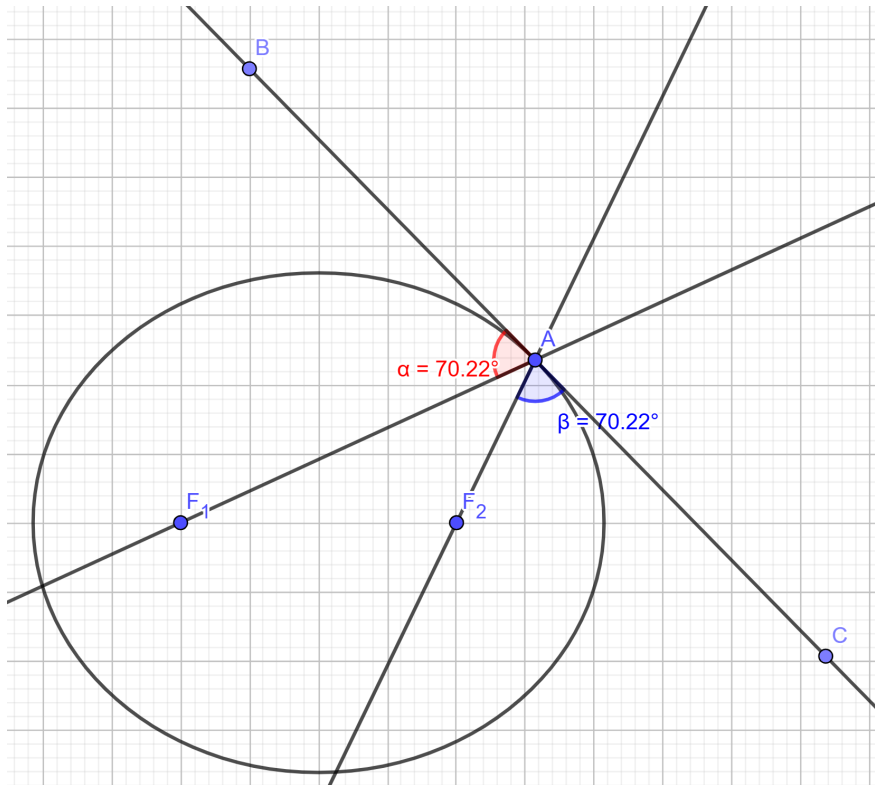










Figura 37 – Ângulo de incidência e reflexão na Elipse




Fonte: Autor

4.3.2 PROPRIEDADE REFLEXIVA NA HIPÉRBOLE

- **etapa 1:** Com a tela do GeoGebra aberta, clicar no ícone  e selecione **Ponto**. Clique sobre a zona gráfica e crie os pontos **A** e **B** distintos.
- **etapa 2:** Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto **A** e selecione **Renomear**. Troque **A** por **F₁** e clique em **OK**. Faça o mesmo processo para o ponto **B** e trocando-o por **F₂**.
- **etapa 3:** Clique no ícone  e selecione **Hipérbole**. Selecione os focos **F₁**, **F₂** e, depois um ponto da Hipérbole. Esse ponto será automaticamente nomeado de **A**.

- **etapa 4:** Clique no ícone  e selecione **Reta Tangente**. Clique no ponto **A** e em seguida na hipérbole.
- **etapa 5:** Clique no ícone  e selecione **Reta**. Clique em sequência nos pontos **A** e **F₁** para criar a reta $\overleftrightarrow{AF_1}$. Repita o processo para os pontos **B** e **F₂**.
- **etapa 6:** Clique no ícone  e selecione **Ponto**. Marque um ponto na reta tangente à hipérbole. Esse ponto será automaticamente nomeado de **B**.
- **etapa 7:** Clique no ícone  e selecione **Ângulo**. Clique em sequência nos pontos **F₁**, **A** e **B**, para criar o ângulo entre a reta $\overleftrightarrow{AF_1}$ e a reta tangente à hipérbole no ponto **A**.
- **etapa 8:** Clique no ícone  e selecione **Ângulo**. Clique em sequência nos pontos **B**, **A** e **F₂** para criar o ângulo entre a reta $\overleftrightarrow{AF_2}$ e a reta tangente à hipérbole no ponto **A**.
- **etapa 9:** Clique no ícone  e selecione **Mover**. Clique no ponto **A**, mantendo-o pressionado mova-o ao longo da hipérbole. Observe o comportamento dos ângulos como na Figura 38.

4.3.3 PROPRIEDADE REFLEXIVA NA PARÁBOLA

- **etapa 1:** Com a tela do GeoGebra aberta, clicar no ícone  e selecione **Ponto**. Clique sobre a zona gráfica e crie os pontos **A** e **B** distintos. Observação.: Criar os pontos distantes uns 15 cm.
- **etapa 2:** Clique no ícone  e selecione **Reta**. Clique sobre os pontos **A** e **B** para criar a reta \overleftrightarrow{AB} e que será a diretriz da parábola.
- **etapa 3:** Clique no ícone  e selecione **Ponto**. Crie um ponto fora da reta \overleftrightarrow{AB} . Será nomeado como ponto **C** e é o foco da parábola.

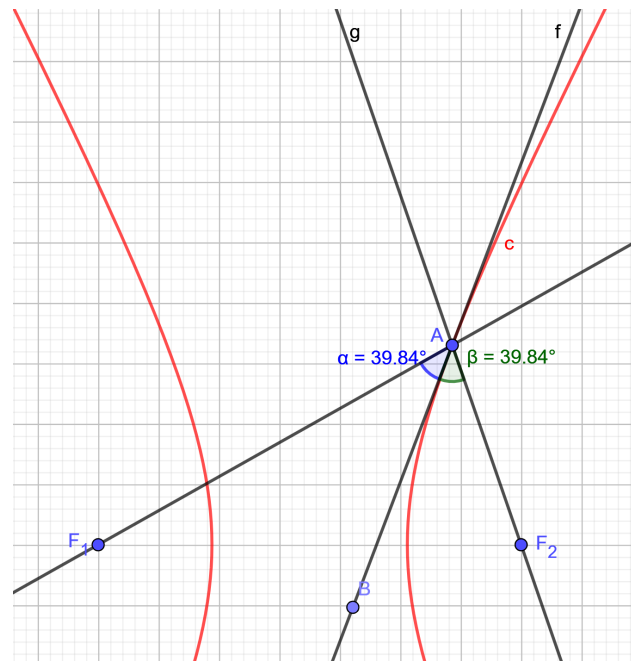













Figura 38 – Ângulos de incidência e reflexão na Hipérbole

Fonte: Autor

- **etapa 4:** Clique no ícone  e selecione **Parábola**. Clique no ponto **C**, foco da parábola e, na reta que é sua diretriz.
- **etapa 5:** Clicar no ícone  e selecione **Ponto**. Marque um ponto pertencente à parábola. O ponto será nomeado automaticamente de **D**.
- **etapa 6:** Clicar no ícone  e selecione **Reta Tangente**. Clique no ponto **D** e sobre a parábola para criar a reta tangente à parábola no ponto **D**.
- **etapa 7:** Clique no ícone  e selecione **Reta**. Crie a reta \overleftrightarrow{CD} . Basta clicar, em sequência, nos pontos **C** e **D**.
- **etapa 8:** Clicar no ícone  e selecione **Ponto**. Marque um ponto pertencente à reta tangente à parábola, distinto do ponto **D**.
- **etapa 8:** Clicar no ícone  e selecione **Ponto**. Marque um ponto pertencente à reta tangente à parábola, distinto do ponto **D**. O ponto será nomeado de **E**.

- **etapa 9:** Vamos criar o ângulo formado pela reta \overleftrightarrow{CD} e pela reta \overleftrightarrow{DE} tangente à parábola. Basta clicar no ícone  e selecionar **Ângulo**. Clique em sequência nos pontos **C**, **D** e **E**.
- **etapa 10:** Agora vamos girar o ângulo criado anteriormente em relação ao ponto **D** e à reta tangente. Para isso clique no ícone  e selecione **Girar em Torno de Um Ponto**. Selecione em sequência a reta tangente, o ponto **D** e o ângulo α . Será criada a reta g' .
- **etapa 11:** Clicar no ícone  e selecione **Ponto**. Marque um ponto pertencente à reta g' que seja distinto de **D**. Esse será o ponto **F**.
- **etapa 12:** Vamos criar o ângulo formado pela reta \overleftrightarrow{DE} e pela reta g' . Para isso, clique no ícone  e selecionar **Ângulo**. Clique em sequência nos pontos **E**, **D** e **F**.
- **etapa 13:** Clique no ícone  e selecione **Mover**. Clique no ponto **D**, mantenha pressionado e arraste-o ao longo da parábola, observando o valor dos ângulos criados como na Figura 39.

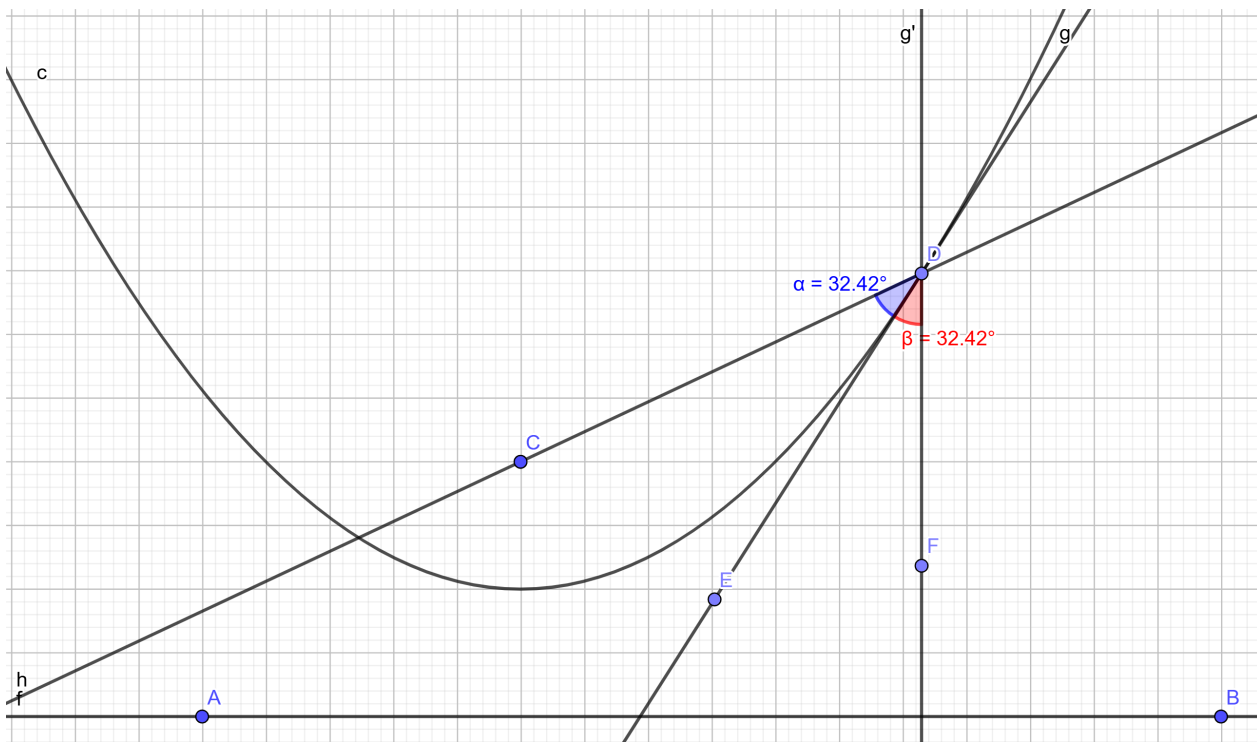


Figura 39 – Ângulo de incidência e reflexão na Parábola

Fonte: Autor

Considerações Finais

Este trabalho explora o tema cônicas partindo de aspectos históricos como os primeiros matemáticos que estudaram o assunto bem como aqueles que deram continuidade e fizeram novas descobertas. Os usos e aplicações dessas descobertas em variados campos, desenvolve um pouco do tema baseado no que é exposto comumente nos livros didáticos de nível médio e busca ir além com a averiguação de propriedades mais específicas das cônicas que não são trabalhadas no ensino básico. Por fim, apresenta atividades práticas que possam trabalhar o tema cônicas no ensino básico para além do que é normalmente exigido, de uma maneira simples e acessível aos alunos nesta etapa da vida acadêmica. Mostrando que é possível explorar conceitos das cônicas elipse e hipérbole no ensino básico e não só de parábola e circunferência.

Dos primeiros estudos e descobertas de Menaecmo e Apolônio de Perga chegamos a matemáticos mais recentes como Fermat e Descartes. Matemáticos que contribuíram imensamente para a Geometria Analítica como é estudada atualmente, em que a mistura de Álgebra e Geometria influenciam a prática da matemática moderna. A evolução no estudo das cônicas proporciona a aplicação para além da matemática, em áreas como arquitetura, engenharia, saúde e outras.

Averiguamos conceitos de algumas das cônicas desde conhecimentos básicos sobre a definição de elipse, parábola, hipérbole e circunferência, as principais equações que expressam cada uma delas e propriedades mais avançadas. A propriedade de reflexão das cônicas que geralmente não é estudada na educação básica foi exemplificada apresentando exemplos de usos variados em nosso cotidiano e em diversos campos de aplicação. Desenvolvimento de faróis, antenas receptoras, telescópios, aparelhos médicos, assim como usos em design, construção civil, astronomia e bilhares cônicos como o bilhar elíptico.

O comportamento dos ângulos formados em incidências e reflexões na borda de cada cônica foram definidos e demonstrados. Entretanto para contemplar as habilidades exigidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC...), as atividades apresentadas como opção de trabalho em

sala de aula foram adaptadas para atender as exigências da disciplina em cada ano e proporcionar que se explore um pouco mais o tema, introduzindo novos conhecimentos sobre as cônicas, já nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio. As atividades foram trabalhadas com alunos do ensino fundamental anos finais como um modo de introduzir o conteúdo de maneira simples, sem exigir além do que alunos nessa etapa precisam ter conhecimento. O foco foi alunos de 7º e 9º, como uma apresentação prévia dos conteúdos que poderiam ser estudados nas etapas acadêmicas posteriores.



Figura 40 – Dobraduras em sala de aula

Como a Matemática é, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, foi de fundamental importância também considerar o papel explorador das experimentações na aprendizagem da Matemática. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. (BNCC... ,). Mediante a construção manual que envolve desenho geométrico, medição, manuseio de materiais físicos e indagações por parte do professor tais atividades tornaram possível promover o aprendizado de uma forma mais tranquila e interessante para os estudantes.

Pôde-se também realizar cálculos para testar a veracidade da definição de uma cônica, no entanto, sem utilizar a definição de circunferência e parábola que são as que os alunos estudam neste momento nem apresentar o conceito daquelas que não fazem parte do plano de curso deles segundo o CRMG - Currículo Referência de Minas Gerais, (PLANOS... ,). Permitindo questionamentos e novas descobertas de diferenças existentes em cada cônica, mediante a verificação das distâncias de pontos aleatórios de uma parábola, por exemplo, seu foco e sua reta diretriz ficou mais simples a compreensão do tema.

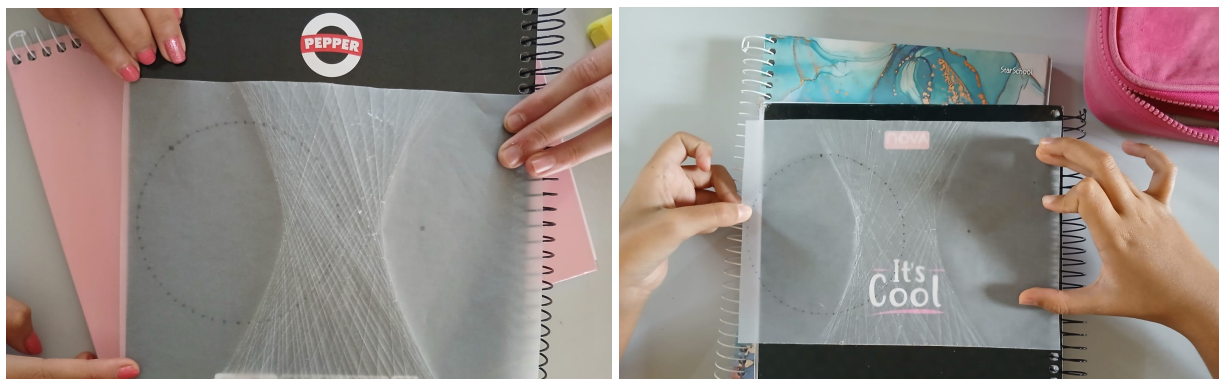


Figura 41 – Hipérboles construídas pelos alunos



Figura 42 – Parábolas e Hipérboles construídas pelos alunos

Para fortalecer o aprendizado dos temas vistos ao longo do trabalho e utilizar processos, ferramentas matemáticas e tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados, foi utilizado o software de matemática dinâmica GeoGebra. Utilizando a tecnologia do programa fizemos a Atividade 1, antes feita manualmente, para proporcionar um novo campo de experimentação, maneiras distintas de explorar conceitos matemáticos antes vistos somente no papel, inserção da tecnologia de modo produtivo no cotidiano dos alunos para agregar novas descobertas.

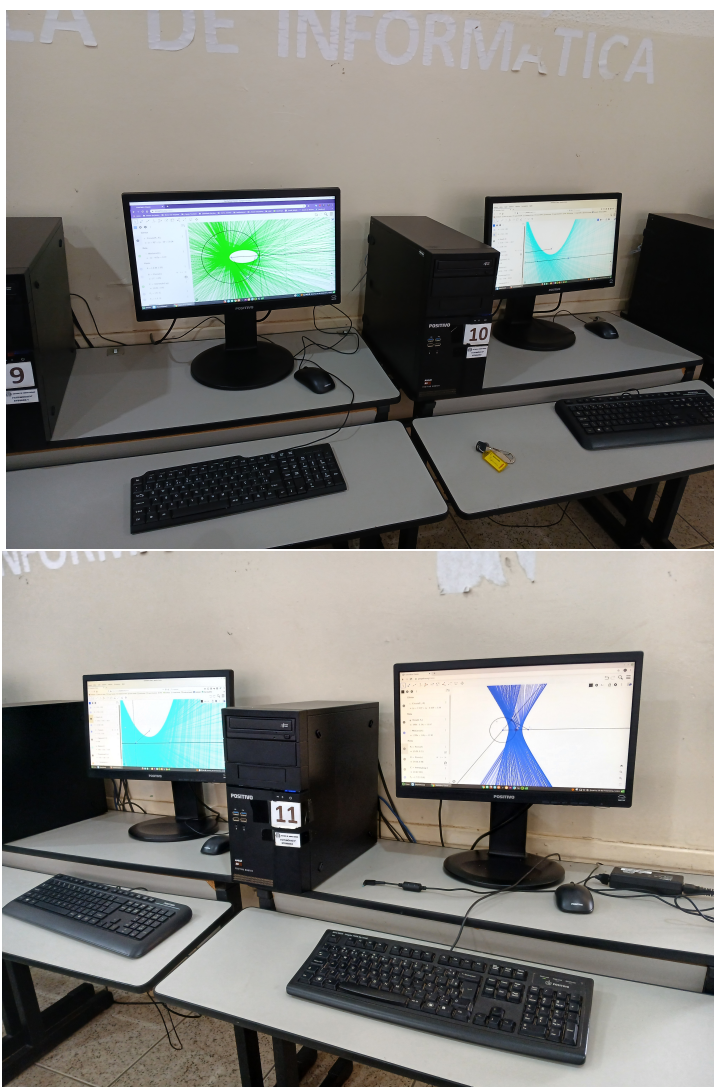


Figura 43 – Atividades no Geogebra

Por ser um programa ligeiramente de fácil manipulação e com as mais diversas opções de ferramentas matemáticas que permitem a exploração de possibilidades que seriam de difícil execução manual, foi possível executar a atividade proposta 3 de maneira rápida e fácil para visualizar e testar variados comportamentos dos ângulos na propriedade reflexiva das cônicas. Transformando a

complexidade de se aprender um assunto utilizando lápis e papel em algo mais palpável com auxílio tecnológico.

O simples ato de apresentar uma proposta de aula diferente, com a manipulação de materiais diversos para a construção de algo, despertou mais interesse por parte dos alunos. A utilização dos assuntos já estudados e a construção de desenhos matemáticos causaram diversas dificuldades e questionamentos. Coisas básicas como o uso de um compasso para fazer uma circunferência ou utilizar a régua para medir distâncias e desenhar uma reta, foram desafios para a maioria deles. Então, nesse ponto, foi necessária uma participação maior do professor para que eles desenvolvessem as atividades de modo correto. Resolvidas as dificuldades iniciais, as dobraduras no papel vegetal foram mais tranquilas. Houve a falta de paciência de alguns em fazer o máximo de dobraduras possível para obter uma maior aproximação do desenho desejado e a ansiedade para descobrir o que viria a ser cada atividade. Mas, a medida em que alguns conseguiam formar as imagens no papel vegetal, os outros sentiram-se instigados e desafiados a continuar tentando chegar ao mesmo resultado que os colegas.



Figura 44 – Atividades no Geogebra

A utilização do laboratório de informática para as aulas, em qualquer disciplina, desperta interesse de imediato e para essas atividades não foi diferente. Entretanto, como muitos nunca tinham tido contato com o programa utilizado ou mesmo com um computador, devido as condições precárias da sala de informática e dos recursos oferecidos, foram necessárias algumas estratégias adicionais. Dividir o número de alunos de cada sala em grupos menores para trabalhar de modo mais ágil e dando atenção maior ao que cada aluno estava fazendo, utilizar o apoio de outros professores na gestão dos desafios que esse tipo de aula pode causar na escola de modo geral, treinar previamente alguns alunos para que estivessem preparados e aptos a apoiar os colegas em caso de dúvidas durante a execução das atividades. As dificuldades e os desafios que surgiram ao executar as atividades foram mais facilmente superadas pelos alunos pois, o uso da tecnologia de início já despertou maior interesse em fazer e com todos os recursos que programas como o GeoGebra oferecem mais a intervenção do professor e a ajuda de outros colegas, ficou mais simples estudar, compreender e aprender o tema.

Os resultados observados durante a aplicação das atividades, com a maior participação e interesse demonstrado, comprovaram que se trabalhado de forma planejada e usando recursos didáticos apropriados, pode-se aprofundar o estudo do tema cônicas com alunos do ensino básico, agregando a tecnologia às práticas pedagógicas da sala de aula, trazendo grandes benefícios à aprendizagem e disseminação de conhecimento além da sala de aula.

Referências

BNCC - Base Nacional Comum Curricular. Acesso em fevereiro de 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf>. Citado 6 vezes nas páginas 5, 7, 14, 51, 71 e 72.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019. Citado na página 16.

CERQUEIRA, A. A. Parábola e suas aplicações. Instituto de Matemática. Departamento de Matemática., 2017. Citado na página 15.

CURSO GeoGebra - Uma ferramenta para Metodologias Ativas. Acesso em 22 de outubro de 2024. Disponível em: <<https://escoladeformacao.educacao.mg.gov.br/index.php/em-andamento/597-geogebra-uma-ferramenta-para-metodologias-ativas-andamento>>. Citado na página 56.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. Geometria analítica. *Rio de Janeiro: SBM*, p. 99–155, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 16, 24, 28 e 31.

DIAS, E. R. Cônicas: atividades aplicáveis no ensino médio com auxílio de geometria dinâmica e dobraduras. 2014. Citado na página 52.

DOLCE, O.; POMPEO, J. *Fundamentos de matemática elementar, 9: Geometria Plana*.(vol. 9, pp. 1-449). Atual. 1997. 162-169 p. Citado na página 37.

DOMINGUES, H. H. *A Geometria Analítica, Fermat e Descartes. Publicado por Kleber Kilhian em 15/06/2013*. 2013. Acesso em 23 de abril de 2024. Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2013/06/a-geometria-analitica-fermat-e-descartes.html>>. Citado na página 17.

FERREIRA, C. C. O bilhar elíptico. 2023. Citado na página 39.

HABIB, N. d. C. P. Atividades para a cônica hipérbole activities for the conical hyperbole. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 8, p. 246–265, 2013. Citado na página 35.

MIRANDA, C. M. D. A construção de uma mesa de bilhar elíptica como recurso motivacional para o estudo de cônicas no ensino médio. 2013. Citado na página 19.

- OLIVEIRA, N. C. d. Um estudo sobre a propriedade de reflexão dos bilhares cônicos. Universidade Federal de Campina Grande, 2019. Citado na página 22.
- PEREIRA, G. P. R. O ensino das cônicas através de estudos contextualizados até sua concepção na geometria analítica: parábola. 2013. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.
- PLANOS de Curso CRMG. Acesso em Março de 2024. Disponível em: <<https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg?start=1>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 72.
- RAMOS, M. D. C. P. *Da álgebra geométrica grega à geometria analítica de Descartes e de Fermat*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Porto (Portugal), 2013. Citado na página 17.
- RAPOSO, P. *Uma iniciação ao universo dos Telescópios*. 2006. Acesso em 3 maio de 2024. Disponível em: <<https://oal.ul.pt/observatorio/vol12/n2/pagina4.html>>. Citado na página 20.
- RODRIGUES, F. B. *Elipse: Propriedade Refletora e Aplicações*. Dissertação (B.S. thesis), 2021. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- SALLUM, E. M. 6º encontro da rpm - caracterizações das cônicas. IME-USP, 2013. Disponível em: <https://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/6_mc3.pdf>. Citado na página 52.
- SOUZA, L. D. d. Cônicas e suas propriedades notáveis. 2014. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 49.