

DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO



PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

GABRIEL GARIGLIO CEZAR

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

Ouro Preto - MG, Brasil

Novembro 2024

GABRIEL GARIGLIO CEZAR

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)

Departamento de Matemática (DEMAT)

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Orientador: Prof. Dr. Sebastião Martins Xavier

Coorientador: Prof. Dr. Rodrigo Geraldo do Couto

Ouro Preto - MG, Brasil

Novembro 2024

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

C387t Cezar, Gabriel Gariglio.
O Teorema de Euler para poliedros convexos. [manuscrito] / Gabriel
Gariglio Cezar. - 2024.
68 f.: il.: color..

Orientador: Prof. Dr. Sebastião Martins Xavier.
Coorientador: Prof. Dr. Rodrigo Geraldo do Couto.
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro
Preto. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em
Matemática.

Área de Concentração: Matemática com Oferta Nacional.

1. Poliedros. 2. Euler, Teorema de. 3. Geometria. I. Xavier, Sebastião
Martins. II. Couto, Rodrigo Geraldo do. III. Universidade Federal de Ouro
Preto. IV. Título.

CDU 510:374:004

Bibliotecário(a) Responsável: Angela Maria Raimundo - SIAPE: 1.644.803



FOLHA DE APROVAÇÃO

Gabriel Gariglio Cezar

O Teorema de Euler para Poliedros Convexos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título mestre em Matemática

Aprovada em 24 de Janeiro de 2025

Membros da banca

Prof. Dr. Sebastiao Martins Xavier - Presidente Orientador Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Lucio Pacorri Lima - Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Thiago Morais Pinto - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Rodrigo Geraldo do Couto - Universidade Federal de Ouro Preto

Prof. Dr. Sebastiao Martins Xavier, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 24/01/2025



Documento assinado eletronicamente por **Sebastiao Martins Xavier**, VICE-CHEFE DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, em 24/01/2025, às 17:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0845593** e o código CRC **54911F0D**.

“Somos todos escravos dos preconceitos da nossa própria dimensão.”
(Thomas Banchoff)

Agradecimentos

Agradeço aos meus professores por me ajudarem a superar minhas limitações, à minha família, principalmente à esposa, pelo apoio incondicional e à Deus por minha própria existência.

Resumo

O trabalho apresenta uma proposta para a utilização da relação de Euler para poliedros no ensino médio. Aborda a importância histórica da relação $V - A + F = 2$, onde V representa o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces de um poliedro convexo. São exploradas várias demonstrações matemáticas do teorema de Euler e sugeridas atividades práticas para alunos, com o objetivo de promover um entendimento mais profundo da geometria e proporcionar uma preparação para a topologia. A proposta inclui a construção de sólidos regulares e a verificação da relação de Euler para esses sólidos e outros um pouco mais complexos.

Palavras chaves: poliedros; Euler; geometria; provas.

Abstract

The work presents a proposal for using the Euler relation for polyhedra in high school. It addresses the historical importance of the relationship $V - A + F = 2$, where V represents the number of vertices, A the number of edges and F the number of faces of a convex polyhedron. Various mathematical demonstrations of Euler's theorem are explored and practical activities are suggested for students, with the aim of promoting a deeper understanding of geometry and providing preparation for topology. The proposal includes the construction of regular solids and the verification of the Euler relationship for these solids and others that are slightly more complex

keywords: polyhedra; Euler; geometry; proofs.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplos de poligonos convexos	16
Figura 2 – Exemplos de poligonos não convexos	16
Figura 3 – Exemplos de poliedros convexos	17
Figura 4 – Exemplos de poliedros não convexos	17
Figura 5 – Exemplos de poliedros semi-regulares	18
Figura 6 – Exemplos de subpoliedros	18
Figura 7 – Possíveis arestas livres	19
Figura 8 – Exemplo de ciclo	19
Figura 9 – Exemplo de bordo	20
Figura 10 – Exemplo de faces encadeadas	20
Figura 11 – Exemplo de geodésica	21
Figura 12 – Exemplo de fuso	21
Figura 13 – Exemplo de fuso completo	22
Figura 14 – Exemplo de um fuso com ângulo α	22
Figura 15 – Exemplo de triângulo esférico	22
Figura 16 – Escola de Atenas, afresco de Rafael Sanzio, pintado de 1509 a 1510 Stanza della Segnatura (Vaticano)	24
Figura 17 – Os cinco sólidos regulares	25
Figura 18 – Euclides de Alexandria	26
Figura 19 – Os cinco possíveis vértices de um sólido platônico, espalmados (acima) e no espaço (em baixo)	27
Figura 20 – Leonhard Euler	28
Figura 21 – Cubo suspenso (exemplo de poliedro convexo)	32
Figura 22 – Retas paralelas a r que passam pelo poliedro P	33
Figura 23 – Projeção do cubo no plano H (sombra λ)	33

Figura 24 – Pontos iluminados (verde), pontos sombrios (negrito) e contorno aparente (vermelho)	34
Figura 25 – Poliedros formados pelos pontos iluminados e pelos pontos sombrios	35
Figura 26 – Exemplo da região R_α (parte hachurada)	38
Figura 27 – Exemplo de um cubo achatado	42
Figura 28 – Exemplo de um cubo diagonalizado	42
Figura 29 – Triângulo XYZ da figura 7 (c) a ser retirado	43
Figura 30 – Triângulo XYZ da figura 7 (d) a ser retirado	44
Figura 31 – Triângulo XYZ da figura 7 (e) a ser retirado	45
Figura 32 – Triângulo XYZ da figura 7 (f) a ser retirado	45
Figura 33 – Tetraedro	48
Figura 34 – Hexaedro	49
Figura 35 – Octaedro	50
Figura 36 – Dodecaedro	51
Figura 37 – Icosaedro	52
Figura 38 – Cubo	53
Figura 39 – Cubo no GeoGebra	54
Figura 40 – Pontos de corte no cubo	54
Figura 41 – Pontos de corte no cubo em um único vértice	55
Figura 42 – Pontos de corte no cubo em todos os vértices	55
Figura 43 – Octógono formado em uma das faces do cubo	56
Figura 44 – Cubo truncado	56
Figura 45 – Pontos de corte no icosaedro em um único vértice	57
Figura 46 – Cubo	58
Figura 47 – Cubo com as faces divididas em diagonais	59
Figura 48 – Esfera	60
Figura 49 – Esfera dividida em triângulos esféricos	60

Sumário

Introdução	13
1 CONCEITOS PRELIMINARES	15
1.1 Geometria Plana	15
1.1.1 Polígonos	15
1.1.2 Poliedros	16
1.2 Geometria Esférica	20
2 CONTEXTO HISTÓRICO	23
2.1 Os Pitagóricos	24
2.2 Euclides	26
2.3 Euler	28
3 DEMONSTRAÇÕES	31
3.1 Demonstração do Teorema de Euler Através da Soma dos Ângulos Internos dos Poliedros	31
3.2 Demonstração do Teorema de Euler Através da Soma das Áreas de Triângulos Esféricos	36
3.2.1 Teorema de Girard	36
3.2.2 Segunda Demonstração do Teorema de Euler (Legendre)	38
3.3 Demonstração do Teorema de Euler Segundo Cauchy	39
4 APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO	47
4.1 Roteiros de construção dos Sólidos Regulares	47
4.1.1 Tetraedro Regular	47
4.1.2 Hexaedro Regular	48
4.1.3 Octaedro Regular	49
4.1.4 Dodecaedro Regular	50
4.1.5 Icosaedro Regular	51
4.2 Verificação da Relação de Euler para os Sólidos Regulares	52

4.3	Construção do Hexaedro Truncado	53
4.3.1	Verificando a validade da Relação para o Hexaedro Truncado	56
4.3.2	Verificando a validade da Relação para o Icosaedro Truncado	57
4.4	Verificando a Validade da Relação de Euler na Esfera	57
4.4.1	Construindo o Cubo Diagonalizado	57
4.4.2	Construindo a Esfera Diagonalizada	59
Conclusão	61
REFERÊNCIAS	63
ANEXOS		65
ANEXO A	– LISTA DE 21 PROVAS DA RELAÇÃO DE EULER	67

Introdução

A relação de Euler para poliedros, expressa pela fórmula $V - A + F = 2$, onde V representa o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces de um poliedro convexo, é um dos teoremas mais elegantes e fundamentais da geometria. Descoberta pelo matemático suíço Leonard Euler em 1758, esta relação revela uma conexão profunda entre a estrutura geométrica e topológica dos poliedros.

A importância do estudo da relação de Euler vai além do simples entendimento matemático; ela proporciona insights valiosos sobre a topologia, um ramo da matemática que estuda as propriedades dos espaços que são preservadas sob deformações contínuas. Assim, a relação de Euler pode servir como uma introdução natural à topologia e oferecer uma compreensão intuitiva das estruturas espaciais.

Este trabalho tem como objetivo geral explorar a relação de Euler para poliedros, destacando sua relevância histórica e algumas de suas diversas demonstrações matemáticas. Como objetivo específico, propor uma abordagem introdutória sobre invariantes topológicas para os estudantes do Ensino Médio.

Inicialmente, são discutidas as definições e propriedades dos polígonos, poliedros e alguns conceitos de geometria esférica, essenciais para a compreensão dos teoremas. Em seguida, é apresentado um contexto histórico que abrange desde os estudos dos filósofos e matemáticos denominados pitagóricos até a enunciação da relação por Euler.

Nas seções subsequentes, são detalhadas três diferentes demonstrações do teorema de Euler, cada uma com suas particularidades e contribuições para a matemática. Por fim, o trabalho sugere uma abordagem para tratar o assunto no Ensino Médio, com o objetivo de despertar o interesse dos estudantes por temas relacionados à topologia.

Este estudo é útil não apenas para compreender invariantes topológicos, mas também para

apreciar a relevância dessa classe de conceitos matemáticos em geral. Os invariantes desempenham um papel fundamental na compreensão de diversas áreas do conhecimento, como física e computação. Além disso, o estudo desses conceitos estimula o raciocínio lógico e fomenta o interesse dos estudantes pela matemática. Esse enfoque está alinhado com a visão de educadores como [D'Ambrosio \(2011\)](#), que defende métodos de ensino diversificados para promover um aprendizado mais significativo e engajante .

Conceitos Preliminares

1.1 Geometria Plana

Os poliedros são formas geométricas tridimensionais que consistem em faces planas, arestas retas e vértices. Cada face de um poliedro é um polígono, e as arestas são as linhas onde duas faces se encontram. Portanto, antes de definirmos mais precisamente os poliedros, faz-se necessário um estudo preliminar dos polígonos.

1.1.1 Polígonos

O triângulo é uma figura geométrica plana formada por três segmentos de reta que se encontram em três pontos não colineares, chamados de vértices. Os segmentos de reta são chamados de lados do triângulo e os ângulos formados entre cada par de lados são chamados de ângulos internos do triângulo.

Definição 1.1.1. *Um **polígono** é uma figura geométrica plana formada por uma sequência finita de segmentos de reta conectados para formar um caminho fechado sem autointerseção. Cada segmento de reta é chamado de lado e os pontos onde os segmentos se encontram são chamados de vértices.*

Os polígonos podem ser classificados em convexos e não convexos. Segundo Neto (2013, p. 17), o polígono convexo pode ser definido da seguinte maneira (definição 1.1.2).

Definição 1.1.2. *Sejam $n \geq 3$ um natural e A_1, A_2, \dots, A_n pontos distintos do plano. $A_1A_2\dots A_n$ é um **polígono convexo** se $A_{n+1} = A_1$ e a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, para $1 \leq i \leq n$.*

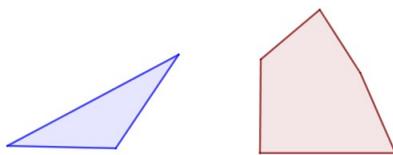


Figura 1 – Exemplos de polígonos convexos

Fonte: Próprio Autor

Definição 1.1.3. Os polígonos que não são convexos são ditos **polígonos côncavos** ou não-convexos.

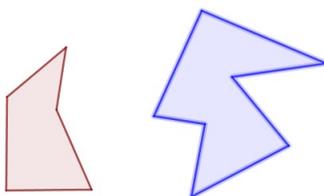


Figura 2 – Exemplos de polígonos não convexos

Fonte: Próprio Autor

1.1.2 Poliedros

Definição 1.1.4. Segundo *Lima (2006)*, um **poliedro** é uma figura geométrica tridimensional composta pela reunião de um número finito de polígonos chamados faces em que:

- Cada lado de um desses polígonos é também lado de apenas um outro polígono.
- A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum chamado de aresta, ou é um vértice, ou é vazia.
- Sempre é possível ir de um ponto de uma face a outro ponto qualquer do poliedro sem passar por nenhum vértice.

As principais características dos poliedros são os números das faces, das arestas e dos vértices.

Assim como os polígonos, os poliedros podem ser agrupados em convexos e não convexos.

Definição 1.1.5. Um **poliedro convexo** é o objeto que, além de possuir as características descritas na seção 1.1.2, possuem a seguinte propriedade: dados quaisquer dois pontos desse objeto sempre será possível traçar um segmento de reta completamente contido nele. Além disso, pode-se considerar

que o interior do Poliedro não faz parte dele. A figura 3 apresenta alguns exemplos desses tipos de poliedros.

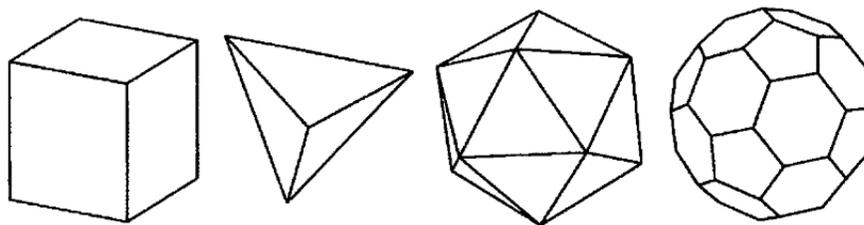


Figura 3 – Exemplos de poliedros convexos

Fonte:(RICHESON, 2015)

Definição 1.1.6. Os poliedros que não possuem essa característica são definidos como não **poliedros não convexos**. Alguns exemplos estão na figura 4.

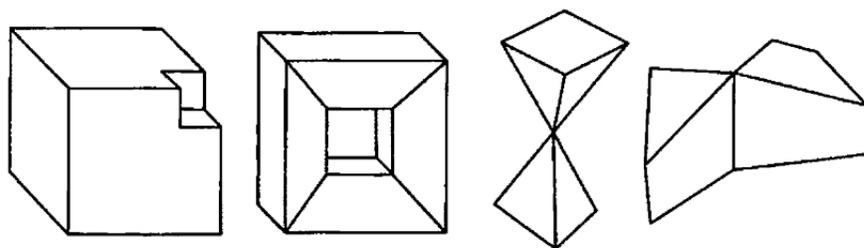


Figura 4 – Exemplos de poliedros não convexos

Fonte:(RICHESON, 2015)

Por sua vez, os poliedros convexos podem ser regulares (platônicos) ou não regulares.

Definição 1.1.7. Os **poliedros regulares** necessitam simultaneamente das seguintes características: cada face ser um polígono regular, todas as faces serem congruentes, e cada vértice estar rodeado pelo mesmo número de faces.

Apesar de existirem infinitos polígonos regulares com número de lados $n \geq 3$, há apenas 5 poliedros que satisfazem essas condições, os chamados Poliedros de Platão, conforme exposto no capítulo 2 (ver figura 17). Esse fato foi demonstrado primeiramente por Euclides, em seu livro XI de Os Elementos.

Definição 1.1.8. Os poliedros que não possuem essas características são os **poliedros não regulares**.

Existem outras classes de poliedros, como, por exemplo, os semi-regulares. A diferença entre esses e os regulares é que, apesar de ambos possuírem como faces apenas polígonos regulares, os semi-regulares podem ter mais de um tipo de polígono regular como face. Foi Arquimedes quem introduziu essa classificação e chegou a constatar que existem apenas 13 desses poliedros. A figura 5 apresenta 3 desses objetos como exemplo. Em 1619, Kepler demonstrou que Arquimedes estava certo quanto à quantidade total desses poliedros.

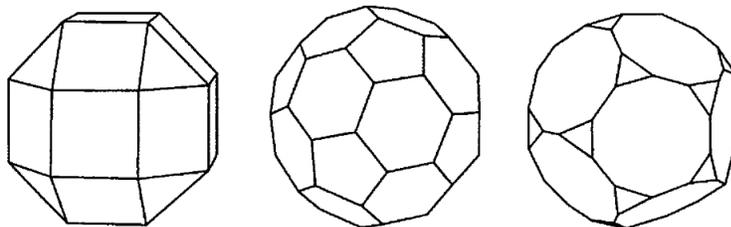
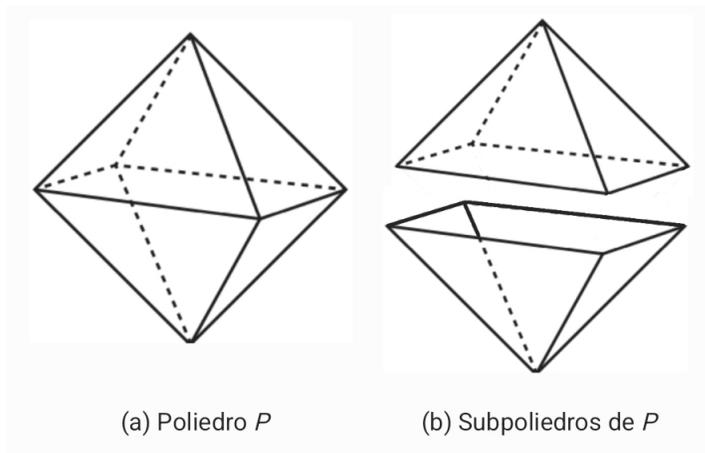


Figura 5 – Exemplos de poliedros semi-regulares

Fonte:([RICHESON, 2015](#))

Definição 1.1.9. *Subpoliedro* Q do poliedro P é o subconjunto de P formado pela reunião de algumas de suas faces, de tal modo que Q também seja um poliedro.



(a) Poliedro P

(b) Subpoliedros de P

Figura 6 – Exemplos de subpoliedros

Fonte: Próprio autor

Definição 1.1.10. *Poliedro conexo* é o que não permite ser escrito como a reunião de dois de seus subpoliedros de modo que a interseção entre ambos seja vazia, exceto no caso trivial (exemplo: figura 6 (a)).

Definição 1.1.11. *Aresta livre* é a aresta de um poliedro que é lado de apenas uma face do poliedro. Analogamente, *vértice livre* é o vértice que pertence a somente uma face. Segundo [Lima \(1991\)](#), há seis possibilidades de arestas livres ao considerar apenas faces triangulares (figura 7):

1. A face possui apenas uma aresta livre.
2. A face tem duas arestas livres e apenas um vértice livre.
3. A face possui duas arestas livres mas nenhum dos seus vértices é livre.
4. A face possui as três arestas livres mas nenhum dos seus vértices é livre.
5. A face tem três arestas livres e apenas um vértice livre.
6. A face possui três arestas livres e dois vértices livres.

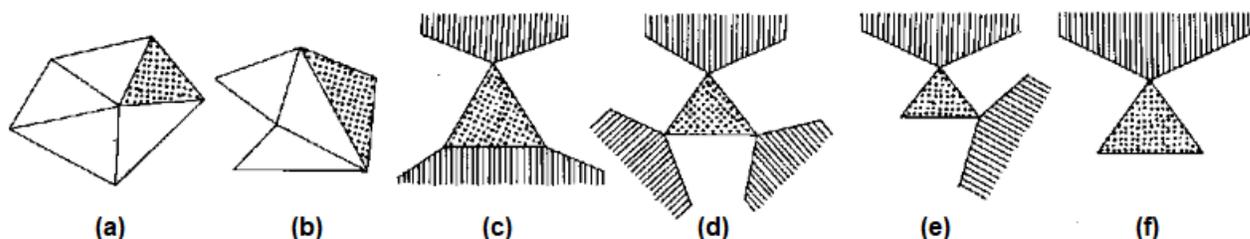


Figura 7 – Possíveis arestas livres

Fonte: [\(LIMA, 1991\)](#)

Definição 1.1.12. *Ciclo* num poliedro P é uma linha poligonal fechada, cujos lados são arestas de P .

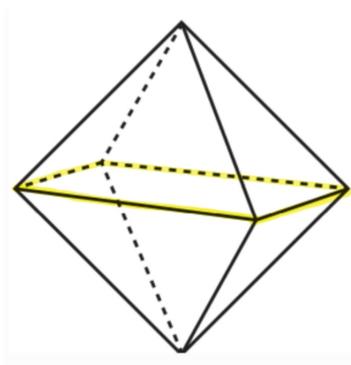


Figura 8 – Exemplo de ciclo

Fonte: Próprio autor

Definição 1.1.13. *Bordo* de um poliedro é a reunião de suas arestas livres. Assim, um ciclo $\lambda \subset P$ é um bordo se existir um subpoliedro $Q \subset P$ tal que λ é o conjunto das arestas livres de Q .

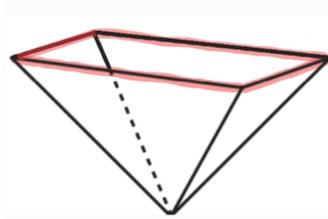


Figura 9 – Exemplo de bordo

Fonte: Próprio autor

Definição 1.1.14. Duas faces de um poliedro são *faces encadeadas* quando existe uma sequência de faces entre elas tais que a interseção entre faces adjacentes é uma aresta comum a ambas as faces.

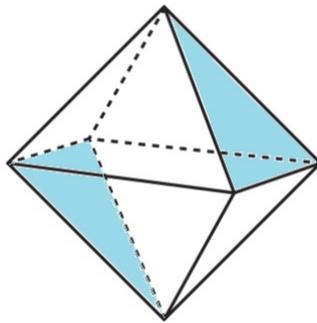


Figura 10 – Exemplo de faces encadeadas

Fonte: Próprio autor

1.2 Geometria Esférica

Diferentemente da geometria plana, a geometria esférica não considera o quinto postulado de Euclides, que diz que por um ponto não pertencente a uma reta passa uma única reta paralela à primeira. Esse fato, faz com que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico seja maior que π radianos (veja teorema 3.2.2).

Definição 1.2.1. *Círculo máximo, ou geodésica*, é qualquer circunferência sobre a superfície de uma esfera que possui raio igual ao da própria esfera (figura 11).

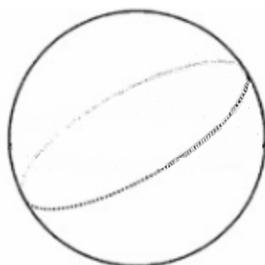


Figura 11 – Exemplo de geodésica

Fonte: Próprio autor

Definição 1.2.2. *Fuso* é uma região de uma semiesfera delimitado por dois círculos máximos (definição 1.2.1) que se interceptam em dois pontos diametralmente opostos, chamados vértices (figura 12).

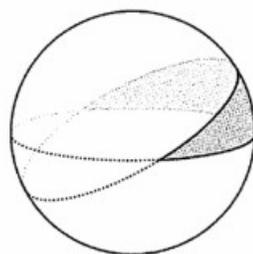


Figura 12 – Exemplo de fuso

Fonte: (RICHESON, 2015)

Definição 1.2.3. *Fuso completo* é uma região da esfera delimitada por dois círculos máximos que se interceptam em dois pontos diametralmente opostos, chamados vértices. Ele é composto por dois fusos. Cada um dos pontos de um dos fusos é diametralmente oposto aos pontos do outro fuso em relação à origem (figura 13).

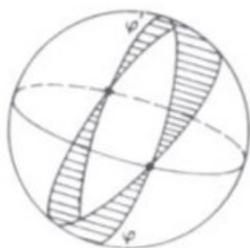
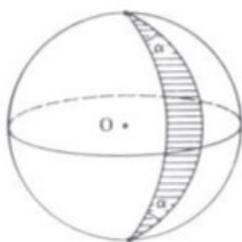


Figura 13 – Exemplo de fuso completo

Fonte: (LIMA, 2010)

Definição 1.2.4. *O ângulo do fuso é o ângulo formado entre as tangentes das geodésicas em qualquer um de seus vértices (figura 14).*

Figura 14 – Exemplo de um fuso com ângulo α

Fonte: (LIMA, 2010)

Definição 1.2.5. *Triângulo esférico ou triângulo geodésico é uma região formada por um fuso mais uma geodésica (figura 15).*

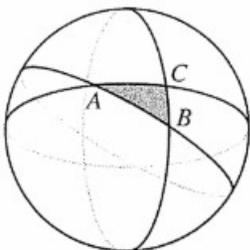


Figura 15 – Exemplo de triângulo esférico

Fonte: (RICHESON, 2015)

Contexto Histórico

A relação descoberta por Euler, que expressa uma conexão entre as quantidades V (vértices), F (faces) e A (arestas) em um poliedro convexo é dada pela fórmula $V - A + F = 2$. Esta expressão, conhecida como a fórmula de Euler para poliedros, foi um marco importante na geometria e na topologia.

O matemático Euler mostrou que para qualquer poliedro convexo, a soma do número de vértices, mais o número de faces, menos o número de arestas é sempre igual a 2. Posteriormente, esta relação foi generalizada como um invariante topológico de superfícies n -dimensionais, desempenhando um papel crucial no desenvolvimento da topologia.

As bases para estes estudos foram lançadas muito antes de Euler, por matemáticos e filósofos da Antiguidade como Pitágoras, Platão, Aristóteles e Euclides, cujos trabalhos exploram as propriedades e classificações dos poliedros.

Seguem alguns breves comentários a respeito de alguns dos expoentes mencionados anteriormente.

2.1 Os Pitagóricos



Figura 16 – Escola de Atenas, afresco de Rafael Sanzio, pintado de 1509 a 1510 Stanza della Segnatura (Vaticano)

Fonte:pt.m.wikipedia.org

Apesar de muito conhecido por causa do teorema que leva seu nome, que relaciona a medida dos catetos com a da hipotenusa de um triângulo retângulo, a biografia de Pitágoras (500 a.C.) é envolta por mistérios e misticismos e ao ponto de alguns questionarem a própria existência de Pitágoras como uma pessoa real. De acordo com [Boyer e Merzbach \(2011\)](#), isso se deve principalmente pela falta de documentos da época, pois até mesmo uma biografia escrita por Aristóteles acabou se perdendo. Pitágoras foi "um profeta e um místico". A tradição afirma que Pitágoras foi o fundador de uma escola filosófica-religiosa, conhecida como escola pitagórica, que se dedicava a estudar a natureza de toda existência (física ou imaterial) por meio da matemática. Era uma organização de estrutura comunitária com um rígido código de conduta e o segredo era uma de suas principais premissas. A matemática era mais uma base filosófica do que uma ferramenta para resolução de problemas concretos. Para os pitagóricos valia o lema "Tudo é número".

O carácter especulativo da filosofia grega, a busca dos juízos apodícticos, universalmente válidos, em contraposição aos juízos meramente assertóricos, que vemos surgir nas obras da filosofia ocidental, surgem, sem dúvidas, graças às grandes contribuições do pitagorismo. A **Mathesis**, a suprema instrução, é algo ativo, que o homem deve afanar-se em conquistar. Êsse afanar-se pelo saber é um apetite, uma amor ao conhecimento da **Mathesis**, é a **filosofia**. O conteúdo dêsse conhecimento é um **mathema**, cuja arte em alcançá-lo é a **mathematika**, arte de obter os conteúdos do saber supremo. Nesse sentido, a matemática é o saber supremo dos pitagóricos, e não no sentido tomado comumente de disciplina que estuda as abstrações de 2º grau. (SANTOS, 2000, p. 73)

Platão (350 a.C.) é considerado um dos últimos herdeiros diretos do pitagorismo. Segundo Platão (2010), quando ele foi pela primeira vez à Sicília, conviveu com Arquitas de Tarento, um matemático brilhante e mestre de ilustres matemáticos, como Eudoxo. Isso leva a crer que a obra Timeu, escrita por Platão, foi inspirada em Arquitas. Essa obra é considerada por muitos pesquisadores como a obra mais antiga a registrar os poliedros regulares.

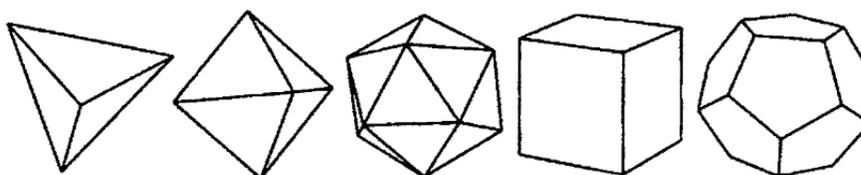


Figura 17 – Os cinco sólidos regulares

Fonte:(RICHESON, 2015)

Nessa obra, o personagem Timeu explica que os elementos básicos do universo são o fogo, a água, a terra e o ar. Cada um desses elementos é representado por um poliedro regular: o hexaedro regular (cubo) corresponde à terra, o icosaedro à água, o octaedro ao ar, o tetraedro (pirâmide) ao fogo e o dodecaedro ao próprio universo. Em comentários ao texto de Timeu, Rodrigo Fontes (PLATÃO, 2010) afirma que foi a partir da descrição da formação dos cinco sólidos elementares que Euclides abordou estas figuras ao dedicar todo o Livro XIII para descrever suas propriedades e constituição, e as caracterizar matematicamente, além de concluir que existem apenas esses cinco sólidos regulares.

2.2 Euclides



Figura 18 – Euclides de Alexandria

Fonte: www.todamateria.com.br/euclides-de-alexandria/

De acordo com [Boyer e Merzbach \(2011\)](#), a obra de Euclides (300 a.C.) é considerada como o mais antigo registro grego sobre matemática. Uma de suas obras é *Os Elementos*, que é composto por 13 livros, sendo o último totalmente dedicado aos poliedros de Platão. O objetivo de Euclides no Livro XIII era achar a razão de uma aresta de cada um dos sólidos regulares com o raio da esfera circunscrita. Os historiadores acreditam que as ideias contidas nesse livro são de autoria de Teeteto.

Euclides não é conhecido por contribuições originais para a matemática; grande parte, ou mesmo praticamente todo o material que encontramos nos *Elementos*, foi demonstrado, pela primeira vez, por outrem. Proclo escreveu que Euclides foi desenvolvendo os elementos a partir da organização e ordenação de muitos dos teoremas de Eudoxo, do aperfeiçoamento de muitos de Teeteto, e levando a uma demonstração irrefutável os argumentos que tinham sido apenas vagamente utilizados pelos seus antecessores. ([RICHESON, 2015](#), p. 56-57)

Alguns historiadores chegaram a cogitar que os outros doze livros de *Os Elementos* foram escritos apenas para preparar o leitor para o 13º livro, apesar da existência de diversos conteúdos não relacionados.

Nesse livro, Euclides escreve a prova matemática que existe apenas cinco poliedros regulares. Sua demonstração se baseia no fato de que, numa face de um poliedro, o ângulo em cada um dos vértices é um ângulo plano. Euclides mostra no Livro XI que, num poliedro convexo, a soma de todos os ângulos planos que se unem no mesmo vértice será sempre menor que 360° . É fácil perceber a razão pela qual esse teorema é verdadeiro. Basta considerar todas as faces que se

encontram num dado vértice de um poliedro convexo. Ao tentar formar com elas uma superfície plana necessariamente uma das arestas terá de ser cortada. Assim, duas das faces que estavam unidas no sólido ficaram separadas pelo corte. Isto acontece porque a soma dos ângulos planos no sólido era estritamente inferior a 360° .

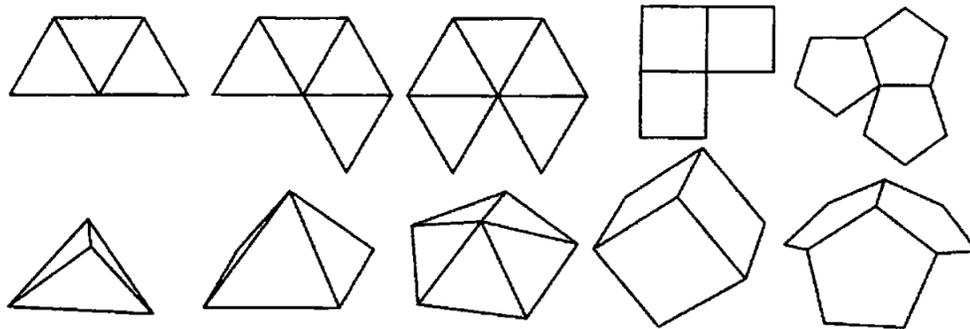


Figura 19 – Os cinco possíveis vértices de um sólido platônico, espalmados (acima) e no espaço (em baixo)

Fonte:([RICHESON, 2015](#))

Teorema 2.2.1. *Existem exatamente cinco poliedros regulares convexos.*

Demonstração. Como cada face de um poliedro regular é um polígono regular, sejam n o número de lados de cada um desses polígonos e m o número de arestas que se encontram em cada vértice do poliedro. Cada face do poliedro deve ter pelo menos três lados, ou seja, $n \geq 3$. Cada vértice possui pelo menos três arestas, ou seja, $m \geq 3$. Como todos os ângulos de cada face têm a mesma medida θ e o ângulo que cada face forma com as outras ao redor de um vértice deve ser menor que 360° , então $m \cdot \theta < 360^\circ$. Quando $n = 3$, as faces do poliedro são triângulos equiláteros, de modo que $\theta = 60^\circ$. Uma vez que $m \cdot \theta < 360^\circ$, temos que $m \cdot 60^\circ < 360^\circ$, ou seja, $m < 6$. Assim, $m = 3, 4$ ou 5 (respectivamente: tetraedro, octaedro e icosaedro) são as únicas possibilidades. Quando $n = 4$, as faces são quadrados, logo $\theta = 90^\circ$. Assim, $m \cdot 90^\circ < 360^\circ$, ou seja, $m < 4$. Portanto, a única possibilidade é $m = 3$ (cubo). Quando $n = 5$, as faces são pentágonos regulares e $\theta = 180^\circ(5 - 2)/5 = 108^\circ$. Assim, $m \cdot 108^\circ < 360^\circ$, ou seja, $m < 10/3$. Logo, $m = 3$ (dodecaedro). Já quando $n = 6$, as faces são hexágonos regulares e $\theta = 120^\circ$. Assim, $m \cdot 120^\circ < 360^\circ$, ou seja, $m < 3$, o que é impossível. Para todos os valores $n > 6$, também será impossível, pois $m < 3$ e, portanto fica concluída a demonstração do teorema. \square

2.3 Euler



Figura 20 – Leonhard Euler

Fonte: www.ime.unicamp.br/sandra/CCA/history/euler/euler.html

Leonhard Euler, nascido em 1707 na Suíça, destacou-se como um dos maiores matemáticos do século XVIII. Sua trajetória acadêmica iniciou-se na Universidade de Basileia, onde Euler demonstrou notável habilidade matemática desde cedo. Após uma breve passagem pela Rússia, ele estabeleceu sua carreira na Academia de São Petersburgo, onde fez importantes contribuições à matemática, física e engenharia.

Euler, ao longo de sua vida, enfrentou desafios significativos, incluindo a perda de sua visão em 1735. Surpreendentemente, isso não o impediu de continuar suas pesquisas prolificamente. Com um intelecto aguçado, ele desenvolveu muitas das notações e conceitos fundamentais utilizados na matemática moderna.

Um dos feitos mais notáveis de Euler é a relação que leva seu nome. A relação de Euler é uma fórmula fundamental para grafos planares. Para um grafo planar conexo, ela é expressa como $V - A + F = 2$, onde V representa o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces. Esta fórmula estabelece uma relação intrínseca entre esses parâmetros, facilitando a análise de estruturas geométricas complexas.

Euler aplicou essa relação em suas investigações sobre poliedros e mapas. Sua abordagem inovadora proporcionou uma compreensão profunda das propriedades topológicas dessas figuras, influenciando subsequentemente diversos campos, como a teoria dos grafos e a geometria.

Além da relação de Euler, suas contribuições à teoria dos números, cálculo, mecânica e astronomia são igualmente notáveis. Euler deixou um legado duradouro, influenciando gerações de

matemáticos e cientistas.

Portanto, a vida de Leonhard Euler foi um testemunho de perseverança e genialidade. Suas contribuições inestimáveis para a matemática e ciências afins garantem que seu nome permaneça entre os grandes da história. A relação de Euler, em particular, destaca-se como uma ferramenta essencial na análise de estruturas geométricas, proporcionando uma base sólida para o desenvolvimento contínuo desses campos.

Demonstrações

Ao longo do tempo, alguns matemáticos se detiveram em provar a veracidade da Relação de Euler, uma vez que o próprio autor não o fez a contento.

O Teorema de Euler foi descoberto em 1758. Desde então, diversas demonstrações aparecem na literatura e algumas continham falhas (como a de Cauchy), que foram descobertas muitos anos mais tarde. Essas falhas eram devidas à falta de precisão na definição de *poliedro*. Mesmo Euler nunca se preocupou em definir precisamente essa palavra. (LIMA, 2006, p. 235)

Uma definição mais precisa de poliedros convexos pode ser vista na seção 1.1.5. Atualmente, existem várias demonstrações desse teorema de Euler (veja anexo A).

Recentemente, duas demonstrações do teorema foram publicadas na Revista do Professor de Matemática (RPM) pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Neste texto, apresentaremos e discutiremos detalhadamente essas demonstrações, que foram cuidadosamente estudadas e analisadas.

3.1 Demonstração do Teorema de Euler Através da Soma dos Ângulos Internos dos Poliedros

A demonstração a seguir do teorema de Euler para poliedros (teorema 3.1.1) foi baseada no artigo publicado na RPM n°3 (FILHO, 2010).

Lema 3.1.1. *Qualquer face não triangular de um poliedro convexo (definição 1.1.5) pode ser transformada em duas ou mais faces triangulares sem alterar o número $V - A + F$.*

Demonstração. Sejam V , A e F respectivamente os números de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. As faces poligonais de um poliedro podem ser decompostas em faces triangulares

por meio de diagonais ao ligar um determinado vértice aos demais desde que não sejam adjacentes ao primeiro. Para cada diagonal numa face, o número V não se altera, enquanto cada um dos números A e F aumentam uma unidade. Esses aumentos se cancelam na expressão $V - A + F$. Portanto, qualquer face não triangular de um poliedro pode ser transformada em duas ou mais faces triangulares sem alterar o número $V - A + F$. \square

Teorema 3.1.1. *Seja P um poliedro convexo (definição 1.1.5) com V vértices, A arestas e F faces. Então vale a igualdade*

$$V - A + F = 2$$

Demonstração. Sejam r uma reta não paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P , e H um plano que não intersecta P e é perpendicular a r . Isso sempre será possível, pois, no poliedro convexo, o número de faces é finito. Sem perda de generalidade, suponha que H esteja sob o poliedro de modo que o semi-espço superior delimitado por H contenha o poliedro P , (exemplo: figura 21).

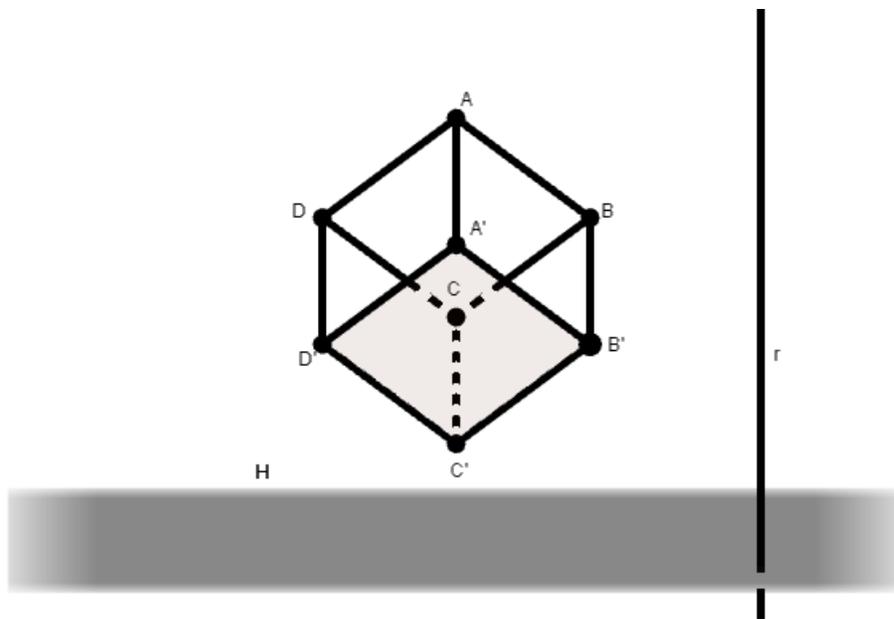


Figura 21 – Cubo suspenso (exemplo de poliedro convexo)

Fonte: Próprio autor

Considerando o conjunto de todas as retas verticais paralelas a r que passam pelo poliedro P , tem-se que cada ponto $p \in P$ corresponde a um único ponto p' em H (exemplo: figura 22).

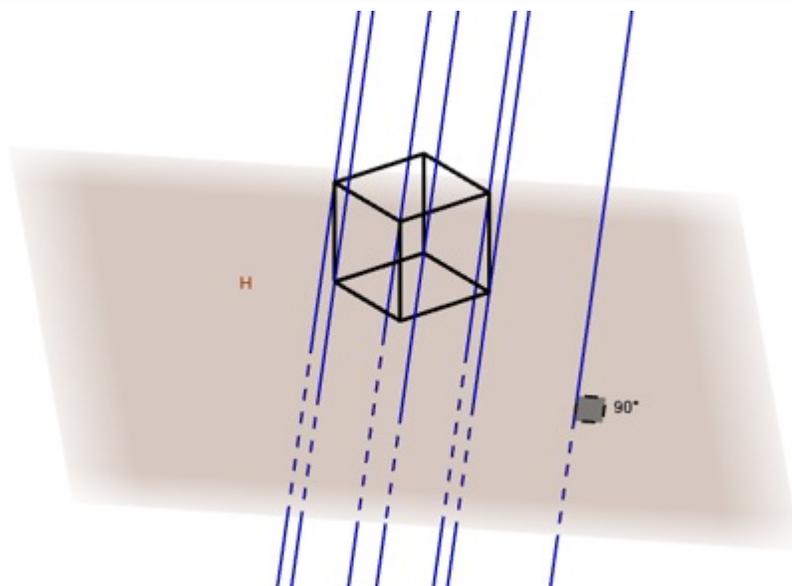


Figura 22 – Retas paralelas a r que passam pelo poliedro P

Fonte: Próprio autor

A união de todos esses pontos p' formam um conjunto convexo $P' \subset H$, cujo contorno λ' é a sombra de uma poligonal fechada λ , formada por arestas de P (exemplo: figura 23).

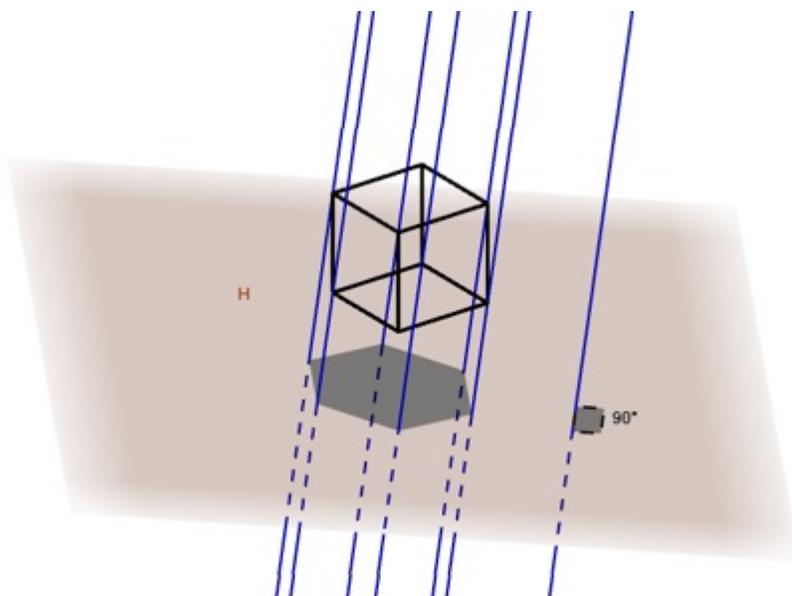


Figura 23 – Projeção do cubo no plano H (sombra λ)

Fonte: Próprio autor

Essa poligonal λ chama-se *contorno aparente* do poliedro P e cada ponto de $\lambda' \subset H$ corresponde a um único ponto $p \in \lambda \subset P$. Dados dois pontos de P que têm relação com o mesmo ponto p' , sejam λ_1 o conjunto dos pontos de P mais distante de H e de λ_2 o dos pontos de P mais próximos de H , desde que nenhum desses pontos pertençam a λ . Assim, o bordo do poliedro P se decompõe em 3 partes de H disjuntas: λ , λ_1 e λ_2 . Dessa forma haverá duas funções bijetivas:

$$f_1 : \lambda \cup \lambda_1 \rightarrow H$$

$$p \mapsto p'$$

e

$$f_2 : \lambda \cup \lambda_2 \rightarrow H$$

$$p \mapsto p'$$

Ao conjunto imagem de $f_1 \subset H$ denomina-se pontos iluminados, e ao imagem de $f_2 \subset H$, pontos sombrios (exemplo: figura 24).

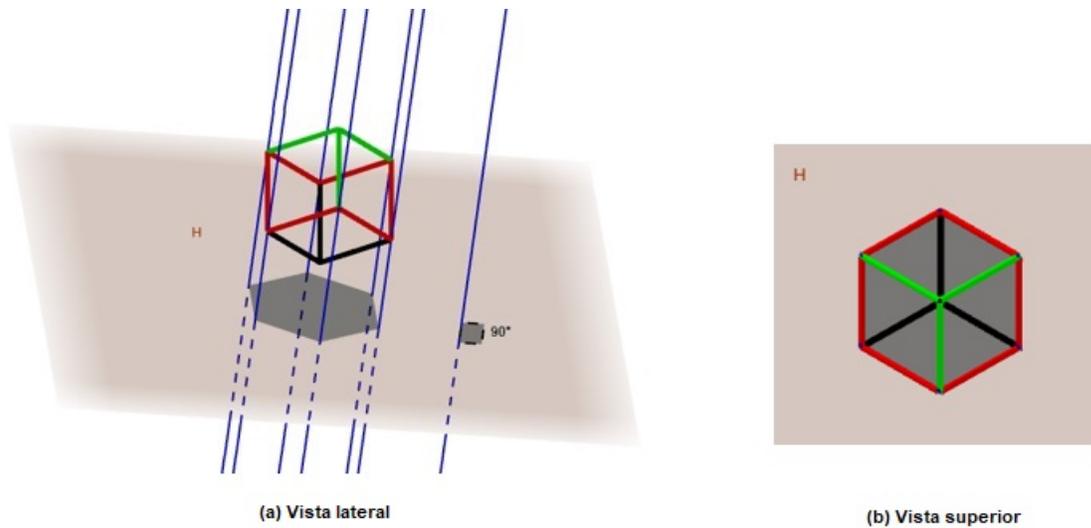


Figura 24 – Pontos iluminados (verde), pontos sombrios (negrito) e contorno aparente (vermelho)

Fonte: Próprio autor

Assim, o poliedro P será decomposto em dois conjuntos, um formado pelos pontos iluminados (exemplo: figura 25 (a)) e um outro formado pelos pontos sombrios (exemplo: figura 25 (b)).

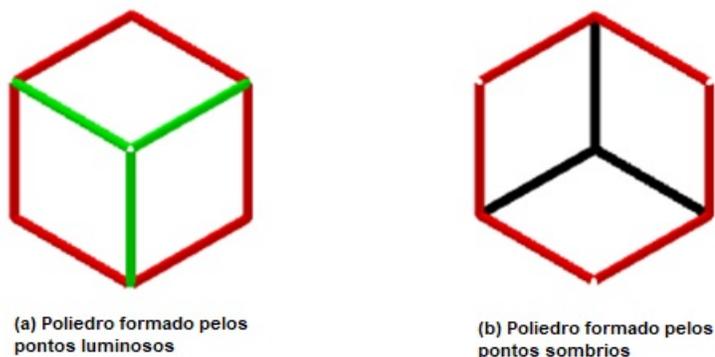


Figura 25 – Poliedros formados pelos pontos iluminados e pelos pontos sombrios

Fonte: Próprio autor

Pelo lema 3.1.1, pode-se considerar que todas as faces de P tem 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces. Portanto,

$$3F = 2A \Rightarrow F = 2A - 2F \quad (3.1)$$

Calculando de duas maneiras distintas a soma S dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro P , temos:

1. Como há F triângulos em P e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a 2 ângulos retos, isto é, a π radianos, então

$$S = \pi \cdot F \quad (3.2)$$

Substituindo 3.1 em 3.2, tem-se que

$$S = 2\pi \cdot A - 2\pi \cdot F = 2\pi(A - F) \quad (3.3)$$

2. Sejam S_1 a soma dos ângulos internos dos triângulos contidos na projeção de P em H por f_1 , ou seja, do polígono P'_1 , e S_2 a dos contidos na projeção de P em H por f_2 , que é o polígono P'_2 . Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo plano é sempre igual a π radianos, então $S = S_1 + S_2$, ou seja, a soma dos ângulos do poliedro P é igual a soma ângulos dos polígonos P'_1 e P'_2 . Tanto S_1 quanto S_2 podem ser calculados pela soma dos ângulos nos vértices internos de cada um desses polígonos mais a soma dos ângulos com vértices no contorno aparente.

Sejam V_1 o números de vértices iluminados, V_2 o de vértices sombrios e V_0 o de vértices do contorno aparente. Assim, o número total de vértices do poliedro P é igual a soma dos

vértices do contorno aparente, dos iluminados e dos sombrios, ou seja, .

$$V = V_0 + V_1 + V_2 \quad (3.4)$$

Considerando o polígono P'_1 , tem-se que a soma dos ângulos nos vértices iluminados é igual a 4 ângulos retos, isto é, 2π radianos, e a soma dos ângulos nos vértices do contorno é igual a $\pi(V_0 - 2)$. Assim,

$$S_1 = 2\pi \cdot V_1 + \pi(V_0 - 2) \quad (3.5)$$

e

$$S_2 = 2\pi \cdot V_2 + \pi(V_0 - 2) \quad (3.6)$$

Adicionando (3.5) e (3.6),

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi \quad (3.7)$$

Substituindo (3.4) em (3.7),

$$S = 2\pi V - 4\pi = 2\pi(V - 2) \quad (3.8)$$

Comparando (3.3) com (3.8) e dividindo ambos os termos por 2π , tem-se que:

$$A - F = V - 2 \Rightarrow V - A + F = 2.$$

□

3.2 Demonstração do Teorema de Euler Através da Soma das Áreas de Triângulos Esféricos

Segundo Lima (2010), a demonstração da Relação de Euler impetrada por Legendre possui a mesma ideia central do argumento exposto pelo autor do artigo publicado na RPM n°3 (FILHO, 2010), ou seja, a soma dos ângulos dos triângulos formados pela decomposição das faces poligonais do poliedro. A diferença entre as duas demonstrações está no fato de Legendre utilizar a soma dos ângulos internos de triângulos esféricos (teorema de Girard) em sua demonstração.

3.2.1 Teorema de Girard

O matemático belga Albert Girard (1590 – 1633), demonstrou que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que π radianos no teorema que levou seu nome e que será demonstrado a seguir.

Lema 3.2.1. *A área de um fuso (definição 1.2.2) é $2\alpha r^2$, sendo α o ângulo em radianos de um fuso (definição 1.2.4) contido em uma esfera de raio r .*

Demonstração. Sejam S a área da superfície de uma esfera de raio r e α o ângulo em radianos de um fuso contido nessa esfera. Sabe-se que a área da superfície S de uma esfera é $4\pi r^2$. Sabe-se também que a área da superfície de um fuso é diretamente proporcional ao seu ângulo α . Como, por definição, $\alpha \leq \pi$ então a área de um fuso é $2\alpha r^2$. \square

Teorema 3.2.1. *Seja Φ um fuso completo (definição 1.2.3) contido em uma esfera E de raio r , cujo ângulo α é medido em radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da esfera, a decompõe em dois hemisférios H e H' . As partes R , R' do fuso completo contidas em cada um desses hemisférios têm áreas iguais a $2\alpha r^2$.*

Demonstração. Sejam S^2 a superfície de uma esfera E e $f : S^2 \rightarrow S^2$ a função que relaciona cada ponto $x \in S^2$ à sua antípoda $f(x) = x'$. Essa função possui as propriedades a seguir:

1. Se $x \in H$, então seu antípoda $x' = f(x) \in H'$.
2. Se $x \in \Phi$, então seu antípoda $x' = f(x) \in \Phi$ também.
3. A área de R é igual à área de $R' = f(R)$, para $\forall R \subset E$.

Assim, se R for a parte do fuso completo Φ situada no hemisfério H , tem-se que $R' = f(R)$ é a parte de $\Phi \subset H'$. Portanto, área de Φ é igual à área de R mais a área de R' , que, pela terceira propriedade acima, é igual ao dobro da área de R . Logo,

$$R = 2\alpha r^2$$

\square

Teorema 3.2.2. *Sejam α, β e γ os ângulos internos de um triângulo esférico. Se esses ângulos forem medidos em radianos, então $S_t = \alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$, com a sendo a área desse triângulo.*

Demonstração. Seja H um hemisfério que contenha o triângulo esférico dado. Seja também R_α a região formada pelo prolongamento dos lados que formam o ângulo α , nos dois sentidos, até encontrarem o bordo do hemisfério H (figura 26).

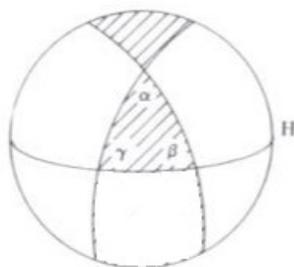


Figura 26 – Exemplo da região R_α (parte hachurada)

Fonte: (LIMA, 2010)

Similarmente a R_α , sejam R_β e R_γ as regiões formadas pelos prolongamentos dos lados que formam os ângulos β e γ .

De acordo com o teorema 3.2.1, a área das regiões $R_\alpha \subset H$, $R_\beta \subset H$ e $R_\gamma \subset H$ são iguais a $2\alpha r^2$, $2\beta r^2$ e $2\gamma r^2$, respectivamente.

Sendo assim, tem-se que a soma das áreas R_α , R_β e R_γ é igual a área de H mais duas vezes a área a do triângulo, que foi contada três vezes. Portanto,

$$2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\pi r^2 + 2a$$

Logo, simplificando ambos os termos por $2r^2$, tem-se

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$$

□

3.2.2 Segunda Demonstração do Teorema de Euler (Legendre)

Teorema 3.2.3. *Seja P um poliedro convexo com V vertices, A arestas e F faces. Então vale a igualdade*

$$V - A + F = 2$$

Demonstração. Seja Ω uma esfera de raio r cujo centro O é um ponto situado no interior do poliedro convexo P . A projeção radial do poliedro P sobre a esfera Ω produz uma decomposição de P em triângulos esféricos t dispostos de modo semelhante às faces de P , ou seja, Ω fica recoberta por F

triângulos esféricos, com um total de A lados e V vértices. Para cada um desses triângulos t , vale a fórmula de Girard (teorema 3.2.2)

$$S_t = \pi + \frac{a_t}{r^2},$$

onde S_t é a soma dos ângulos internos de t e a_t é a área do triângulo t . Considerando todos os F triângulos, tem-se que

$$\sum S_t = \pi \cdot F + \frac{\sum a_t}{r^2} \quad (3.9)$$

Como a soma dos ângulos em torno de cada vértice é igual a 2π ,

$$\sum S_t = 2\pi \cdot V. \quad (3.10)$$

Além disso, a soma das áreas de todos os triângulos t é a área total de Ω , ou seja,

$$\sum a_t = 4\pi r^2. \quad (3.11)$$

Como, nesse caso, a soma das áreas dos triângulos esféricos coincide com a área total da esfera, então de (3.9), (3.10) e (3.11),

$$2\pi \cdot V = \pi \cdot F + \frac{4\pi r^2}{r^2} \Rightarrow 2V - F = 4. \quad (3.12)$$

Como todo triângulo t tem 3 lados e toda aresta é lado de 2 triângulos, tem se

$$F = 2A - 2V. \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.12) e dividindo ambos os membros da equação por 2, conclui-se que

$$V - A + F = 2$$

□

3.3 Demonstração do Teorema de Euler Segundo Cauchy

A demonstração do teorema de Euler a seguir é devida ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857). Segundo Lima (1991), Cauchy pretendeu provar que a relação $V - A + F = 2$ era válida para todo poliedro convexo, mas não definiu precisamente o conceito de poliedro utilizado nem explicitou todas as hipóteses necessárias para que tal demonstração fosse válida. Entretanto, anos após da publicação do seu trabalho, descobriu-se que as condições necessárias para que um poliedro se adequasse aos argumentos propostos pelo matemático francês constituem em uma caracterização topológica da esfera em termos combinatórios, ou seja, um poliedro satisfaz tais condições se, e somente se, for homeomorfo a uma esfera. Apesar dessa última equivalência ser

verdadeira, ela é um resultado profundo de Topologia e é equivalente a de demonstrar a invariância dos grupos de homologia da esfera S^2 . Sendo assim, a demonstração de Cauchy precisa das seguintes hipóteses preliminares.

Lema 3.3.1. *Seja P um poliedro (definição 1.1.4) cujas arestas sejam também, cada uma, um lado de exatamente duas faces de P . Todo subpoliedro próprio de P (definição 1.1.9) tem arestas livres (definição 1.1.11) se, e somente se, duas faces quaisquer de P são encadeadas (definição 1.1.14).*

Demonstração. Considera-se P um poliedro cujos subpoliedros próprios possuem arestas livres. Para uma dada face T , seja Q uma reunião das faces S de P que podem ser encadeadas com T . Suponha que $Q \neq P$. Como, por hipótese, todo subpoliedro próprio de P possui aresta livre, tem-se que Q possui uma aresta livre α , ou seja, existe uma face $S \subset Q$ tal que $\alpha \subset S$. Também, como $S \subset Q$, então S é encadeável com T por definição. Por hipótese, como toda aresta de P é lado de exatamente duas faces de P , então existe uma face $S' \subset P$ tal que $\alpha \subset S'$. Mas como α é livre em Q , a face S' não estaria em Q , o que é absurdo, pois S' é encadeável com T . Logo, $Q = P$, ou seja, duas faces quaisquer de P são encadeadas. Reciprocamente, suponha-se P um poliedro em que duas faces quaisquer são encadeadas. Para mostrar que todo subpoliedro próprio $Q \subset P$ tem alguma aresta livre, toma-se uma face S em $P - Q$ e uma face T em Q . Como por hipótese duas faces quaisquer de P são encadeadas, existe uma cadeia T_1, T_2, \dots, T_n em P , com $T_1 = T$ e $T_n = S$. Seja T_i a última face desta cadeia que pertence a Q . Então $i < n$ e a aresta $\alpha = T_i \cap T_{i+1}$ é livre em Q pois se α fosse lado de outra face em Q além de T_i , essa face teria de ser T_{i+1} , que é um absurdo, pois T_{i+1} não está contida em Q . \square

Lema 3.3.2. *Seja P um poliedro onde cada aresta seja lado de exatamente duas faces de P e que todo ciclo em P (definição 1.1.12) seja um bordo (definição 1.1.13). Se P' se obtém de P por omissão de uma face T então todo ciclo em P' é um bordo.*

Demonstração. Dado um ciclo λ em P' , seja Q um subpoliedro de P cujo bordo é λ . Como, por hipótese, toda aresta de P é lado de exatamente duas faces de P então $Q' = P - Q$ é outro subpoliedro de P cujo bordo ainda é λ , sendo $Q \cap Q' = \lambda$ e $Q \cup Q' = P$. Assim apenas um dos dois subpoliedros, Q ou Q' , contém T . Sem perda de generalidade, suponha-se $T \subset Q$. Então Q' é um subpoliedro de P' cujo bordo é λ , ou seja, todo ciclo em P' é um bordo. \square

Lema 3.3.3. *Seja P' um subpoliedro de P em que todo ciclo de P' é um bordo. Se P'' é um subpoliedro de P' tal que $P'' = P' - T$, onde T é uma face de P' vértice livre (figura 7 (a)) ou com duas arestas livres e apenas um vértice livre (figura 7 (b)), então todo ciclo em P'' é um bordo.*

Demonstração. Dado um ciclo $\lambda \subset P''$, seja Q um subpoliedro de P' cujo bordo é λ . Supondo $T \subset Q$, então λ conteria as arestas livres de T , que é um absurdo, pois $\lambda \subset P' - T$. Logo $Q \subset P''$, ou seja, todo ciclo em P'' é um bordo. \square

Lema 3.3.4. *Seja P' um subpoliedro de P em que todo ciclo de P' é um bordo. Se P'' é um subpoliedro de P' tal que $P'' = P' - T$, onde T é uma face de P' . Como T tanto pode conter duas arestas livres mas sem vértice livre (figura 7 (c)) quanto com três arestas livres com mais de um vértice livre (figuras 7 (d) e (e)), então todo ciclo de cada componente conexa de P'' é um bordo.*

Demonstração. Dado um ciclo λ numa componente conexa $C \subset P''$, então existe um subpoliedro $Q \subset P'$ cujo bordo é λ . Supondo que Q contenha faces de mais de uma componente de P'' , então $T \subset Q$. Isso implica em Q conter também as faces livres de T , que é um absurdo, pois $\lambda \subset Q$. Portanto $Q \subset C$, ou seja, todo ciclo em cada componente convexa de P'' é um bordo. \square

Teorema 3.3.1. *Seja P um poliedro no qual:*

1. *Toda aresta está contida exatamente em duas faces;*
2. *Dois faces quaisquer são encadeadas;*
3. *Todo ciclo é um bordo.*

Então P cumpre a relação de Euler $V - A + F = 2$

Demonstração. Primeiramente, retira-se uma face do poliedro P . Os números V e A não se alteram, mas F diminui de uma unidade, pois, por hipótese, toda aresta de P é lado de exatamente duas faces de P o que implica que o poliedro P possui pelo menos uma face sem arestas livres. Assim, a demonstração se resume a provar que o poliedro modificado cumpre a condição $V - A + F = 1$ para cada uma de suas componentes conexas.

A retirada de uma face produz um poliedro modificado de P cujas arestas que são provenientes dessa face retirada são arestas livres, pois o lema 3.3.1 garante a equivalência dessa afirmação com a hipótese de que duas faces quaisquer de P são encadeadas. Considerando que o poliedro seja maleável, pode-se assim esticá-lo a partir das arestas livres de modo a transformá-lo em uma figura plana. A figura 27 ilustra a transformação ocorrida em um cubo após a retirada de uma de suas faces quadrada e de sua planificação.

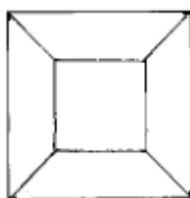


Figura 27 – Exemplo de um cubo achatado

Fonte: Próprio autor

A próxima etapa é traçar diagonais que não se cortam de modo a decompor cada face em triângulos. Para cada diagonal traçada, o número V de vértice não muda, mas o número A de arestas e F de faces aumentam de uma unidade. Logo, $V - A + F$ não se altera. Pode-se assim supor que todas as faces do poliedro são triângulos. A figura 28 mostra como ficaria um cubo após esse processo.

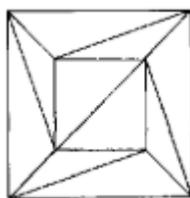


Figura 28 – Exemplo de um cubo diagonalizado

Fonte: (LIMA, 1991)

Após traçar as diagonais, retira-se recursivamente cada uma das faces triangulares que possua alguma aresta livre, uma de cada vez. Para tanto, precisa-se garantir que o poliedro seja conexo (definição 1.1.10) e que essa característica se mantenha, para que o processo de retirada seja mantido. Isso faz com que o número $V - A + F$ não se altere até que reste apenas uma face triangular para cada componente conexa em que obviamente $V - A + F = 1$.

Há seis possíveis casos para faces de poliedros com arestas livres (figura 7). Considerando a retirada de uma das faces do poliedro modificado para cada um dos casos temos que:

1. Se o triângulo retirado possuir apenas uma aresta livre (face hachurada da figura 7 (a)), sua retirada não muda V , mas faz com que A e F sejam ambos diminuídos de uma unidade, o que faz com que o número $V - A + F$ não se altere. Além disso, o subpoliedro resultante é obviamente conexo. Sendo assim, o processo de retirada das faces pode continuar normalmente.

2. Se o triângulo retirado tiver duas arestas livres e apenas um vértice livre (face hachurada da figura 7 (b)), o número de V e de F serão ambos subtraídos de uma unidade e o de A de duas unidades, o que mantém o valor de $V - A + F$ constante. Com efeito, similarmente ao caso anterior, o subpoliedro resultante também é conexo, o que garante a continuidade do processo de retirada das faces normalmente.
3. Se for retirado o triângulo que tem duas arestas livres e nenhum dos seus vértices livre, o número V ficará constante, o número de A diminuirá duas unidades e o de F diminuirá uma unidade, o que faz $V - A + F$ aumentar de uma unidade, mas, em compensação, faz com que o número de componentes conexas também aumente de uma unidade e, assim, o processo de retirada das faces pode prosseguir normalmente. Com efeito, seja XYZ o triângulo a ser retirado cujos lados XZ e YZ são livres mas o vértice Z e o lado XY não são livres.

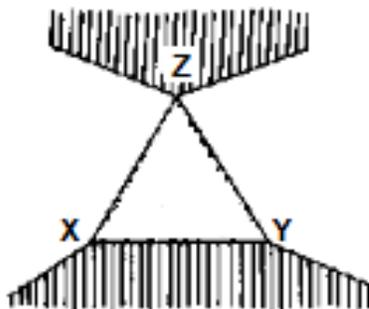


Figura 29 – Triângulo XYZ da figura 7 (c) a ser retirado

Fonte: Próprio autor

A retirada desse triângulo originará dois subpoliedros distintos, um com o vértice X e outro com o vértice Z . Supondo por absurdo que, retirado o triângulo XYZ , houvesse ainda uma poligonal λ da qual os lados XZ e YZ não fazem parte e cujos extremos fossem X e Z . Caso seja a primeira iteração, tem-se por hipótese que todo ciclo em P é um bordo, mas caso seja alguma iteração subsequente, os lemas 3.3.2, 3.3.3 e 3.3.4 garantem que todo ciclo do subpoliedro em questão também seja um bordo, pois tem-se por hipótese também que toda aresta de P é lado de exatamente duas faces de P . Assim, independentemente de qual iteração se esteja, $\lambda \cup XZ$ é um bordo de algum subpoliedro do poliedro em questão. Em particular, XZ seria lado de outro triângulo além de XYZ , que é uma absurdo. Logo, a retirada do triângulo XYZ originará dois subpoliedros conexos e distintos e o processo de retirada das faces pode prosseguir em cada uma das componentes conexas.

4. Se o triângulo a ser retirado tiver as três arestas livres mas nenhum dos vértices livres, o número de V fica constante, mas diminuirá o número de A em três unidades e o de F em uma

unidade, fazendo com que $V - A + F$ aumente de duas unidades e, em compensação, o número de componentes conexas também aumenta de duas unidades. Seja XYZ o triângulo a ser retirado cujos lados XZ , YZ e XY são livres mas os vértices X , Y e Z não são livres.

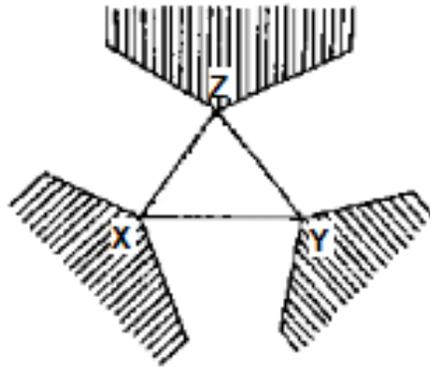


Figura 30 – Triângulo XYZ da figura 7 (d) a ser retirado

Fonte: Próprio autor

A retirada desse triângulo originará a três subpoliedros distintos, um com o vértice X , outro com o vértice Y e mais outro com o vértice Z . Por absurdo, suponha-se que após a retirada do triângulo XYZ houvesse uma poligonal λ da qual os lados XZ e YZ não fazem parte e cujos extremos fossem X e Z . Assim, a hipótese que todo ciclo em P é um bordo mais os lemas 3.3.2, 3.3.3 e 3.3.4 garantem que todo ciclo do poliedro em questão é um bordo, ou seja, $\lambda \cup XZ$ é um bordo de algum subpoliedro do poliedro em questão. Em particular, XZ seria lado de outro triângulo além de XYZ , que é um absurdo.

De maneira análoga, supondo por absurdo que após a retirada do triângulo XYZ houvesse uma poligonal λ da qual os lados YX e YZ não fazem parte e que X e Y sejam extremos. Novamente, a hipótese que todo ciclo em P é um bordo e os lemas 3.3.2, 3.3.3 e 3.3.4 garantem outra vez que todo ciclo do poliedro em questão é um bordo, isto é, que $\lambda \cup YZ$ é um bordo de algum subpoliedro do poliedro em questão. Assim, YZ seria lado de outro triângulo além de XYZ , que é um absurdo. Logo, a retirada do triângulo XYZ originará três subpoliedros conexos e distintos. Além disso, a continuidade do processo de retirada das faces em cada uma das componentes conexas fica preservada.

5. Se o triângulo retirado possuir três arestas livres e apenas um vértice livre, o número V diminui de uma unidade, o de A de três unidades e o de F de uma unidade, o que faz $V - A + F$ aumentar de uma unidade, que será compensada pelo número de componentes conexas, que aumenta de uma unidade. Seja XYZ o triângulo a ser retirado cujos lados XY , XZ e YZ são livres e os vértices Y e Z não os são.

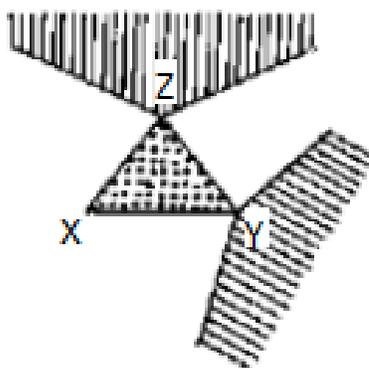


Figura 31 – Triângulo XYZ da figura 7 (e) a ser retirado

Fonte: Próprio autor

A retirada desse triângulo originará a dois subpoliedros distintos, um com o vértice Y e outro com o vértice Z . Supondo por absurdo que, retirado o triângulo XYZ , houvesse ainda uma poligonal λ da qual os lados XZ e YZ não fazem parte e cujos extremos fossem Y e Z . Pela hipótese que todo ciclo em P é um bordo mais os lemas 3.3.2, 3.3.3 e 3.3.4 tem-se que todo ciclo do poliedro em questão é um bordo, ou seja, $\lambda \cup YZ$ é um bordo de algum subpoliedro de P . Em particular, YZ seria lado de outro triângulo além de XYZ , que é uma absurdo. Logo, a retirada do triângulo XYZ originará dois subpoliedros conexos e distintos. Também, o processo de retirada das faces em cada uma das componentes conexas pode proceguir.

6. Se o triângulo retirado tiver dois vértices e duas arestas livres, o número de V diminui de duas unidades, o de arestas de três unidades e o de F de uma unidade, então $V - A + F$ não se altera assim como a quantidade de componentes conexas.

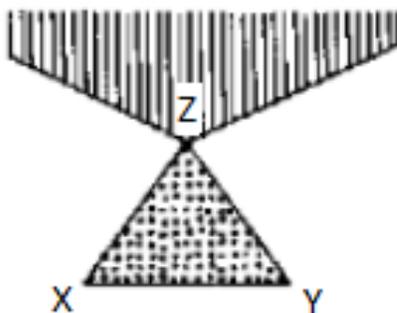


Figura 32 – Triângulo XYZ da figura 7 (f) a ser retirado

Fonte: Próprio autor

Logo, ao retirar-se todas as faces que têm alguma aresta livre, uma a uma, chega-se à última, que é um triângulo em que

$$V - A + F = 1$$

□

Aplicação no Ensino Médio

A Relação de Euler se aplica a qualquer poliedro convexo, incluindo o icosaedro truncado, que é a forma básica da construção de uma bola de futebol. Como a bola é um objeto familiar aos alunos, essa temática se apresenta como uma excelente oportunidade para uma aula no ensino médio.

A atividade proposta envolve o uso do GeoGebra para construir os cinco poliedros regulares e um poliedro semirregular mais simples, como o hexaedro regular truncado, permitindo que os alunos verifiquem a validade da Relação de Euler para esses objetos. Em seguida, eles deverão aplicar o raciocínio adquirido para deduzir a validade dessa relação para o icosaedro truncado. Por fim, sugerir que essa característica pode ser estendida a objetos redondos, como a bola de futebol.

4.1 Roteiros de construção dos Sólidos Regulares

O GeoGebra é uma ferramenta de computador gratuita para auxiliar no ensino-aprendizagem da matemática. A construção de gráficos nele é bastante facilitada pois possui ferramentas gráficas e comandos prontos para a maioria das atividades. A seguir, estão os passo-a-passos para a construção de cada um dos sólidos regulares.

4.1.1 Tetraedro Regular

O tetraedro regular é o sólido regular que possui a menor quantidade de faces, apenas quatro. Segue o passo-a-passo para sua construção no GeoGebra:

1. Abra o GeoGebra Classic 5.
2. No menu suspenso 'GeoGebra Clássico', clique em 'Janela 3D'.
3. Selecione a ferramenta 'Tetraedro' e marque dois pontos na 'Janela de Visualização'.

4. Em 'Janela de Álgebra', clique no botão 'Objetos Auxiliares'.
5. Ainda na 'Janela de Álgebra', clique no dropdown 'Ordenar por', marque a opção 'Tipo do Objeto' e observe o tetraedro possui 4 pontos (vértices), 6 arestas (segmentos) e 6 faces (triângulos), como na figura 33.

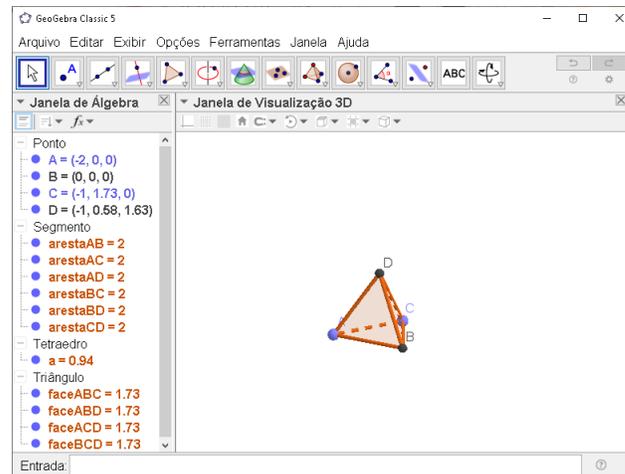


Figura 33 – Tetraedro

Fonte: Próprio autor.

4.1.2 Hexaedro Regular

O hexaedro regular, também conhecido como cubo, é o sólido regular que possui 6 faces. O passo-a-passo para construí-lo no GeoGebra é o seguinte:

1. Abra o GeoGebra Classic 5.
2. No menu suspenso 'GeoGebra Clássico', clique em 'Janela 3D'.
3. Selecione a ferramenta 'Cubo' e marque dois pontos na 'Janela de Visualização'.
4. Em 'Janela de Álgebra', clique no botão 'Objetos Auxiliares'.
5. Ainda na 'Janela de Álgebra', clique no dropdown 'Ordenar por', marque a opção 'Tipo do Objeto' e observe o tetraedro possui 8 pontos (vértices), 6 faces (quadriláteros) e 12 arestas (segmentos), como na figura 34.

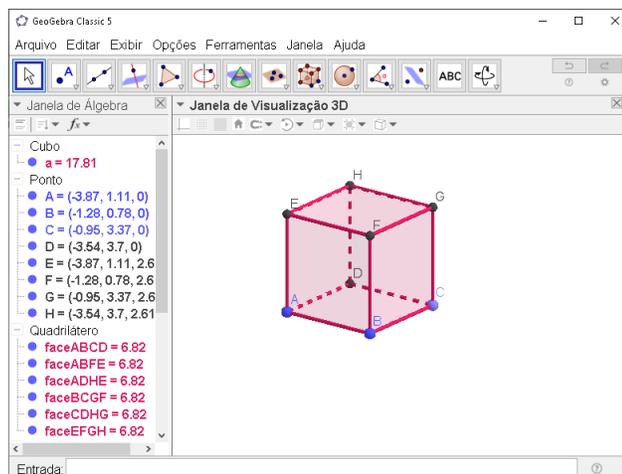


Figura 34 – Hexaedro

Fonte: Próprio autor.

4.1.3 Octaedro Regular

O sólido regular que tem oito faces é o octaedro regular. Para construí-lo no GeoGebra, basta seguir os seguintes passos:

1. Abra o GeoGebra Classic 5.
2. No menu suspenso 'GeoGebra Clássico', clique em 'Janela 3D'.
3. Selecione a ferramenta 'Polígono Regular' e marque dois pontos na 'Janela de Visualização'.
4. Na janela 'Polígono Regular', digite 3 em número de vértices e clique em 'OK'.
5. Na caixa 'Entrada' da janela principal, digite **Octaedro(A, B, C)** e tecle 'Enter'.
6. Em 'Janela de Álgebra', clique no botão 'Objetos Auxiliares'.
7. Ainda na 'Janela de Álgebra', clique no dropdown 'Ordenar por', marque a opção 'Tipo do Objeto' e observe que o octaedro possui 6 pontos (vértices), 12 arestas (segmentos) e 8 faces (triângulos), como na figura 35.

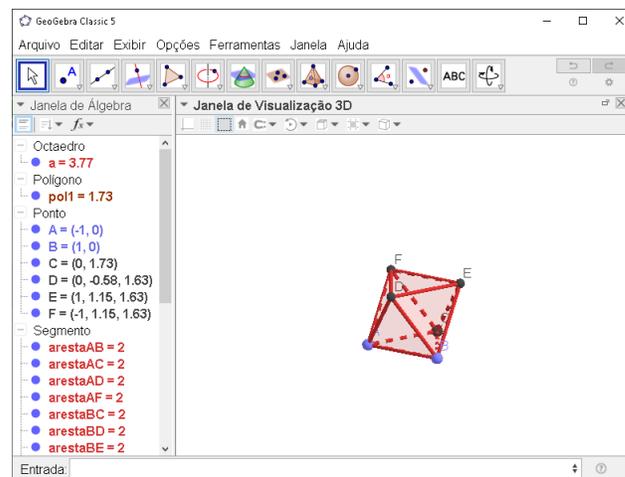


Figura 35 – Octaedro

Fonte: Próprio autor.

4.1.4 Dodecaedro Regular

O dodecaedro regular é o sólido regular que possui doze faces. O passo-a-passo para construí-lo no GeoGebra é:

1. Abra o GeoGebra Classic 5.
2. No menu suspenso 'GeoGebra Clássico', clique em 'Janela 3D'.
3. Selecione a ferramenta 'Polígono Regular' e marque dois pontos na 'Janela de Visualização'.
4. Na janela 'Polígono Regular', digite 5 em número de vértices e clique em 'OK'.
5. Na caixa 'Entrada' da janela principal, digite **Dodecaedro(pol1)** e tecle 'Enter'.
6. Em 'Janela de Álgebra', clique no botão 'Objetos Auxiliares'.
7. Ainda na 'Janela de Álgebra', clique no dropdown 'Ordernar por', marque a opção 'Tipo do Objeto' e observe o dodecaedro possui 12 faces (11 pentágonos mais 1 pol1), 20 vértices (pontos) e 30 arestas (segmentos), como na figura 36.

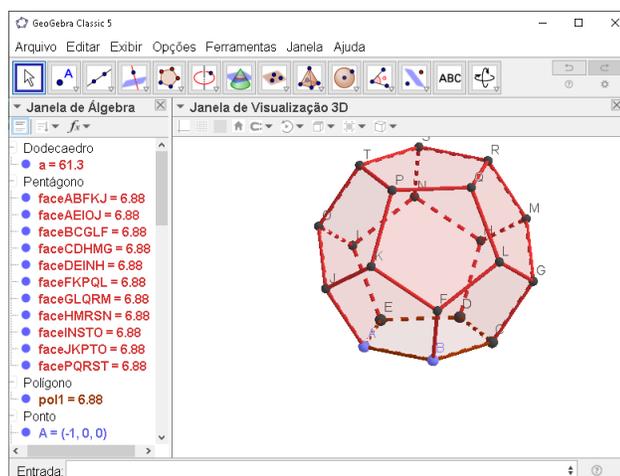


Figura 36 – Dodecaedro

Fonte: Próprio autor.

4.1.5 Icosaedro Regular

O sólido regular mais complexo que existe é o icosaedro regular, pois possui vinte faces. A seguir, tem-se o passo-a-passo para sua construção no GeoGebra.

1. Abra o GeoGebra Classic 5.
2. No menu suspenso 'GeoGebra Clássico', clique em 'Janela 3D'.
3. Selecione a ferramenta 'Polígono Regular' e marque dois pontos na 'Janela de Visualização'.
4. Na janela 'Polígono Regular', digite 3 em número de vértices e clique em 'OK'.
5. Na caixa 'Entrada' da janela principal, digite **Icosaedro(A, B, C)** e tecla 'Enter'.
6. Em 'Janela de Álgebra', clique no botão 'Objetos Auxiliares'.
7. Ainda na 'Janela de Álgebra', clique no dropdown 'Ordenar por', marque a opção 'Tipo do Objeto' e observe o icosaedro possui 12 vértices (pontos) e 30 arestas (segmentos) e 20 faces (triângulos), como na figura 37.

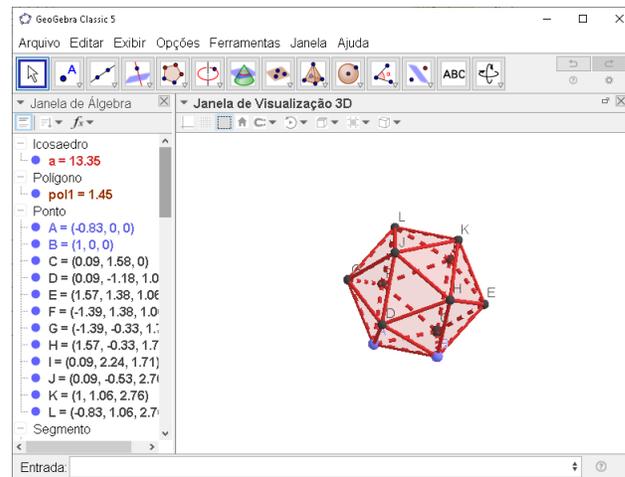


Figura 37 – Icosaedro

Fonte: Próprio autor.

4.2 Verificação da Relação de Euler para os Sólidos Regulares

Ao completar a tabela 1, cuja a última coluna é o resultado de $V - A + F$, verifica-se que a Relação de Euler é válida para todos os cinco polígonos regulares.

Sólidos	V	A	F	$V - A + F$
	4	6	4	2
	8	12	6	2
	6	12	8	2
	20	30	12	2
	12	30	20	2

Tabela 1 – Relação de Euler para os Poliedros Regulares

Fonte: Próprio autor

4.3 Construção do Hexaedro Truncado

Ao contrário dos sólidos regulares, que já possuem uma ferramenta pré-programada no GeoGebra para sua construção, os sólidos não regulares, como os truncados, demandam maior esforço para serem construídos. A estratégia adotada será construí-los tendo como base um sólido regular. Para familiarizar com o processo necessário para a construção de uma icosaedro truncado a partir de uma icosaedro regular, faremos uma construção intermediária mais simples: a construção de uma hexaedro truncado a partir de um cubo. A seguir, o passo-a-passo para construção do hexaedro truncado no Geogebra.

1. Abra o Geogebra Classic 5.
2. No menu suspenso 'GeoGebra Clássico', clique em 'Janela 3D'.
3. Selecione a ferramenta 'Cubo' e marque os pontos $A=(-2,0,0)$ e $B=(2,0,0)$.

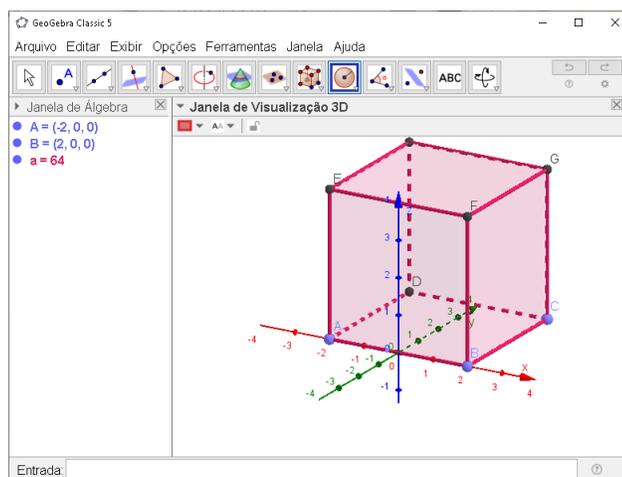


Figura 38 – Cubo

Fonte: Próprio autor.

4. Com a ferramenta 'Esfera Raio e Centro', clique em um vértice do cubo, digite 1 em raio e tecle em 'Enter'.

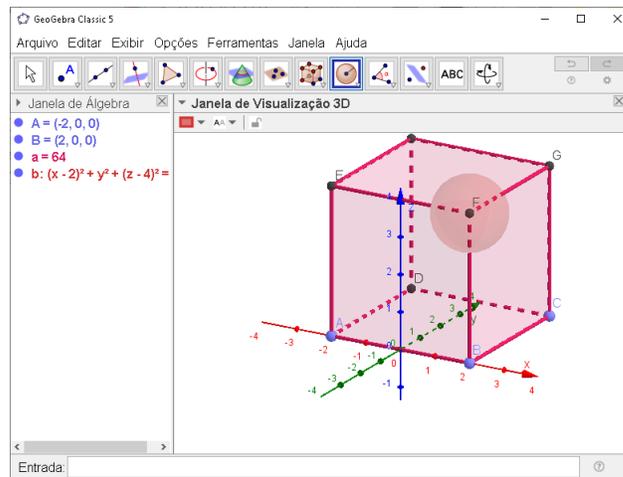


Figura 39 – Cubo no GeoGebra

Fonte: Próprio autor.

5. Utilize a ferramenta ‘Interseção de Dois Objetos’ e clique na interseção da esfera com as arestas do cubo.

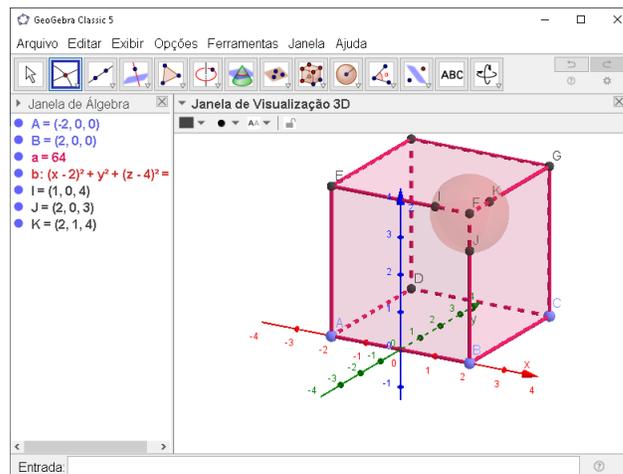


Figura 40 – Pontos de corte no cubo

Fonte: Próprio autor.

6. Desabilite a exibição da esfera e, com a ferramenta ‘Polígono’, selecione cada um dos pontos de interseção entre a esfera e as arestas do cubo.

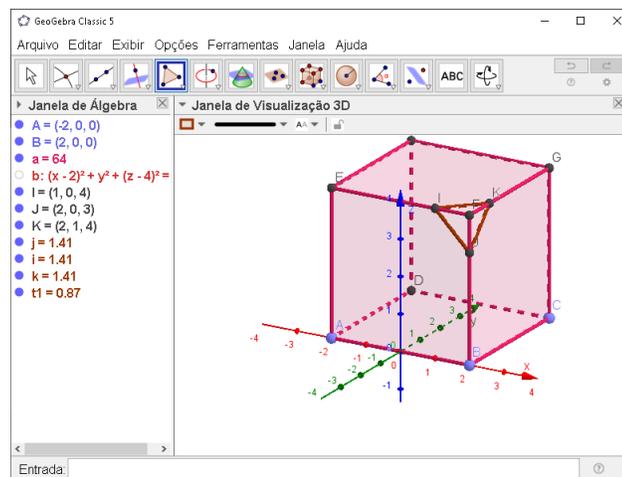


Figura 41 – Pontos de corte no cubo em um único vértice

Fonte: Próprio autor.

7. Repita os passos anteriores para os outros três vértices do cubo.

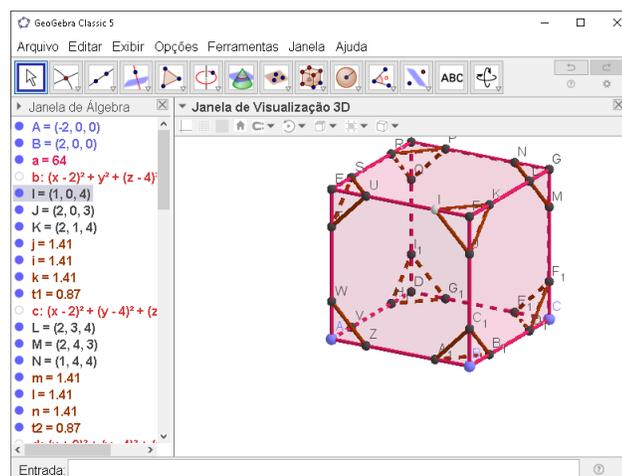


Figura 42 – Pontos de corte no cubo em todos os vértices

Fonte: Próprio autor.

8. Selecione a ferramenta 'Polígono' novamente, forme um octógono unindo os pontos internos das quatro arestas de uma mesma face do cubo e desabilite a exibição do cubo.

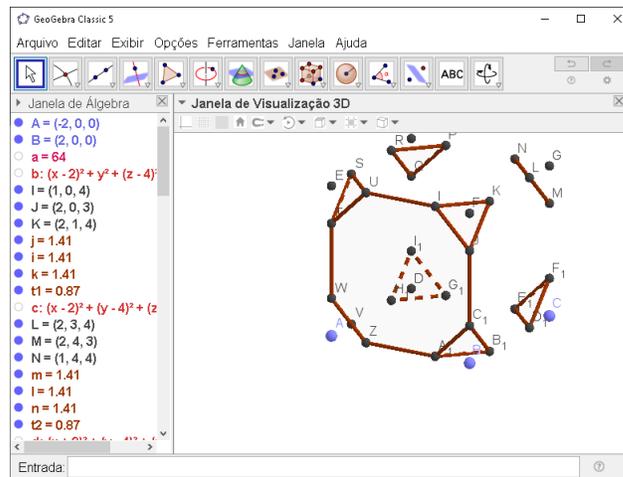


Figura 43 – Octógono formado em uma das faces do cubo

Fonte: Próprio autor.

9. Refaça o passo anterior para cada uma das outras cinco faces do cubo e desabilite a exibição de todos pontos.

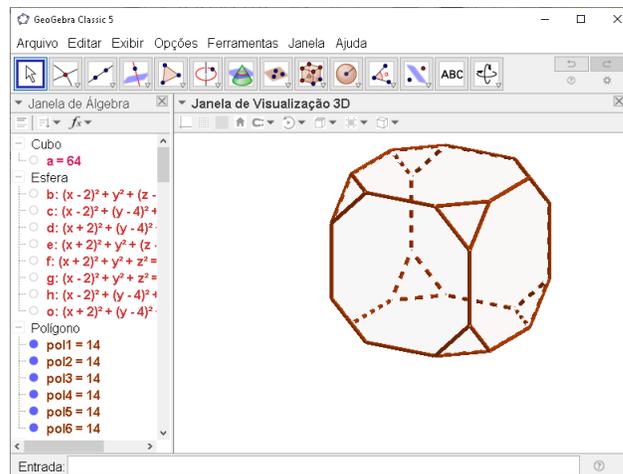


Figura 44 – Cubo truncado

Fonte: Próprio autor.

4.3.1 Verificando a validade da Relação para o Hexaedro Truncado

Pela construção do hexaedro truncado, percebe-se que cada um de seus vértices sede lugar para um triângulo. Assim, a quantidade de vértice aumenta 2 unidades, a de aresta aumenta 3 unidades e a de faces 1 unidade para cada um dos vértices do cubo. Utilizando os valores da tabela 1 para o cubo, tem-se que o hexaedro truncado possui $V = 4 + 4 \cdot 2 = 12$, $A = 6 + 4 \cdot 3 = 18$

e $F = 4 + 4 \cdot 1 = 8$. Logo, a Relação de Euler continua válida para o hexaedro truncado, pois $12 - 18 + 8 = 2$.

4.3.2 Verificando a validade da Relação para o Icosaedro Truncado

A construção do hexaedro truncado permite inferir uma maneira de verificar a validade da Relação de Euler para o icosaedro truncado. Como cada vértice do icosaedro originará um pentágono (figura 45), o número de vértice aumenta 4 unidades, o de arestas aumentará 5 unidades e o de faces 1 unidade para cada um dos 12 vértices do icosaedro.

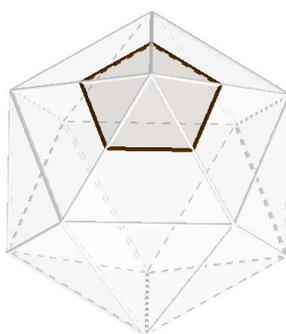


Figura 45 – Pontos de corte no icosaedro em um único vértice

Fonte: Próprio autor.

Assim, baseando-se nos valores da tabela 1, o icosaedro truncado terá $V = 12 + 12 \cdot 4$, $A = 30 + 12 \cdot 5$ e $F = 20 + 12 \cdot 1$. Portanto, $V - A + F = 60 - 90 + 32 = 2$, o que confirma a Relação de Euler para o icosaedro truncado também.

4.4 Verificando a Validade da Relação de Euler na Esfera

Para facilitar o entendimento do modo como se verifica a relação de Euler na esfera, sugere-se a utilização de uma analogia com um método utilizado no cubo. Já foi visto que a relação de Euler é válida para o hexaedro (veja 4.1.2). A estratégia consiste em transformar as faces do cubo em triângulos e verificar que a relação continua válida. Então, dividir a esfera em triângulos (esféricos, no caso) e verificar a validade da relação de Euler na esfera.

4.4.1 Construindo o Cubo Diagonalizado

Para que todas as faces do cubo sejam triangulares, basta traçar uma das diagonais do quadrado que forma cada uma das suas faces. No GeoGebra, isso é possível por meio dos seguintes

passos:

1. Abra o Geogebra Classic 5.
2. No menu suspenso 'GeoGebra Clássico', clique em 'Janela 3D'.
3. Selecione a ferramenta 'Cubo' e marque os pontos $A=(-2,0,0)$ e $B=(2,0,0)$.

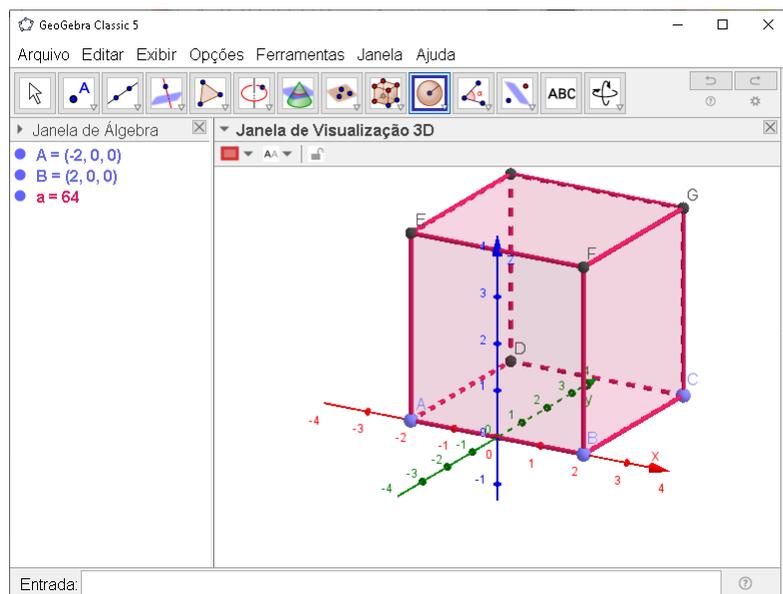


Figura 46 – Cubo

Fonte: Próprio autor.

4. Selecione a ferramenta 'Segmento' e desene uma diagonal em cada uma das faces quadradas do cubo.

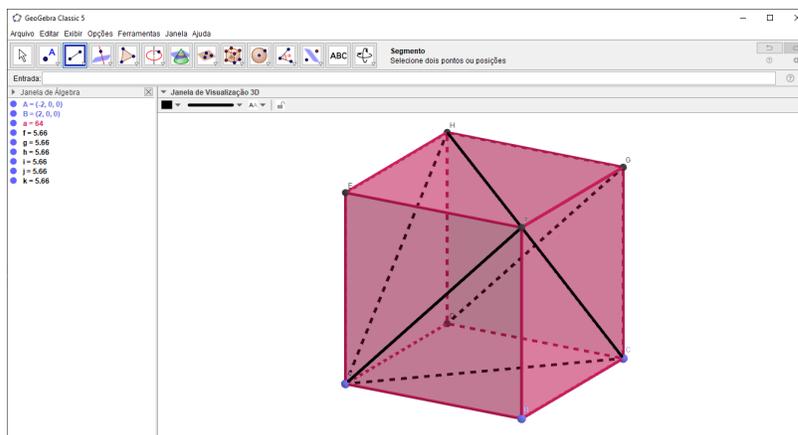


Figura 47 – Cubo com as faces divididas em diagonais

Fonte: Próprio autor.

5. Verifique que o sólido ficou com 12 faces, 18 arestas e 8 vértices. Logo, a relação de Euler continua válida, pois, $8 - 18 + 12 = 2$.

4.4.2 Construindo a Esfera Diagonalizada

Uma vez que foi constatada a validade da Relação de Euler para o cubo cujas faces são triangulares, basta realizar procedimento similar na superfície da esfera e verificar que a relação $V - A + F = 2$. Para a construção da esfera cujas faces são triangulares, basta executar o seguinte passo-a-passo:

1. Abra o Geogebra Classic 5.
2. No menu suspenso 'GeoGebra Clássico', clique em 'Janela 3D'.
3. Selecione a ferramenta 'Esfera: Centro Ponto' e marque os pontos $A=(0,0,0)$ e $B=(0,0,3)$.

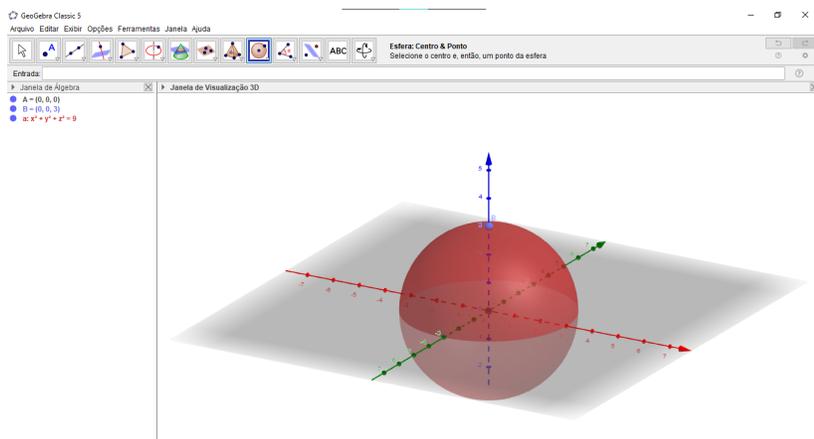


Figura 48 – Esfera

Fonte: Próprio autor.

4. Selecione a ferramenta 'Círculo (Centro - Raio + Direção)'. Clique no centro da esfera e no eixo x , digite 3 em Raio e tecla 'OK'. Repita esse procedimento para os eixos y e z .

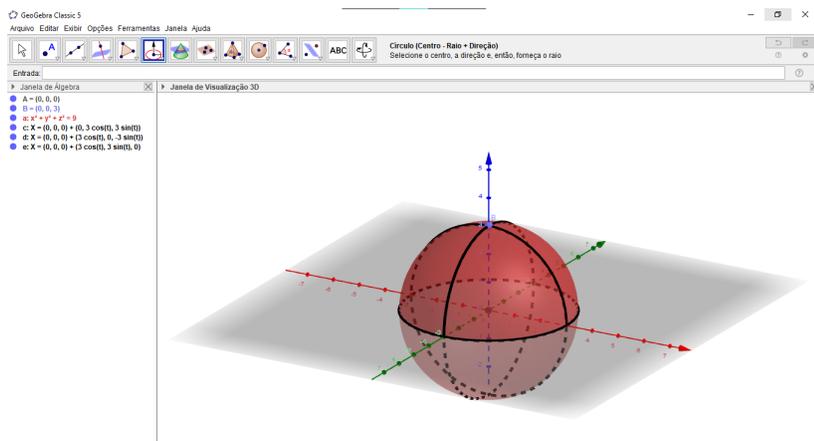


Figura 49 – Esfera dividida em triângulos esféricos

Fonte: Próprio autor.

5. Verifique que, considerando os triângulos esféricos, a esfera também possui $V - A + F = 2$, pois $V = 6$, $A = 12$ e $F = 8$.

Considerações Finais

A relação de Euler para poliedros é uma das mais notáveis descobertas da matemática, evidenciando a elegância e simplicidade que podem ser encontradas na estrutura dos sólidos geométricos. Ao longo deste trabalho, conseguimos alcançar seu objetivo geral, pois exploramos a evolução histórica do teorema além de algumas de suas diversas demonstrações.

A análise histórica revelou que, desde a Antiguidade, matemáticos como Pitágoras e Euclides já exploravam as propriedades dos poliedros, estabelecendo as bases para os estudos de Euler. Conforme descrito por Elon Lages Lima em seu livro "Meu Professor de Matemática", a descoberta de Euler marcou um ponto de inflexão na matemática, abrindo caminho para o desenvolvimento da topologia moderna ((LIMA, 1991)).

As demonstrações apresentadas, de Azambuja, Legendre e Cauchy, demonstram a riqueza de abordagens possíveis para comprovar a relação ($V - A + F = 2$), cada uma trazendo uma perspectiva única e valiosa, pois exploram diferentes conjuntos axiomáticos (Euclidianos, Esfericos, Projetivos). Em particular, a abordagem de Cauchy, que utiliza técnicas de decomposição e reconstrução de poliedros, exemplifica a aplicação de métodos rigorosos e formais que influenciam a matemática até hoje ((LIMA, 2010)).

O objetivo específico também foi alcançado, uma vez que, a partir do estudo realizado, foi elaborada uma proposta prática de aplicação do tema para os estudantes do ensino médio. A aplicação prática proposta pode ser eficaz para engajar os alunos na construção dos sólidos regulares e na verificação da relação de Euler, promovendo um aprendizado ativo e significativo. Além disso, a validação do teorema em diferentes contextos, como poliedros truncados e esferas, podem suscitar a curiosidade para se continuar o estudo da matemática. Estudos pedagógicos, como os realizados por Ubiratan D'Ambrósio, indicam que o uso de modelos geométricos pode melhorar significativamente a compreensão dos estudantes sobre conceitos abstratos ((D'AMBROSIO, 2011)).

Em suma, este trabalho não apenas reforça a relevância histórica e matemática da relação

de Euler para poliedros, mas também destaca seu potencial educativo. Futuras pesquisas poderiam explorar outras aplicações didáticas do teorema, bem como sua extensão a estruturas geométricas mais complexas. A contínua investigação sobre os fundamentos topológicos e suas aplicações pedagógicas promete contribuir para um ensino de matemática mais envolvente e eficaz, alinhado com as diretrizes modernas de educação matemática.

Referências

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *A history of mathematics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. 44^a. ed. Belo Horizonte - Brasil: Autêntica Editora, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 61.

FILHO, Z. A. Teorema de euler. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 36.

LIMA, E. e. o. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2*. 6^a. ed. Rio de Janeiro - Brasil: SBM, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 31.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática*. Rio de Janeiro - Brasil: GRAFTEX Comunicação Visual, 1991. Citado 4 vezes nas páginas 19, 39, 42 e 61.

LIMA, E. L. Ainda sobre o teorema de euler para poliedro convexos. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 22, 36, 38 e 61.

NETO, A. C. M. N. *Geometria*. 1^a. ed. Rio de Janeiro - Brasil: SBM, 2013. Citado na página 15.

PLATÃO. *Timeu-Crítias*. Tradução do grego, introdução e notas de Rodolfo Lopes. 1^a. ed. Coimbra: Universidade de Coimbra, 2010. Citado na página 25.

RICHESON, D. S. *A Pérola de Euler: a fórmula dos poliedros e o nascimento da topologia*. Tradução de Carlos Florentino. 1^a. ed. Lisboa: Gadiva Publicações S.A., 2015. Citado 7 vezes nas páginas 17, 18, 21, 22, 25, 26 e 27.

SANTOS, M. F. d. *Pitágoras e o Tema do Número*. 2^a. ed. São Paulo: IBRASA, 2000. Citado na página 25.

Anexos

Lista de 21 provas da Relação de Euler

As seguintes provas poderam ser encontradas no sítio <https://ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>
(Acesso: 21/03/2024)

- Proof 1: Interdigitating Trees
- Proof 2: Induction on Faces
- Proof 3: Induction on Vertices
- Proof 4: Induction on Edges
- Proof 5: Divide and Conquer
- Proof 6: Electrical Charge
- Proof 7: Dual Electrical Charge
- Proof 8: Sum of Angles
- Proof 9: Spherical Angles
- Proof 10: Pick's Theorem
- Proof 11: Ear Decomposition
- Proof 12: Shelling
- Proof 13: Triangle Removal
- Proof 14: Noah's Ark
- Proof 15: Binary Homology

- Proof 16: Binary Space Partition
- Proof 17: Valuations
- Proof 18: Hyperplane Arrangements
- Proof 19: Integer-Point Enumeration
- Proof 20: Euler Tours
- Proof 21: Schlegel Projection