Universidade Federal de Ouro Preto

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Dissertação

Pontos Fixos: Métodos Iterativos, Obtenção de Raízes de Equações e uma Atividade Didática com Futuros Professores Utilizando o GeoGebra

Shamylla Irineu Frederico dos Santos

Ouro Preto
2025

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

PROFMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Shamylla Irineu Frederico dos Santos

Pontos Fixos: Métodos Iterativos, Obtenção de Raízes de Equações e uma Atividade Didática com Futuros Professores Utilizando o GeoGebra

Ouro Preto - MG, Brasil

Fevereiro 2025

Shamylla Irineu Frederico dos Santos

Pontos Fixos: Métodos Iterativos, Obtenção de Raízes de Equações e uma Atividade Didática com Futuros Professores Utilizando o GeoGebra

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)

Departamento de Matemática (DEMAT)

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional(PROFMAT)

Orientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira

Coorientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins

Ouro Preto - MG, Brasil

Fevereiro 2025

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

S237p Santos, Shamylla Irineu Frederico dos.
Pontos fixos [manuscrito]: métodos iterativos, obtenção de raízes de equações e uma atividade didática com futuros professores utilizando o GeoGebra. / Shamylla Irineu Frederico dos Santos. - 2025.
80 f.

Orientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira.
Coorientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins.
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

1. Sistemas lineares. 2. Métodos iterativos (Matemática). 3. Equações. 4. GeoGebra (Software). 5. Didática - Estudo e ensino. I. Ferreira, Wenderson Marques. II. Martins, Eder Marinho. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 512.64

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
PROGRAMA DE POS-GRADUACAO EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL

FOLHA DE APROVAÇÃO

Shamylla Irineu Frederico dos Santos

Pontos fixos: métodos iterativos, obtenção de raízes de equações e uma atividade didática com futuros professores utilizando o GeoGebra

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de mestre

Aprovada em 06 de março de 2025

Membros da banca

Dr. Wenderson Marques Ferreira - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Eder Marinho Martins - Coorientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dra. Marli Regina dos Santos - Universidade Federal de Ouro Preto
Dra. Viviane Pardini Valério - Universidade Federal de São João del-Rei

Dr. Wenderson Marques Ferreira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 06/03/2025.

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163
Telefone: (31)3559-1629 - www.ufop.br

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.”

(Albert Einstein)

Agradecimentos

A Deus, por nunca ter me desamparado e por sempre me dar forças para superar todas as dificuldades.

À Luísa, minha filha, por ser minha companheira sempre e por ter entendido meus momentos de ausência.

À Lúcia, minha mãe, por sempre ter me apoiado e me ajudado em todos os momentos da minha vida.

Ao Luciano, meu companheiro, por todo o incentivo, amor, carinho e parceria.

A toda a minha família, em especial minhas irmãs Shirley e Shany, que sempre estiveram comigo, torceram por mim e vibraram com minhas conquistas.

À minha amiga Luciana, que sempre me apoiou, me ouviu e me ajudou nos momentos de ansiedade.

Ao Alessandro, meu colega de trabalho e de curso, que dividiu as viagens comigo e me fez companhia.

Aos demais colegas de curso, Kátia, Gabriel e Augusto, por todas as partilhas e momentos de descontração.

Ao Wenderson, meu professor e orientador, por todos os ensinamentos, dedicação, compromisso e compreensão ao longo dessa jornada.

Ao Eder, meu coorientador, pelas excelentes contribuições neste trabalho.

Aos demais membros da banca, por terem aceitado participar dessa etapa e por todas as correções e sugestões de melhoria.

Aos estudantes da Graduação em Matemática que participaram da atividade didática com tanto interesse e dedicação.

Aos professores do PROFMAT, por todo o aprendizado.

E a todos que torceram por mim, me incentivaram e que contribuíram, de alguma forma, para que esse sonho fosse realizado!

Resumo

Neste trabalho estudamos teorias de pontos fixos e sua aplicação para a obtenção de raízes de equações, além de propormos uma atividade didática, na qual utilizamos o software GeoGebra. Tal atividade foi aplicada a um grupo de futuros professores e suas impressões acerca da mesma foram obtidas através de um questionário. No desenvolvimento do trabalho abordamos o uso de tecnologias nas aulas de matemáticas e apresentamos estudos relativos à topologia da reta e análise matemática, apresentamos resultados clássicos como o Teorema do Valor Intermediário, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Também analisamos a relação entre as teorias de pontos fixos e a obtenção de raízes de equações, abordando métodos iterativos aplicados com este objetivo.

Palavras chaves: Pontos Fixos; Métodos Iterativos; Raízes de Equações; GeoGebra; Atividade Didática.

Abstract

In this work, we study fixed point theories and their application to obtain roots of equations, in addition to proposing a didactic activity in which we use GeoGebra software. This activity was applied to a group of undergraduate math students and their impressions about it were obtained through a questionnaire. In the development of the work, we address the use of technologies in mathematical classes and present studies related to the topology of the real line and mathematical analysis, presenting classic results such as the Intermediate Value Theorem, Brouwer Fixed Point Theorem and Banach Fixed Point Theorem. We also analyze the relationship between fixed point theories and the process of obtaining roots of equations, addressing iterative methods applied for this purpose.

keywords: Fixed Points; Iterative Methods; Roots of Equations; GeoGebra; Didactic Activity.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação gráfica da interseção entre os gráficos das funções $f(x) = 3x + 2$ e $y = x$. 28
Figura 2 – Representação gráfica da interseção entre os gráficos das funções $f(x) = x^2 + 1$ e $y = x$. 28
Figura 3 – Representação gráfica da interseção entre os gráficos das funções $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ e $y = x$. 29
Figura 4 – Representação gráfica da interseção entre os gráficos das funções $f(x) = -x^2 + x + 2$ e $y = x$. 29
Figura 5 – Representação gráfica da interseção entre os gráficos das funções $f(x) = 2\text{sen}x$ e $y = x$. 30
Figura 6 – Representação gráfica da interseção entre os gráficos das funções $f(x) = \log x$ e $y = x$. 30
Figura 7 – Representação gráfica do comportamento da função f quando aplicada em seus extremos. 32
Figura 8 – Representação gráfica dos intervalos considerados 32
Figura 9 – Representação gráfica do Teorema 3.1.5. 33
Figura 10 – Planilha mostrando a convergência/divergência das sequências 35
Figura 11 – Gráfico da função $f(x) = e^{-x} + \text{sen}x$ 40
Figura 12 – Gráfico da função $f(x) = e^{-x} + \text{sen}x$ e planilha mostrando o teste feito para $x = 3,6$ 41
Figura 13 – Gráfico da função $f(x) = e^{-x} + \text{sen}x$ e planilha mostrando o teste feito para $x = 6$ 41
Figura 14 – Gráfico da função f 43
Figura 15 – Gráfico da função $\alpha'(x)f(x) + \alpha(x)f'(x)$ 44
Figura 16 – Gráfico da função $\alpha'(x)f(x) + \alpha(x)f'(x)$, para $\alpha = x^2$ 44
Figura 17 – Função seno rotacionada 47

Figura 18 – Gráfico 1 - atividade com estudantes da graduação 48
Figura 19 – Gráfico 1 - atividade com estudantes da graduação e identidade 49
Figura 20 – Gráfico 2 - atividade com estudantes da graduação 49
Figura 21 – Gráfico 2 - atividade com estudantes da graduação e identidade 50
Figura 22 – Gráfico 3 - atividade com estudantes da graduação 50
Figura 23 – Gráfico 3 - atividade com estudantes da graduação e identidade 51
Figura 24 – Gráfico 4 - atividade com estudantes da graduação 51
Figura 25 – Gráfico 4 - atividade com estudantes da graduação e identidade 52
Figura 26 – Gráfico 5 - atividade com estudantes da graduação 52
Figura 27 – Gráfico 5 - atividade com estudantes da graduação e identidade 53
Figura 28 – Gráfico 6 - atividade com estudantes da graduação 53
Figura 29 – Gráfico 6 - atividade com estudantes da graduação e identidade 54
Figura 30 – Função quadrática e uso do controle deslizante no GeoGebra 55
Figura 31 – Gráficos de f, função identidade e função auxiliar g 57
Figura 32 – Gráficos de f, função identidade e função auxiliar i 58
Figura 33 – Gráficos de f, função identidade e função auxiliar j 58
Figura 34 – Gráficos de f, função identidade, função auxiliar e planilha usando o método de Wu 59

Sumário

Introdução 13

1 ALGUMAS DISSERTAÇÕES DO PROFMAT QUE ABORDAM OS TEMAS PONTO FIXO E MÉTODOS ITERATIVOS 15

2 A BNCC E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS 19
2.1 Tecnologias Digitais 21

3 PONTOS FIXOS 25
3.1 Os Teoremas do Ponto Fixo de Brouwer e do Valor Intermediário . . 26
3.2 Pontos fixos como auxiliares para a obtenção de raízes de equações e o Teorema do Ponto Fixo de Banach 34
3.3 Alguns Métodos Clássicos 38
3.4 Sobre as Funções Auxiliares 42

4 ATIVIDADE DIDÁTICA 45
4.1 Sujeitos e Contexto 45
4.2 Roteiro da Atividade 45
4.3 Análise das Respostas dos Participantes ao Questionário Avaliativo 59

Conclusão 65

REFERÊNCIAS 67

APÊNDICE A QUESTIONÁRIO RESPONDIDO PELOS ESTUDANTES DA GRADUAÇÃO 69

APÊNDICE B ROTEIRO DA ATIVIDADE 71

Introdução

Neste trabalho, estudamos pontos fixos e métodos iterativos e abordamos a junção desses dois conceitos para a obtenção de raízes de funções a partir da procura por pontos fixos de funções auxiliares estrategicamente definidas. Também apresentamos uma atividade didática, realizada com futuros professores de matemática, e que pode ser aplicada em turmas de Ensino Médio.

Em linhas gerais, abordaremos situações nas quais a imagem de um ponto x_0 por uma função f é o próprio x_0, ou seja, pontos nos quais $f(x_0) = x_0$ (estabeleceremos tal conceito formalmente na Definição 3.1.1). Após abordarmos tal conceito, o relacionaremos à obtenção de raízes de equações, utilizando métodos iterativos, ou seja, métodos que utilizam um valor inicial para gerar uma sequência de soluções aproximadas para um dado problema. Nos métodos iterativos, cada termo da sequência (chamado de iteração), é obtido a partir do anterior (calculando-se sua imagem pela própria função). Este conceito será melhor explorado na Seção 3.2.

O conceito de ponto fixo está intimamente ligado ao conceito de funções e suas representações geométricas, conteúdo importante e presente nos currículos escolares dos alunos a partir do 9° ano do Ensino Fundamental. Sendo assim, o tema central deste estudo pode ser abordado já no ensino básico e sua exploração, tanto algébrica quanto geométrica, pode contribuir para a compreensão de suas propriedades e características.

A BNCC destaca a importância destes conteúdos assim como a utilização de tecnologias digitais nas aulas de matemática. Neste sentido, apresentamos neste trabalho uma proposta didática que alia o conceito de ponto fixo e uma de suas aplicações, a obtenção de raízes de funções, fazendo uso de tecnologias digitais, as quais permitem visualizações geométricas das funções e podem facilitar o entendimento dos conteúdos estudados.

Além de apresentar uma proposta didática envolvendo o conceito de ponto fixo e a obtenção de raízes a partir deste conceito, outro objetivo do trabalho é apresentar dois resultados clássicos ligados à teoria dos pontos fixos: o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Ponto

Fixo de Banach, o primeiro, de fácil visualização geométrica e o segundo, fundamental para o desenvolvimento dos métodos iterativos que serão estudados e aplicados no decorrer do trabalho.

No primeiro capítulo deste trabalho fizemos um breve estudo de algumas dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT, 2024) sobre os temas Ponto Fixo e Métodos Iterativos, além de mostrar as similaridades com este trabalho e os diferenciais do mesmo.

No segundo capítulo destacamos a BNCC como um dos principais documentos norteadores da educação. Pesquisamos nela as habilidades e as competências que poderiam ser trabalhadas ao estudar pontos fixos e ao fazer uso da tecnologia. Ainda neste capítulo, destacamos também as possibilidades de uso das tecnologias digitais na educação e mostramos alguns estudos relativos a tal tema.

Iniciamos o terceiro capítulo com alguns conceitos relativos à topologia da reta necessários para a compreensão dos resultados que se seguirão. Em seguida, abordamos duas versões do Teorema do Valor Intermediário, definimos ponto fixo de uma função e fizemos alguns exemplos, enunciamos e demonstramos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e mostramos sua equivalência com o Teorema do Valor Intermediário. Finalizamos o capítulo apresentando o Teorema do Ponto Fixo de Banach e mostrando como podemos obter as raízes de uma equação usando ponto fixo e métodos iterativos, destacando como a convergência de alguns métodos iterativos está ligada a teorias de pontos fixos e mostramos alguns métodos clássicos para a obtenção de raízes.

No último capítulo descrevemos a atividade que foi realizada com alguns estudantes da graduação em Matemática. Tal atividade fez uso do GeoGebra e teve como objetivos abordar o conceito de ponto fixo, explicar como podemos determiná-los de forma algébrica e de forma geométrica e apresentar sua relação com métodos iterativos para determinar raízes de equações. Ao final da atividade os estudantes responderam a um questionário via Google Forms sobre a atividade realizada. Terminamos o capítulo fazendo a análise das impressões dos estudantes e transcrevendo algumas de suas respostas, mostrando assim suas considerações sobre a atividade em si, bem como suas impressões acerca de sua aplicabilidade em sala de aula e possíveis sugestões de melhoria da mesma.

CAPÍTULO 1

Algumas Dissertações do PROFMAT que Abordam os Temas Ponto Fixo e Métodos Iterativos

Iniciamos o capítulo com uma breve apresentação de trabalhos recentes que abordam o tema Ponto Fixo. Embora tenhamos consciência de que Teorias de Ponto Fixo são ferramentas fundamentais em diversos trabalhos acadêmicos na área de Matemática Pura e Aplicada, nosso foco foi pesquisar o próprio banco de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT, 2024), buscando trabalhos que tivessem alguma similaridade com o nosso. Para tal, buscamos no referido banco de dissertações, aquelas que abordassem Pontos Fixos ou Métodos Iterativos e faremos, na sequência do capítulo, uma breve descrição de alguns deles.

O primeiro, (BARROS, 2013), que tem como título "O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas Aplicações", faz, inicialmente, uma abordagem sobre a teoria dos espaços métricos a fim de apresentar o Teorema do Ponto Fixo de Banach (que abordaremos no capítulo 3). Em seguida, aplica este teorema na resolução de algumas equações não lineares usando um método iterativo. Por fim, apresenta três aplicações do teorema: Teorema de Existência e Unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias; compressão de imagens na internet e; como funciona o buscador do Google e qual é a causa do seu sucesso.

O segundo, (ALBUQUERQUE, 2014), com título "Ponto fixo: uma introdução no Ensino Médio", tem como objetivo produzir um referencial teórico relacionado aos conceitos de ponto fixo que possibilite aos alunos do Ensino Médio desenvolver as habilidades e competências relacionadas à Matemática. O autor inicia o seu trabalho definindo o conceito de ponto fixo a partir de uma analogia com a brincadeira "amigo-secreto"e depois, dando um exemplo de função que possui ponto fixo.

Foram apresentados vários exemplos contextualizados envolvendo a ideia de ponto fixo. Um deles, em resumo, é: "Dadas duas escalas termométricas A e B, existe alguma temperatura que possui o mesmo valor nas duas escalas?". Depois de mostrar que a resposta é afirmativa, fez uma observação sobre duas escalas conhecidas: Celsius e Fahrenheit. Estabelecendo-se uma expressão que permita transformar medidas de uma escala para outra, a temperatura – 40 permanece fixa.

Os exemplos apresentados foram muito interessantes, pois permitem aos alunos entender de forma bem simples o conceito de ponto fixo. Em seguida, o autor fez uma análise sobre a existência e a quantidade de pontos fixos em algumas funções: afim, quadrática, modular, funções ímpares, composição de funções e funções inversas.

Dando sequência, (ALBUQUERQUE, 2014) apresenta o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o exemplifica de forma contextualizada. Em seguida, discorre sobre a resolução de equações pelo método das aproximações sucessivas e finaliza o trabalho apresentando o Teorema do Ponto Fixo de Banach e como aplicá-lo.

O terceiro, "Números Felizes, Representação Posicional e Pontos Fixos", de (MATA, 2015), apresenta o tema ponto fixo por outra perspectiva. O foco deste trabalho é o estudo de números felizes[1] em qualquer base posicional, e um dos tópicos é determinar os pontos fixos da "função felicidade". Além disso, o autor mostra como utilizar uma planilha eletrônica para trabalhar este conteúdo no ensino fundamental e médio. Desta forma, mostra que é possível utilizar os números felizes como tema para discutir, introduzir e motivar os estudos de outros conceitos em uma sala de aula.

A última dissertação analisada na base de dados do PROFMAT, "Teoremas de Ponto Fixo e Aplicações para o Ensino Médio", (RIBEIRO, 2020), tem como objetivo estudar os teoremas de Ponto Fixo de Banach, Brouwer e Schauder, suas respectivas demonstrações e aplicações. A autora inicia apresentando alguns conceitos básicos para compreensão dos teoremas, proposições e propriedades que serão abordados ao longo do trabalho.

Além disso, outro objetivo desta dissertação é abordar de forma intuitiva o conceito de ponto fixo para que o mesmo possa ser ensinado aos alunos do Ensino Fundamental e Médio. A autora apresenta alguns tópicos: um exemplo de questão envolvendo ponto fixo de função polinomial em um exame de ingresso no ensino superior, utilização do software GeoGebra para fazer um experimento a fim de determinar o ponto fixo da função raiz quadrada, aplicação à geometria fractal (compressão de imagens) e ao buscador Google.

Quando buscamos trabalhos que abordem métodos iterativos, encontramos diversas dissertações no banco (PROFMAT, 2024). Dentre elas citamos (BROCKVELD, 2021) e (SOUZA,

[1] Números caracterizados em 1994 por Richard Guy no livro Unsolved Problems in Number Theory e que possuem interessantes propriedades aritméticas.

2019). O trabalho de (BROCKVELD, 2021) tem como objetivo produzir materiais didáticos que ajudem professores do ensino básico a explorar métodos iterativos durante as aulas, adaptando assim conteúdos do ensino superior para o ensino básico. O autor apresenta alguns conceitos inicialmente e enuncia e demonstra alguns teoremas de análise necessários para a compreensão dos métodos iterativos que serão estudados. Dentre estes métodos estão o método da bisseção e o método de Newton. Em seguida, apresenta sua proposta didática que tem por base um livro dinâmico[2] na plataforma GeoGebra e um conjunto de vídeos no Youtube.

O trabalho de (SOUZA, 2019) tem como objetivo fazer a análise de cinco métodos numéricos (Bisseção, Posição Falsa, Ponto Fixo, Newton e Secante) para encontrar raízes de funções que são ensinadas no Ensino Médio, como polinomiais, trigonométricas, logarítmicas e exponenciais. O autor desenvolveu um programa no MATLAB para ilustrar o funcionamento dos métodos. Desta forma, acredita que esta aplicação pode ser importante para aumentar o interesse dos estudantes do Ensino Médio na área de matemática e das tecnologias, pois, segundo ele, "os mesmos enxergarão de maneira simples e iterativa as soluções de muitos problemas nos quais suas resoluções manuais seriam cansativas". O autor inicia seu trabalho apresentando alguns conceitos e teoremas importantes para a compreensão dos métodos. Em seguida faz a análise de cada método, fazendo uma consideração ao final de cada análise sobre a eficiência do método. Por último, mostra a utilização do programa desenvolvido no MATLAB.

Nosso trabalho terá como um dos objetivos propor uma atividade didática que aborde o tema pontos fixos (algo que também foi feito, por exemplo, por (RIBEIRO, 2020)) e métodos iterativos (que também foi feito por (BROCKVELD, 2021) e (SOUZA, 2019)). Um fator que diferencia nosso trabalho das dissertações citadas é o fato de termos feito também uma aplicação da atividade didática proposta para um grupo de sete estudantes de Graduação em Matemática. Além disso, tanto suas percepções sobre a mesma quanto suas impressões sobre suas possibilidades de aplicação em sala de aula foram analisadas tanto durante a própria atividade quanto através de um questionário respondido pelos participantes.

Outro de nossos objetivos será demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (como também foi feito por (BARROS, 2013) e (RIBEIRO, 2020)) e sua equivalência com o Teorema do Valor Intermediário. Também abordaremos, tanto no texto, quanto na atividade didática, a relação entre pontos fixos e raízes de funções (algo que também foi apresentado por (SOUZA, 2019)).

Por fim, destacamos que nosso trabalho tem similaridade com os diversos trabalhos citados e, ao mesmo tempo, é complementar aos mesmos. Uma diferença que citamos se refere à aplicação da atividade didática e na análise das impressões dos participantes. Outro ponto que ressaltamos é que, ao focarmos na conexão entre pontos fixos e obtenção de raízes, apresentamos métodos

[2] <https://www.geogebra.org/m/rrszhwre>

que podem ser aplicados a funções de diversos tipos e que não demandam, via de regra, o uso de derivadas. Este último aspecto evidencia as possibilidades de trabalhar os conceitos abordados neste trabalho e ideias semelhantes à atividade didática proposta com turmas do Ensino Médio, ampliando as perspectivas de exploração dos conceitos envolvidos.

Capítulo 2

A BNCC e as Tecnologias Digitais

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (EDUCAÇÃO, 2017) é um documento que regulamenta a educação básica brasileira atual. Ela determina quais competências e quais habilidades devem ser desenvolvidas pelo aluno em cada componente curricular e em cada etapa de ensino. Além disso, determina que essas habilidades devem ser as mesmas, independente de onde o aluno more ou estude.

De acordo com a própria BNCC, seu objetivo é garantir que todo aluno brasileiro tenha seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento assegurados. Este documento é um instrumento fundamental para que os sistemas, redes e escolas garantam um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes.

Como já indicado na introdução, nosso trabalho abordará o conceito de pontos fixos, que estão intimamente ligados ao estudo de funções e suas representações geométricas. Considerando-se a importância da BNCC, pesquisamos nela algumas habilidades que podem ser trabalhadas ao estudar o conceito de funções e que são importantes para se abordar o conceito de ponto fixo. Além disso, como pretendemos utilizar recursos tecnológicos e softwares educacionais, também pesquisamos habilidades que se referem ao uso de tecnologia na sala de aula.

1. (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

2. (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

3. (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Ao realizar a atividade sobre Ponto Fixo com o uso do software GeoGebra, a Competência Específica 4 - Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas - será bastante trabalhada. De acordo com a BNCC:

> “As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. [...] Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.” (EDUCAÇÃO, 2017)

As habilidades relacionadas a essa competência são listadas a seguir:

1. (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

2. (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

Outro aspecto salientado pela BNCC e que também conseguimos explorar, através do GeoGebra, é o uso de planilhas eletrônicas e a interpretação de seus dados.

> "Além disso, a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas."(EDUCAÇÃO, 2017)

Na atividade didática (ver Capítulo 4), o uso de um software de geometria dinâmica nos permitirá explorar a geometria de diversas funções, com o uso de representações algébricas e geométricas, conforme indicado em habilidades da BNCC. Um trabalho que apresenta discussões sobre a importância de se apresentar aos estudantes mais de uma representação das diversas funções é “O Ensino de Funções Exponenciais no Novo Ensino Médio: Aspectos Legais, Análise de Livros Didáticos e a Visão de Professores de Matemática” (FERREIRA, 2023), Capítulo 4. Na atividade didática (ver Capítulo 4), as planilhas possibilitam aos alunos visualizarem a convergência dos métodos iterativos criados para determinar raízes de funções. A exploração conjunta da representação gráfica das funções consideradas, a estimativa de localização de possíveis raízes e a evidência de convergência das iterações feita através das planilhas, pode permitir aos professores a exploração de diversos conceitos matemáticos dentro da mesma atividade didática.

2.1 Tecnologias Digitais

O mundo vem se transformando a cada dia e de forma cada vez mais tecnológica. A sociedade está se reinventando para acompanhar essa evolução e com a educação não poderia ser diferente. A tecnologia está presente na vida de todos, inclusive na vida dos estudantes, e isto não pode ser ignorado. Sendo assim, é de extrema importância que a escola busque continuamente meios de aliar educação e tecnologia.

Inclusive, o uso de tecnologias digitais é proposto e incentivado pelos documentos orientadores da educação:

> “O Currículo Referência, em conformidade com a BNCC, propõe e incentiva o uso de tecnologias digitais (calculadora, planilhas eletrônicas, softwares etc.) como apoio ao desenvolvimento das habilidades matemáticas. O uso de tecnologias para fins educacionais, além de tornar as aulas mais atrativas e despertar a curiosidade e atenção dos estudantes, permite o desenvolvimento de competência crítica para utilizarem esse recurso de forma responsável e consciente, a serviço das diferentes práticas sociais.”(SEEMG, 2021)

Porém, o uso de tecnologia não deve ser visto como uma obrigação, mas sim, como um aliado. A tecnologia tem diversos recursos, benefícios e isto deve ser aproveitado. Devemos sempre pensar em propiciar ao aluno diferentes oportunidades de aprendizado, experiências, vivências, para que o mesmo tenha um bom desenvolvimento e uma formação a mais completa possível.

> “[...] as tecnologias digitais trouxeram um grande avanço no que se refere à aprendizagem, pois aliam oralidade, escrita, experimentação e visualização. Dessa forma, o ideal é conciliar essas tecnologias para contribuir com um melhor desenvolvimento cognitivo do aluno.” (CONCEIÇÃO, 2019)

Além disso,

> "Esses aspectos que caracterizam a experimentação com tecnologias têm como pano de fundo uma perspectiva na qual a produção de conhecimentos matemáticos assume uma dimensão heurística, de descoberta, sendo esta apropriada aos cenários de ensino e aprendizagem de Matemática. A descoberta de padrões ou singularidades entre representações de objetos matemáticos (ou componentes dessas representações) propulsiona a produção de sentidos matemáticos. Há, assim, uma dimensão "empírica" envolvendo pensamento e aprendizagem matemática." (BORBA; DA SILVA; GADANIDIS, 2014)

Pensando nisso, a tecnologia é mais um recurso que pode ser utilizado para garantir o que diz o artigo segundo da LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação): "A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho."

Entretanto, a tecnologia deve ser utilizada com cautela. Por exemplo, reproduzir algo no computador que poderia ser feito com uso de papel e caneta não é inovador, não traz novos conhecimentos para o estudante e não o instiga a estudar o assunto. Portanto, deve-se usar a tecnologia como uma ferramenta que permite fazer o que não é possível, ou é difícil, com papel e caneta. Deve-se pensar em tecnologia como um recurso a mais, com novas possibilidades, e não, como um reprodutor do que já se faz no papel. Ou seja, a tecnologia não deve ser domesticada.

> "domesticar uma tecnologia significa utiliza-lá de forma a manter intacta práticas que eram desenvolvidas com uma mídia que é predominante em um determinado momento da produção de conhecimento. "(BORBA; DA SILVA; GADANIDIS, 2014)

É claro que o uso de tecnologias digitais não sanará todos os problemas da educação. Assim, vale destacar que, neste estudo, o uso de tecnologias digitais foi considerado como um aliado da educação. Nesse sentido, podemos pensar no conceito seres-humanos-com-mídias, que aborda a pespectiva de interação entre seres humanos e tecnologias digitais gerando novos conhecimentos e produzindo novas tecnologias.

> "Discutimos em diversos textos a noção de que o conhecimento é produzido por coletivos de seres-humanos-com-mídias, sendo as mídias nesse caso o lápis e papel, um software, a internet, etc. (BORBA; VILLARREAL, 2005). Nessa visão o conhecimento é gerado e moldado por humanos e por tecnologias que são situados historicamente. São coletivos de humanos e tecnologias disponíveis que produzem novas tecnologias e novos conhecimentos e caracterizam o que significa ser humano em um dado momento histórico (BORBA, 2012), Assim, a demonstração em Matemática se desenvolveu de forma mais completa com a disponibilidade de papel barato, da mesma forma como simulações foram incentivadas pelos computadores.

> Humanos criam essas tecnologias e são influenciados por elas, gerando um conhecimento historicamente datado. Entendemos que isso se dá também no conhecimento construído em sala de aula."(BORBA; DA SILVA; GADANIDIS, 2014)

Como pudemos observar, a tecnologia possui diversos benefícios e é extremamente válido usá-los em favor da educação.

Um recurso que tem sido muito utilizado nas aulas de matemática é o software GeoGebra. Como pode ser visto na página do Instituto GeoGebra, sediado na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC SP), "O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação." Para mais informações sobre o GeoGebra, ver (PUC-SP, 2024).

O sotware GeoGebra tem sido bastante usado porque é gratuito, fácil de usar, tem ferramentas poderosas, é bastante dinâmico e disponível em vários idiomas. São inúmeras as possibilidades que esse software oferece e isso possibilita várias descobertas, além da possibilidade de visualização de gráficos e figuras geométricas. Isso desperta o interesse e a curiosidade dos alunos, por isso é tão válido utilizá-lo nas aulas de matemática. Programas como o GeoGebra fazem parte do que (BORBA; DA SILVA; GADANIDIS, 2014) classificam como a quarta fase do uso das tecnologias digitais no ensino.

> "Softwares educativos, como o GeoGebra, caracterizam a quarta fase e podem ser utilizados durante as aulas de matemática como mediadores da aprendizagem, pois permitem a experimentação e descoberta através da manipulação e visualização, contribuindo para a construção do conhecimento."(CONCEIÇÃO, 2019)

Ainda sobre as possibilidades de uso do GeoGebra, Borba, da Silva e Gadanidis destacam a importância da visualização na aprendizagem matemática:

> "A visualização envolve um esquema mental que representa a informação visual ou espacial. É um processo de formação de imagens que torna possível a entrada em cena das representações dos objetos matemáticos para que possamos pensar matematicamente. Ela oferece meios para que conexões entre representações possam acontecer. Assim, a visualização é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem matemática."(BORBA; DA SILVA; GADANIDIS, 2014)

Tendo em mente os benefícios da tecnologia, as potencialidades proporcionadas pelo GeoGebra e suas possibilidades, este software será utilizado na atividade sobre ponto fixo que será desenvolvida com alunos de Graduação em Matemática, a maioria deles do curso de Licenciatura em Matemática, e descrita no Capítulo 4.

CAPÍTULO 3

Pontos Fixos

Neste capítulo, vamos apresentar conceitos sobre Pontos Fixos de funções, enfocando aspectos algébricos e geométricos. Também pretendemos explorar a aplicabilidade das teorias aqui apresentadas na obtenção de raízes de funções reais. Apesar de existirem diversos resultados que nos permitem obter um ponto fixo, apresentaremos a demonstração rigorosa apenas do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, explorando sua geometria, sua equivalência com o Teorema do Valor Intermediário.

Inicialmente, vamos definir alguns conceitos necessários para a compreensão dos resultados que apresentaremos. Os conceitos são relativos à topologia da reta e mais informações sobre estes conceitos podem ser vistas em (LIMA, 2006).

Definição 3.0.1 (Ponto Interior)**.** *Um ponto a é interior ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se existe um número $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ está contido em X.*

Exemplo 3.0.1. *Considere $C = (1, 2] \cup \{5\}$.*

O ponto $\dfrac{3}{2} \in C$ e é interior a C. Para verificar isso, tome $\epsilon = \dfrac{1}{4}$. O intervalo $\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4}\right) = \left(\dfrac{5}{8}, \dfrac{7}{8}\right) \subset C$. Por outro lado, $\{5\} \in C$ mas não é ponto interior à C, pois não existe intervalo contendo 5 que esteja contido em C.

Outro exemplo de ponto que pertence a C mas não é interior é o 2. Note que todo intervalo aberto contendo 2 conterá pontos exteriores a C.

Definição 3.0.2 (Interior do Conjunto)**.** *O interior de um conjunto X é o conjunto dos pontos interiores a X, representado pela notação $int\ X$.*

Exemplo 3.0.2. *Considerando ainda o conjunto $C = (1, 2] \cup \{5\}$, seu interior é o intervalo $(1, 2)$.*

Definição 3.0.3 (Vizinhança)**.** *Quando $a \in int\ X$, diz-se que o conjunto X é uma vizinhança do ponto a.*

Definição 3.0.4 (Conjunto aberto)**.** *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto quando $A = int\ A$, isto é, quando todos os pontos de A são interiores a A.*

Definição 3.0.5 (Ponto Aderente)**.** *Um ponto a é aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a for limite de alguma sequência de pontos $x_n \in X$. É claro que todo ponto $a \in X$ é aderente a X, basta considerar todos os $x_n = a$.*

Definição 3.0.6 (Fecho de um Conjunto)**.** *O conjunto $\overline{X}$ formado por todos pontos aderentes a X é chamado de fecho deste conjunto.*

Exemplo 3.0.3. *Se $C = (1, 2] \cup \{5\}$, o fecho de C é dado por $\overline{C} = [1, 2] \cup \{5\}$.*

Definição 3.0.7 (Conjunto Fechado)**.** *Um conjunto X é fechado quando $X = \overline{X}$, ou seja, quando todo ponto aderente a X pertence a X.*

Exemplo 3.0.4. $F = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$ *é fechado.*

Definição 3.0.8 (Cisão)**.** *Uma cisão de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma decomposição $X = A \cup B$ tal que $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$, ou seja, nenhum ponto de A é aderente a B e nenhum ponto de B é aderente a A. A decomposição $X = X \cup \emptyset$ chama-se cisão trivial.*

Exemplo 3.0.5. *Se considerarmos $X = (11, 12) \cup (12, 13)$ obtemos uma cisão se considerarmos $X = A \cup B$, com $A = (11, 12)$ e $B = (12, 13)$.*

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser vista em (LIMA, 2006), será fundamental para a demonstração do Teorema do Valor Intermediário, que faremos a seguir.

Teorema 3.0.1. *Um intervalo da reta só admite a cisão trivial.*

Na próxima seção, abordaremos um dos teoremas sobre Pontos Fixos mais conhecidos: o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Em consultas a livros de análise ou mesmo de cálculo (por exemplo, (LIMA, 2006) e (LIMA, 2003)), é possível encontrar diversos resultados que, mesmo variando nas hipóteses, têm o mesmo objetivo: estabelecer condições para que uma determinada função tenha ponto fixo em determinado intervalo do seu domínio.

3.1 Os Teoremas do Ponto Fixo de Brouwer e do Valor Intermediário

Iniciemos apresentando o Teorema do Valor Intermediário, que estabelece uma propriedade fundamental das funções contínuas:

Teorema 3.1.1 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. Sejam os conjuntos $A = \{x \in [a,b]; f(x) \leq d\}$ e $B = \{x \in [a,b]; f(x) \geq d\}$. Temos que A e B são fechados. Além disso, $\overline{A} \cup B = A \cup B = A \cup \overline{B}$ e $[a,b] = A \cup B$.

Se $A \cap B \neq \emptyset$, tem-se $f(c) = d$ para qualquer $c \in A \cap B$, e então o teorema está demonstrado.

Se tivéssemos $A \cap B = \emptyset$, então $[a,b] = A \cup B$ seria uma cisão não trivial, o que não é possível de acordo com o Teorema 3.0.1.

Assim, $A \cap B \neq \emptyset$ e o teorema está demonstrado. □

Na sequência, veremos uma outra versão do Teorema do Valor Intermediário, equivalente à primeira. Estas duas versões serão utilizadas na sequência do texto.

Teorema 3.1.2 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Se uma função $g(x)$ for contínua em $[a,b]$ e $g(a)g(b) < 0$, então $g(c) = 0$ para algum $c \in [a,b]$.*

Vale observar que os dois teoremas anteriores são equivalentes. Na verdade, o Teorema 3.1.2 é um caso especial do Teorema 3.1.1, já que $g(a)$ e $g(b)$ tem sinais contrários (um é positivo e outro é negativo) e $d = 0$. Por outro lado, ao assumir que o Teorema 3.1.2 é verdadeiro, conclui-se que o Teorema 3.1.1 também é. De fato: suponha que $f(x)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1.1. Então, $g(x) = f(x) - d$ satisfaz as condições do Teorema 3.1.2. Assim, existe c tal que $g(c) = 0$. Mas $g(c) = f(c) - d$, ou seja, $f(c) = d$ (conforme o Teorema 3.1.1).

A seguir, apresentamos a definição de ponto fixo de uma função:

Definição 3.1.1 (Ponto Fixo)**.** *Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$ é chamado ponto fixo da função f.*

Exemplo 3.1.1. *Considere a função $f(x) = 2x - 1$. Observe que $f(1) = 1$. Logo, 1 é ponto fixo dessa função.*

Dado o gráfico de uma função, uma maneira simples de verificarmos se a mesma possui pontos fixos é verificando se há interseção entre tal gráfico e o da função identidade.

Exemplo 3.1.2. *Seja a função $f(x) = 3x + 2$. Observe que esta função intersecta a função identidade em $(-1, -1)$. Logo -1 é um ponto fixo.*

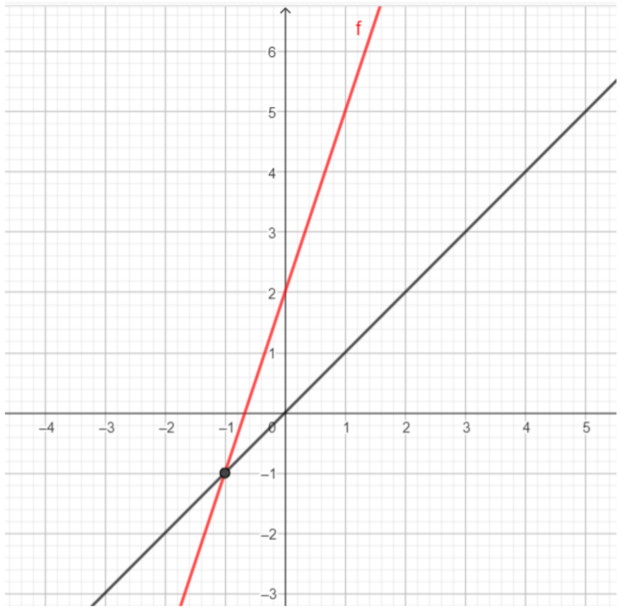


Figura 1 – Representação gráfica da interseção entre os gráficos das funções $f(x) = 3x + 2$ e $y = x$.

Uma função quadrática pode ter até dois pontos fixos. Veja alguns exemplos:

Exemplo 3.1.3. *A função $f(x) = x^2 + 1$ não possui pontos fixos pois não há interseção entre o seu gráfico e o gráfico da função identidade.*

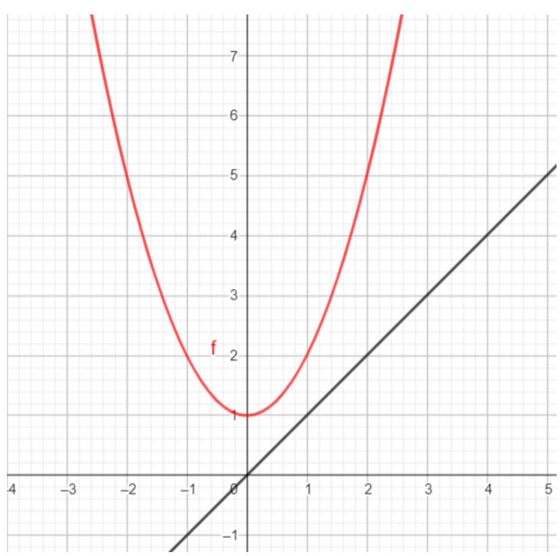


Figura 2 – Representação gráfica da interseção entre os gráficos das funções $f(x) = x^2 + 1$ e $y = x$.

Exemplo 3.1.4. *A função $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{4}$ possui um ponto fixo.*

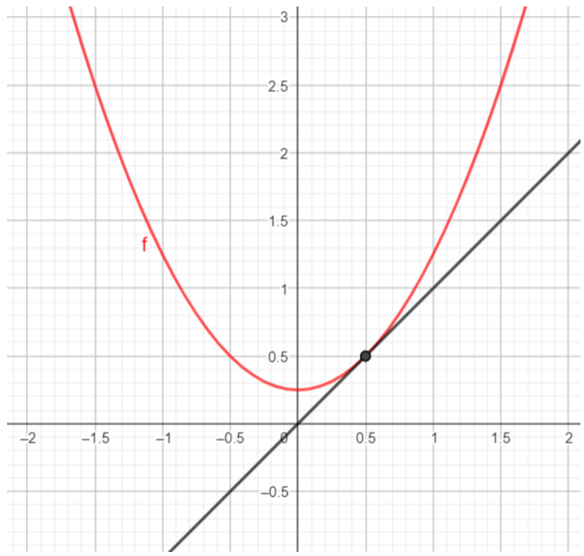


Figura 3 – Representação gráfica da interseção entre os gráficos das funções $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{4}$ e $y = x$.

Exemplo 3.1.5. *Já a função* $f(x) = -x^2 + x + 2$ *possui dois pontos fixos:*

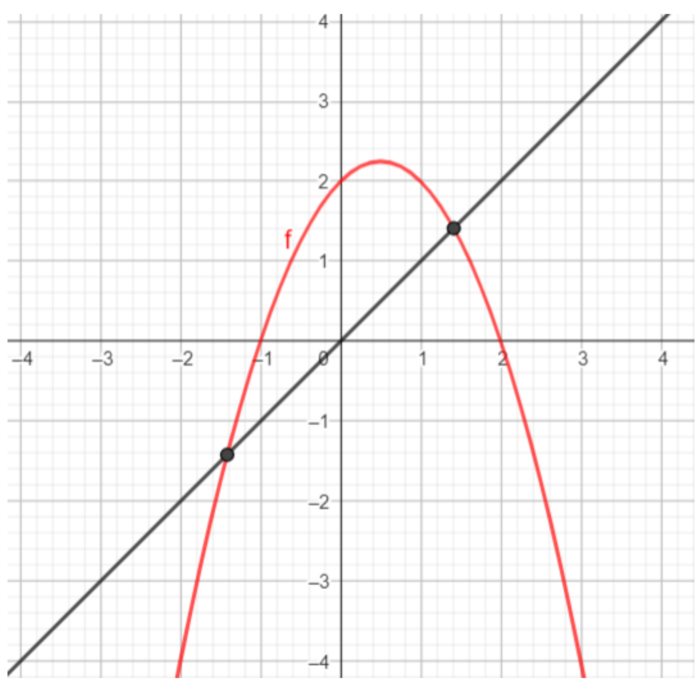


Figura 4 – Representação gráfica da interseção entre os gráficos das funções $f(x) = -x^2 + x + 2$ e $y = x$.

Veja agora outros exemplos com funções que não são polinomiais:

Exemplo 3.1.6. *A função* $f(x) = 2$*sen x possui* 3 *pontos fixos:*

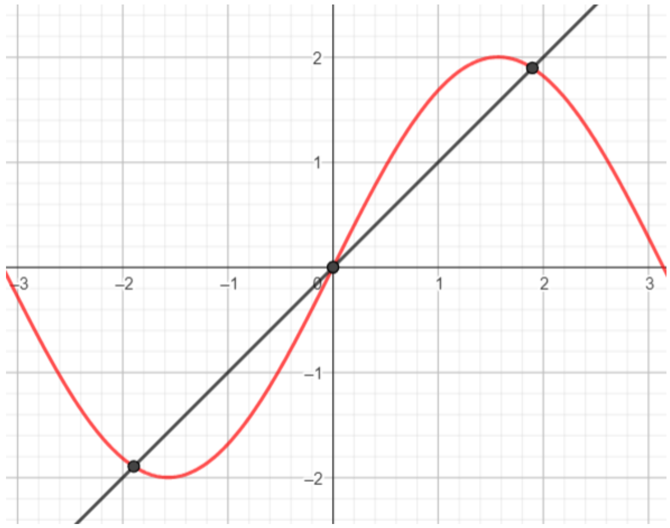


Figura 5 – Representação gráfica da interseção entre os gráficos das funções $f(x) = 2\text{sen}x$ e $y = x$.

Os pontos fixos da função $f(x) = 2\text{sen}x$ são claramente visualizados graficamente na figura. Um deles, o ponto $(0, 0)$, é facilmente identificável e os outros dois pontos não são, embora seja fácil obtermos sua localização aproximada (um deles tem abscissa próxima e à direita de -2 e outro tem abscissa próxima e à esquerda de 2).

Exemplo 3.1.7. *A função* $f(x) = \log x$ *não possui pontos fixos.*

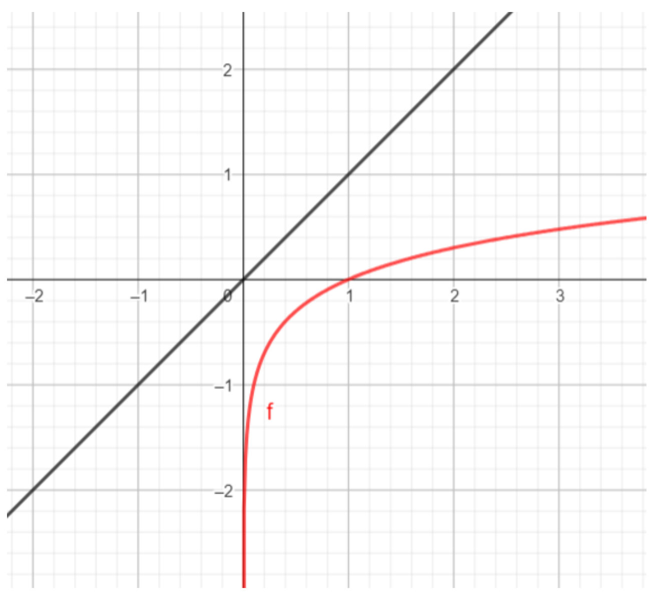


Figura 6 – Representação gráfica da interseção entre os gráficos das funções $f(x) = \log x$ e $y = x$.

Teorema 3.1.3 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer - versão unidimensional)**.** *Dada uma função contínua* $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$, *existe* $c \in [a, b]$ *tal que* $f(c) = c$.

Vamos usar o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é válido.

Demonstração. Seja uma função $g : [a.b] \longrightarrow [a, b]$, contínua, definida por $g(x) = f(x) - x$. Se $f(a) = a$ ou se $f(b) = b$, já tem-se um ponto fixo. Suponha que $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$. Desta forma, $f(a) > a$ e $f(b) < b$. Ou seja, $f(a) - a > 0$ e $f(b) - b < 0$. Assim, $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$. Se $g(c) = 0$, então $f(c) - c = 0$, ou seja, $f(c) = c$. Logo, c é ponto fixo de f. □

Provamos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer a partir do Teorema do Valor Intermediário. No entanto, tais resultados são equivalentes e é o que provaremos a seguir, estabelecendo o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer de modo independente e, a partir dele, demonstrando o Teorema do Valor Intermediário. Artigos que abordam essa equivalência são: (PEREIRA; FERREIRA; MARTINS, 2018), (BROWN., 2020) e (SHASHKIN, 1991).

Inicialmente, será apresentado um lema que será utilizado na demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. A demonstração deste lema esta disponível em (LIMA, 2006).

Lema 3.1.1. *Sejam dados os intervalos $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, tais que*

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$$

Se $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |I_n| = 0$, *então existe um único* $l \in \mathbb{R}$ *tal que* $\bigcap\limits_{n \geq 1} I_n = \{l\}$.

Agora, provaremos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer de forma independente do Teorema do Valor Intermediário.

Teorema 3.1.4 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer)**.** *Seja $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ uma função contínua tal que $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$. Sendo assim, existe pelo menos um número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.*

Demonstração. A função f é uma aplicação contínua do intervalo $[a, b]$ nele mesmo. Se $f(a) = a$ ou se $f(b) = b$, o teorema está provado. Se não, definimos o intervalo $I_0 = [a, b]$ e determinamos o seu ponto médio $c_0 = \dfrac{a + b}{2}$. Se c_0 for ponto fixo, o teorema está provado. Caso contrário, utilizaremos este ponto médio para obter um subintervalo I_1 de I_0 definido da forma que mencionaremos a seguir.

Por hipótese, ao aplicar a função nos extremos do intervalo $[a, b]$, obtemos que $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$, ou seja, ao aplicar a função no extremo à esquerda, obtemos um ponto à sua direita. E, ao aplicar a função no extremo à direita, obtemos um ponto à sua esquerda.

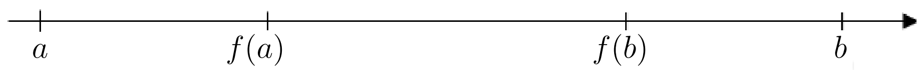


Figura 7 – Representação gráfica do comportamento da função f quando aplicada em seus extremos.

Se $f(c_0)$ estiver à esquerda de c_0, tomaremos o intervalo $I_1 = [a, c_0]$. Mas se $f(c_0)$ estiver à direita de c_0, tomaremos o intervalo $I_1 = [c_0, b]$.

Repetimos o processo e determinamos o ponto médio de I_1. Se este ponto médio for ponto fixo, o teorema está provado. Caso contrário, a partir deste ponto médio tomamos um subintervalo I_2 de I_1 da mesma forma que fizemos anteriormente. Ao repetir este processo e sem obter o ponto fixo nos pontos médios dos intervalos, teremos um número infinito de subintervalos encaixados, fechados e com comprimento tendendo a zero (já que a cada etapa do processo o tamanho do intervalo é reduzido à metade). Pelo Lema que enunciamos anteriormente, existe um único $x_0 \in \mathbb{R}$ que pertence a todos os intervalos.

Seja $y_0 = f(x_0)$. Provaremos que $x_0 = y_0$. Suponha $x_0 \neq y_0$. Sem perda de generalidade, vamos considerar $x_0 < y_0$.

A função f é contínua em x_0. Desta forma, pontos muito próximos de x_0 terão imagens muito próximas de $f(x_0) = y_0$. De modo mais formal, temos: dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \epsilon$ para todo x tal que $|x - x_0| < \delta$.

Considere ϵ de forma que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ sejam disjuntos.

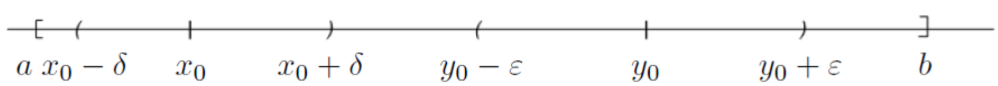


Figura 8 – Representação gráfica dos intervalos considerados

Note que todos os pontos da δ-vizinhança de x_0 têm imagem na ϵ-vizinhança de y_0. Ou seja, todos os pontos de $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ são aplicados à sua direita.

Por outro lado, $I_n \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ se n for suficientemente grande e x_0 pertence a todos os intervalos fechados I_n. Note que da forma como construímos os intervalos I_n, alguns pontos são aplicados à sua direita e outros pontos são aplicados à sua esquerda, o que não é possível devido à construção feita. Temos então uma contradição, que veio do fato de considerarmos $x_0 \neq y_0$.

Portanto, concluímos que $x_0 = y_0$, ou seja, $x_0 = f(x_0)$ e, portanto, x_0 é ponto fixo de f.

□

Nos Teoremas 3.1.1 e 3.1.4, provamos, respectivamente, os Teoremas do Valor Intermediário e do Ponto Fixo de Brouwer, de modo independente um do outro. Nos dois próximos Teoremas, veremos que tais resultados são, na verdade, equivalentes.

Teorema 3.1.5. *Suponhamos válido o Teorema do Valor Intermediário. Então, se uma função f for contínua em $[a, b]$ com $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.*

Demonstração. Se $f(a) = a$ ou se $f(b) = b$, o teorema está demonstrado. Caso contrário, considere $g(x) = x - f(x)$ uma função contínua. Assim, temos que $g(a)g(b) < 0$. Desta forma, existe c tal que $g(c) = 0$, ou seja, tal que $c - f(c) = 0$. Daí temos $f(c) = c$.

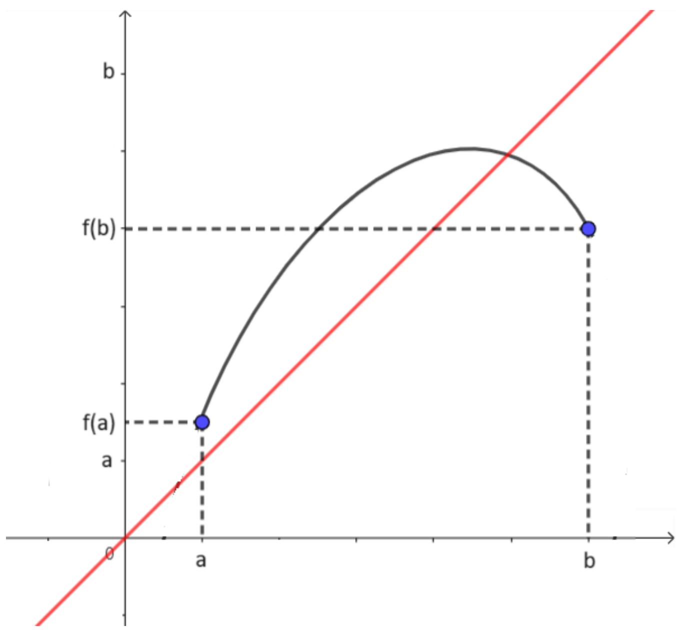


Figura 9 – Representação gráfica do Teorema 3.1.5.

□

Agora, provaremos que o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer implica no Teorema do Valor Intermediário. E desta forma, provaremos que estes dois teoremas são equivalentes.

Teorema 3.1.6. *Suponhamos válido o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Então, se $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ for contínua e tal que $g(a)g(b) < 0$, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$.*

Demonstração. Se $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$, considere $f(x) = g(x) + x$ que satisfaz as hipóteses do teorema anterior. Assim, existe c tal que $f(c) = c$, ou seja, $g(c) + c = c$ e, portanto, $g(c) = 0$.

Se $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$, basta considerar $f(x) = x - g(x)$. □

3.2 Pontos fixos como auxiliares para a obtenção de raízes de equações e o Teorema do Ponto Fixo de Banach

Resolver uma equação pode ser entendido como determinar os valores de x, caso existam, tais que $f(x) = 0$. Porém, nem sempre determinar o conjunto solução de uma equação é uma tarefa simples. Se pudermos reescrever essa equação na forma $g(x) = x$, transformamos o nosso problema de resolver uma equação em um problema de ponto fixo. Ou seja, ao determinar os pontos fixos de g, determinaremos as raízes de f.

Na sequência do texto, utilizaremos métodos iterativos, que são bastante aplicados em matemática computacional, e que se constituem em procedimentos que utilizam um valor inicial para gerar uma sequência de soluções aproximadas para um dado problema, no qual a n -ésima aproximação (chamada de "iteração") é obtida a partir da anterior (calculando-se sua imagem pela própria função).

Vamos iniciar com um exemplo que, de modo bastante simples, tenta transformar o problema de encontrar uma raiz de uma função f em um problema de obtenção de um ponto fixo para alguma função auxiliar.

Exemplo 3.2.1. *Vamos determinar uma raiz de $f(x) = x^2 - x - 1$ usando ponto fixo.*

Podemos reescrever essa equação de três formas:

1. $x = x^2 - 1$
2. $x = 1 + \dfrac{1}{x}$
3. $x = \sqrt{x+1}$

A partir de um valor x_0 escolhido, definiremos uma sequência associada a cada equação acima:

- *sequência 1:* $x_{n+1} = x_n^2 - 1$
- *sequência 2:* $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$
- *sequência 3:* $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$

Usando uma planilha feita no GeoGebra (como é o caso da planilha abaixo) ou em outro programa computacional, podemos atribuir um valor inicial para cada sequência e determinar os termos seguintes através das expressões 1., 2. e 3., anteriormente estabelecidas.

Na planilha a seguir, as duas primeiras colunas correspondem a iterações referentes à sequência 1., com valor inicial 0*, as próximas duas colunas correspondem a iterações referentes à sequência 2., com valor inicial* 2 *e as duas últimas colunas correspondem a iterações referentes à sequência 3., com valor inicial* 1.

0	-1	2	1.5	1	1.41
-1	0	1.5	1.67	1.41	1.55
0	-1	1.67	1.6	1.55	1.6
-1	0	1.6	1.63	1.6	1.61
0	-1	1.63	1.62	1.61	1.62
-1	0	1.62	1.62	1.62	1.62
0	-1	1.62	1.62	1.62	1.62
-1	0	1.62	1.62	1.62	1.62
0	-1	1.62	1.62	1.62	1.62
-1	0	1.62	1.62	1.62	1.62
0	-1	1.62	1.62	1.62	1.62
-1	0	1.62	1.62	1.62	1.62
0	-1	1.62	1.62	1.62	1.62
-1	0	1.62	1.62	1.62	1.62
0	-1	1.62	1.62	1.62	1.62
-1	0	1.62	1.62	1.62	1.62
0	-1	1.62	1.62	1.62	1.62
-1	0	1.62	1.62	1.62	1.62
0	-1	1.62	1.62	1.62	1.62

Figura 10 – Planilha mostrando a convergência/divergência das sequências

Verificamos que a primeira sequência diverge e as outras duas convergem para aproximadamente $1,62$*. Temos uma evidência de que, um candidato a ponto fixo das sequências auxiliares e, consequentemente, a raiz da função* $f(x)$*, seja aproximadamente* $1,62$*. Retomaremos esta discussão no Exemplo 3.3.2.*

De fato, calculando-se $f(1,62)$ *obtemos* $0,0044$*. Esta raiz pode ser melhor aproximada se aumentarmos o número de iterações e de casas decimais. Para nossos propósitos, duas casas decimais serão suficientes.*

O exemplo anterior nos mostra que pode haver mais de uma maneira de associar uma dada equação a um problema de pontos fixos. Para cada um desses possíveis problemas, podemos ter convergência ou não para uma raiz e, mesmo que haja convergência, podemos ter velocidades distintas nos processos iterativos.

Alguns métodos foram criados para facilitar a obtenção das raízes de uma equação. Um método muito conhecido e que utiliza a ideia de ponto fixo é o Método de Newton (que pode ser visto em (LIMA, 2006)). Este método tem uma taxa de convergência rápida, ou seja, com poucas iterações podemos determinar os pontos fixos da função (e, consequentemente, as raízes da equação) desde que x_0 esteja próximo da raiz.

A convergência deste e de outros métodos está ligada ao Teorema do Ponto Fixo de Banach (ver (RIBEIRO, 2020)). Este conhecido teorema apresenta condições para que se obtenha um ponto fixo de uma determinada função e, diferentemente do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, garante também sua unicidade. Sua demonstração pode ser vista em (RIBEIRO, 2020) ou em (LIMA, 2003) e está fortemente ligada ao conceito de contração, que apresentaremos a seguir, no contexto que utilizamos neste trabalho.

Definição 3.2.1 (Contração)**.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$ não vazio. A função $f : I \to \mathbb{R}$ é chamada contração se existir $k \in [0, 1)$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

para todo par $x, y \in I$.

As contrações são um caso especial das funções Lipschitzianas, que são definidas de modo similar à definição anterior, para $k > 0$ arbitrário. Tais funções são contínuas e, portanto, assumem máximo e mínimo em conjuntos fechados e limitados da reta (ver, por exemplo, (LIMA, 2006), Capítulo 7, Seção 4).

Feita a definição de contração, apresentamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, também no contexto em que o utilizaremos (e não em sua versão mais geral).

Teorema 3.2.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja $M \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio, fechado e limitado. Então uma contração $f : M \to M$ possui um único ponto fixo. Mais precisamente, tomando um ponto $x_0 \in M$ e definindo-se*

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n),$$

a sequência (x_n) converge para o ponto fixo de f.

Demonstração. Sendo f uma contração, temos: $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, com $0 \leq k < 1$.

Considere $g : M \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = |x - f(x)|.$$

Observe que toda raiz de g é ponto fixo de f. De fato, se x_0 for raiz de g, então $g(x_0) = |x_0 - f(x_0)| = 0$, ou seja, $f(x_0) = x_0$ e, então, x_0 é ponto fixo de f.

Como f é uma contração e, usando propriedades dos módulos, temos:

$$\begin{aligned}
|g(x)-g(y)| &= \Big||x-f(x)|-|y-f(y)|\Big| \\
&\leq |x-f(x)-y+f(x)| \\
&\leq |x-y|+|f(x)-f(y)| \\
&\leq |x-y|+k|x-y| \\
&= (1+k)|x-y|.
\end{aligned}$$

Observe que g é uma função Lipschitziana e, de acordo com o que vimos anteriormente, é uma função contínua e assume máximo e mínimo em conjuntos fechados e limitados. Como M é fechado e limitado, então existe $x_0 \in M$ tal que $g(x_0) \leq g(x)\ \forall x \in M$.

Como o contradomínio de f é M, então $f(x_0) \in M$. Temos o caso particular:

$$g(x_0) \leq g(f(x_0)).$$

Mas $g(f(x)) = |f(x) - f(f(x))|$. E como f é contração, temos:

$$|f(x) - f(f(x))| \leq k|x - f(x)| = kg(x) \forall x \in M.$$

Como $g(x_0) \leq g(x)\ \forall x \in M$, temos:

$$g(x_0) \leq g(f(x_0)) \leq k.g(x_0).$$

Se $g(x_0) \leq k.g(x_0)$, então temos que $g(x_0) - k.g(x_0) \leq 0$, ou seja, $(1-k)g(x_0) \leq 0$.

Como $k \in [0, 1)$, $1 - k > 0$. Como $g(x) \geq 0\ \forall x \in M$, temos obrigatoriamente que $g(x_0) = 0$. Logo, x_0 é uma raiz de g e, portanto, um ponto fixo de f.

Provamos então que f tem ponto fixo. Agora iremos provar que ele é único.

Se x_0 e x_1 forem pontos fixos, temos:

$$|x_0 - x_1| = |f(x_0) - f(x_1)| \leq k|x_0 - x_1|.$$

Ou seja, $(1-k)|x_0 - x_1| \leq 0$. Como $(1-k) > 0$, devemos ter $|x_0 - x_1| = 0$, ou seja, $x_0 = x_1$.

Portanto, f tem um único ponto fixo. $\square$

Nos cursos de Análise vemos que, se a derivada da função f tiver módulo menor que 1, temos uma contração. A condição na derivada é natural ao definirmos a convergência. De um modo geral, se definirmos uma sequência iterativa $x_{n+1} = f(x_n)$ e se f for derivável, com derivadas contínuas, uma condição para que tal sequência convirja para x_0 é que a derivada da função f seja tal que $|f'(x_0)| < 1$. Se tal derivada for contínua, em uma vizinhança de x_0 também teremos o módulo da derivada menor que 1.

De fato, se tivermos

$$f(x_n) - x_n = x_{n+1} - x_n = \varepsilon$$

e

$$f(x_{n+1}) - x_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1} = \varepsilon'$$

devemos ter $|\varepsilon'| < |\varepsilon|$ para n suficientemente grande já que a sequência converge para o ponto crítico x_0.

Daí,

$$\frac{|f(x_{n+1}) - f(x_n)|}{|x_{n+1} - x_n|} = \frac{|f(x_n + \varepsilon) - f(x_n)|}{|x_{n+1} - x_n|}$$

e como

$$f(x_{n+1}) - x_{n+1} - f(x_n) + x_n = \varepsilon' - x_{n+1} + x_n$$

temos $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| = |\varepsilon'|$, e, consequentemente,

$$\frac{|f(x_{n+1}) - f(x_n)|}{|x_{n+1} - x_n|} = \frac{|\varepsilon'|}{|\varepsilon|} < 1$$

se n suficientemente grande.

Tomando-se o limite com $n \to +\infty$ e se x_0 for ponto fixo, esta condição equivale a $|f'(x_0)| < 1$. Esta condição nos mostra que a convergência está associada ao conceito de contração, como estabelecido no Teorema do Ponto Fixo de Banach.

3.3 Alguns Métodos Clássicos

No método de Newton, considera-se uma função $f : I \to \mathbb{R}$, de classe C^1 no intervalo I (ou seja, uma função contínua e com derivadas contínuas no aberto I) e com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Escolhendo algum valor para x_0, consideramos:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Se a sequência (x_n) convergir para um valor a, quando $n \to \infty$, teremos:

$$a = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Ou seja, $f(a) = 0$ e, portanto, a será raiz de f. Sendo assim, se definirmos uma função auxiliar

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

e obtivermos um ponto fixo de tal função, também obteremos uma raiz de f. A obtenção deste ponto fixo pode, sob certas condições, ser obtida através da convergência de uma sequência recursiva como a anterior.

Observamos que, no método de Newton, usamos o conceito de derivada na própria expressão recursiva. Em nosso olhar, ao se trabalhar com alunos de ensino médio, por exemplo, não seria o mais adequado. Outro ponto que não abordaremos neste trabalho é sobre a velocidade de convergência de uma sequência de iterações, mas a velocidade de convergência do método de Newton é bastante boa e uma análise sobre esse aspecto pode ser vista em (LIMA, 2006). Este aspecto é importante do ponto de vista computacional, mas nem tanto para o objetivo que nos propomos, de associar pontos fixos e obtenção de raízes. Apresentaremos aqui um método que tem convergência rápida e que não utiliza derivada, sendo mais adequado para ser abordado com alunos de ensino médio.

De acordo com (WU; WU, 2000), podemos utilizar a seguinte fórmula de iteração para determinar os pontos fixos de uma função:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{\mu f^2(x_n) + f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)},$$

$n = 0, 1, 2...$, e $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| < +\infty$.

No Teorema 3 de seu artigo, os autores garantem a convergência rápida (quadrática), das iterações desde que se tenha as condições:

1. Deve-se considerar uma vizinhança próxima de x_0 (ponto fixo);
2. $f''(x)$ deve ser contínua nessa vizinhança;
3. $f'(x_0) \neq 0$ (ou seja, não podemos aplicar o ponto fixo em um ponto crítico da função);
4. $\mu f(x) + f'(x) \neq 0$ na vizinhança considerada.

Como trabalharemos com funções exponenciais e polinomiais, tais condições serão satisfeitas para as funções que consideraremos neste trabalho.

Exemplo 3.3.1. *Considere a função $f(x) = e^{-x} + \text{sen} x$. Será que esta função possui raízes? Como poderíamos obtê-las?*

Considerar $f(x) = 0$ e resolver a equação é um processo quase impossível de realizar de forma manual. Melhor então seria buscar por raízes de outra maneira, por exemplo, criando uma sequência iterativa.

Abaixo, está o gráfico dessa função:

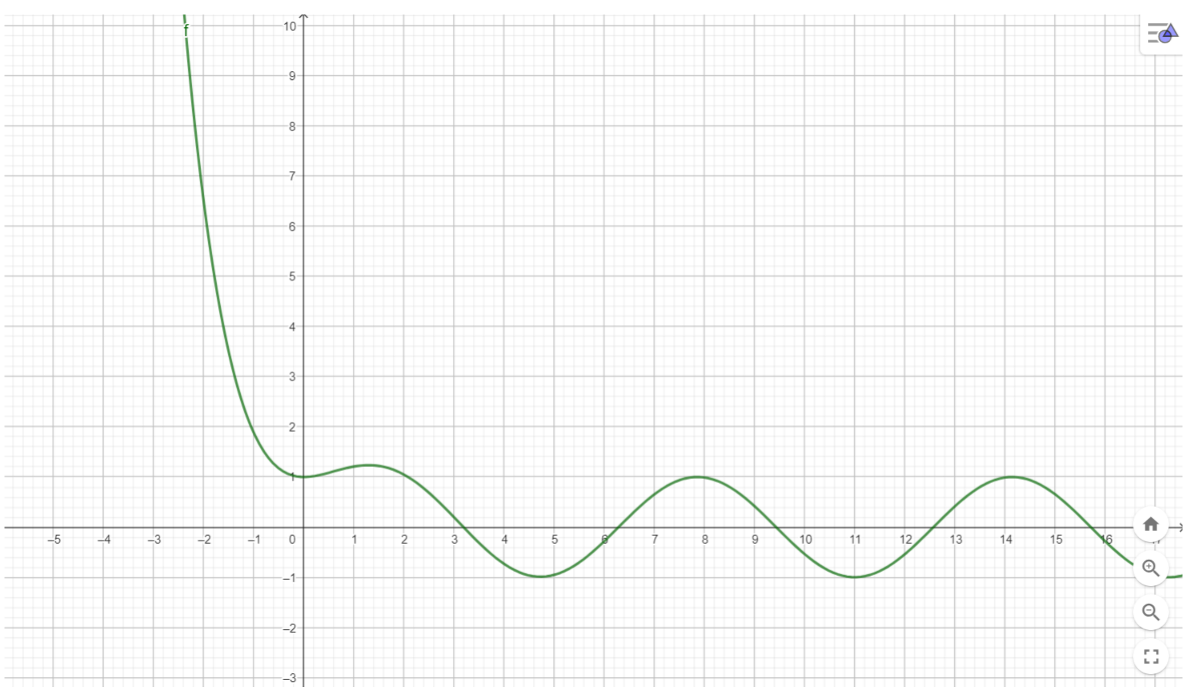


Figura 11 – Gráfico da função $f(x) = e^{-x} + \text{sen}x$

Pelo gráfico, podemos observar que f tem algumas raízes e seria interessante procurá-las nos seguintes intervalos: $[3, 4], [6, 7], [9, 10], [12, 13]$. Usando o método de (WU; WU, 2000) tentaremos criar um método iterativo a fim de tentar obter as raízes de f.

Utilizamos o GeoGebra para plotar o gráfico de f e também fizemos uso da planilha eletrônica do próprio programa para aplicar o método de (WU; WU, 2000).

Primeiro, consideramos $x = 3$, mas a sequência não convergiu. Considerando $x = 3,6$, a sequência convergiu para aproximadamente $3,18$. Calculando $f(3,18)$ no GeoGebra, obtivemos zero.

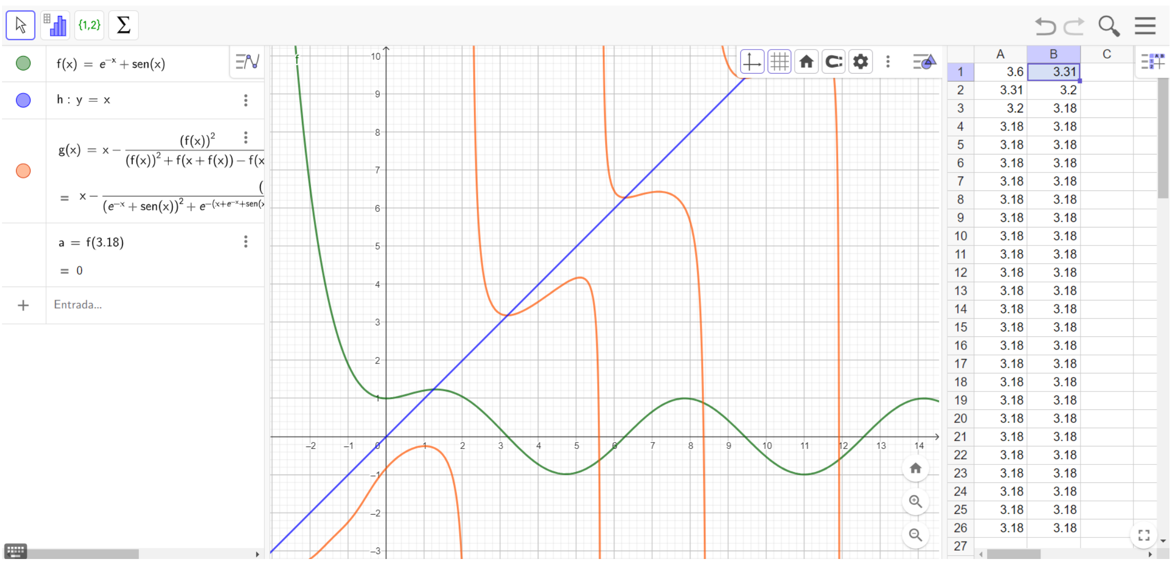


Figura 12 – Gráfico da função $f(x) = e^{-x} + \text{sen}x$ e planilha mostrando o teste feito para $x = 3,6$

Ao considerar $x = 6$, a sequência converge para aproximadamente $6,28$. Calculando $f(6,28)$ também obtemos zero.

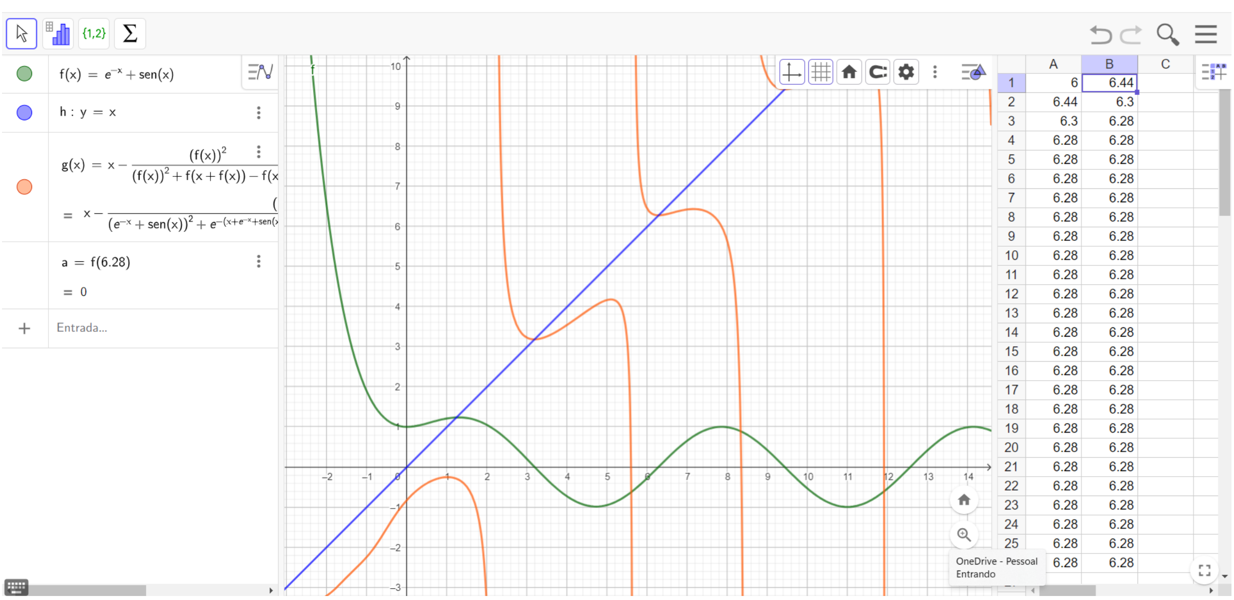


Figura 13 – Gráfico da função $f(x) = e^{-x} + \text{sen}x$ e planilha mostrando o teste feito para $x = 6$

Algo interessante de se observar são as interseções do gráfico da função auxiliar (em vermelho) com a função identidade: a abscissa dos pontos de interseção coincidem com as raízes de f.

Exemplo 3.3.2. *No Exemplo 3.2.1, obtivemos uma raiz da função $f(x) = x^2 - x - 1$. Como se trata de uma função quadrática, é mediato nos questionarmos a respeito da outra raiz. Os métodos aplicados naquele exemplo eram bastante simples já que a ideia era ter uma ideia intuitiva de como relacionar a existência de um ponto fixo de uma função auxiliar à existência de raízes de uma função dada. Sendo assim, diversos testes de valores iniciais nos levaram sempre à mesma raiz positiva. No entanto,uma aplicação simples do método de Newton, considerando-se o valor inicial -1, nos conduz a $x \approx -0,62$.*

3.4 Sobre as Funções Auxiliares

Tanto o Método de Newton quanto o Método de Wu para obtermos uma raiz de uma função f demandam a definição de uma função auxiliar g do tipo

$$g(x) = x - \alpha(x)f(x)$$

para alguma função α adequada. Considerando $\alpha \neq 0$, se x_0 for ponto fixo de g, x_0 será raiz de f.

De fato, se x_0 é ponto fixo de g, temos:

$$x_0 = x_0 - \alpha(x_0)f(x_0).$$

Ou seja,

$$\alpha(x_0)f(x_0) = 0.$$

Como $\alpha \neq 0$, temos que $f(x_0) = 0$, ou seja, x_0 é raiz de f.

Quais seriam as condições mínimas em α para que garantíssemos a convergência das iterações?

De acordo com o Teorema do Ponto Fixo de Banach, uma condição necessária é que $|g'(x)| < 1$ em uma determinada vizinhança. Sendo assim, considerando a função auxiliar $g(x) = x - \alpha(x)f(x)$, podemos escrever:

$$g'(x) = 1 - \alpha'(x)f(x) - \alpha(x)f'(x)$$

Se $|g'(x)| < 1$, então temos:

$$-1 < 1 - \alpha'(x)f(x) - \alpha(x)f'(x) < 1$$

Ou seja,

$$0 < \alpha'(x)f(x) + \alpha(x)f'(x) < 2.$$

Neste caso, dada uma função f derivável e uma função α adequada, de modo que tenhamos tal condição, garantiremos a existência de um ponto fixo para a função auxiliar e, consequentemente, uma raiz para f.

Exemplo 3.4.1. *Vamos considerar a função $f(x) = e^{-x} + x^3$. De acordo com o gráfico, uma raiz de f está próxima de -2:*

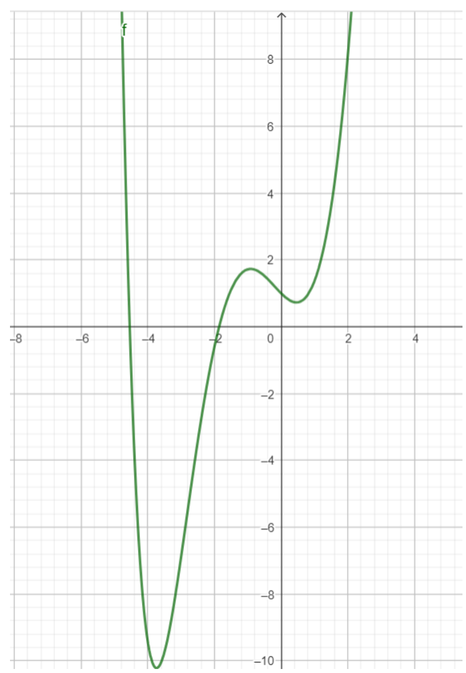


Figura 14 – Gráfico da função f

Tomando $\alpha(x) = e^x$, temos:

$$\alpha'(x)f(x) + \alpha(x)f'(x) = e^x(x^3 + 3x^2)$$

Ao substituir -2 (valor próximo da raiz) nesta expressão, obtemos 0,54. Isso sugere que a sequência iterativa irá convergir. Note que a escolha para α é boa, pois atende à condição $0 < \alpha'(x)f(x) + \alpha(x)f'(x) < 2$ nas proximidades da raiz.

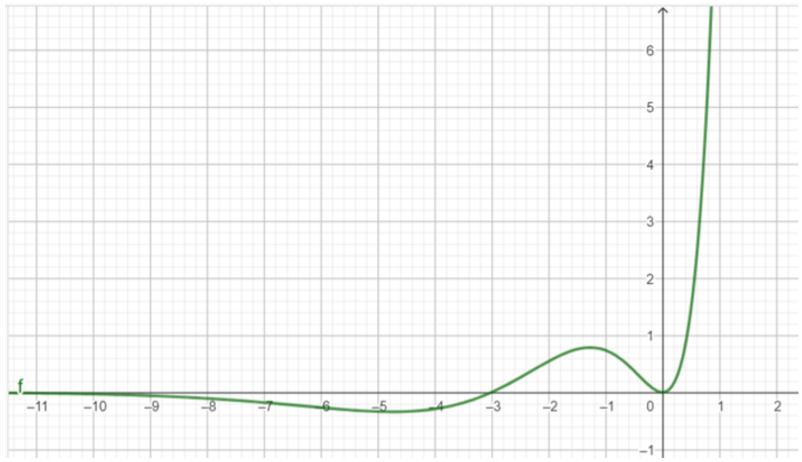


Figura 15 – Gráfico da função $\alpha'(x)f(x) + \alpha(x)f'(x)$

Se escolhermos $\alpha(x) = x^2$, não teremos garantia da convergência da sequência iterativa, pois a condição citada acima não será satisfeita nas proximidades de -2.

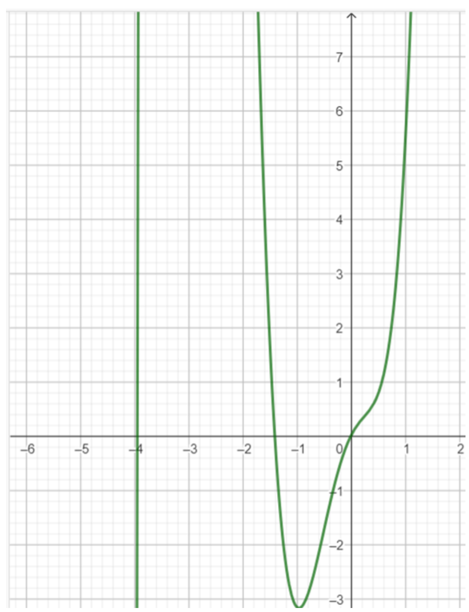


Figura 16 – Gráfico da função $\alpha'(x)f(x) + \alpha(x)f'(x)$, para $\alpha = x^2$

Em alguns processos iterativos, dependendo do valor x_0 escolhido, não temos a convergência da sequência obtida. Considerando a função auxiliar $g(x) = x + \alpha(x)f(x)$, isso acontece quando, por exemplo, $g(x_0) = x_1$ e $g(x_1) = x_0$. Um exemplo é a primeira sequência do exemplo 3.2.1. Ao considerar $x = 0$, obtemos imagem -1, e ao considerar $x = -1$, obtemos imagem 0.

CAPÍTULO 4

Atividade Didática

Como parte deste estudo, foi desenvolvida uma atividade envolvendo o conceito de ponto fixo com alguns alunos da graduação em Matemática. O objetivo da atividade foi abordar o conceito de ponto fixo, como podemos determiná-lo de forma algébrica e de forma geométrica e sua relação com métodos iterativos para determinar raízes de equações.

4.1 Sujeitos e Contexto

A atividade foi realizada de forma presencial no laboratório de estatística da Universidade Federal de Ouro Preto. Participaram desta atividade sete alunos da Graduação em Matemática, sendo dois do Bacharelado e cinco da Licenciatura. Destes alunos, três estão na primeira metade do curso e os demais estão na parte final.

4.2 Roteiro da Atividade

Objetivos:

- Apresentar o conceito de ponto fixo;
- Determinar pontos fixos de funções a partir de sua lei de formação por meio de tentativa e erro usando lápis e papel;
- Buscar métodos para determinar pontos fixos de forma algébrica;
- Entender a representação geométrica e como determinar pontos fixos a partir de gráficos;
- Fazer o estudo sobre pontos fixos da função quadrática usando a ferramenta controle deslizante do GeoGebra e entender porque essa função admite até dois pontos fixos;

- Apresentar métodos iterativos que convergem para pontos fixos de uma função;
- Entender como podemos usar pontos fixos para encontrar raízes de equações e visualizar essa situação de forma geométrica.

Pré-requisitos: Conhecimento prévio de funções e de seus gráficos.

Metodologia: A atividade foi conduzida pela mestranda e por seu orientador. A partir de direcionamentos, os estudantes faziam o que era proposto e respondiam às perguntas feitas. Cada estudante teve acesso a um computador. Foi utilizado projetor para que as perguntas e gráficos fossem exibidos na tela para os participantes e foram distribuídas algumas folhas para que pudessem fazer cálculos e registros. As respostas dos estudantes durante a atividade foram gravadas em áudio. Ao final da atividade, foi solicitado que cada um respondesse a um questionário.

Materiais usados: Os alunos utilizaram lápis, papel e o GeoGebra.

Tempo estimado: 120 minutos.

Descrição da atividade (o roteiro sem comentários pode ser visto no Apêndice B):

A atividade foi realizada de forma direcionada por meio de alguns questionamentos, apresentados a seguir:

1. Considere as funções $f(x) = x^3 - 6$ e $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Determine as imagens dos pontos 0, 1 e 2 por estas funções.

   Como estas funções são simples e os pontos pedidos são números naturais, rapidamente todos encontraram os resultados.

2. Algum dos pontos 0, 1 ou 2 fica fixo pela função f? E pela função g?

   Um dos alunos da licenciatura (o qual já havia estudado um pouco sobre pontos fixos em sua iniciação científica) prontamente respondeu que 2 fica fixo pela função f. Ao ser questionado, disse que ficou fixo porque ao aplicar este número na função f obteve como resultado esse mesmo valor. Os demais estudantes concordaram com ele. Sobre a função g, todos perceberam que nenhum dos valores pedidos ficou fixo.

3. De acordo com os itens anteriores, o que você definiria como ponto fixo de uma função?

   O mesmo aluno descrito anteriormente disse: "É um ponto que, quando aplico na função, vai resultar nele próprio". Juntamente com todo o grupo, estabelecemos a formalização do que é um ponto fixo de uma função.

4. Considere as funções: $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3x^2 - 2$. Essas funções têm pontos fixos? Usando lápis e papel, calcule a imagem de alguns valores e tente descobrir pontos fixos.

Uma estudante atribuiu alguns valores para x, aplicou em cada função e depois verificou as imagens. Desta forma ela conseguiu determinar um ponto fixo para cada função. Os demais alunos usaram a definição, ou seja, resolveram as equações $f(x) = x$ e $g(x) = x$. Desta forma, concluíram que -1 é ponto fixo da função f e 1 e $-\dfrac{2}{3}$ são pontos fixos da função g. A primeira estudante não havia obtido $-\dfrac{2}{3}$ como ponto fixo e, de modo dialogado, discutimos com os participantes sobre o fato de que pontos fixos irracionais ou mesmo racionais não inteiros não serem considerados na maioria das vezes em que se tenta obter a solução através da atribuição de valores.

5. Existe alguma função que tem infinitos pontos fixos? Existe alguma função para a qual todos os pontos de seu domínio permanecem fixos?

   Para a segunda pergunta, prontamente responderam que a função identidade tem todos os pontos de seu domínio fixos. Quando questionados novamente sobre a primeira pergunta, um estudante do bacharelado apontou a função seno, rotacionada de $45°$. Essa foi uma resposta que surpreendeu a todos, ninguém havia imaginado essa possibilidade.

   Abaixo, está o gráfico dessa função:

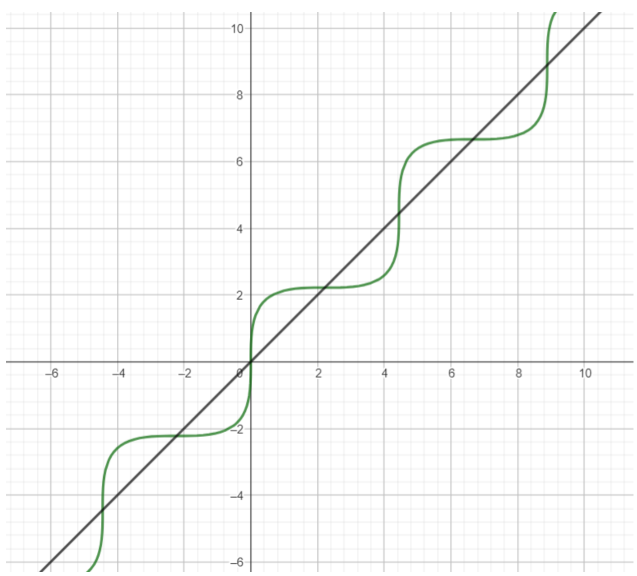


Figura 17 – Função seno rotacionada

Daí surgiu um questionamento feito por uma estudante: ao rotacionar o gráfico, ainda será uma função? Foi esclarecido que sim.

Mais uma vez, foi perguntado aos estudantes se conseguiam pensar em uma outra função. Um estudante sugeriu uma função cujo gráfico é uma reta paralela à reta da função identidade.

Concluiu-se que este tipo de função não terá pontos fixos, pois não há interseção entre o gráfico dessa função e o gráfico da identidade.

6. Considerando a maneira como você obteve os pontos fixos nos itens apresentados. Qual o procedimento utilizado para obtê-los? Será que existe alguma forma prática de determinar os pontos fixos de uma função?

   A partir dos questionamentos já feitos e das atividades já realizadas, os estudantes concluíram que a forma mais prática é resolver a equação $f(x) = x$. Uma observação feita por outro aluno do bacharelado foi que nem sempre será possível resolver esta equação, pois existem equações difíceis de ser resolvidas de forma manual. Então, dependendo da função é um método pouco prático.

7. A partir do gráfico de uma função, como podemos saber se esta tem pontos fixos?

   Um estudante respondeu que deveríamos traçar a reta da função identidade e verificar se há pontos de interseção entre essa reta e o gráfico da função dada.

8. Aqui estão alguns gráficos de funções. Quais desses têm pontos fixos?

   Neste momento todos os estudantes receberam os gráficos impressos e tiveram um tempo para analisar se cada função tinha pontos fixos. Todos os estudantes traçaram a reta da função identidade e verificaram se havia interseções entre o gráfico e a reta. Alguns deles rapidamente resolveram desta forma e outros demoraram um pouco mais para começar o procedimento.

   Gráfico 1:

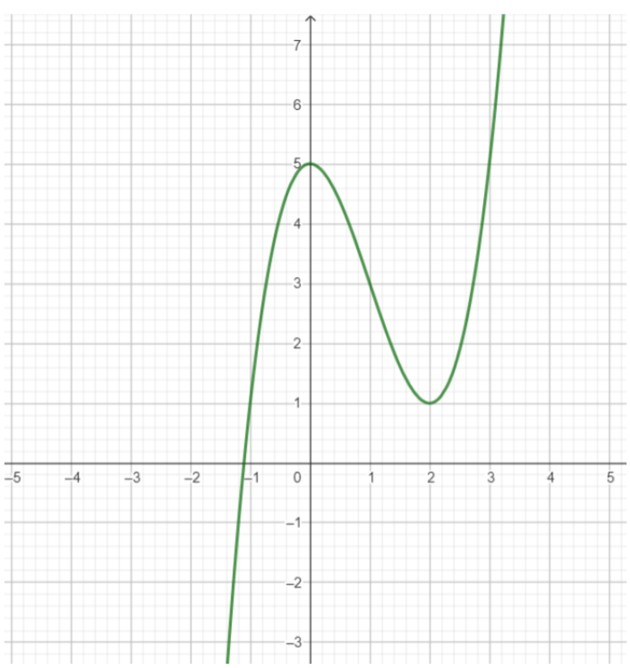


Figura 18 – Gráfico 1 - atividade com estudantes da graduação

Neste caso todos concluíram que a função tem três pontos fixos, dois no primeiro quadrante e um no terceiro quadrante.

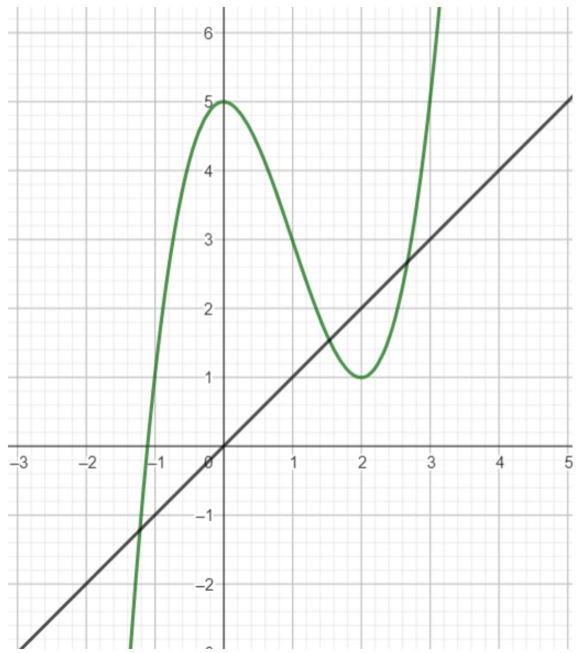


Figura 19 – Gráfico 1 - atividade com estudantes da graduação e identidade

Gráfico 2:

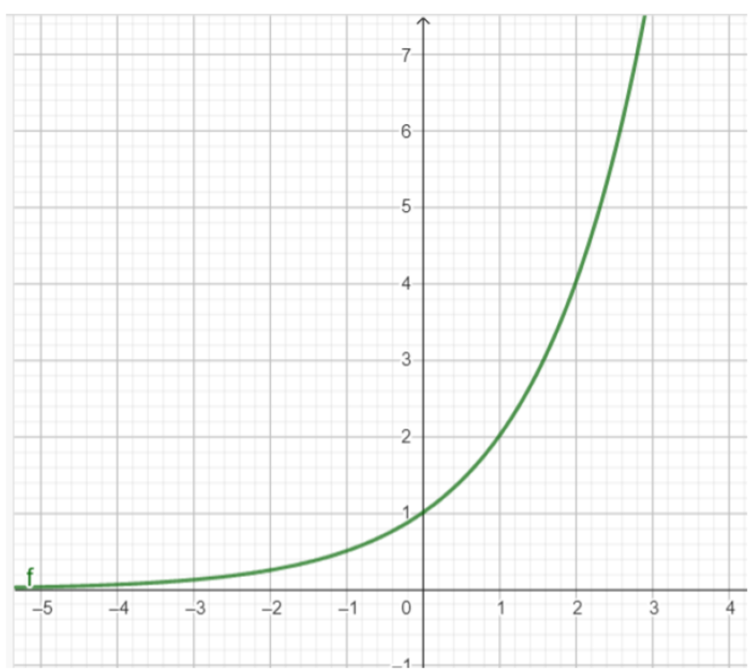


Figura 20 – Gráfico 2 - atividade com estudantes da graduação

Neste gráfico todos observaram com facilidade que não há pontos fixos, pois o gráfico da função se localiza acima do gráfico da função identidade para todos os pontos de seu domínio.

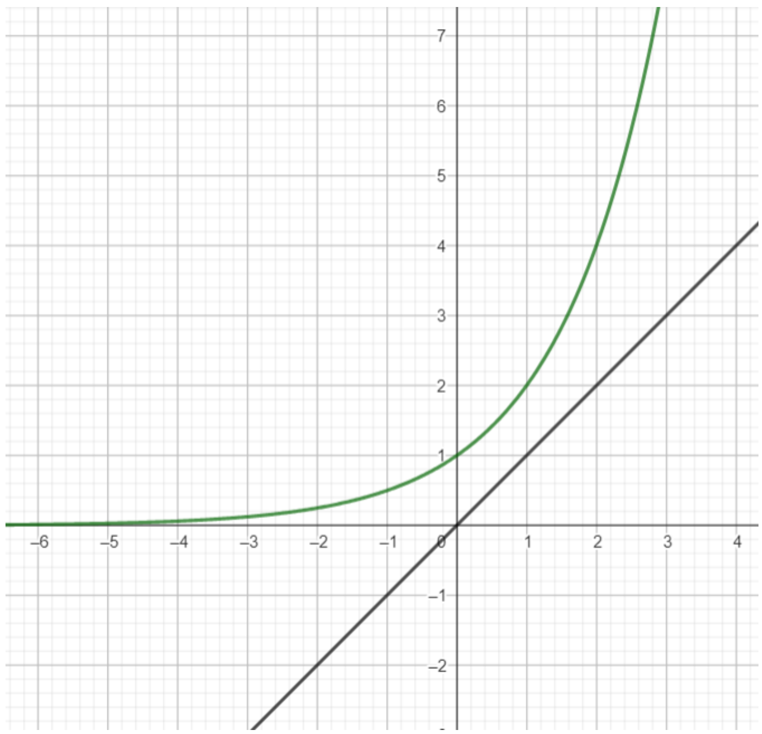


Figura 21 – Gráfico 2 - atividade com estudantes da graduação e identidade

Gráfico 3:

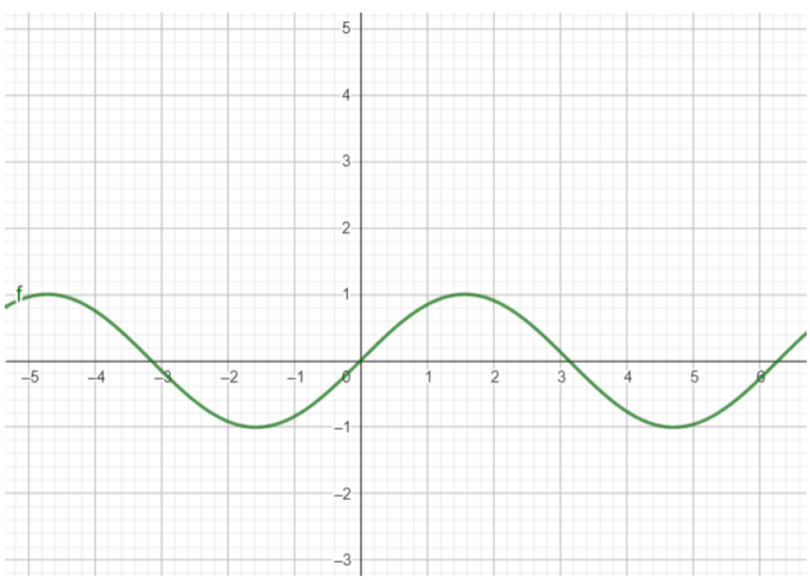


Figura 22 – Gráfico 3 - atividade com estudantes da graduação

Inicialmente houve dúvida nesse caso. Estava claro que 0 é ponto fixo. Mas nos intervalos $[-1, 0]$ e $[0, 1]$ a identidade se aproxima tanto do gráfico em questão que alguns alunos ficaram se perguntando se havia mais pontos fixos. Neste caso, utilizaram o GeoGebra para esclarecer. Alguns alunos usaram zoom, outros usaram o recurso "Interseção de Objetos"do Geogebra. Ficou claro então que só havia um ponto fixo. Um aluno que está finalizando a licenciatura lembrou do limite trigonométrico fundamental, observando que por isso, quando x tendesse a zero, os dois gráficos ficariam muito próximos e, por fim, argumentou que era somente um ponto fixo mesmo.

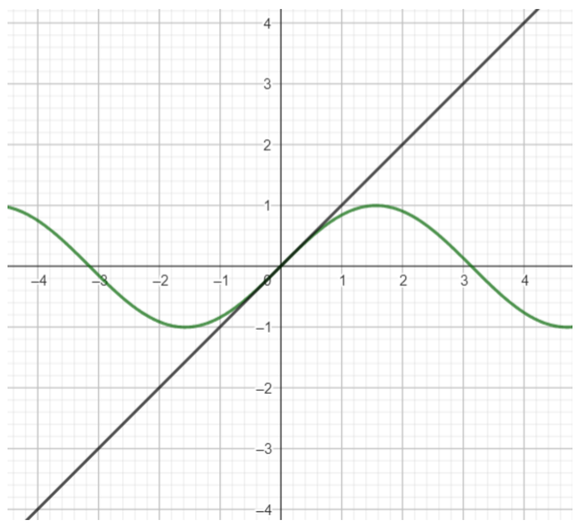


Figura 23 – Gráfico 3 - atividade com estudantes da graduação e identidade

Gráfico 4:

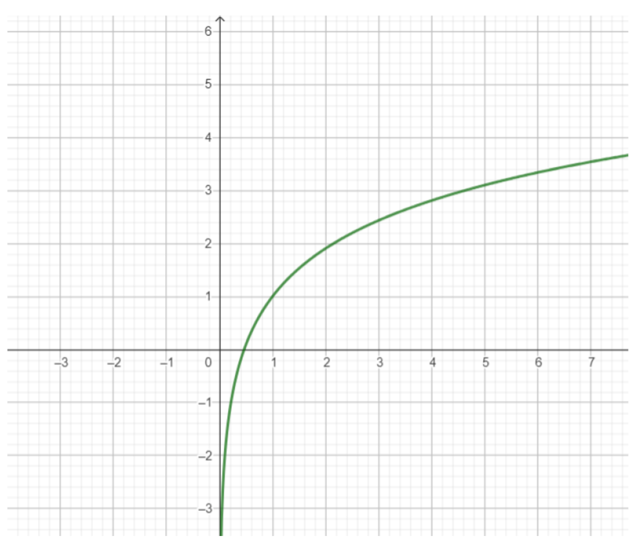


Figura 24 – Gráfico 4 - atividade com estudantes da graduação

Neste gráfico os estudantes concluíram que há dois pontos fixos: 1 e algum valor entre 1 e 2.

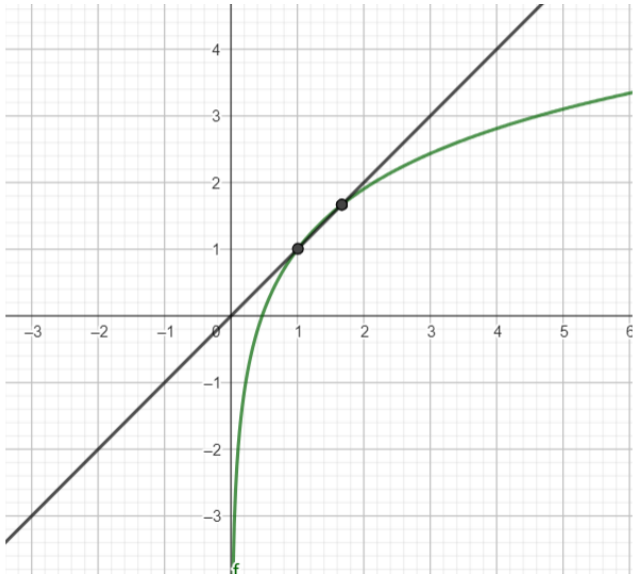


Figura 25 – Gráfico 4 - atividade com estudantes da graduação e identidade

Gráfico 5:

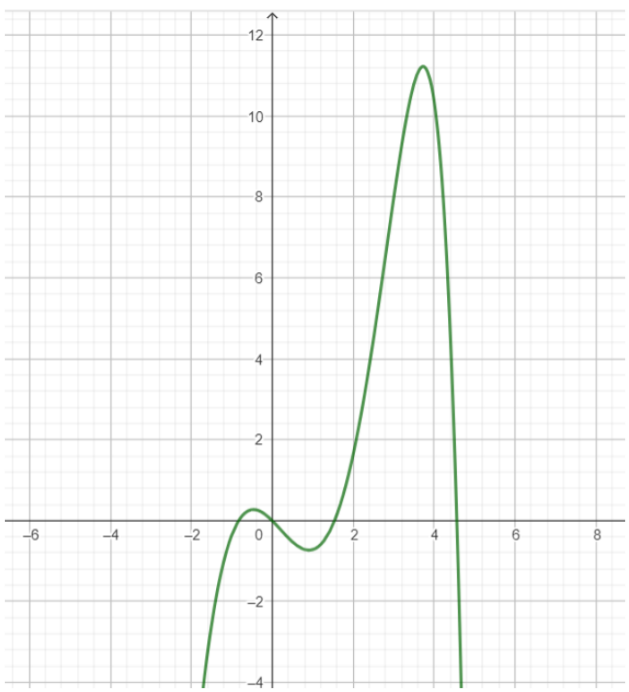


Figura 26 – Gráfico 5 - atividade com estudantes da graduação

Este gráfico não gerou dúvidas. Todos concordaram que a função representada por este gráfico tem quatro pontos fixos.

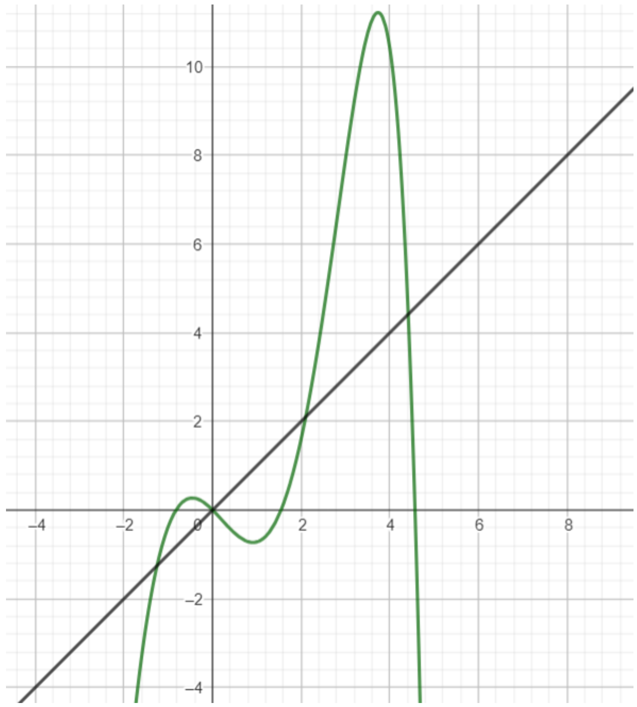


Figura 27 – Gráfico 5 - atividade com estudantes da graduação e identidade

Gráfico 6:

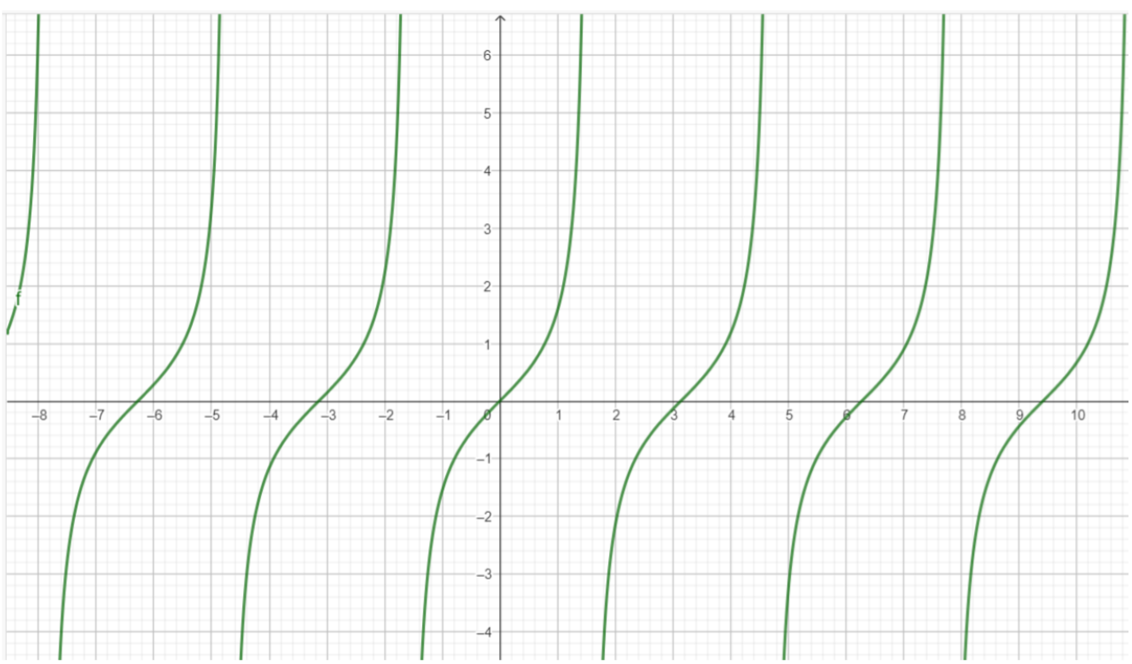


Figura 28 – Gráfico 6 - atividade com estudantes da graduação

Rapidamente os estudantes concluíram que neste caso a função tem infinitos pontos fixos pois é uma função periódica cuja imagem, em cada período, corresponde a toda a reta real. Associaram de forma correta o gráfico ao função $f(x) = tgx$.

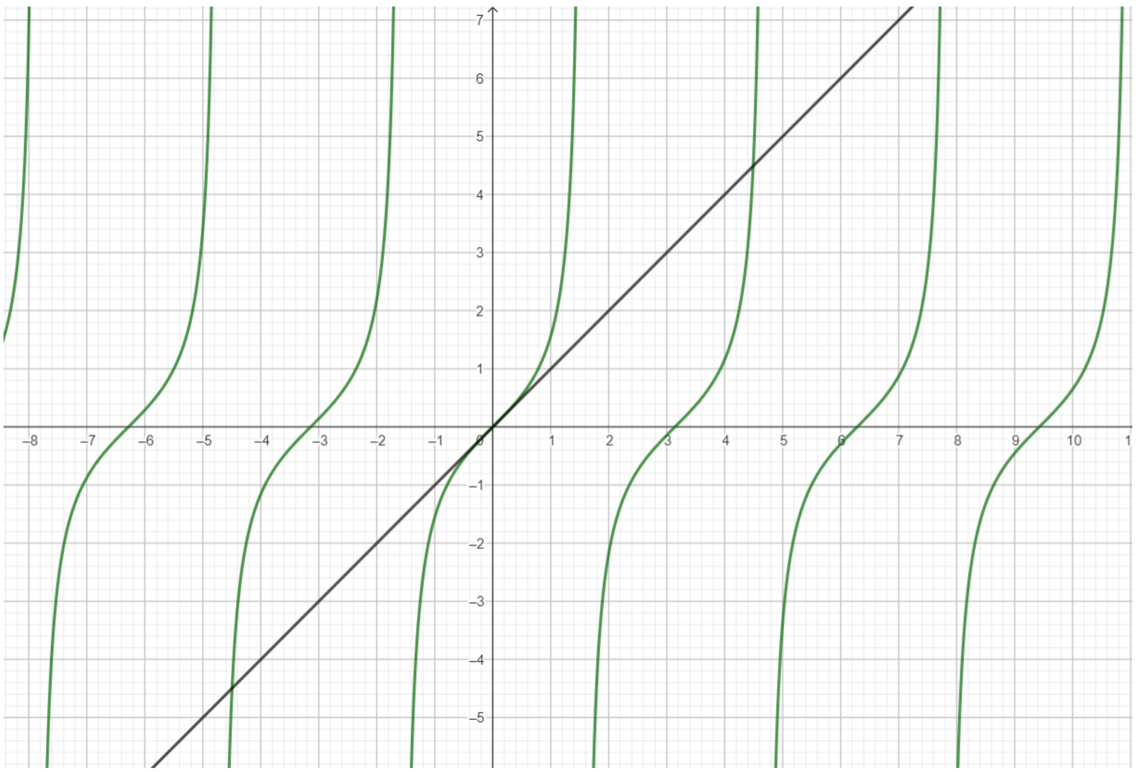


Figura 29 – Gráfico 6 - atividade com estudantes da graduação e identidade

9. Usando o controle deslizante no GeoGebra, podemos saber se um tipo de função sempre terá pontos fixos e quantos são. Vamos fazer isso para estudar os pontos fixos de uma função quadrática.

   Neste momento, foi pedido aos estudantes que criassem um controle deslizante apenas para o coeficiente c da função quadrática. Depois disso, eles deveriam criar uma função quadrática escolhendo valores para os coeficientes a e b. Por fim, pedimos para variar o coeficiente c usando o controle deslizante e analisar a quantidade de pontos fixos que a função quadrática poderia ter. Concluíram que este tipo de função poderia ter um, dois ou nenhum ponto fixo.

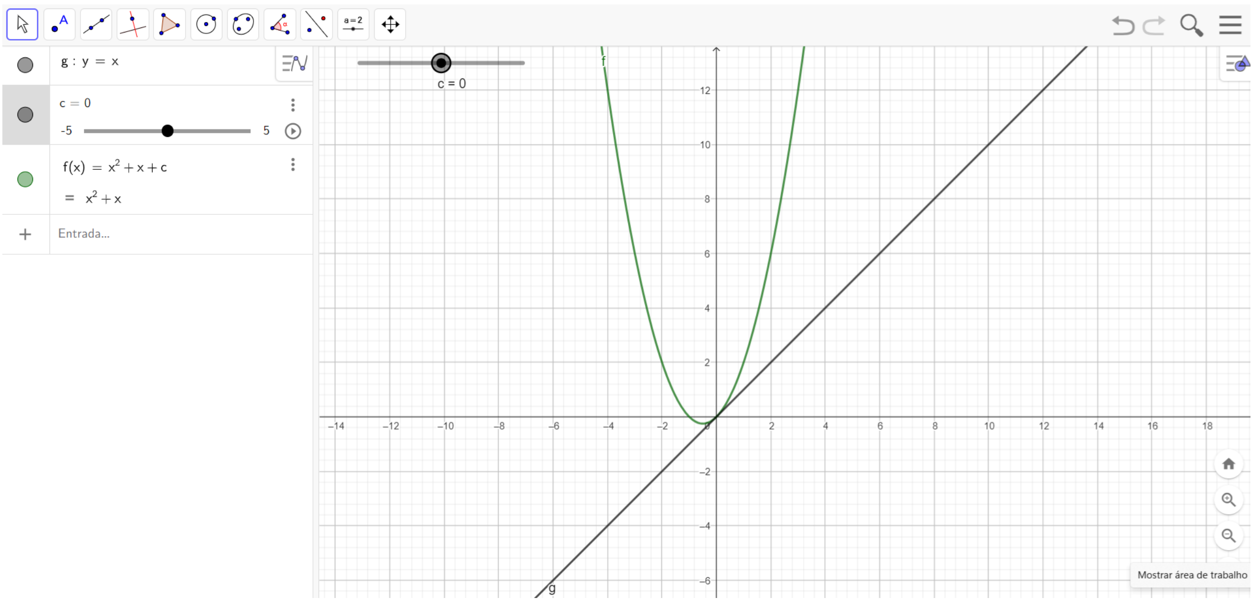


Figura 30 – Função quadrática e uso do controle deslizante no GeoGebra

Em seguida, perguntamos a eles o motivo de a função quadrática ter zero, um ou dois pontos fixos. Eles tiveram a oportunidade de visualizar a situação com o Geogebra, mas agora queríamos que verificassem de forma algébrica. Depois de pensar um pouco concluíram que isso acontecia porque ao resolver a equação $f(x) = x$ (sendo que $f(x)$ é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$) para determinar os pontos fixos, deveriam encontrar as raízes de uma equação de segundo grau, e este tipo de equação pode ter até duas raízes reais.

10. Vocês sabem o que é método iterativo?

    Os alunos que estão na reta final do curso afirmaram ter visto em disciplinas de cálculo e disseram que é um método para encontrar raízes.

11. Escolha um valor maior do que cinco e aplique o método iterativo usando a função: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

    Pedimos que escolhessem um valor maior do que cinco para evitar que algum aluno já escolhesse o ponto fixo da função (2). Alguns alunos ficaram um pouco confusos em relação ao método e por esse motivo exemplificamos no quadro branco. Pedimos para escolher um valor. Escolheram o número seis. No quadro calculamos $f(6)$ e obtivemos 4. Calculamos $f(4)$ e encontramos 3. Continuamos o processo algumas vezes e escrevemos a sequência obtida:

$$6, 4, 3, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{17}{8}, \frac{33}{16}, \frac{65}{32}, \ldots$$

Os estudantes foram questionados sobre a sequência, se os valores estão se aproximando de algum valor. Responderam que cada vez mais os resultados estavam próximos de 2. Perguntamos o que o número 2 representa em relação à função considerada. E então observaram que 2 é ponto fixo de $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

12. Consideremos f e g funções reais tais que $g(x) = x - \alpha(x)f(x)$ com $\alpha(x) \neq 0, \forall x$, se x_0 for ponto fixo de g, o que sabemos de $f(x_0)$?

    Inicialmente os estudantes ficaram pensativos. Assim, pedimos que anotassem as hipóteses e tentassem chegar a alguma conclusão. Alguns alunos deduziram rapidamente que $f(x_0) = 0$. Perguntamos então o que isso significa e então responderam que x_0 é raiz da função f. Por outro lado outros alunos ainda ficaram pensativos, por esse motivo, escrevemos as hipóteses no quadro e explicamos cada passo até concluir que se x_0 é ponto fixo da função g, então x_0 é raiz da função f. Também houve certa confusão em dizer que o ponto fixo e a raiz seriam da mesma função e esclarecemos o que acabamos de observar: o ponto fixo da função auxiliar g é raiz da função f.

    Aproveitamos a oportunidade para apresentar métodos que estão em artigos e as funções $\alpha(x)$ que cada um utiliza. Para $\alpha(x) = \frac{1}{f'(x)}$ temos o método de Newton (ver, por exemplo, (LIMA, 2006)) e para $\alpha(x) = \frac{f(x)}{\mu f^2(x) + f(x + f(x)) - f(x)}$ temos o método de (WU; WU, 2000).

    Além disso deixamos claro que $\alpha(x)$ não precisa ser diferente de zero para todo x, basta que seja diferente de zero numa vizinhança da raiz procurada. Também esclarecemos, através dos exemplos de α apresentados, que alguns podem depender da derivada da função (conceito não estudado no ensino médio) e outros, não.

13. Com base na resposta anterior, como podemos utilizar pontos fixos para obter as raízes de uma função?

    Um estudante afirmou que com uma função auxiliar, sabendo seu ponto fixo, poderíamos encontrar as raízes de uma outra função. Alguns alunos ficaram confusos. Foi relembrada então a questão anterior e o método de Newton. Se tivermos uma função g da forma $g(x) = x - \alpha(x)f(x)$ e soubermos o seu ponto fixo, saberemos as raízes de f.

14. Vamos criar uma sequência iterativa de modo que, dado um x_0, calculamos sua imagem por g, depois calculamos a imagem deste ponto e assim sucessivamente. Será que esta sequência converge?

    Neste momento, utilizamos um arquivo já criado no GeoGebra no qual temos o gráfico de uma função f (a função considerada foi $f(x) = e^{-x} + x^3$), o gráfico da função identidade e o gráfico de algumas funções auxiliares. Além disso, havia também no próprio GeoGebra uma planilha, na qual utilizamos o método iterativo (neste caso, o método de Newton) para analisar se, dado um certo valor, a sequência convergia. [1]

Nas representações gráficas a seguir, a função f está em azul, a função identidade está em preto e a função auxiliar, em vermelho.

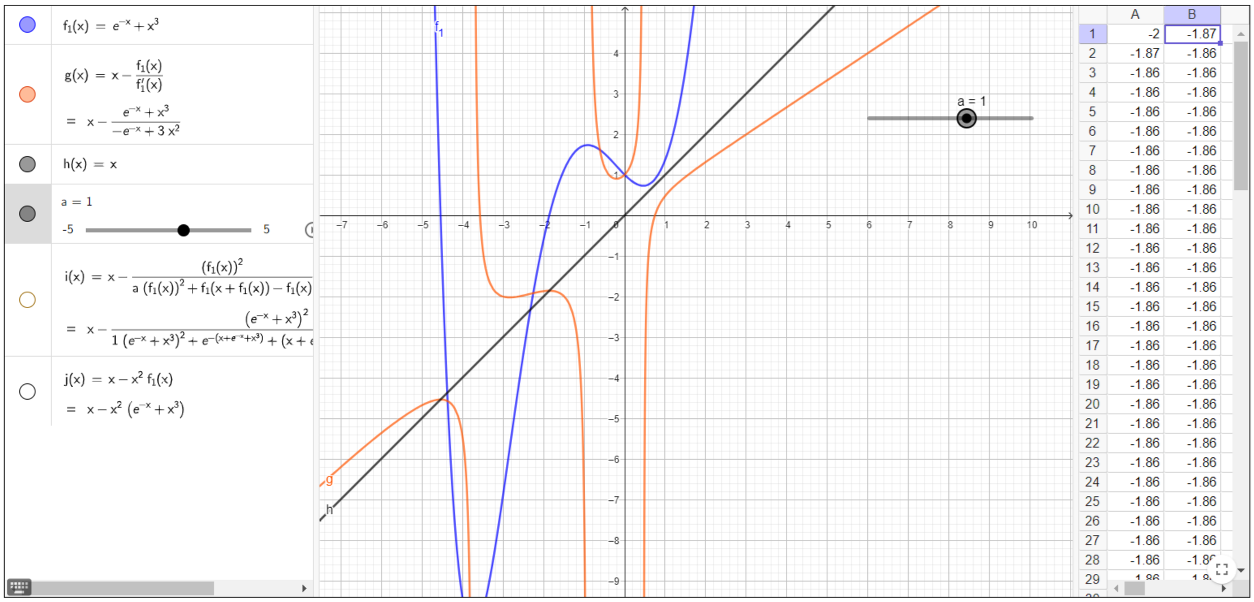


Figura 31 – Gráficos de f, função identidade e função auxiliar g

Durante essa parte alguns valores foram escolhidos e a partir deles analisamos o comportamento da sequência. Além disso, chamamos a atenção dos estudantes para os pontos de interseção da função auxiliar com a função identidade e para as raízes da função f. Como era esperado, concluíram que esses pontos possuíam a mesma abscissa, pois como foi observado, encontrar as raízes de g implicaria em encontrar as raízes de f.

Em seguida, mostramos o gráfico da função auxiliar utilizando o método apresentado no artigo (WU; WU, 2000), a qual chamamos de $i(x)$. Nesta função há uma constante, μ, que no GeoGebra chamamos de a. Criamos um controle deslizante para esta constante e mostramos que, ao variá-la, o gráfico da função auxiliar se alterava, mas as interseções com a função identidade permaneciam as mesmas.

[1] Esta atividade pode ser vista em <https://www.geogebra.org/m/wuskqhrg>.

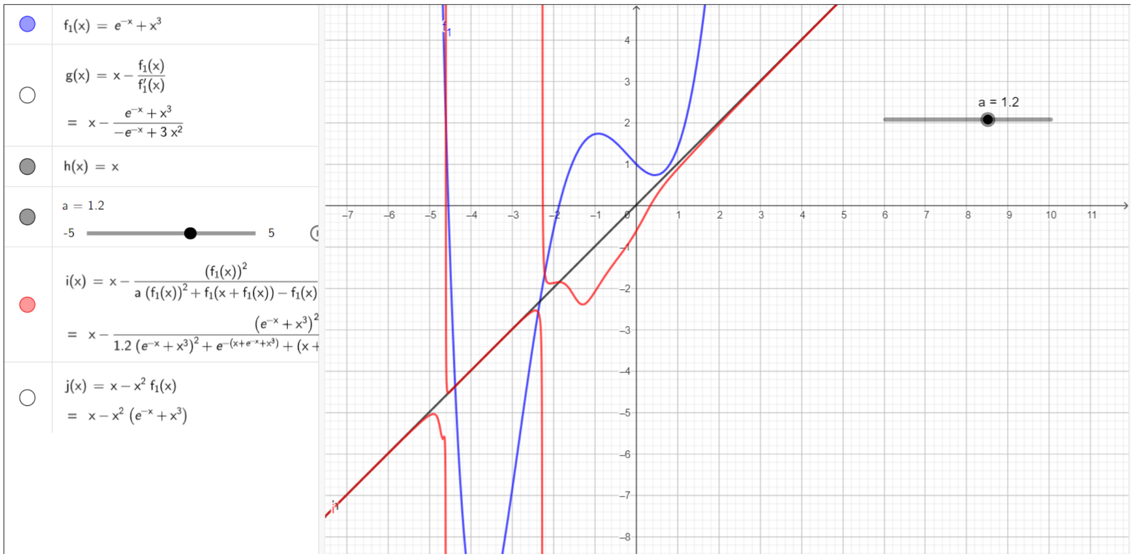


Figura 32 – Gráficos de f, função identidade e função auxiliar i

Aproveitamos também para mostrar o gráfico de uma função auxiliar adotando $\alpha(x) = x^2$. E neste momento enfatizamos que a função $\alpha(x)$ não precisa ser diferente de zero para todo x, basta que seja em uma vizinhança da raiz. Mais uma vez, como esperado, a abscissa dos pontos de interseção da auxiliar com a identidade correspondem às raízes da função f.

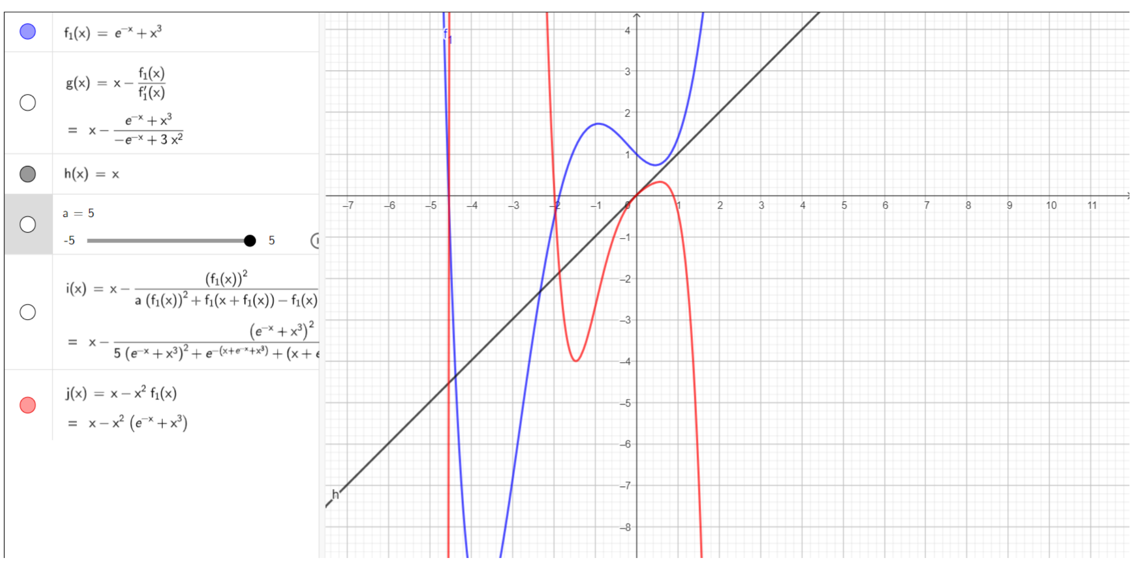


Figura 33 – Gráficos de f, função identidade e função auxiliar j

Por fim, usando a planilha do GeoGebra aplicamos o método iterativo de (WU; WU, 2000), assim como fizemos com o método de Newton. Os alunos puderam verificar que próximo da raiz a convergência é bem rápida.

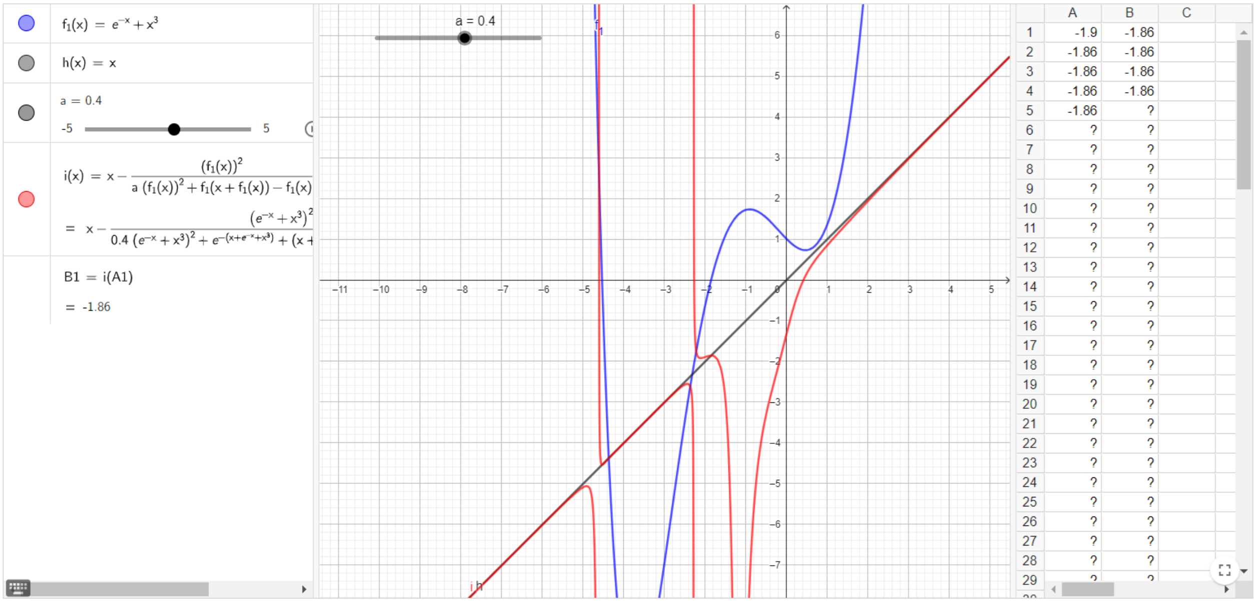


Figura 34 – Gráficos de f, função identidade, função auxiliar e planilha usando o método de Wu

15. Vocês sabiam que podemos usar o conceito de ponto fixo para determinar as raízes de uma função?

    Alguns disseram que não porque não sabiam nem mesmo o conceito de ponto fixo. Aqueles que já sabiam o que é ponto fixo também afirmaram não saber dessa relação.

16. Sobre a convergência, ela sempre ocorre?

    Os estudantes concluíram inicialmente que sim, se o valor inicial escolhido para ser utilizado no método iterativo for próximo da raiz. Depois de pensar um pouco um estudante afirmou que poderia ter algum caso em que ao aplicar f a um valor inicial x_0, encontraríamos um valor x_1 e ao aplicar f a x_1 retornaríamos para x_0. E então nesse caso a sequência não iria convergir. Depois, ao ser questionado se esse seria o único caso, o mesmo aluno disse que poderíamos obter uma sequência crescente ilimitada, por exemplo, que não convirgiria.

4.3 Análise das Respostas dos Participantes ao Questionário Avaliativo

Ao final da atividade, foi pedido aos estudantes que respondessem a um pequeno questionário sobre a atividade realizada. O objetivo deste questionário foi saber a opinião dos estudantes sobre a atividade, o que eles consideraram que foi bom e o que poderia ser melhorado.

O questionário foi realizado via Google Forms. Este recurso foi escolhido por causa de sua praticidade e facilidade em transcrever as respostas dos estudantes. Inicialmente a mestranda se apresentou ao grupo e apresentou brevemente a atividade (apresentação similar foi feita no início do formulário do Google Forms). Em seguida foram feitas algumas perguntas a fim de identificar os estudantes e, por fim, perguntas sobre a atividade e as impressões dos estudantes. Algumas respostas foram transcritas e, a fim de não revelar a identidade dos estudantes, os mesmos foram identificados como $A_1, A_2, ..., A_7$.

Apresentação do Questionário:

Olá!

Meu nome é Shamylla Irineu Frederico dos Santos. Sou aluna do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT na Universidade Federal de Ouro Preto sob orientação do professor Wenderson Marques Ferreira.

Desde já, agradeço por contribuir com esta pesquisa. Trata-se de um estudo sobre Pontos Fixos e sua abordagem em sala de aula.

As informações prestadas aqui são sigilosas e as respostas transcritas para o trabalho não serão identificadas.

Peço que responda de forma espontânea às questões propostas, justificando sempre que possível!

Muito obrigada!

Questões de identificação dos participantes:

Para identificar os estudantes, foi pedido que respondessem as questões informando o nome, curso, período e e-mail. Como mencionado anteriormente, sete alunos participaram da atividade, sendo dois do Bacharelado em Matemática e cinco da Licenciatura em Matemática (uma das alunas da Licenciatura já havia feito o Bacharelado anteriormente).

Questões sobre a atividade:

1. Você já conhecia o conceito de Ponto Fixo? Se sim, quando o estudou? Comente.

   Quatro alunos disseram que não conheciam este conceito. Os outros três já conheciam. A resposta destes três está transcrita abaixo:

   A_3: Sim. Já havia visto em apresentações de TCC de alguns colegas de curso e havia estudado um pouco durante minha Iniciação Científica.

   A_5: Sim, eu estudei no Bacharelado em Matemática, em *Analise* e em *Calculo* Numérico.

   A_7: Sim. Estudei na disciplina de Análise Real e em uma IC.

2. Você já havia imaginado a conexão entre a existência de pontos fixos e a existência de raízes de funções reais? Comente.

   Em geral os alunos disseram que não havia imaginado. Um deles afirmou que viu algo parecido na disciplina de cálculo numérico mas que não foi tão detalhado como foi na oficina.

   Apesar de não ter imaginado essa relação, um dos alunos achou muito interessante:

   A_1: Não fazia ideia, até porque não conhecia o conceito. Mas achei muito interessante.

   A_2: Como ainda não tinha ouvido sobre o conceito de ponto fixo não imaginava que haveria conexões com as raízes.

   A_7: Vi algo parecido na disciplina de *Calculo* Numérico, mas. Não foi tão detalhado como na "oficina".

3. Você considera que a maneira como a atividade foi proposta, utilizando o GeoGebra, facilitou seu entendimento? Justifique.

   Todos concordaram que a utilização do GeoGebra facilitou o entendimento. Algumas respostas foram transcritas abaixo:

   A_3: Sim. A atividade proposta foi muito visual, trouxe uma abordagem geométrica bem simples de se compreender.

   A_4: Geogebra facilitou a visualização, a parte algébrica as vezes dificulta um pouco.

   A_6: Sim, afinal o uso do geogebra facilita a percepção geométrica do que está sendo dito.

   A_7: Sim. Enxergar a relação entre os conceitos de forma gráfica como no método de Newton, facilitou o entendimento.

4. Você considera que o conceito de ponto fixo pode ser apresentado a alunos do Ensino Médio que estejam estudando funções? Justifique.

   Todos acreditam que sim, porém um aluno acrescentou que os alunos devem entender bem sobre funções e outro acredita que poderia ser abordado em uma oficina. Notamos nas respostas a seguir que alguns participantes citam a visualização geométrica que pode ser explorada ao se abordar o conceito de ponto fixo e que o uso do GeoGebra é citado também com este propósito.

   A_1: Acredito que sim. Pois o conceito em si, não tem dificuldade nenhuma de entender. É possível escolher funções mais simples para facilitar.

   A_3: Acredito que sim. A ideia de ponto fixo é intuitiva. E sendo apresentada visualmente, como proposta na atividade, é possível de fato introduzir esses conceitos e mesmo *avancar* um pouco para a busca algébrica de pontos fixos.

A_5: Sim, pois é interessante esse fato de a função ter a imagem igual a ele mesmo, e se for possível apresentar com o auxilio do GeoGebra, acredito que chamaria ainda mais a atenção dos alunos e seria importante para eles conseguir reunir os conceitos teóricos e os conceitos visuais das funções, das raízes e dos pontos fixos.

A_6: Sim, afinal o conceito de ponto fixo é bastante simples e pode estimular os alunos a encontrar padrões relacionados a ele, como o número máximo de pontos fixos de uma função polinomial.

5. Você considera que a atividade como foi desenvolvida poderia ser apresentada a alunos do Ensino Médio que estejam estudando funções? Justifique.

   A maioria dos alunos acredita que sim, mas com algumas adaptações. Além disso, um aluno acha que poderia ser aplicada somente se a turma entender bem sobre funções. Outro aluno acha que talvez não, pois algumas funções da atividade são mais complexas. O participante, A_4, cita que nem sempre o “entendimento gráfico"é explorado na escola quando se estudam raízes de funções. Esta resposta está de acordo com o que indicamos na página 23, a respeito da importância da visualização em Matemática (quando possível).

   A_3: Que estejam estudando talvez não. Mas que já tenham estudado funções pelo menos. Pois é necessário uma certa compreensão de funções para compreender bem os conceitos apresentados.

   A_4: Sim, principalmente com auxílio do geogebra, muitas vezes é pedido que se encontre raízes, mas o estudantes ficam sem ter entendimento gráfico.

   A_5: Sim, com uma introdução sobre como mexer no Geogebra.

   A_6: Sem adaptações, não. A parte inicial é simples o bastante e pode interessar os alunos, no entanto o uso de pontos fixos para encontrar raízes de funções é complexo e provavelmente não interessaria a maior parte dos alunos.

   A_7: Sim. O estudo de *raizes* de funções é um tema muito presente no ensino médio.

6. Você considera que atividades como esta contribuem para sua formação enquanto futuro professor de Matemática? Justifique.

   Todos consideram que sim. Entre as justificativas, estão: atividades como essa facilitam o entendimento dos alunos, geram novas ideias para exercícios e exemplos, mostram possibilidades diferentes para ensinar os alunos. De modo geral percebemos que ao participarem desta atividade, os alunos (a maioria de Licenciatura) passam a ter mais ideias de atividades para desenvolverem em suas futuras salas de aula.

   A_1: Sem sombra de dúvidas. Atividades assim, aguçam a capacidade investigativa e podem gerar novas ideias para exercícios e exemplos.

A_3: Sim. Acho que é uma atividade como a proposta, contribui para levarmos algo de diferente, que converse com o que será ensinado aos alunos, além do que já está previsto. Que, além disso, ajuda e leva os alunos a pensarem e raciocinarem para interpretar a situação e aplicar de fato o conhecimento adquirido por eles.

A_4: Sim, as ferramentas tecnológicas no auxilio do aprendizado, dão suporte. Meio que "tira"um pouco da *abstracção* no ato de passar o conteúdo.

A_6: Sim, afinal agora tenho uma noção básica de como fazer uma atividade semelhante, o que me parece útil na medida em que esse tipo de atividade geralmente é considerada mais interessante e contribui bastante no processo de aprendizado.

7. De maneira geral, indique o que achou da atividade proposta, justificando brevemente.

Todos os alunos gostaram da atividade. Afirmaram que ela foi bem proposta e bem construída e acessível a todos. Alguns dos participantes citam o fato de a atividade ter sido proposta em etapas e reforçam a visualização geométrica.

A_1: A atividade foi excelente, muito bem proposta, e apropriada para estudantes do curso de Matemática. Talvez fosse interessante, expandi-la para outros alunos de outros cursos da área de Exatas.

A_2: Gostei da atividade, acredito que dá forma como foi proposta permite a maior participação do aluno.

A_5: Muito interessante e bem construído. Me fez relembrar muitos detalhes matemáticos, e também aprender varias coisas novas, e sempre achei atividades que envolvem o Geogebra interessantes, pois a parte geométrica é algo que se apresentar com muitas dificuldades para os alunos do Ensino Básico.

A_6: Eu gostei bastante. O conceito de ponto fixo foi bem explicado e a associação com as raízes de funções ficou compreensível mesmo para aqueles com conhecimento mais limitado na área, como eu. Apenas acho que seria conveniente tratar de métodos para analisar se uma função tem pontos fixos, o que poderia ser feito analisando as propriedades dos pontos "acima"da bissetriz dos quadrantes ímpares $(y > x)$ e dos pontos "abaixo"dela $(y < x)$ e o teorema do valor intermediário. Por exemplo, poder-se-ia provar que $f(x) = 2^x$ não tem pontos fixos na medida em que todos os pontos de seu gráfico tem y maior que x. Também é possível provar que $g(x) = -x$ tem ao menos um ponto fixo na medida em que tem tanto pontos em que $y > x$ quanto pontos em que $y < x$, e, como essa função é contínua, pode-se afirmar pelo teorema do valor intermediário que há ao menos um ponto em que $y = x$ (ponto fixo).

A_7: Gostei muito da proposta apresentada. Ela foi dividida em etapas que até mesmo quem desconhece o conceito consegue participar da atividade.

Uma última pergunta foi feita a fim de saber se os alunos gostariam de receber uma cópia deste trabalho quando estiver finalizado. Todos responderam que sim.

Pudemos notar que a atividade foi bem recebida pelos estudantes. Todos ficaram à vontade para participar e fazer questionamentos. A partir das respostas dadas às perguntas enviadas no questionário também pudemos verificar isso. Os estudantes destacaram que foi uma atividade interessante e proveitosa e destacaram também seus aspectos positivos, como a utilização do GeoGebra para facilitar a visualização, a divisão da atividade em etapas para que todos conseguissem acompanhar e a possibilidade de gerar novas ideias para atividades semelhantes. É claro que nem sempre uma atividade poderá ser aplicada sem adaptações, pois depende dos objetivos, do público-alvo, e de outros fatores (tanto é que alguns estudantes sugeriram adaptações). Durante o próprio momento em que estivemos com os alunos, houve questionamentos e explorações no GeoGebra que não havíamos pensado quando planejamos o roteiro, o que é típico de atividades investigativas, em que o professor tem importante papel de mediador e não apenas de condutor da aula. Por fim, reforçamos que, em nossa percepção, esta proposta didática alcançou seu objetivo: apresentar uma atividade envolvendo geometria dinâmica para estudar pontos fixos e sua relação com a obtenção de raízes de equações, além de ter se apresentado como uma atividade que pode servir de inspiração para professores de matemática.

Considerações Finais

Neste estudo, nosso objetivo foi abordar teorias de ponto fixo e propor uma atividade didática que pode ser aplicada em turmas de Ensino Médio, mostrando assim que, apesar de não ser um conteúdo apresentado nas aulas de matemática do ensino básico, poderia ser implementado de uma maneira didática e atrativa, contando com visualização e com o uso de recursos tecnológicos, no caso o GeoGebra.

Percebemos que o uso de um software de geometria dinâmica (no caso, o GeoGebra) foi fundamental para a realização da atividade pois, sem essa ferramenta, a proposta de experimentação e visualização dos conceitos matemáticos não seria feita com tanto dinamismo, o que reduziria a exploração e as atividades investigativas dos participantes. Esta tecnologia facilitou a compreensão dos temas abordados e impulsionou a participação ativa dos alunos, tornando a aprendizagem mais significativa.

Pudemos perceber também que a utilização das tecnologias no contexto educacional exige planejamento, preparação e uma constante atualização dos métodos de ensino. Desenvolver esta atividade reforçou em nós a ideia de que não basta apenas dispor de recursos digitais, mas é fundamental que estes sejam articulados de maneira a promover uma participação mais ativa dos alunos e a estimular a reflexão crítica.

Além disso, destacamos também a importância de se trabalhar com professores e futuros professores. O diálogo e as trocas de experiências são fundamentais para se repensar e se ampliar as abordagens pedagógicas, abrindo espaço para a inovação e a implementação de práticas mais assertivas.

Por fim, destacamos a parte matemática deste trabalho. A ideia central foi mostrar como podemos aliar pontos fixos e métodos iterativos para encontrar as raízes de uma função. Vimos que, para isso, devemos transformar nosso problema de encontrar raízes em um problema de determinar os pontos fixos de uma função auxiliar. Aplicando um método iterativo nesta função auxiliar, com propriedades específicas que atendem às condições do Teorema do Ponto Fixo de Banach, determinamos seus pontos fixos e consequentemente as raízes da função inicialmente considerada.

Da forma como abordamos esse tema na atividade didática, que foi dividida em etapas, com participação ativa dos estudantes e por meio da visualização e experimentação, verificamos que podemos proporcionar aos estudantes uma melhor compreensão dos assuntos abordados. É claro que adaptações podem e devem ser feitas a fim de proporcionar uma melhor experiência para o público que temos (e para o público daqueles que, ao lerem este trabalho, decidirem propor atividades semelhantes). Mas ainda assim, fica claro que práticas semelhantes contribuem e muito para o entendimento dos estudantes.

Esperamos que este trabalho e, em especial, que a atividade didática sirva de inspiração para professores e futuros professores. Com as mudanças ao longo tempo é sempre necessário que as práticas de ensino sejam repensadas e, para isso, é fundamental a formação continuada do docente. Neste sentido, entendemos que o PROFMAT e seu banco de dissertações podem contribuir para pesquisas, reflexões e para o desenvolvimento de práticas de ensino ligadas à matemática.

Referências

ALBUQUERQUE, P. T. L. F. de. Ponto Fixo: Uma Introdução no Ensino Médio. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto - SP, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

BARROS, C. D. V. D. O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas Aplicações. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.

BORBA, M. C.; DA SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. 1^a. ed. Belo Horizonte - Brasil: Autêntica, 2014. (coleçao Tendência em educação matemática). Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

BROCKVELD, L. de L. Estudando Métodos Iterativos no Ensino Médio: Uma Proposta Didática Exploratória Envolvendo o Método de Newton e Geometria Dinâmica. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau - SC, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

BROWN., R. F. Two Important Theorems That Are Really One. *The Mathematics Student*, v. 1, p. 59–62, 2020. Citado na página 31.

CONCEIÇÃO, T. M. G. Lápis, papel, Geogebra e a Fórmula de Bháskara: uma experiência com alunos do nono ano. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.

EDUCAÇÃO, M. D. *BNCC*. 1^a. ed. Brasília - Brasil: Documento homologado pela Portaria n° 1.570, publicada no D.O.U. de 21/12/2017, Seção 1, Pág. 146., 2017. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

FERREIRA, G. G. O Ensino de Funções Exponenciais no Novo Ensino Médio: Aspectos Legais, Análise de Livros Didáticos e a Visão de Professores de Matemática. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, 2023. Citado na página 21.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 3^a. ed. Rio de Janeiro - Brasil: IMPA, 2003. (Projeto Euclides). Citado 2 vezes nas páginas 26 e 36.

LIMA, E. L. *Análise real volume 1. Funções de uma variável*. 8^a. ed. Rio de Janeiro - Brasil: IMPA, 2006. (Coleção Matemática Universitária). Citado 6 vezes nas páginas 25, 26, 31, 36, 39 e 56.

MATA, R. C. da. Números Felizes, Representação Posicional e Pontos Fixos. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de São João Del Rei, São João Del Rei - MG, 2015. Citado na página 16.

PEREIRA, R. O.; FERREIRA, W. M.; MARTINS, E. M. A Equivalência entre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Valor Intermediário. *Revista de Matemática de Ouro Preto*, v. 1, p. 108–119, 2018. Citado na página 31.

PROFMAT. *Banco de Dissertações do PROFMAT*. 2024. Disponível em <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/> Acessado em 9 de fevereiro de 2024. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 16.

PUC-SP. *Instituto GeoGebra São Paulo*. 2024. Disponível em <https://https://www.pucsp.br/geogebrasp/> Acessado em 15 de março de 2024. Citado na página 23.

RIBEIRO, F. P. F. Teoremas de Ponto Fixo e Aplicações para o Ensino Médio. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa - PR, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 36.

SEEMG, E. M. *Currículo Referência de Minas Gerais*. 1^a. ed. Belo Horizonte - Brasil: SEEMG e UNDIME/MG, 2021. Citado na página 21.

SHASHKIN, Y. A. *Fixed Points. Vol. 2, traduzido do Russo por Viktor Minachin*. [S.l.]: AMS, 1991. Citado na página 31.

SOUZA, N. A. de. Algoritmos Iterativos para Encontrar Zeros de Funções Reais. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Oeste da Bahia, Barreiras - BA, 2019. Citado na página 17.

WU, X.; WU, H. *On a class of quadratic convergence iteration formulae without derivatives*. 2000. Applied mathematics and computation, 107(2-3), 77–80. Citado 6 vezes nas páginas 39, 40, 41, 56, 57 e 58.

APÊNDICE A

Questionário Respondido pelos Estudantes da Graduação

Questionário respondido pelos estudantes da Graduação em Matemática da UFOP ao final da atividade:

Inicialmente foi pedido aos estudantes que respondessem as questões informando o nome, curso, período e e-mail.

A seguir, estão as perguntas sobre a atividade:

1. Você já conhecia o conceito de Ponto Fixo? Se sim, quando o estudou? Comente.

2. Você já havia imaginado a conexão entre a existência de pontos fixos e a existência de raízes de funções reais? Comente.

3. Você considera que a maneira como a atividade foi proposta, utilizando o GeoGebra, facilitou seu entendimento? Justifique.

4. Você considera que o conceito de ponto fixo pode ser apresentado a alunos do Ensino Médio que estejam estudando funções? Justifique.

5. Você considera que a atividade como foi desenvolvida poderia ser apresentada a alunos do Ensino Médio que estejam estudando funções? Justifique.

6. Você considera que atividades como esta contribuem para sua formação enquanto futuro professor de Matemática? Justifique.

7. De maneira geral, indique o que achou da atividade proposta, justificando brevemente.

8. Você gostaria de receber uma cópia deste trabalho quando estiver finalizado?

APÊNDICE B

Roteiro da Atividade

Apresentamos a seguir o roteiro utilizado na atividade realizada com os estudantes de graduação. Considerando que se tratou de uma atividade investigativa, o roteiro proposto constituiu-se em um direcionamento para nossas ações em sala de aula e foi pensado para que chegássemos aos objetivos previamente estabelecidos para a atividade. Tal roteiro não foi entregue aos alunos, a menos dos gráficos do item 8.

1. Considere as funções $f(x) = x^3 - 6$ e $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Determine as imagens dos pontos 0, 1 e 2 por estas funções.

2. Algum dos pontos 0, 1 ou 2 fica fixo pela função f ? E pela função g?

3. De acordo com os itens anteriores, o que você definiria como ponto fixo de uma função?

4. Considere as funções: $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3x^2 - 2$. Essas funções têm pontos fixos? Usando lápis e papel, calcule a imagem de alguns valores e tente descobrir pontos fixos.

5. Existe alguma função que tem infinitos pontos fixos? Existe alguma função para a qual todos os pontos de seu domínio permanecem fixos?

6. Considerando a maneira como você obteve os pontos fixos nos itens apresentados, qual o procedimento utilizado para obtê-los? Será que existe alguma forma prática de determinar os pontos fixos de uma função?

7. A partir do gráfico de uma função, como podemos saber se esta tem pontos fixos?

8. Aqui estão alguns gráficos de funções. Quais desses têm pontos fixos?

Gráfico 1:

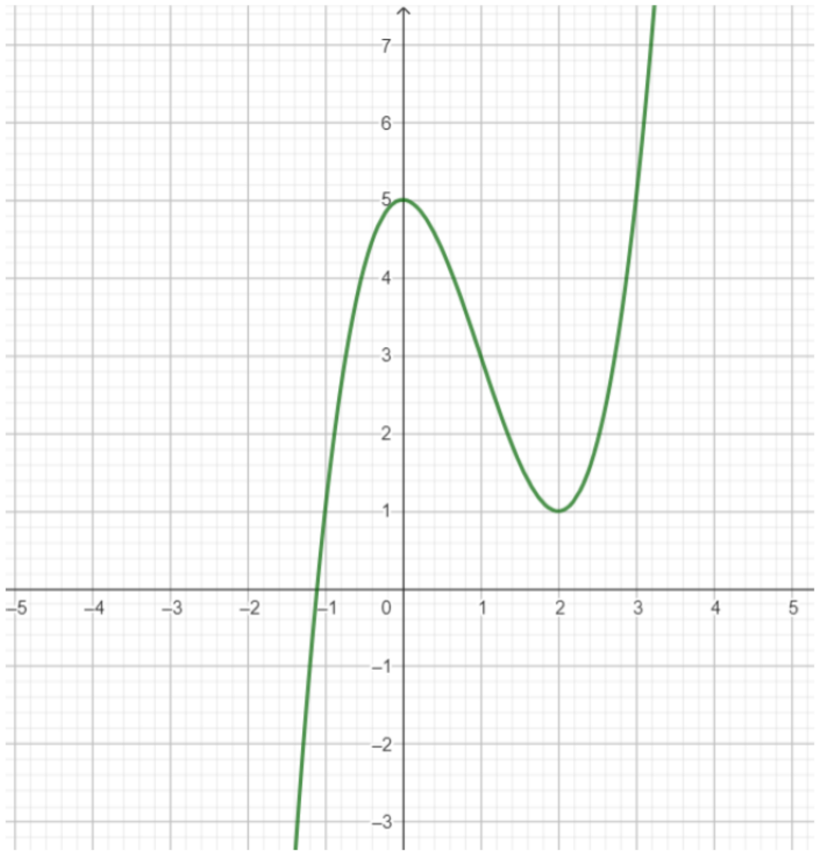


Gráfico 2:

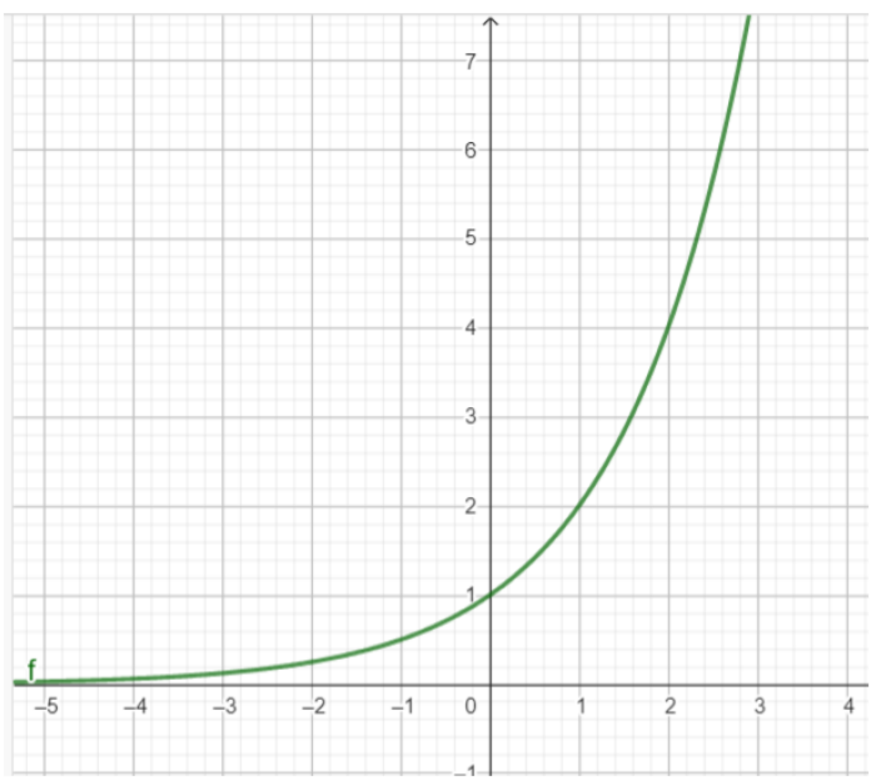


Gráfico 3:

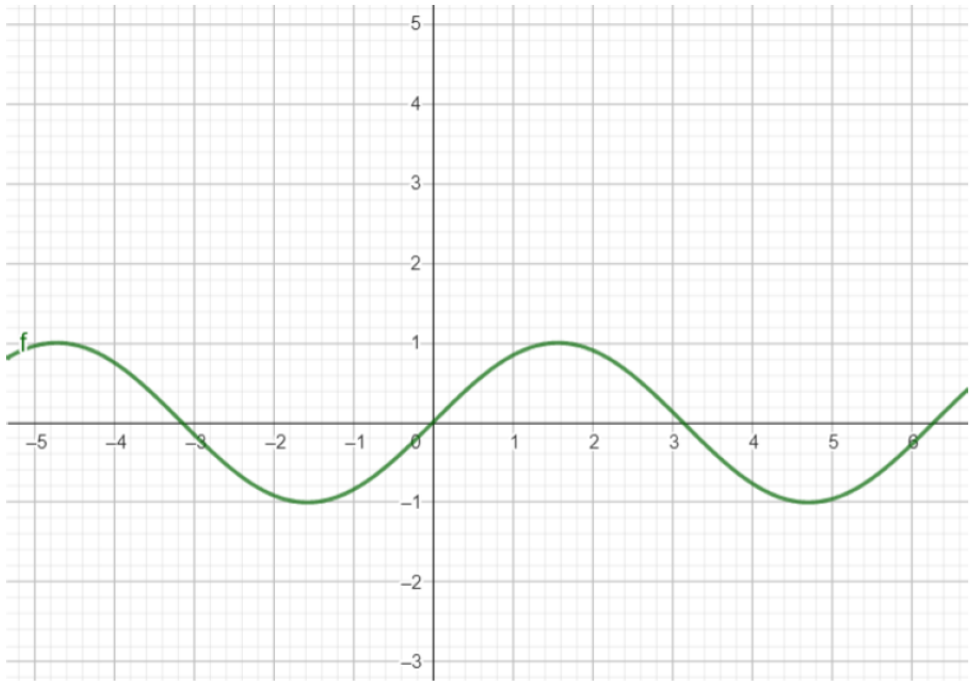


Gráfico 4:

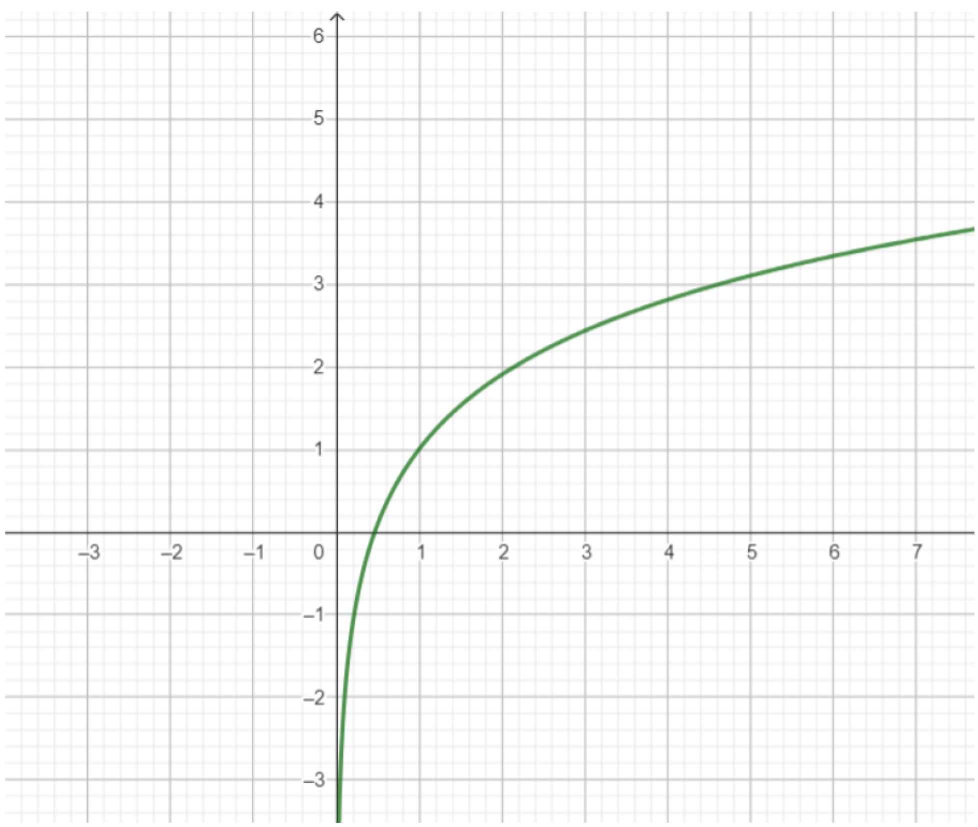


Gráfico 5:

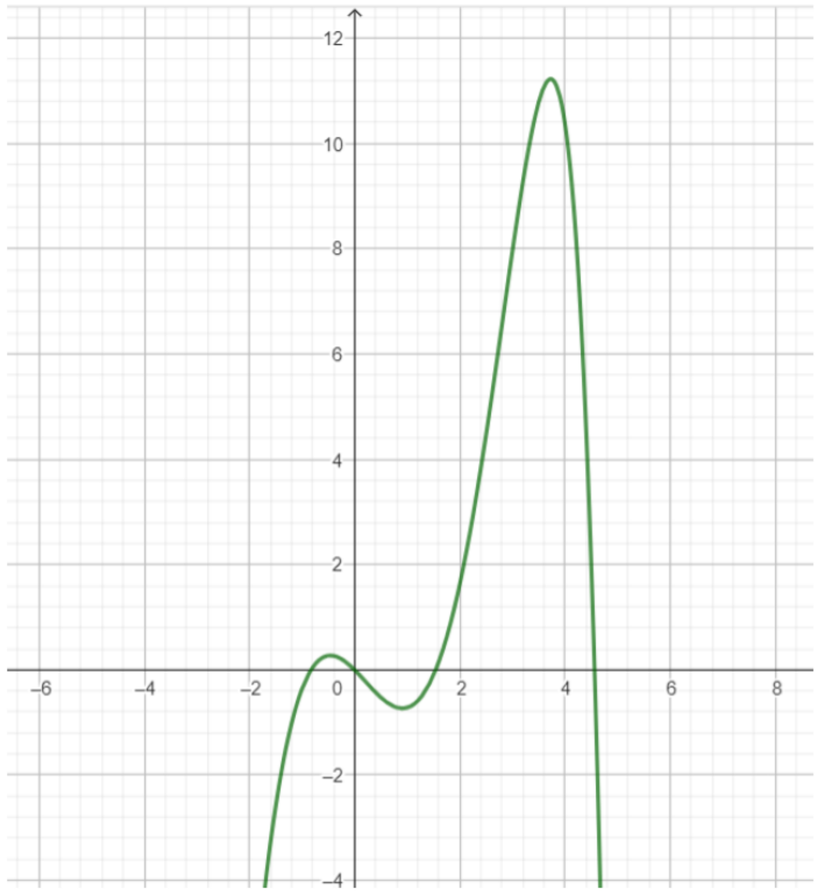
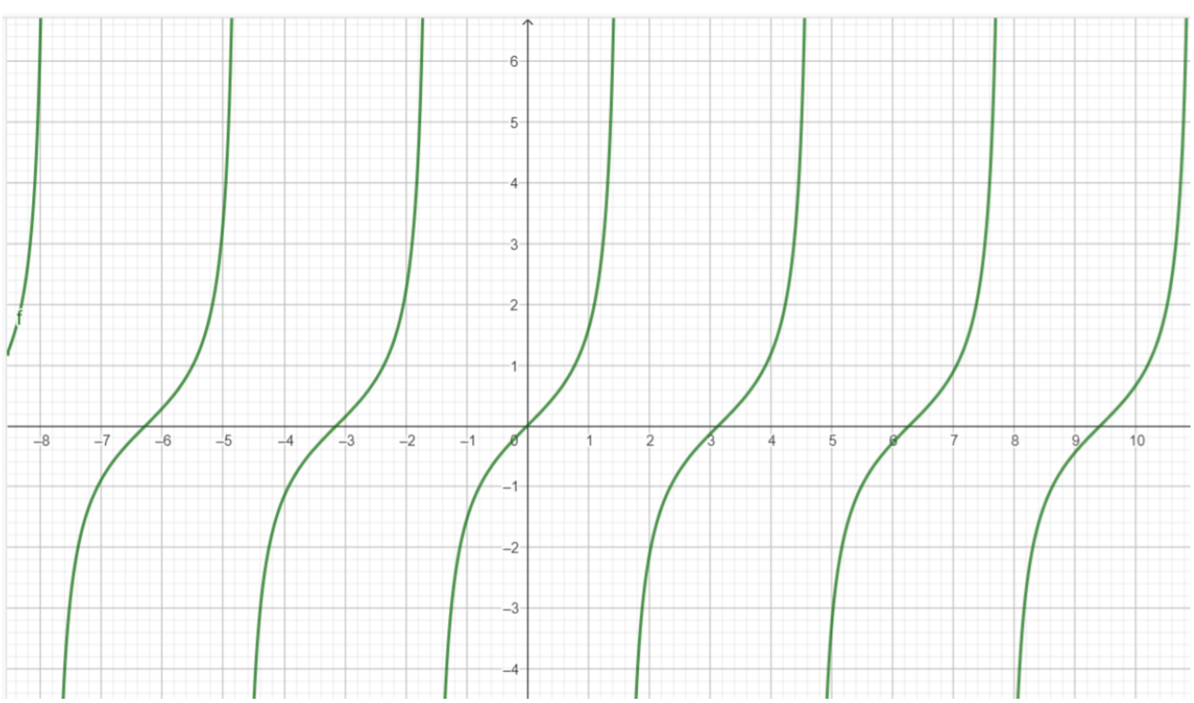


Gráfico 6:



9. Usando o controle deslizante no GeoGebra, podemos saber se um tipo de função sempre terá pontos fixos e quantos são. Vamos fazer isso para estudar os pontos fixos de uma função quadrática.

10. Vocês sabem o que é método iterativo?

11. Escolha um valor maior do que cinco e aplique o método iterativo usando a função: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

12. Consideremos f e g funções reais tais que $g(x) = x - \alpha(x)f(x)$ com $\alpha(x) \neq 0, \forall x$, se x_0 for ponto fixo de g, o que sabemos de $f(x_0)$?

13. Com base na resposta anterior, como podemos utilizar pontos fixos para obter as raízes de uma função?

14. Vamos criar uma sequência iterativa de modo que, dado um x_0, calculamos sua imagem por g, depois calculamos a imagem deste ponto e assim sucessivamente. Será que esta sequência converge?

15. Vocês sabiam que podemos usar o conceito de ponto fixo para determinar as raízes de uma função?

16. Sobre a convergência, ela sempre ocorre?

Ao longo do desenvolvimento da atividade, também foram utilizadas rotinas previamente desenvolvidas no GeoGebra e disponíveis em <https://www.geogebra.org/m/wuskqhrg>.