

Universidade Federal de Ouro Preto

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional
PROFMAT

Dissertação

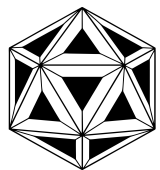
O Teorema da Galeria de Arte: Uma aplicação em sala de aula.

Augusto Costa Viana

Ouro Preto
2025



UFOP



DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO



PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

Augusto Costa Viana

O Teorema da Galeria de Arte: Uma aplicação em sala de aula.

Ouro Preto - MG, Brasil

Fevereiro 2025

Augusto Costa Viana

O Teorema da Galeria de Arte: Uma aplicação em sala de aula.

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)

Departamento de Matemática (DEMAT)

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Geraldo do Couto

Coorientador: Prof. Dr. Sebastião Martins Xavier

Ouro Preto - MG, Brasil

Fevereiro 2025

*“A persistência é o caminho do êxito.”
(Charles Chaplin)*

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

V614o Viana, Augusto Costa.
O Teorema da Galeria de Arte [manuscrito]: uma aplicação em sala de aula. / Augusto Costa Viana. Augusto Costa Viana. - 2025.
60 f.: il.: color..

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Geraldo do Couto.
Coorientador: Prof. Dr. Sebastião Martins Xavier.
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Área de Concentração: Geometria e Topologia.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Teoria dos grafos. 3. Matemática na arte. I. Viana, Augusto Costa. II. Couto, Rodrigo Geraldo do. III. Xavier, Sebastião Martins. IV. Universidade Federal de Ouro Preto. V. Título.

CDU 51:37

Bibliotecário(a) Responsável: Soraya Fernanda Ferreira e Souza - SIAPE: 1.763.787



FOLHA DE APROVAÇÃO

Augusto Costa Viana

O Teorema da Galeria de Arte: Uma aplicação em sala de aula.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de mestre

Aprovada em 24 de março de 2025

Membros da banca

Prof. Dr. Rodrigo Geraldo do Couto - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Sebastião Martins Xavier - Coorientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Lucio Paccori Lima - Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Thiago Morais Pinto - Universidade Federal de Ouro Preto

Prof. Dr. Rodrigo Geraldo do Couto, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 24/03/2025



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Geraldo do Couto, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 24/03/2025, às 16:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0881170** e o código CRC **9CB999C6**.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por permitir que tudo isso se concretizasse, pela força e saúde que me concedeu em cada etapa deste trabalho, e por me guiar nos momentos de dificuldade, inspirando-me a não desistir.

Aos meus pais e irmãos, expresso minha eterna gratidão pelo amor incondicional, pelo apoio e pelo incentivo nos momentos desafiadores.

Aos meus amigos, que conheci durante o curso do PROFMAT, deixo meu profundo agradecimento pelas alegrias compartilhadas, pelas tristezas superadas juntos e pelas dificuldades que enfrentamos lado a lado. Cada um de vocês contribuiu de maneira única para essa jornada.

Ao meu orientador, Prof Dr. Rodrigo Geraldo do Couto, sou imensamente grato por ter aceitado me orientar. Seu apoio, incentivo e dedicação foram essenciais para a conclusão deste trabalho.

À universidade, seu corpo docente, direção e administração, agradeço por proporcionar as oportunidades e recursos que contribuíram para o meu desenvolvimento profissional e pessoal.

Por fim, a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha trajetória, meus sinceros agradecimentos.

Resumo

A teoria dos grafos modela diversos problemas do cotidiano. Utilizando essa importante ferramenta matemática, nos capítulos iniciais apresentamos conceitos e definições importantes que serão necessários para o entendimento e resolução do problema da galeria de arte. A prova desse teorema é concluída de forma clara e completa e algumas de suas ideias são usadas de maneira didática para se trabalhar esse problema no ensino básico.

Palavras chaves: Grafos; ensino.

Abstract

Graph theory models many everyday problems. Using this important mathematical tool, in the initial chapters we present important concepts and definitions that will be necessary for understanding and solving the art gallery problem. The proof of this theorem is concluded clearly and completely and some of its ideas are used in a didactic way to work on this problem in elementary school.

keywords: Graphs; teaching.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de um polígono simples. Fonte: Próprio Autor	17
Figura 2 – O vértice A é convexo e o vértice B é côncavo Fonte: Próprio Autor	18
Figura 3 – O ponto y é coberto pelo ponto x. Fonte: Próprio Autor	19
Figura 4 – Exemplo de galeria. Fonte: (BERG M.; KREVELD, 2000).	19
Figura 5 – Casos iniciais. Fonte: Próprio Autor	20
Figura 6 – Pente. Fonte: Próprio Autor	21
Figura 7 – Pente alterado. Fonte: Próprio Autor	21
Figura 8 – Cidades e estradas. Fonte: Próprio Autor	23
Figura 9 – Vértices e arestas. Fonte: Próprio Autor	24
Figura 10 – Grau de um vértice. Fonte: Próprio Autor	25
Figura 11 – Subgrafo. Fonte: Próprio Autor	26
Figura 12 – Grafos regulares. Fonte: Próprio Autor	27

Figura 13 – Grafos de K_1 , K_2 , K_3 , K_4 e K_5 .	
Fonte: Próprio Autor	27
Figura 14 – Um caminho e um ciclo.	
Fonte: Próprio Autor	28
Figura 15 – Grafo bipartido.	
Fonte: Próprio Autor	28
Figura 16 – Grafo bipartido completo.	
Fonte: Próprio Autor	29
Figura 17 – Grade 3-por-5.	
Fonte: Próprio Autor	29
Figura 18 – Grafos do 1-cubo, 2-cubo, 3-cubo.	
Fonte: Próprio Autor	30
Figura 19 – Grafo de Petersen.	
Fonte: Próprio Autor	30
Figura 20 – Conjunto independente máximo do grafo de Petersen.	
Fonte: Próprio Autor	32
Figura 21 – Exemplos de número cromático.	
Fonte: Próprio Autor	33
Figura 22 – Sudoku 9x9.	
Fonte: (CARVALHO, 2019)	34
Figura 23 – Grade 3-por-5 é 2-colorível.	
Fonte: Próprio Autor	34
Figura 24 – k-cubo é 2-colorível.	
Fonte: Próprio Autor	35
Figura 25 – Triângulação de um polígono.	
Fonte: Próprio Autor	37
Figura 26 – Triangulações de um polígono de $n = 7$ lados.	
Fonte: Próprio Autor	38
Figura 27 – Vértice convexo.	
Fonte: Próprio Autor	39
Figura 28 – Uma diagonal do polígono.	
Fonte: Próprio Autor	39
Figura 29 – yz é uma diagonal.	
Fonte: Próprio Autor	40
Figura 30 – xv é uma diagonal.	
Fonte: Próprio Autor	40

Figura 31 – A diagonal em verde divide P em dois subpolígonos P_1 e P_2 Fonte: Próprio Autor	41
Figura 32 – 3-coloração do grafo G Fonte: Próprio Autor	42
Figura 33 – Planta de uma galeria. Fonte: https://galeriacanizares.blogspot.com/p/blog-page7.html	44
Figura 34 – Exemplo apresentado para a turma. Fonte: pt.wikipedia.org	47
Figura 35 – As quatro galerias entregues aos alunos do 8º e 9º ano. Fonte: Próprio Autor	48
Figura 36 – Polígonos convexos de 3 lados, 4 lados, 5 lados e 6 lados. Fonte: Próprio Autor	48
Figura 37 – Polígono convexo e região com formato de estrela. Fonte: Próprio Autor	49
Figura 38 – Realização das atividades da etapa 1. Fonte: Próprio Autor	51
Figura 39 – Realização das atividades da etapa 3 e 4. Fonte: Próprio Autor	52
Figura 40 – Realização da etapa 7, 8, 9 e 10. Fonte: Próprio Autor	54

Sumário

Introdução	15
1 O PROBLEMA DA GALERIA DE ARTE	17
2 CONCEITOS BÁSICOS	23
2.1 Noções sobre Grafos	23
2.2 Grafos	24
2.3 Primeiro resultado	26
2.4 Alguns exemplos de grafos	27
3 COLORAÇÃO	31
3.1 Conjuntos independentes	31
3.2 Coloração de vértices	32
4 O TEOREMA DA GALERIA DE ARTE	37
4.1 Demonstração do teorema	37
5 APLICAÇÃO NO ENSINO BÁSICO	45
5.1 Plano de aula - O problema da galeria de Arte	45
5.1.1 Objetivo	46
5.1.2 Ementa	46
5.1.3 Desenvolvimento	46
5.2 Análise dos resultados	50
5.2.1 8° e 9° ano do Ensino Fundamental	50
Conclusão	55
REFERÊNCIAS	57

Introdução

Na ocasião de uma conferência em Stanford, em agosto de 1973, Victor Klee questionou ao talentoso jovem matemático tcheco Václav Chvátal (Universidade de Montreal) sobre um problema de guardar as pinturas em uma galeria de arte (HONSBERGER, 1976). Pela maneira como as salas podem se distribuir, com nichos e cantos, ter a visão de cada ponto da galeria é um problema geométrico interessante. A questão é então determinar o número mínimo de guardas necessários para vigiar toda galeria. Os guardas devem permanecer fixos, mas podem olhar em todo seu redor. As paredes da galeria são consideradas retas. Em pouco tempo, Chvátal resolveu o problema (CHVÁTAL, 1975). Ele mostrou que se a galeria tiver n paredes (ou seja, se a planta for um polígono simples) então, independente da sua forma, o número mínimo de guardas necessários nunca será superior a $\lfloor n/3 \rfloor$ (parte inteira de $n/3$).

Três anos depois, o matemático americano Steven Fisk apresentou uma outra demonstração bastante elegante desse teorema (FISK, 1978). Essa demonstração, bastante visual, se baseia nos conceitos de triangulação de polígonos e coloração de vértices de um grafo.

O problema da galeria de arte faz parte das raízes da geometria computacional, um campo que combina geometria com ideias de matemática discreta e otimização, buscando algoritmos eficientes para resolver problemas geométricos. Algumas aplicações práticas da geometria computacional incluem: computação gráfica, design computacional, robótica e geoprocessamento.

Esse trabalho tem como objetivo estudar o problema da galeria de arte e extrair dele alguns fatos que possam ser apresentadas em sala de aula, visando não só a compreensão do problema por parte dos alunos mas também o entendimento, mesmo que parcial e informal, de algumas ideias bastante visuais que aparecem na demonstração e que levam a um algoritmo para a solução dada pelo teorema.

No primeiro capítulo apresentamos de maneira formal o problema da galeria de arte e enunciamos o Teorema da galeria de arte de Chvátal (Teorema 4.1.1). No segundo capítulo introduzimos

alguns conceitos iniciais de grafos e apresentamos alguns exemplos para uma familiarização com esses conceitos. No terceiro capítulo apresentamos de maneira sucinta e com alguns exemplos o conceito de coloração de grafos, que será usado na demonstração do teorema da galeria de arte de Chvátal. No quarto capítulo apresentamos a demonstração dada por Fisk ([FISK, 1978](#)) do Teorema da galeria de arte de Chvátal.

No quinto capítulo fazemos o relato das aulas práticas sobre grafos e o problema da galeria de arte desenvolvido na Escola Estadual de Piscamba localizada em Piscamba (distrito de Jequeri), com uma turma do 8º ano e uma turma do 9º ano.

O Problema da Galeria de Arte

Nesse capítulo trataremos da formalização do problema da galeria de arte e ao final enunciaremos o teorema principal do trabalho, o Teorema da galeria de arte de Chvátal (Teorema 4.1.1). As referências usadas aqui foram (AIGNER M.; ZIEGLER, 2002), (O'ROURKE, 1987) e (SOARES, 2017).

Inicialmente vamos dar algumas definições envolvendo polígonos. Dados dois pontos A e B do plano, denotaremos por \overline{AB} o segmento de reta que une A e B .

Definição 1.0.1. *Sejam $n \geq 3$ um número natural e A_1, A_2, \dots, A_n pontos distintos do plano. Dizemos que a coleção de n segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ é um **polígono simples** se quaisquer dois segmentos não consecutivos não se interceptam e quaisquer dois segmentos consecutivos se interceptam apenas no seu vértice comum. Aqui convencionamos que $\overline{A_nA_1}$ e $\overline{A_1A_2}$ são consecutivos. Denotaremos um polígono como acima simplesmente por $P = A_1, A_2, \dots, A_n$, descrevendo seus pontos.*

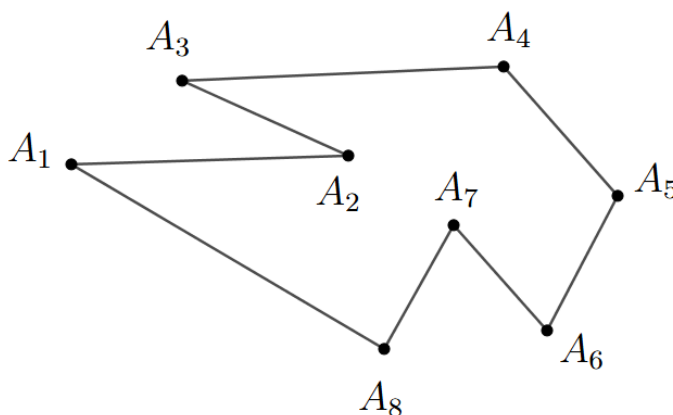


Figura 1 – Exemplo de um polígono simples.
Fonte: Próprio Autor

Como só iremos tratar com polígonos simples, a partir daqui vamos nos referir a eles apenas como polígonos.

Precisamos destacar alguns elementos do polígono. Os pontos A_1, A_2, \dots, A_n serão chamados **vértices** do polígono e os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ serão chamados **lados** do polígono.

Um vértice A de um polígono é dito **convexo** (resp. **côncavo**) se o ângulo interior do polígono no vértice A for menor (resp. maior) que 180° , como na figura 2.

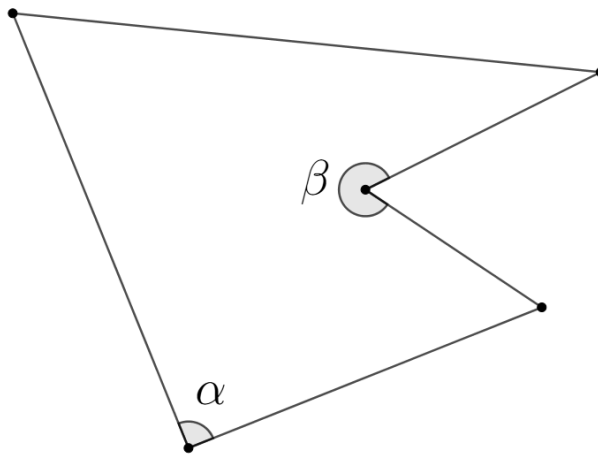


Figura 2 – O vértice A é convexo e o vértice B é côncavo
Fonte: Próprio Autor

Sem causar ambiguidade, às vezes vamos nos referir ao polígono não somente como um conjunto de vértices e lados mas também considerando a região interior do polígono, limitada por esses lados. Quando tratamos um polígono desse modo e queremos diferenciar a região interior do polígono com seu conjunto de lados, vamos nos referir a esse último como **bordo** de P e usaremos a notação ∂P .

Considerando o polígono com a região interior, dizemos que um polígono é **convexo** se dados quaisquer dois pontos no polígono, o segmento de reta que une esses dois pontos está contido no polígono.

Também dizemos que um ponto $x \in P$ **cobre** (ou **enxerga**) um ponto $y \in P$ se o segmento $\overline{xy} \subset P$. Observe que se x cobre y , o segmento \overline{xy} pode tocar ∂P em um ou mais pontos, isto é, a linha de visão não é bloqueada pelo contato rasante com o bordo, como mostrado no exemplo da figura 3.

Dizemos que um subconjunto $S \subset P$ **cobre** P , se $\forall y \in P$ existe $x \in S$ tal que $\overline{xy} \subset P$, isto é, se y é um ponto de P então existe um ponto x em S que enxerga y .

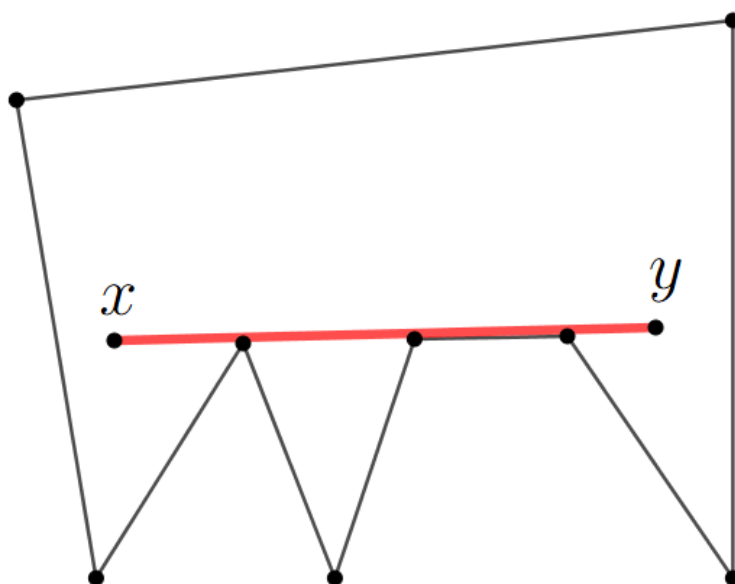


Figura 3 – O ponto y é coberto pelo ponto x .
Fonte: Próprio Autor

Retornando ao nosso problema, a Galeria de arte é representada por um polígono P de n lados. Um guarda como na figura 4, pode inspecionar 360° sobre sua posição fixa, isto é, um guarda é um ponto x do polígono cujo campo de visão é o subconjunto de P coberto pelo ponto x .

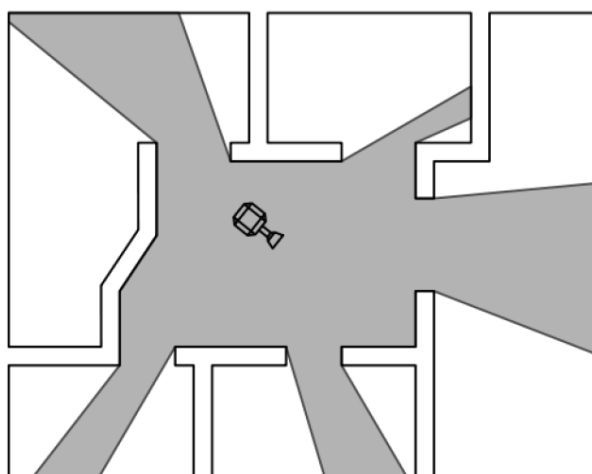


Figura 4 – Exemplo de galeria.
Fonte: (BERG M.; KREVELD, 2000).

Claramente se o polígono é convexo, um ponto qualquer do polígono cobre todo o polígono, isto é, necessitamos apenas de um guarda posicionado em qualquer lugar da galeria. Mas, em geral, as paredes do museu podem ter a forma de qualquer polígono. Nessa situação a questão é colocada:

Qual o número mínimo de guardas necessários para vigiar um museu com n paredes? Ou seja, queremos como uma função de n , o menor número de câmeras suficientes para cobrir qualquer polígono de n lados.

Formalmente temos o seguinte: Seja $g(P)$ o menor número de pontos necessários para cobrir o polígono P , $g(P) = \min_S \{|S| : S \text{ cobre } P\}$, onde S é um subconjunto de P e $|S|$ é a cardinalidade de S . Seja P_n um polígono com n lados. Definimos $G(n) = \max_{P_n} \{g(P_n)\}$, i.e, máximo valor de $g(P_n)$ sobre todos os polígonos de n lados.

O menor número de câmeras suficientes para cobrir qualquer polígono de n lados é dado por $G(n)$, o qual queremos calcular. Vamos abordar isso da seguinte forma: $G(n)$ guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes para cobrir qualquer polígono de n lados.

Vamos inicialmente tratar a necessidade e explorar alguns casos com n pequeno para conseguir uma cota inferior para $G(n)$.

Observe na figura 5. Um triângulo necessita de um guarda logo $G(3) = 1$. Um quadrilátero, mesmo não convexo, também pode ser coberto por um único guarda, logo $G(4) = 1$. Para $n = 5$ existem somente 3 “formas” distintas de pentágonos, dependendo do número de vértices côncavos ser 0, 1 ou 2, mas ainda assim um guarda é suficiente.

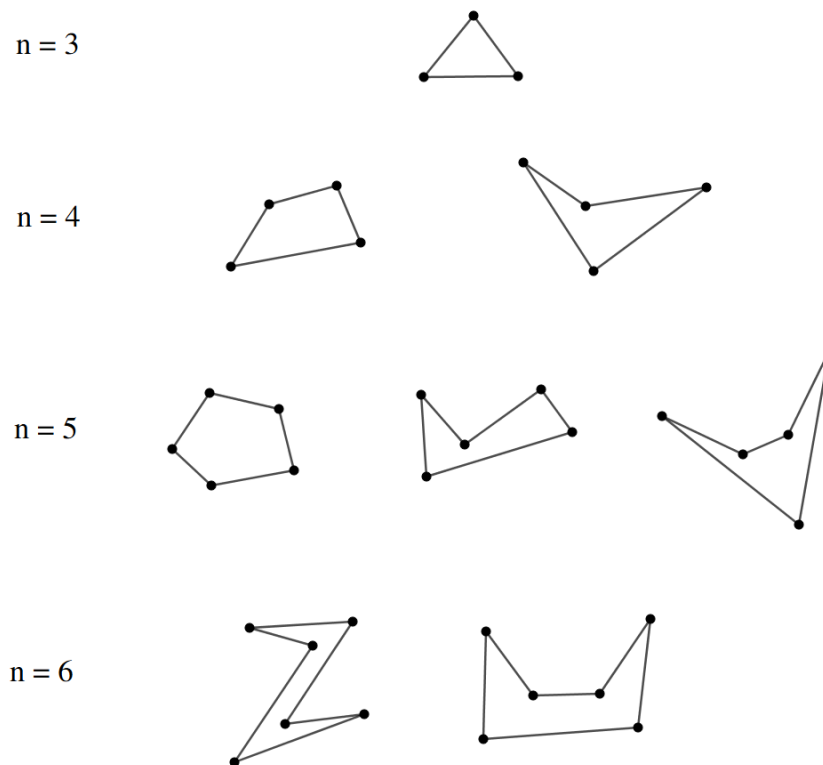


Figura 5 – Casos iniciais.

Fonte: Próprio Autor

Ainda na figura 5, para $n = 6$, existem duas formas que necessitam de dois guardas, logo $G(6) \geq 2$. A segunda forma do caso $n = 6$ pode ser generalizada para um pente de k pontas e $n = 3k$ lados que necessita de k guardas para ser coberto (figura 6)(CHVÁTAL, 1975). De fato, observe que o vértice 1 só pode ser observado por um guarda colocado no triângulo sombreado contendo o vértice 1, e da mesma forma para os outros vértices 2, 3, ..., k . Como todos esses triângulos são disjuntos, concluímos que pelo menos k guardas são necessários.

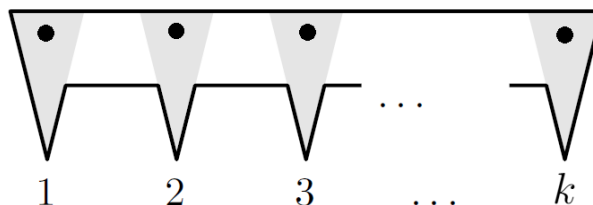


Figura 6 – Pente.
Fonte: Próprio Autor

Observe na figura 7 que alterando ligeiramente um lado do polígono podemos produzir um novo polígono de $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$ lados que continua necessitando de $k = \lfloor n/3 \rfloor$ guardas para ser coberto. Logo, concluímos que para qualquer natural n , existe um polígono de n lados que necessita de $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas para ser coberto, i.é, $G(n) \geq \lfloor n/3 \rfloor$.



Figura 7 – Pente alterado.
Fonte: Próprio Autor

A prova que $\lfloor n/3 \rfloor$ é suficiente será dada no capítulo 4 no Teorema 4.1.1.

Conceitos Básicos

2.1 Noções sobre Grafos

Esse capítulo traz algumas definições usadas em Teoria dos Grafos, e que serão muito importantes para o entendimento desse trabalho. As relações com vários exemplos clássicos também é explorada, mostrando que os conceitos da Teoria dos Grafos ajudam a resolução de problemas aparentemente difíceis de maneira mais intuitiva. Para esse capítulo nos baseamos nas referências (FEOFILOFF P.; KOHAYAKAWA, 2011) e (JURKIEWICZ, 2009).

Um grafo é uma ferramenta visual, matemática e algorítmica que é muito útil para resolver um grande número de problemas. Mais especificamente, um grafo ilustra as ligações ou as relações entre objetos.

Por exemplo, quando observamos uma representação gráfica de algumas cidades (figura 8) e as rodovias que as interligam, estamos diante de um grafo.

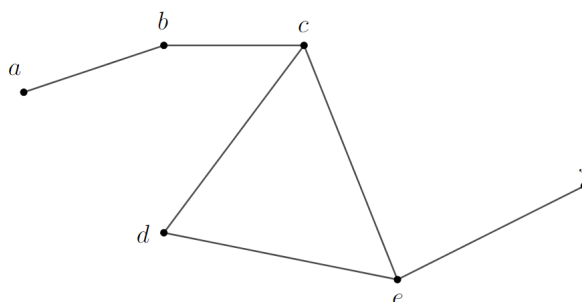


Figura 8 – Cidades e estradas.

Fonte: Próprio Autor

As cidades são representadas por pontos, pontos estes que chamamos de vértices. As rodovias que interligam essas cidades são chamadas de arestas.

Desenhar um grafo geralmente é a melhor maneira para nós imaginarmos e trabalharmos com o que estamos lidando. O grafo nos faz enxergar relações complexas de maneira muito mais fácil.

Para continuar com o nosso exemplo, podemos ver instantaneamente pelo grafo que para ir da cidade a para a cidade c , é preciso passar pela cidade b , e que não há nenhuma outra rota possível. Vemos assim que grafos geralmente fornecem uma ferramenta conveniente para organizar informações.

2.2 Grafos

Para qualquer conjunto V , denotaremos por $V^{(2)}$ o conjunto de todos os pares não-ordenados de elementos de V . Se V tem n elementos então $V^{(2)}$ tem $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ elementos. Os elementos de $V^{(2)}$ serão identificados com os subconjuntos de V que têm cardinalidade 2. Assim, cada elemento de $V^{(2)}$ terá a forma $\{v, w\}$, sendo v e w dois elementos distintos de V .

Definição 2.2.1. Um **grafo** G é um par (V, A) em que V é um conjunto arbitrário e A é um subconjunto de $V^{(2)}$. Os elementos de V são chamados **vértices** e os de A são chamados **arestas**.

Neste texto vamos nos restringir a grafos em que o conjunto de vértices é finito. Uma aresta como $\{v, w\}$ será denotada simplesmente por vw ou por wv . Diremos que a aresta vw **incide** em v e em w e que v e w são as **pontas** da aresta. Se vw é uma aresta, diremos que os vértices v e w são **vizinhos** ou **adjacentes**.

De acordo com nossa definição, um grafo não pode ter duas arestas diferentes com o mesmo par de pontas (ou seja, não pode ter arestas “paralelas”). Também não pode ter uma aresta com pontas coincidentes (ou seja, não pode ter “laços”). Grafos desse tipo são ditos grafos **simples**.

Exemplo 2.2.1. Na figura 9, temos um grafo cujos vértices são a, b, c, d, e, f, g, h e cujas arestas são $ab, ac, bd, cd, ce, ef, fg$.

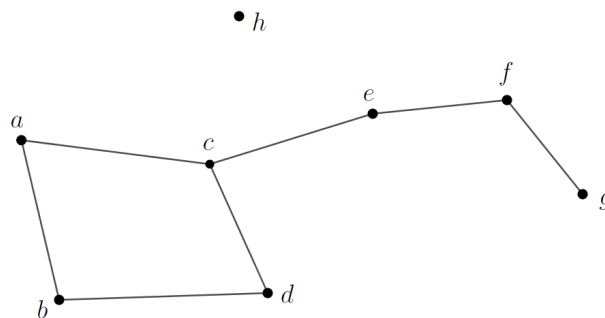


Figura 9 – Vértices e arestas.

Fonte: Próprio Autor

Se denotarmos o grafo por G , o conjunto dos seus vértices será denotado por $V(G)$ e o conjunto das suas arestas por $A(G)$. O número de vértices de G é denotado por $n(G)$ e o número de arestas por $m(G)$; portanto,

$$n(G) = |V(G)| \quad \text{e} \quad m(G) = |A(G)|.$$

onde $|X|$ representa a cardinalidade de X .

Definição 2.2.2. O grau de um vértice v de um grafo G é o número de arestas que incidem em v . Ou de forma análoga, o número de vértices adjacentes a ele. O grau de um vértice v é denotado por $d(v)$.

Observando o grafo da figura 10 de vértices a, b, c, d, e e f . Temos que o vértice a tem grau 1, os vértices d e f tem grau 2, o vértice c tem grau 3 e os vértices b e e tem grau 4.

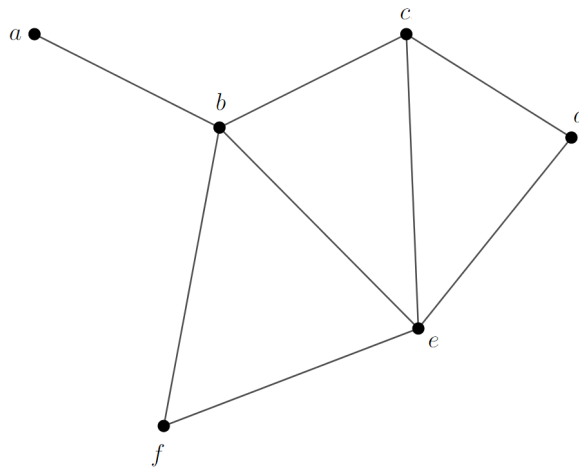


Figura 10 – Grau de um vértice.
Fonte: Próprio Autor

O grau mínimo de um grafo G será denotado por $\delta(G) := \min\{d(v) : v \in V(G)\}$ e o grau máximo por $\Delta(G) := \max\{d(v) : v \in V(G)\}$. No exemplo apresentado anteriormente, o grau mínimo é $\delta = 1$ e o grau máximo é $\Delta = 4$.

Definição 2.2.3. Dizemos que um subgrafo de um grafo G é qualquer grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$.

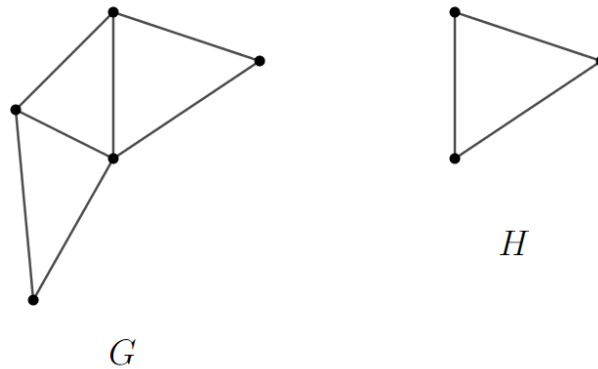


Figura 11 – Subgrafo.
Fonte: Próprio Autor

Na figura 11, podemos observar que conjunto de vértices de H está contido no conjunto de vértices de G e o conjunto de arestas H está contido no conjunto de arestas de G . Logo H é um subgrafo de G .

2.3 Primeiro resultado

No exemplo anterior podemos observar que a soma dos graus de um grafo é o dobro do número de arestas. Vamos formalizar essa ideia logo abaixo através de um teorema.

Teorema 2.3.1. *Para todo grafo G*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

Isto é: "A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas."

Demonstração. Podemos contabilizar o número de arestas da seguinte maneira: para cada vértice, seu grau conta o número de arestas que saem dele, logo somando os graus de todos os vértices temos todas as arestas contabilizadas, mas cada aresta foi contabilizada duas vezes, uma para cada vértice incidente a ela. Logo $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$.

□

Corolário 2.3.1. *Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar*

Demonstração. Se tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas e, portanto é um número par.

□

2.4 Alguns exemplos de grafos

Exemplo 2.4.1. Um grafo **regular** é um grafo onde todos os vértices tem o mesmo grau. Um grafo é dito *k-regular* se todos os seus vértices tem grau *k*.

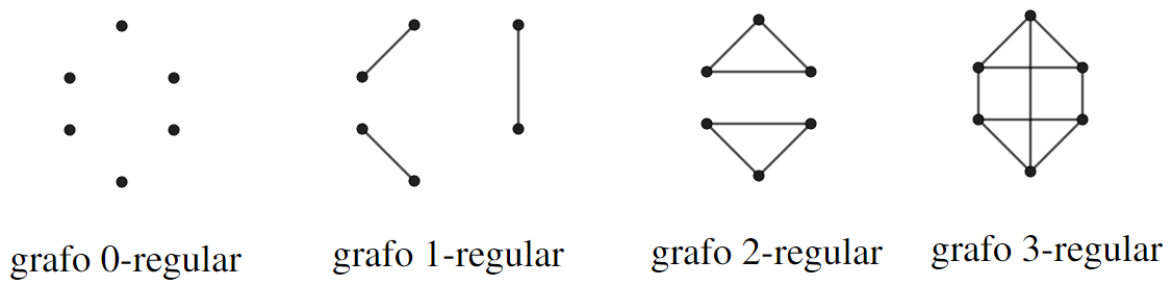


Figura 12 – Grafos regulares.

Fonte: Próprio Autor

Exemplo 2.4.2. Um grafo **completo** G é um grafo simples em que todo vértice é adjacente a todos os outros vértices. O grafo completo de n vértices é frequentemente denotado por K_n .

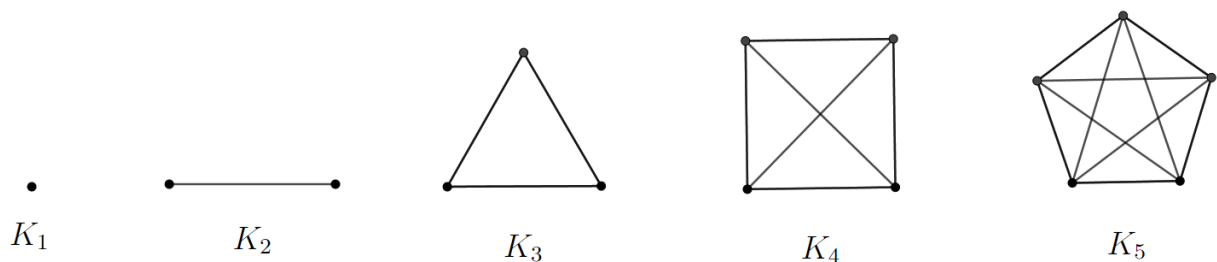


Figura 13 – Grafos de K_1 , K_2 , K_3 , K_4 e K_5 .

Fonte: Próprio Autor

Exemplo 2.4.3. Um **caminho** com n vértices é um grafo da forma $T_n = (V, A)$ onde o conjunto de vértices é $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $A = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\}$ é o conjunto de arestas. Os vértices v_1 e v_n são os **extremos** do caminho.

Um **ciclo** com n vértices é um grafo da forma $C_n = (V, A)$ onde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é o conjunto de vértices e $A = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\} \cup \{v_n v_1\}$, com $n \geq 3$.

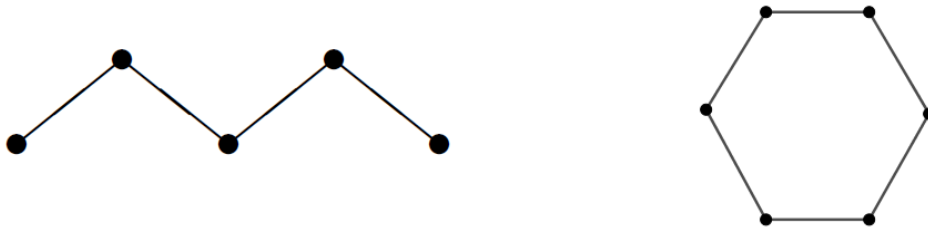


Figura 14 – Um caminho e um ciclo.

Fonte: Próprio Autor

O **comprimento** de um caminho ou ciclo é o número de arestas do grafo. É claro que um caminho de comprimento k tem $k + 1$ vértices e um ciclo de comprimento k tem k vértices. Um caminho ou ciclo é **par** se tem comprimento par, e **ímpar** se tem comprimento ímpar.

Exemplo 2.4.4. Um grafo **bipartido** é um grafo em que o conjunto V de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 tal que toda aresta de G tem uma extremidade em V_1 e outra em V_2 .

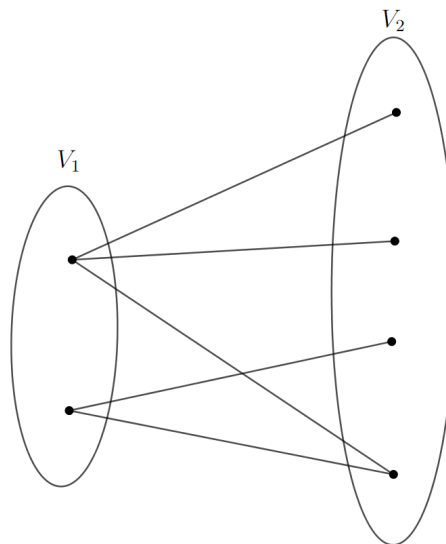


Figura 15 – Grafo bipartido.

Fonte: Próprio Autor

Um grafo bipartido completo é um grafo bipartido em que todos os vértices de V_1 são adjacentes a todos os vértices de V_2 .

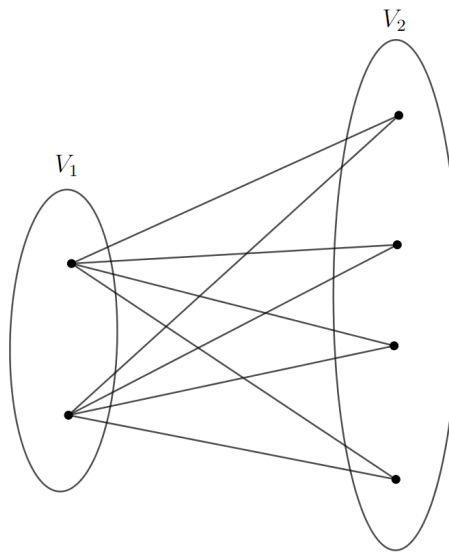


Figura 16 – Grafo bipartido completo.
Fonte: Próprio Autor

Exemplo 2.4.5. A *grade p -por- q* é o grafo definido do seguinte modo: o conjunto de vértices é o produto cartesiano $\{1, 2, \dots, p\} \times \{1, 2, \dots, q\}$ e dois vértices (i, j) e (i', j') de V são adjacentes se $i = i'$ e $|j - j'| = 1$ ou se $j = j'$ e $|i - i'| = 1$.

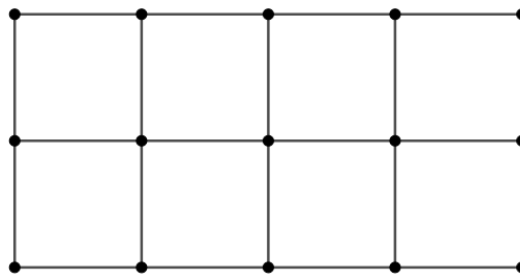


Figura 17 – Grade 3-por-5.
Fonte: Próprio Autor

Exemplo 2.4.6. Um cubo de dimensão k , ou *k -cubo*, é o grafo definido da seguinte maneira: os vértices do grafo são todas as sequências $b_1 b_2 \dots b_k$ em que cada b_i pertence a $\{0, 1\}$; dois vértices são adjacentes se suas respectivas sequências diferem em exatamente uma posição.

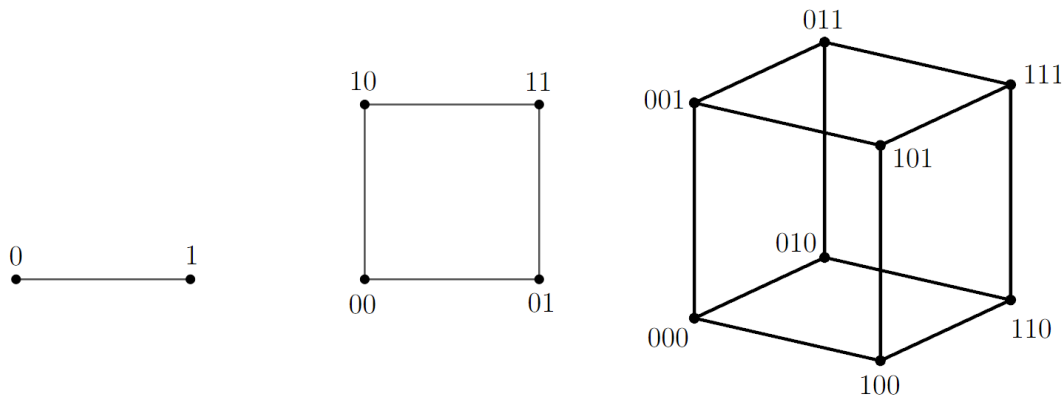


Figura 18 – Grafos do 1-cubo, 2-cubo, 3-cubo.
Fonte: Próprio Autor

Podemos visualizar o k -cubo em \mathbb{R}^k associando a cada vértice $b_1b_2\dots b_k$ o ponto de \mathbb{R}^k de coordenadas (b_1, b_2, \dots, b_k) .

Exemplo 2.4.7. *Seja V o conjunto de todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que têm exatamente 2 elementos distintos. Dizemos que dois elementos v e w de V são adjacentes, se $v \cap w = \emptyset$. Essa relação de adjacência sobre V define o grafo de Petersen. Na figura 19, representamos o grafo de Petersen. O vértice nomeado 34, por exemplo, representa o conjunto $\{3, 4\}$.*

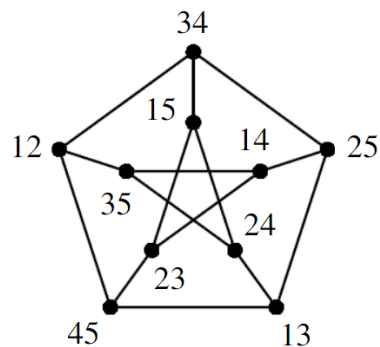


Figura 19 – Grafo de Petersen.
Fonte: Próprio Autor

Coloração

Nesse capítulo vamos falar sobre coloração, considerando um grafo simples. Em geral, realizar uma coloração é atribuir rótulos a elementos de um grafo (vértices ou arestas), os quais chamamos de “cores”. Tal processo é efetuado com base em algumas restrições e é chamado de uma coloração de vértices ou arestas. No caso de uma coloração própria de vértices, dois vértices adjacentes não devem receber a mesma cor e, no caso de uma coloração de arestas, atribuímos uma cor para cada aresta de modo que duas arestas adjacentes não possuam a mesma cor.

3.1 Conjuntos independentes

Definição 3.1.1. *Um conjunto independente de um grafo G é um subconjunto de vértices no qual não existam dois vértices adjacentes. Conjuntos independentes também são conhecidos como **conjuntos estáveis**.*

Um conjunto independente X é **máximo** se $|X| \geq |Y|$ para todo conjunto independente Y . A cardinalidade de um conjunto independente máximo de um grafo G é denotada por $\alpha(G)$. Vamos nos referir a esse número como **índice de independência** do grafo.

Na figura 20, temos o grafo de Petersen onde os vértices em preto formam um conjunto independente. Observe que se tomamos 5 vértices, pelo princípio da casa dos pombos, devemos ter ou 3 vértices localizados no “pentágono externo” ou 3 vértices localizados na “estrela interna”. Em qualquer dos casos anteriores, ocorrerá necessariamente dois vértices adjacentes. Logo, como não podemos ter conjuntos independentes com 5 ou mais vértices, concluímos que nesse caso devemos ter $\alpha(G) = 4$.

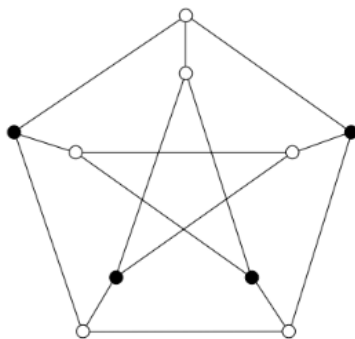


Figura 20 – Conjunto independente máximo do grafo de Petersen.
Fonte: Próprio Autor

3.2 Coloração de vértices

Como foi brevemente mencionado no início desse capítulo, uma coloração do conjunto de vértices de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices tal que vértices adjacentes recebem cores diferentes. Naturalmente, poderíamos atribuir a cada vértice uma cor diferente, mas isso não é particularmente interessante nem relevante para aplicações em geral. O objetivo geralmente é tentar usar o menor número possível de cores.

Um exemplo que podemos pensar para aplicarmos a ideia de utilizar o menor número de cores e fazer uma relação entre coloração e independência é supor, por exemplo, que um grafo represente a incompatibilidade de horários entre professores que devem dar uma prova final. Os professores são representados por vértices e dois vértices x e y estarão ligados se representarem professores que têm alunos em comum para ministrar a prova. Nesse contexto um conjunto independente representa um conjunto de professores que podem aplicar a prova no mesmo horário. Para sabermos qual o menor número de horários necessários para ministrar provas, devemos resolver o problema de particionar o conjunto de vértices do grafo em subconjuntos independentes; cada conjunto corresponderá a um horário de prova. Uma forma de resolver o problema é atribuir cores aos vértices de forma que vértices adjacentes tenham necessariamente cores diferentes. O menor número de cores que se pode utilizar será a solução do problema.

Outro exemplo em que podemos aplicar a ideia de coloração é o seguinte: uma certa indústria precisa manter armazenadas substâncias químicas e que substâncias que reagem entre si devem ficar em armazéns separados. Se imaginarmos que cada substância é um vértice do grafo, diremos que dois vértices são adjacentes se representam substâncias que podem reagir entre si. Uma coloração dos vértices desse grafo aloca cada substância a um armazém de tal modo que substâncias que reagem entre si fiquem em armazéns diferentes.

Definição 3.2.1. Uma **coloração dos vértices** de um grafo G é uma partição de $V(G)$ em conjuntos independentes. Se $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ é uma coloração dos vértices de G , diremos que cada X_i é uma **cor** da coloração e k é o **número de cores**.

Uma coloração de vértices é **mínima** se o número de cores é o menor possível, ou seja, se não existe outra coloração com menos cores. O **número cromático** de um grafo G é o número de cores em uma coloração mínima dos vértices de G . Esse número é denotado por $\chi(G)$.

Se $\chi(G) \leq k$, diz-se que G admite uma **k-coloração** com k cores ou que G é **k-colorível**.

Exemplo 3.2.1. Na figura 21, temos alguns exemplos de números cromáticos para alguns grafos.

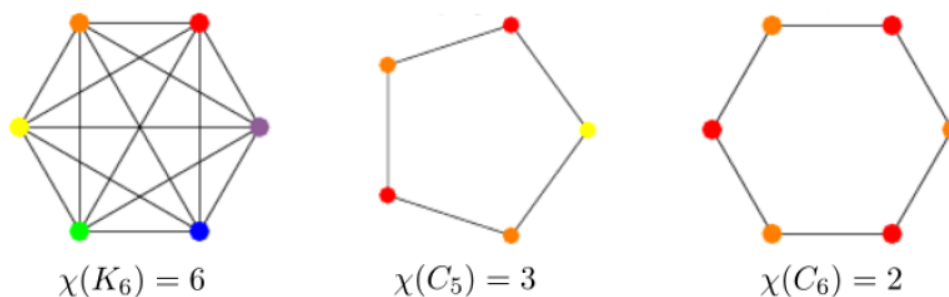


Figura 21 – Exemplos de número cromático.
Fonte: Próprio Autor

Exemplo 3.2.2. O **Sudoku** é um quebra-cabeça numérico no qual, em sua versão mais comum, devemos preencher uma grade com 9 linhas e 9 colunas totalizando 81 células subdivididas em nove blocos 3×3 utilizando os algarismos de 1 a 9. Inicialmente, o quebra-cabeça apresenta algumas de suas células já preenchidas denominadas de pistas. As células devem ser preenchidas obedecendo os seguintes critérios:

- (i) Não repetir elementos nas linhas (Condição de linhas);
- (ii) Não repetir elementos nas colunas (Condição de colunas);
- (iii) Não repetir elementos em cada bloco (Condição de blocos).

Podemos interpretar o Sudoku como um problema de coloração de vértices. Considere que cada célula é um vértice do grafo. Dizemos que duas células são adjacentes (existe uma aresta entre elas) se elas estão na mesma linha, na mesma coluna ou no mesmo bloco. A resolução de um Sudoku equivale a encontrar uma 9-coloração nesse grafo. Um exemplo pode ser visto na figura 22.

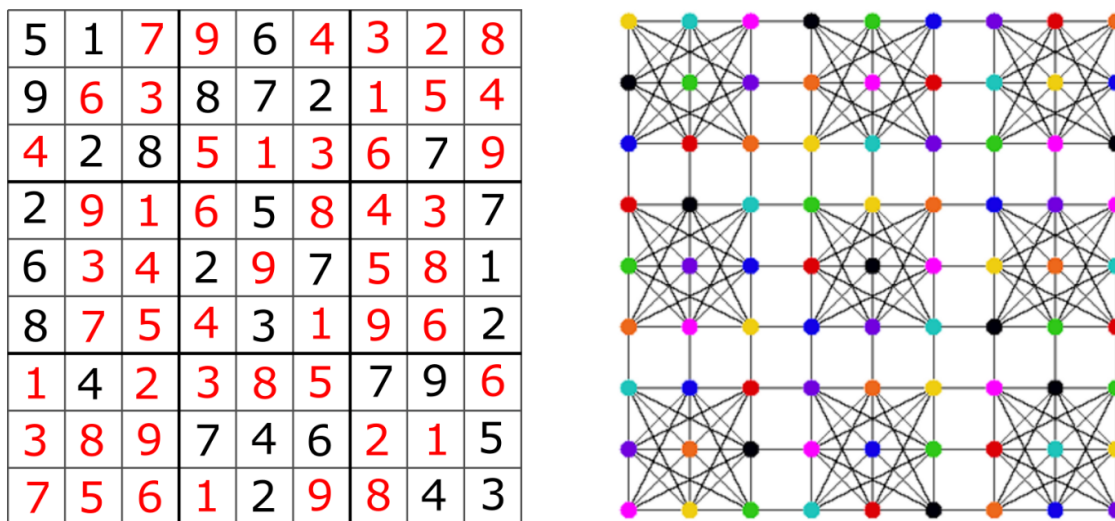


Figura 22 – Sudoku 9x9.
Fonte: (CARVALHO, 2019)

Exemplo 3.2.3. Vamos retornar ao exemplo da grade p -por- q (exemplo 2.4.5) onde o conjunto de vértices é $V = \{(i, j) : 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$. Podemos particionar V em dois subconjuntos $V_1 = \{(i, j) \in V : i + j \text{ é ímpar}\}$ e $V_2 = \{(i, j) \in V : i + j \text{ é par}\}$.

Sejam (i, j) e (i', j') vértices adjacentes em V , por exemplo, $i' = i$ e $j' = j + 1$ (os outros casos são análogos). Nesse caso devemos ter que $i' + j' = i + j + 1$, ou seja, vértices adjacentes tem paridade distinta na soma de suas coordenadas. Logo dois vértices quaisquer de V_1 não podem ser adjacentes pois tem a mesma paridade na soma de suas coordenadas, analogamente dois vértices em V_2 não podem ser adjacentes.

Desse modo a grade p -por- q é um grafo bipartido, e logo podemos colorir os vértices de V_1 com uma cor e os vértices de V_2 com uma segunda cor, o que nos mostra que esse grafo é 2-colorível. De fato todo grafo bipartido é 2-colorível.

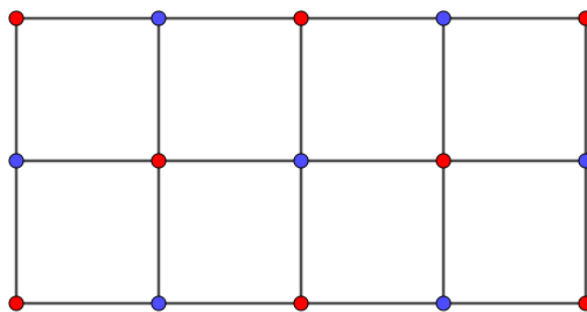


Figura 23 – Grade 3-por-5 é 2-colorível.
Fonte: Próprio Autor

Exemplo 3.2.4. Para o k -cubo no exemplo 2.4.6, podemos usar um argumento análogo ao do exemplo anterior para mostrar que o grafo é 2-colorível.

Recorde que dois vértices $a_1a_2\dots a_k$ e $b_1b_2\dots b_k$ são adjacentes se as respectivas seqüências diferem em apenas uma coordenada. Como cada coordenada só assume 0 ou 1 isso implica que $\sum_{i=1}^k a_i$ e $\sum_{i=1}^k b_i$ diferem de 1, ou seja, tem paridades diferentes. Logo, podemos particionar V em dois subconjuntos V_1 e V_2 onde

$$V_1 = \{b_1b_2\dots b_k \in V : \sum_{i=1}^k b_i \text{ é ímpar}\} \quad e \quad V_2 = \{b_1b_2\dots b_k \in V : \sum_{i=1}^k b_i \text{ é par}\}$$

Desse modo, V_1 não possui vértices adjacentes e V_2 também não possui vértices adjacentes. Portanto o k -cubo é bipartido, logo 2-colorível.

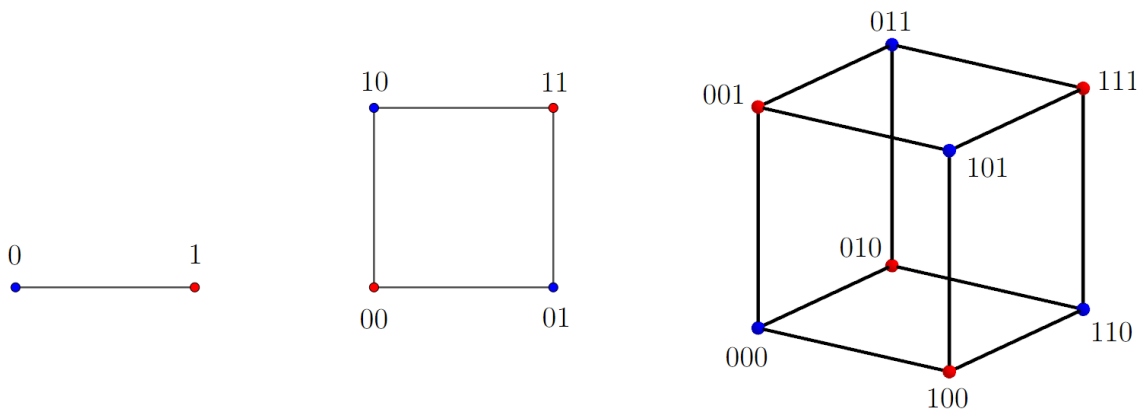


Figura 24 – k -cubo é 2-colorível.

Fonte: Próprio Autor

Um primeiro resultado sobre uma cota superior para o número cromático é o seguinte.

Teorema 3.2.1. Para todo grafo G , tem-se que $\chi(G) \leq \Delta + 1$

Demonstração. Consideremos um grafo G , cujo conjunto de vértices vamos representar aqui por $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, e o conjunto de suas possíveis cores pelo conjunto dos números naturais \mathbb{N} , em que cada número $n \in \mathbb{N}$ representa uma cor diferente.

Realizamos a coloração dos vértices de G da seguinte forma: colorimos v_1 com a cor 1, se v_2 é adjacente a v_1 colorimos com a cor 2, senão, colorimos com a cor 1. Prosseguimos colorindo cada um de seus vértices v_i com a cor representada pelo menor número n que ainda não foi usada para colorir algum dos seus vizinhos dentre os vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$.

Como cada vértice v_i de G possui grau menor ou igual a $\Delta(G)$, ou seja, cada vértice v_i possui no máximo $\Delta(G)$ vizinhos, temos que sempre haverá uma cor representada por um número

$n \leq \Delta(G) + 1$ disponível para colorir cada vértice de G . Desta forma, este processo cria uma coloração adequada para qualquer grafo G , de forma que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, como queríamos demonstrar.

□

O Teorema da Galeria de Arte

4.1 Demonstração do teorema

Nessa seção apresentaremos a demonstração do Teorema da Galeria de Arte. Os resultados aqui utilizados tem como referência (AIGNER M.; ZIEGLER, 2002), (O'ROURKE, 1987) e (SOARES, 2017).

Inicialmente vamos introduzir alguns conceitos necessários e uma sequência de resultados que utilizaremos na demonstração do Teorema. A demonstração tem dois pontos-chaves, o primeiro é mostrar que todo polígono admite uma triangulação, que definiremos abaixo, e após isso, mostrar que o grafo obtido dessa triangulação é 3-colorível. Vamos começar provando que todo polígono admite uma triangulação.

Definição 4.1.1. *Uma triangulação de um polígono é uma decomposição do polígono em um conjunto de triângulos tais que:*

- i) os vértices dos triângulos caem sobre vértices do polígono;*
- ii) nenhum lado de um triângulo fica fora do polígono ou cruza outro lado.*

Na figura 25 temos um exemplo de triangulação de um polígono.

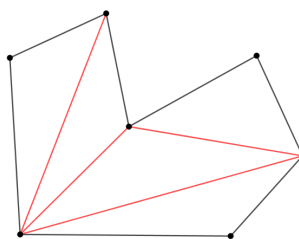


Figura 25 – Triangulação de um polígono.
Fonte: Próprio Autor

Observamos que um polígono pode ter diferentes triangulações como no caso do exemplo da figura 26. O fato de as triangulações diferentes terem o mesmo número de triângulos não é mera coincidência e também será provado.

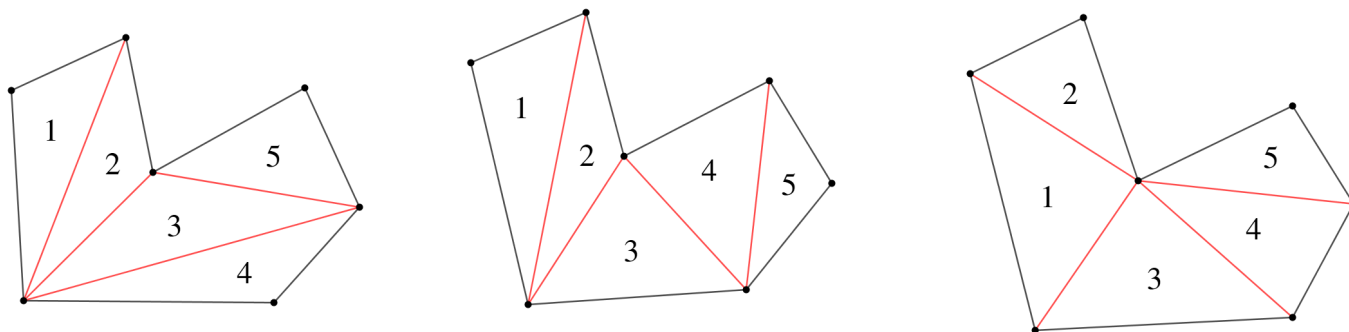


Figura 26 – Triangulações de um polígono de $n = 7$ lados.
Fonte: Próprio Autor

Para mostrar que todo polígono admite uma triangulação vamos precisar provar que todo polígono possui uma diagonal, mas antes disso que todo polígono possui pelo menos um vértice convexo.

Lema 4.1.1. *Todo polígono possui pelo menos um vértice convexo.*

Demonstração. Considerando o polígono no plano cartesiano seja v o vértice com menor coordenada $y = y_0$ do polígono. Se houver vários desses vértices, escolhemos o que possuir maior coordenada x (figura 27). Considere a reta r de equação $y = y_0$.

Se supormos que nenhum dos dois vértices adjacentes a v está estritamente acima de v então esses dois vértices estão na reta r e à esquerda de v na reta r (pela nossa escolha de v). Mas nesse caso v e seus dois vértices adjacentes estariam sobre a reta r e teríamos dois lados sobrepostos, contrariando a hipótese do polígono ser simples.

Logo, pelo menos um dos vértices adjacentes à v está estritamente acima dele e portanto o ângulo interior do vértice v é estritamente menor que 180° .

□

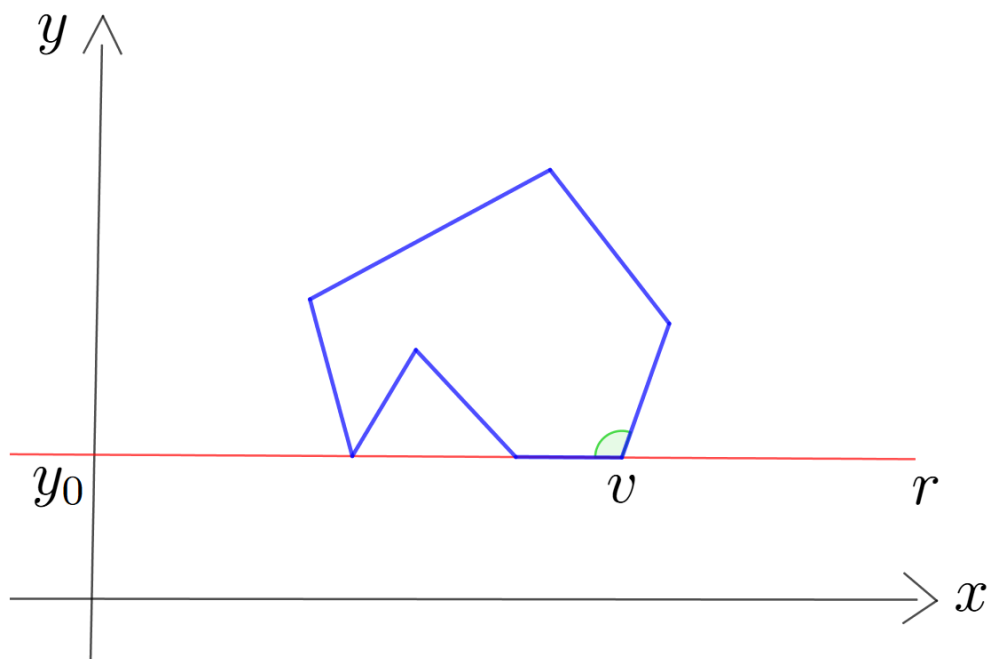


Figura 27 – Vértice convexo.

Fonte: Próprio Autor

A seguir vamos mostrar que todo polígono possui uma diagonal. Uma **diagonal** do polígono é um segmento de reta ligando dois vértices não consecutivos e que não cruza o bordo do polígono como na figura 28.

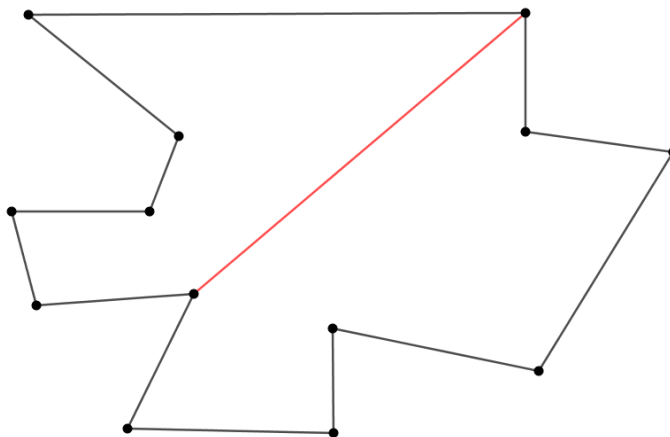


Figura 28 – Uma diagonal do polígono.

Fonte: Próprio Autor

Lema 4.1.2. *Todo polígono simples de $n > 3$ vértices possui pelo menos uma diagonal.*

Demonstração. Seja P um polígono com mais de 3 vértices. Pelo lema 4.1.1 existe um vértice

convexo x . Considere os vértices y e z vizinhos a x . Se nenhum lado do polígono (exceto por \overline{xy} e \overline{xz}) interceptam o segmento \overline{yz} então \overline{yz} é uma diagonal (figura 29).

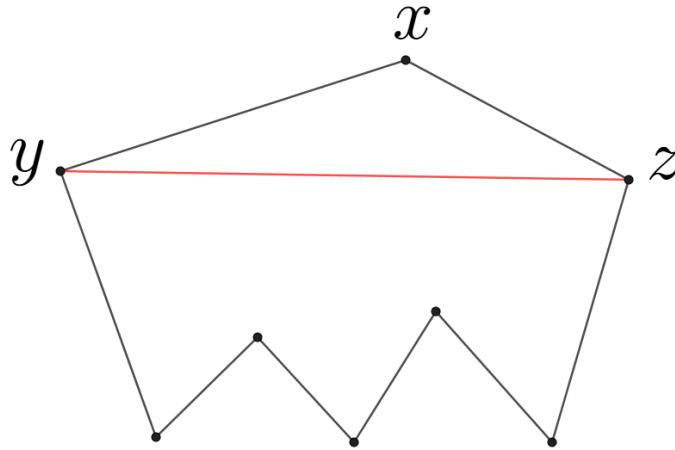


Figura 29 – yz é uma diagonal.
Fonte: Próprio Autor

Caso contrário, denotando por Δxyz o triângulo de vértices x , y e z , teríamos pelo menos um vértice do polígono dentro desse triângulo, como na figura 30. Nesse caso, seja v um vértice do polígono dentro do Δxyz cuja distância à reta que contém \overline{yz} seja a maior possível. O segmento \overline{xv} não pode intersectar nenhum lado do polígono, pois isso implicaria na existência de um vértice dentro do Δxyz , mais distante da reta que contém \overline{yz} do que v , contrariando a escolha desse vértice. Portanto, o segmento \overline{xv} está contido, exceto por seus extremos, no interior do polígono, logo é uma diagonal.

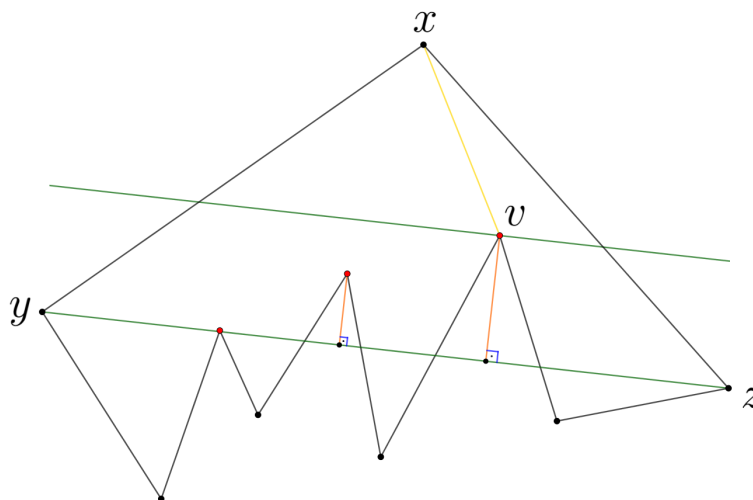


Figura 30 – xv é uma diagonal.
Fonte: Próprio Autor

□

Agora podemos provar o seguinte Teorema.

Lema 4.1.3. *Todo polígono de n lados pode ser particionado em $n - 2$ triângulos pela adição de $n - 3$ diagonais que não se intersectam, exceto possivelmente em vértices.*

Demonstração. Primeiramente vamos provar que uma triangulação existe. A prova será feita por indução sobre o número de lados do polígono. Para $n = 3$ o polígono já é um triângulo, logo o resultado é válido trivialmente. Suponha que o resultado é válido para todo polígono com menos de n lados e seja P um polígono com n lados. Pelo lema 4.1.2, P possui uma diagonal. Essa diagonal divide o polígono em dois subpolígonos P_1 e P_2 com menos de n lados (figura 31). Pela hipótese de indução, P_1 e P_2 podem ser triangularizados, gerando uma triangulação para P .

A prova de que todo polígono de n lados pode ser particionado em $n - 2$ triângulos por $n - 3$ diagonais também será feita por indução. Para um polígono P seja $t(P)$ o número de triângulos em alguma triangulação de P e $d(P)$ o número de diagonais dessa triangulação.

Para $n = 3$ o resultado é trivialmente válido. Supomos que o resultado seja válido para todo polígono com k lados, onde $k < n$. Seja P um polígono com n lados e considere uma triangulação de P . Fixe uma diagonal D dessa triangulação. Essa diagonal divide o polígono em dois subpolígonos P_1 e P_2 com n_1 e n_2 lados, respectivamente, tais que $n_1 < n$ e $n_2 < n$. Aqui observamos que $n_1 + n_2 = n + 2$ pois a diagonal D que é lado de ambos os polígonos P_1 e P_2 não é lado de P .

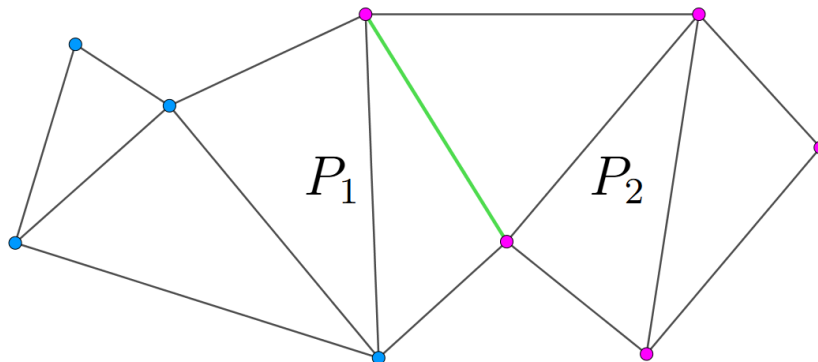


Figura 31 – A diagonal em verde divide P em dois subpolígonos P_1 e P_2

Fonte: Próprio Autor

Pela hipótese de indução sobre P_1 e P_2 temos: $d(P_1) = n_1 - 3$, $t(P_1) = n_1 - 2$, $d(P_2) = n_2 - 3$ e $t(P_2) = n_2 - 2$. Como P é a junção de P_1 e P_2 temos

$$d(P) = d(P_1) + d(P_2) + 1 = (n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = n - 3$$

e

$$t(P) = t(P_1) + t(P_2) = (n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n - 2$$

□

Vamos mostrar agora que o grafo obtido de uma triangulação do polígono P admite uma 3-coloração. Seja $G = (V, A)$ o grafo associado à triangulação, ou seja, os vértices do grafo correspondem aos vértices do polígono e as arestas do grafo correspondem aos lados do polígono original mais as diagonais da triangulação.

Como o grafo da triangulação de P é planar, ele admite uma 4-coloração pelo célebre Teorema das Quatro Cores (APPEL K.; HAKEN, 1977). Mas de fato temos o seguinte resultado.

Lema 4.1.4. *O grafo correspondente a uma triangulação de um polígono P admite uma 3-coloração.*

Demonstração. A prova será por indução. Para $n = 3$ o resultado é óbvio. Seja P um polígono com n lados e supomos o resultado válido para polígonos com k lados, onde $k < n$. Seja G o grafo associado a uma triangulação de P e D uma diagonal com vértices u e v (figura 32). Assim como na prova da triangulação, a diagonal D que divide o grafo G em dois subgrafos G_1 e G_2 com menos que n arestas onde ambos contém a diagonal D como aresta. Pela hipótese de indução G_1 e G_2 admitem uma 3-coloração. Fixando as cores de G_1 podemos se necessário trocar as cores de G_2 de modo a que os vértices u e v tenham cores idênticas para as colorações escolhidas para G_1 e G_2 . Dessa maneira obtemos uma 3-coloração para o grafo G como queríamos demonstrar.

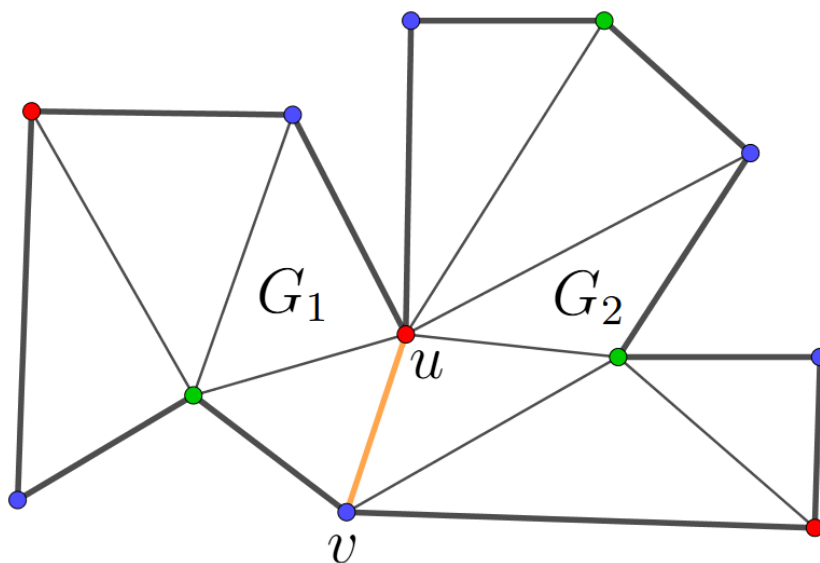


Figura 32 – 3-coloração do grafo G

Fonte: Próprio Autor

□

Temos tudo pronto para finalizar a demonstração do Teorema galeria arte de Chvátal (Teorema 4.1.1).

Teorema 4.1.1. (Teorema da galeria de arte de Chvátal) *Toda galeria com n paredes pode ser vigiada por $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas.*

Demonstração. Como P é um polígono com n vértices, pelo teorema 4.1.4, o grafo associado à triangulação possui uma 3-coloração, digamos n_1 vértices azuis, n_2 verdes e n_3 vermelhos com $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ e $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

Nesse caso devemos ter $n_1 \leq \lfloor n/3 \rfloor$, pois caso contrário teríamos $n_1 > \lfloor n/3 \rfloor$, ou seja $n_1 \geq \lfloor n/3 \rfloor + 1$ donde também teríamos $n_2 \geq \lfloor n/3 \rfloor + 1$ e $n_3 \geq \lfloor n/3 \rfloor + 1$. Assim, como $\lfloor a \rfloor > a - 1$ temos

$$n = n_1 + n_2 + n_3 \geq 3\lfloor n/3 \rfloor + 3 > 3\left(\frac{n}{3} - 1\right) + 3 = n,$$

o que é um absurdo.

Desse modo, como todo ponto de P pertence a algum triângulo da triangulação e em cada triângulo existe um vértice azul, o conjunto com vértices azuis (de tamanho no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$) cobre todo o polígono P . Logo, $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são suficientes para vigiar a galeria de arte.

□

Existem muitas variações do problema da galeria de arte. Por exemplo, podemos exigir restrições na posição dos guardas, podemos permitir furos (obstáculos que bloqueiam a visão dos guardas) dentro do polígono, podemos também ter guardas móveis, etc. Vamos citar alguns exemplos.

No problema da fortaleza, vemos um polígono não como uma galeria de arte que necessite ser protegida contra roubo por dentro, mas como uma fortaleza que precisa ser alertada para ataques externos. O objetivo é colocar o número mínimo de guardas ao longo das paredes da fortaleza para que todo o exterior da fortaleza seja vigiado pelos guardas. No problema do pátio da prisão temos que vigiar tanto o exterior quanto o interior do polígono.

No problema da galeria de arte ortogonal, os lados do polígono são verticais ou horizontais. Esse problema é essencialmente prático pois na vida real muitas galerias tem esse tipo de formato, como na figura 33.

O teorema da galeria de arte ortogonal foi formulado e provado pela primeira vez por Kahn, Klawe e Kleitman em 1980 (KAHN J.; KLAWE, 1983). O teorema afirma que $\lfloor n/4 \rfloor$ guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes para vigiar o interior da galeria de arte. Para o leitor

Aplicação no Ensino Básico

Este capítulo traz uma aplicação de grafos feita nos 8º e 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual no distrito de Jequeri, interior de Minas Gerais. Inicialmente, tive como objetivo, introduzir grafos nas turmas para apresentá-los a uma matemática moderna e dinâmica em forma de problemas que despertassem o interesse pelo estudo da disciplina.

Penso que é dever de todo professor de Matemática instigar os alunos a conhecerem, pensarem e resolverem variados problemas matemáticos, a fim de se obter um maior crescimento intelectual e pensamento crítico. Por este motivo a escolha de aplicar situações-problemas para os alunos que envolvam o conceito de grafos.

Para trabalhar esses conceitos, foram escolhidas uma turma do 8º ano e uma turma do 9º ano da Escola Estadual de Piscamba localizada em Piscamba (distrito de Jequeri).

A aplicação das atividades foi realizada no Ensino Fundamental em níveis mais elevados, pelo fato dos alunos já possuem uma cultura matemática maior para resolverem e entenderem a maneira com que os problemas foram abordados, mas não há que impeça o professor de elaborar planos de aulas para diferentes níveis de ensino.

Em ambas as turmas, foi apresentado situações-problemas a serem resolvidas pelos alunos. Tanto no 8º quanto no 9º ano, foi apresentado o problema da galeria de Arte de maneira mais simplificada de forma que todos pudessem acompanhar e entender.

A seguir, temos o plano de aula usado nas duas turmas e suas atividades desenvolvidas.

5.1 Plano de aula - O problema da galeria de Arte

Turma: 8º e 9º ano do Ensino Fundamental

Duração: 4 aulas

5.1.1 Objetivo

Inserir de forma sucinta o conceito inicial de grafo e coloração, desenvolver o raciocínio lógico, análise e interpretação através do problema da galeria de arte, apresentando de forma clara e didática aos alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental uma matemática moderna e com um conteúdo diferente dos já vistos anteriormente.

5.1.2 Ementa

- Representação através de grafos.
- Polígonos convexos e não-convexos.
- Coloração.
- Análise e interpretação do problema da galeria de arte.

5.1.3 Desenvolvimento

A atividade foi desenvolvida em 4 aulas, sendo aplicada em 2 dias, contendo 2 aulas por dia. Pensamos que assim seria melhor, pois nas primeiras duas aulas apresentaríamos a parte inicial sobre grafos e suas definições e nas outras duas aulas focaríamos já nos problemas com eles já refletindo sobre o que tinha sido passado nas aulas anteriores. Além disso, para chegarmos a apresentação do que é o problema da galeria de arte, separamos todo o passo utilizado com os alunos em etapas, acreditamos que assim ficará mais organizado e com um melhor entendimento do leitor.

1º - Inicialmente separamos a turma em pequenos grupos e entregamos para cada aluno dos grupos duas folhas contendo atividades que seriam desenvolvidas na etapa 1. Foi disponibilizado para o uso dos alunos lápis, borracha e régua. Dessa forma, introduzimos junto as turmas o conceito de grafos, de maneira informal, baseada na ideia visual de grafos. Apresentamos exemplos simples e explicamos que é uma ferramenta matemática muito usada para representar situações-problemas a serem resolvidas. Nessa primeira parte, seguimos a parte introdutória do livro ([JURKIEWICZ, 2009](#)). Os vértices são geralmente representados por pontos ou círculos e as arestas são linhas que ligando os vértices. Na sequência, falamos de maneira bem sucinta sobre coloração de vértices, conceito que será usado na atividade proposta sobre o problema da galeria de arte. Em resumo, dissemos que realizar uma coloração de vértices em um grafo, é atribuir rótulos a vértices do grafo, os quais chamamos de cores, de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes.

2º - O problema da galeria de arte é um problema que oferece uma resposta matemática para a pergunta: qual é a quantidade mínima de câmeras (ou guardas) necessária para monitorar inteiramente uma Galeria de Arte (polígono)? Essa é a forma mais comum de formular esse problema,

mas ele se aplica a qualquer cenário em que exista um ambiente delimitado por paredes e que precisa ser monitorado por câmeras de segurança (ou guardas), em posição fixa, mas podendo observar ao seu redor.

Apresentamos em sala o exemplo abaixo onde com apenas uma câmera, não é possível a visualização total da região interior do polígono. A ideia aqui é que o aluno observe, por exemplo, que a região retangular hachurada em cinza na imagem mais à esquerda da figura 34 só pode ser vista por uma câmera que esteja posicionada no prolongamento desse retângulo, como por exemplo a câmera na imagem do meio da figura. Independentemente do posicionamento dessa primeira câmera, ela não conseguiria observar alguns pontos que estejam na região triangular hachurada na imagem do meio da figura 34. Ou seja, mais guardas são necessários. Na imagem mais à direita da 34 podemos ver o posicionamento de uma segunda câmera que permite vigiar toda a galeria.

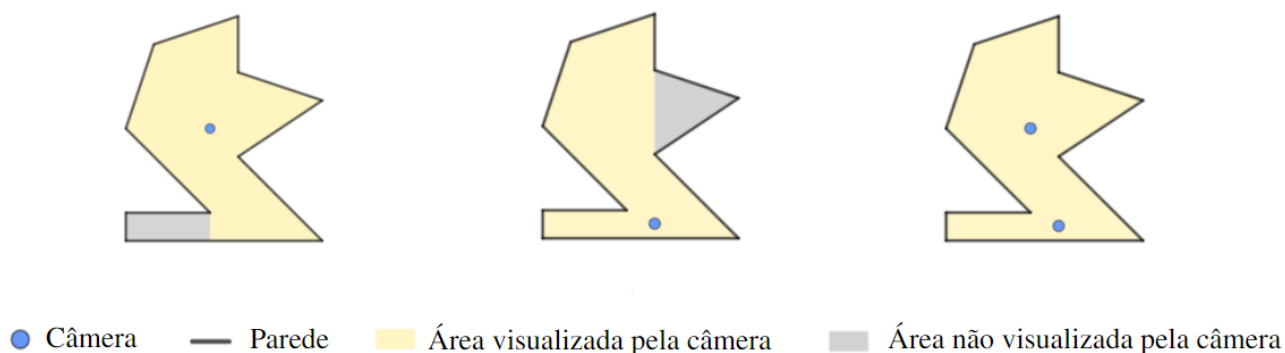


Figura 34 – Exemplo apresentado para a turma.

Fonte: pt.wikipedia.org

3° - Para que pudessem aplicar o que tinham compreendido na etapa 2, entregamos para cada aluno dos grupos quatro folhas contendo quatro exemplos de galeria (polígono). O objetivo nessa atividade é tentar encontrar uma solução com menor número possível de câmeras utilizadas para cobrir toda a área da galeria. A etapa 3 se estenderá até o final da atividade, os alunos ficarão livres para as tentativas de resolução do problema durante todo o processo.

Na figura 35, temos as fotos das 4 galerias entregue aos alunos.

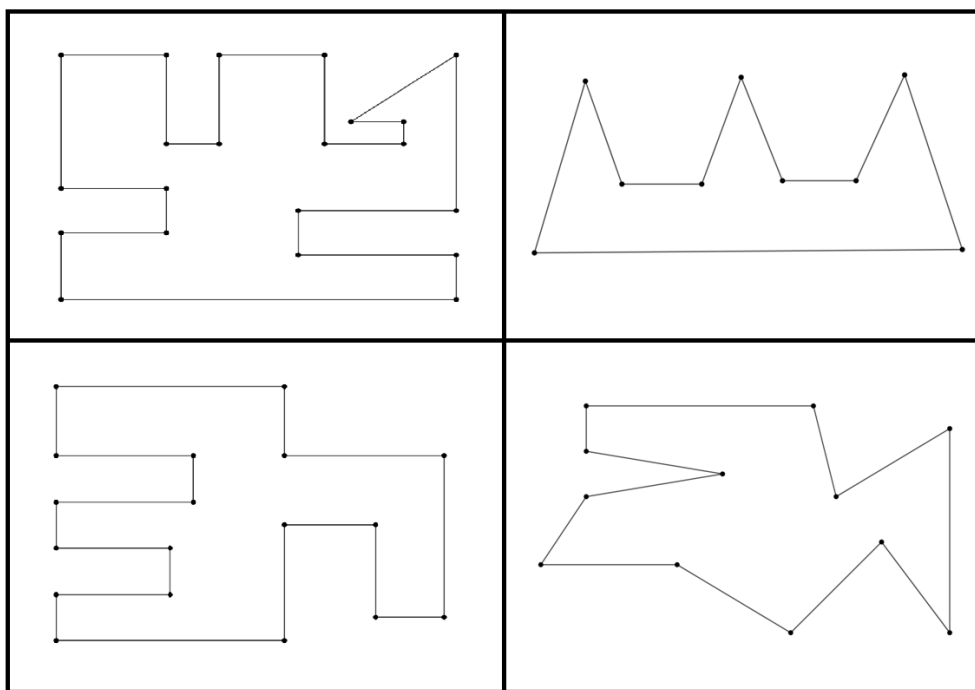


Figura 35 – As quatro galerias entregues aos alunos do 8º e 9º ano.
Fonte: Próprio Autor

4º - Em seguida, buscando tratar o problema com exemplos simples, trouxemos galerias que são polígonos convexos de 3 lados, 4 lados, 5 lados e 6 lados como os da figura 36. O objetivo era que eles percebessem que só é necessário uma câmera para ver toda a região.

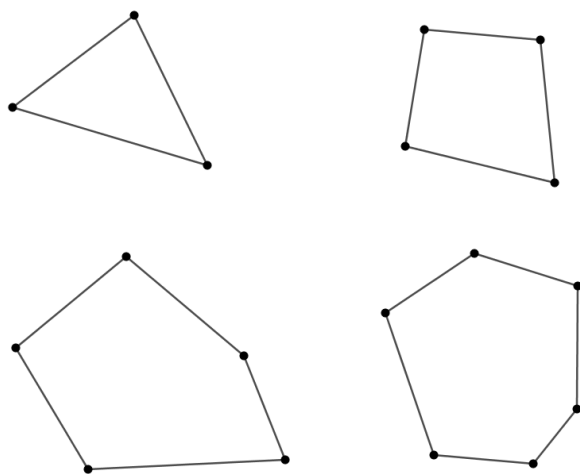


Figura 36 – Polígonos convexos de 3 lados, 4 lados, 5 lados e 6 lados.
Fonte: Próprio Autor

5° - Explicamos para as turmas que em geral, os polígonos não são convexos e abri o questionamento sobre este mesmo problema para um polígono não-convexo como as galerias apresentados na terceira atividade. Fizemos algumas perguntas para os alunos envolvendo polígonos não-convexos com número pequeno de lados.

Pergunta 1: Você consegue desenhar algum polígono de 4 lados que necessite de duas câmeras?

Pergunta 2: Você consegue desenhar algum polígono de 5 lados que necessite de duas câmeras?

Pergunta 3: Você consegue desenhar algum polígono de 6 lados que necessite de duas câmeras?

6° - Mudando um pouco o foco, foi colocada a seguinte questão: Que tipo de polígono simples uma câmera consegue enxergar? O objetivo dessa etapa é tentar chegar à ideia, que a partir de um ponto, uma câmera pode ver um polígono convexo, ou uma região com formato por exemplo de estrela. Na figura 37 mostramos alguns exemplos.

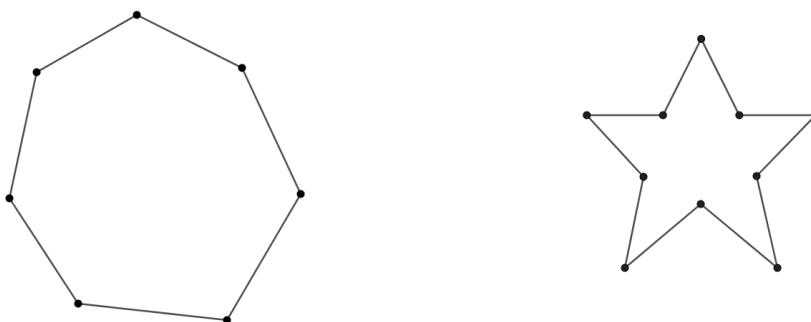


Figura 37 – Polígono convexo e região com formato de estrela.

Fonte: Próprio Autor

7° - Do ponto de vista da etapa anterior, sugerimos que uma estratégia interessante, seria decompor um polígono maior em polígonos menores onde o problema se torna mais fácil. Nesse ponto, o intuito seria perceber que decompor o polígono em polígonos parecidos com uma estrela não parece um caminho viável, mas particionar em polígonos convexos sim, e em cada polígono convexo basta uma câmera. Aqui voltamos para a terceira etapa e pedimos aos alunos que usassem a estratégia de decompor o polígono em polígonos convexos.

8° - Aqui sugerimos aos alunos que façam a decomposição usando triângulos, que são os polígonos convexos com menor número de lados. Se uma câmera é colocada em cada triângulo conseguimos ver todo o polígono. Podemos nos perguntar se ainda há possibilidade de diminuir o número de câmeras. A ideia é que eles tentem observar que colocando câmeras num vértice comum

a dois triângulos, essa câmera consegue ver ambos os triângulos.

9° - Nessa etapa, como é algo mais difícil de ser observado, ajudamos os alunos, pedindo que rotulassem cada vértice de cada triângulo formado com cores diferentes, de forma que vértices adjacentes tivessem cores diferentes, para que ao final os alunos tentassem construir uma coloração usando três cores (vértices vizinhos com cores diferentes) nos exemplos da primeira tarefa. E por fim, verem que isso é algo possível de ser feito nos exemplos usando apenas três cores.

10° - Por fim, pedimos que observassem a cor menos utilizada nos vértices, onde essa seria uma boa solução do problema (não necessariamente ótima), pois as câmeras ficariam localizadas justamente nesses vértices.

5.2 Análise dos resultados

O objetivo de inserir atividades de grafos nas salas regulares, como já foi dito anteriormente, foi de apresentar uma matemática que não é usualmente trabalhada com os alunos do ensino fundamental e médio e que estimule o estudo desta ciência. Por isso, não foi aplicada uma avaliação formal do conteúdo, somente foi combinado com os alunos que faria parte da nota de participação e de entrega das atividades. Além disto, as aulas foram aplicadas na semana seguinte após o fechamento de bimestre e entre mudança de conteúdo para não atrasar o currículo programado nessas séries. A seguir temos os registros, resultados e fotos das aplicação do plano de aula no 8° e 9° ano do ensino fundamental.

5.2.1 8° e 9° ano do Ensino Fundamental

Na apresentação dos resultados do 8° e 9° ano, iremos pontuar todos os resultados e observações importantes da realização em cada etapa, pensamos que assim ficará mais organizado e com uma maior riqueza de detalhes.

O 8° e 9° ano são salas na qual boa parte dos alunos são participativos e realizam as atividades propostas em sala de aula, no entanto, a maioria deles apresentam dificuldades na compreensão dos conteúdos matemáticos do dia-a-dia e muitos deles não possuem tanto interesse com relação a disciplina, sendo assim, a aplicação desse trabalho com as turmas não foi algo simples e fácil.

Na primeira etapa, foi explicado a ambas as turmas o conceito de grafo de maneira bem informal, pois nenhum aluno conhecia tal assunto. Todos os alunos conseguiram compreender perfeitamente o que é um grafo e toda a sua representação, muitos conseguiram associar a situações já vistas e vividas por eles no dia a dia. Para maior compreensão, apresentamos os exemplos e desafios da parte introdutória do livro (JURKIEWICZ, 2009), um deles trabalhava a questão de otimização, na qual pedia que cada vértice do grafo fosse visitado uma única vez sem repetição

e o outro era o problema clássico das três casas que necessitam de Luz, Gás e Telefone, em que precisamos realizar a ligação dessas três casas às três companhias sem que houvesse cruzamento entre as arestas. A maioria dos alunos conseguiram realizar o primeiro desafio, já no segundo desafio, todos conseguiram concluir que era impossível concluir o segundo desafio por estarem todos no mesmo plano.

Na sequência, explicamos sobre coloração, conceito esse que será muito utilizado na realização das atividades posteriores. Nessa parte, também não houve nenhuma dificuldade dos alunos na sua compreensão, visto que esse tipo de conceito já havia sido trabalhado em sala de aula dentro de outros conteúdos, além de corriqueiramente aparecer problemas sobre coloração em questões da OBMEP que já trabalhei em sala, logo não era um assunto totalmente desconhecido por eles. Para uma maior compreensão, apresentamos o grafo da grade 3-por-5 (2.4.5) e o grafo de Petersen (2.4.7). O objetivo era tentar descobrir o menor número de cores necessárias para colorir esses grafos sem que vizinhos tivessem a mesma cor. A maioria dos alunos conseguiram realizar essa atividade de forma satisfatória em ambos os grafos, inicialmente eles usaram uma quantidade maior de cores para colorir todos os vértices, mas na sequência, pedimos que tentassem ir diminuindo a quantidade de cor até chegar no menor número possível, resultado esse alcançado por quase todos.

Na figura 38 temos fotos dos alunos resolvendo as atividades da etapa 1.

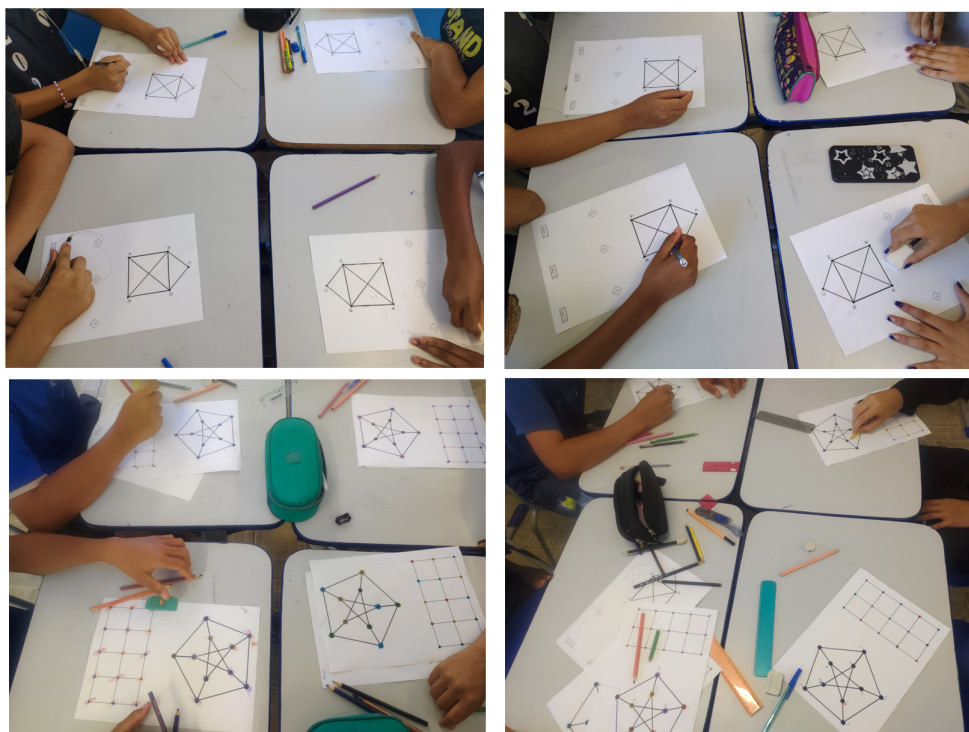


Figura 38 – Realização das atividades da etapa 1.

Fonte: Próprio Autor

Na segunda etapa, apresentamos e explicamos informalmente aos alunos sobre o problema da galeria de arte que é o tema central deste trabalho. Para isso, os apresentamos o exemplo 34 onde mostramos que com apenas uma câmera não é possível visualizar completamente a região interior do polígono e que neste caso seriam necessária duas câmeras para se ver toda a região interna. Todos os alunos conseguiram compreender essa parte muito bem.

Na terceira etapa, para que eles pudessem aplicar o que haviam compreendido na etapa anterior, entregamos quatro galerias na qual pedimos que tentassem encontrar uma solução com menor número possível de câmeras de forma a cobrir toda a área interna de cada galeria. Os alunos buscaram várias alternativas para encontrar uma boa solução como mudar as posições das câmeras e acrescentar e retirar câmeras constantemente. Após algumas tentativas, a maioria dos alunos conseguiu encontrar soluções possíveis para resolver o problema, mas poucos encontraram a solução mais otimizada. Os exemplos tratados nessa etapa vão se estender por toda a atividade.

Para a quarta etapa, entregamos aos alunos polígono convexos simples de 3 lados, 4 lados, 5 lados e 6 lados. Para que pudessem perceber que para aqueles polígonos era necessário apenas um único guarda para ver toda a região. Todos os alunos que realizaram essa etapa conseguiram perceber e resolver esse problema como esperávamos.

Na figura 39 temos fotos dos alunos tentando resolver as atividades da etapa 3 e 4.

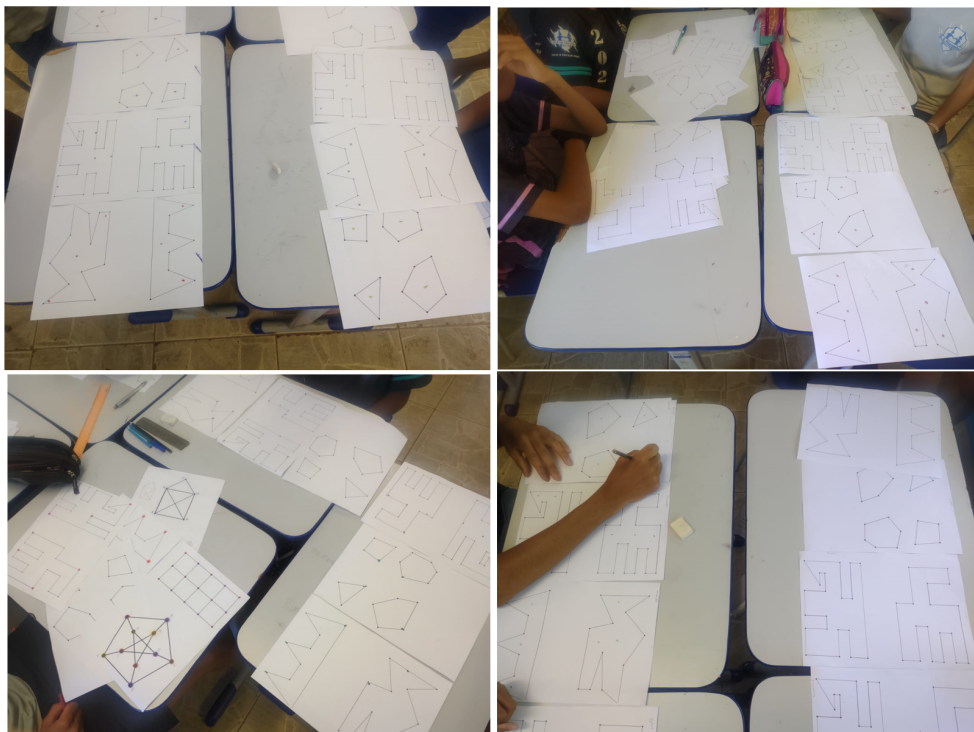


Figura 39 – Realização das atividades da etapa 3 e 4.

Fonte: Próprio Autor

No intuito de deixar tudo mais claro, para a quinta etapa, explicamos que, em geral, polígonos não são convexos como os exemplos vistos na etapa 3. Assim, abrimos um questionamento envolvendo polígonos não-convexos com um número pequeno de lados. Pedimos que tentassem desenhar algum polígono de 4 lados, 5 lados e 6 lados que necessite de duas câmeras para conseguir visualizar toda a região interna. Após algum tempo de tentativas, boa parte dos estudantes perceberam que não era possível desenhar polígonos de 4 e 5 lados que necessitem de duas câmeras. Já para um polígono de 6 lados, após muitas tentativas, poucos alunos conseguiram exibir um polígono adequado, porém não foi uma tarefa fácil para eles.

Na sexta etapa, abrimos outro questionamento, perguntando o que eles conseguiam enxegar a partir de um ponto (câmera) que eles acrescentavam em cada polígono das etapas anteriores, ou seja, queríamos ver se eles enxegavam algum padrão ou algo familiar para eles. Houve bastante participação para esse questionamento, porém nenhum aluno conseguiu perceber que a partir de um ponto podemos enxegar um polígono convexo ou uma região com um formato peculiar (como uma estrela).

Na sétima etapa, com o intuito de otimizar as soluções encontradas pelos alunos na etapa 3, perguntamos se eles conseguiam pensar em alguma estratégia para encontrar boas soluções para resolver qualquer tipo de polígono. Nesse ponto, nenhum aluno conseguiu exibir nenhuma boa estratégia, então sugerimos que os polígonos apresentados fossem decompostos em polígonos menores, tornando assim o problema mais simples. Já nesse ponto, uma aluna já sugeriu que fosse decomposto em triângulos, por ser o polígono mais simples e com o menor número de lados.

Na oitava etapa, seguindo a sugestão da aluna, pedimos que eles decompussem cada um dos polígonos da etapa 3 em triângulos. Parecia algo simples de ser feito, porém percebemos muita dificuldade dos alunos para realizarem essa etapa, pois muitos criaram novos vértices desnecessários dentro dos polígonos com o intuito de construir triângulos mais regulares. Penso que os alunos tem a percepção que, em geral, triângulos são figuras de três lados com os lados e ângulos quase do mesmo tamanho, assim eles tiveram muita dificuldade de construir triângulos com lados bem irregulares e com três ângulos bem diferentes. Porém, a medida que foram orientados, eles conseguiram finalizar, até que eles finalizassem essa etapa de forma satisfatória.

Na nona etapa, pedimos que eles rotulassem cada vértice de cada triângulo formado anteriormente com cores diferentes, de forma que vértices adjacentes tivessem cores diferentes, para que ao final os alunos tentassem construir uma coloração usando três cores (vértices vizinhos com cores diferentes) nos exemplos da etapa 3. Uma dificuldade grande que eu percebi dos alunos nessa etapa, foi que muitos não conseguiram construir uma coloração usando apenas três cores, pois coloriam individualmente cada um dos vértices de forma aleatória respeitando apenas que vértices adjacentes tivessem cores diferentes. Porém, ao fazer isso, dependendo da forma que você distribui

essas cores será necessário ao final usar mais do que três cores no qual vai implicar em um resultado que não obedece as restrições impostas ao problema. Pode parecer simples o que foi proposto, porém percebi que os alunos tiveram dificuldade, uma razão para isso pode ser o fato de que eles foram acostumados a resolverem apenas problemas mecânicos e não problemas em que é necessário um pensamento mais crítico para se encontrar a solução.

Na décima e última etapa, após eles construírem com muita dificuldade a coloração usando apenas três cores, pedimos que observassem a cor menos utilizada nos vértices. A localização destas cores menos utilizadas, seria o local onde as câmeras ficariam instaladas, encontrando então uma boa solução e resolvendo o problema pedido. Explicamos para eles também, que dependendo do polígono e da quantidade de lados, podemos, às vezes, não encontrar a solução mais otimizada possível, porém encontraremos boas soluções.

Na figura 40 temos fotos dos alunos realizando as atividades da etapa 7, 8, 9 e 10.

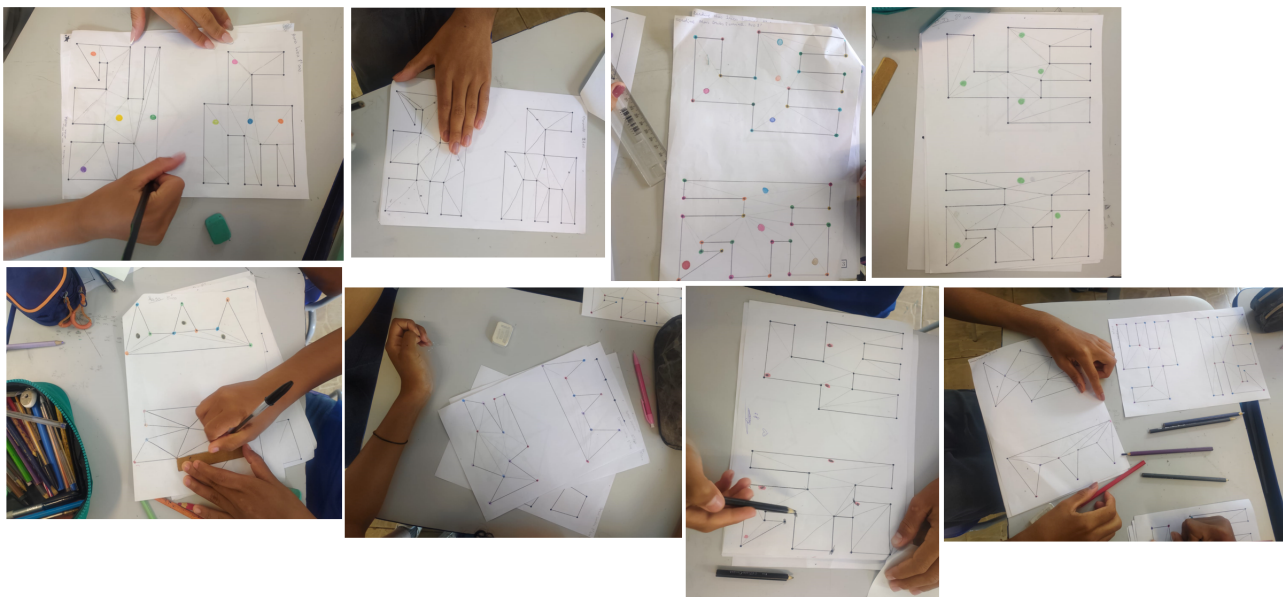


Figura 40 – Realização da etapa 7, 8, 9 e 10.

Fonte: Próprio Autor

Após a aplicação de cada etapa, aproveitamos a oportunidade junto aos alunos para explicar que muitos problemas em matemática são assim. São necessárias estratégias para se encontrar boas soluções. Expliquei também, que existem alguns problemas matemáticos para os quais não foram encontradas soluções, e que para afirmações serem consideradas verdadeiras em matemática é necessário que tenham sido provadas.

Considerações Finais

Sabemos que o ensino da matemática, atualmente, não traz resultados satisfatórios. Boa parte dos alunos está cada dia mais desmotivada e o restante possui muita dificuldade em assimilar os conteúdos estudados em sala de aula.

Um dos prováveis motivos dessa deficiência é que as informações chegam a eles cada vez mais rapidamente, e este apelo do novo faz com que os fatores externos sejam muito mais atrativos do que as aulas de Matemática.

Assim, o presente trabalho tem por principal objetivo a aplicação da teoria de grafos como ferramenta facilitadora no processo de ensino-aprendizagem em matemática. Ao longo do tempo, foi possível observar através dos grafos as diversas formas de aplicabilidade envolvendo os conteúdos abordados em matemática.

Neste trabalho elaboramos um plano de aula que pode ser utilizado por professores que trabalhem com alunos da educação básica, relativo ao problema da galeria de arte. Para isso, nessa dissertação foi elaborado um texto que formaliza alguns conceitos teóricos utilizados para o desenvolvimento da teoria apresentada, com uma atenção especial voltada para o problema da galeria de arte.

Concluimos que a inclusão da teoria dos grafos seria uma alternativa de conteúdo a ser trabalhado com os alunos da educação básica, pois podemos aplicar conhecimentos matemáticos adquiridos dentro de sala de aula na teoria dos grafos, além de ser uma porta de entrada para a aprendizagem de novos conteúdos.

Sugerimos ainda que, motivados pelo conteúdo abordado neste trabalho, os professores, alunos e demais leitores sigam estudando e pesquisando outras aplicações da Teoria dos Grafos, tanto na própria matemática quanto em outras áreas do conhecimento.

Referências

- AIGNER M.; ZIEGLER, M. *As provas estão n'O LIVRO*. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 37.
- APPEL K.; HAKEN, W. *Every Planar Map Is Four Colorable*. USA: American Mathematical Society (AMS), 1977. Citado na página 42.
- BERG M.; KREVELD, M. *Computational geometry: algorithms and applications*. Berlin: Springer Verlag, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 19.
- CARVALHO, M. *Teoria dos Grafos*. Ouro Preto - Brasil: Notas de aula do prof. Haroldo Gambini Santos, Departamento de Computação, UFOP, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 34.
- CHVÁTAL, V. *A Combinatorial Theorem in Plane Geometry*. Canada: J. Combinatorial Theory Ser. B 18, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 21.
- FEOFILOFF P.; KOHAYAKAWA, Y. *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos*. São Paulo - Brasil: SBM, 2011. Citado na página 23.
- FISK, S. *A short proof of Chvátal's watchman theorem*. Germany: J. Combinatorial Theory, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- HONSBERGER, R. *História da matemática*. Mathematical Gems II. USA: Mathematical Association of America, 1976. Citado na página 15.
- JURKIEWICZ, S. *Grafos - Uma Introdução*. Escola de Engenharia/UFRJ. Rio de Janeiro: SBM, 2009. (PIC OBMEP). Citado 3 vezes nas páginas 23, 46 e 50.
- KAHN J.; KLAWE, M. *Traditional Galleries Require Fewer Watchmen*. USA: SIAM J. Algebr. Discrete Methods, 1983. Citado na página 43.
- MICHAEL, T. *How to Guard an Art Gallery and Other Discrete Mathematical Adventures*. USA: Johns Hopkins University Press, 2009. Citado na página 44.
- O'ROURKE, J. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. New York: Oxford University Press, 1987. Citado 3 vezes nas páginas 17, 37 e 44.

SOARES, F. *TRÊS TEOREMAS INTERESSANTES EM TEORIA DOS GRAFOS*. Fortaleza - Brasil: Dissertação (Mestrado em Rede nacional), UFC, 2017. Citado 2 vezes nas páginas [17](#) e [37](#).