

Universidade Federal de Ouro Preto

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional -
PROFMAT

Dissertação

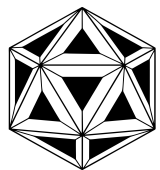
**Um Estudo Sobre a
Representação de Retas,
Circunferências e Cônicas no
Plano Complexo**

Kátia Maria Domingues

Ouro Preto
2025



UFOP



DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO



PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

Kátia Maria Domingues

Um Estudo sobre a Representação de Retas, Circunferências e Cônicas no Plano Complexo

Ouro Preto - MG, Brasil

Fevereiro de 2025

KÁTIA MARIA DOMINGUES

**Um Estudo sobre a Representação de Retas, Circunferências e
Cônicas no Plano Complexo**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Ensino de Matemática
Orientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza
Coorientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira

Ouro Preto - MG, Brasil

2025

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

D671e Domingues, Kátia Maria.

Um estudo sobre a representação de retas, circunferências e cônicas no plano complexo. [manuscrito] / Kátia Maria Domingues. - 2025.
103 f.: il.: color..

Orientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza.

Coorientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira.

Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

1. Geometria. 2. Números Complexos. 3. Elipse (Geometria). 4. Seções cônicas - Hipérbole. 5. Seções cônicas - Parábola. I. Souza, Gil Fidelix de. II. Ferreira, Geraldo César Gonçalves. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 514.12:373.5

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526



FOLHA DE APROVAÇÃO

Kátia Maria Domingues

Um estudo sobre a representação de retas, circunferências e cônicas no Plano Complexo

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de mestre

Aprovada em 23 de abril de 2025

Membros da banca

Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Geraldo Cesar Gonçalves Ferreira - Coorientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Edney Augusto Jesus de Oliveira - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Luis Felipe Gonçalves Fonseca - Universidade Federal de Viçosa

Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 23/04/2025



Documento assinado eletronicamente por **Gil Fidelix de Souza, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 23/04/2025, às 11:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0899272** e o código CRC **38966419**.

“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa algum dia ser aplicado aos fenômenos do mundo real.”
(Nikolai Lobachevsky)

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar força e resiliência nos momentos difíceis.

Ao meu filho Artur por me incentivar a voltar a estudar e à minha mãe, Maria, pela ajuda em casa.

Ao meu orientador, professor Doutor Gil Fidelix, pela paciência, empenho, incentivo, ensinamentos e disponibilidade.

Ao coorientador, professor Doutor Geraldo César Gonçalves Ferreira, pelas sugestões dadas ao trabalho.

Aos professores do PROFMAT da UFOP pelo excelente trabalho e contribuição para minha formação. E aos meus colegas da turma de 2022.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo investigar as relações entre os números complexos e a Geometria Analítica. O foco do estudo é a conexão entre números complexos e alguns elementos da geometria plana (retas, circunferências, parábolas, elipses e hipérbolas), destacando algumas propriedades fundamentais dessas figuras. Além disso, propõe-se duas atividades práticas para o Ensino Médio que integram conceitos geométricos com experimentação. A integração entre números complexos e Geometria Analítica apresenta um potencial significativo para promover uma abordagem interdisciplinar no ensino da Matemática, estimulando o aprendizado por meio de conexões concretas e aplicações práticas.

Palavras chaves: Números Complexos; Circunferência; Parábola; Elipse e Hiperbóle.

Abstract

This work aims to investigate the relationships between complex numbers and Analytical Geometry. The focus of the study is the connection between complex numbers and some elements of plane geometry (lines, circles, parabolas, ellipses, and hyperbolas), highlighting some fundamental properties of these figures. In addition, two practical activities are proposed for high school education that integrate geometric concepts with experimentation. The integration between complex numbers and Analytical Geometry presents significant potential for promoting an interdisciplinary approach to Mathematics teaching, stimulating learning through concrete connections and practical applications.

keywords: Complex Numbers; Circumference; Parabola; Ellipse and Hyperbola.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Cone Duplo e Cônicas.	16
Figura 2 – Primeira Lei de Kepler (Lei das Órbitas).	17
Figura 3 – Representação do Número Complexo z	24
Figura 4 – Representação do Conjugado de z	25
Figura 5 – Representação de z na Forma Polar.	27
Figura 6 – Interpretação Geométrica para \bar{z} , $-z$, z^{-1} e $z \cdot i$	29
Figura 7 – Soma de dois Complexos.	30
Figura 8 – Subtração de dois Complexos.	30
Figura 9 – Multiplicação de dois Complexos.	30
Figura 10 – Divisão de dois Complexos.	30
Figura 11 – Exemplo 4.2.1 Circunferência.	38
Figura 12 – Ângulo Constante.	41
Figura 13 – Curva.	43
Figura 14 – Circunferência.	44
Figura 15 – Segmentos Secantes Passando pelo Centro.	48
Figura 16 – Segmentos Secantes.	48
Figura 17 – Parábola.	52
Figura 18 – Reta Tangente a Parábola.	53
Figura 19 – Ângulos Reto na Parábola.	54
Figura 20 – Reflexão na Parábola.	55
Figura 21 – Ponto Médio da Parábola.	57
Figura 22 – Elipse.	60
Figura 23 – Construção para Auxiliar na Parametrização da Elipse.	61
Figura 24 – Corda e Ponto Médio.	63
Figura 25 – Diâmetro Conjugado.	65

Figura 26 – Focos.	69
Figura 27 – Construção do Jardineiro.	70
Figura 28 – Teorema de Pitágoras.	71
Figura 29 – Círculo Diretivo.	72
Figura 30 – Lei da Reflexão na Elipse.	73
Figura 31 – Segmentos Ortogonais.	75
Figura 32 – Localização de V_2 no Círculo.	75
Figura 33 – Hipérbole.	78
Figura 34 – Combinação Linear de Vetores na Hipérbole.	80
Figura 35 – Hipérbole Conjugada.	81
Figura 36 – Hipérbole e Ponto Médio.	82
Figura 37 – Hipérbole e Círculo Diretor.	84
Figura 38 – Lei da Reflexão na Hipérbole.	85
Figura 39 – Projeção Ortogonal na Hipérbole.	87
Figura 40 – Ângulo na Primeira Posição.	91
Figura 41 – Ângulo Trocando a Posição de P	91
Figura 42 – Ângulo Trocando as Posições de A e B	92
Figura 43 – Ângulo Trocando a Posição de P	92

Sumário

Introdução	13
1 FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA	15
1.1 Breve História das Cônicas	15
1.2 Breve História dos Números Complexos	17
1.3 Aplicações dos Complexos	19
1.4 Os Números Complexos e as Cônicas no Ensino Médio	19
2 O PLANO COMPLEXO	23
2.1 Introdução	23
2.2 Representação dos Números Complexos por Pontos no Plano	24
2.3 Representação dos Números Complexos por Vetores no Plano	26
2.4 Representação Geométrica	29
2.4.1 Interpretação Geométrica	29
2.4.2 Adição e Subtração	29
2.4.3 Multiplicação e Divisão	30
2.5 Ângulos entre Números Complexos	31
3 A RETA NO PLANO COMPLEXO	33
4 CIRCUNFERÊNCIA NO PLANO COMPLEXO	37
4.1 Introdução	37
4.2 Equações da Circunferência	37
4.2.1 Equação Cartesiana	38
4.2.2 Equação Geral	39
4.2.3 Equação Trigonométrica	39
4.2.4 Representação Alternativa de uma Circunferência	40
5 PARÁBOLA	51
5.1 Introdução	51

5.2	Lei da Reflexão na Parábola	52
5.3	Retas Paralelas e Ponto Médio	55
6	ELIPSE	59
6.1	Introdução	59
6.2	Diâmetros Conjugados	62
6.3	Os Focos	68
6.4	Lei da Reflexão na Elipse	72
7	HIPERBÓLE	77
7.1	Introdução	77
7.2	Ponto Médio e Diâmetros Conjugados	80
7.3	Focos	83
7.4	Lei da Reflexão na Hipérbole	85
8	PROPOSTA DE ATIVIDADE	89
	Conclusão	97
	REFERÊNCIAS	99

Introdução

Os números complexos, apesar de amplamente explorados em sua dimensão algébrica, têm seu potencial geométrico frequentemente negligenciado no ensino básico. Além disso, o estudo das cônicas é, muitas vezes, abordado de forma isolada, sem conexão com outras áreas da matemática. A integração desses dois temas oferece uma oportunidade rica para promover a interdisciplinaridade e fomentar um ensino mais visual e dinâmico. Ao explorar as cônicas sob a ótica dos números complexos, pretende-se não apenas enriquecer o repertório pedagógico dos professores, mas também proporcionar aos estudantes uma compreensão mais profunda e interligada dos conteúdos matemáticos. Essa abordagem, além de inovadora, valoriza a interação entre diferentes ramos da matemática, incentivando um aprendizado mais significativo e contextualizado.

Este trabalho tem como objetivo investigar as conexões entre os números complexos e a Geometria Analítica. Pretende-se integrar conceitos de álgebra, geometria analítica e trigonometria, destacando propriedades fundamentais das cônicas (parábola, elipse, hipérbole e circunferência) através da linguagem dos números complexos. Para isso, ele está dividido em oito capítulos:

No capítulo 1 abordamos os aspectos históricos dos números complexos e das cônicas, além de discutir como esses conteúdos são tradicionalmente explorados (ou negligenciados) no Ensino Médio.

No capítulo 2 definimos o conjunto dos números complexos, suas operações, e apresentamos suas representações no plano de Argand-Gauss, bem como as formas trigonométrica e exponencial.

Nos capítulos 3 e 4 exploramos alguns resultados da geometria analítica aplicados aos números complexos, incluindo equações de retas e circunferências no plano complexo.

Nos capítulos 5, 6 e 7 estudamos a parábola, a elipse e a hipérbole, respectivamente. Ao longo de cada capítulo, faremos um estudo da cônica, abordando seus principais elementos, sua equação reduzida, a formulação na linguagem dos números complexos, além de destacar propriedades

fundamentais como os focos e a lei da reflexão.

No capítulo 8 apresentamos duas atividades práticas para o Ensino Médio que integram conceitos geométricos com experimentação. A primeira atividade utiliza o Teorema do Ângulo Constante e a segunda atividade investiga a Lei da Reflexão aplicada a cônicas, utilizando um espelho odontológico como recurso principal.

Neste trabalho, exploramos a conexão entre números complexos e cônicas. Visamos, tanto aprofundar nosso conhecimento sobre geometria, quanto apresentar novas ideias para o ensino dessas áreas da matemática.

Fundamentação Histórica

Neste capítulo, será apresentado um breve relato sobre a história das cônicas e dos números complexos, seguido de uma análise de como esses conteúdos são abordados no Ensino Médio, com base nos estudos de (BOYER; MERZBACH, 2011) e (SILVA, 2018).

1.1 Breve História das Cônicas

Inicialmente, apresentaremos um breve panorama sobre a história das cônicas. O estudo dessas curvas remonta à antiguidade, por volta do século 300 a.C., com figuras proeminentes como Aristeu, Menaecmus, Euclides de Alexandria e Apolônio de Perga. As seções cônicas já eram conhecidas aproximadamente 150 anos antes de Apolônio escrever seu tratado sobre o tema. Aristeu e Euclides já haviam escrito textos elementares sobre as cônicas, mas foram superados pelo nível avançado do Tratado sobre Cônicas, de Apolônio, composto por oito volumes.

Antes de Apolônio, as curvas conhecidas como elipse, parábola e hipérbole eram obtidas a partir de seções de três tipos distintos de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice: agudo, reto ou obtuso. Apolônio, no entanto, mostrou sistematicamente que não é necessário realizar seções perpendiculares à geratriz de um cone. Ele mostrou que é possível obter as três seções cônicas - elipse, hipérbole e parábola - a partir de um único cone, simplesmente variando a inclinação do plano de corte.

Apolônio fez uma segunda generalização significativa ao demonstrar que o cone utilizado para gerar as cônicas não precisava ser necessariamente reto, podendo também ser oblíquo ou escaleno. Além disso, ele substituiu o conceito de cone de uma única folha pelo de cone duplo. Na verdade, Apolônio forneceu a mesma definição de cone circular que utilizamos atualmente, conforme (BOYER; MERZBACH, 2011):

Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo, que não está em um mesmo

plano com o ponto, de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo.

As secções cônicas, ou cônicas, são curvas obtidas pela intersecção de um plano com um cone (circular) duplo. A natureza da curva resultante - elipse, hipérbole ou parábola - depende da inclinação desse plano em relação ao cone:

1. **Elipse:** A curva gerada quando um plano corta apenas um dos ramos do cone duplo e não é paralelo à geratriz.
2. **Hipérbole:** A curva obtida como a intersecção entre um cone duplo e um plano que passa através dos dois ramos e não passa pelo vértice.
3. **Parábola:** Quando um plano intercepta um cone com uma inclinação paralela a uma de suas geratrizes.
4. **Circunferência:** A curva gerada quando um plano corta o cone de forma perpendicular ao seu eixo e não é paralelo à geratriz, resultando em uma curva fechada e simétrica.

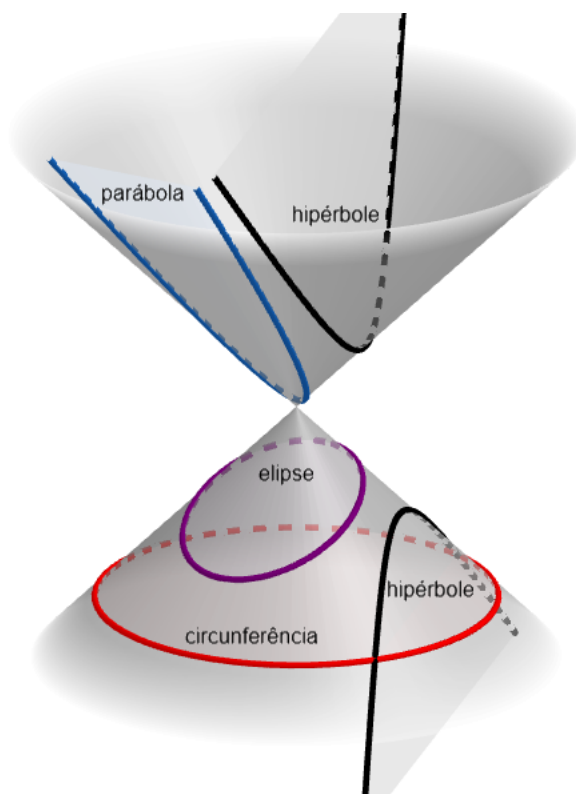


Figura 1 – Cone Duplo e Cônicas.
Fonte: Própria autora, 2024.

Embora as cônicas tenham sido objeto de estudo puramente teórico por séculos, elas adquiriram grande importância na era moderna, especialmente com o surgimento da física e da astronomia. Johannes Kepler, no século XVII, utilizou as cônicas para descrever as órbitas elípticas dos planetas ao redor do Sol, um avanço crucial para a teoria heliocêntrica de Copérnico. A Primeira Lei de Kepler trata do problema dos dois corpos (planeta e sol). Em se tratando de sol - asteroíde ou cometa, a órbita pode ser uma elipse, uma parábola ou um ramo da hipérbole.

As propriedades geométricas das cônicas também são fundamentais na ótica, na engenharia e na construção de telescópios. Assim, as cônicas, que começaram como um estudo puramente

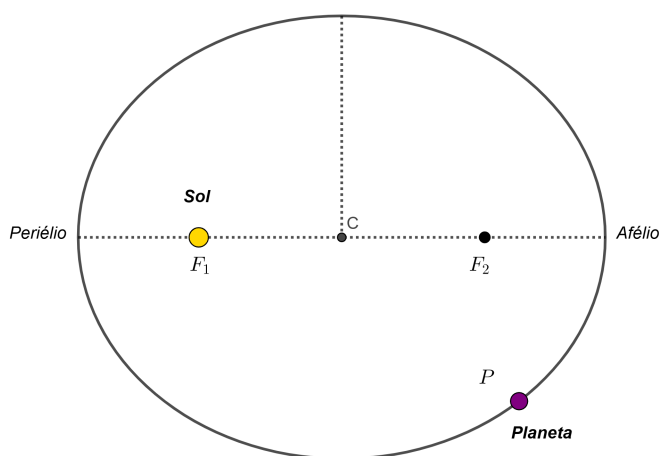


Figura 2 – Primeira Lei de Kepler (Lei das Órbitas).

Fonte: Própria autora, 2024.

abstrato da geometria, tornaram-se ferramentas essenciais para descrever fenômenos naturais e artificiais, influenciando o avanço da ciência e da tecnologia ao longo dos séculos.

As cônicas estão amplamente presentes em nosso cotidiano, porém, a maioria das pessoas não as percebe na natureza, em objetos, na arquitetura, entre outros contextos. Isso ocorre devido à falta de conhecimento sobre essas curvas, seja por não terem sido estudadas em profundidade ou por terem sido abordadas de forma superficial no Ensino Médio, o que dificulta a visualização dessas formas no espaço.

1.2 Breve História dos Números Complexos

A Aritmética e a Geometria surgiram de maneira independente, mas, ao longo do tempo, foram reveladas conexões entre números e formas. A utilização de sistemas de coordenadas para definir posições de pontos no plano e no espaço já havia sido proposta no século III a.C. por Apolônio, em seus estudos sobre seções cônicas. Contudo, foi na primeira metade do século XVII

que os matemáticos franceses Pierre de Fermat e René Descartes, de maneira independente e quase simultânea, deram origem ao que hoje conhecemos como Geometria Analítica.

Fermat não se preocupou em divulgar suas ideias, ao contrário de Descartes, que, no apêndice de sua obra mais famosa, Discurso sobre o Método de Bem Conduzir a Razão e Buscar a Verdade nas Ciências, publicada em 1637, incluiu um tratado intitulado *La Géométrie*, considerado o marco inicial da Geometria Analítica.

Com o avanço da Geometria Analítica, Descartes explorou, entre outros tópicos, as equações algébricas. Em um trecho do Discurso sobre o Método, ele afirmou: “Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Em certos casos, elas são imaginárias”.

Por essa razão, até hoje o número $\sqrt{-1}$ é conhecido como número imaginário, um termo que se consolidou junto à expressão “número complexos”. No entanto, essas denominações podem ser consideradas inadequadas e subjetivas, dado que se referem a conceitos matemáticos rigorosos e bem fundamentados.

Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico nascido em Bolonha, Itália, em 1530, foi o pioneiro a ultrapassar a barreira que impedia a compreensão dos números complexos. Em 1572, no livro *L'Algebra*, na parte *maggiore dell'Arithmetica*, ele trabalhou com a equação do 3º grau $x^3 - 15x - 4 = 0$, aplicou a fórmula de Cardano e encontrou os números $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ que deveriam ser da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente. Após alguns cálculos, Bombelli chegou à conclusão de que $a = 2$ e $b = 1$, avançando, assim, no entendimento dos números complexos.

Após Bombelli, outros matemáticos importantes contribuíram significativamente para o desenvolvimento da teoria dos números complexos. Entre eles, destacam-se o matemático francês Abraham de Moivre, Cauchy e os irmãos Jacques e Jean Bernoulli. No entanto, o trabalho mais profundo e decisivo nessa área foi realizado por Leonhard Euler, cujas contribuições revolucionaram o campo.

Entre as inúmeras contribuições de Leonhard Euler, destaca-se seu empenho em aprimorar a simbologia matemática. Muitas das notações que utilizamos hoje foram introduzidas por ele. Um exemplo notável é a adoção do símbolo i para representar $\sqrt{-1}$.

Euler também aprofundou o estudo dos números da forma $z = x + yi$, onde x e y são números reais e $i^2 = -1$. Esses números, conhecidos como números complexos, revolucionaram a matemática, fornecendo uma ferramenta poderosa para resolver equações e explorar novas áreas, como a análise complexa, a teoria dos polinômios e a física matemática. O trabalho de Euler consolidou o papel dos números complexos como uma parte fundamental da matemática moderna.

1.3 Aplicações dos Complexos

De acordo com (ZWIKKER, 1963), a representação geométrica das operações com números complexos facilita o estudo de funções complexas e o tratamento de impedâncias complexas e admissões em engenharia elétrica. A aplicação dos números complexos na geometria analítica pode apresentar vantagens sobre a geometria cartesiana convencional, especialmente em problemas físicos e técnicos.

A relação entre o estudo dos números complexos e o estudo das cônicas pode ser estabelecida a partir de diversas perspectivas, principalmente geométrica e analítica, que apresentaremos nos próximos parágrafos.

Representação no plano cartesiano: Números complexos podem ser representados geometricamente no plano cartesiano, onde a parte real corresponde ao eixo x e a parte imaginária ao eixo y , formando o plano de Argand-Gauss. De forma semelhante, as cônicas (elipse, parábola e hipérbole) são figuras geométricas que também podem ser descritas no plano cartesiano por meio de equações quadráticas. Essa representação permite que se explorem as propriedades geométricas de ambas as áreas usando ferramentas analíticas e visuais.

Transformações geométricas: Números complexos são úteis na descrição de transformações geométricas, como rotações e translações no plano. Por exemplo, multiplicar um número complexo por outro pode representar uma rotação no plano, o que pode ser aplicado no estudo das cônicas para analisar suas simetrias e rotações.

Equações paramétricas: O uso de números complexos em equações paramétricas permite uma descrição compacta de curvas, incluindo cônicas. Por exemplo, a equação de uma circunferência pode ser parametrizada usando números complexos, facilitando o estudo de suas propriedades.

Análise de focos e diretrizes: As cônicas podem ser descritas por equações focais, que envolvem a distância de um ponto ao foco e à diretriz. O conceito de distância no plano cartesiano, necessário para estudar essas equações, pode ser estendido ao plano complexo, onde o módulo de um número complexo representa a distância de um ponto à origem, ou a outro ponto complexo. A análise de focos e diretrizes serão tratadas com mais detalhes nos Capítulos 5, 6 e 7.

Dessa forma, os números complexos fornecem uma linguagem poderosa para explorar propriedades geométricas e algébricas das cônicas, enriquecendo a compreensão de ambos os tópicos.

1.4 Os Números Complexos e as Cônicas no Ensino Médio

Nesta seção, abordaremos o ensino de números complexos e cônicas no Ensino Médio, tomando como referência as diretrizes curriculares e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Para isso, utilizaremos a dissertação de (OLIVEIRA, 2010) como base para uma análise comparativa com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a fim de compreender como esses conteúdos são ensinados atualmente e identificar possíveis mudanças ou permanências nas abordagens pedagógicas.

Tradicionalmente, os números complexos eram introduzidos no Ensino Médio, geralmente no 3º ano, dentro do campo da matemática que aborda álgebra e números. A abordagem ocorria de forma gradual, conectando esse conteúdo ao que os alunos já haviam estudado, como equações quadráticas e funções polinomiais. No entanto, com a homologação da BNCC em 2018, documento que define o conjunto progressivo de aprendizagens essenciais que os alunos devem desenvolver ao longo das diferentes etapas e modalidades da Educação Básica, o estudo desses números foi excluído, apesar de serem fundamentais para diversos campos da Matemática e outras áreas do conhecimento. As razões para essa ausência não são explicitadas no documento, nem nas versões preliminares que o discutiram. No entanto, essa ausência pode estar relacionada à abordagem predominantemente teórica desse tema nos materiais didáticos, que apresentam os números complexos com definições e propriedades, mas com poucas ou nenhuma referência a aplicações práticas.

Além disso, os aspectos históricos dos números complexos, quando abordados, são geralmente apresentados de maneira superficial, servindo mais como anedotas que biografam matemáticos célebres, como Cardano, Euler e Gauss, que costumam aparecer em destaque. Essas biografias, porém, muitas vezes não estabelecem uma conexão clara entre o desenvolvimento teórico dos números complexos e suas aplicações no mundo contemporâneo.

Dado que, nessa etapa, os alunos estudam também geometria analítica e o plano cartesiano, seria pertinente explorar a conexão entre as operações geométricas com os números complexos e a geometria analítica. Essa abordagem permitiria uma visualização mais concreta das propriedades dos números complexos, contribuindo para o aprendizado de maneira integrada e significativa.

No que se refere às cônicas, a BNCC organiza o ensino de Matemática no Ensino Médio em cinco unidades temáticas, sendo a Geometria uma delas. No entanto, o estudo de cônicas aparece de maneira indireta, geralmente em temas que envolvem Geometria Analítica. De acordo com (ESCOLA, 2025), a abordagem pode ocorrer nas seguintes situações:

- Circunferência: É a cônica mais abordada, especialmente em aplicações da Geometria Analítica, onde seu estudo envolve o cálculo da equação no plano cartesiano.
- Parábola: Frequentemente relaciona a funções quadráticas, aparecendo na Geometria Analítica por meio da representação gráfica dessas funções.
- Elipse e Hipérbole: São abordadas com menor frequência e, em muitos casos, são deixadas de lado, exceto em materiais mais avançados ou voltados para vestibulares.

Uma abordagem mais prática e concreta poderia ser adotada para o ensino das cônicas, de modo a aproximar os alunos da realidade cotidiana. Exemplos como o corte transversal de uma melancia (que resulta em uma elipse) ou a projeção de luz de um abajur (gerando uma hipérbole) poderiam ilustrar como as cônicas são observadas no dia a dia. Essas conexões tornam o aprendizado mais significativo e atraente, pois permitem que os alunos vejam a relevância do que estudam.

Nos livros didáticos, a ênfase recai sobre a circunferência e a parábola, enquanto a elipse e a hipérbole costumam ser tratadas apenas superficialmente. Em muitos casos, a abordagem é mais algébrica (focada nas equações) e gráfica, com pouca exploração dos aspectos geométricos ou das aplicações práticas desses conceitos. Em materiais que seguem estritamente a BNCC, a visibilidade das cônicas tende a ser ainda mais reduzida.

Portanto, é essencial repensar o tratamento dos números complexos no Ensino Médio, dando ênfase a uma abordagem mais concreta. É possível explorar ferramentas tecnológicas, como softwares de geometria dinâmica (por exemplo, GeoGebra), para ilustrar de maneira visual as cônicas e os números complexos, além de mostrar suas aplicações no cotidiano, como em antenas parabólicas, órbitas planetárias e lentes. Essa abordagem mais prática e interdisciplinar se alinha aos objetivos da BNCC de promover um ensino mais conectado à realidade e ao desenvolvimento de competências aplicáveis.

O Plano Complexo

Neste capítulo, apresentaremos os números complexos como uma estrutura geométrica, explorando algumas propriedades, com base nas dissertações de (OLIVEIRA, 2010), (SOUZA, 2014), (PINHEIRO, 2016) e (SANTOS, 2018) e no livro de (ZWIKKER, 1963).

2.1 Introdução

A representação algébrica de um número complexo é da forma:

$$z = x + yi,$$

em que $i^2 = -1$.

Essa representação como um ponto com coordenadas x e y no plano cartesiano, em que, z pode representar o ponto P (Figura 3) ou o vetor da origem até o ponto P é conhecida como forma binomial dos números complexos. Quando conveniente, faremos uso do abuso de notação em que z pode representar o número complexo $x + yi$, o ponto P no plano de Argand-Gauss, ou mesmo o vetor \overrightarrow{OP} . As operações de adição e subtração de dois números complexos na forma geométrica é equivalente às operações de adição ou subtração vetorial, com os vetores denotados por z_1 e z_2 . Os estudantes têm contato com a adição e subtração de vetores em cursos de física, como, por exemplo, em diagramas de força.

Uma curva plana pode ser representada pelas extremidades dos vetores $z = x + yi = f(u)$, em que x e y variam em função de um parâmetro real u . Essa variação gera um conjunto de valores de z que formam uma curva no plano. A equação $z = f(u)$, com $f(u)$ sendo uma função complexa, descreve a curva e pode ser expressa de forma equivalente por uma equação cartesiana $g(x, y) = 0$.

Ao passar de um parâmetro u para outro v , ambos pertencentes ao domínio da função f , a natureza da curva não é alterada; a única mudança geométrica ocorre na escala ao longo da curva.

Essa propriedade é fundamental para a representação de curvas, permitindo flexibilidade sem alterar sua estrutura. Portanto, é possível descrever uma curva por meio de diferentes equações e escolher aquela que melhor se adapta ao problema em estudo em cada caso.

2.2 Representação dos Números Complexos por Pontos no Plano

Os números complexos são representados geometricamente usando um plano cartesiano. O eixo das abscissas é utilizado para representar o conjunto dos números reais $\mathbb{R} = \{x + yi \in \mathbb{C} : y = 0\}$, enquanto que o eixo das ordenadas é usado para representar o conjunto dos números imaginários puros $\mathbb{I} = \{x + yi \in \mathbb{C} : x = 0\}$.

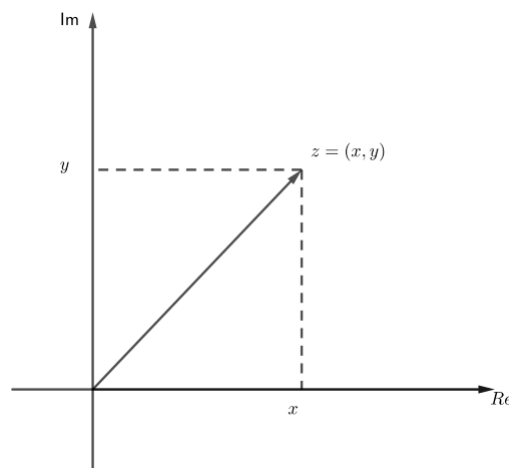


Figura 3 – Representação do Número Complexo z .
Fonte: Própria autora, 2024.

Os números complexos podem ser representados de três formas principais: a forma binomial ($z = x + yi$), já mencionada, a forma polar (ou trigonométrica) ($z = |z|(\cos u + i \operatorname{sen} u)$) e a forma exponencial ($z = |z|e^{iu}$) que serão detalhadas a seguir.

Essas três representações são essenciais porque oferecem diferentes perspectivas para entender e manipular os números complexos, dependendo do contexto matemático ou da operação a ser realizada. Cada forma possui vantagens específicas conforme a aplicação desejada.

Essas variações na representação existem porque os números complexos podem ser vistos tanto como vetores (com magnitude e direção) quanto como pares de números reais (parte real e parte imaginária). Dependendo da operação a ser realizada, como adição, multiplicação, potenciação ou radiciação, uma das formas pode ser mais conveniente que as outras. É comum associar o conjunto

dos complexos \mathbb{C} ao conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ munido das operações

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((a, b), (c, d)) &\mapsto (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bullet : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((a, b), (c, d)) &\mapsto (a, b) \bullet (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

A forma binomial é ideal para a adição e subtração de números complexos. A forma polar simplifica operações de multiplicação e divisão, além de fornecer uma representação geométrica clara. A forma exponencial, por sua vez, é compacta e particularmente poderosa para trabalhar com potências e raízes, sendo amplamente utilizada em equações diferenciais e problemas da Física.

Essas três representações estão profundamente conectadas, sendo diferentes maneiras de expressar uma mesma ideia geométrica no plano complexo.

Definição 2.2.1. *Seja o número complexo $z = x + yi$, o seu conjugado será $\bar{z} = x - yi$.*

Geometricamente, conforme ilustrado na Figura 4, o conjugado de um número complexo z é obtido através de uma reflexão em relação ao eixo real.

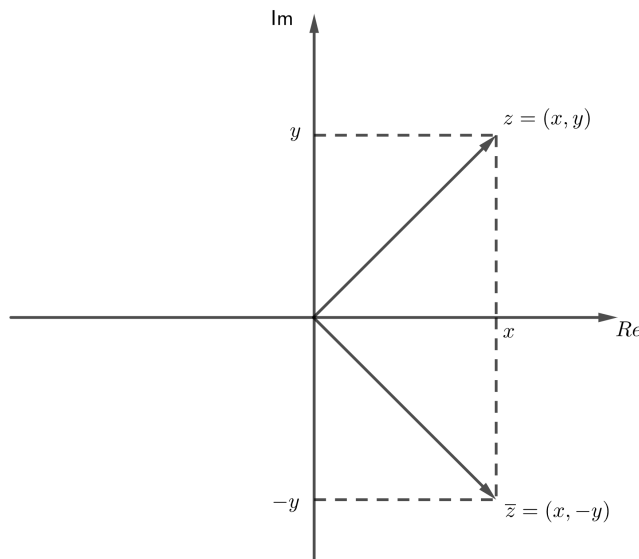


Figura 4 – Representação do Conjugado de z .

Fonte: Própria autora, 2024.

A definição do conjugado de um número complexo introduz o conceito de reflexão em relação ao eixo real. A reflexão nos permite entender propriedades essenciais dos números complexos que surgem ao manipular seus conjugados.

Propriedades 2.2.1. Dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, as seguintes propriedades são válidas:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} + \overline{(-z_2)} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
4. Se $z_2 \neq 0$ e $z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2}$, então $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
5. $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$, em que $\text{Re}(z)$ representa a parte real.
6. $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$, em que $\text{Im}(z)$ representa a parte imaginária.
7. $z = \overline{\bar{z}}$.
8. Se n é natural $\Rightarrow \overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Essas propriedades estão diretamente conectadas à definição do conjugado, pois elas confirmam que o conjugado de um número complexo preserva a simetria geométrica em relação ao eixo real em várias operações e suas demonstrações podem ser encontradas em (HEFEZ; VILLELA, 2018).

2.3 Representação dos Números Complexos por Vetores no Plano

Os números complexos podem ser representados geometricamente por pares ordenados no plano cartesiano xOy , permitindo sua associação a vetores no plano de Argand-Gauss. Dessa forma, um número complexo $z = x + yi$ pode ser representado pelo vetor \overrightarrow{OZ} , onde O é a origem e Z é o ponto correspondente a z .

Definição 2.3.1. Qualquer número complexo, não nulo, pode ser representado na forma polar por:

$$z = |z|(\cos u + i \text{senu}),$$

em que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, u é o argumento (ou o ângulo) de z medido a partir do eixo positivo das abscissas no plano complexo, $\text{senu} = \frac{y}{|z|}$ e $\cos u = \frac{x}{|z|}$.

O argumento do número complexo z , denotado por $\text{Arg}(z)$, é representado pelo ângulo u . É importante destacar que qualquer ângulo da forma $u + 2k\pi$ com k inteiro, também satisfaz a forma polar. Em outras palavras, um número complexo não nulo z possui infinitos argumentos que

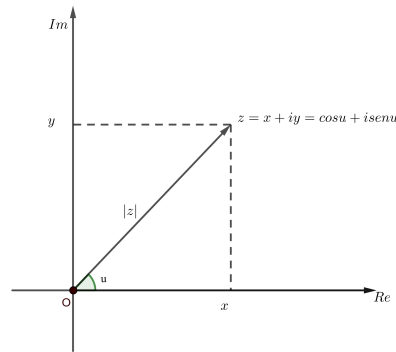


Figura 5 – Representação de z na Forma Polar.
Fonte: Própria autora, 2024.

diferem entre si por múltiplos de 2π . Portanto, o conjunto de todos os argumentos de z é dado por $ARG(z) = \{u + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. No entanto, convencionamos que o argumento principal, $Arg(z)$, seja o único valor de u pertencente ao intervalo $(-\pi, \pi)$.

Dado o número complexo $z = |z|(\cos u + i \operatorname{sen} u)$, seu conjugado é dado por $\bar{z} = |z|(\cos u - i \operatorname{sen} u) = |z|(\cos u + i \operatorname{sen}(-u))$.

Propriedades 2.3.1. *Através das definições de módulo e argumento de um número complexo, é possível identificar algumas outras propriedades importantes desses números, que são fundamentais para interpretações geométricas e as demonstrações podem ser encontrada em (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2011).*

1. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
3. Se $z_2 \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
4. $Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$.
5. $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$.

As Propriedades 2.2.1, que envolvem o comportamento do conjugado de números complexos, e as Propriedades 2.3.1, que lidam com operações fundamentais (como soma e multiplicação) no plano complexo, são fundamentais para compreender e utilizar os números complexos em aplicações geométricas, como na representação de rotações, transformações e na solução de problemas que envolvem coordenadas polares no plano complexo.

Definição 2.3.2 (Fórmula de Euler). *Seja $u \in \mathbb{R}$, definimos:*

$$e^{iu} = \cos u + i \operatorname{sen} u, \quad (2.1)$$

em que e é a base do logaritmo natural e u é um número real (geralmente um ângulo em radianos).

Como consequência dessa definição, a forma exponencial de um número complexo z pode ser expressa por:

$$z = |z| \cdot e^{iu},$$

em que $|z|$ é o módulo de z e u é o argumento de z .

A Equação (2.1), também conhecida como a fórmula de Euler para a identidade complexa, é uma das fórmulas mais importantes na matemática porque mostra como os números complexos, exponenciais e trigonometria estão relacionados. A demonstração desta identidade pode ser encontrada em (PINHEIRO, 2016).

A Fórmula de Euler conecta álgebra e geometria, tornando mais eficiente a resolução de problemas geométricos como rotações, transformações e representações em coordenadas polares, especialmente ao utilizar as Propriedades 2.2.1 e 2.3.1.

Propriedades 2.3.2. *A representação exponencial satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $e^0 = 1$.
2. $e^{iu}e^{iq} = e^{(u+q)i}$.
3. $e^{-iu} = (e^{iu})^{-1}$.
4. $e^{(iu)n} = e^{niu}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

As propriedades acima são consequências diretas das fórmulas de potenciação.

Como consequência da forma exponencial, temos:

Proposição 2.3.1. (Fórmula de Moivre). *Se n é inteiro e $z = |z|(\cos u + i \operatorname{sen} u)$, então $z^n = |z|^n(\cos(nu) + i \operatorname{sen}(nu))$.*

Demonstração. A demonstração desta proposição é consequência direta da Fórmula de Euler e da propriedade 4 da exponencial. □

Quando expressamos um número complexo não nulo na forma exponencial, obtemos a vantagem de simplificar as operações algébricas.

Na próxima seção, apresentaremos a representação geométrica das operações básicas envolvendo os números complexos.

2.4 Representação Geométrica

Nesta seção, exploraremos a interpretação geométrica dos números complexos e abordaremos algumas de suas operações fundamentais. Entenderemos como representá-los no plano complexo e como realizar operações que ampliam nosso entendimento sobre suas propriedades e aplicações.

2.4.1 Interpretação Geométrica

Vamos explorar a interpretação geométrica para \bar{z} , $-z$, z^{-1} e $z \cdot i$. Se $z = x + iy$, então $-z = -x - iy$ e $\bar{z} = x - iy$ representam, respectivamente, a simetria de z em relação à origem e ao eixo real. Multiplicar um número complexo por i corresponde a uma rotação do vetor z de um ângulo de $\pi/2$ no sentido anti-horário ao redor da origem, enquanto multiplicar por $-i$ resulta em uma rotação de $\pi/2$ no sentido horário. E o inverso de z , com $z \neq 0$, é dado por z^{-1} representa uma inversão em relação à circunferência unitária, com ajuste de módulo.

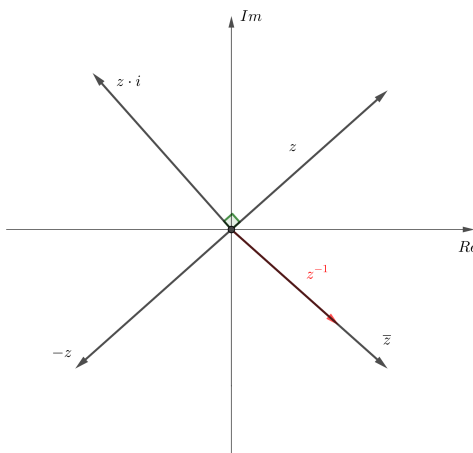


Figura 6 – Interpretação Geométrica para \bar{z} , $-z$, z^{-1} e $z \cdot i$.

Fonte: Própria autora, 2024.

2.4.2 Adição e Subtração

Para representar a soma vetorial de dois números complexos, somamos as suas partes reais e imaginárias respectivamente. O mesmo princípio se aplica à subtração, onde subtraímos as partes reais e imaginárias dos vetores que os representam. A soma, $z_1 + z_2$, de dois vetores z_1 e z_2 é obtida combinando um segmento orientado que representa z_1 com outro que representa z_2 , ambos partindo da origem de z_1 . O vetor resultante $z_1 + z_2$ é representado pelo segmento orientado que vai da origem de z_1 até a extremidade de z_2 . O mesmo princípio se aplica à diferença desses dois vetores.

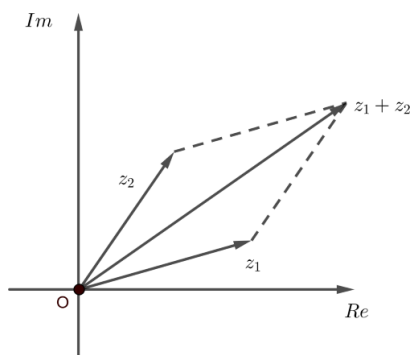


Figura 7 – Soma de dois Complexos.

Fonte: Própria autora, 2024.

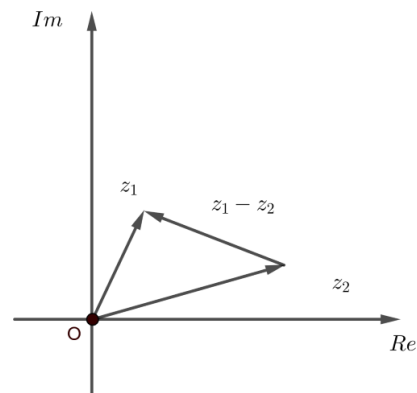


Figura 8 – Subtração de dois Complexos.

Fonte: Própria autora, 2024.

2.4.3 Multiplicação e Divisão

A representação dos números complexos na forma polar facilita os cálculos, sobretudo quando utilizamos a forma exponencial.

Exemplo 2.4.1. Considere dois números complexos z e w , se $z = |z|e^{iu}$ e $w = |w|e^{iv}$, com $|w| > 1$ para reduzir o vetor, e $v > 0$, temos que:

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot e^{i(u+v)} \quad e \quad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot e^{i(u-v)}.$$

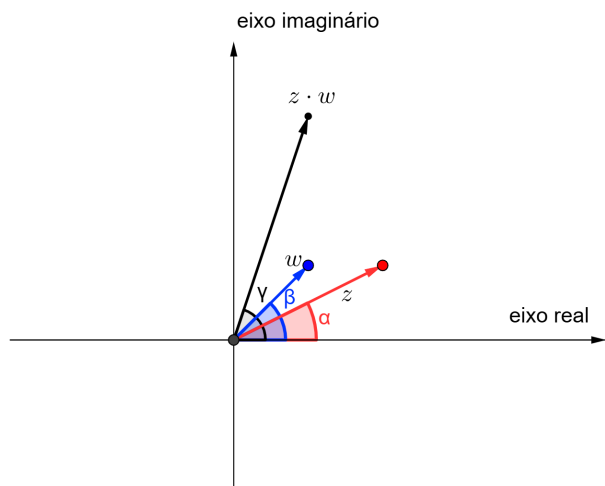


Figura 9 – Multiplicação de dois Complexos.

Fonte: Própria autora, 2024.

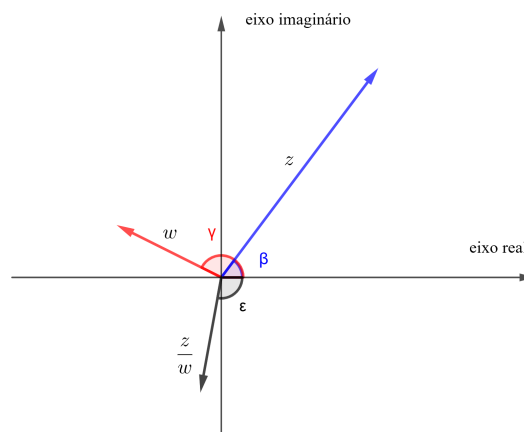


Figura 10 – Divisão de dois Complexos.

Fonte: Própria autora, 2024.

A interpretação geométrica dos resultados acima é ilustrada nas Figuras 9 e 10. O produto $z \cdot w$ consiste de duas transformações: A primeira é uma rotação do vetor w em torno da origem por um ângulo igual ao $\text{Arg}(z)$. A segunda é uma expansão (ou retração) do vetor resultante pelo

módulo de z . E a divisão $z/w = zw^{-1}$ pode ser interpretada como uma rotação e redimensionamento de z em relação a w .

Essas operações na forma exponencial não apenas facilitam os cálculos, como permitem uma interpretação geométrica clara no plano complexo.

2.5 Ângulos entre Números Complexos

Nesta seção, exploraremos a definição formal do ângulo entre dois números complexos e como calcular esse ângulo utilizando o produto interno no plano complexo.

Definição 2.5.1. *Sejam z_1 e z_2 dois números complexos não nulos. O ângulo entre representações vetoriais deles é dado pelo número real:*

$$\theta(z_1, z_2) = \text{Arg} \left(\frac{\frac{z_1}{|z_1|}}{\frac{z_2}{|z_2|}} \right). \quad (2.2)$$

Como consequência dessa definição, se $z_1 = |z_1| e^{\alpha i}$ e $z_2 = |z_2| e^{\beta i}$, então:

$$\theta(z_1, z_2) = \text{Arg} \left(\frac{e^{\alpha i}}{e^{\beta i}} \right) = \text{Arg} (e^{(\alpha-\beta)i}).$$

Observamos que $\theta(z_1, z_2) = -\theta(z_2, z_1)$ é um ângulo orientado. Além disso, $\theta(iz_1, z_1) = \frac{\pi}{2}$, pois $iz_1 = |z_1| \cdot e^{(\alpha+\pi/2)i}$, resultando em

$$\theta(iz_1, z_1) = \text{Arg} \left(\frac{e^{(\alpha+\pi/2)i}}{e^{\alpha i}} \right) = \alpha + \pi/2 - \alpha = \pi/2.$$

Para que dois números complexos z_1 e z_2 não nulos sejam perpendiculares, deve-se ter $z_1 = \lambda \cdot z_2 i$.

A Reta no Plano Complexo

Neste capítulo abordaremos o estudo de alguns elementos algébricos relacionados a uma reta no plano de Argand-Gauss, incluindo sua equação, coeficiente angular (inclinação) e intercepto com eixo imaginário também conhecido como “coeficiente linear”). Essa abordagem está fundamentada nos trabalhos de (FEITOSA, 2013) e (JANUARIO, 2018).

A equação da reta no plano complexo pode ser expressa de várias formas, dependendo do contexto e da informação disponível. Uma forma comum de representar a equação de uma reta que passa por dois pontos distintos é dada pela seguinte proposição:

Proposição 3.0.1. *Sejam z_1 e z_2 pontos distintos no plano complexo. A equação geral da reta que passa por esses dois pontos é dada por:*

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}. \quad (3.1)$$

Nesta equação z é um ponto qualquer da reta, z_1 e z_2 são os pontos que determinam a reta.

Demonstração. Suponha que temos dois pontos distintos z_1 e z_2 no plano complexo. Um ponto z está na reta que passa por z_1 e z_2 se ele é colinear com esses pontos.

Colinearidade aqui significa que o vetor $z - z_1$ é um múltiplo real do vetor $z_2 - z_1$, ou seja, existe um número real u tal que:

$$z - z_1 = u(z_2 - z_1),$$

que representa a equação paramétrica da reta.

A relação acima implica que:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = u.$$

Como $u \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma $\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ é um número real, e podemos escrever:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)} = \frac{\overline{z - z_1}}{\overline{z_2 - z_1}} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1},$$

equivalente a isso temos:

$$(z_2 - z_1)\bar{z} - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z + z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 = 0.$$

Dessa maneira, a equação geral da reta também pode ser escrita como:

$$\bar{B}\bar{z} - Bz + C = 0, \quad (3.2)$$

em que $B = \bar{z}_2 - \bar{z}_1$ e $C = z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2$ e C é um imaginário puro, pois, $\bar{C} = \overline{z\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2} = \bar{z}_1z_2 - z_1\bar{z}_2 = -C$. \square

A Equação (3.2) é uma representação comum para descrever uma reta no plano complexo, em que \bar{B} , B e C determinam os coeficientes que caracterizam a posição e a orientação da reta em relação ao plano complexo.

Para entender a inclinação da reta no plano complexo, podemos relacioná-la à inclinação da reta no plano euclidiano, que é dada por $\operatorname{tg}u$, em que u é o ângulo que a reta faz com o eixo x positivo.

No plano complexo, podemos expressar a inclinação da reta através da diferença entre os pontos z_2 e z_1 . O coeficiente angular m da reta pode ser calculada como:

$$m = \frac{\operatorname{Im}(z_2 - z_1)}{\operatorname{Re}(z_2 - z_1)}. \quad (3.3)$$

De forma geométrica podemos interpretar o resultado da seguinte maneira:

- Se $z_2 - z_1$ é um número complexo real (ou seja, a parte imaginária é zero), a reta é horizontal no plano complexo.
- Se $z_2 - z_1$ é um número complexo imaginário (ou seja, a parte real é zero), a reta é vertical no plano complexo.
- Caso contrário, a inclinação m indica a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo x positivo.

Exemplo 3.0.1. *Sejam $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 3 + 2i$. Vamos calcular a inclinação da reta que passa por esses dois pontos.*

$$z_2 - z_1 = (3 + 2i) - (1 + i) = 2 + i.$$

A parte real é 2 e a parte imaginária é 1. Portanto, $m = \frac{1}{2}$.

Isso indica que a reta tem uma inclinação $1/2$ no plano complexo.

O “coeficiente linear” no contexto de equações de retas em números complexos não é um termo comumente utilizado. No entanto, poderia ser interpretado como o valor de z onde a reta intercepta o eixo complexo, similar ao intercepto y em equações cartesianas. Para determinar onde a reta intercepta o eixo complexo, podemos usar a equação paramétrica da reta.

Exemplo 3.0.2. Sejam $z_1 = 2 + 2i$ e $z_2 = 5 + 4i$.

- *Coefficiente angular:*

$$z_2 - z_1 = (5 + 4i) - (2 + 2i) = 3 + 2i$$

$$m = \frac{\text{Im}(z_2 - z_1)}{\text{Re}(z_2 - z_1)} = \frac{2}{3}$$

- *Intercepto (ou “coeficiente linear”):*

$$z = z_1 + u(z_2 - z_1) = 2 + 2i + u(5 + 4i - 2 - 2i)$$

$$z = 2 + 2i + u(3 + 2i).$$

Para obter o intercepto, $\text{Re}(z) = 0$, então:

$$\text{Re}(z) = 2 + 3u = 0$$

$$\therefore u = -\frac{2}{3}.$$

Logo:

$$z = 2 + 2i - \frac{2}{3}(3 + 2i) = 2i - \frac{4i}{3} = \frac{2i}{3}.$$

Portanto, a equação da reta que passa por $z_1 = 2 + 2i$ e $z_2 = 5 + 4i$ no plano complexo tem um coeficiente angular de $2/3$ e intercepta o eixo complexo no ponto $(0, 2/3)$.

Circunferência no Plano Complexo

Neste capítulo, faremos um estudo sobre a circunferência no plano complexo, com base nas representações e conceitos presentes na literatura, em particular nas abordagens de (ZWIKKER, 1963) e na dissertação de (REIS, 2019).

4.1 Introdução

Utilizando a representação polar dos números complexos no plano de Argand-Gauss, apresentaremos a equação da circunferência e exploraremos suas características geométricas, como o centro e o raio. Adaptando a definição de circunferência conforme apresentada por (IEZZI, 2002), teremos:

Definição 4.1.1. *Dados um ponto z_c no plano complexo e um número real positivo r , chama-se circunferência $C(z_c, r)$ o conjunto dos pontos do plano de Argand-Gauss que estão à distância r de z_c ,*

$$C(z_c, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_c| = r\}.$$

Essa definição permite estender os conceitos do plano cartesiano para o plano complexo, proporcionando uma interpretação mais ampla de objetos geométricos e de suas propriedades em termos de números complexos. Com isso, poderemos investigar relações fundamentais entre ângulos e distâncias na circunferência, incluindo a propriedade do ângulo constante e a propriedade dos segmentos secantes, que envolvem diretamente as posições dos pontos no plano de Argand-Gauss.

4.2 Equações da Circunferência

Nesta seção, apresentaremos as principais fórmulas algébricas que descrevem uma circunferência no plano complexo.

4.2.1 Equação Cartesiana

Para determinar a equação cartesiana da circunferência com centro em z_c e raio r no plano complexo, considerando um centro $z_c = x_0 + iy_0$ e um raio r , podemos proceder da seguinte maneira:

A circunferência com centro z_c e raio r é definida como o conjunto de todos os pontos $z = x + iy$ no plano complexo, para os quais a distância de z a z_c , denotada por $|z - z_c|$, é igual a r .

Para encontrar a equação da circunferência com centro em z_c e raio r , igualamos essa distância a r :

$$\begin{aligned} r^2 &= |z - z_c|^2 \\ &= |(x + iy) - (x_0 + iy_0)|^2 \\ &= |(x - x_0) + i(y - y_0)|^2 \\ &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2. \end{aligned}$$

Portanto, a equação cartesiana da circunferência no plano complexo, com centro em $z_c = x_0 + iy_0$ e raio r , é:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (4.1)$$

Exemplo 4.2.1. Segue de (4.1) que a equação cartesiana da circunferência de centro $z_c = 2 + 3i$ e raio 4 é:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16.$$

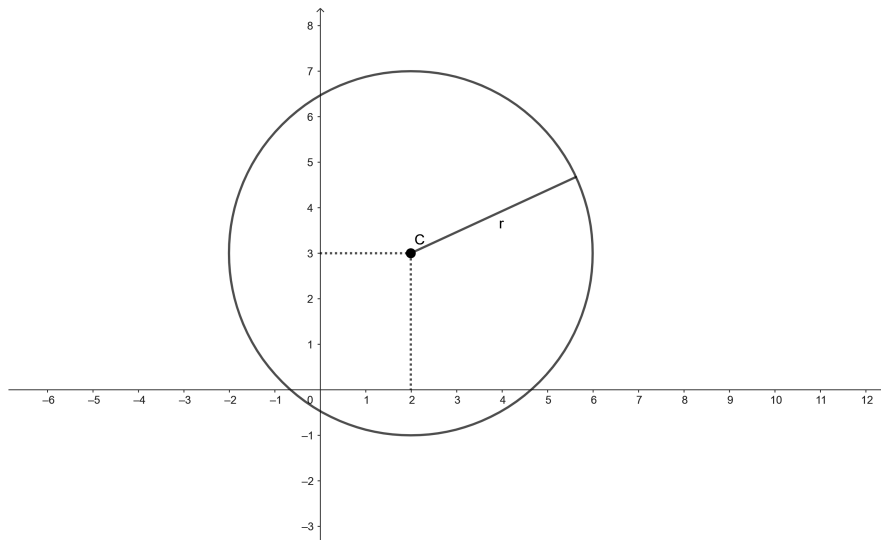


Figura 11 – Exemplo 4.2.1 Circunferência.
Fonte: Própria autora, 2024.

4.2.2 Equação Geral

No plano de Argand-Gauss, a equação geral da circunferência com centro em z_c e raio r pode ser expressa em termos de z e \bar{z} . Utilizamos a Equação (4.1), em que z_c representa o centro e r o raio da circunferência.

$$\begin{aligned} r^2 &= |z - z_c|^2 \\ &= (z - z_c)\overline{(z - z_c)} \\ &= (z - z_c)(\bar{z} - \bar{z}_c) \\ &= z\bar{z} - z\bar{z}_c - z_c\bar{z} + z_c\bar{z}_c. \end{aligned}$$

Portanto, a equação geral é dada por:

$$z\bar{z} - z\bar{z}_c - z_c\bar{z} + z_c\bar{z}_c = r^2. \quad (4.2)$$

Exemplo 4.2.2. Considere uma circunferência com centro $z_c = 3 + 2i$ e raio $r = 5$, vamos encontrar a equação geral da circunferência de acordo com (4.2).

Primeiro, vamos calcular $z_c\bar{z}_c$:

$$z_c\bar{z}_c = (3 + 2i)(3 - 2i) = 13.$$

Em seguida, substituir os valores na Equação (4.2):

$$z\bar{z} - z(3 - 2i) - z(3 + 2i) + 13 = 25.$$

Agora, vamos expandir os termos:

$$z\bar{z} - 3z + 2iz - 3\bar{z} - 2i\bar{z} + 13 = 25.$$

Simplificando a equação:

$$z\bar{z} - 3(z + \bar{z}) + 2i(z - \bar{z}) = 12.$$

Exemplo 4.2.3. Segue da Equação (4.2) que circunferência do Exemplo 4.2.1 é dada por:

$$z\bar{z} - 2(z + \bar{z}) + 3i(z - \bar{z}) = 3.$$

4.2.3 Equação Trigonométrica

A equação trigonométrica da circunferência no plano complexo pode ser expressa de forma geral utilizando uma relação fundamental entre os números complexos, a exponencial e o círculo unitário.

Um ponto z da circunferência de raio r e centro z_c satisfaz à relação $|z - z_c| = r$, ou seja, segue de (2.1) que existe $u \in \mathbb{R}$ tal que $z - z_c = r e^{iu}$. Desse modo, a equação trigonométrica da circunferência é:

$$z = z_c + r e^{iu}. \quad (4.3)$$

Exemplo 4.2.4. *Segue da Equação (4.3) que a circunferência do Exemplo 4.2.1 é dada por:*

$$z = (2 + 3i) + 4 e^{iu}.$$

Conforme u varia de 0 a 2π , o ponto z percorre a circunferência de raio 4 e centro $2 + 3i$.

Embora tenhamos apresentado algumas formas de representar a circunferência no plano complexo, existem outras possíveis. Na próxima subseção, exploraremos uma abordagem alternativa para a equação da circunferência, complementando as representações já discutidas.

4.2.4 Representação Alternativa de uma Circunferência

Para introduzir essa nova equação da circunferência, primeiro demonstramos o seguinte resultado:

Lema 4.2.1 (Propriedade do Ângulo Constante). *Fixados dois pontos A e B em uma circunferência de centro O , para qualquer ponto P da circunferência, fora do arco menor definido por A e B , teremos que o ângulo $\angle APB$ é constante. Reciprocamente, se uma curva satisfaz à propriedade do ângulo constante, então a curva é uma circunferência.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, consideremos a circunferência de raio r e centrada na origem. Sejam três pontos distintos A , B e P pertencentes à circunferência. Suponha que B está sob o eixo real (com argumento zero), A é um ponto fixado, com argumento φ (o ângulo central) e P é um ponto qualquer na circunferência com argumento u (onde u representa o ângulo inscrito α).

Sejam os vetores \vec{AP} e \vec{BP} dados por $\vec{AP} = r \cdot e^{iu} - r \cdot e^{i\varphi} = r(e^{iu} - e^{i\varphi})$ e $\vec{BP} = r \cdot e^{iu} - r = r(e^{iu} - 1)$.

Pela definição dos números complexos, a razão de dois vetores, que é a razão dos números complexos representados por estes vetores, no plano complexo representa o ângulo entre esses vetores por (2.2), ou seja

$$\text{Arg} \left(\frac{\vec{AP}}{\vec{BP}} \right) = \alpha.$$

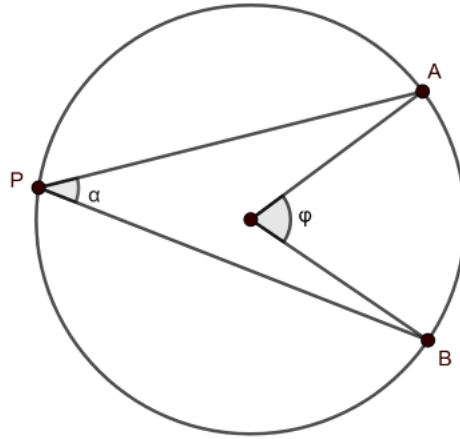


Figura 12 – Ângulo Constante.
Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

De modo que deve haver um fator de proporcionalidade $g(u)$ tal que

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BP}} = \frac{r(e^{iu} - e^{i\varphi})}{r(e^{iu} - 1)} = g(u) \cdot e^{i\alpha}.$$

Podemos escrever a relação como:

$$w = g(u) \cdot e^{i\alpha} = \frac{e^{iu} - e^{i\varphi}}{e^{iu} - 1}.$$

Dividindo a equação pelo conjugado, obtemos:

$$\begin{aligned} w \cdot \bar{w}^{-1} = e^{2i\alpha} &= \frac{e^{iu} - e^{i\varphi}}{e^{iu} - 1} \cdot \left(\frac{e^{iu} - e^{i\varphi}}{e^{iu} - 1} \right)^{-1} \\ &= \frac{\overbrace{e^{iu}}^a - \overbrace{e^{i\varphi}}^b}{e^{iu} - 1} \cdot \frac{e^{-iu} - 1}{e^{-iu} - e^{-i\varphi}} \\ &= \frac{a - b}{a - 1} \cdot \frac{\frac{1}{a} - 1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \\ &= \frac{a - b}{a - 1} \cdot \frac{\frac{1-a}{a}}{\frac{b-a}{ab}} \\ &= \frac{a - b}{a - 1} \cdot \frac{a - 1}{a} \cdot \frac{ab}{a - b} \\ &= b = e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Dessa forma, teremos $e^{2i\alpha} = e^{i\varphi}$, ou seja, $2\alpha = \varphi$.

Portanto, mostramos que o ângulo α é constante e representa metade do ângulo central φ . Ou seja, $\varphi = 2\alpha$.

Reciprocamente, se uma curva satisfaz à propriedade do ângulo constante, fixados A e B , se para todo P , fora do arco menor, temos que $\angle APB$ é constante, então existe ξ_0 tal que

$$\frac{z - z_A}{z - z_B} = r e^{i\xi_0},$$

em que $r > 0$ é o módulo e ξ_0 é o ângulo constante.

Dividindo a última expressão pelo conjugado de $\frac{z - z_A}{z - z_B}$, obtemos:

$$\frac{z - z_A}{z - z_B} \cdot \frac{\overline{z - z_B}}{\overline{z - z_A}} = \frac{r e^{i\xi_0}}{r e^{-i\xi_0}} = e^{2i\xi_0}.$$

Portanto, teremos:

$$(z - z_A) \cdot (\overline{z - z_B}) = e^{2i\xi_0} (\overline{z - z_A}) \cdot (z - z_B),$$

que após expansão e simplificações é uma equação do tipo $az\bar{z} + bz + c\bar{z} + d = 0$, sendo possível concluir que se trata de uma circunferência pelo desenvolvimento apresentado na Proposição 4.2.2 abaixo.

□

Observação 4.2.1. *O Teorema do Ângulo Inscrito na Geometria Plana baseia-se na propriedade do ângulo constante. Seja φ , o ângulo central de uma circunferência e α , o ângulo inscrito submetido pelo mesmo arco. Então, a medida do ângulo central φ é o dobro da medida do ângulo inscrito α . Ou seja,*

$$\varphi = 2\alpha.$$

Com base no Lema 4.2.1, podemos avançar para uma nova representação matemática da circunferência.

Proposição 4.2.1. *Cada uma das curvas representadas pela equação*

$$z = \frac{z_1 + z_2 u}{z_3 + z_4 u}, \tag{4.4}$$

forma uma circunferência.

Demonstração. Suponha que a curva representada pela Equação (4.4) seja representada na Figura 13 que passa pelo ponto $A = \frac{z_1}{z_3}$ quando $u = 0$ e pelo ponto $B = \frac{z_2}{z_4}$ quando $u \rightarrow \infty$. Queremos mostrar

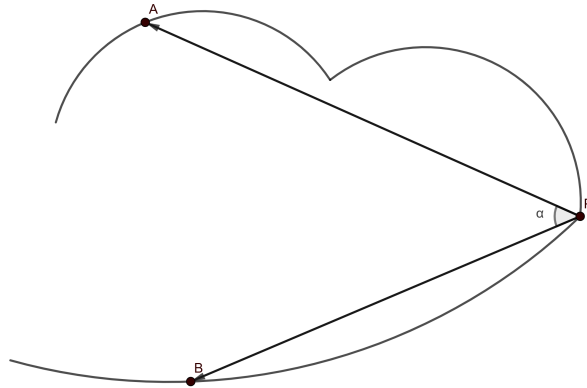


Figura 13 – Curva.
Fonte: Própria autora, 2024.

que essa curva é uma circunferência, para isso, verificaremos que a curva satisfaz à propriedade do ângulo constante.

Seja α o ângulo formado pelos vetores \vec{PA} e \vec{PB} . Seja P um ponto da curva representado pela equação $z = \frac{z_1 + z_2 u}{z_3 + z_4 u}$.

O vetor \vec{PA} é:

$$\begin{aligned} \frac{z_1 + z_2 u}{z_3 + z_4 u} - \frac{z_1}{z_3} &= \frac{z_3 z_1 + z_3 z_2 u - z_1 z_3 - z_1 z_4 u}{z_3(z_3 + z_4 u)} \\ &= \frac{u(z_3 z_2 - z_1 z_4)}{z_3(z_3 + z_4 u)} \\ &= \frac{u}{z_3} \cdot \frac{z_2 z_3 - z_1 z_4}{z_3 + z_4 u}. \end{aligned}$$

O vetor \vec{PB} é:

$$\begin{aligned} \frac{z_1 + z_2 u}{z_3 + z_4 u} - \frac{z_2}{z_4} &= \frac{z_1 z_4 + z_2 z_4 u - z_2 z_3 - z_2 z_4 u}{z_4(z_3 + z_4 u)} \\ &= \frac{z_1 z_4 - z_2 z_3}{z_4(z_3 + z_4 u)} \\ &= -\frac{1}{z_4} \cdot \frac{z_2 z_3 - z_1 z_4}{z_3 + z_4 u}. \end{aligned}$$

De modo que o quociente:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{u}{z_3} \frac{(z_2 z_3 - z_1 z_4)}{(z_3 + z_4 u)} \cdot \frac{(-z_4)(z_3 + z_4 u)}{z_2 z_3 - z_1 z_4} = -\frac{z_4}{z_3} u.$$

Temos que z_3 e z_4 são constantes e u é real, então o argumento desse quociente é constante. Portanto o ângulo α não depende de u , e podemos concluir que P , pelo Lema 4.2.1, descreve uma circunferência, conforme ilustrado na Figura 14. \square

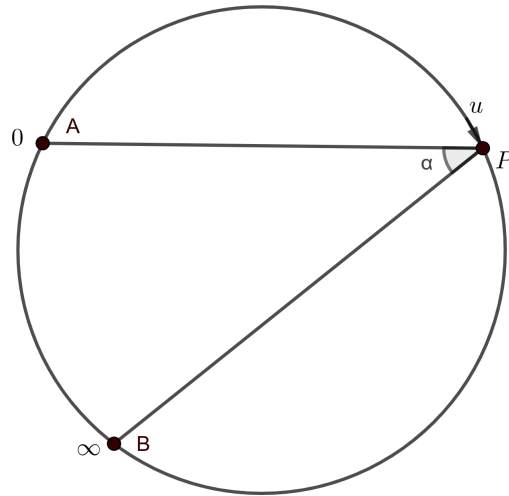


Figura 14 – Circunferência.

Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

Exemplo 4.2.5. Dados os números complexos $z_1 = 1 + 5i$, $z_2 = 3 + 9i$, $z_3 = 1 - i$ e $z_4 = 1 + i$ e com base na Proposição 4.2.1, podemos determinar a equação da circunferência que passa por esses pontos.

Substituindo os valores de z_1 , z_2 , z_3 e z_4 na Equação (4.4), teremos:

$$z = \frac{1 + 5i + (3 + 9i)u}{1 - i + (1 + i)u},$$

como equação da circunferência.

A seguir, apresentaremos um modo de obter o centro e o raio de uma circunferência representada por (4.4).

Proposição 4.2.2. A circunferência representada pela equação $z = \frac{z_1 + z_2 u}{z_3 + z_4 u}$ possui centro $z_c =$

$$\frac{c}{a} = \frac{z_1 \bar{z}_4 - z_2 \bar{z}_3}{z_3 \bar{z}_4 - z_4 \bar{z}_3} \text{ e raio } r = \sqrt{|z_c|^2 - \frac{d}{a}}, \text{ em que } \frac{d}{a} = \frac{z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2}{z_3 \bar{z}_4 - z_4 \bar{z}_3}.$$

Demonstração. Seja a equação:

$$z = \frac{z_1 + z_2 u}{z_3 + z_4 u}.$$

Multiplicando ambos os lados pelo denominador:

$$z(z_3 + z_4 u) = z_1 + z_2 u.$$

Distribuindo:

$$zz_3 + zz_4u = z_1 + z_2u.$$

Agora, isolamos o termo que contém u :

$$zz_3 - z_1 = (z_2 - zz_4)u.$$

Portanto:

$$u = \frac{zz_3 - z_1}{z_2 - zz_4}.$$

Multiplicando ambos os lados por -1 :

$$-u = \frac{zz_3 - z_1}{zz_4 - z_2}.$$

Assim, temos:

$$\frac{zz_3 - z_1}{zz_4 - z_2} = \frac{\overline{zz_3} - \overline{z_1}}{\overline{zz_4} - \overline{z_2}}.$$

Agora, expandimos ambos os lados da equação:

$$(zz_3 - z_1)(\overline{zz_4} - \overline{z_2}) = (zz_4 - z_2)(\overline{zz_3} - \overline{z_1}).$$

Ao calcular os produtos, obtemos:

$$z_3\overline{z_4}.z\overline{z} - z_3\overline{z_2}.z - z_1\overline{z_4}.\overline{z} + z_1\overline{z_2} = z_4\overline{z_3}.z\overline{z} - \overline{z_1}z_4.z - z_2\overline{z_3}.\overline{z} + \overline{z_1}z_2.$$

Subtraindo os termos comuns, resulta:

$$(z_3\overline{z_4} - z_4\overline{z_3})z\overline{z} + (\overline{z_1}z_4 - z_3\overline{z_2})z + (z_2\overline{z_3} - z_1\overline{z_4})\overline{z} + (z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2) = 0.$$

Portanto, a equação final é do tipo:

$$az\overline{z} + bz + c\overline{z} + d = 0, \tag{4.5}$$

em que $a = z_3\overline{z_4} - z_4\overline{z_3}$, $b = \overline{z_1}z_4 - z_3\overline{z_2}$, $c = z_2\overline{z_3} - z_1\overline{z_4}$ e $d = z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2$.

Ao compararmos as Equações (4.5) e (4.2), podemos determinar o centro e o raio da circunferência. Para isso, basta dividir a Equação (4.5) por a , com $a \neq 0$.

$$z_c = \frac{c}{a} = \frac{z_1\overline{z_4} - z_2\overline{z_3}}{z_3\overline{z_4} - z_4\overline{z_3}},$$

$$\frac{d}{a} = |z_c|^2 - r^2,$$

$$r = \sqrt{|z_c|^2 - \frac{d}{a}},$$

$$\text{em que } \frac{d}{a} = \frac{z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2}{z_3\bar{z}_4 - z_4\bar{z}_3}.$$

□

Exemplo 4.2.6. Com os mesmos números complexos do Exemplo 4.2.5 e considerando a Proposição 4.2.2, podemos determinar o centro e o raio da circunferência obtida por esses dados.

Segue da Proposição 4.2.2 que o centro da circunferência é:

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{z_1\bar{z}_4 - z_2\bar{z}_3}{z_3\bar{z}_4 - z_4\bar{z}_3} = \frac{(1+5i)(1-i) - (3+9i)(1+i)}{(1-i)(1-i) - (1+i)(1+i)} \\ &= \frac{1-i+5i+5 - (3+3i+9i-9)}{1-2i-1 - (1+2i-1)} = \frac{12i+8}{-4i} \cdot \frac{(i)}{(i)} = \frac{12i+8}{4} = 2+3i. \end{aligned}$$

Para calcular o raio da circunferência, precisamos primeiramente calcular $\frac{d}{a}$ utilizando a Proposição 4.2.2:

$$\begin{aligned} \frac{d}{a} &= \frac{z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2}{z_3\bar{z}_4 - z_4\bar{z}_3} = \frac{(1+5i)(3+9i) - (1-5i)(3+9i)}{(1-i)(1+i) - (1+i)(1+i)} \\ &= \frac{(3-9i+15i+45) - (3+9i-15i+45)}{-4i} = \frac{12i}{-4i} = -3. \end{aligned}$$

Com d/a encontrado, podemos calcular o raio da circunferência. O raio r é dado por:

$$r = \sqrt{|z_c|^2 - \frac{d}{a}} = \sqrt{|2+3i|^2 + 3} = \sqrt{4+9+3} = \sqrt{16} = 4.$$

Portanto a circunferência possui raio $r = 4$ e centro $z_c = 2 + 3i$.

Os valores do centro e do raio obtidos por esse método são idênticos aos encontrados no Exemplo 4.2.1. Essa coincidência demonstra que, mesmo que a circunferência possa ser representada por métodos diferentes, os resultados para o centro e o raio permanecem os mesmos. Essa consistência reforça a validade das diferentes abordagens, mostrando que todas conduzem à mesma solução correta.

Os próximos exemplos exploram uma transformação adicional, na qual uma circunferência descrita por uma expressão algébrica geral que pode ser convertida para uma forma exponencial, permitindo uma análise mais simplificada.

Esses exemplos, portanto, não apenas aplicam as fórmulas, mas também destacam a versatilidade das representações de circunferências no contexto dos números complexos.

Exemplo 4.2.7. Uma circunferência representada pela fórmula geral (4.4) pode ser reduzida à forma exponencial por meio de alguma mudança no parâmetro u .

Por exemplo, considerando a circunferência dada por:

$$z = \frac{1}{1 - iu},$$

multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador para simplificar:

$$z = \frac{1}{1 - iu} \cdot \frac{1 + iu}{1 + iu} = \frac{1 + iu}{1 + u^2} = \frac{1}{1 + u^2} + i \frac{u}{1 + u^2}.$$

Aplicamos a transformação do parâmetro $u = \operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}\right)$ e utilizamos as identidades trigonométricas $\sec^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta$, $\operatorname{sen}2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$ e $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos\theta}{2}$, para reescrever a expressão acima na forma exponencial, teremos:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\underbrace{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{v}{2}\right)}_{\sec^2\left(\frac{v}{2}\right)}} + i \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}\right)}{\underbrace{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{v}{2}\right)}_{\sec^2\left(\frac{v}{2}\right)}} \\ &= \frac{1}{\sec^2\left(\frac{v}{2}\right)} + i \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{v}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sec^2\left(\frac{v}{2}\right)} + i \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sec^2\left(\frac{v}{2}\right)} \\ &= \cos^2\left(\frac{v}{2}\right) + i \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{v}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{v}{2}\right) + i \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{v}{2}\right)}{\cos\left(\frac{v}{2}\right)} \cdot \cos^2\left(\frac{v}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{v}{2}\right) + i \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{v}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{v}{2}\right)}_{\frac{1}{2} \operatorname{sen}v} \\ &= \underbrace{\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)}_{\frac{1 + \cos v}{2}} + i \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \operatorname{sen}v \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\cos v}{2} + \frac{i}{2} \cdot \operatorname{sen}v \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos v + i \operatorname{sen}v) = \frac{1}{2} (1 + e^{iv}). \end{aligned}$$

É uma circunferência de raio $r = \frac{1}{2}$ e centro $z_c = \frac{1}{2}$.

Exemplo 4.2.8. Reciprocamente, quando temos uma circunferência na forma trigonométrica podemos representá-la através da forma (4.4).

Considerando a circunferência $z = \cos v + i \operatorname{sen} v$, teremos:

$$\begin{aligned} z &= \cos v + i \operatorname{sen} v \\ &= \left(2 \cos^2 \left(\frac{v}{2} \right) - 1 \right) + i \cdot 2 \operatorname{sen} \left(\frac{v}{2} \right) \cos \left(\frac{v}{2} \right). \end{aligned}$$

Na última equação fizemos uso das identidades do arco metade. Definindo $\cos \left(\frac{v}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ e $\operatorname{sen} \left(\frac{v}{2} \right) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, obtemos:

$$\begin{aligned} z &= \left(2 \cos^2 \left(\frac{v}{2} \right) - 1 \right) + i \cdot 2 \operatorname{sen} \left(\frac{v}{2} \right) \cos \left(\frac{v}{2} \right) \\ &= \frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2iu}{1+u^2} = \frac{1+2iu-u^2}{1+u^2} \\ &= \frac{(1+iu)^2}{(1+iu)(1-iu)} = \frac{1+iu}{1-iu}. \end{aligned}$$

Portanto teremos: $z = \frac{1+iu}{1-iu}$.

Para finalizar, podemos acrescentar um resultado complementar para a circunferência.

Teorema 4.2.1 (Segmentos secantes ou potência constante). *Em qualquer circunferência, quando traçamos dois segmentos secantes, partindo de um mesmo ponto externo, o produto da medida de um dos segmentos pela medida de sua parte externa é igual ao produto correspondente da medida do outro segmento pela medida de sua parte externa, sendo uma constante.*

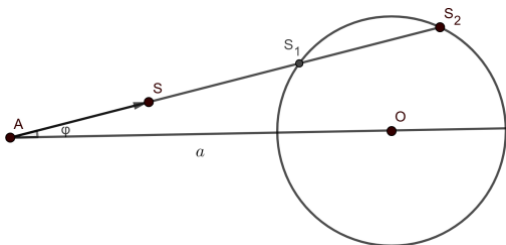


Figura 15 – Segmentos Secantes Passando pelo Centro.
Fonte: Própria autora, 2024.

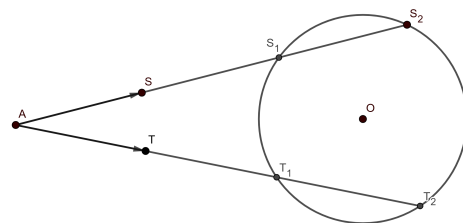


Figura 16 – Segmentos Secantes.
Fonte: Própria autora, 2024.

Demonstração. Sem perda de generalidade, selecione um ponto A fixo no eixo real negativo a uma distância a , do centro O , conforme a Figura 15. Considere a secante que passa por A e pelo centro O e outra secante que passa pelos pontos S_1 e S_2 . Seja $z(s) = -a + s \cdot e^{i\varphi}$ a equação da segunda secante, com φ fixo, desde que esta reta corta o círculo em $z(u) = r \cdot e^{iu}$, com r fixo.

Para encontrar as interseções dessas retas com a circunferência, igualamos as equações da secante e da circunferência:

$$-a + s \cdot e^{i\varphi} = r \cdot e^{iu}.$$

Multiplicando ambos os lados pelos conjugados, obtemos:

$$(-a + s e^{i\varphi}) \cdot (-a + s e^{-i\varphi}) = (r \cdot e^{iu}) \cdot (r \cdot e^{-iu}).$$

Portanto

$$a^2 - a \cdot s \cdot e^{-i\varphi} - a \cdot s \cdot e^{i\varphi} + s^2 = r^2,$$

$$s^2 - 2 \cdot a \cdot s \cdot \cos\varphi + a^2 = r^2,$$

$$s^2 - 2 \cdot a \cdot s \cdot \cos\varphi + a^2 - r^2 = 0.$$

Assim, chegamos a uma equação quadrática em s . Resolvendo a equação, encontramos as distâncias s_1 e s_2 , que correspondem às medidas dos segmentos $\overline{AS_1}$ e $\overline{AS_2}$.

Pelas relações de Girard, temos:

- $s_1 \cdot s_2 = a^2 - r^2$.
- $s_1 + s_2 = 2 \cdot a \cdot \cos\varphi$.

Portanto, o produto $s_1 \cdot s_2$ entre as medidas dos segmentos não depende do ângulo φ , sendo portanto, constante, ou seja, $\overline{AS_1} \cdot \overline{AS_2} = k$, em que k é uma constante. Traçando outro segmento secante à circunferência partindo do ponto A cortando a circunferência nos pontos T_1 e T_2 (veja a Figura 16) e comparando-o com a reta \overleftrightarrow{AO} . De maneira análoga, concluímos que o produto entre a medida dos segmentos não depende do ângulo entre esses segmentos, sendo constante e igual a k . Com esta informação obtemos:

$$\overline{AS_1} \cdot \overline{AS_2} = \overline{AT_1} \cdot \overline{AT_2} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{AS_1}}{\overline{AT_1}} = \frac{\overline{AT_2}}{\overline{AS_2}},$$

que é uma das relações métricas fundamentais em uma circunferência. □

Observação 4.2.2. *O Teorema das Cordas é um resultado da geometria euclidiana que relaciona as medidas de cordas que se intersectam em um círculo. Um desenvolvimento análogo ao da demonstração do Teorema 4.2.1 pode ser utilizado para obter este resultado.*

Parábola

Neste capítulo iremos nos basear em (ZWIKKER, 1963) e nas dissertações de (SANTOS, 2018) e de (SILVA, 2018), introduzindo a definição de Parábola como sendo uma curva na geometria cartesiana.

5.1 Introdução

A parábola é uma curva importante em geometria e aparece em diversas áreas como Física e Engenharia. Ela pode ser definida como o conjunto de pontos que estão à mesma distância de um ponto fixo, chamado de foco, e de uma reta fixa, chamada diretriz. Nesta seção, apresentaremos a definição formal da parábola e suas principais propriedades.

Definição 5.1.1. *A parábola de foco F e reta diretriz d é o conjunto de todos os pontos P do plano cuja distância até F é igual à distância até d .*

$$P(F, d) = \{P : \text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d)\}.$$

Os principais elementos da parábola estão ilustrados na Figura 17: Foco (F); Diretriz (d) e Vértice (V). Além disso, a figura apresenta o eixo de simetria que é a reta \overleftrightarrow{VF} , dividindo a parábola em duas partes simétricas.

Agora obteremos a equação da parábola com vértice na origem e diretriz dada por $x = -p$, em sua equação cartesiana, ou $w = -p + iup$, na forma paramétrica, em que p denota a distância de V a F e u representa o parâmetro. Seja P representado por $z = x + yi$, segue da Definição 5.1.1 que a equação da parábola pode ser expressa da seguinte forma:

$$\underbrace{x + p}_{\text{dist}(P,d)} = \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\text{dist}(P,F)}.$$

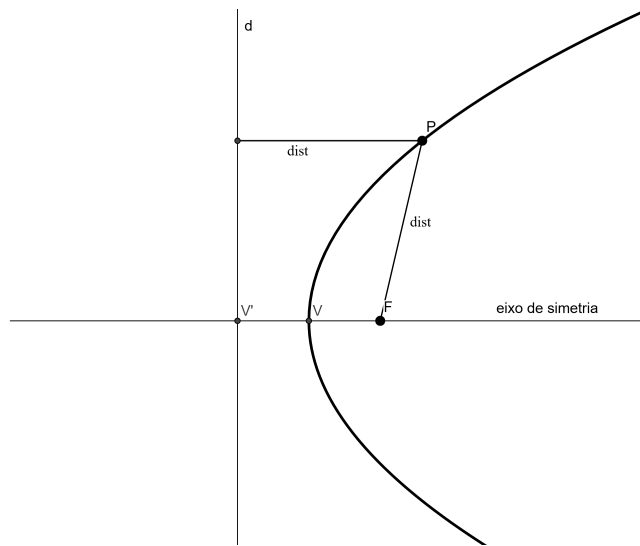


Figura 17 – Parábola.
Fonte: Própria autora, 2024.

Substituindo $y = p \cdot u$ e elevando a equação $x + p = \sqrt{x^2 + y^2}$ ao quadrado, temos:

$$(x + p)^2 = \left(\sqrt{x^2 + p^2 u^2} \right)^2.$$

Resolvendo os quadrados e isolando x , obtemos:

$$x = \frac{p}{2} \cdot (u^2 - 1). \quad (5.1)$$

Agora, escrevendo a Equação (5.1) na forma complexa, temos:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \frac{p}{2} \cdot (u^2 - 1) + ipu \\ &= \frac{p}{2} \cdot (u^2 + 2ipu - 1). \end{aligned}$$

Portanto, a equação da parábola na forma complexa é dada por:

$$z = \frac{p}{2} \cdot (u + i)^2. \quad (5.2)$$

5.2 Lei da Reflexão na Parábola

O objetivo desta seção é apresentar a Lei da Reflexão na Parábola. Essa propriedade descreve que qualquer raio de luz emitido a partir do foco de uma parábola, ao refletir em sua superfície,

forma ângulos iguais com a reta tangente à parábola no ponto de reflexão. Essa característica é fundamental em aplicações práticas, como no design de antenas parabólicas e espelhos refletores, e será formalizada e detalhada no teorema a seguir.

Teorema 5.2.1 (Lei da Reflexão). *Sejam s a reta tangente em P , r a reta perpendicular à diretriz em P e \overline{FP} o raio focal. Então os ângulos entre r e s e entre s e o raio focal são iguais.*

O Teorema 5.2.1 será demonstrado com o auxílio de alguns lemas que serão enunciados e demonstrados a seguir, sempre baseados nas Figuras 18, 19 e 20.

Lema 5.2.1. *Seja z' a direção tangente em P , marcando o vetor $-iz'$ em P , a sua extremidade final é um ponto R no eixo real.*

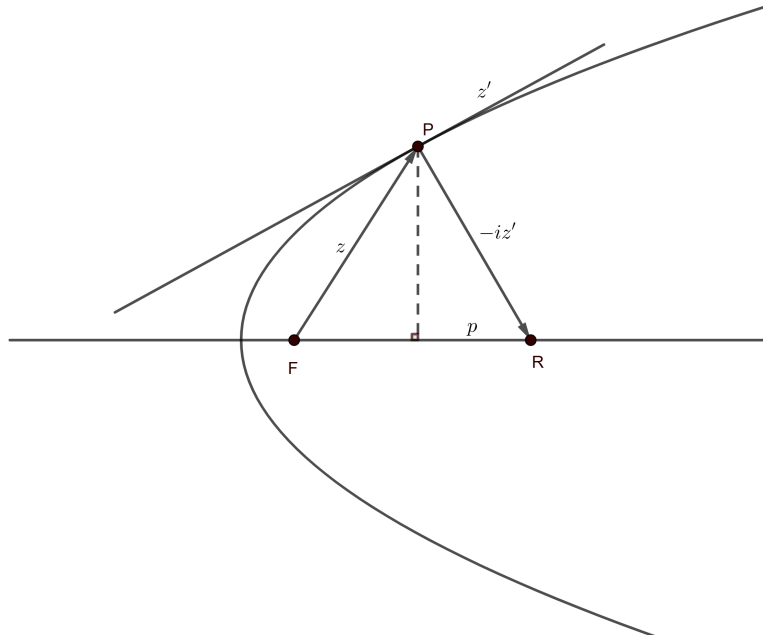


Figura 18 – Reta Tangente a Parábola.
Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

Demonstração. De acordo com o enunciado do Lema e a Figura 18, desejamos verificar que o ponto R está no eixo real. Para isso, vamos calcular $z - iz'$, em que $z' = p(u + i)$. Dessa forma, temos:

$$z - iz' = \frac{1}{2}p(u + i)^2 - ip(u + i) = \frac{1}{2}p(u^2 + 1), \quad (5.3)$$

mostrando que o vetor resultante é real, ou seja, R é um ponto do eixo real. \square

Lema 5.2.2. *Seja R dado pelo Lema 5.2.1, então a distância de R até a projeção de z no eixo real é constante e igual p .*

Demonstração. De acordo com a Equação (5.1), $Re(z) = \frac{1}{2}p(u^2 + 1)$. Portanto:

$$\frac{1}{2}p(u^2 + 1) - \frac{1}{2}p(u^2 - 1) = \frac{1}{2}pu^2 + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}pu^2 + \frac{1}{2}p = p, \quad (5.4)$$

verificando o resultado. \square

Lema 5.2.3. *Seja P , o ponto final do vetor z . Então a reta que passa por \overleftrightarrow{PF} intersecta a parábola em um ponto Q , cuja reta tangente é ortogonal à reta tangente em P , conforme ilustrado na Figura 19.*

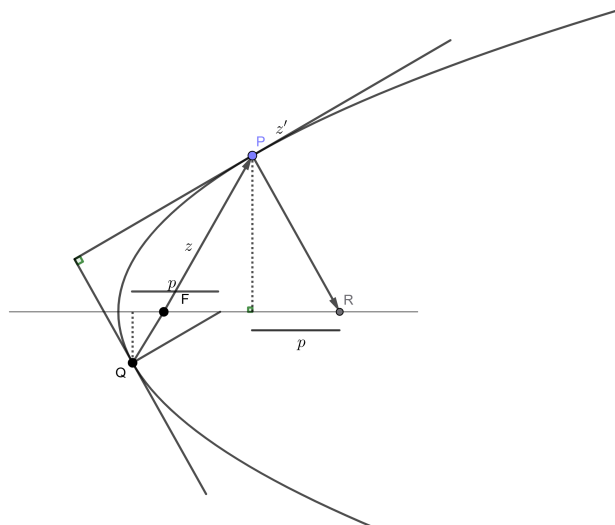


Figura 19 – Ângulos Reto na Parábola.
Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

Demonstração. De

$$z' = p(u + i) = p\sqrt{(u + i)^2} = \sqrt{2}\sqrt{p}\sqrt{\frac{p}{2}(u + i)^2} = \sqrt{2p}\sqrt{z},$$

concluimos que

$$z' = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{z}. \quad (5.5)$$

Segue da Equação (5.5), que a inclinação da reta tangente é metade da inclinação do vetor z , pois $2\text{Arg}(z') = \text{Arg}(z)$. Ou seja, ao multiplicarmos o vetor z por $-i$, estaremos rotacionando z num ângulo de $\frac{\pi}{2}$, enquanto a tangente em P roda a metade. Desse modo, uma outra multiplicação por $-i$ nos conduz à um rotação total de π , pois estamos na direção de $\overrightarrow{FQ} = z'$, ao mesmo tempo que rotaciona a tangente em P de $\frac{\pi}{2}$. O que verifica que o ângulo entre as tangentes em P e Q é igual $\frac{\pi}{2}$, demonstrando o resultado. \square

Combinando os Lemas 5.2.1, 5.2.2 e 5.2.3 demonstraremos o Teorema 5.2.1.

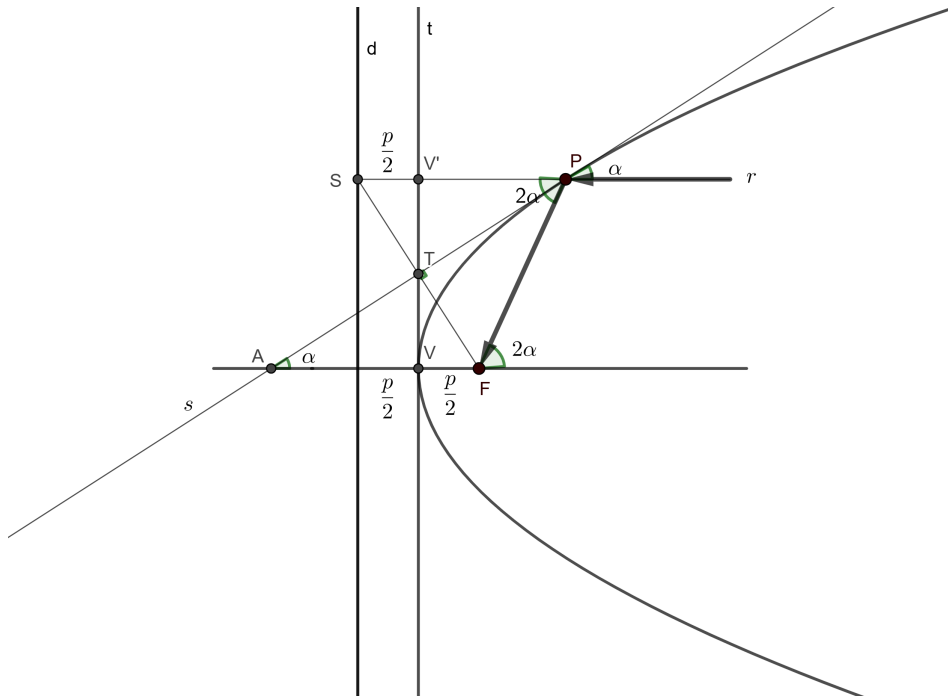


Figura 20 – Reflexão na Parábola.
Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

Demonstração. Seja S a interseção entre as retas r e d , α o ângulo entre r e s , iremos concluir que o ângulo entre a reta s e o raio focal é α . A reta t é tangente ao vértice, d a reta diretriz e a reta r é paralela ao eixo real.

Da definição de parábola $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, S)$, temos que o triângulo SPF é isósceles de base \overline{SF} e os ângulos $\angle S$ e $\angle F$ são congruentes. Assim, os triângulos SPT e FPT são congruentes pelo caso LAL . Também observamos que os triângulos $TV'S$ e $TV'F$ são congruentes pelo caso LAA_o , pois $\overline{SV'} = \overline{VF'} = p/2$, $\angle V = \angle V' = 90^\circ$, $\angle ATF = \angle STP$ (ângulos opostos pelo vértice). Dessa forma, pela relação de proporcionalidade entre triângulos, temos $\overline{ST} = \overline{TF}$.

O ângulo α é oposto pelo vértice ao ângulo $\angle SPT$, portanto $\angle SPT = \alpha$. E como o triângulo SPF é isósceles, então \overline{PT} é mediana, altura e bissetriz relativas ao lado \overline{SF} . Logo $\angle TPF$ também é igual a α .

Portanto, concluímos que os ângulos entre r e s e entre s e o raio focal são iguais. \square

5.3 Retas Paralelas e Ponto Médio

Nesse seção, o principal objetivo é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 5.3.1. *O conjunto de cordas com extremidades em pontos de parâmetros $u + q$ e $u - q$, traçadas a partir de uma parábola, constitui um conjunto de retas paralelas. O conjunto dos pontos*

médios dessas cordas descreve uma reta paralela ao eixo de simetria da parábola.

O Teorema será demonstrado através do lema a seguir, fundamentado na Figura 21.

Lema 5.3.1. *Dados a corda que conecta os pontos de parâmetros $u + q$ e $u - q$ e as retas tangentes a esses pontos. Sejam M o ponto médio da corda e S a interseção das tangentes, então os pontos M e S são representados pelos complexos*

$$z_M = \frac{1}{2}p[(u+i)^2 + q^2] \quad e \quad z_S = \frac{1}{2}p(u+q+i)^2 - pq(u+q+i),$$

respectivamente. Além disso, o ponto z_M está localizado em uma reta que passa por P e é paralela ao eixo de simetria da parábola.

Demonstração. Sejam z_1 e z_2 os pontos relativos aos parâmetros $u + q$ e $u - q$, respectivamente, dados por:

$$z_1 = \frac{1}{2}p(u+q+i)^2 \quad e \quad z_2 = \frac{1}{2}p(u-q+i)^2,$$

de modo que o ponto médio z_M será:

$$\begin{aligned} z_M &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}p(u+q+i)^2 + \frac{1}{2}p(u-q+i)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}p(u^2 + q^2 - 1 + 2uq + 2ui + 2iq) + \frac{1}{2}p(u^2 + q^2 - 1 - 2uq + 2ui - 2iq) \right] \\ &= \frac{1}{2}p[u^2 + q^2 - 1 + 2ui] \\ &= \frac{1}{2}p[(u+i)^2 + q^2]. \end{aligned}$$

Para encontrar z_S , usamos parâmetros de escalas uniformes s_1 e s_2 ao longo das retas tangentes aos pontos z_1 e z_2 . Esses parâmetros medem distâncias lineares ao longo das tangentes, permitindo expressar a posição de qualquer ponto sobre essas retas em função de s_1 e s_2 . Desde que z_S é o ponto de interseção das tangentes, temos:

$$z_S = \frac{1}{2}p(u+q+i)^2 - s_1(u+q+i) = \frac{1}{2}p(u-q+i)^2 + s_2(u-q+i).$$

Separando as partes reais das partes imaginárias obtemos duas equações em s_1 e s_2 , formamos o seguinte sistema:

$$\frac{1}{2}p(u+q+i)^2 - s_1(u+q+i) = \frac{1}{2}p(u-q+i)^2 + s_2(u-q+i),$$

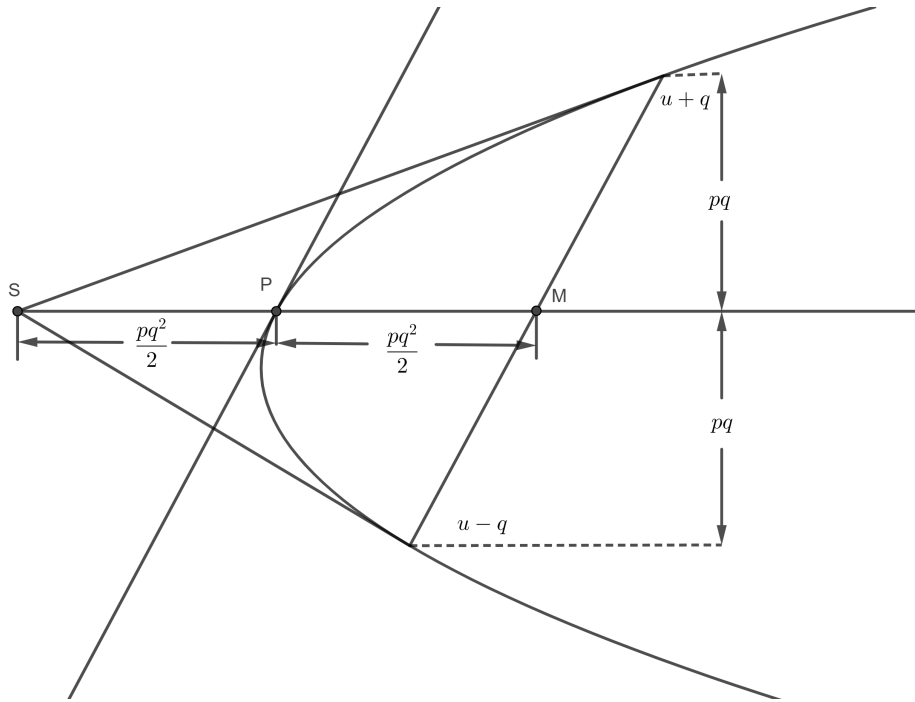


Figura 21 – Ponto Médio da Parábola.
Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

$$\begin{aligned}
 2puq + 2pqi - s_1u - s_1q - s_1i &= s_2u - s_2q + s_2i, \\
 \begin{cases} 2puq - u(s_1 + s_2) = q(-s_2 + s_1) \\ 2pq - s_1 = s_2 \end{cases} &. \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de Equações (5.6), obtemos:

$$s_1 = s_2 = pq. \quad (5.7)$$

Substituindo os valores dados por (5.7) em z_S , temos:

$$\begin{aligned}
 z_S &= \frac{1}{2}p(u + q + i)^2 - pq(u + q + i) \\
 &= \frac{1}{2}p[(u + i)^2 - q^2] \\
 &= \frac{1}{2}p[(u + i) - q][(u + i) + q] \\
 &= \sqrt{\frac{p}{2}} \cdot [(u + i) - q] \cdot \sqrt{\frac{p}{2}} \cdot [(u + i) + q] \\
 &= \sqrt{z(u + q) \cdot z(u - q)}.
 \end{aligned}$$

Agora, verificaremos a afirmação que os pontos z_M estão em uma reta horizontal por $P(u)$, paralela ao eixo de simetria da parábola. Segue da Equação (5.2) que a equação da reta horizontal por $P(u)$ é

$$z = \frac{1}{2}p(u + i)^2 + s.$$

Tomando $s = \frac{pq^2}{2}$, verificamos que z_M pertence à semirreta por P para cada q . \square

Demonstração do Teorema 5.3.1. Demonstraremos que as cordas por $u - q$ e $u + q$ são paralelas. As cordas $u - q$ para $u + q$ possuem direção dada por:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= \frac{1}{2}p(u + q + 1)^2 - \frac{1}{2}p(u - q + 1)^2 \\ &= \frac{1}{2}p(u^2 + q^2 - 1 + 2uq + 2ui + 2iq) - \frac{1}{2}p(u^2 + q^2 - 1 - 2uq + 2ui - 2iq) \\ &= 2puq + 2piq = 2pq(u + i). \end{aligned}$$

A última expressão mostra que o vetor de $u - q$ a $u + q$ possui direção dada por um múltiplo de $u + i$, sendo, portanto, independente de q .

De acordo com o Lema 5.3.1, fixado u , observamos que para cada q , z_M pertence à semirreta por P , a qual é paralela ao eixo de simetria da parábola. O que demonstra o Teorema 5.3.1. \square

Exemplo 5.3.1 (Aplicação da Lei da Reflexão nas Parábolas). *A Lei da Reflexão nas Parábolas pode ser observada no funcionamento dos faróis de um carro. O refletor do farol tem formato parabólico, e a lâmpada é posicionada exatamente no foco da parábola. Quando a lâmpada emite luz, os raios que incidem no refletor são refletidos paralelamente ao eixo da parábola, conforme a Lei da Reflexão. Esse princípio garante que a luz seja projetada em um feixe direcional e uniforme, aumentando a eficiência da iluminação na estrada.*

Elipse

Neste capítulo iremos nos basear nas dissertações de (SILVA, 2018) e de (SANTOS, 2018) e no livro de (ZWIKKER, 1963) para introduzir a definição de Elipse como uma curva na geometria cartesiana representada pela fórmula reduzida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

6.1 Introdução

A elipse é uma das seções cônicas mais importantes na geometria, com diversas aplicações em áreas como Astronomia, Física e Engenharia. Uma das formas mais comuns de defini-la é por meio das distâncias a dois pontos fixos, conhecidos como focos. A característica fundamental da elipse é que, para qualquer ponto sobre a curva, a soma das distâncias desse ponto aos dois focos é sempre constante. Esta propriedade geométrica simples, mas poderosa, é a base para a definição formal da elipse, que será apresentada a seguir.

Definição 6.1.1. *A elipse de focos F_1 e F_2 e eixo maior $2a > \text{dist}(F_1, F_2)$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a $2a$.*

$$E(F_1, F_2, 2a) = \{P : \text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a\}.$$

De acordo com a Figura 22, os elementos da elipse são descritos da seguinte forma:

- Focos (F_1 e F_2): sendo a distância entre os focos dada por $\overline{F_1F_2} = 2c$.
- Centro (C): é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$.
- Eixo maior ($\overline{A_1A_2}$): Segmento que passa pelos focos e pelos pontos mais afastados da elipse, com comprimento $2a$.

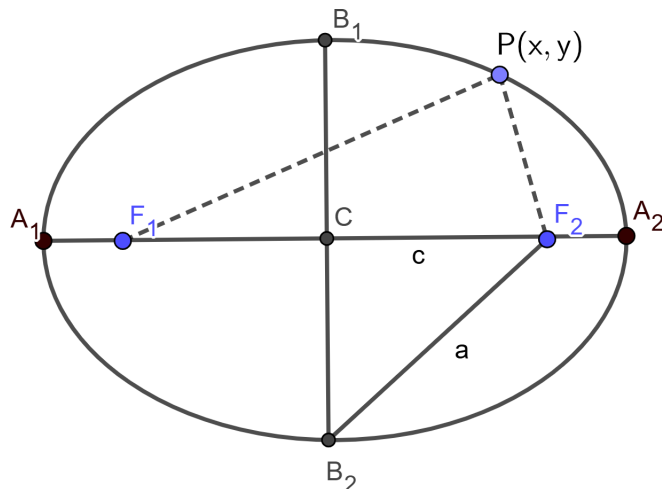


Figura 22 – Elipse.
Fonte: Própria autora, 2024.

- Eixo menor ($\overline{B_1B_2}$): Segmento perpendicular ao eixo maior e que passa pelo centro da elipse, com comprimento $2b$. A relação entre a , b e c é dada por $a^2 = b^2 + c^2$.
- Excentricidade (e): Medida que indica o grau de achatamento da elipse, calculada por $e = c/a$. Quanto mais próximo de 1 for o valor de e , mais achatada será a elipse.

Esses elementos descrevem geometricamente elipse e sua relação com os focos, os eixos e a excentricidade.

Considere agora uma elipse com centro C na origem $(0, 0)$, os focos estão localizados em $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ ao longo do eixo x . Partindo da Definição 6.1.1, após alguns cálculos e simplificações, obtemos que a equação da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

em que, a é o semieixo maior, e b é o semieixo menor.

A demonstração dessa equação pode ser encontrada em (REIS, 2019).

Para encontrar a equação paramétrica da elipse, recorreremos à Figura 23, que mostra a elipse tangente a dois círculos, um de raio a e outro de raio b , os quais são chamados de círculos principal e auxiliar, respectivamente. Imagine um ponto que se desloca ao longo dos círculos. Esse ponto é determinado pelo parâmetro u , que representa o ângulo que esse ponto forma com o eixo principal da elipse (ou eixo horizontal). Esse ângulo u é o mesmo para os dois círculos.

Ao caminhar pelo círculo principal de raio a , a posição do ponto em relação ao eixo horizontal pode ser descrita como $a \cos u$, ou seja, o valor da coordenada x da elipse será baseado no raio a e no ângulo u . No círculo auxiliar, de raio b , a posição vertical do ponto será dada por $b \sin u$,

que representa a coordenada y . Com isso, podemos escrever a posição de qualquer ponto na elipse usando coordenadas x e y de forma paramétrica:

$$x = a \cos u \quad \text{e} \quad y = b \operatorname{senu}.$$

Assim, temos:

$$z = a \cos u + ib \operatorname{senu}. \quad (6.1)$$

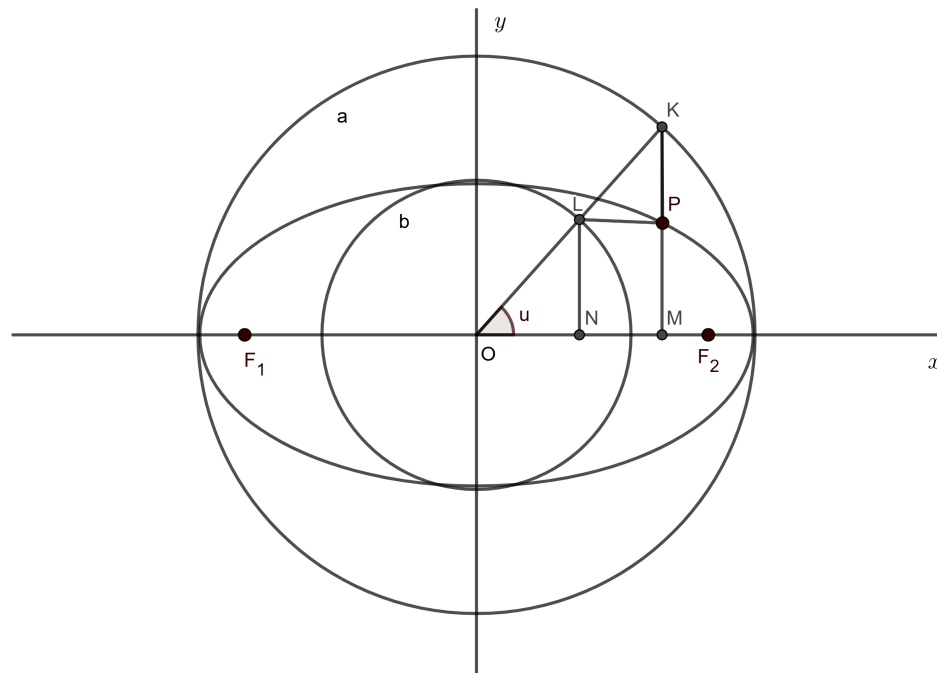


Figura 23 – Construção para Auxiliar na Parametrização da Elipse.
Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

No exemplo a seguir, apresentaremos uma heurística que permite deduzir que a área da elipse é b/a vezes a área da circunferência. As explicações dos detalhes técnicos podem ser encontradas nos livros de Cálculo.

Exemplo 6.1.1 (Área da Elipse). *A equação é obtida reduzindo todas as partes imaginárias da circunferência de raio a , pelo fator b/a .*

Seja, $z = a \cos u + ia \operatorname{senu}$, a equação de uma circunferência de raio a , reduzindo a ordenada de b/a , obtemos: $z = a \cos u + ib \operatorname{senu}$, que corresponde a equação da elipse.

Desde que a área da circunferência de raio a é $A_c = \pi \cdot a^2$, esta redução de b/a na ordenada da circunferência, implica em uma redução na mesma proporção na área A_e , resultando em:

$$A_e = \frac{b}{a} A_c = \frac{b}{a} \cdot \pi \cdot a^2 = \pi ab,$$

em que A_e é a área da elipse.

O Exemplo 6.1.1 fornece uma visão geométrica da elipse e sua área, enquanto a Proposição que será apresentada a seguir, oferece uma forma alternativa de representá-la com a forma exponencial.

Proposição 6.1.1. *A elipse representada por (6.1) admite uma representação na forma exponencial, dada por:*

$$z = \frac{a+b}{2} e^{iu} + \frac{a-b}{2} e^{-iu}. \quad (6.2)$$

Demonstração. Para converter da forma trigonométrica para a forma exponencial, aplicamos a fórmula de Euler para expressar $\cos u$ e $\sin u$ em termos de exponenciais complexas. A partir das identidades:

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u \quad \text{e} \quad e^{-iu} = \cos u - i \sin u,$$

segue que a soma das equações acima resulta em $\cos u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}$, enquanto a subtração nos dá $\sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$. Substituindo essas expressões na equação da elipse, obtemos:

$$\begin{aligned} z &= a \cos u + ib \sin u \\ &= a \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} + bi \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i} \\ &= \frac{a+b}{2} e^{iu} + \frac{a-b}{2} e^{-iu}. \end{aligned}$$

Esta conversão ilustra a equivalência entre a representação na forma trigonométrica e na forma exponencial da elipse. \square

6.2 Diâmetros Conjugados

Nesta seção, analisaremos a relação entre os pontos da elipse com parâmetros $u \pm q$ e os diâmetros conjugados. Essa relação colabora com a compreensão de simetrias e propriedades geométricas da elipse, como ilustrado na Figura 24. A partir dessa análise, exploraremos as implicações dessas propriedades na forma e nas aplicações da elipse.

Teorema 6.2.1. *Sejam $z(u+q)$ e $z(u-q)$, representados, respectivamente, por z_1 e z_2 pontos da elipse e M o ponto médio da corda determinada por esses pontos. O ponto médio M é denotado por:*

$$z_M = \left[\frac{a+b}{2} e^{iu} + \frac{a-b}{2} e^{-iu} \right] \cdot \cos q. \quad (6.3)$$

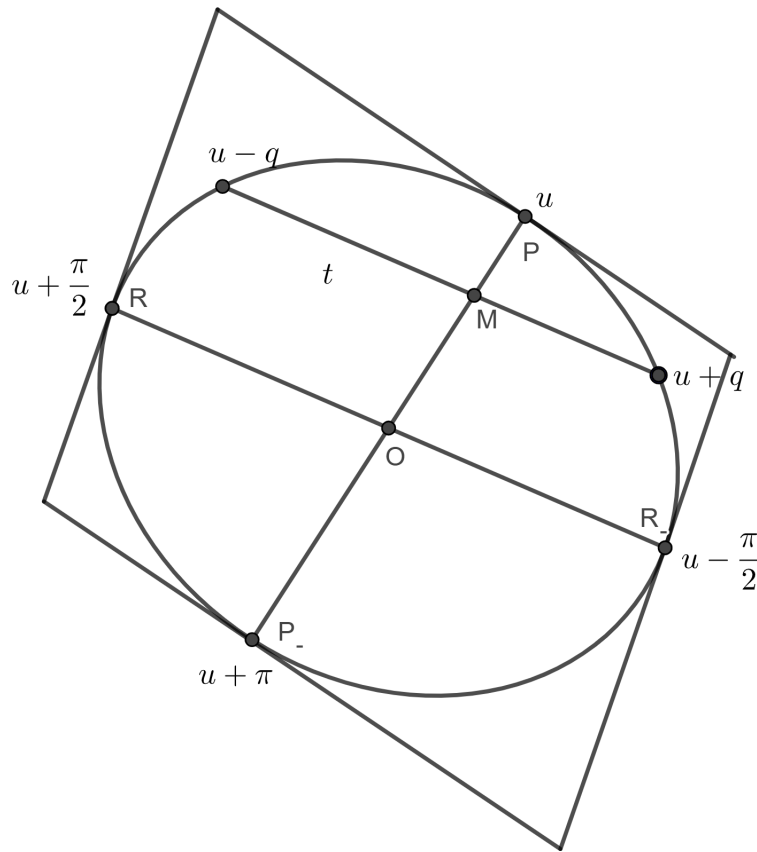


Figura 24 – Corda e Ponto Médio.
Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

Demonstração. Na Figura 24, temos a corda t conectando os pontos $z(u+q)$ e $z(u-q)$ e o ponto médio, M , dessa corda. Utilizando as identidades trigonométricas $\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ e $\operatorname{cos} \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, podemos aplicar $\theta = u+q$ e $\theta = u-q$ para obtermos as expressões desejadas, detalharemos o processo a seguir.

Utilizando a equação da elipse para o parâmetro $u+q$ e a Equação (6.2), obtemos:

$$z_1 = \frac{a+b}{2} e^{i(u+q)} + \frac{a-b}{2} e^{-i(u+q)}. \quad (6.4)$$

Com o parâmetro $u-q$, teremos:

$$z_2 = \frac{a+b}{2} e^{i(u-q)} + \frac{a-b}{2} e^{-i(u-q)}. \quad (6.5)$$

Dessa forma o ponto médio será:

$$\begin{aligned} z_M &= \frac{z_1 + z_2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{a+b}{2} e^{i(u+q)} + \frac{a-b}{2} e^{-i(u+q)} + \frac{a+b}{2} e^{i(u-q)} + \frac{a-b}{2} e^{-i(u-q)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\frac{a+b}{2} e^{iu} e^{iq} + \frac{a-b}{2} e^{-iu} e^{-iq} + \frac{a+b}{2} e^{iu} e^{-iq} + \frac{a-b}{2} e^{-iu} e^{iq} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{a+b}{2} e^{iu} (e^{iq} + e^{-iq}) + \frac{a-b}{2} e^{-iu} (e^{iq} + e^{-iq}) \right] \\
&= \left[\frac{a+b}{2} e^{iu} + \frac{a-b}{2} e^{-iu} \right] \underbrace{\left[\frac{e^{iq} + e^{-iq}}{2} \right]}_{\cos q}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$z_M = \left[\frac{a+b}{2} e^{iu} + \frac{a-b}{2} e^{-iu} \right] \cdot \cos q,$$

demonstrando o Teorema. □

Corolário 6.2.1. *Todas as cordas $u + q$ e $u - q$ são paralelas entre si, quaisquer que sejam q .*

Demonstração. Consideremos a expressão $z(u + q) - z(u - q)$ que representa a direção da reta por esses pontos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} [z(u + q) - z(u - q)] &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a+b}{2} e^{i(u+q)} + \frac{a-b}{2} e^{-i(u+q)} - \left[\frac{a+b}{2} e^{i(u-q)} + \frac{a-b}{2} e^{-i(u-q)} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a+b}{2} e^{iu} e^{iq} + \frac{a-b}{2} e^{-iu} e^{-iq} - \left[\frac{a+b}{2} e^{iu} e^{-iq} + \frac{a-b}{2} e^{-iu} e^{iq} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{a+b}{2} e^{iu} (e^{iq} - e^{-iq}) - \frac{a-b}{2} e^{-iu} (e^{iq} - e^{-iq}) \right] \\
&= \left[\frac{a+b}{2} e^{iu} - \frac{a-b}{2} e^{-iu} \right] \underbrace{\left[\frac{e^{iq} - e^{-iq}}{2} \right]}_{i \operatorname{sen} q} \\
&= \left[\frac{a+b}{2} e^{iu} - \frac{a-b}{2} e^{-iu} \right] \cdot i \operatorname{sen} q.
\end{aligned}$$

Verificando que a direção das cordas independe de q e, além disso, cada corda é paralela à $z' = i \cdot \left[\frac{a+b}{2} e^{iu} - \frac{a-b}{2} e^{-iu} \right]$, demonstrando o resultado. □

Observação 6.2.1. *O segmento \overline{OP} , onde O é o centro da elipse e P é um ponto qualquer sobre a curva, é o lugar geométrico dos pontos médios de um conjunto de cordas paralelas. Todas as retas que passam pelo centro da elipse são diâmetros. Sendo que o maior diâmetro da elipse é seu eixo maior.*

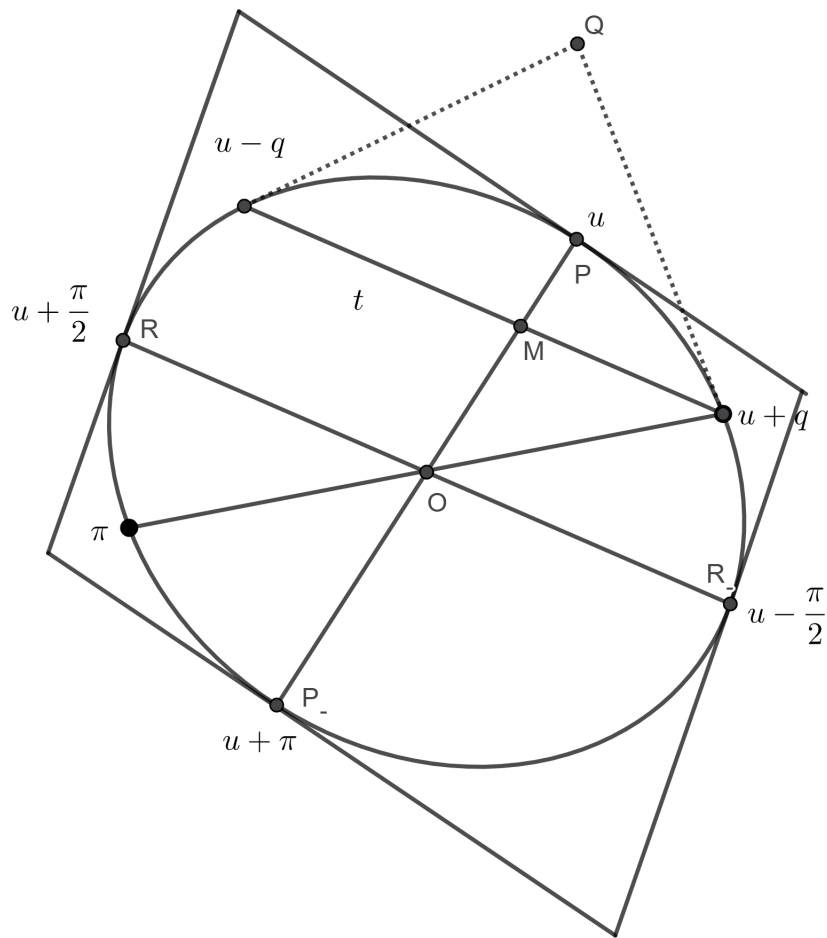


Figura 25 – Diâmetro Conjugado.
 Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

Teorema 6.2.2. *Seja Q o ponto de interseção das retas tangentes aos pontos $u + q$ e $u - q$. Então:*

$$z_Q = \frac{1}{\cos q} (a \cos u + ib \operatorname{senu}) \quad (6.6)$$

é a interseção entre z_1 e z_2 .

Demonstração. Consideremos duas tangentes à elipse nos pontos $u + q$ e $u - q$. Usando escalas de parâmetros uniformes v_1 e v_2 nas tangentes, as equações dessas retas podem ser escritas como:

$$z_1 = z(u + q) + z'(u + q) \cdot v_1$$

$$z_2 = z(u - q) + z'(u - q) \cdot v_2$$

Igualando z_1 e z_2 encontramos o ponto de interseção Q dessas duas retas:

$$\begin{aligned}
 & a \cos(u + q) + ib \operatorname{sen}(u + q) - a \operatorname{sen}(u + q) \cdot v_1 + ib \cos(u + q) \cdot v_1 \\
 & \quad \quad \quad || \\
 & a \cos(u - q) + ib \operatorname{sen}(u - q) - a \operatorname{sen}(u - q) \cdot v_2 + ib \cos(u - q) \cdot v_2
 \end{aligned}$$

Da igualdade das partes reais e imaginárias, obtemos as seguintes equações:

$$a \cos(u + q) - a \operatorname{sen}(u + q) \cdot v_1 = a \cos(u - q) - a \operatorname{sen}(u - q) \cdot v_2,$$

Assim

$$-\operatorname{sen}(u + q) \cdot v_1 + \operatorname{sen}(u - q) \cdot v_2 = 2 \operatorname{sen}u \cdot \operatorname{sen}q.$$

$$ib \operatorname{sen}(u + q) + ib \cos(u + q) \cdot v_1 = ib \operatorname{sen}(u - q) + ib \cos(u - q) \cdot v_2,$$

Desta forma

$$\cos(u + q) \cdot v_1 - \cos(u - q) \cdot v_2 = -2 \operatorname{sen}q \cdot \operatorname{cos}u.$$

Essas duas equações formam o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases}
 -\operatorname{sen}(u + q) \cdot v_1 + \operatorname{sen}(u - q) \cdot v_2 = 2 \operatorname{sen}u \cdot \operatorname{sen}q \\
 \cos(u + q) \cdot v_1 - \cos(u - q) \cdot v_2 = -2 \operatorname{sen}q \cdot \operatorname{cos}u
 \end{cases} \quad (6.7)$$

Para resolver o sistema e encontrar v_1 , multiplicamos a primeira equação por $\cos(u - q)$, e a segunda por $\operatorname{sen}(u - q)$. Somando as duas equações resultantes, obtemos:

$$\underbrace{\operatorname{sen}(u + q - u + q)}_{\operatorname{sen}(2q)} \cdot v_1 = -2 \operatorname{sen}q \underbrace{[\operatorname{sen}u \cdot \cos(u - q) - \operatorname{sen}(u - q) \cdot \operatorname{cos}u]}_{\operatorname{sen}(u - u + q)}.$$

Isso resulta em:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(2q) \cdot v_1 &= -2 \operatorname{sen}q \cdot \operatorname{sen}q \\
 2 \operatorname{sen}q \cdot \operatorname{cos}q \cdot v_1 &= -2 \operatorname{sen}q \cdot \operatorname{sen}q.
 \end{aligned}$$

Portanto:

$$v_1 = -\frac{\operatorname{sen}q}{\operatorname{cos}q} = -\operatorname{tg}q.$$

Agora, resolvendo o sistema para encontrar v_2 , multiplicamos a primeira equação por $\cos(u + q)$, e a segunda por $\operatorname{sen}(u + q)$. Somando as duas equações resultantes, obtemos:

$$\underbrace{\operatorname{sen}(u + q - u + q)}_{\operatorname{sen}(2q)} \cdot v_2 = 2 \operatorname{sen}q \underbrace{[\operatorname{sen}u \cdot \cos(u - q) - \operatorname{sen}(u - q) \cdot \operatorname{cos}u]}_{\operatorname{sen}(u - u + q)}.$$

Isso resulta em:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2q) \cdot v_2 &= 2 \operatorname{sen}q \cdot \operatorname{sen}q \\ 2 \operatorname{sen}q \cdot \operatorname{cos}q \cdot v_2 &= 2 \operatorname{sen}q \cdot \operatorname{sen}q.\end{aligned}$$

Portanto:

$$v_2 = \frac{\operatorname{sen}q}{\operatorname{cos}q} = \operatorname{tg}q.$$

Concluimos que, ao resolver o Sistema (6.7), os parâmetros v_1 e v_2 são dados por:

$$-v_1 = v_2 = \operatorname{tg}q.$$

Dessa forma, teremos:

$$\begin{aligned}z_Q &= a \operatorname{cos}(u + q) + ib \operatorname{sen}(u + q) + (-\operatorname{tg}q) \cdot [-a \operatorname{sen}(u + q) + ib \operatorname{cos}(u + q)] \\ &= a \operatorname{cos}(u + q) + ib \operatorname{sen}(u + q) + a \operatorname{sen}(u + q) \cdot \operatorname{tg}q - ib \operatorname{cos}(u + q) \cdot \operatorname{tg}q \\ &= a [a \operatorname{cos}(u + q) + \operatorname{sen}(u + q) \cdot \operatorname{tg}q] + ib [\operatorname{sen}(u + q) - \operatorname{cos}(u + q) \cdot \operatorname{tg}q] \\ &= a \left[a \operatorname{cos}(u + q) + \operatorname{sen}(u + q) \cdot \frac{\operatorname{sen}q}{\operatorname{cos}q} \right] + ib \left[\operatorname{sen}(u + q) - \operatorname{cos}(u + q) \cdot \frac{\operatorname{sen}q}{\operatorname{cos}q} \right] \\ &= \frac{1}{\operatorname{cos}q} \{ a [\operatorname{cos}(u + q) \cdot \operatorname{cos}q + \operatorname{sen}(u + q) \cdot \operatorname{sen}q] + ib [\operatorname{sen}(u + q) \cdot \operatorname{cos}q - \operatorname{cos}(u + q) \cdot \operatorname{sen}q] \} \\ &= \frac{1}{\operatorname{cos}q} (a \operatorname{cos}u + ib \operatorname{sen}u).\end{aligned}$$

O ponto Q , assim como o M , pertence a reta \overleftrightarrow{OP} . Essas retas contém todos os pontos médios da corda t e também os extremos de todas as cordas que têm q como distância entre seus extremos. \square

Observação 6.2.2. Podemos observar também que $z_Q \cdot z_M = z_P^2$, pois:

$$\begin{aligned}z_Q \cdot z_M &= \left[\frac{a+b}{2} e^{iu} + \frac{a-b}{2} e^{-iu} \right] \operatorname{cos}q \cdot \frac{1}{\operatorname{cos}q} (a \operatorname{cos}u + ib \operatorname{sen}u) \\ &= (a \operatorname{cos}u + ib \operatorname{sen}u)^2 \\ &= z_P^2\end{aligned}$$

A relação anterior estabelece uma analogia com a propriedade das potências de um ponto em relação a uma circunferência.

Observação 6.2.3. Para as cordas descritas na Equação (6.6) quando $q = \pi/2$, o ponto M coincide com a origem, e a corda correspondente se torna diâmetro com as extremidades R e R_- , em que:

$$\begin{aligned} u(R) &= u(P) + \frac{\pi}{2} \\ u(R_-) &= u(P) - \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

sendo $u(R)$ é valor do parâmetro u no ponto R .

Esse diâmetro, com extremidades R e R_- , é chamado de diâmetro conjugado ao diâmetro P e P_- . Além disso, o diâmetro conjugado de R e R_- é precisamente P e P_- . Isso ocorre porque, das equações acima, as extremidades desse segundo diâmetro possuem parâmetros u e $u + \pi$, o que corresponde aos pontos P e P_- . Dessa forma, estabelece-se uma relação de conjugação entre os diâmetros.

Conforme ilustrado na Figura 25, se um paralelogramo circunscrito à elipse toca a curva nos extremos de dois diâmetros conjugados, esses diâmetros são paralelos aos lados do paralelogramo. Essa propriedade geométrica destaca a conexão entre as relações analíticas dos diâmetros conjugados e a simetria presente na elipse e suas tangentes.

6.3 Os Focos

Nesta seção, vamos explorar a importância dos focos na elipse, que são elementos essenciais para a sua definição e propriedades geométricas.

Os dois focos da elipse estão localizados nos pontos situados no maior eixo, a uma distância $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ do centro. A excentricidade $e = c/a$ é definida como a razão entre c e a ; ela é zero se a elipse se degenera em uma circunferência (quando $a = b$).

Proposição 6.3.1. As equações que descrevem os vetores z_1 e z_2 , que representam os raios focais da elipse com centro na origem, são simétricas, e a soma dos módulos desses vetores é dada por $|z_1| + |z_2| = 2a$.

Demonstração. Sejam z_1 e z_2 os vetores que representam os raios focais F_1P e F_2P , respectivamente. Para escrever a equação da elipse com um dos focos como origem, devemos adicionar ou subtrair o valor real $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ aos valores de z dados por (6.1) ou (6.2).

$$\begin{aligned} z_1 &= a \cos u + ib \operatorname{senu} + c. \\ z_2 &= a \cos u + ib \operatorname{senu} - c. \end{aligned}$$

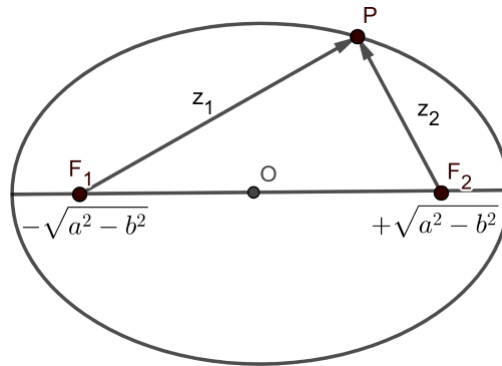


Figura 26 – Focos.

Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

Ou:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{a+b}{2} e^{iu} + \frac{a-b}{2} e^{-iu} + \sqrt{a^2 - b^2}. \\ z_2 &= \frac{a+b}{2} e^{iu} + \frac{a-b}{2} e^{-iu} - \sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

A Equação (6.8) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{a+b}{2} e^{iu} + \frac{a-b}{2} e^{-iu} + \sqrt{a^2 - b^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[(a+b) e^{iu} + 2\sqrt{a^2 - b^2} + (a-b) e^{-iu} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{a+b} e^{\frac{iu}{2}} + \sqrt{a-b} e^{\frac{-iu}{2}} \right]^2. \end{aligned}$$

E de maneira análoga para z_2 :

$$z_2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a+b} e^{\frac{iu}{2}} - \sqrt{a-b} e^{\frac{-iu}{2}} \right]^2.$$

Quando calculamos $|z_1|$, obtemos:

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{z_1 \cdot \bar{z}_1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{a+b} e^{\frac{iu}{2}} + \sqrt{a-b} e^{\frac{-iu}{2}} \right]^2 \cdot \frac{1}{2} \left[\sqrt{a+b} e^{\frac{-iu}{2}} + \sqrt{a-b} e^{\frac{iu}{2}} \right]^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\sqrt{a+b} e^{\frac{iu}{2}} + \sqrt{a-b} e^{-\frac{iu}{2}} \right] \cdot \left[\sqrt{a+b} e^{-\frac{iu}{2}} + \sqrt{a-b} e^{\frac{iu}{2}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[a+b + \sqrt{a^2-b^2} e^{iu} + \sqrt{a^2-b^2} e^{-iu} + a-b \right] \\
&= a + \underbrace{\sqrt{a^2-b^2}}_c \underbrace{\left(\frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} \right)}_{\cos u} \\
&= a + c \cos u.
\end{aligned}$$

E analogamente, encontramos: $|z_2| = a - c \cos u$.

As equações anteriores são simétricas, em que a simetria é evidenciada pela presença dos mesmos termos, a e $c \cos u$, mas com sinais opostos em relação a $c \cos u$. Isso reflete a simetria geométrica da elipse: à medida que o ponto P se move ao longo da elipse, uma das distâncias dos focos (por exemplo $|z_1|$) aumenta enquanto a outra (por exemplo $|z_2|$) diminui, mantendo a soma $|z_1| + |z_2|$ constante e igual $2a$. \square

Essa propriedade é empregada na construção do jardineiro ou de cordão, conforme representado na Figura 27.

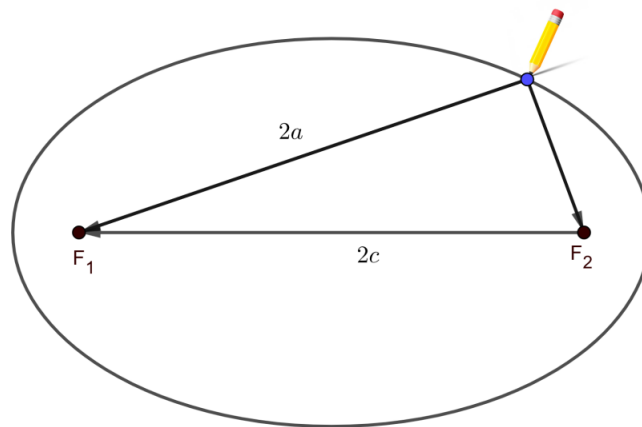


Figura 27 – Construção do Jardineiro.
Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

A ideia é fixar as extremidades de uma corda de comprimento $2a$ nos pontos fixos F_1 e F_2 , e, mantendo-a esticada pelo lápis, desenhar uma elipse.

Proposição 6.3.2. *Seja uma elipse de semieixo maior a , semieixo menor b e distância focal c (distância do centro a cada foco). Então, vale a seguinte relação $a^2 = b^2 + c^2$ entre esses parâmetros.*

Esse valor b^2/a é conhecido como o parâmetro p da elipse. Ele representa a distância do foco à elipse ao longo de uma linha perpendicular ao eixo maior (ou seja, paralela ao eixo menor).

A excentricidade e e o parâmetro p são suficientes para descrever completamente o tamanho e a forma da elipse. Isso porque:

- A excentricidade e indica o quão afastada a elipse está de ser uma circunferência. Quanto maior e , mais alongada é a elipse. Quando e se aproxima de 1, a elipse perde sua curvatura característica e se degenera em uma linha reta, marcando o limite entre uma elipse e uma parábola.
- O parâmetro $p = \frac{b^2}{a}$ descreve a relação entre o semieixo maior a e o semieixo menor b , ajudando a caracterizar a elipse.

6.4 Lei da Reflexão na Elipse

Agora, vamos apresentar e definir um termo que será fundamental para essa seção.

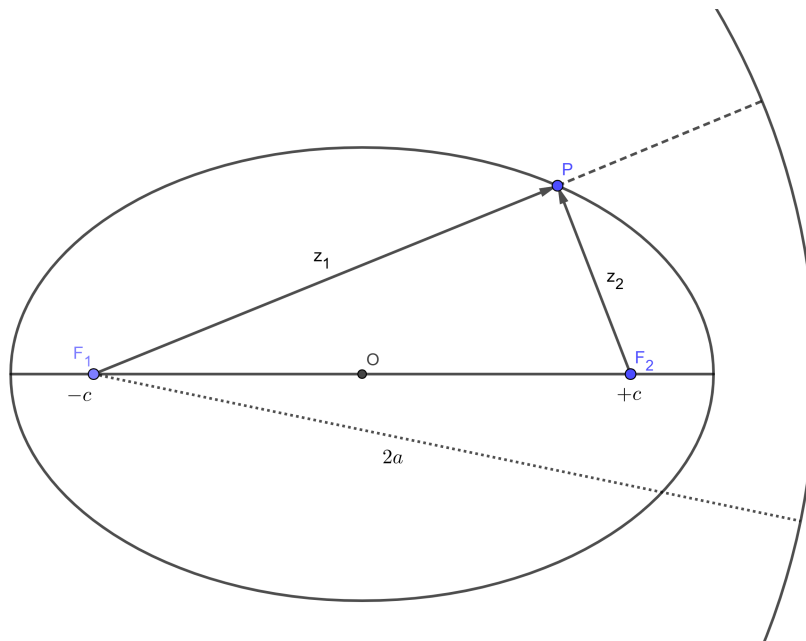


Figura 29 – Círculo Diretivo.

Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

- Círculo diretor: Um círculo diretor associado a uma elipse é um círculo centrado em um dos focos (por exemplo, F_1) da elipse, com raio igual ao semieixo maior a da elipse. Para qualquer ponto P na elipse, a razão entre sua distância até esse foco ($\text{dist}(P, F_1)$) e sua distância até o

círculo diretor é constante e igual à excentricidade e da elipse, ou seja, $\frac{\text{dist}(P, F_1)}{\text{dist}(P, \text{Círculo})} = e$. Assim, o círculo diretor desempenha um papel análogo ao da diretriz (que é uma linha reta), mas com a diferença de que o círculo é uma figura fechada. A excentricidade e continua sendo um parâmetro fundamental que descreve como a elipse é “alongada”.

Esse conceito é uma maneira mais geométrica de visualizar a relação entre os focos, os pontos da elipse e as propriedades métricas dessa curva.

Teorema 6.4.1 (Lei da Reflexão). *Considere F_1 e F_2 , como os focos de uma elipse, e P um ponto qualquer da elipse. Seja t a reta tangente à elipse no ponto P . Então, os segmentos de reta que conectam P aos focos F_1 e F_2 formam ângulos iguais com a reta tangente t nesse ponto.*

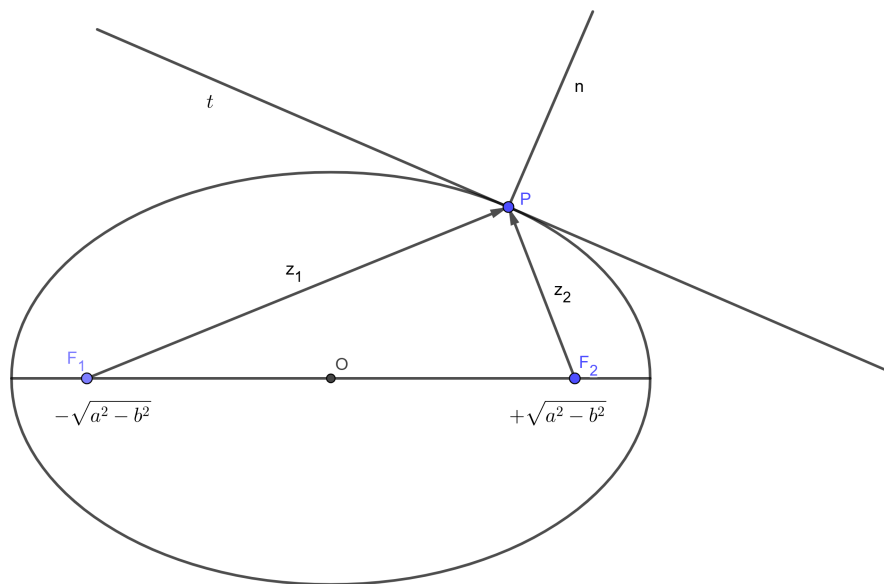


Figura 30 – Lei da Reflexão na Elipse.
Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

Demonstração. Para provar este teorema, segue da Equação (2.2) que basta verificar a igualdade do quociente $\frac{z_1}{z'} = -\frac{z'}{z_2}$.

Após derivar (6.2) e utilizar as mesmas ideias aplicadas para z_1 e z_2 , temos:

$$z' = i \cdot \left(\frac{a+b}{2} e^{iu} - \frac{a-b}{2} e^{-iu} \right). \quad (6.9)$$

Por outro lado, a equação $\frac{z_1}{z'} = -\frac{z'}{z_2}$ é equivalente a $z_1 \cdot z_2 = -z'^2$. Calculando $z_1 \cdot z_2$, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = \left[\frac{a+b}{2} e^{iu} + \frac{a-b}{2} e^{-iu} + \sqrt{a^2 - b^2} \right] \cdot \left[\frac{a+b}{2} e^{iu} + \frac{a-b}{2} e^{-iu} - \sqrt{a^2 - b^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{a+b}{2} e^{iu} + \frac{a-b}{2} e^{-iu} \right]^2 - \left[\sqrt{a^2 - b^2} \right]^2 \\
&= \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 e^{2iu} - \frac{(a+b)(a-b)}{2} + \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 e^{-2iu} \right].
\end{aligned}$$

Calculando o quadrado da Equação (6.9), temos:

$$\begin{aligned}
z'^2 &= \left[i \cdot \left(\frac{a+b}{2} e^{iu} - \frac{a-b}{2} e^{-iu} \right) \right]^2 \\
&= - \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 e^{2iu} - \frac{(a+b)(a-b)}{2} + \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 e^{-2iu} \right].
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $z_1 \cdot z_2 = -z'^2$. Isso implica que o ângulo entre z_1 e z' é igual ao ângulo entre z' e z_2 . \square

Observação 6.4.1. *A lei da reflexão leva a alguns resultados da elipse, dos quais se destacam:*

1. *A projeção ortogonal de um dos focos da elipse, digamos F_1 , em uma reta tangente é um ponto V_1 pertencente ao círculo principal da elipse (veja a Figura 31).*

Demonstração. Seja K , conforme ilustrado na Figura 31, a imagem do foco F_2 refletido em relação à tangente da elipse no ponto P . De modo que:

$$\overline{F_1K} = \overline{F_1P} + \overline{PK} = \overline{F_1P} + \overline{PF_2} = 2a.$$

Assim, o ponto K está localizado no círculo diretivo com centro em F_1 . O segmento $\overline{V_2F_2K}$ é ortogonal à tangente t , pois V_2 é o ponto médio do triângulo isósceles F_2PK , conforme ilustrado na Figura 32. Por construção, o segmento $\overline{OV_2}$ é base média do triângulo F_1F_2K , logo

$$\overline{OV_2} = \frac{1}{2} \overline{F_1K} = a.$$

Indicando que V_2 pertence ao círculo principal (veja a Figura 32). Como V_2 está localizado nesse círculo, ele possui uma relação direta com a elipse e suas tangentes. Em termos gerais, os segmentos das normais que descem dos focos até as tangentes da elipse estão situadas no círculo principal. \square

2. *O produto dos segmentos $\overline{F_1V_1}$ e $\overline{F_2V_2}$ é constante e igual a b^2 .*

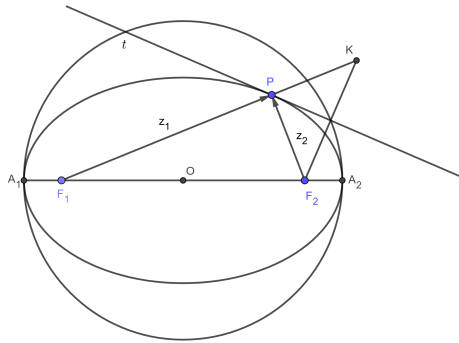


Figura 31 – Segmentos Ortogonais.
Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

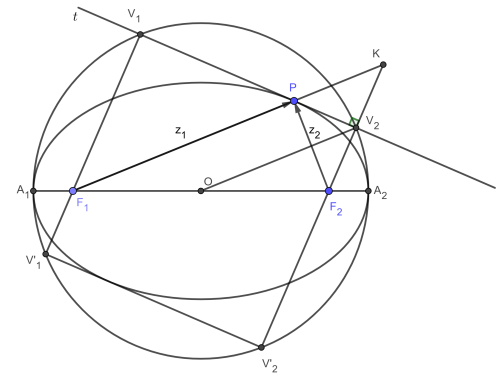


Figura 32 – Localização de V_2 no Círculo.
Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

Demonstração. Na Figura 32, a tangente t corta o círculo principal nos pontos V_1 e V_2 . Seja $\overline{V_1V_1'}$ uma corda do círculo principal passando por F_1 e com uma construção análoga à realizada, obtemos a corda $\overline{V_2V_2'}$ passando por F_2 . Por construção, os segmentos $\overline{F_1V_1}$ e $\overline{F_2V_2'}$ são congruentes. Além disso, $\overline{V_2V_2'}$ e o eixo maior são cordas do círculo principal que se cruzam no ponto F_2 . Portanto segue do Teorema das Cordas (veja (NETO, 2013)):

$$V_2'F_2 \cdot F_2V_2 = A_1F_2 \cdot F_2A_2 = (a + c)(a - c) = a^2 - c^2 = b^2.$$

□

Exemplo 6.4.1 (Aplicação da Lei da Reflexão em Elipses). *No dia a dia, um bom exemplo da Lei da Reflexão em Elipses surge nos espelhos de dentistas, que exibem um contorno elíptico. Imagine a luz partindo de um ponto, como uma lanterna, situada no foco da elipse; ela será espelhada de um jeito que todos os seus raios convergem no outro foco da figura.*

Esse efeito é muito útil em espelhos de dentistas, pois permite que a luz espelhada seja guiada de forma certa para a região bucal do paciente, criando uma iluminação bem eficaz. Desse modo, a característica da elipse de reunir a luz no seu segundo foco é crucial para melhorar a visão durante os exames feitos pelo dentista.

Hiperbóle

Neste capítulo iremos nos basear em (ZWIKKER, 1963) e nas dissertações de (SANTOS, 2018) e de (SILVA, 2018) apresentando a Hipérbole no contexto do plano complexo.

7.1 Introdução

Na geometria, a hipérbole é uma curva cônica com propriedades interessantes e únicas, frequentemente associada a fenômenos de reflexão e ótica. Ao contrário da elipse, onde a soma das distâncias a dois focos é constante, na hipérbole a diferença entre essas distâncias é constante. Essa característica define a hipérbole de forma única e é fundamental para a sua compreensão. Agora, vamos formalizar essa definição.

Definição 7.1.1. *Considere F_1 e F_2 como focos, pontos fixos com uma distância entre eles $2c$ e a um número real positivo, tal que $a > c$. A hiperbóle de focos F_1 e F_2 e eixo real $2a$ é definida como o conjunto de todos os pontos P no plano para os quais a diferença em módulo das distâncias de P aos focos F_1 e F_2 é igual a $2a$.*

$$H(F_1, F_2, 2a) = \{P : |\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a\},$$

em que $\text{dist}(P, F_1)$ é a distância entre P e F_1 e $\text{dist}(P, F_2)$ é a distância entre P e F_2 .

De acordo com a Figura 33, os elementos da hipérbole são os seguintes:

- Focos (F_1 e F_2): sendo a distância entre os focos dada por $\overline{F_1F_2} = 2c$.
- Centro (C): é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$.
- Eixo real ($\overline{A_1A_2}$): Segmento que passa pelos focos e pelos pontos mais afastados da hipérbole, com comprimento $2a$.

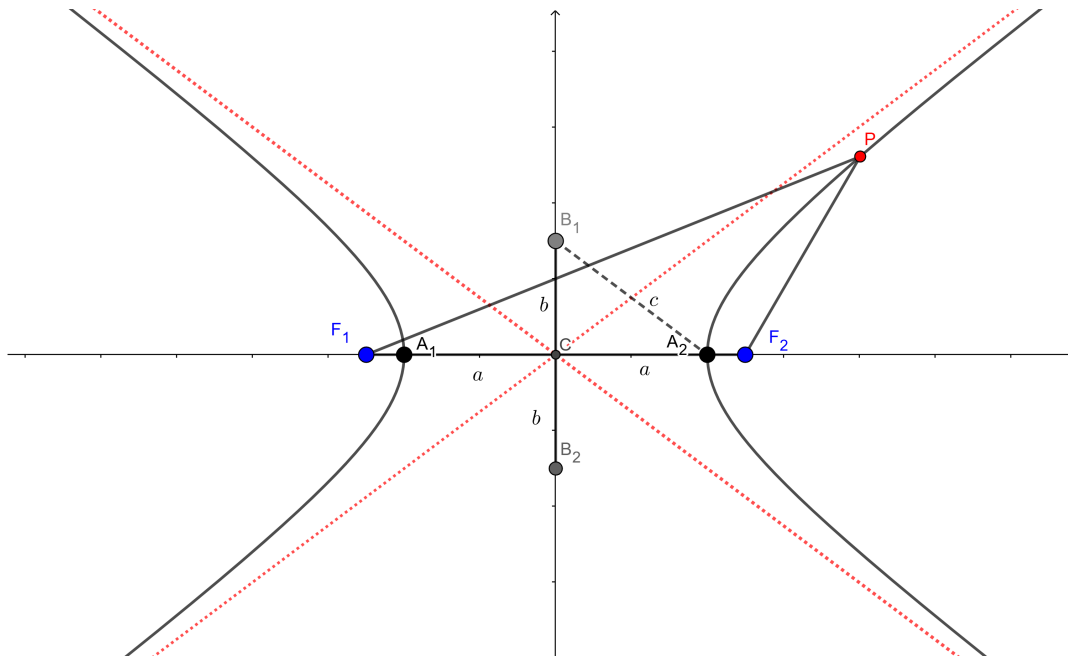


Figura 33 – Hipérbole.
Fonte: Própria autora, 2024.

- Eixo imaginário ($\overline{B_1B_2}$): Segmento perpendicular ao eixo real e que passa pelo centro da hipérbole, com comprimento $2b$. A relação entre a , b e c é dada por $c^2 = a^2 + b^2$.
- Excentricidade (e): Medida que indica quão aberta ou estreita é a hipérbole, calculada por $e = c/a$. Quanto mais próximo de 1 for o valor de e , mais estreita será a hipérbole.
- Assíntotas: As assíntotas da hipérbole são duas retas que cruzam o centro C e aproximam-se assintoticamente da curva da hipérbole, sem nunca tocá-la. Elas definem a direção e a abertura da hipérbole e são dadas pelas equações:

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0),$$

em sua forma cartesiana e

$$z - z_0 = u(a \pm bi - z_0), u \in \mathbb{R},$$

escrita na forma paramétrica, em que a e b são os semieixos real e imaginário, respectivamente.

Considerando uma hipérbole com focos em $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, sua equação cartesiana pode ser escrita como:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A demonstração da equação cartesiana da hipérbole pode ser encontrada em (REIS, 2019).

Para parametrizar a hipérbole de forma conveniente, usamos as funções hiperbólicas, baseando-nos na identidade fundamental:

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1,$$

isso nos permite reescrever as coordenadas x e y em termos de um parâmetro real u como $x = a \cosh u$ e $y = b \sinh u$.

Assim, podemos representar qualquer ponto (x, y) no ramo à direita da hipérbole, em uma única expressão complexa, onde x é a parte real e y é a parte imaginária. Definindo o ponto na hipérbole como $z = x + yi$, obtemos:

$$z = a \cosh u + ib \sinh u. \quad (7.1)$$

O ramo à esquerda da hipérbole é simétrico em relação ao eixo y , sua expressão complexa é $z = -a \cosh u + ib \sinh u$. Mas nesse trabalho iremos focar nos cálculos utilizando apenas o ramo à direita.

Proposição 7.1.1. *A hipérbole representada por (7.1) admite uma representação na forma exponencial, dada por:*

$$z = \frac{a + ib}{2} e^u + \frac{a - ib}{2} e^{-u}. \quad (7.2)$$

Demonstração. De fato, pela definição das funções hiperbólicas e da Equação (7.1), temos que:

$$\begin{aligned} z &= a \cosh u + ib \sinh u \\ &= a \underbrace{\left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)}_{\cosh u} + ib \underbrace{\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)}_{\sinh u} \\ &= \frac{a + ib}{2} e^u + \frac{a - ib}{2} e^{-u}, \end{aligned}$$

que estabelece a equivalência entre a representação hiperbólica e a forma exponencial. \square

Duas hipérbolas são conjugadas se o eixo real de cada uma é o eixo imaginário da outra. Desse modo, a equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

representa a hipérbole conjugada de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Uma hipérbole e sua conjugada são curvas complementares que compartilham as mesmas assíntotas e parâmetros a e b , mas têm orientações diferentes (uma se abre horizontalmente e a outra verticalmente).

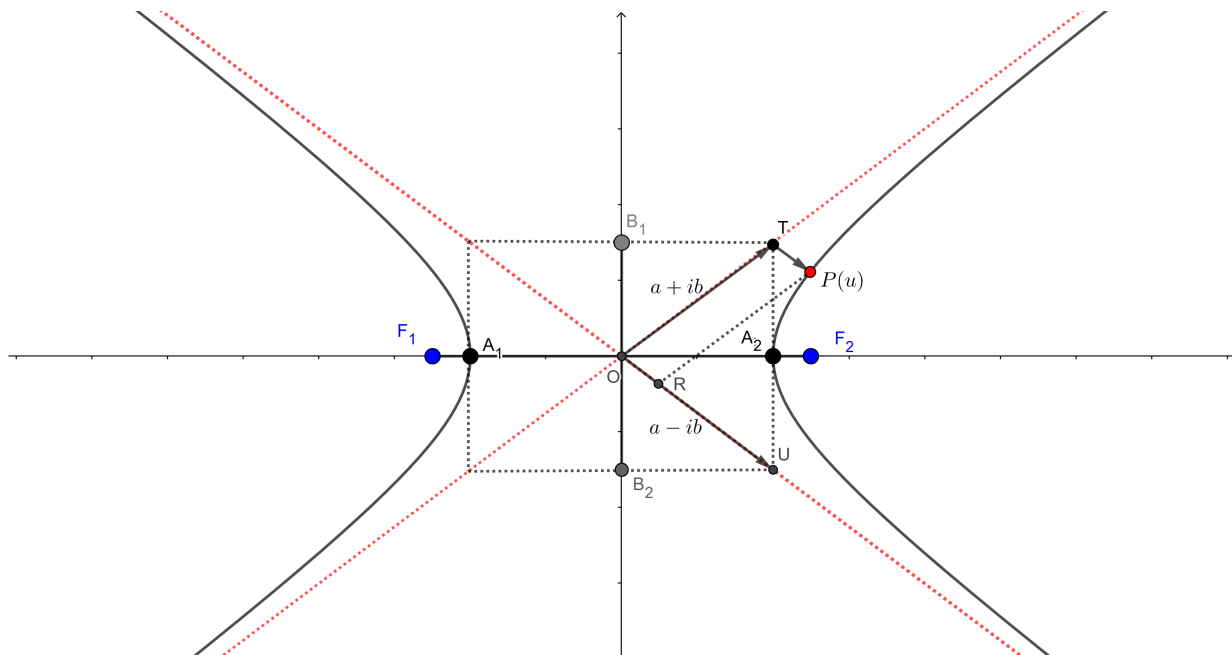


Figura 34 – Combinação Linear de Vetores na Hipérbole.

Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

Analogamente, podemos representar um ponto na hipérbole conjugada utilizando o parâmetro u . Assim, a expressão para o ponto na hipérbole conjugada em notação complexa é dada por:

$$z = \frac{a + ib}{2} e^u - \frac{a - ib}{2} e^{-u}. \quad (7.3)$$

A Equações (7.2) e (7.3) representam hipérboles conjugadas e são construídas de maneiras análogas, diferindo apenas na direção oposta \overrightarrow{TQ} , conforme ilustrado na Figura 35.

À medida que aumentamos u indefinidamente, o segundo termo de cada expressão se aproxima de zero, fazendo com que ambos os vetores z se alinhem progressivamente com as retas $\frac{a + ib}{2} e^u$ e $\frac{a - ib}{2} e^{-u}$. Essas retas representam as assíntotas das duas hipérboles conjugadas. Assim, as assíntotas, dadas por $z = \frac{a + ib}{2} e^u$ e $z = \frac{a - ib}{2} e^{-u}$, correspondem às direções que os pontos da hipérbole seguem conforme u tende para $+\infty$, definindo as orientações para onde os ramos das hipérboles se estendem ao infinito.

7.2 Ponto Médio e Diâmetros Conjugados

Nesta seção, exploraremos a propriedade dos pontos médios e das direções conjugadas em relação à hipérbole, demonstrando que, para qualquer reta traçada a partir da origem O , existe um ponto médio em correspondência com a geometria da curva. Assim como foi analisado anteriormente no caso da elipse, veremos que a hipérbole possui uma estrutura simétrica em torno de seus eixos,

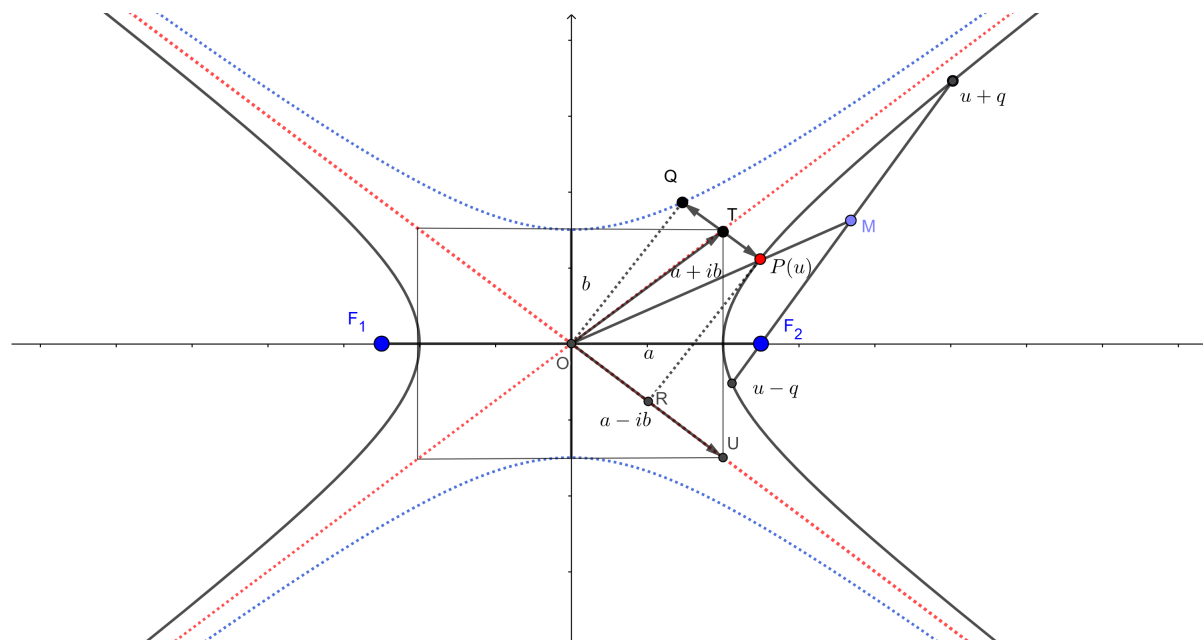


Figura 36 – Hipérbole e Ponto Médio.
Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

Isto é

$$z_M = \left[\frac{a + ib}{2} e^u + \frac{a - ib}{2} e^{-u} \right] \cdot \cosh q,$$

comprovando o resultado. □

Observação 7.2.1. *Segue da expressão (7.4) que o ponto médio z_M está localizado no segmento de reta que conecta a origem O ao ponto $P(u)$, conforme ilustrado na Figura 36.*

De maneira análoga à Equação (6.6) da seção 6.2 do capítulo 6, o vetor com origem em $u - q$ e extremidade em $u + q$ é dado por:

$$\frac{1}{2} [z(u + q) - z(u - q)] = \left[\frac{a + ib}{2} e^u - \frac{a - ib}{2} e^{-u} \right] \cdot \sinh q. \quad (7.5)$$

Esse vetor define uma direção independente de q e é paralelo ao diâmetro passando pelo ponto Q da hipérbole conjugada. As direções dos vetores \overrightarrow{OQ} e \overrightarrow{OP} são as direções associadas aos vetores que conectam pontos simétricos em relação ao centro da hipérbole e são conhecidas como direções conjugadas.

Essas direções são paralelas à tangente no ponto $P(u)$ da hipérbole original, conforme ilustrado na Figura 36. Para verificar que existe o paralelismo entre a tangente e as direções conjugadas, derivamos a Equação (7.2) e obtemos:

$$z' = \frac{1}{2} [(a + ib) e^u - (a - ib) e^{-u}]. \quad (7.6)$$

A expressão da derivada dada em (7.6) difere de (7.5) apenas pelo fator real $\operatorname{sen}q$, como observado. A derivada $z'(u)$ e a expressão para $z(u+q) - z(u-q)$ indicam que as direções conjugadas e a tangente são paralelas pois seguem a mesma direção à medida que q tende a zero.

Além disso, cada uma dessas direções conjugadas possui a propriedade de passar pelo ponto médio de qualquer corda da hipérbole conjugada que seja paralela ao ponto médio da corda que passa pelo ponto $P(u)$ da hipérbole original, conforme mostra a Figura 34.

Finalmente, para o módulo do vetor \overrightarrow{OP} , que representa a distância entre a origem O e o ponto $P(u)$ (como visto na Figura 35), é dado por:

$$|OP|^2 = \left[\frac{a+ib}{2} e^u + \frac{a-ib}{2} e^{-u} \right] \left[\frac{a-ib}{2} e^u + \frac{a+ib}{2} e^{-u} \right].$$

E resolvendo essa equação, obtemos:

$$|OP|^2 = \frac{1}{2} (a^2 - b^2) + \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \operatorname{cosh}u. \quad (7.7)$$

Essa expressão formaliza a relação entre a origem e o ponto $P(u)$, conectando a estrutura das direções conjugadas às propriedades de simetria da hipérbole e sua hipérbole conjugada.

De maneira semelhante, o módulo de $|OQ|$, que representa a distância entre a origem O e outro ponto $Q(u)$, é dado por:

$$|OQ|^2 = -\frac{1}{2} (a^2 - b^2) + \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \operatorname{cosh}u. \quad (7.8)$$

Ao calcular a diferença entre as Equações (7.7) e (7.8), obtemos:

$$\begin{aligned} |OP|^2 - |OQ|^2 &= \frac{1}{2} (a^2 - b^2) + \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \operatorname{cosh}u + \frac{1}{2} (a^2 - b^2) - \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \operatorname{cosh}u \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Ou seja, a diferença dos quadrados dos módulos de dois semidiâmetros conjugados é constante e igual a $a^2 - b^2$.

7.3 Focos

Na geometria da hipérbole, os focos desempenham um papel fundamental na definição e nas propriedades da curva. A localização dos focos está intimamente relacionada aos parâmetros da hipérbole, como os semieixos real (a) e imaginário (b), e é caracterizada pela excentricidade, que descreve a forma da curva. Nesta seção, abordaremos a definição dos focos da hipérbole, a excentricidade e , e as suas implicações geométricas.

Os focos da hipérbole estão localizados a uma distância real $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ do centro O . Para representar a equação da hipérbole com um dos focos na origem, devemos adicionar $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$ à Equação (7.2) como ilustrado na Figura 37. Denotamos por z_1 o vetor resultante ao adicionar $\sqrt{a^2 + b^2}$, e por z_2 o vetor resultante ao subtrair $\sqrt{a^2 + b^2}$. Assim, obtemos as representações vetoriais correspondentes a cada posição do foco em relação à origem.

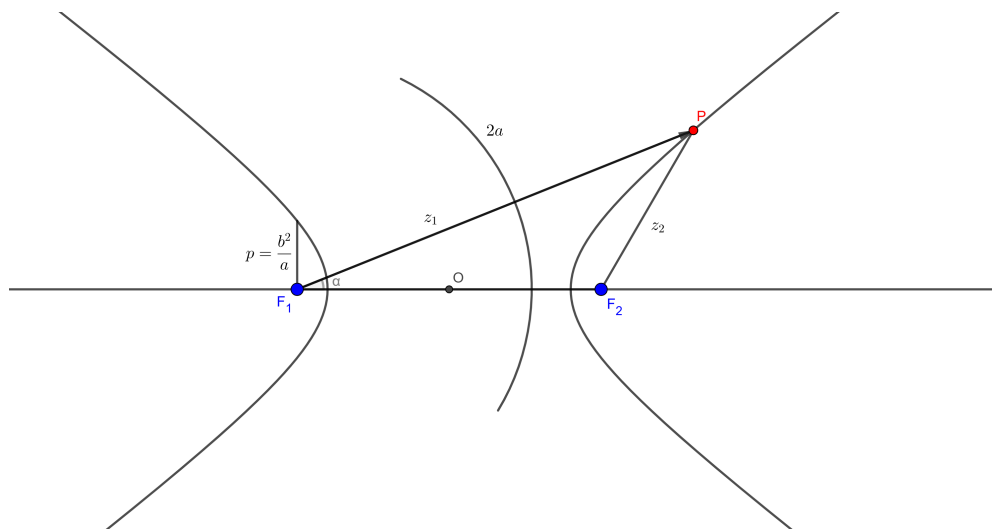


Figura 37 – Hipérbole e Círculo Diretor.
Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{a + ib}{2} e^u + \frac{a - ib}{2} e^{-u} + \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[(a + ib) e^u + 2\sqrt{a^2 + b^2} + (a - b) e^{-u} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{a + ib} e^{\frac{u}{2}} + \sqrt{a - ib} e^{\frac{-u}{2}} \right]^2. \end{aligned}$$

E analogamente para z_2 :

$$z_2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a + ib} e^{\frac{u}{2}} - \sqrt{a - ib} e^{\frac{-u}{2}} \right]^2.$$

De maneira análoga ao que foi feito para a elipse na Seção 6.3, quando calculamos os módulos de z_1 e z_2 , encontramos as seguintes relações:

$$|z_1| = a + c \cosh u \quad \text{e} \quad |z_2| = -a + c \cosh u,$$

em que z_2 é puramente imaginário quando $\cosh u = \frac{c}{a}$ e $|z_2|$ é dado por:

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Esse é o mesmo resultado que encontramos para a elipse, ambos envolvendo o parâmetro p , que é uma característica comum a essas cônicas.

O círculo de raio $2a$ ao redor de um dos focos é chamado de círculo diretivo. A partir da Figura 37, observamos que a hipérbole é o lugar geométrico que possui distâncias iguais a um ponto fixo F_2 e ao círculo mencionado.

7.4 Lei da Reflexão na Hipérbole

A hipérbole possui uma característica geométrica interessante, conhecida como a *Lei da Reflexão da Hipérbole*. Essa propriedade estabelece uma relação fundamental entre a tangente à hipérbole em qualquer ponto e os segmentos que conectam esse ponto aos focos da curva. Em termos simples, a tangente à hipérbole em um ponto forma ângulos iguais com os segmentos que ligam o ponto aos dois focos da hipérbole. Nesta seção, exploraremos essa importante propriedade e suas implicações geométricas, além de apresentar o teorema que formaliza a lei da reflexão.

Teorema 7.4.1 (Lei da Reflexão). *Para qualquer ponto P sobre uma hipérbole, a tangente à hipérbole em P forma ângulos iguais com os segmentos que conectam P aos dois focos da hipérbole. Em termos matemáticos, se F_1 e F_2 são os focos e a tangente à hipérbole em P forma ângulos β e α com os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$, então $\beta = \alpha$.*

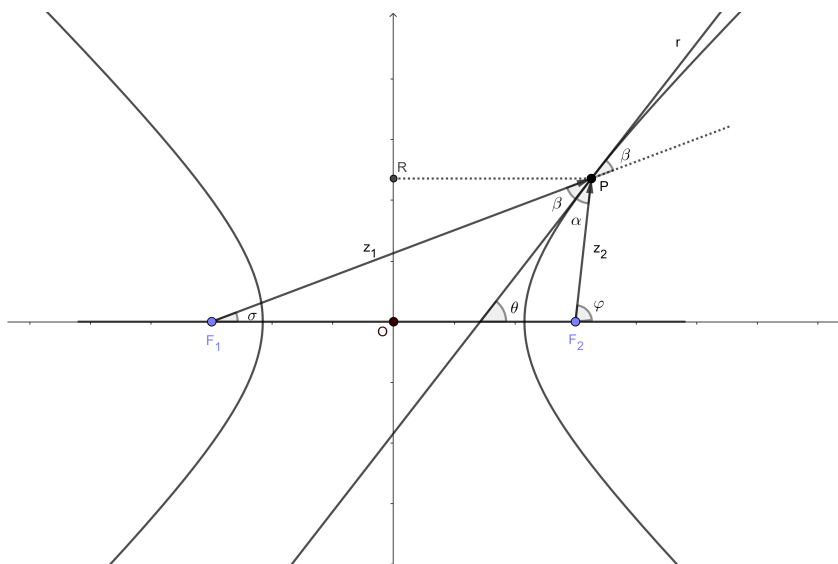


Figura 38 – Lei da Reflexão na Hipérbole.

Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

Demonstração. Considerando a Figura 38, sejam r a reta tangente que passa por P , α o ângulo formado pelo raio focal e a reta r e β o ângulo formado pelo outro raio focal e esta mesma reta.

Para provar este teorema, iremos verificar a igualdade do quociente $\frac{z_1}{z'} = \frac{z'}{z_2}$ para comprovar que os ângulos são iguais à partir da Equação (2.2), pois esses ângulos são orientados. Utilizamos a derivada da (7.2) dada pela Equação (7.6).

Em seguida, resolvemos $\frac{z_1}{z'} = \frac{z'}{z_2}$. De maneira equivalente, podemos escrever $z_1 \cdot z_2 = z'^2$. Calculando $z_1 \cdot z_2$, temos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{a+ib} e^{\frac{u}{2}} + \sqrt{a-ib} e^{-\frac{u}{2}} \right]^2 \cdot \frac{1}{2} \left[\sqrt{a+ib} e^{\frac{u}{2}} - \sqrt{a-ib} e^{-\frac{u}{2}} \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[(a+ib) e^u - (a-ib) e^{-u} \right]^2. \end{aligned}$$

Calculando o quadrado da Equação (7.6), temos:

$$\begin{aligned} z'^2 &= \left\{ \frac{1}{2} \left[(a+ib) e^u - (a-ib) e^{-u} \right] \right\}^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[(a+ib) e^u - (a-ib) e^{-u} \right]^2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $z_1 \cdot z_2 = z'^2$. Isso implica que o ângulo β entre z_1 e z' é igual ao ângulo α entre z' e z_2 . \square

Exemplo 7.4.1 (Aplicação da Lei da Reflexão em Hipérboles). *Um exemplo prático da Lei da Reflexão nas Hipérboles pode ser encontrado no telescópio de Cassegrain. Esse tipo de telescópio utiliza um espelho principal com formato hiperbólico e um espelho secundário com formato parabólico. Quando a luz de um objeto distante entra no telescópio, os raios de luz paralelos são refletidos pelo espelho principal hiperbólico. De acordo com a Lei da Reflexão das Hipérboles, esses raios são direcionados de volta para o foco, que é refletido pelo espelho secundário parabólico para um ponto de observação, geralmente perto da ocular do telescópio.*

Definição 7.4.1 (Círculo Auxiliar). *É um círculo centrado no ponto médio entre os focos, o centro O da hipérbole, com raio igual a a , onde a é o semieixo real, conforme ilustrado na Figura 39.*

Observação 7.4.1. *A projeção ortogonal de um dos focos da hipérbole em uma tangente pertence ao círculo auxiliar (veja a Figura 39). Este resultado é equivalente ao segundo item da Observação 6.4.1 da elipse. A demonstração completa dessa propriedade requer uma análise detalhada da curva pedal de um dos focos da hipérbole. Essa curva, sendo o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas a partir de um dos focos sobre todas as tangentes da hipérbole, justifica geometricamente a afirmação. No entanto, a introdução e o estudo dessa curva demandariam um aprofundamento que extrapola os objetivos deste trabalho.*

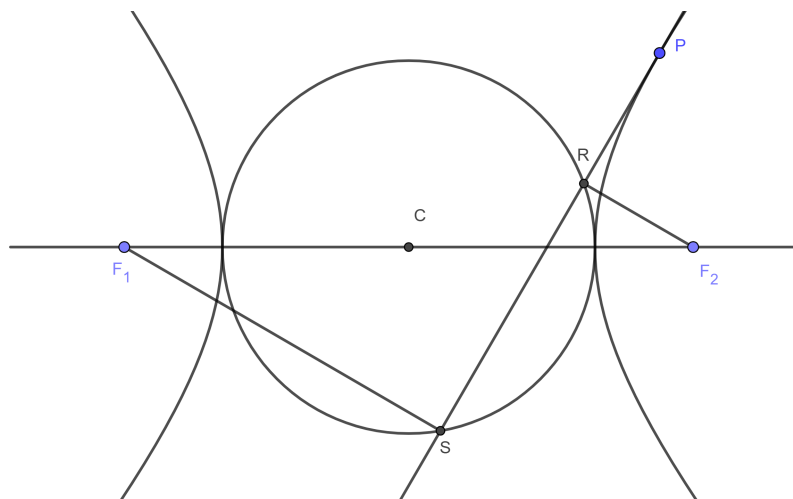


Figura 39 – Projeção Ortogonal na Hipérbole.
Fonte: Adaptado de (ZWIKKER, 1963).

Para finalizar, apresentamos uma relação que permite unificar a definição de elipses, parábolas e hipérbolas. Tal relação depende da excentricidade da cônica a qual caracteriza a curva. Para a elipse, $e < 1$, para a hipérbole, $e > 1$ e a parábola é o caso intermediário com $e = 1$. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em (SOUSA; SOARES, 2021)

Observação 7.4.2. *Seja P um ponto da cônica, um raio focal é o segmento determinado por P e um dos focos. Se a cônica, possui focos no eixo x , à mesma distância da origem, é possível verificar que os raios focais possuem medidas dadas por*

$$\text{dist}(F_1, P) = |ex + a| = e \left| x + \frac{a}{e} \right| \text{ e } \text{dist}(F_2, P) = |ex - a| = e \left| x - \frac{a}{e} \right|.$$

As expressões $|x + a/e|$ e $|x - a/e|$ podem ser interpretadas geometricamente como as distâncias do ponto P às retas verticais $x = -a/e$ e $x = a/e$, respectivamente, que são as diretrizes da cônica. Essa relação permite generalizar a definição de cônicas da seguinte maneira: a distância de qualquer ponto P a um foco F é igual ao produto da excentricidade e pela distância de P à diretriz d , ou seja, $\text{dist}(P, F) = e \cdot \text{dist}(P, d)$, sendo e a excentricidade.

Proposta de Atividade

Neste capítulo, apresentamos duas atividades práticas para o Ensino Médio que integram conceitos geométricos com experimentação. A primeira atividade utiliza o Teorema do Ângulo Constante para demonstrar que ângulos inscritos no mesmo arco circular são iguais, combinando materiais físicos com o software GeoGebra para uma aprendizagem dinâmica.

A segunda atividade investiga a Lei da Reflexão aplicada a cônicas, utilizando um espelho odontológico como recurso principal. Por meio desse experimento, os alunos poderão analisar o comportamento da luz ao incidir sobre essas superfícies, verificando na prática fenômenos como a convergência dos raios luminosos nos focos após o processo de reflexão.

As duas atividades foram concebidas para estabelecer uma ponte entre os fundamentos teóricos da geometria e suas aplicações práticas. Essa abordagem estimula o desenvolvimento do pensamento investigativo e da capacidade de visualização espacial dos alunos, integrando estratégias que combinam experimentação manual com recursos tecnológicos.

Proposta de Atividade 1: Explorando o Teorema do Ângulo Constante em uma Circunferência.

Público-Alvo: Estudantes do Ensino Médio (2º ou 3º ano).

Tempo de duração: 2 aulas de 50 minutos.

Objetivos:

- Compreender o Teorema do Ângulo Constante e sua aplicação em circunferências.
- Entender o conceito de ângulos inscritos e sua relação com os arcos correspondentes.
- Aplicar o teorema em situações práticas e problemas geométricos.
- Desenvolver habilidades de raciocínio lógico, trabalho em equipe e visualização espacial.

Materiais Necessários.

- Compasso e régua para desenhos manuais.
- Papel sulfite, papel quadriculado ou isopor.
- Transferidor para medir ângulos.
- Computadores ou tablets com acesso ao software GeoGebra (opcional).
- Folhas de exercícios impressas com questões teóricas e práticas.
- Projetor multimídia para apresentações iniciais e discussões coletivas.
- Canetas coloridas para destacar elementos importantes nos desenhos.

1. Introdução ao Tema (25 minutos)

- Comece a aula com uma pergunta provocativa: “Por que, em uma circunferência, ângulos que ‘enxergam’ o mesmo arco têm a mesma medida?”
- Apresente o Teorema do Ângulo Constante de forma simples: “*Se dois ângulos estão inscritos em uma circunferência e ‘enxergam’ o mesmo arco, eles terão a mesma medida.*”
- Importância: Este teorema é fundamental para entender as propriedades dos ângulos em uma circunferência e tem aplicações em diversas áreas, como astronomia, engenharia e design gráfico.
- Utilize exemplos visuais no quadro ou projetados em multimídia.
- Desenhe uma circunferência com um arco \widehat{AB} e marque dois pontos diferentes C e D sobre a circunferência, fora do arco \widehat{AB} . Mostre que os ângulos $\angle ACB$ e $\angle ADB$ têm a mesma medida porque subtendem o mesmo arco \widehat{AB} .
- Use animações ou slides para ilustrar como os ângulos permanecem constantes enquanto os pontos C e D se movem ao longo da circunferência.

2. Exploração Prática (35 minutos)

- Atividade 1: Construção Manual de Ângulos Inscritos (Divida os alunos em grupos de 3 ou 4 pessoas . Cada grupo receberá uma folha com uma circunferência pré-desenhada e deverá realizar os seguintes passos:)
 - a) Usar o compasso e a régua para desenhar um arco \widehat{AB} qualquer na circunferência.

- b) Marcar dois pontos diferentes C e D sobre a circunferência, exteriores ao arco \widehat{AB} .
- c) Traçar os segmentos \overline{AC} , \overline{BC} , \overline{AD} e \overline{BD} para formar os ângulos inscritos $\angle ACB$ e $\angle ADB$.
- d) Usar o transferidor para medir os ângulos $\angle ACB$ e $\angle ADB$.
- e) Comparar as medidas e verificar que elas são iguais.

Após finalizar, cada grupo apresentará suas observações para a turma, explicando como chegaram ao resultado e destacando a validade do teorema.

- Atividade 2: No laboratório de informática ou com tablets, os alunos usarão o GeoGebra para:
 - a) Desenhar uma circunferência e marcar um arco \widehat{AB} .
 - b) Mover pontos C e D ao longo da circunferência e observar como os ângulos inscritos $\angle ACB$ e $\angle ADB$ permanecem constantes enquanto subtendem o mesmo arco.
 - c) Registrar suas observações e discutir como a tecnologia facilita a visualização do teorema.
- Discussão em Grupo: Após as atividades práticas, promova uma discussão em grupo para consolidar os aprendizados.
 - a) O que vocês observaram ao mover os pontos C e D ? Como isso se relaciona com o teorema?
 - b) Quais diferenças vocês perceberam entre as construções manuais e digitais?

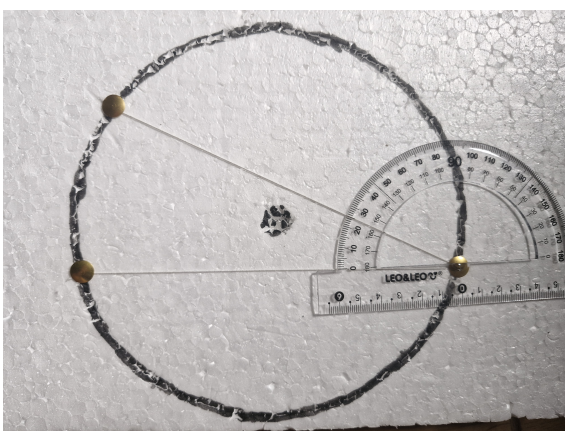


Figura 40 – Ângulo na Primeira Posição.
Fonte: Própria autora, 2024.

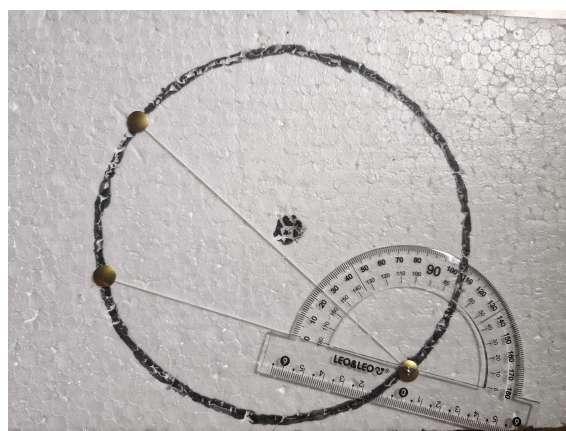


Figura 41 – Ângulo Trocando a Posição de P .
Fonte: Própria autora, 2024.

3. Aplicação Prática (30 minutos)



Figura 42 – Ângulo Trocando as Posições de A e B .

Fonte: Própria autora, 2024.



Figura 43 – Ângulo Trocando a Posição de P .

Fonte: Própria autora, 2024.

- Desafio Prático: Resolvendo Problemas Geométricos.
 - a) Em uma circunferência, o arco \widehat{AB} mede 120° . Qual é a medida dos ângulos inscritos $\angle ACB$ e $\angle ADB$ que subtendem esse arco?
 - b) Um relógio analógico tem ponteiros que formam ângulos inscritos em uma circunferência. Às 3 horas, qual é o ângulo inscrito formado pelo ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos?
 - c) Uma antena de rádio está localizada no centro de uma circunferência. Dois receptores estão posicionados em pontos diferentes da circunferência. Se o arco entre os receptores mede 90° , qual é o ângulo formado pelas linhas de visão da antena até os receptores?
- Os alunos devem resolver os problemas em grupo e compartilhar suas soluções com a turma.
- Atividades Interdisciplinares:
 - a) Física: Relacione o teorema com o estudo de reflexão e refração da luz.
 - b) Astronomia: Mostre como o teorema é usado para calcular ângulos entre planetas ou estrelas observados da Terra.
 - c) Artes: Explore o uso de circunferências e ângulos constantes em obras de arte famosas, como mandalas ou vitrais.

4. Reflexão Final e Autoavaliação (10 minutos)

- Peça aos alunos que escrevam um pequeno texto respondendo às seguintes perguntas: O que você achou mais interessante sobre o Teorema do Ângulo Constante? Quais foram

os maiores desafios que enfrentou durante a atividade? Como você pode aplicar esse teorema em situações do seu dia a dia?"

5. Critérios Avaliação

- Participação ativa nas atividades em grupo.
- Correção e clareza nas construções geométricas.
- Resolução correta dos problemas propostos.
- Capacidade de explicar e justificar as observações feitas durante a atividade.

Proposta de Atividade 2: Explorando a Lei da Reflexão nas Cônicas utilizando um espelho de dentista.

Público-alvo: Estudantes do Ensino Médio (2º ou 3º ano).

Tempo de duração: 50 minutos.

Objetivo:

- Explorar a Lei da Reflexão no contexto das cônicas (parábola e elipse).
- Demonstrar como essa propriedade é aplicada em instrumentos como o espelho do dentista.
- Relacionar o conceito a aplicações práticas no cotidiano, como antenas parabólicas e faróis de carro.

Conteúdos abordados:

- Lei da Reflexão.
- Propriedades dos espelhos côncavos e elípticos.
- Aplicações na odontologia e em outras áreas.

Materiais Necessários:

- Espelhos côncavos pequenos (ou colheres de sopa).
- Lanterna de celular.
- Superfície branca (papel ou parede).
- Espelho plano para comparação.

- Projetor ou quadro para apresentação inicial.

1. Introdução (10 min) – Motivação e Contextualização

- Comece a aula mostrando um espelho de dentista ou uma colher côncava para os alunos.
- Em seguida, explicar que será explorada uma propriedade da luz e das superfícies curvas, que está por trás do funcionamento de instrumentos como o espelho de dentista.
- Pergunta norteadora: Vocês já pararam para pensar como um espelho pequeno consegue iluminar um ponto específico dentro da boca, mesmo em áreas difíceis de enxergar?

Demonstração rápida:

- Use uma lanterna e uma colher côncava (ou um espelho côncavo) para mostrar como a luz reflete e converge em um ponto.
- Explique brevemente que esse comportamento da luz está relacionado à Lei da Reflexão e às propriedades das cônicas, como parábolas e elipses. Ao longo da aula, vamos entender por que isso acontece e como é aplicado em situações do cotidiano.

2. Desenvolvimento (25 min) – Conceitos Teóricos e Práticos

Parte 1: Lei da Reflexão e as Cônicas (10 min)

- Lei da Reflexão: O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.
- Parábolas: Qualquer raio que incide paralelamente ao eixo de uma parábola reflete em direção ao foco.
- Elipses: Um raio que parte de um foco sempre reflete em direção ao outro foco.

Exemplo odontológico:

- No espelho do dentista, o formato pode ser parabólico ou elíptico.
- Se for parabólico, ele concentra a luz em um ponto dentro da boca.
- Se for elíptico, ele reflete imagens de um ponto focal para outro, ajudando na visualização.

Parte 2: Experimento Prático (15 min)

Material: espelhos côncavos pequenos (ou colheres de sopa); lanterna de celular; superfície branca (papel ou parede) e espelho plano para comparação

Atividade:

- Teste com a luz: Peça aos alunos para direcionar uma lanterna a um espelho côncavo e observar como a luz se comporta.
- Demonstração com um ponto focal: Mostre que, ao ajustar a posição da lanterna, a luz reflete para um único ponto (foco).
- Comparação com um espelho plano: Demonstre que, em um espelho plano, a luz reflete sem convergir para um ponto específico.
- Desafio: Peça aos alunos para preverem e explicarem o comportamento da luz antes de realizarem os testes.

3. Conclusão e Aplicação (10 min) – Fixação do Conhecimento

Discussão em grupo:

- Por que o dentista precisa de um espelho côncavo em vez de um espelho plano?
- Como essa mesma ideia é aplicada em antenas parabólicas e faróis de carro?
- Relacionar o experimento ao conceito de foco e sua importância na concentração da luz.

Tarefa opcional:

- Pesquisar e trazer outros exemplos de aplicações das cônicas no cotidiano (telescópios, microfones parabólicos, sistemas de som, entre outros).
- Criar um pequeno relatório com imagens e explicações sobre uma aplicação real da reflexão nas cônicas.

4. Critérios de Avaliação:

- Participação ativa nas discussões e no experimento.
- Capacidade de prever e explicar o comportamento da luz.
- Engajamento na tarefa opcional (se realizada).

Ao longo dessas atividades, exploramos conceitos da geometria e da física, como o Teorema do Ângulo Constante e a Lei da Reflexão, e vimos como eles estão presentes em situações do nosso dia a dia. Desde o funcionamento de um espelho de dentista até a construção de antenas parabólicas, percebemos que a matemática e a ciência não estão apenas nos livros, mas também nas tecnologias e instrumentos que usamos constantemente. Esses conhecimentos nos mostram como a teoria se conecta à prática, ajudando a resolver problemas reais e a criar soluções inovadoras.

Considerações Finais

Quando comecei a conversar com meu orientador, ainda não tinha uma ideia clara sobre o tema a ser desenvolvido. Foi durante essas trocas que ele sugeriu a possibilidade de trabalharmos com números complexos e suas conexões com as cônicas. A ideia me interessou, pois, como muitos professores, percebi que meu conhecimento sobre números complexos era predominantemente algébrico, com pouca ênfase em sua representação geométrica. Além disso, não tinha consciência de como esse tema poderia ser relacionado ao estudo das cônicas.

Neste estudo, nosso objetivo foi investigar as conexões entre os números complexos e a Geometria Analítica, explorando as relações entre números complexos e as cônicas (circunferência, elipse, hipérbole e parábola). Destacamos suas propriedades fundamentais por meio da linguagem dos números complexos.

A integração desses conceitos oferece uma oportunidade significativa para promover a interdisciplinaridade e incentivar um ensino mais visual e dinâmico. Ao analisar as cônicas com base nos números complexos, buscamos não apenas enriquecer a prática pedagógica dos professores, mas também proporcionar uma compreensão mais profunda e interligada dos conteúdos matemáticos.

Além disso, propomos uma atividade prática que explora o conceito de ângulo constante na circunferência, destacando suas aplicações geométricas e analítica. Por meio dessa abordagem prática, os estudantes podem compreender e visualizar propriedades fundamentais da circunferência, relacionando conceitos geométricos e algébricos de maneira integrada.

Da mesma forma, a atividade sobre a Lei da Reflexão complementa essa exploração, mostrando como as propriedades das cônicas, como parábolas e elipses, são aplicadas em situações práticas, como no uso de espelhos côncavos pelos dentistas. Por meio de experimentos simples com espelhos curvos e luz, os alunos observam como a luz reflete e converge em pontos focais, entendendo a importância desses conceitos em tecnologias do cotidiano, como antenas parabólicas, faróis de carro e telescópios.

Juntas, essas atividades proporcionam uma visão integrada da geometria e da física, mostrando como conceitos aparentemente abstratos, como ângulos constantes e reflexão da luz, têm aplicações concretas e relevantes. Ao unir teoria e prática, os estudantes desenvolvem não apenas o raciocínio lógico-matemático, mas também a capacidade de relacionar diferentes áreas do conhecimento, enxergando a matemática como uma ferramenta poderosa para entender e transformar o mundo ao seu redor.

Referências

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *A history of mathematics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado na página 15.

ESCOLA, B. *O que são cônicas?* 2025. Acessado em: 15 ago. 2024. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-conicas.htm>. Citado na página 20.

FEITOSA, L. F. Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal da Paraíba, 2013. Citado na página 33.

HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. *Polinômios e equações algébricas*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2018. Citado na página 26.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Fundamentos da Matemática Elementar – Volume 6: Equações e Polinômios*. 9. ed. São Paulo: Editora Atual, 2011. Citado na página 27.

IEZZI, G. a. *Matemática*. 4^a. ed. São Paulo - Brasil: Atual, 2002. Citado na página 37.

JANUARIO, D. A. Geometria Analítica: Estudo de reta e circunferência no plano complexo. Trabalho de Conclusão de Curso, Instituto Federal de São Paulo, 2018. Citado na página 33.

NETO, A. C. M. Geometria, Coleção PROFMAT. *Rio De Janeiro: SBM, 1o Edição*, v. 6, 2013. Citado na página 75.

OLIVEIRA, C. N. C. Números Complexos: Um estudo dos registros de representação e aspectos geográficos. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 23.

PINHEIRO, F. L. dos R. A Fórmula de Euler. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal do Amapá, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 28.

REIS, M. d. F. Números Complexos: Abordagens Alternativas, Contextualização e Aplicações. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 37, 60 e 78.

- SANTOS, P. A. B. Números Complexos e Cônicas: Abordagem pelo Professor de Ensino Médio, Reflexões e Propostas. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal do Sergipe, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 23, 51, 59 e 77.
- SILVA, F. d. C. Um estudo sobre Cônicas: Aspectos históricos e seu ensino. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal do Maranhão, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 15, 51, 59 e 77.
- SOUSA, K. C. Bárbara Kaline de; SOARES, L. F. Cônicas não degeneradas: dedução das equações geral e polar. *Periódico do IFPB*, X, n. 55, p. 86–98, 2021. Disponível em: <<https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/viewFile/3996/1613>>. Citado na página 87.
- SOUZA, A. T. de. Números Complexos e Cônicas. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal do Amazonas, 2014. Citado na página 23.
- ZWIKKER, C. *The Advanced Geometry of Plane Curves and their Applications*. 1^a. ed. Londres - Inglaterra: Dover Publications Inc., New York, 1963. Citado 27 vezes nas páginas 19, 23, 37, 41, 44, 51, 53, 54, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 69, 70, 71, 72, 73, 75, 77, 80, 81, 82, 84, 85 e 87.