



**Universidade Federal
de São João del Rei**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
PROFMAT-MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL**

FÁTIMA APARECIDA AFONSO AGUILAR

**OS PROCESSOS DE DIFERENCIAÇÃO E
INTEGRAÇÃO GRÁFICA: UMA ABORDAGEM
ATRAVÉS DA DINÂMICA DE SISTEMAS**

São João Del-Rei
2025.

Fátima Aparecida Afonso Aguilar

**OS PROCESSOS DE DIFERENCIAÇÃO E INTEGRAÇÃO
GRÁFICA: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DA DINÂMICA
DE SISTEMAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de São João Del Rei como requisito parcial para à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Angel Dávalos Chuquipoma.

São João Del-Rei
2025.

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A083p Aguilar, Fátima Aparecida Afonso.
Os processos de diferenciação e integração gráfica:
uma abordagem através da dinâmica de sistemas /
Fátima Aparecida Afonso Aguilar ; orientador José
Angel Dávalos Chuquipoma. -- São João del-Rei, 2025.
124 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT) -- Universidade Federal de São João del
Rei, 2025.

1. Taxa de Variação. 2. Dinâmica de Sistemas. 3.
Diferenciação e Integração Gráfica. 4. Software
Vensim. 5. Sequência Didática. I. Dávalos
Chuquipoma, José Angel , orient. II. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Fátima Aparecida Afonso Aguiar

OS PROCESSOS DE DIFERENCIAÇÃO E INTEGRAÇÃO GRÁFICA: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DA DINÂMICA DE SISTEMAS

Dissertação a ser APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal de São João del-Rei (Campus Santo Antônio) pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. José Angel Dávalos Chuquipoma (Orientador)
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei.

Prof. Dr. Wilman Rodas Huarcaya (*Membro interno da UFSJ*)
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei.

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche (*Membro externo da UFSJ*)
UFJF-Universidade Federal de Juiz de Fora.

São João del-Rei, 23 de Janeiro de 2025.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela oportunidade e pela força que me concedeu para chegar até aqui. Sou grata pela sabedoria e orientação divinas durante toda essa jornada.

Agradeço ao meu esposo Juan pelo seu constante incentivo e apoio incondicional. Sua paciência, compreensão e encorajamento foram fundamentais para que eu pudesse enfrentar os desafios e concluir este trabalho.

Às minhas filhas Milena e Laila, sou grata pelo amor e pela paciência que demonstraram ao longo deste período. Sem o apoio de vocês, esta conquista não teria sido possível.

Agradeço também à minha mãe, Aparecida, e aos meus irmãos, pelos seus constantes incentivos, mesmo à distância. O apoio e o encorajamento de todos vocês foram essenciais para que eu pudesse seguir em frente e concluir esta jornada.

Aos professores do PROFMAT, expressei minha sincera gratidão pela orientação e pelo modelo de educação mediadora, dinâmica, contextualizada e moderna que enriqueceram minha formação acadêmica.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. José Angel Dávalos Chuquipoma, meu orientador, pela dedicação incansável, orientação precisa e pelas valiosas contribuições ao longo de todo o processo de desenvolvimento desta dissertação. Seu apoio foi fundamental para a conclusão deste trabalho.

Aos meus colegas, que compartilharam os desafios e as conquistas durante esta jornada, agradeço pela colaboração e pelo espírito de equipe. Suas contribuições e camaradagem foram essenciais para o meu crescimento e sucesso.

RESUMO

Este trabalho propõe o uso da metodologia de Dinâmica de Sistemas no Ensino Médio como uma ferramenta para a compreensão intuitiva dos conceitos de derivada e integral. Utilizando processos gráficos de diferenciação e integração, conjecturamos que é possível propor uma sequência didática inovadora para o ensino desses conceitos nesse nível de ensino. O objetivo principal é tornar os conceitos de derivada e integral mais acessíveis e intuitivos, por meio de uma abordagem prática e visual, centrada na compreensão dos processos dinâmicos de estoque e fluxo. A metodologia utilizada combina os princípios da Dinâmica de Sistemas com uma sequência didática que utiliza recursos lúdicos e ferramentas visuais para facilitar a aprendizagem. O foco é promover uma compreensão prática e envolvente dos conceitos matemáticos, estimulando os alunos a explorar os conceitos de taxa de variação e acumulação de forma interativa. Para isso, o software Vensim será utilizado para simular visualmente os processos de estoque e fluxo, permitindo aos alunos observar como as variações no estoque se relacionam com o conceito de derivada e como o acúmulo do fluxo pode ser descrito pela integral. Essa abordagem não se limita a explicar os conceitos de derivada e integral, mas também busca estabelecer uma conexão direta entre a teoria matemática e a experiência prática dos alunos. Ao visualizar graficamente esses processos dinâmicos, os estudantes são capazes de desenvolver uma compreensão mais profunda e clara das interações entre as variáveis envolvidas. Ensinar esses conceitos no ensino médio é fundamental, especialmente para os alunos que seguirão para áreas de exatas, engenharias ou ciências aplicadas no ensino superior. Uma compreensão sólida de derivada e integral desde essa etapa escolar facilita a transição para a universidade e contribui para a redução das taxas de reprovação e evasão em cursos de Matemática e áreas afins.

Palavras-chave: Dinâmica de Sistemas. Estoque e Fluxo. Processos de Diferenciação e Integração Gráfica. Sequência Didática. Vensim.

ABSTRACT

This work proposes the use of the System Dynamics methodology in High School as a tool for intuitive understanding of the concepts of derivative and integral. Using graphical processes of differentiation and integration, we conjecture that it is possible to propose an innovative didactic sequence for teaching these concepts at this level of education. The main objective is to make the concepts of derivative and integral more accessible and intuitive, through a practical and visual approach, centered on the understanding of the dynamic processes of stock and flow. The methodology used combines the principles of System Dynamics with a didactic sequence that uses playful resources and visual tools to facilitate learning. The focus is to promote a practical and engaging understanding of mathematical concepts, encouraging students to explore the concepts of rate of change and accumulation in an interactive way. For this, the Vensim software will be used to visually simulate the stock and flow processes, allowing students to observe how changes in stock relate to the concept of derivative and how the accumulation of flow can be described by the integral. This approach is not limited to explaining the concepts of derivative and integral, but also seeks to establish a direct connection between mathematical theory and students' practical experience. By graphically visualizing these dynamic processes, students are able to develop a deeper and clearer understanding of the interactions between the variables involved. Teaching these concepts in high school is essential, especially for students who will go on to study exact sciences, engineering, or applied sciences in higher education. A solid understanding of derivative and integral from this school stage facilitates the transition to university and contributes to reducing failure and dropout rates in Mathematics courses and related areas.

Keywords: Systems Dynamics. Logistical Growth. Vensim-PLE Software. Causal Diagram. Stock and Flow Diagram.

Lista de Figuras

1.1	Taxa média de variação para pontos sobre uma linha reta, a inclinação é a mesma em cada ponto.	25
1.2	Diferentes taxas de variação dependendo da inclinação da curva.	26
1.3	Taxas médias de variação da corda aproximando-se à taxa de variação instantânea da curva no ponto (x_0, y_0)	27
1.4	Velocidade média como taxa média de variação em cada segundo de percorrido.	29
1.5	Velocidade média no plano $[s] \times [m]$. Nesse padrão não é suficiente concluir alguma conjectura sobre se a velocidade é a mesma nos primeiros três segundos. .	29
1.6	Velocidade média $\times$ Velocidade Instantânea. Ao tornar-se o tempo de percurso mais pequeno, temos outro padrão mais detalhado, dessa forma, é possível perceber que as velocidades médias aproxima-se de uma velocidade fixada no ponto B, a velocidade instantânea nesse ponto (derivada da curva no ponto B).	30
1.7	Velocidade média = Velocidade Instantânea para intervalos de tempo suficientemente pequenos.	31
2.1	Representação das relações de causa e efeito entre as variáveis X e Y. Em (a) temos uma relação causal positiva. Em (b) relação causal negativa.	34
2.2	Ciclos de retroalimentação (feedback loop) positivo e negativo entre as variáveis X e Y. Em (a) temos um ciclo positivo. Em (b) ciclo negativo.	35
2.3	Modelo Causal representando as relações de causa e efeito dos eventos na introdução do novo prato no menu, realizado no Vensi-PLE.	38
2.4	Simile Hidrodinâmica do Diagrama de Forrester.	40
2.5	Elementos do diagrama de Forrester e Modelo de Estoque e Fluxo feito no software Vensim.	41
2.6	Ilustração metafórica do Diagrama de Forrester e sua representação no software Vensim.	43
2.7	Diagrama causal para a dinâmica da população de abelhas.	44
2.8	Diagrama de estoque e fluxo para a dinâmica da população de abelhas.	44

2.9	Modos comuns de comportamento em sistemas dinâmicos.	46
2.10	Estrutura do Crescimento Exponencial realizado no software Vensim. O diagrama causal é definido por um feedback positivo R entre as variáveis: Taxa de Aumento Líquida e Estado. Realização feita no software Vensim.	48
2.11	Gráfico da função exponencial para $a > 0$	50
2.12	Barra de ferramentas do Vensim-PLE versão 10.2.2.	53
2.13	Alguns elementos da barra de ferramenta principal.	54
2.14	Configuração do modelo.	55
2.15	Variáveis Depósito (fluxo entrada) e Saque (Fluxo de saída) definidas. Poupança (estoque), Etapas 2, 3 e 4.	56
2.16	Variáveis Depósito e Saque definidas no Vensim. Etapa 5.	57
2.17	Parte superior: a variável Poupança está definida. Parte inferior: as caixas em negritas indica que as variáveis não estão definidas. A caixa de cor branca indica que a Poupança está pronta para a simulação. Etapa 6.	58
2.18	Simulação da dinâmica do Exemplo 11 no Vensim. A simulação apresenta resultados onde a variável poupança tem um crescimento linear.	59
2.19	Simulação da dinâmica do Exemplo 12 no Vensim. A simulação apresenta resultados mostrados na Tabela. Após 12 meses, o número de coelhos cresceu a 90 aproximadamente.	60
3.1	Representação gráfica da Integração (estoque) a partir da taxa líquida (diferenciação). Os estoques acumulam ou integram seu fluxo líquido.	64
3.2	Integração gráfica. O tempo $[t_1, t_2]$ é dividido em pequenos intervalos de comprimento dt . Cada retângulo representa a quantidade adicionada durante o intervalo dt , supondo que a taxa líquida L_i naquele momento permaneça constante durante o intervalo. A área de cada retângulo é $L_i dt$. O total adicionado ao estoque entre t_1 e t_2 é então a soma das áreas dos retângulos. Dividir o tempo em incrementos menores aumenta a precisão da aproximação.	65
3.3	Fluxo de entrada.	68
3.4	Integração gráfica: Enquanto a taxa sobe e desce, o estoque sobe e permanece em um nível mais elevado. Observe as diferentes unidades de medida para o fluxo e o estoque.	70
3.5	Fluxo de entrada e fluxo de saída.	71
3.6	Fluxo Total.	71

3.7	O Processo de Integração Gráfica. A curva de cor lilas representa o estoque da dinâmica do sistema.	73
3.8	Representação gráfica de um estoque, exemplo hipotético.	74
3.9	Representação gráfica da diferenciação (taxa líquida) a partir da integração (estoque). A inclinação da trajetória do estoque é chamada de derivada do estoque.	75
3.10	Representação gráfica do processo de diferenciação (taxa líquida) a partir da estoque.	76
3.11	Representação gráfica do estoque do Exemplo 17.	77
3.12	Representação gráfica do processo de diferenciação a partir da estoque do Exemplo 17.	78
4.1	Fonte: Adaptação de https://www.estudoadministracao.com.br/ler/20-11-2014-o-que-significa-sic/	81
4.2	Fonte: Adaptação de https://brasilescola.uol.com.br/geografia/sistema-solar.htm	84
4.3	Fonte: Adaptação de https://www.saaec.com.br/esgoto/o-que-e-esgoto/	84
4.4	Fonte: Adaptação de https://profseducacao.com.br/artigos/	85
4.5	https://www.ebrccoaching.com.br/a-importancia-do-pensamento-sistematico-nas-empresas	
4.6	Feedback positivo do Exemplo 26.	87
4.7	Feedback positivo no crescimento exponencial do Exemplo 26.	88
4.8	Feedback negativo entre as variáveis fome e consumo de comida do Exemplo 28.	89
4.9	Feedback positivo e negativo entre as variáveis nascimento, população e morte do Exemplo 29.	91
4.10	Ilustração metafórica da representação da Dinâmica de Estoque e Fluxo.	92
4.11	Diagrama de Estoque e Fluxo feito no Software educacional Vensim, representando a metáfora da banheira.	92
4.12	https://revistagalileu.globo.com/ciencia/biologia/noticia/2023/04/pesquisadores-descobrem-tracos-evolutivos-inusitados-do-mamute-lanoso.ghhtml	94
4.13	Jogo do mamute. Exemplo de um possível resultado para o Jogo 1.	96
4.14	Jogo do mamute. Exemplo de um possível resultado para o Jogo 2.	98
4.15	Registro de dados em tabela e planilha para o esboço dos gráficos.	101
4.16	O tanque acumula seu fluxo de entrada, a tendência da água é subir, pois não existe fluxo de saída.	105
4.17	Fluxo de entrada.	107

4.18 Fluxo de entrada.	108
4.19 O estoque acumula seus fluxos de entrada (linha de cor azul) e saída (nula). . .	109
4.20 O estoque (linha de cor vermelha) acumula seu fluxo de entrada, a tendência da água é subir, pois não existe fluxo de saída.	110
4.21 Relação estoque (linha de cor verde) e tempo.	115
4.22 Fluxo total do estoque (linha de cor azul).	116
4.23 Distribuição do estoque (linha de cor azul).	117
4.24 Superposição do estoque e o fluxo total (linha de cor vermelho).	118

Lista de Tabelas

2.1	Distinção entre estoques e fluxos nas diversas áreas das ciências.	42
4.1	Exemplos de estoque e fluxo.	93
4.2	Tabela de valores.	107
4.3	Fluxo Total.	116

Sumário

Introdução	14
1 Taxas de Variação	18
1.1 O Contexto Histórico	18
1.2 Taxa Média de Variação e Taxa Instantânea	21
1.2.1 Variações Discretas	22
1.2.2 Variações Contínuas	24
2 Introdução à Dinâmica de Sistemas	32
2.1 O que entendemos por Dinâmica de Sistemas?	32
2.1.1 Modelos Causais na Dinâmica de Sistemas	33
2.1.2 Modelos de Estoque e Fluxo	38
2.2 Dinâmica de Funções	45
2.2.1 Função Afim	46
2.2.2 Função Exponencial	47
2.3 Uma Introdução ao Software Vensim	51
3 O Método de Diferenciação e Integração Gráfica	61
3.1 Dinâmica de Estoque e Fluxo	61
3.1.1 Relações entre Estoque e Fluxo	62
3.1.2 Equilíbrio Estático e Dinâmico	62
3.1.3 Cálculo sem Matemática	63
3.1.4 Integração Gráfica	63
3.1.5 Diferenciação Gráfica	72
4 Proposta de Sequência Didática: Processos de Integração e Diferenciação Gráfica no Ensino Médio	79
4.1 Proposta de Sequência didática sobre a indução dos conceitos de derivada e integral usando DS	80

5	Considerações Finais	119
	Referências Bibliográficas	121

Introdução

A matemática no ensino médio e superior desempenha um papel crucial na formação dos estudantes, preparando-os para enfrentar desafios acadêmicos e profissionais futuros. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

(...) a matemática no Ensino Médio tem como objetivo proporcionar aos estudantes o desenvolvimento da capacidade de compreender, interpretar e analisar a realidade, além de resolver problemas e tomar decisões com base em conhecimentos matemáticos. (BRASIL, 2018, p. 15).

A importância do desenvolvimento da área de Matemática é reconhecida por toda a sociedade e perpassa todos os sistemas educacionais. Entretanto, também são conhecidos os gargalos que essa área de conhecimento ainda enfrenta, como problemas de aprendizagem, reprovações e evasões. Esses desafios são evidenciados pelos resultados de proficiência em conhecimentos matemáticos nos últimos anos no ensino básico e pelo aumento das reprovações e evasões no ensino superior, especialmente no período pós-pandemia.

O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) de 2021, referente à área de Matemática e suas tecnologias no ensino médio da rede estadual, foi de 4,56, enquanto a meta proposta para esse ano era de 5,5. Nesse mesmo sentido, os resultados do PROEB, que mede o desempenho dos alunos da 3ª série do ensino médio das escolas estaduais mineiras em 2022, foram: baixo (68%), intermediário (28%), recomendado (3%) e avançado (2%). Dessa forma, nota-se claramente a grande defasagem de conhecimentos matemáticos nas escolas estaduais do país, especialmente no Estado de Minas Gerais.

Os problemas de reprovação e evasão no ensino superior ocorrem principalmente nas primeiras disciplinas de Matemática da grade de cursos na área de exatas, engenharia ou ciências aplicadas. Por exemplo, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, Barufi (1999) mostra que, na Universidade de São Paulo (USP), entre os anos 1990 e 1995, a média de reprovação foi de 43,8%. Rezende (2003) indica que, nas universidades do Rio de Janeiro, a média de reprovação varia de 45% a 95% no conjunto de disciplinas que oferecem essa matéria. Rosa, Alvarenga e Santos (2018) revelam que, na Universidade Federal de Goiás (UFG), do primeiro semestre de 2010 ao segundo semestre de 2016, o percentual de reprovação foi de 65%. Outros autores, como Donel (2015) e Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014), também atestam a elevada reprovação nessa disciplina.

A reprovação não é um fenômeno novo; pesquisas sobre essa temática podem

ser encontradas desde os anos 50 e 60, indicando que o problema está relacionado com fatores biológicos, sociológicos e psicológicos, como relata Camargo (2013). Todavia, esse problema vem se agravando ao longo dos últimos anos. Recentemente, pesquisas sobre reprovações na área de Matemática no ensino superior encontraram novos fatores que evidenciam uma forte relação com este fenômeno, como a baixa qualidade da educação básica, a falta de professores qualificados e o baixo investimento neste nível educacional. O assunto é pesquisado contemplando todos os níveis de ensino, desde o ensino fundamental, em trabalhos como os de Camargo (2013), Silva et al. (2011) e Faria (2011), passando pelo ensino médio, com Menezes-Filho (2007), Oliveira (2007) e Souza, Tabosa e Simonsassi (2015), até o ensino superior, com Silva et al. (2005), Arantes et al. (2007), Passos et al. (2007), Ferreira et al. (2016), dentre outros.

Diante desse cenário, a presente dissertação propõe uma sequência didática inovadora para o segundo ano do ensino médio, a ser desenvolvida nas aulas de itinerário formativo da área de exatas. O objetivo é introduzir os conceitos de derivada e integral de maneira acessível e envolvente já no ensino básico. A escolha desses tópicos não é aleatória; além dos altos índices de reprovações e evasões no ensino superior, a derivada e a integral são fundamentais para a compreensão de fenômenos naturais e tecnológicos, sendo essenciais para diversas áreas do conhecimento e profissões.

Nesse sentido, a dinâmica de sistemas, um campo interdisciplinar que estuda o comportamento de sistemas complexos ao longo do tempo, oferece uma rica oportunidade para contextualizar e aplicar conceitos matemáticos abstratos. Como explica Meadows (2008), a dinâmica de sistemas “é a ciência dos sistemas complexos e suas interações ao longo do tempo, ajudando-nos a entender como as partes de um sistema se relacionam e afetam umas às outras” (p. 5). Esse campo utiliza modelos matemáticos para descrever como sistemas variam e se comportam ao longo do tempo, o que é particularmente útil para entender a evolução e o comportamento de fenômenos dinâmicos.

Um exemplo prático de dinâmica de sistemas é o jogo do mamute, que ilustra de maneira lúdica os conceitos de estoque e fluxo. No jogo, os jogadores gerenciam uma população de mamutes, tomando decisões sobre caça, reprodução e conservação para manter a população estável. Esse tipo de atividade pode ajudar os alunos a entenderem como as derivadas e integrais são aplicadas na análise de taxas de variação e acumulação. Segundo Sterman (2000), “os modelos de dinâmica de sistemas permitem que os indivíduos explorem e compreendam as complexidades e interdependências dentro dos sistemas que eles estudam” (p. 23).

Dessa maneira, ao integrar a derivação e a integração gráfica no currículo, busca-se não apenas facilitar a compreensão desses conceitos fundamentais, mas também estimular

o pensamento crítico e a capacidade de resolução de problemas dos estudantes. Assim, a abordagem proposta visa transformar a percepção dos alunos sobre a matemática, mostrando sua relevância e aplicabilidade em situações reais.

A sequência didática proposta será estruturada em torno de atividades práticas e interativas, utilizando ferramentas tecnológicas e recursos visuais para ilustrar a aplicação real das derivadas e integrais. Espera-se que, ao vivenciar a matemática de forma mais concreta e visual, os alunos desenvolvam um interesse genuíno pelas ciências exatas e considerem seguir carreiras nessas áreas. Além disso, a presente dissertação discutirá a importância de uma abordagem pedagógica que valorize a curiosidade e a criatividade dos estudantes, promovendo um ambiente de aprendizado inclusivo e motivador.

A implementação dessa sequência didática será avaliada por meio de estudos de caso e feedback dos alunos, visando aperfeiçoar continuamente as estratégias de ensino e maximizar o impacto educacional. A avaliação incluirá a análise de desempenho acadêmico, bem como a percepção dos alunos sobre a relevância e a aplicabilidade dos conceitos aprendidos.

Em suma, esta dissertação busca contribuir para a melhoria da educação matemática no ensino médio, oferecendo uma metodologia inovadora que não apenas facilita a compreensão dos conceitos de derivada e integral, mas também inspira os estudantes a explorar o vasto e fascinante mundo das ciências exatas. Ao induzir a compreensão dos conceitos de derivadas e integrais utilizando os conhecimentos do ensino médio, busca-se minimizar os efeitos de reprovações e evasões no ensino superior. Finalmente, ao promover uma aprendizagem mais significativa e contextualizada, espera-se que os alunos desenvolvam habilidades essenciais para o século XXI, como pensamento crítico, criatividade e capacidade de resolução de problemas.

A presente dissertação está estruturada em 5 capítulos. No Capítulo 1, realiza-se a familiarização com os conceitos de taxas de variação. Nessa parte, o objetivo é mostrar a ideia intuitiva do conceito de derivada sem entrar no rigor matemático. Faz-se um paralelo entre a taxa média de variação e a taxa instantânea, como ponto de partida para o entendimento do conceito de fluxo.

No Capítulo 2, abordamos uma breve introdução à Dinâmica de Sistemas e direcionamos o conteúdo ao nível do Ensino Médio. Apresentamos os elementos dessa ferramenta e destacamos a importância dos modelos causais, como os modelos de estoque e fluxo. Exemplos de aplicação são apresentados para familiarizar os alunos do Ensino Médio com a metodologia. O software computacional Vensim é abordado, destacando-se suas ferramentas, sua aplicação na elaboração dos diagramas causais e nos diagramas de estoque e fluxo. Exploramos as vantagens do software no entendimento de simulações de

crescimento de funções.

No Capítulo 3, desenvolvemos o tema principal de nossa pesquisa: os processos de integração e diferenciação gráfica. Usando os conceitos de taxa de variação e acúmulo de grandezas, conseguimos relacionar o estoque com o conceito de integral e o fluxo com o conceito de derivada. Exemplos de aplicação são desenvolvidos para reforçar esses processos e compreender a ideia intuitiva de derivada e integral, pelo menos no caso de funções afins e polinomiais de segundo grau.

No Capítulo 4, é desenvolvida uma proposta didática para os processos de integração e diferenciação gráfica. Utilizando como instrumento didático os estoques e fluxos, conjecturamos que é possível desenvolver a intuição desses conceitos por meio desses processos gráficos e preparar o aluno do Ensino Médio para entender e usar os conceitos de derivadas e integrais presentes na disciplina de Cálculo.

No Capítulo 5, são apresentados as considerações finais de nossa pesquisa.

Capítulo 1

Taxas de Variação

Neste capítulo, abordaremos o conceito de taxa de variação e os processos de crescimento de funções. O objetivo deste tema é explorar os conceitos ensinados no Ensino Médio sobre funções afins, lineares e exponenciais, com o intuito de abordar outros tipos de crescimento. Muitos processos de crescimento que encontramos na vida real não são lineares nem exponenciais. Em situações mais realistas, a maioria dos processos de crescimento tem capacidade limitada, aproximando-se de um certo limite, chamado de capacidade máxima. Nesse sentido, temos os modelos logísticos. Por exemplo, ao analisar o comportamento de indivíduos proprietários de celulares, não é possível que todos comprem esses produtos de uma vez só, pois existe uma capacidade de compra por parte das pessoas, dependendo do salário, do tempo de vida do aparelho, etc. Baseado nessas situações, as companhias definem a capacidade máxima do mercado. Além disso, pretendemos focar no conceito de taxa de variação, que ainda não é amplamente explorado nas escolas, como ponto de partida para o conhecimento do conceito de fluxo líquido de uma função. Alguns exemplos serão abordados para fortalecer a ideia principal que será desenvolvida nos capítulos seguintes.

1.1 O Contexto Histórico

O cálculo diferencial é uma poderosa ferramenta matemática para analisar a variação de diversas grandezas. A base dessas ferramentas são algumas regras simples para calcular derivadas. Não é nosso interesse entrar diretamente nessa área de estudos, mas sim preparar o caminho para introduzir os processos de integração e diferenciação gráfica com a ajuda da Dinâmica de Sistemas. No contexto histórico, uma das primeiras relações conhecidas entre as matemáticas e o mundo físico foi a harmonia pitagórica. Aproximadamente 600 anos a.C., Pitágoras descobriu que, para obter acordes agradáveis

em um instrumento de corda, o comprimento dessas cordas deveria estar em uma relação de números simples, como, por exemplo, 1 a 2, 2 a 3, etc. Isso foi denominado harmonia pitagórica. Foi uma descoberta considerada importante, pois foi a primeira vez que se estabeleceu uma relação entre as matemáticas e o mundo físico. Com o passar do tempo, infelizmente, essa relação foi esquecida e precisou ser redescoberta lentamente e com grandes dificuldades.

Cerca de mil anos depois, foi Galileo di Vincenzo Bonaiuti de Galilei (1564-1642), mais conhecido como Galileu Galilei, quem entendeu isso e retomou essas pesquisas. No pensamento de Galileu (1623), *Il Saggiatore* (em italiano):

A filosofia [i.e., a física] encontra-se escrita neste grande **livro** que continuamente se abre perante nossos olhos (isto é, **o universo**), que não se pode compreender antes de entender a língua e conhecer os caracteres com os quais está escrito. Ele está escrito em língua das matemáticas... (GALILEU G. *Il Saggiatore* (O Ensaíador), tradução ao inglês Stillman Drake and C. D. O'Malley, em *The Controversy on the Comets of 1618*, p. 183.).

Na ideia de Galileu, o primeiro passo é aprender os símbolos e o vocabulário da linguagem matemática para interpretar e conhecer o "livro do universo". Trata-se de uma linguagem de precisão, poesia e até mesmo de música. Há muitos anos, os físicos utilizam a linguagem da matemática, e os músicos, desde aproximadamente 600 a.C., também se servem dessa linguagem. Como em quase todos os idiomas, incluindo a música, as matemáticas têm seu próprio vocabulário, suas próprias regras e símbolos, sua precisão e elegância, além de uma história própria. Uma parte dessa história foi graças a Galileu Galilei, que tinha um espírito inconformista, característica herdada de seu pai, Vincenzo Galilei, um grande compositor de música do final do Renascimento e que contribuiu significativamente para a revolução musical. Musicalmente, Vincenzo se recusou a seguir os métodos tradicionais, em seu livro *Della musica antica et della moderna*, (1581) Vincenzo se opôs ao uso da harmonia pitagórica, ainda usada por seus contemporâneos em música. Ele considerava os antigos acordes gregos simples demais para as estruturas musicais complexas do Renascimento italiano. Mais tarde, Galileu considerou que as matemáticas gregas eram demasiado simples para ser capaz de expressar suas ideias e criou a *cinemática*; um ramo da mecânica que lida com o movimento em abstrato de corpos, e a expressão correta de qualquer ideia abstrata requer uma linguagem, conceitos e símbolos apropriados, que dão uma ideia do seu significado e valor. Apesar de ser avançado essa

nova ciência do movimento de Galileo, suas raízes ainda estavam no terreno onde costumava se mover o antigo intelecto grego e foi algo totalmente novo que teve que florescer no campo da matemática e da ciência. Os estudiosos precisavam de uma linguagem mais sofisticado do que se foi falado desde Arquimedes e Euclides, dito de outra forma, a física precisava de uma linguagem mais avançado.

Aproximadamente 25 anos após a morte de Galileo, finalmente se descobriria a famosa linguagem e ela começaria a ser utilizada a partir de então, sendo chamada de cálculo diferencial. Essa ferramenta constituiria uma metodologia eficiente e poderosa, e, como qualquer linguagem, seu poder deriva da ideia que a sustenta: a derivada. A derivada é o fundamento do cálculo diferencial; metaforicamente, podemos dizer que a derivada é para a cinemática o que as rodas são para uma viagem. A derivada não se aplica apenas a um corpo em movimento horizontal ou vertical, mas sim à taxa de variação instantânea de qualquer função em um determinado ponto ou instante. Galileo, através da cinemática, explica a lei dos corpos em queda livre, manifestando que a velocidade de um corpo é a derivada da distância percorrida. Mas a derivada é algo mais: ela representa o ritmo de mudança de qualquer grandeza. Por exemplo, pode-se usar a derivada para descrever a densidade populacional das tilápias em relação ao aumento ou diminuição da temperatura da água, a taxa de variação do volume de um balão em relação à sua área de superfície, ou a taxa de variação do preço de um bolo em relação ao seu tamanho.

Em 1629, o matemático francês Pierre Fermat foi o primeiro a encontrar a linha tangente em um ponto arbitrário de uma curva. Em 1638, Fermat compartilhou sua descoberta com seu compatriota René Descartes, que tinha seu próprio método para encontrar tangentes a curvas algébricas. Muitas dessas ideias matemáticas, especialmente as de Fermat, foram desenvolvidas posteriormente por Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton, criando um método geral e sistemático de análise matemática, chamado de cálculo diferencial.

Baseados nesse contexto histórico, podemos perceber que o conceito de derivada está presente em muitos aspectos da realidade, mas o processo mecânico para calculá-la, isto é, o cálculo diferencial, exige uma abordagem prática para que o conceito seja plenamente compreendido. Em resumo, sem as regras de diferenciação, o conceito de derivada pode se tornar difícil de aplicar. Atualmente, o ensino desses temas nas escolas continua sendo um desafio, especialmente na busca por aplicações de ferramentas computacionais que possam facilitar a compreensão e o uso do cálculo diferencial.

1.2 Taxa Média de Variação e Taxa Instantânea

A matemática oferece uma linguagem eficiente para a interpretação de modelos por meio do conceito de variação. Grandezas podem ser observadas de diversas maneiras na realidade, estabelecendo relações de medidas e apresentando características geométricas ou analíticas. Por exemplo, o crescimento de uma população depende da taxa de natalidade e mortalidade dos indivíduos ao longo de um intervalo de tempo. Esse crescimento varia conforme as taxas de natalidade e mortalidade, sendo importante destacar o ritmo com que essa variação ocorre para prever o comportamento futuro da população. Ou seja, a taxa de variação do crescimento permitirá antecipar o comportamento futuro da grandeza. A modelagem do problema, por meio de suas variações, possibilita identificar as quantidades que governam a dinâmica do modelo, as quais podem ser parâmetros, constantes ou variáveis. Uma quantidade que pode ou não mudar durante o processo é chamada de parâmetro. Já as constantes são grandezas que não variam, possuindo valores fixados a priori. As variáveis, por sua vez, são grandezas que se modificam ao longo do processo e podem ter características discretas ou contínuas.

O conjunto finito $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ formado por valores de uma variável $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ é denominado *conjunto discreto*. Dito de outra forma, um conjunto é chamado discreto, se existe uma correspondência bijetiva entre os elementos do conjunto e um subconjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Dizemos que uma variável x é *discreta*, quando toma valores isolados no conjunto discreto, ou seja, não admite valores intermediários entre dois valores específicos. Se a variável não for discreta, dizemos que é contínua, isto é, uma *variável é contínua* quando pode assumir valores intermediários entre os valores discretos das observações $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Exemplo 1. O número de peixes x_n capturados em um barco pesqueiro no mês n , então, $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12}\}$ representa um conjunto discreto e o número de peixes x é a variável discreta.

Exemplo 2. Se queremos selecionar tilápias com pesos dentro das possibilidades definidas pelo conjunto $\{x_1 = 0.66, x_2 = 0.93, x_3 = 1.0, \dots, x_9 = 2.7\}$, qualquer peixe vai ter um peso que pode ou não, coincidir com esses valores. O valor da variável peso x , pode ser assumido no intervalo $[0.66, 2.7]$; assim, a variável peso é contínua.

Observação 1. $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um conjunto discreto de números reais, logo x é uma variável discreta; porém, se temos a representação $x = f(t)$, onde $f : \mathbb{R} \rightarrow A$ é uma função definida para todo $t \in \mathbb{R}$, então, na verdade, x e t serão variáveis contínuas.

Diversos modelos matemáticos apresentam relações de dependência entre as grandezas que o definem, a análise da *variação* dessa variável em relação à mudança da outra grandeza, permite estabelecer o início da construção do modelo variacional ou dinâmico. As variações são de dois tipos: variações discretas e variações contínuas, a seguir estudaremos cada tipo de variação.

Definição 1 (Variação). *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ uma função. A variação de uma função f , é definida como a medida do comportamento da função em relação a um estágio da variável independente x .*

1.2.1 Variações Discretas

Na sequência, vamos a considerar que duas grandezas x e y estão relacionadas pela função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$, $\forall x \in I$ subconjunto de $\mathbb{R}$. Suponhamos y é uma variável discreta dentro do conjunto discreto $D = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \mathbb{R}$.

Definição 2 (Variação Discreta). *Uma variação é discreta se os valores da imagem da função f , isto é, $y = f(x)$ pertence ao conjunto discreto D .*

Definição 3 (Variação Total). *A variação total ou às vezes chamada variação de $y = f(x) \in D$ em relação ao intervalo $[x_0, x_1] \subset I$ é definida por*

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) \quad (1.1)$$

Δy é chamado também de *incremento* de y . Se $\Delta y > 0$, então a função f aumenta em tamanho; se $\Delta y < 0$, a função f experimenta um decréscimo do tamanho; se $\Delta y = 0$, a função permanece inalterada ou constante.

Exemplo 3. Em uma lagoa, uma família de peixes se constituía de 60 tilápias no primeiro dia de agosto de 2023, e um total de 150 tambaquis no primeiro dia de agosto de 2024. Se denotamos por N o número de peixes, podemos considerar $N = f(t)$ como uma função do tempo t em meses. Tomando t_1 o primeiro dia de agosto de 2023 e t_2 o primeiro dia de agosto de 2024, temos $f(t_1) = 60$ e $f(t_2) = 150$; podemos encontrar que a variação total discreta após um ano será $\Delta N = f(t_2) - f(t_1) = 150 - 60 = 90 > 0$, o que implica que a população de peixes aumentou. Observe que, sendo os valores $f(t_1) = 60$ e $f(t_2) = 150$ inteiros, a variável N é discreta, pois $N \in D = \{60, 150\}$.

Definição 4 (Taxa Média de Variação). *A taxa média de variação ou variação média de $y = f(x) \in D$ em relação x é definida por*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad x_0 \neq x_1. \quad (1.2)$$

$\Delta x = x_1 - x_0$ é o tamanho do intervalo $[x_0, x_1]$, também chamado de incremento da variável x . A taxa de variação média representa o incremento da função f em relação ao incremento da variável x .

Exemplo 4. No Exemplo 3, a taxa média de variação do número de peixes de tilápias e tambaquis é

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{90}{12} = 7.5.$$

A população de tilápias e tambaquis entre agosto de 2023 a 2024 aumentou em média de 7.5 por mês. Naturalmente isso indica que o número de nascimentos foi maior em relação ao número de mortes. Outro tipo de medida variacional discreta aparece em particular na dinâmica populacional que a seguir definimos.

Definição 5 (Taxa de Variação Relativa). *A taxa de variação de uma população relativa à população inicial N_1 , ou simplesmente taxa de variação relativa, é a taxa de variação de uma população $N = f(t) \in D$, em que a variação depende somente do número de indivíduos N_1 presentes inicialmente. Temos os seguintes casos:*

i) *Taxa de Variação Relativa Média, que é definida por*

$$\alpha = \frac{\Delta N}{N_1 \Delta t} = \frac{N_2 - N_1}{N_1(t_2 - t_1)}, \quad N_1 = f(t_1), \quad N_2 = f(t_2)$$

ii) *Taxa de Variação Malthusiana, proveniente de um crescimento exponencial em cada unidade de tempo.*

$$\alpha = \sqrt[\Delta t]{\frac{N_{t+\Delta t}}{N_t}} - 1.$$

Exemplo 5. No Exemplo 3, a taxa de variação média relativa ao número de tilápias e tambaquis é

$$\alpha = \frac{\Delta N}{N_1 \Delta t} = \frac{90}{60(12)} \simeq 0.8.$$

Neste caso, a taxa de variação populacional entre agosto de 2023 e 2024 aumentou em média 80% por mês. Se tomamos $\Delta t = t_2 - t_1 = 12$, temos $N_2 = N_{t_1+\Delta t} = 150$ e $N_1 = N_{t_1} = 60$; logo,

$$\alpha = \sqrt[12]{\frac{N_2}{N_1}} - 1 = \sqrt[12]{\frac{150}{60}} - 1 = 0.079.$$

então isso quer dizer que a população cresceu em média 7,9% ao mês, relativamente à proporção existente em cada mês, durante os 12 meses.

1.2.2 Variações Contínuas

Definição 6 (Variação Contínua). *A variação de uma grandeza y em relação a uma grandeza x é contínua, se os valores $y = f(x)$ da imagem da função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é uma variável contínua.*

Observamos que uma variável contínua pode assumir valores em um conjunto discreto, isso significa que podemos generalizar as definições de variações do caso discreto para o caso de variações contínuas, o que faremos a seguir. Consideremos uma variável y (contínua ou discreta) que está em relação com a variável x através da função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, $y = f(x)$, $\forall x \in I$ subconjunto $\mathbb{R}$.

Definição 7 (Variação Total). *A variação total ou às vezes chamada variação absoluta de $y = f(x)$ em relação ao intervalo $[x_0, x_1]$ é definida por $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$.*

Definição 8 (Gráfico de uma Função). *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ uma função definida no intervalo $I = (a, b)$. O gráfico de f , denotado por $\text{Graf}(f)$ é o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por*

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x), x \in I\}.$$

Definição 9 (Taxa Média de Variação). *Dados os pontos $x_0, x_1 \in I, x_0 \neq x_1$ e $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$, a razão:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad (1.3)$$

*é chamada de **taxa média de variação** de y com relação a x no intervalo (x_0, x_1) .*

Observação 2. *Considerando-se de forma geral as variáveis $x, x + h$, onde $h = \Delta x$, (1.3) também pode ser dada por:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \quad (1.4)$$

Definição 10 (Taxa de Variação Relativa). *A taxa de variação relativa é a taxa de variação de uma função $y = f(x)$ por unidade de x relativa à etapa inicial $y = y_i$:*

$$\frac{1}{y_i} \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \left[\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right] \frac{1}{y_i} \quad (1.5)$$

O cálculo diferencial estuda o comportamento de y como uma função de x em termos de como y muda conforme x muda, ou seja, o estudo da taxa de variação de uma função. Por exemplo, em um plano inclinado a *inclinação é a relação entre a variação da altura e a variação na distância horizontal*. Essa relação numérica é chamada de coeficiente angular. Mais explicitamente, temos a seguinte definição.

Definição 11 (Função Linear). *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ uma função definida no intervalo $I = (a, b)$. Se a razão (1.3) for a mesma para todos os pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ do gráfico de f , dizemos que $y = f(x)$ é uma função linear de x .*

Isso ocorre porque essa condição é equivalente a dizer que o gráfico de y é uma linha reta (o que é fácil de ver usando triângulos semelhantes); veja a Figura 1.1. Para

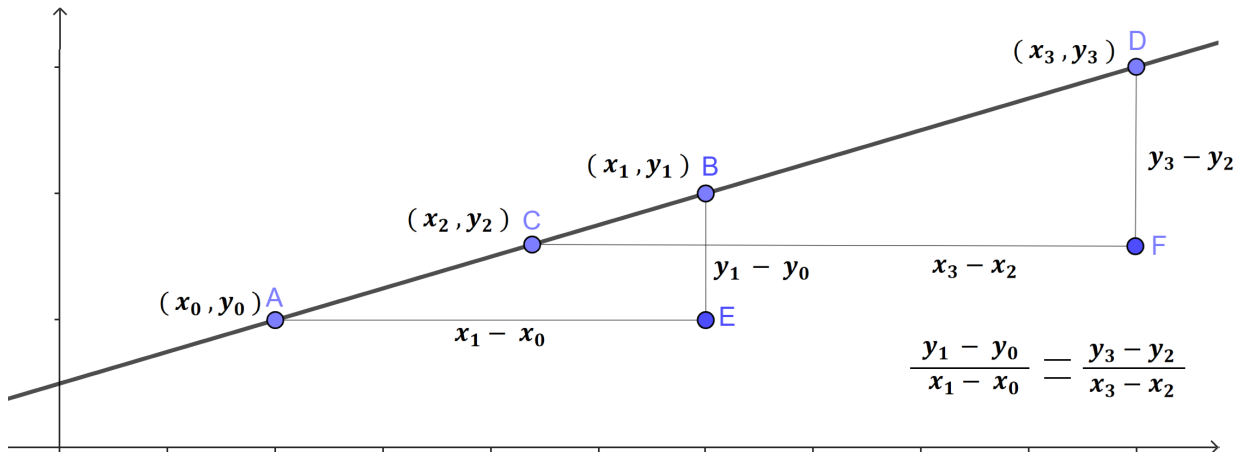


Figura 1.1: Taxa média de variação para pontos sobre uma linha reta, a inclinação é a mesma em cada ponto.

uma função linear $y = f(x)$, a razão (1.3) também é chamada de **coeficiente angular da reta** e é denotada por **m** , se α é o ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas, temos que $m = \tan \alpha$. Então outro ponto (x, y) está na reta se e somente se o cálculo de (1.3) fornece a inclinação. Assim, a condição para (x, y) estar na reta é

$$m = \tan \alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \text{ou} \quad y - y_0 = m(x - x_0).$$

Isto é chamado de equação **ponto-inclinação** da reta. Se quisermos encontrar a equação da reta através de dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , usamos esses pontos para encontrar a inclinação e então usamos a equação acima. Assim, a condição para (x, y) estar na reta através desses pontos é

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (1.6)$$

Esta é a **equação de dois pontos** para a reta.

Exemplo 6. *Suponhamos que um ciclista se move inicialmente sobre um plano inclinado, onde a altura da inclinação aumenta 10 metros a cada 100 metros. Posteriormente a altura cresce a 20 metros por cada 100 metros, para chegar à cima com um aumento de 30 metros de altura por cada 100 metros. O ciclista inicia a descida da seguinte forma,*

de 100 metros por cada 30 metros de altura passa para percorrer 100 metros por cada 19 metros. Descrever as taxas de variação média em cada movimento.

Solução: Do enunciado temos que o ciclista se move 10 metros em direção acima e 100 metros horizontalmente, a inclinação ou coeficiente angular é de $0,1=10/100$. No segundo estágio do movimento, temos o percurso de 20 metros em direção acima e 100 metros horizontalmente, a taxa média de variação é de $0,2=20/100$. A taxa média até antes do topo será de $0,3=30/100$, no instante em que chegar à altura máxima, a inclinação é zero, assim, no topo a taxa média será zero, ver Figura 1.2.

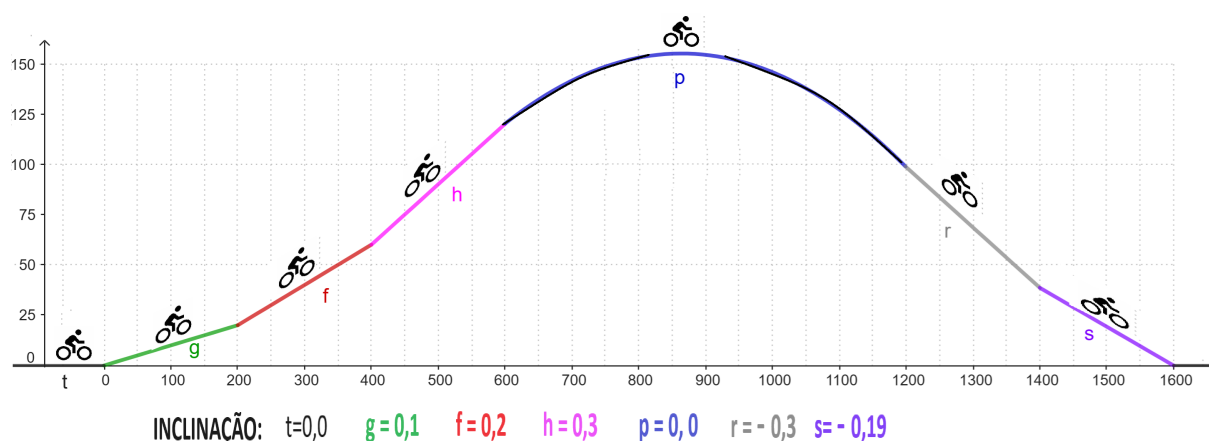


Figura 1.2: Diferentes taxas de variação dependendo da inclinação da curva.

Observamos que quanto maior é a taxa média, chegar até o topo será tudo um desafio para o ciclista. Se a taxa média de variação for quase zero, o deslocamento será uma caminhada sem esforço. Por último, quando inicia-se a descida a taxa é negativa, temos um deslocamento custa abaixo com taxas $-0,3$ e $-0,19$ aumentando em modulo,

No contexto do exemplo anterior, suponhamos que o ciclista percorre uma curva que muda suavemente (sem bicos), então há uma inclinação que muda constantemente, resulta natural nos perguntar, como pode se calcular no linguagem de hoje a inclinação em um determinado ponto? Vejamos a seguir o seguinte procedimento: Para determinar a inclinação em um ponto particular, por exemplo x_0 , simplesmente tomamos outro ponto x da custa, não importa onde. Logo uma linha reta é desenhada, chame a essa reta, a *corda* que une os pontos x_0 e x , a inclinação dessa corda depende da posição do segundo ponto. Se o primeiro ponto e o segundo estiverem próximos, a corda é uma aproximação bastante preciso do percorrido (curva) da bicicleta. Agora, suponhamos que o segundo ponto se movimenta em direção ao primeiro, a inclinação resulta ser um número, ao tender um ponto em direção ao outro, esses números tendem a um certo valor chamado de *inclinação da custa nesse ponto*. A reta que passa por esse ponto com aquele inclinação

é chamada de *linha tangente* e é a linha reta em direção à qual as cordas tendem, ao tender um ponto em direção ao outro. A *inclinação da encosta (curva) no ponto x_0* é a *inclinação da reta tangente naquele ponto*. A *taxa de variação instantânea da curva em x_0* , ou de *derivada da curva no ponto x_0* , é definida como a *taxa de variação da inclinação da reta tangente no ponto x_0* , veja Figura 1.3. Portanto, a taxa de variação da reta tangente em x_0 é a taxa de variação da curva. No contexto dito anteriormente, é oportuno realizar a seguinte definição.

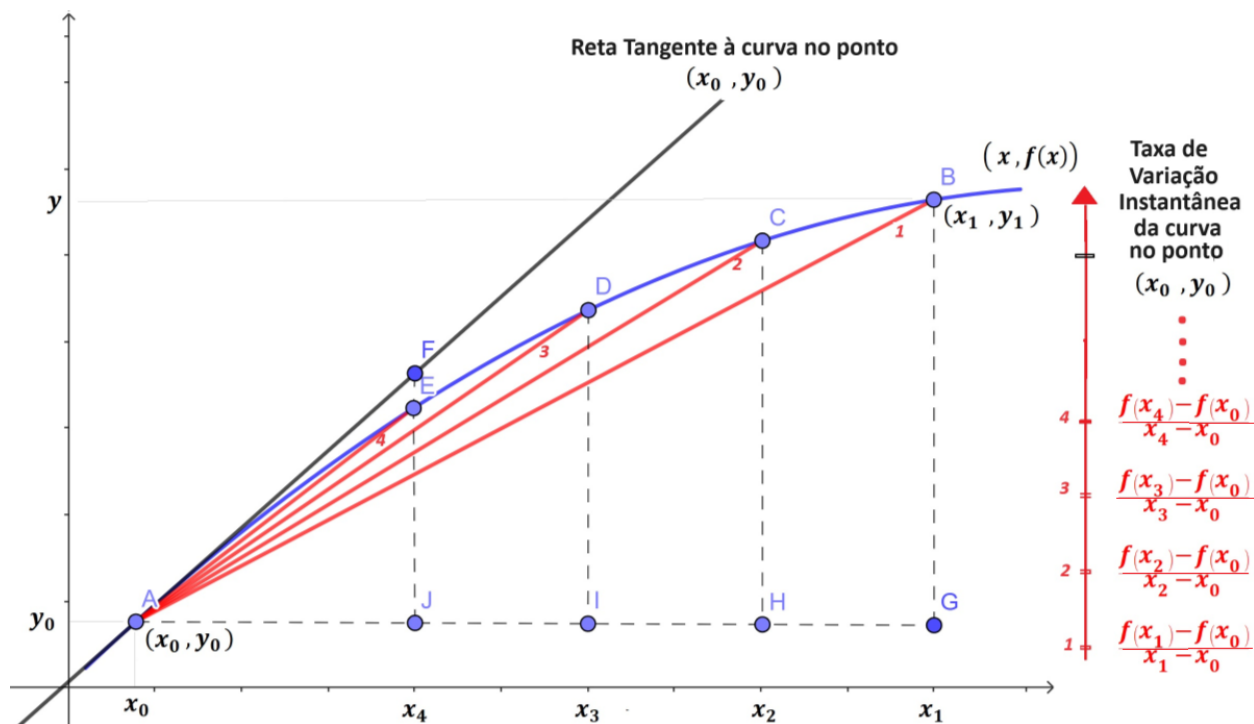


Figura 1.3: Taxas médias de variação da corda aproximando-se à taxa de variação instantânea da curva no ponto (x_0, y_0) .

Definição 12 (Taxa de Variação Instantânea). *Sejam $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ uma função definida no intervalo I , (x_0, y_0) e (x_1, y_1) dois pontos quaisquer do gráfico de f . A aproximação das taxas médias de variação de f obtidas ao se movimentar x_1 para x_0 é chamada de **taxa instantânea de variação** de f no ponto x_0 , ou **derivada** de f em x_0 .*

Observação 3. *A taxa instantânea de mudança de f em relação a x em x_0 , é também a inclinação da reta que melhor se aproxima da curva em (x_0, y_0) , chamada de *reta tangente à curva definida pelo gráfico da função*. Figura 1.3.*

A cinemática é um ramo da física que oferece interpretações importantes do conceito de derivada. Vejamos a seguir o exemplo.

Exemplo 7. *Suponhamos que um carro se mova em linha reta, e que a cada quantidade de espaço percorrido corresponda uma certa quantidade de tempo. Para 4 metros percorridos, corresponde 1 segundo, logo o carro percorre 8 metros no mesmo intervalo de tempo. Imediatamente, por algum motivo, o condutor percorre 16 metros nesse mesmo intervalo de tempo.*

a) *Analisar as mudanças de velocidade do móvel e descrever um processo para encontrar a velocidade instantânea.*

b) *Suponha que três carros estão passando por uma mesma rodovia na presença de um radar na que a velocidade permitida é menor ou igual a 90 km/h. Encontrar a velocidade instantânea de cada carro sabendo que a distância dos laços indutivos (linhas imaginárias na estrada desenhadas para medir a velocidade) é de 3m e o tempo que cada carro demora em passar o laço indutivo são respectivamente: 0,3, 0,2 e 0,1. Algum carro será notificado por dirigir acima da velocidade permitida?*

Solução: A distância de percurso do carro está dependendo do tempo de duração. Essa dependência vamos a representar pela função $s(t)$, $t \geq 0$.

a) Do enunciado vemos que o condutor está variando a sua velocidade, como é conhecido, a velocidade média $v_m(t)$ do carro no intervalo de tempo Δt , é definida como a taxa da variação Δs de $s(t)$, percorrido no intervalo de tempo sobre Δt , é dizer:

$$v_m(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{[m]}{[s]}.$$

No mesmo intervalo de tempo, de um segundo, observamos que a velocidade média é de 4, 8 e 16 m/s, ou seja, está aumentando. Mas como isso é observado na prática? Normalmente, na prática, essa análise é feita de maneira diferente, utilizando as equações da física que relacionam espaço e tempo. Dado um intervalo de tempo, observamos o espaço deslocado nesse intervalo. Por exemplo, no primeiro segundo, o deslocamento é de 4 metros, resultando em uma velocidade média de 4 m/s. No segundo intervalo de 1 segundo, a distância percorrida é de 8 metros, o que dá uma velocidade média de 8 m/s. No terceiro intervalo de tempo, também de 1 segundo, o deslocamento é maior, 16 metros, o que resulta em uma velocidade média de 16 m/s, e assim por diante (Figura 1.4).

Entretanto, será que nesses intervalos de tempo a velocidade foi sempre a mesma? Por exemplo, entre os segundos 2 e 3, a velocidade foi constante em 16 m/s? Essa é uma dúvida que precisamos esclarecer. Se tentarmos calcular agora a velocidade

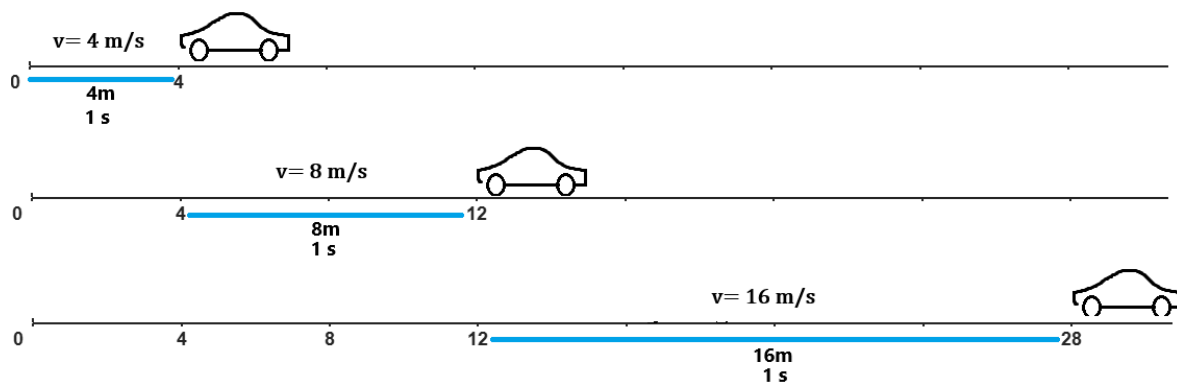


Figura 1.4: Velocidade média como taxa média de variação em cada segundo de percorrido.

ponto a ponto, essa pode ser a melhor alternativa. Por exemplo, analisando o deslocamento entre 0 e 3 segundos, identificamos um padrão, mas ele ainda não é suficiente para concluir uma conjectura definitiva (Figura 1.5). E se começarmos

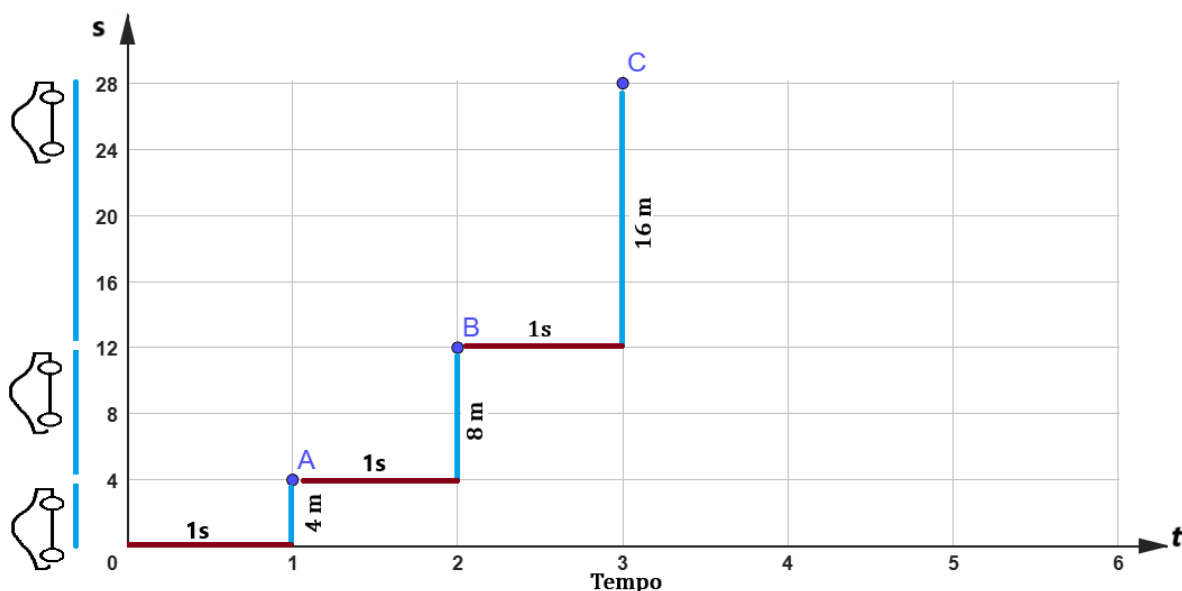


Figura 1.5: Velocidade média no plano $[s] \times [m]$. Nesse padrão não é suficiente concluir alguma conjectura sobre se a velocidade é a mesma nos primeiros três segundos.

a analisar o movimento em *intervalos menores*? Por exemplo, em meio segundo, depois em um segundo, e assim sucessivamente até alcançar um segundo e meio, e assim por diante. Nesse caso, observamos que surge um padrão um pouco diferente e mais interessante. Nessa nova abordagem, percebemos que a velocidade varia em cada intervalo de tempo menor. Dessa forma, já não se trata mais de uma velocidade média, mas sim de uma velocidade que muda continuamente a cada instante de tempo. Essa velocidade, calculada para intervalos de tempo muito pequenos, é chamada de *velocidade instantânea* (Figura 1.6. Ao analisar a velocidade ins-

instantânea, obtemos um padrão representado por um conjunto de pontos que formam uma curva. Essa curva possui, em cada ponto fixado, um vetor tangente cuja inclinação é definida pela derivada da função $s(t)$, ou seja, a velocidade instantânea.

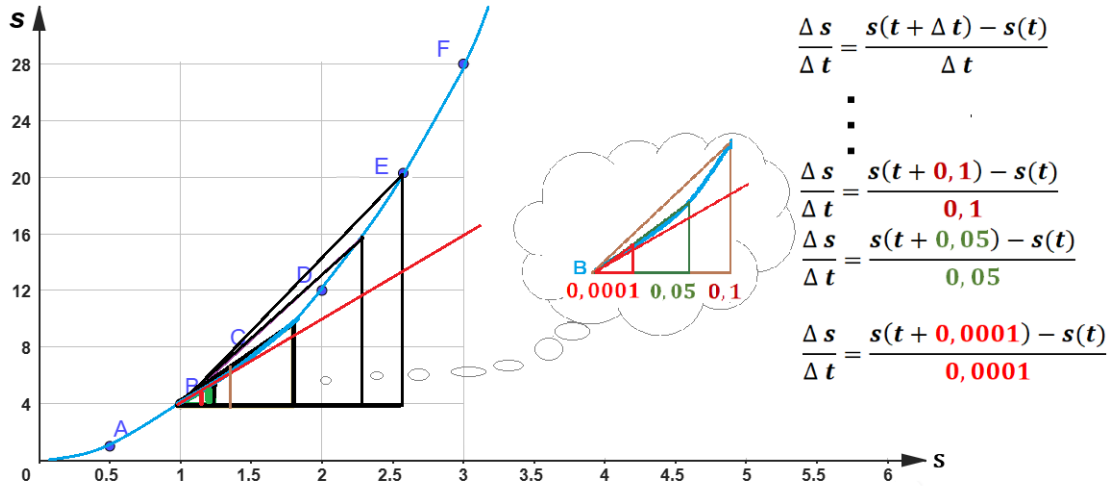


Figura 1.6: Velocidade média $\times$ Velocidade Instantânea. Ao tornar-se o tempo de percurso mais pequeno, temos outro padrão mais detalhado, dessa forma, é possível perceber que as velocidades médias aproxima-se de uma velocidade fixada no ponto B, a velocidade instantânea nesse ponto (derivada da curva no ponto B).

Independentemente do método utilizado, podemos sempre calcular a velocidade, usando dois pontos, ou seja a diferença de dois pontos, tanto para a variação da posição Δs como para a variação do tempo Δt . Acontece que a velocidade instantânea será calculada por um processo de aproximação:

$$v_m(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

está se aproximando da velocidade instantânea no ponto B, quando Δt se aproxima de 0. Concluimos que quando Δt é muito pequeno a velocidade média coincide com a velocidade instantânea, logo $v_m(t) = v(t)$.

b) Denotemos por $\Delta s = s(t_0 + \Delta t_0) - s(t_0) = 3$ a distância fixa do laço indutivo, sendo t_0 e Δt_0 , o instante inicial e o tempo necessário que um carro passa pelo laço, respectivamente. Sendo Δt_0 o tempo de duração de cada carro pequeno, então a velocidade média vai coincidir com a velocidade instantânea $v(t)$ no instante t , temos:

- Carro 1, $\Delta t_0 = 0,3$, então

$$v(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t_0} = \frac{s(t_0 + \Delta t_0) - s(t_0)}{\Delta t_0} = \frac{3}{0,3} = 10 \frac{m}{s} = 0,01 \frac{km}{s} = 36 \frac{km}{h}.$$

- Carro 2, $\Delta t_0 = 0,2$, então

$$v(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t_0} = \frac{s(t_0 + \Delta t_0) - s(t_0)}{\Delta t_0} = \frac{3}{0,2} = 15 \frac{m}{s} = 0,015 \frac{km}{s} = 54 \frac{km}{h}.$$

- Carro 3, $\Delta t_0 = 0,1$, então

$$v(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t_0} = \frac{s(t_0 + \Delta t_0) - s(t_0)}{\Delta t_0} = \frac{3}{0,1} = 30 \frac{m}{s} = 0,03 \frac{km}{s} = 108 \frac{km}{h}.$$

O terceiro carro receberá a penalização por dirigir a uma velocidade acima da permitida.

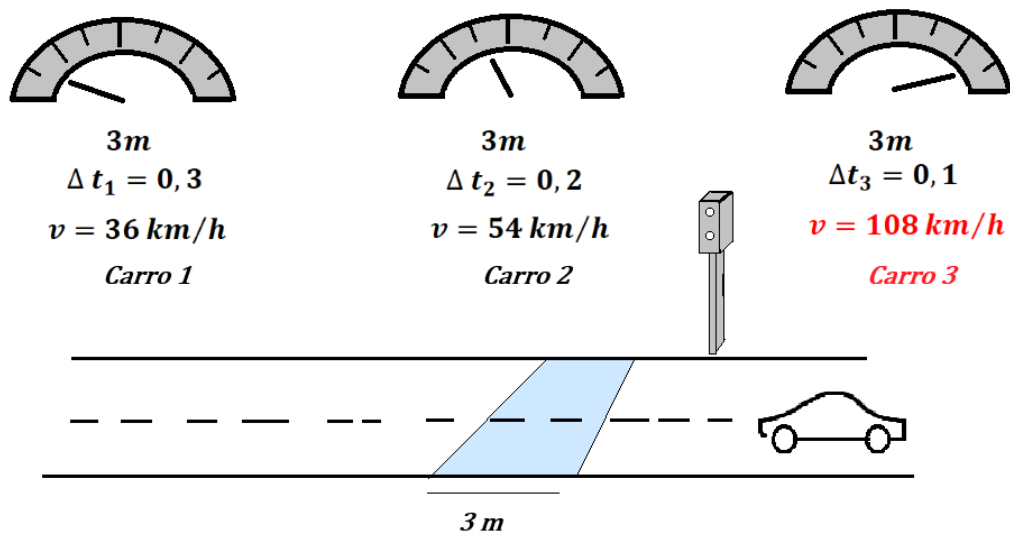


Figura 1.7: Velocidade média = Velocidade Instantânea para intervalos de tempo suficientemente pequenos.

Capítulo 2

Introdução à Dinâmica de Sistemas

Neste capítulo, serão abordados aspectos introdutórios da Dinâmica de Sistemas, uma metodologia que servirá como base para nossa pesquisa. Inicialmente desenvolvida por Jay Forrester (1969), essa abordagem está sendo aplicada no ensino escolar, com o objetivo de estimular a capacidade dos alunos na criação e interpretação de modelos mentais, como demonstrado, por exemplo, nos trabalhos de Kubicek (2011) e Andrade M. (2022). Para um melhor entendimento dessa metodologia, utilizaremos o software Vensim como ferramenta de simulação de diagramas causais e diagramas de Forrester. Problemas didáticos têm facilitado a compreensão da Dinâmica de Sistemas.

2.1 O que entendemos por Dinâmica de Sistemas?

A Dinâmica de Sistemas, fundamentada nos estudos de Jay Forrester (1969) e nas contribuições de diversos pesquisadores como John D. Sterman, Peter Senge, Dennis Meadows, entre outros, *é uma abordagem voltada para a compreensão do comportamento de sistemas complexos que evoluem ao longo do tempo*. Essa metodologia concentra-se na análise dos ciclos de retroalimentação (feedback) e dos atrasos que impactam o comportamento do sistema como um todo. Um *sistema* é definido como um conjunto de elementos, regras ou componentes que interagem entre si para alcançar um objetivo específico. A Dinâmica de Sistemas permite identificar essas interações e como elas influenciam o desempenho do sistema. Um modelo, por sua vez, é uma representação estruturada de um sistema, podendo ser expressa por meio de diagramas, mapas ou equações matemáticas.

De acordo com Villela (2005), a Dinâmica de Sistemas permite representar adequadamente as cadeias de eventos circulares (loops) presentes na natureza. Utilizando diferentes tipos de diagramas, como os causais e de estoque e fluxo, é possível visualizar graficamente um sistema - um segmento específico da realidade - o que facilita a compre-

ensão da complexidade dinâmica das relações entre suas partes ao longo do tempo.

Diversas organizações de diferentes áreas têm adotado essa abordagem como metodologia para criar modelos que simulam situações de problemas específicos. Peter Senge, orientado por Forrester na Stanford University, percebeu que era necessário formalizar a aplicação da Dinâmica de Sistemas. Assim, em 1990, Senge introduziu o conceito de pensamento sistêmico e o de organizações que aprendem, enfatizando a importância de entender uma organização como um sistema integrado. Para Senge, *o pensamento sistêmico envolve a análise e a compreensão das forças e inter-relações que moldam o comportamento dos sistemas*. Em sua definição, as organizações que aprendem são aquelas nas quais os indivíduos aprimoram continuamente suas habilidades para criar o futuro que desejam. A seguir, identificaremos e definiremos em detalhes os elementos que compõem a Dinâmica de Sistemas.

2.1.1 Modelos Causais na Dinâmica de Sistemas

Todos os sistemas possuem características distintas, tanto qualitativas quanto quantitativas, que influenciam seu comportamento e evolução. A identificação e a relação entre os elementos que compõem um sistema são fundamentais para entender suas dinâmicas internas e externas. A Dinâmica de Sistemas oferece um conjunto de ferramentas e métodos que facilitam essa identificação e análise, permitindo a *representação visual das interações e a modelagem das relações de causa e efeito*. Esses modelos causais ou relações de causalidade, são essenciais para descrever como diferentes variáveis se interconectam e influenciam umas às outras ao longo do tempo. A abordagem busca não apenas mapear as relações, mas também compreender os padrões de comportamento que emergem dessas interações. Isso é especialmente importante em contextos onde decisões complexas precisam ser tomadas, uma vez que as consequências de ações podem não ser imediatamente visíveis. Além disso, a Dinâmica de Sistemas enfatiza a importância de feedbacks, que podem ser positivos (reforçando um comportamento) ou negativos (atenuando um comportamento), revelando como mudanças em uma parte do sistema podem desencadear reações em cadeia. Essa compreensão permite prever como intervenções podem alterar o estado do sistema, fornecendo percepções valiosas para gestores, formuladores de políticas e outros tomadores de decisão, etc.

Representação de um modelo Causal

Por eventos ou variáveis, vamos a entender os enunciados que estão presentes no problema. Cada relação de causa-efeito entre as variáveis X e Y será identificado pela seta

↷ acompanhado de um sinal. $X \curvearrowright Y$ indica a relação de influência da variável X (causa) sobre Y (efeito), pode ser de dois tipos, positivo e negativo, mais exatamente temos:

- Uma relação de causalidade será dita **positiva** *se toda vez que ocorrer um aumento (ou decréscimo) na causa X, o efeito Y também aumentará (ou diminuirá)*. Nesse caso a seta está acompanhado do sinal +. A relação de causa efeito positiva indica um relacionamento diretamente proporcional.
- Uma relação de causalidade será dita **negativa** *se toda vez que ocorrer um aumento (ou decréscimo) na causa X, o efeito Y diminuirá (ou aumentará)*. Nesse caso a seta está acompanhado do sinal – ao lado. A relação de causa efeito negativa indica um relacionamento inversamente proporcional.

A Figura 2.1 mostra graficamente as relações de causalidade.



Figura 2.1: Representação das relações de causa e efeito entre as variáveis X e Y. Em (a) temos uma relação causal positiva. Em (b) relação causal negativa.

Ciclos de Realimentação

Os diagramas causais também tem características de ciclos fechados. De acordo a Sterman (Sterman, 2000) distinguem-se dois tipos de malha ou *ciclo de realimentação* (feedback loop): positivo ou *reforçador* e negativo ou *equilibrado*. Um **ciclo de realimentação** entre as variáveis X e Y é **positivo** *quando a influência de X sobre Y e a influência de Y sobre X são ambas positivas, ou se ambas são negativas*. Em contrapartida, um **ciclo de realimentação** é considerado **negativo** *quando a influência de X sobre Y é positiva, enquanto a influência de Y sobre X é negativa, ou se a influência de X sobre Y é negativa e a de Y sobre X é positiva*. Os modelos causais permitem que deduzamos a tendência de crescimento ou decrescimento das variáveis. Em resumo:

- Um ciclo de realimentação positivo indica uma tendência de crescimento (ou decrescimento).
- Um ciclo de realimentação negativo sugere uma tendência de estabilidade (sem crescimento nem decrescimento).

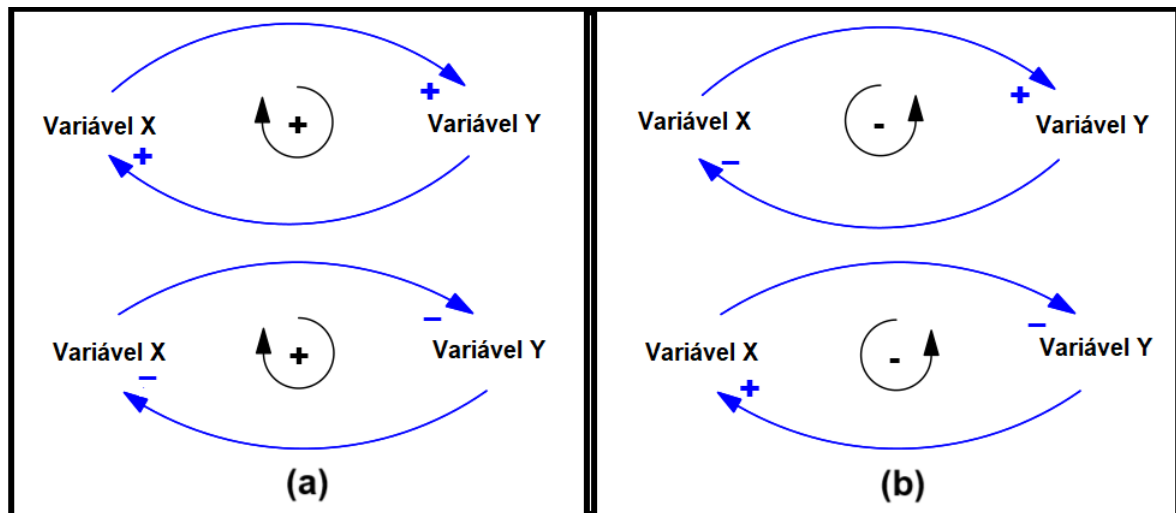


Figura 2.2: Ciclos de retroalimentação (feedback loop) positivo e negativo entre as variáveis X e Y. Em (a) temos um ciclo positivo. Em (b) ciclo negativo.

Exemplo 8. [Introdução de um novo prato no menu]

Como gerente de um restaurante, a introdução de um novo prato no menu é uma decisão que exige análise cuidadosa de diversas variáveis que podem impactar seu sucesso. A questão é: introduzir ou não um novo prato?

Solução: Para tomar essa decisão, é necessário definir algumas variáveis ou eventos, tais como:

- **Custo dos ingredientes:** Avaliar o custo total para adquirir os ingredientes necessários.
- **Preço de venda:** Determinar um preço que os clientes estejam dispostos a pagar.
- **Demanda dos clientes:** Analisar o interesse e aceitação do prato pelos clientes.
- **Tempo de preparo:** Considerar o tempo necessário para preparar o prato, o que pode afetar a eficiência da cozinha.
- **Eficiência na cozinha:** Garantir que a equipe esteja bem preparada para executar o prato de forma rápida e eficiente.
- **Qualidade do prato:** Investir em ingredientes de qualidade pode justificar um preço mais alto e aumentar a satisfação do cliente.
- **Concorrência na região:** Observar o que outros restaurantes estão oferecendo e como isso influencia a atratividade do novo prato.

Relações de Causalidade entre as variáveis: Identificamos as seguintes relações de causa e efeito entre as variáveis consideradas.

1. Custo dos ingredientes e preço de venda.

- Causa: Aumento no custo dos ingredientes.
- Efeito: Aumento no preço de venda do prato.

Se os custos aumentam, o preço de venda pode precisar ser ajustado para manter a lucratividade.

2. Preço de Venda e Demanda dos Clientes

- Causa: Aumento no preço de venda.
- Efeito: Diminuição da demanda pelos clientes.

Se o preço for muito alto, menos clientes podem optar pelo prato.

- Retardo: Pode haver um retardo na resposta da demanda, onde os clientes inicialmente não percebem o aumento e, após um período, começam a reduzir suas compras.

3. Tempo de preparo e eficiência da cozinha

- Causa: Aumento no tempo de preparo do prato.
- Efeito: Diminuição da demanda pelos clientes.

Pratos demorados podem causar atrasos no serviço, impactando a satisfação do cliente.

- Retardo: A redução na eficiência pode não ser imediata, levando um tempo até que a equipe perceba o impacto nos atrasos no atendimento.

4. Eficiência da cozinha e demanda dos clientes.

- Causa: Aumento na eficiência da cozinha.
- Efeito: Aumento na demanda pelos clientes.

Uma cozinha eficiente pode atender mais clientes rapidamente, resultando em um aumento na satisfação e, consequentemente, na demanda. Clientes satisfeitos tendem a retornar e a recomendar o restaurante, o que pode levar a um fluxo maior de clientes.

5. Concorrência na região e demanda dos clientes.

- Causa: Aumento da concorrência com pratos semelhantes.
- Efeito: Diminuição da demanda pelo novo prato.

Se outros restaurantes oferecem opções similares, isso pode reduzir o interesse dos clientes no seu prato.

- Retardo: A diminuição da demanda pode não ser instantânea; pode levar um tempo até que os clientes experimentem outras opções e ajustem suas preferências.

6. Qualidade do prato e concorrência.

- Causa: Aumento na qualidade do prato.
- Efeito: Aumento da competitividade do restaurante em um mercado saturado.

Quando um restaurante melhora a qualidade do seu prato, ele se torna mais atraente para os clientes, o que pode aumentar sua participação de mercado, mesmo em um ambiente competitivo.

7. Qualidade do prato e custo dos ingredientes.

- Causa: Aumento na qualidade do prato.
- Efeito: Aumento nos custos dos ingredientes.

Ingredientes de alta qualidade geralmente têm um custo mais elevado. Para oferecer pratos de melhor qualidade, o restaurante pode precisar investir mais na aquisição de insumos, o que pode impactar o custo total do prato.

Das relações de causa-efeito encontradas acima, podemos estabelecer um modelo causal da situação-problema proposta no exemplo da introdução de um novo prato no menu. É importante notar que outras variáveis e modelos causais podem ser identificados ao longo do processo. A decisão a ser tomada será influenciada pelo modelo causal apresentado, que tem como objetivo explicar as interações entre as variáveis envolvidas na introdução do novo prato. No entanto, devido à natureza qualitativa dos modelos causais, é impossível determinar com precisão o quanto exatamente (em valor ou quantidade) um sistema está evoluindo. Embora possamos identificar e descrever as relações de causa e efeito entre as variáveis, a quantificação dessas influências requer dados adicionais e análise quantitativa. Na Figura 2.3 é mostrado um modelo causal representando as relações de causa e efeito relacionadas com o exemplo apresentado.

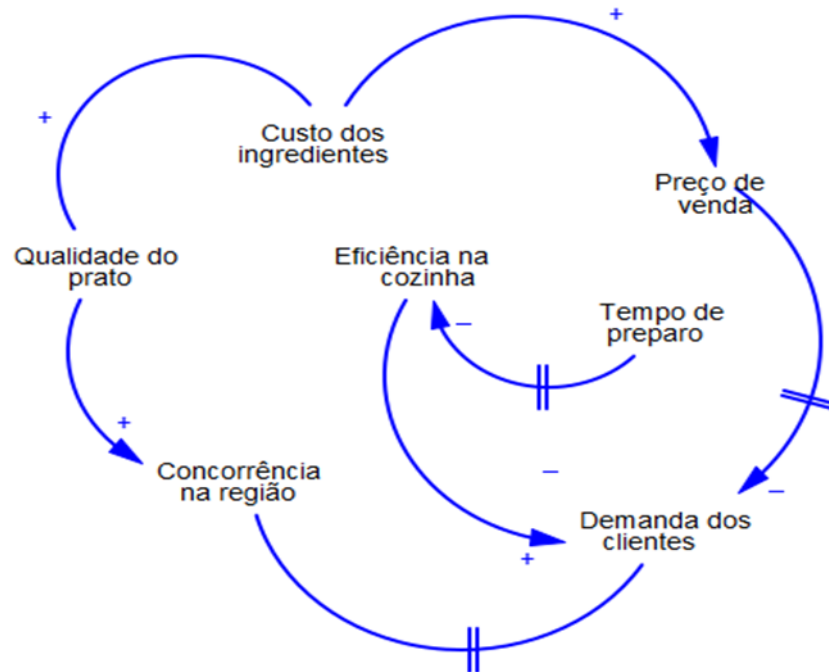


Figura 2.3: Modelo Causal representando as relações de causa e efeito dos eventos na introdução do novo prato no menu, realizado no Vensi-PLE.

2.1.2 Modelos de Estoque e Fluxo

Os Modelos de Estoque e Fluxo são fundamentais para a compreensão das dinâmicas de sistemas complexos. Após identificarmos as variáveis envolvidas, as relações de causa e efeito, e o modelo causal, conseguimos estabelecer características qualitativas dos eventos. No entanto, quando nosso foco se volta para as quantidades que essas variáveis podem apresentar, é necessário adotar um modelo diferente dos modelos causais, que interpretam apenas características qualitativas. Os Modelos de Estoque e Fluxo expressam as relações entre variáveis por meio de fórmulas matemáticas, refletindo o raciocínio lógico subjacente ao sistema.

Definição 13 (Estoque). *Estoque ou variável de nível ou estado, refere-se a variáveis que acumulam um estado específico em um determinado momento.*

Estoque representa algo que se acumula ao longo do tempo. Os estoques podem ser bens tangíveis (materiais), ou bens intangíveis (informações). Por exemplo, a população de indivíduos em um ano ou o número de funcionários em uma empresa, etc.

Definição 14 (Fluxo). *Os fluxos representam mudanças de uma grandeza ou estado, em relação a um período de tempo.*

Os estoques variam de valor em função dos fluxos de entrada e saída. Fluxo é algo que

causa variação no estoque, ou seja, faz com que um estoque aumente ou diminua. Por exemplo, nascimentos, mortalidade ou migrações, etc.

A relação entre estoque e fluxo é fundamental para a construção de modelos, que podem ser elaborados com o software Vensim - software que será abordado na próxima seção. Em resumo, os estoques refletem a situação do modelo em cada instante, simulando uma acumulação que só varia em função dos fluxos. As taxas de variação, também conhecidas como válvulas ou fluxos são funções temporais que capturam as ações resultantes das decisões tomadas no sistema, influenciando as variações nos níveis. As variáveis de fluxo caracterizam as ações realizadas no sistema e são acumuladas nos níveis correspondentes.

Teoria de Forrester

Forrester apresentou sua teoria de maneira mais acessível, definindo um sistema como um conjunto de elementos, regras e inter-relações que visam cumprir um propósito específico. Um exemplo claro é a cadeia alimentar da savana africana: o número de leões depende do número de zebras, que, por sua vez, é influenciado pela quantidade de vegetação, a qual depende das condições climáticas, como sol e chuva. Forrester modela esse sistema como um **sistema hidráulico**, composto por tanques, válvulas e tubulações que regulam o fluxo de informações e recursos. Essa analogia é conhecida na literatura como **símile hidrodinâmica**.

Controle e Dinâmica

Para entender os aspectos de controle e dinâmica de um sistema, apresenta-se a Figura 2.4, a qual ilustra o diagrama proposto por Forrester, que representa a Símile Hidrodinâmica. Um aspecto crucial da abordagem de Forrester é a necessidade de um observador controlar o nível de "líquido" nos tanques (N_1 , N_2 e N_3), que podem ser visualizados em diagramas. Para isso, o observador pode abrir ou fechar as válvulas (F_1 , F_2 , F_3 e F_4). O líquido se acumula nos tanques de maneira sequencial: primeiro, N_1 se enche, e, em seguida, N_3 começa a receber o líquido. Ao atingir o nível desejado, o observador deve fechar as torneiras para evitar perdas.

Por exemplo, o nível N_1 é preenchido quando a válvula F_1 está aberta, permitindo a entrada de fluxo. Da mesma forma, se a válvula F_2 estiver aberta, o líquido pode fluir de N_1 para N_2 , fazendo com que N_1 diminua ou "desacumule". O mesmo princípio se aplica aos níveis N_2 e N_3 . No diagrama mostrado através da Figura 2.4 os componentes do sistema são modelados como tanques, válvulas e fluxos, mostrando como as variáveis se interconectam e interagem, destacando:

- **Tanques** (N_1, N_2, N_3): Representam os estoques do sistema, acumulando "líquido" que simboliza recursos ou informações em diferentes níveis.
- **Válvulas** (F_1, F_2, F_3, F_4): Controlam o fluxo de líquido entre os tanques. A abertura ou fechamento dessas válvulas influencia diretamente a dinâmica do sistema, permitindo ou restringindo a transferência de recursos.
- **Fluxos**: Indicam a direção e a intensidade do movimento do líquido entre os tanques, refletindo como as decisões impactam os níveis de cada estoque.

O diagrama de Forrester é fundamental para visualizar a dinâmica de controle do sistema, permitindo ao observador entender como intervenções em um componente podem afetar o todo. A analogia com sistemas hidráulicos facilita a compreensão das interdependências e das interações que ocorrem dentro do sistema, destacando a importância do monitoramento e do ajuste contínuo.

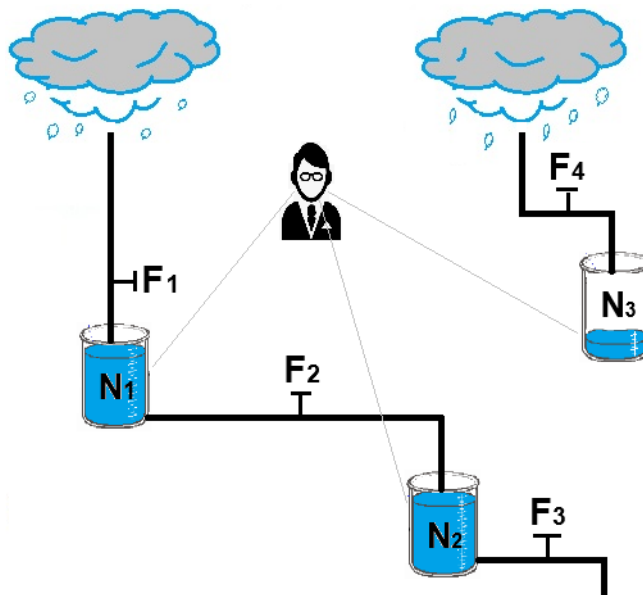


Figura 2.4: Simile Hidrodinâmica do Diagrama de Forrester.

Elementos Fundamentais do Diagrama de Forrester

Para simular a dinâmica de sistemas, além dos estoques e fluxos, o diagrama de Forrester incorpora outros elementos que permitem a representação quantitativa, expandindo o que é expresso no diagrama causal. Os principais componentes são:

- **Elemento Nuvem**: Representa uma fonte (entrada) ou um sumidouro (saída) de material. Este elemento é considerado externo ao modelo e é praticamente inesgotável, não sendo relevante para o modelador em termos de controle.

- **Variáveis:** Esses são cálculos intermediários utilizados no sistema. Quando uma variável não muda e assume valores fixos, ela se torna constante (representada por losangos). As variáveis ajudam a visualizar melhor os fatores que condicionam o comportamento dos fluxos.
- **Tabelas:** Usadas para representar relações não lineares entre variáveis. Um exemplo disso é a relação entre a sensação de fome e a quantidade de comida consumida: enquanto nos alimentamos, a sensação de fome diminui, mas essa diminuição não ocorre necessariamente de forma proporcional à quantidade de alimento ingerido.
- **Canais de Informação:** Transmitem informações que, por sua natureza, não são preservadas. Esses canais são essenciais para a comunicação de dados entre diferentes partes do sistema.
- **Canais de Materiais:** Responsáveis pela transmissão de magnitudes físicas entre fluxos e níveis, permitindo que os materiais se movam dentro do sistema.
- **Retardos:** Simulam o tempo necessário para a transmissão de materiais ou informações. Por exemplo, ao semear uma semente de milho, espera-se que, após um certo período, surja uma espiga. Isso implica um atraso entre a semeadura e a colheita.

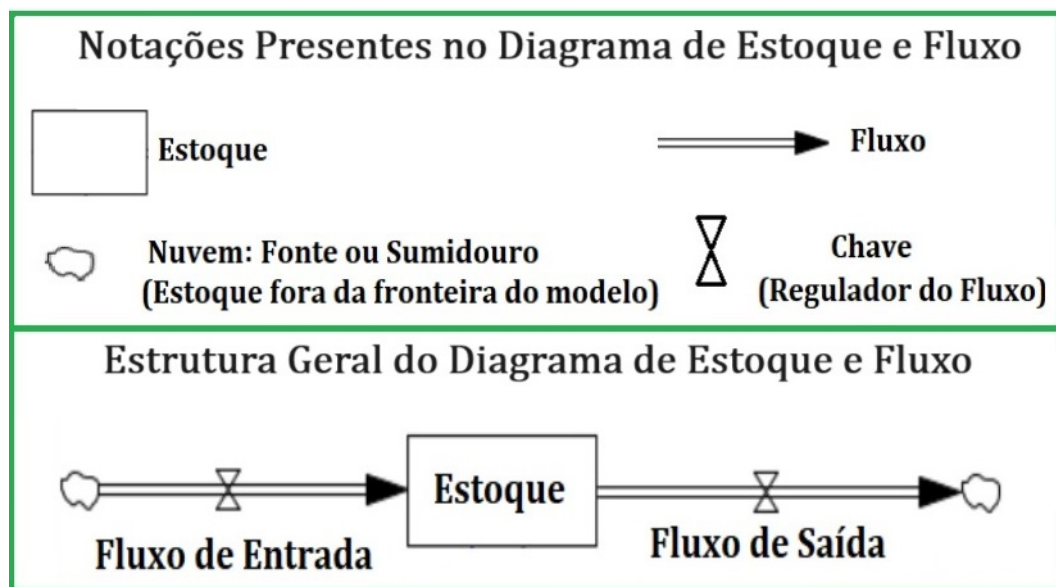


Figura 2.5: Elementos do diagrama de Forrester e Modelo de Estoque e Fluxo feito no software Vensim.

A Figura 2.5 ilustra a forma padrão de representar o diagrama de estoque e fluxo no software Vensim. Esse diagrama serve como uma ferramenta visual poderosa para mo-

delar e analisar a dinâmica de sistemas, permitindo aos modeladores entender melhor as interações e fluxos dentro do sistema. A Tabela 2.1 mostra distinções entre estoques e fluxos na diversas áreas do conhecimento.

Tabela 2.1: Distinção entre estoques e fluxos nas diversas áreas das ciências.

Área	Estoque	Fluxo
Matemática, Física Engenharia	Integrais Variáveis de estado	Derivadas. Taxas de variação Taxas de reação
Química	Reagentes Reação de produtos químicos	Taxa de transferência Taxa de difusão
Manufatura, Economia Contabilidade	Inventários. Níveis Balanço patrimonial	Cotações, fluxo de caixa Degradação de renda, unidades
Biologia, Fisiologia Medicina Epidemiologia	Compartimentos Prevalência Reservatórios	Taxas de difusão, fluxos Incidência, infecção, morbidade Taxas de mortalidade

Representação Metafórica do Diagrama de Forrester

Para Sterman (2000, p. 257), “a taxa líquida de variação de um estoque é a soma de todas as suas entradas menos a soma de todas as suas saídas. Os estoques acumulam a taxa líquida de variação. Matematicamente, os estoques integram seus fluxos líquidos; o fluxo líquido é a derivada do estoque”.

Para interpretar essa dinâmica, Forrester representa essa ideia através da Figura metafórica 2.6, ele ilustra uma representação hipotética de um sistema de estoque e fluxo (Forrester 1961). O acúmulo ou estoque de água no reservatório é preenchido pela entrada e drenado pela saída, não existindo retardos de tempo, nem realimentações. O fluxo de água ingressa em uma determinada taxa e sai em outra taxa, a diferença dessas taxas permite estimar a trajetória do estoque sem uso de cálculos matemáticos, e sim, através de simples cálculos aritméticos. Analogamente, qualquer material diferente da água pode representar uma determinada grandeza, logo, a quantidade de material em qualquer estoque será o acúmulo dos fluxos do material que está entrando menos os fluxos de saída do material. Os estoques refletem o estado de um sistema em um dado instante, permitindo-nos saber com precisão a quantidade de água na banheira em um momento específico, com base nessa informação, podemos tomar decisões adequadas.

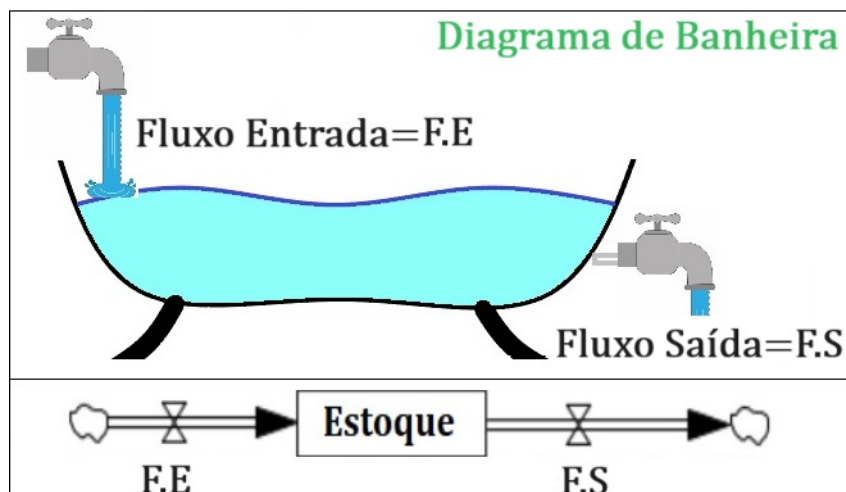


Figura 2.6: Ilustração metafórica do Diagrama de Forrester e sua representação no software Vensim.

Exemplo 9 (Dinâmica de uma colônia de abelhas). O crescimento de uma colônia de abelhas é influenciado pelo número de abelhas nascidas e pelas mortes ao longo do tempo. Identificar os elementos do diagrama de Forrester e analisar o comportamento da dinâmica

Solução: Para modelar essa dinâmica, precisamos identificar as variáveis envolvidas e desenvolver as relações de causa e efeito, logo realizar um diagrama de estoque e fluxo. As principais variáveis envolvidas na dinâmica da colônia de abelhas são:

- **Número de Abelhas na Colônia:** Representa a população total de abelhas em um momento específico.
- **Taxa de Nascimento:** Relaciona-se ao número de novas abelhas que nascem anualmente. Essa taxa é influenciada pela saúde da colônia e pela disponibilidade de recursos (como néctar e pólen).
- **Taxa de Mortalidade:** Refere-se ao número de abelhas que morrem anualmente, afetada por fatores como doenças, predadores e condições ambientais.

Diagrama Causal: A Figura 2.7 ilustra as relações entre essas variáveis. Por exemplo, quanto maior o número de abelhas, maior será a taxa de nascimento (feedback positivo). Ao mesmo tempo, um aumento na população leva a uma maior taxa de mortalidade devido à competição por recursos (feedback negativo).

Diagrama de Estoque e Fluxo: No diagrama de estoque e fluxo, as variáveis são descritas da seguinte forma:

- **População de Abelhas na Colônia (estoque):** Representa o total de abelhas em um dado momento.

- Taxa de Nascimento (fluxo de entrada): Indica o número de novas abelhas que se juntam à colônia a cada ano.
- Taxa de Mortalidade (fluxo de saída): Refere-se ao número de abelhas que falecem anualmente.

Esses fluxos interagem de maneira dinâmica, afetando a população de abelhas na colônia ao longo do tempo. A Figura 2.8, elaborada no Vensim, ilustra essas interações, destacando como as taxas de nascimento e mortalidade influenciam diretamente o estoque de abelhas.

Diagrama Causal de uma Colônia de Abelhas

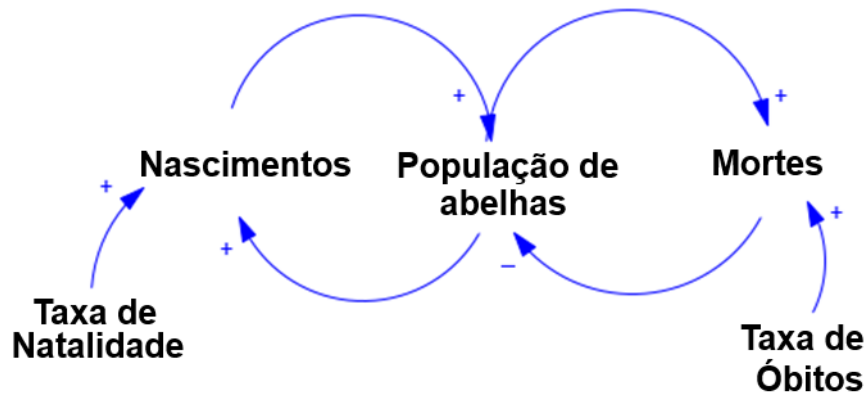


Figura 2.7: Diagrama causal para a dinâmica da população de abelhas.

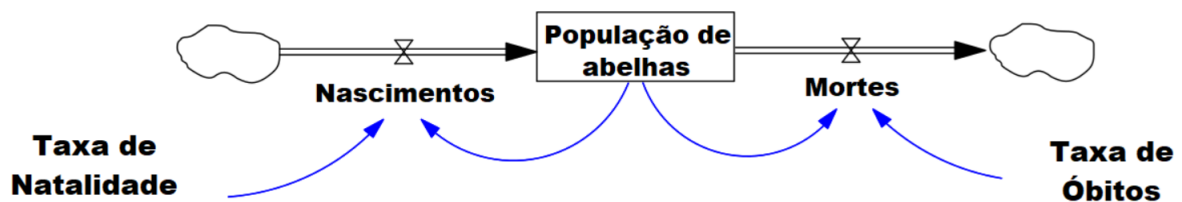


Figura 2.8: Diagrama de estoque e fluxo para a dinâmica da população de abelhas.

Representação Matemática de Estoque e Fluxo

De acordo com Sterman (2000), o diagrama de estoques e fluxos de Forrester interpreta a dinâmica do sistema usando os conceitos matemáticos de derivada e integral. O estoque integra seus fluxos totais (Fluxo Entrada (F.E), Fluxo Saída (F.S)) e reciprocamente, os fluxos representam a taxa de variação dos estoques. Usando o cálculo diferencial e integral temos as seguintes interpretações.

Equação Integral:

$$\text{Estoque}(t) = \int_{t_0}^t [\text{F.E}(s) - \text{F.S}(s)] + \text{Estoque}(t_0).$$

Equação Diferencial: Usando o Teorema Fundamental do Cálculo na equação integral anterior, obtemos:

$$\frac{d}{dt} (\text{Estoque})(t) = \text{Variação líquida no Estoque} = \text{F.E}(t) - \text{F.S}(t).$$

Equação de diferenças:

$$\text{Estoque}(t) = \text{Estoque}(t-1) + \text{F.E}(t) - \text{F.S}(t).$$

Notação para Acumulação

- A notação tradicional usada em cálculo e mostrada na Equação Integral acima costuma ser confusa para muitas pessoas.
- Desde o ponto de vista didático, é aconselhável representar o processo de acumulação com a **função INTEGRAL**($\cdot, \cdot$):

$$\text{Estoque} = \text{INTEGRAL}(\text{Fluxo Entrada} - \text{Fluxo Saída}, \text{Estoque}(t_0)) \quad (2.1)$$

- A função **INTEGRAL**($\cdot, \cdot$) representa o conceito de que o estoque acumula suas entradas menos suas saídas, começando com um valor inicial de Estoque(t_0).

2.2 Dinâmica de Funções

Processos de crescimento caracterizam a dinâmica de um sistema, explorando os conceitos de função afim, linear, quadrática e exponencial, pretendemos preparar o território para o uso de estoques e fluxos, e de forma particular apresentar os processos de diferenciação e integração gráfica. Existe um conjunto de comportamentos ou padrões que se repetem na maioria sistemas. Esses padrões comportamentais variam desde o crescimento linear até o crescimento exponencial, passando pelo crescimento com excesso, ou até pelo crescimento com excesso e colapso, ou, do crescimento logístico (em forma de S) até o crescimento convergentes a um valor, ver Figura 2.9. Deles, os três modos básicos de comportamento são: crescimento exponencial, busca de metas e oscilação, são causados por três estruturas básicas de retroalimentação (feedback): *feedback positivo*,

feedback negativo e *feedback negativo com atrasos*, respectivamente. Outros padrões de comportamento mais complexos surgem através da interação não linear dessas estruturas entre si.

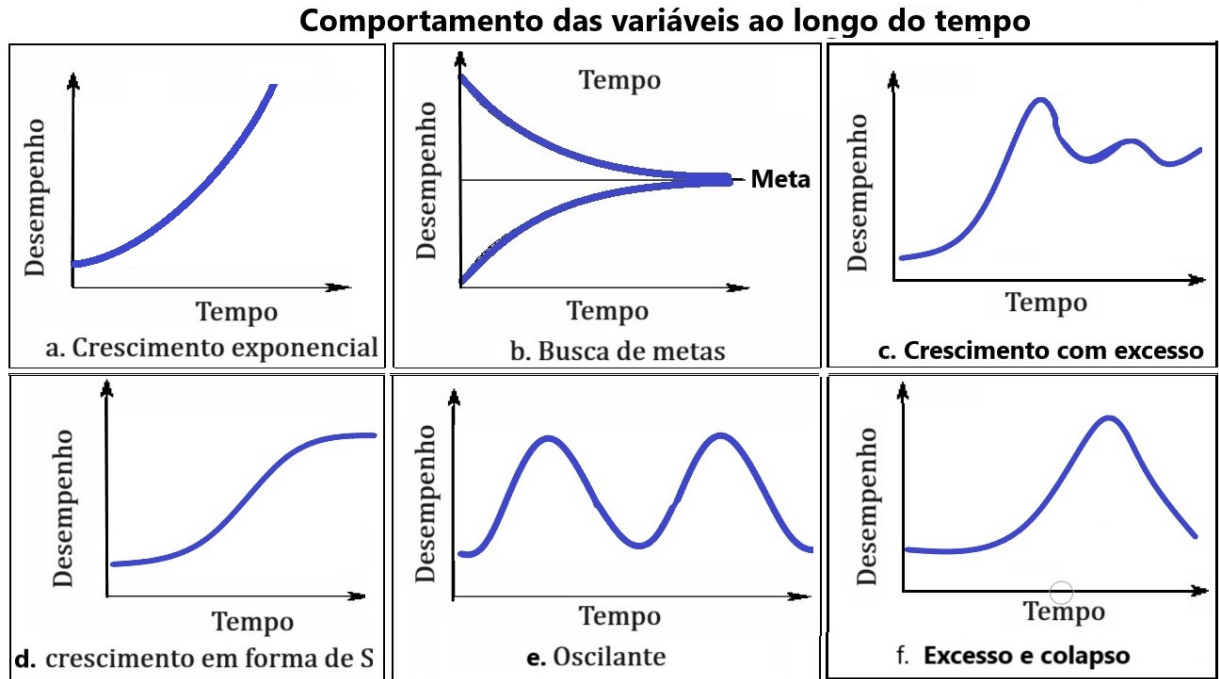


Figura 2.9: Modos comuns de comportamento em sistemas dinâmicos.

Nesta seção, abordaremos alguns resultados e ferramentas matemáticas que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho, com foco nos modos fundamentais que caracterizam o comportamento dinâmico de uma função.

2.2.1 Função Afim

A função afim é um tema amplamente estudado no ensino médio. Em sua forma particular, uma função linear é identificada por meio de uma proporcionalidade entre grandezas. As demonstrações podem ser encontradas em LIMA, L. (2015).

Definição 15 (Função Afim). *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita função afim quando existem números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Observação 4. *Quando $b = 0$ a função afim recebe o nome de função linear vista na seção anterior. A taxa de variação média coincide com a taxa de variação instantânea e com a constante a . O gráfico de uma função afim também é uma reta.*

Observação 5. *Para identificar se uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é afim, é suficiente conhecer os valores $f(0) = b$ e $f(x_0)$, $f(x_1)$ em dois pontos distintos x_0 e x_1 , pois neste caso a taxa*

média de variação é:

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Definição 16. Sejam $k, x \in \mathbb{R}$, uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será chamada de proporcionalidade, se $f(kx) = kf(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(kx) = \frac{f(x)}{k}$, se $k \neq 0$ (proporcionalidade inversa).

Proposição 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma proporcionalidade, se e somente se, f é linear.

Definição 17. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita monótona, se verifica uma das seguintes possibilidades.

- Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (crescente).
- Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (decrescente).
- Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ (monótona não-decrescente).
- Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ (monótona não-crescente).

Teorema 1. (Caracterização de uma Função Afim)

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona e injetiva. f é uma função afim, se e somente se, a variação total da função f , $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h e não de x , em qualquer intervalo de comprimento h .

2.2.2 Função Exponencial

A variação de uma função pode assumir muitas formas, e a variedade de dinâmicas ao nosso redor é vasta. Não é difícil imaginar que exista uma grande diversidade de estruturas de retroalimentação (feedback) capazes de explicar uma gama tão rica de dinâmicas. Na verdade, a maioria dos crescimentos de funções ocorre em estágios de um número relativamente pequeno de padrões distintos de comportamento, como o crescimento exponencial ou oscilatório. Um dos modos mais fundamentais de comportamento é o crescimento exponencial, cuja dinâmica é gerada por uma estrutura de feedback simples: o crescimento surge do feedback positivo, que resulta de interações não lineares das estruturas de feedback fundamentais.

O que significa que o crescimento exponencial surge de um feedback positivo? Isso significa que, quanto maior for a quantidade de uma grandeza, maior será a taxa de variação instantânea dessa grandeza. Esse aumento na taxa de variação faz com que a quantidade continue a crescer de forma acelerada, resultando em um crescimento cada vez

mais rápido (Figura 2.10). O diagrama causal na figura mostra a estrutura de feedback que gera (crescimento exponencial). As setas indicam a direção da influência causal. A relação causal mostra que, o *Estado do Sistema determina a Taxa Líquida de Aumento* (seta inferior) e a *Taxa de Aumento Líquida adiciona ao Estado do Sistema* (seta superior). Os sinais nas pontas das setas (+ ou -) indicam a polaridade do relacionamento. Uma polaridade positiva, indicada por +, significa que um aumento na variável independente faz com que a variável dependente suba acima do que teria sido (e uma diminuição causa uma diminuição). Sinais negativos significam que um aumento (diminuição) na variável independente faz com que a variável dependente diminua (aumente) além do que teria sido. Os casos emblemáticos desse tipo de dinâmica são os juros compostos e o crescimento

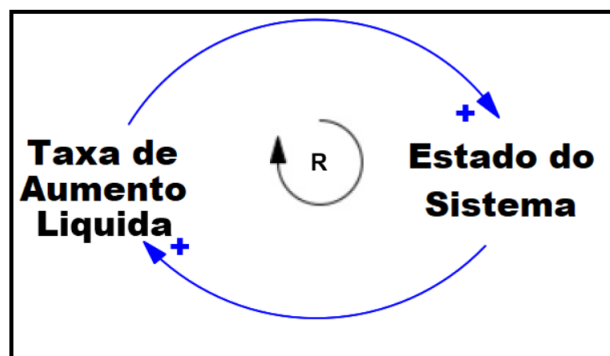


Figura 2.10: Estrutura do Crescimento Exponencial realizado no software Vensim. O diagrama causal é definido por um feedback positivo R entre as variáveis: Taxa de Aumento Líquida e Estado. Realização feita no software Vensim.

das populações. Quanto mais dinheiro investimos em uma poupança, mais juros você ganha, portanto, maior será o seu saldo e maior ainda será o próximo pagamento de juros. Analogamente, quanto maior a população de indivíduos de uma população, maior a taxa de variação de natalidade, aumentando a população e eventualmente levando a ainda mais nascimentos, tornando o crescimento em um ritmo cada vez mais acelerado. O crescimento exponencial tem a notável característica de que o tempo de duplicação é constante: o estado do sistema dobra em um período fixo de tempo, não importa quão grande seja.

Se suponhamos que uma certa grandeza x está relacionada com outra grandeza t através da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, então $x = f(t)$. Se percebemos que no processo de crescimento da função obedece a seguinte situação: *quanto maior é a quantidade da grandeza x , maior resulta ser a taxa de variação instantânea de x* ; é evidente que temos uma relação de proporcionalidade, então, essa percepção pode ser traduzida na linguagem

matemática pela seguinte expressão de proporcionalidade:

$$\frac{df}{dt} = \alpha f(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+. \quad (2.2)$$

Na verdade é esse o comportamento de feedback dinâmico que caracteriza a um crescimento do tipo exponencial, a constante α é conhecida como o fator de crescimento relativo. Situação análoga acontece quando as grandezas compartilham uma relação dinâmica de decrescimento, nesse caso a constante α é negativo e a característica de feedback positivo ainda permanece, é dizer, *quanto menor é a quantidade da grandeza x , menor resulta ser a taxa de variação instantânea de x* . A seguir exploramos as propriedades deste crescimento exponencial.

Definição 18 (Função Exponencial). *A função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ de base $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$, designada por $f(x) = a^x$, é definida de modo a verificar as seguintes propriedades, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:*

- 1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- 2) $a^1 = a$;
- 3) Se $a > 1$ e $x < y \implies f(x) < f(y)$, (f é crescente);
- 4) Se $0 < a < 1$ e $x < y \implies f(y) < f(x)$, (f é decrescente).

Teorema 2. (Caracterização de uma Função Exponencial)

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona e injetiva. As afirmativas a seguir são equivalentes:

- 1) $f(n \cdot x) = f(x)^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$;
- 2) $f(x) = a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;
- 3) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

A demonstração pode ser encontrada em LIMA, L. (2015).

Definição 19 (Função do Tipo Exponencial). *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita de tipo exponencial quando existirem números reais positivos a e b , $a \neq 1$, tais que $\forall x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = b \cdot a^x.$$

Observação 6. *Se $a > 1$, f é crescente. Se $0 < a < 1$, f é decrescente.*

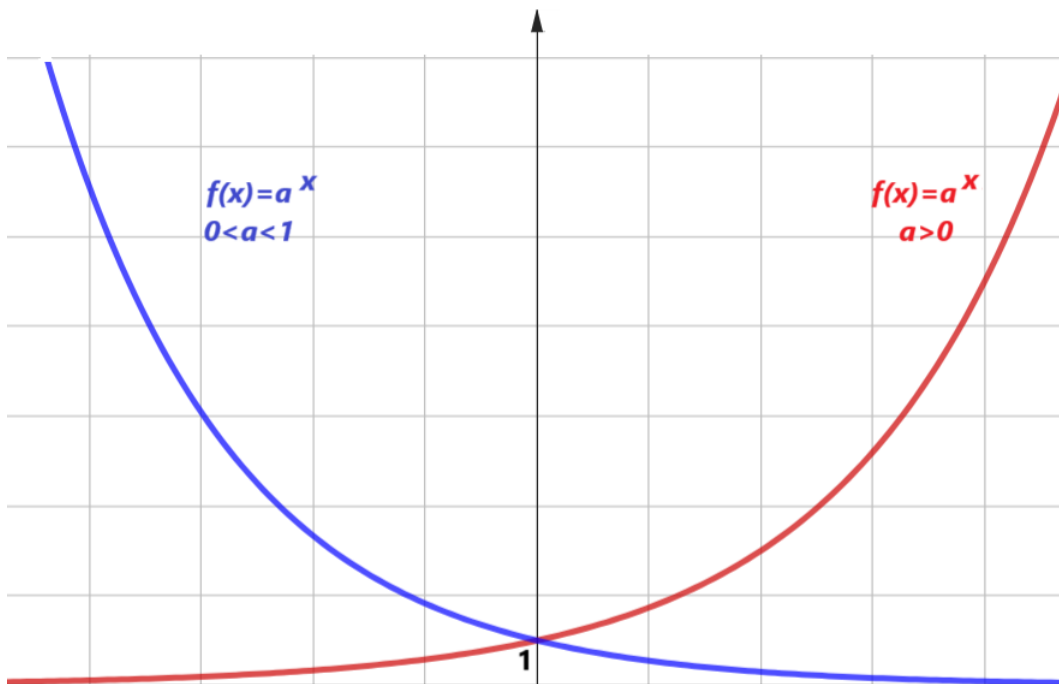


Figura 2.11: Gráfico da função exponencial para $a > 0$.

Teorema 3. (Caracterização de uma Função do Tipo Exponencial)

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva, tal que $\forall x, h \in \mathbb{R}$, o acréscimo relativo

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)},$$

depende apenas de h e não de x . Então, $f(x) = b \cdot a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)/f(0)$ e $b = f(0)$.

Exemplo 10. Observações ao longo do tempo mostram que, após períodos de mesma duração a população da terra fica multiplicada pelo mesmo fator. Sabendo que essa população era de 2,68 bilhões em 1956 e 3,78 bilhões em 1972, pede-se:

- a) O tempo necessário para que a população em 1956 triplique de valor.
- b) A população estimada para o ano 2024.
- c) Em que ano a população da terra era de 5 bilhões?

Solução: Considerando b a população em um determinado ano e t o número de anos decorridos a partir daí então a população após t anos a população da terra é modelada pela função exponencial $y(t) = be^{\alpha t}$. Em base ao modelo, consideramos o ano 1956 como sendo o ano $t = 0$, logo $y(0) = be^{\alpha(0)} = b = 2,68$, assim o modelo fica $y(t) = 2,68e^{\alpha t}$.

Para calcularmos o valor de α utilizamos o dado em que no ano 1972 (decorridos 16 anos a partir de 1956) a população é de 3,78 bilhões, logo

$$y(16) = 2,68e^{16\alpha} = 3,78 \Rightarrow e^{16\alpha} = 3,78/2,68 \approx 1,410448 \Rightarrow \alpha \approx \frac{\ln(1,410448)}{16} = 0,02149.$$

Assim, o modelo fica:

$$y(t) = 2,68e^{0,021494t}.$$

- a) $3(2,68) = 2,68e^{0,021494t} \Rightarrow t = \ln(3)/0,021494 = 51,1125$. Ou seja precisa decorrer aproximadamente 51 anos para triplicar o valor da população estimada em 1956.
- b) De 1956 a 2024 decorreram 68 anos, logo a população estimada para o anos 2024 é dado por $y(68) = 2,68e^{(0,021494(68))} \approx 10,65$ bilhões.
- c) $5 = 2,68e^{0,021494t} \Rightarrow t = \ln(5/2,68)/0,021494 \approx 29,014$. Assim,temos que em aproximadamente 29 anos a partir de 1956, ou seja, em 1985 a população da terra era de 5 bilhões de pessoas.

É nesse sentido que o seguinte teorema manifesta uma outra forma de caracterizar as funções de tipo exponencial, Lima (2015).

2.3 Uma Introdução ao Software Vensim

Nesta seção, apresentaremos uma introdução ao Vensim, destacando a construção de diagramas de loop causal e diagramas de estoque e fluxo. Também abordaremos como utilizar o software para simular a dinâmica dos modelos relacionados aos processos de diferenciação e integração gráfica, resultando fundamental na análise da Dinâmica de Sistemas. A Dinâmica de Sistemas, discutida no inicio deste capítulo, pode ser complementada por diversos softwares disponíveis na literatura, que visam representar os elementos dos diagramas de Forrester, entre esses, destacam-se o Dynamo, Powersim e Stella. Nesta dissertação, utilizaremos o Vensim como ferramenta computacional para simular os processos de diferenciação e integração. O Vensim é amplamente utilizado para a modelagem e simulação em Dinâmica de Sistemas. Ele oferece ferramentas que permitem aos usuários criar modelos gráficos de forma intuitiva, facilitando a visualização das interações entre os diferentes componentes de um sistema. Com o Vensim, é possível realizar simulações que exploram o comportamento de sistemas complexos ao longo do tempo, possibilitando uma análise aprofundada das dinâmicas envolvidas. O software

suporta a criação de diagramas causais e de estoque e fluxo, tornando mais fácil entender e comunicar as relações entre variáveis.

Desenvolvido pela Ventana Systems Inc. (VENSIM, 2017), o Vensim possui uma interface acessível, que facilita a criação de gráficos e tabelas. Ele é compatível com os sistemas operacionais Windows (XP/Vista/7/8/8.1/10) e Macintosh OSX (10.9+). O Vensim está disponível em quatro versões: PLE, PLE Plus, Professional e DSS, cada uma com diferentes barras de ferramentas. A versão Vensim-PLE pode ser baixada gratuitamente para uso educacional através do site: <https://vensim.com/>.

Principais Ferramentas e Comandos do Vensim

As principais ferramentas e comandos do Vensim estão organizados em quatro barras de ferramentas. Abaixo, descrevemos essas barras e suas funções:

1. Menu Principal: Contém opções para acessar funcionalidades básicas, como abrir, salvar e exportar arquivos, além de configurações do programa.
2. Barra de Ferramenta Principal (Main Toolbar): Oferece acesso rápido às ferramentas mais usadas, como: - Criar novas variáveis - Construir diagramas - Iniciar simulações - Analisar resultados
3. Ferramenta de Esboço (Sketch Tools): Utilizada para desenhar diagramas de loop causal e de estoque e fluxo. Inclui ferramentas para: - Adicionar setas de causalidade - Desenhar caixas de estoque - Representar fluxos entre variáveis
4. Barra Vertical (Ferramenta de Análise): Focada em análises específicas, como: - Análise de sensibilidade - Configurações de simulação - Visualização de resultados em gráficos e tabelas.

A Figura 2.12 ilustra essas barras de ferramentas, destacando a disposição e as principais funcionalidades disponíveis no Vensim. Essa organização facilita a navegação e a utilização das diversas capacidades do software na modelagem de sistemas dinâmicos. A seguir outros destaques do software.

- Tela Inicial do Programa: Apresenta um ambiente de trabalho onde os usuários podem visualizar e interagir com seus modelos, nesta tela todas as ferramentas se encontram integradas, permitindo a simulação de modelos de forma eficiente.
- Arquivo (File): Aqui você pode criar, abrir, salvar e exportar modelos. Também é possível acessar as configurações do programa.

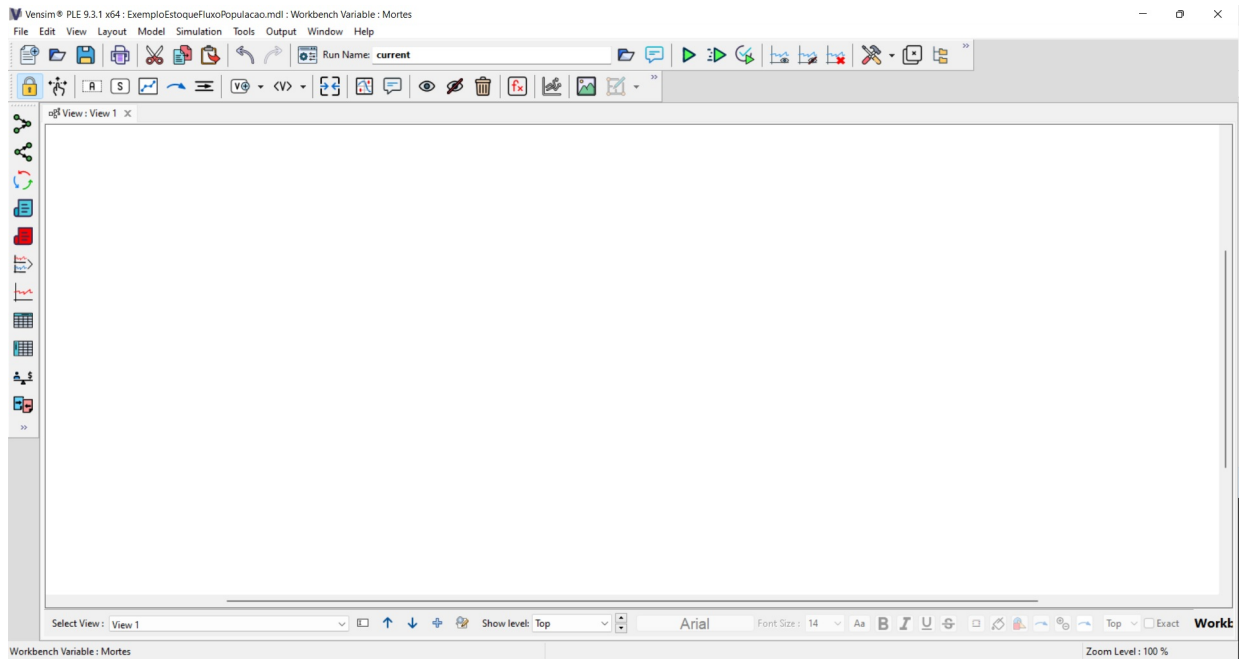


Figura 2.12: Barra de ferramentas do Vensim-PLE versão 10.2.2.

- Editar (Edit): Permite realizar operações de edição como desfazer (undo), refazer (redo) e copiar/colar elementos do modelo.
- Visualizar (View): Opções para ajustar a visualização do modelo, como zoom e exibição de grades.
- Simulação (Simulate): Ferramentas para iniciar simulações, configurar parâmetros de simulação e visualizar resultados.

Barra de Ferramentas Principal (Main Toolbar):

- Novo Modelo (New Model): Cria um novo arquivo para iniciar um modelo do zero.
- Abrir Modelo (Open Model): Abre um arquivo de modelo existente.
- Salvar (Save): Salva o progresso do seu modelo atual.
- Diagrama Causal (Causal Loop Diagram): Permite criar e editar diagramas causais, representando as interações entre variáveis.
- Diagrama de Estoque e Fluxo (Stock and Flow Diagram): Ferramenta para criar diagramas de estoque e fluxo, essenciais para modelar dinâmicas de sistemas.

Ferramentas de Esboço (Sketch Tools):

- Adicionar Variável (Add Variable): Insere variáveis no modelo, que podem representar estoques, fluxos ou outros elementos do sistema.
- Adicionar Fluxo (Add Flow): Conecta variáveis, indicando a direção e a natureza da interação entre elas.
- Adicionar Comentário (Add Comment): Insere anotações no modelo para clarificar conceitos ou descrever interações.
- Formatação (Formatting Tools): Ajusta cores, tamanhos e estilos de elementos para melhor visualização.
- Ferramenta de Análise (Analysis Tools):
- Gráficos (Graphs): Gera gráficos a partir dos dados de simulação, permitindo a visualização das dinâmicas do modelo.
- Tabelas (Tables): Cria tabelas para organizar e exibir dados numéricos provenientes das simulações.
- Sensibilidade (Sensitivity Analysis): Ferramentas para testar como mudanças em variáveis afetam os resultados do modelo.
- Relatórios (Reports): Gera relatórios detalhados sobre os resultados da simulação e as interações no modelo.

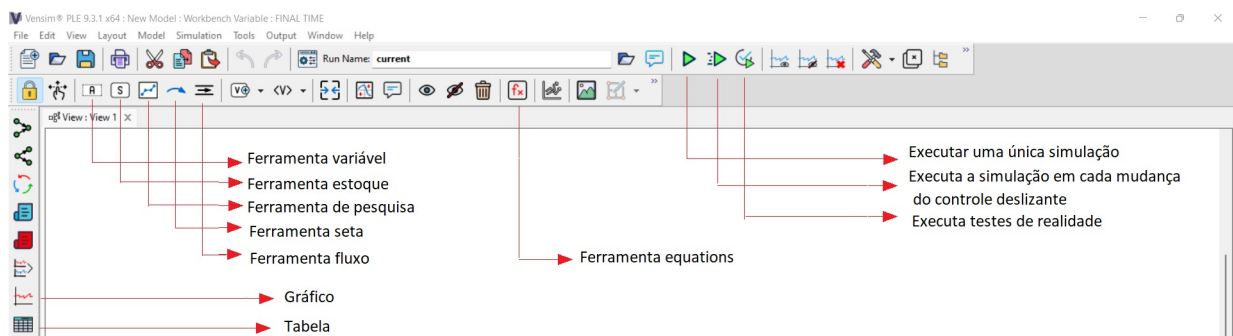


Figura 2.13: Alguns elementos da barra de ferramenta principal.

Simulando Modelos no Vensim

Para entender o funcionamento do software, vamos apresentar a simulação da evolução de uma conta poupança, o processo será desenvolvido de forma didática em sete etapas.

Exemplo 11. (Dinâmica de uma Poupança) Calcular a evolução de uma conta por um período de 24 meses, considerando um capital inicial de 5.000 reais, a realização de depósitos mensais de 200 reais e retiradas mensais de 100 reais.

Solução:

Etapa 1: Configuração do Período da Simulação

- Abrir Vensim: Inicie o software.
- Acessar Configurações: Clique em Model e depois em Settings.
- Definir Período: Configure o início em 0 meses e o fim em 24 meses, (Figura 2.14).
- Selecionar Unidade: Escolha Month (meses).
- Salvar Configurações: Clique em OK

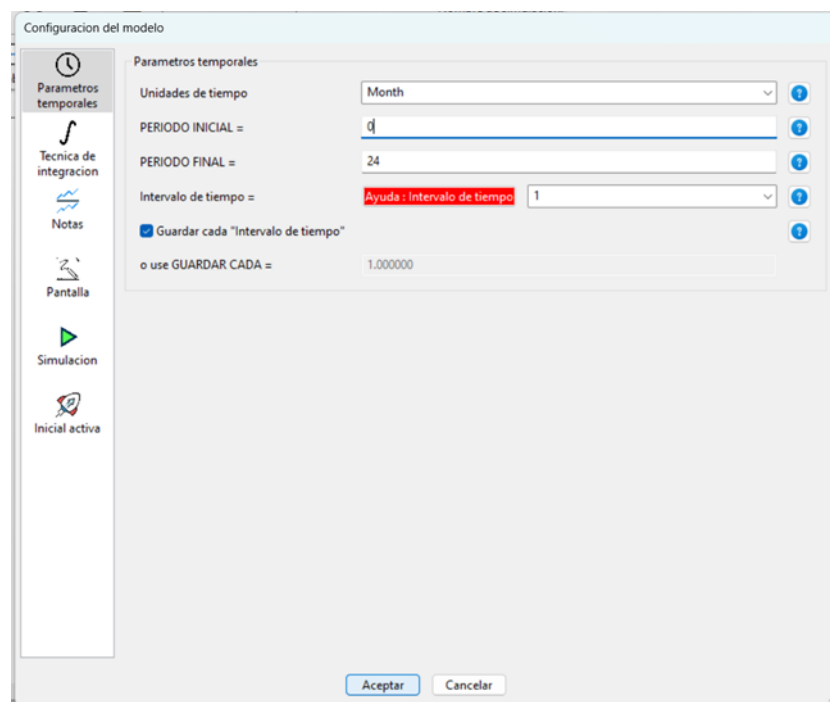


Figura 2.14: Configuração do modelo.

Etapa 2: Definir a variável Poupança

- Selecionar Stock Tool.
- Nomear: Digite poupança e pressione Enter.

Etapa 3: Definir a variável Depósito

- Selecionar Flow Tool.
- Posicionar: Clique à esquerda de poupança e arraste para a direita.
- Nomear: Digite Depósito e pressione Enter.

Etapa 4:

- Definir a variável Saque
- Selecionar Flow Tool.
- Posicionar: Clique no nome poupança e arraste para a direita.
- Nomear: Digite saque e pressione Enter.



Figura 2.15: Variáveis Depósito (fluxo entrada) e Saque (Fluxo de saída) definidas. Poupança (estoque), Etapas 2, 3 e 4.

Etapa 5: Definir Valores nas Equações

- Definir a variável Depósito: Clique duas vezes na variável Depósito. Pressione a tecla Equations (f_x) na barra de ferramentas. Insira o valor 200 e pressione Enter.
- Definir a variável Saque: Clique duas vezes na variável saque. Pressione a tecla Equations (f_x) na barra de ferramentas. Insira o valor 100 e pressione Enter.
- Definir a variável Poupança: Clique duas vezes na variável poupança. Pressione a tecla Equations (f_x) na barra de ferramentas. Use o valor inicial 5000 e selecione tipo nível, veja Figura 2.16. Para a equação use:

$$\text{Poupança} = \text{Integ} (\text{Depósito} - \text{Saque})$$

Etapa 6: Verificação das Variáveis

Após dar OK no quadro Editing Equation for – Poupança (Figura 2.17), o modelo vai mostrar as variáveis Depósito e Saque em NEGRITO, indicando que as duas variáveis ainda não tiveram seus valores ou equações definidos.

Etapa 7: Simulações

Para fazer uma *simulação*, pressionar o botão *Run a Simulation*. Depois pressionar a

variável que queremos analisar, neste caso, Poupança. Para indicar a variável pressionar o Mouse no centro de Poupança. Depois, proceder da mesma maneira com as outras variáveis. Quando as variáveis não apresentam nenhuma variável em NEGRITO, o modelo está pronto para a simulação. Após todas as variáveis estarem definidas, será feita as simulações, a Figura 2.18 mostra a simulação da dinâmica da Poupança em 24 meses.

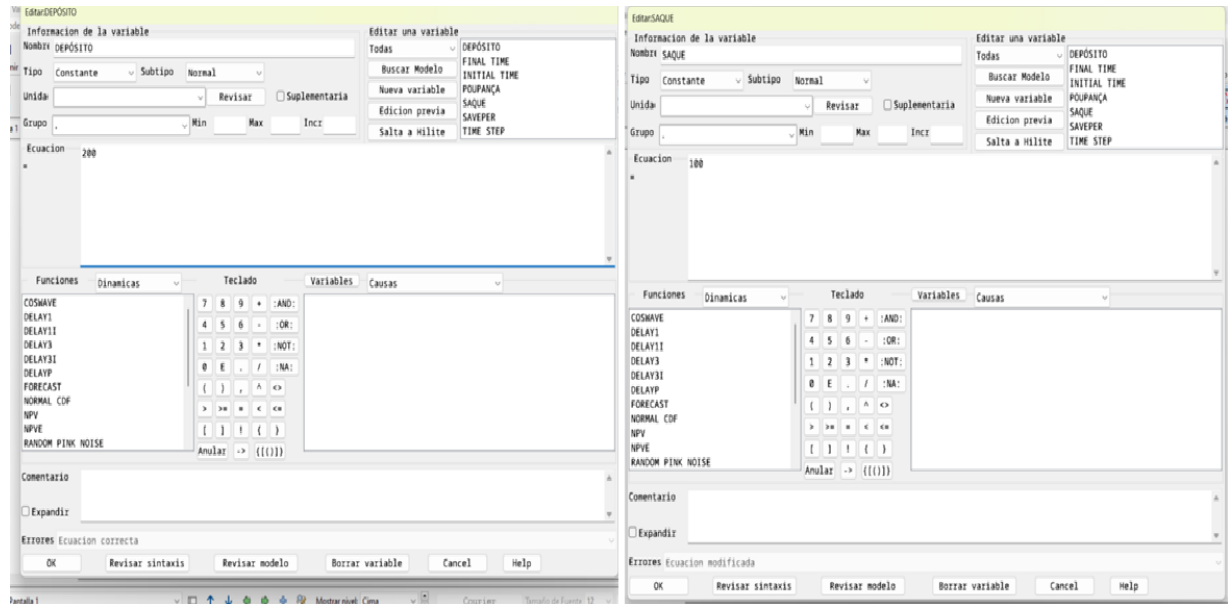


Figura 2.16: Variáveis Depósito e Saque definidas no Vensim. Etapa 5.

Exemplo 12. (Dinâmica da População de Coelhos) Calcular a evolução de uma população de coelhos ao longo de 12 meses se a população inicial de coelhos é 50. Considerando que a taxa de natalidade é de 10% ao mês e a taxa de mortalidade é de 5% ao mês.

Solução:

Etapas para Criar o Modelo no Vensim:

- **Abrir o Vensim:** Inicie o software Vensim e selecione "Novo Modelo" para criar um novo projeto.
- **Definir Variáveis:**
 - Crie uma variável chamada "População de Coelhos" para representar o total de coelhos.
 - Crie uma variável chamada "Nascimentos" que será calculada com base na taxa de natalidade.

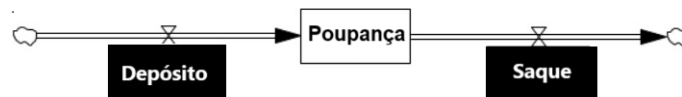
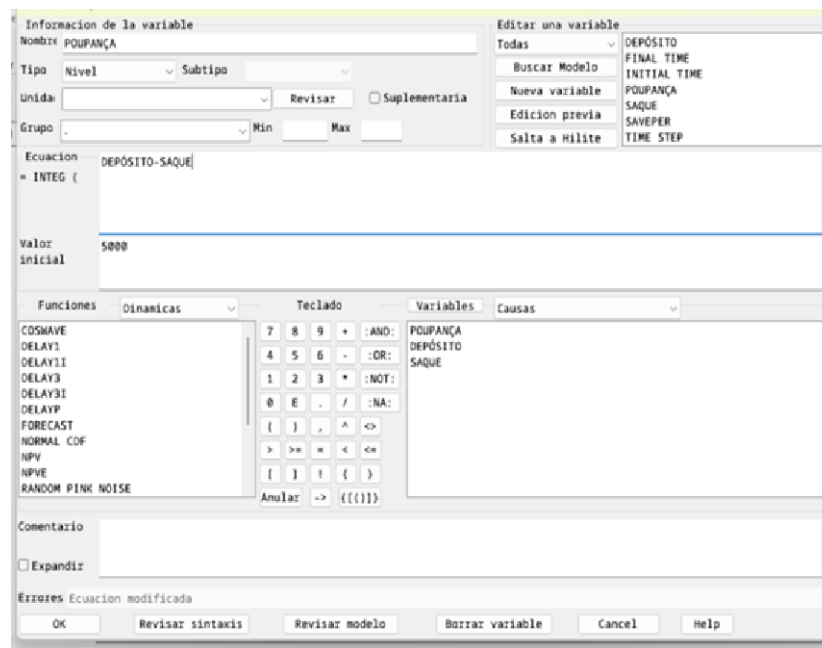


Figura 2.17: Parte superior: a variável Poupança está definida. Parte inferior: as caixas em negritas indica que as variáveis não estão definidas. A caixa de cor branca indica que a Poupança está pronta para a simulação. Etapa 6.

- Crie uma variável chamada “Óbitos” que será calculada com base na taxa de mortalidade.
- **Relações Causais:** Estabelecer as relações que descrevem a evolução da população de coelhos.
 - Nascimentos = população de coelhos $\times$ taxa de natalidade
 - Óbitos = população de coelhos $\times$ taxa de mortalidade
 - População de coelhos = população inicial + nascimentos - óbitos
 - Configure a População Inicial para 50 coelhos.
- **Estoque e Fluxos:**
 - Criar Fluxos: Utilize a ferramenta de fluxo para conectar as variáveis Nascimentos e Óbitos à variável População de Coelhos, indicando que ambas influenciam o total da população.

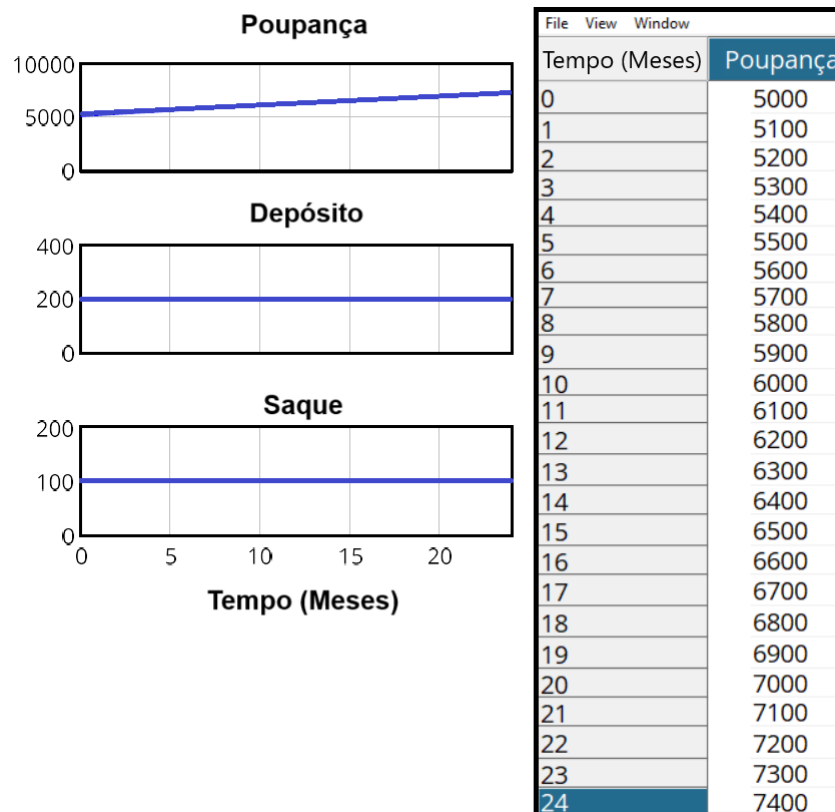


Figura 2.18: Simulação da dinâmica do Exemplo 11 no Vensim. A simulação apresenta resultados onde a variável poupança tem um crescimento linear.

- Configurar o Tempo: Adicione um componente de tempo ao modelo, definindo a duração da simulação para 12 meses, com um intervalo mensal.
- Definir Parâmetros: Acesse as configurações de cada variável para garantir que a população inicial e as taxas de natalidade e mortalidade estejam corretamente definidas.
- **Executar a Simulação:** Utilize a ferramenta de simulação do Vensim para executar o modelo e observar a evolução da População de Coelhos ao longo dos 12 meses.
- **Analisar Resultados:** Gere gráficos para visualizar a dinâmica da População de Coelhos, observando como os nascimentos e mortes afetam o tamanho da população mês a mês.
- **Salvar o Modelo:** Após a simulação e análise, salve seu trabalho para futuras referências e possíveis ajustes.

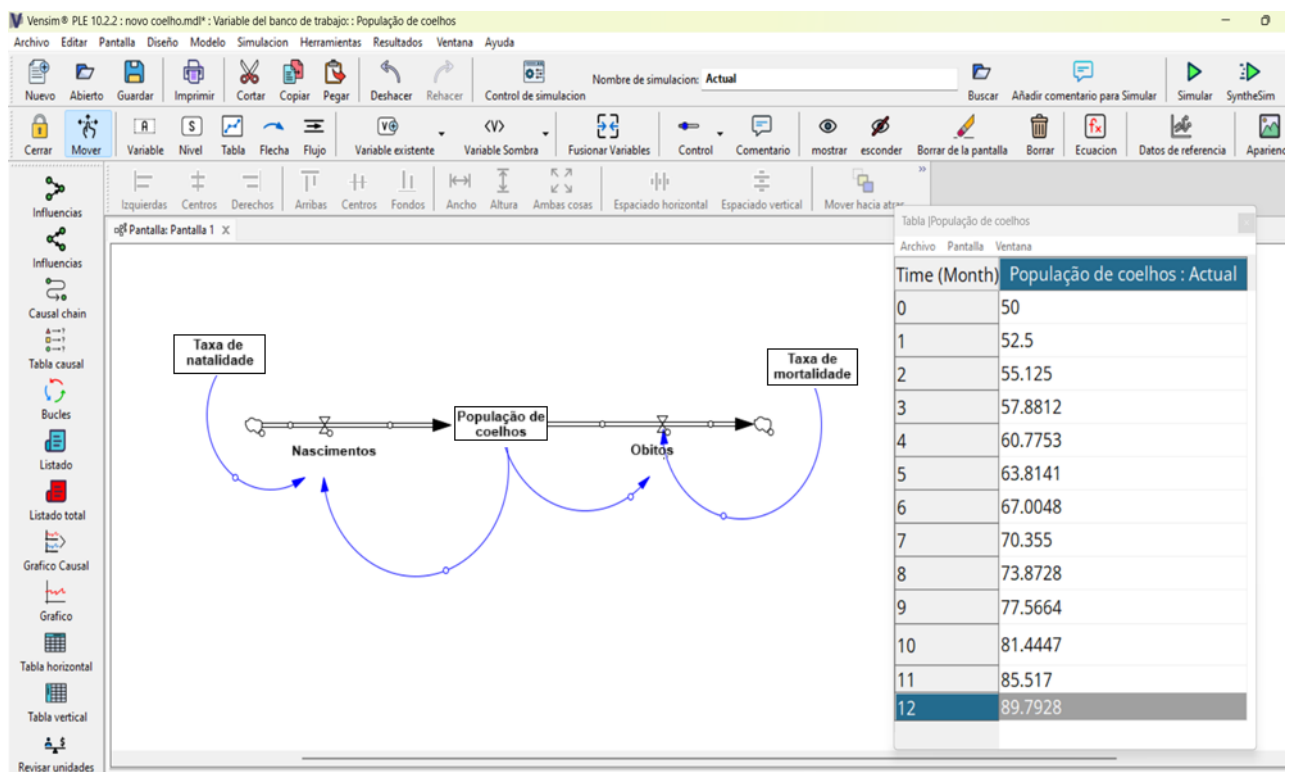


Figura 2.19: Simulação da dinâmica do Exemplo 12 no Vensim. A simulação apresenta resultados mostrados na Tabela. Após 12 meses, o número de coelhos cresceu a 90 aproximadamente.

Capítulo 3

O Método de Diferenciação e Integração Gráfica

3.1 Dinâmica de Estoque e Fluxo

No Capítulo 2, foi introduzido o conceito de estoque e fluxo, além de técnicas para representar graficamente as redes de estoque e fluxo dos sistemas. Esta seção explora o comportamento dos estoques e fluxos e sua dinâmica. Dada a dinâmica dos fluxos de um determinado sistema, é pertinente perguntar: qual é o comportamento do estoque? De forma recíproca, a partir da dinâmica do estoque, como podemos inferir o comportamento dos fluxos? Na disciplina de cálculo diferencial e integral, é conhecido que essas questões são equivalentes a integrar os fluxos (derivada) para gerar o estoque (integral) e diferenciar o estoque para produzir sua taxa de variação líquida (derivada). Esses conceitos podem ser desafiadores para pessoas que nunca estudaram cálculo. De fato, relacionar a dinâmica de estoques e fluxos é bastante intuitivo; a metáfora da água ingressando no reservatório fornece uma compreensão didática dessa dinâmica. Por outro lado, o estudo do cálculo envolve o uso de notações desconhecidas e foca em soluções analíticas, o que dificulta o aprendizado de muitas pessoas. Mesmo assim, para quem possui uma base sólida em cálculo ou equações diferenciais, geralmente não é possível resolver analiticamente modelos simples devido à sua alta ordem e à não linearidade das variáveis envolvidas, o que torna as ferramentas matemáticas estudadas em cálculo de uso limitado para esses casos.

Nesse contexto, independente de ter o conhecimento matemático, o objetivo desta seção é oferecer a metodologia da DS e em particular os processos de integração e diferenciação gráfica, como tentativa para entender a dinâmica dos estoques e fluxos sem o uso de técnicas de integração e diferenciação. O leitor com mais conhecimento matemático,

achará este tema direto, mas ainda deve fazer os exemplos e desafios de integração e diferenciação gráfica para ter certeza de que sua compreensão intuitiva é tão sólida quanto seu conhecimento técnico. Inicialmente, para o modelador, não importa quão grande ou pequeno seja sua experiência acadêmica em matemática, e sim, é preciso ter a capacidade de relacionar o comportamento de estoques e fluxos intuitivamente, usando gráficos e outras técnicas não matemáticas.

3.1.1 Relações entre Estoque e Fluxo

Vamos relembrar as definições básicas de estoques e fluxos: a *taxa líquida de variação de um estoque* é a soma de todas as suas entradas menos a soma de todas as suas saídas. Além disso, os *estoques acumulam a taxa líquida de variação*. Matematicamente, isso é interpretado afirmando que os estoques integram seus fluxos líquidos; o *fluxo líquido* é a *derivada do estoque*. Esse é o princípio do Cálculo Diferencial e Integral.

3.1.2 Equilíbrio Estático e Dinâmico

De acordo com Sterman (2000), um sistema está em equilíbrio quando todos os seus estoques são imutáveis, assim, um estoque está em equilíbrio quando é imutável em relação aos fluxos. Dessa forma, para que um estoque esteja em equilíbrio, a taxa líquida de variação deve ser zero, isso implica que a entrada total é apenas equilibrada pela saída do fluxo total. No caso da metáfora da banheira introduzida na Seção 2.12, podemos dizer, se a água for drenada da banheira exatamente na mesma velocidade em que ingressa, a quantidade de água na banheira permanecerá constante e a banheira estará em equilíbrio, tal estado do estoque é chamado de *equilíbrio dinâmico*, pois a água na banheira está sempre mudando. Uma outra situação que pode acontecer no sistema, é considerar que todos os fluxos de entrada e saída de um estoque sejam zero; tal estado do estoque é chamado de *equilíbrio estático*. Nessa nova dinâmica, o volume total de água na banheira permanece constante e contém a mesma quantidade de água em cada unidade de tempo. A Organização das Nações Unidas (ONU) como uma organização internacional tem origem ao final da Segunda Guerra Mundial (1945) e, desde então, seus objetivos de manter a paz e atividades de cooperação entre as nações têm se expandido para transformá-lo em um arquetípico organismo internacional do início do século XXI. Os 51 membros fundadores foram admitidos em 1945; destes, 49 são ainda membros ou tiveram o lugar substituído por um estado sucessor. O número de membros da ONU está em equilíbrio dinâmico desde 1945, quando diversos países ingressaram na ONU, o número total de países integrante permanece constante em 193, mesmo com a mudança

de membros (embora lentamente). O estoque de países do mundo integrantes da ONU está em equilíbrio estático, pois é improvável que um país conhecido saia desse organismo mundial, as chances de novos países desconhecidas integrarem a ONU são remotas a não ser que se formem novos países.

3.1.3 Cálculo sem Matemática

Como mencionado anteriormente, aprender a relacionar o comportamento dos estoques e fluxos em um sistema é o primeiro estágio para entender a dinâmica por trás do modelo. Mais uma vez, vamos enfatizar as duas questões: Dados os fluxos para um estoque, qual deve ser o comportamento do estoque? Dado o comportamento do estoque, qual deve ter sido a taxa líquida de variação? O cálculo diferencial e integral fornece regras matemáticas para responder a essas perguntas, desde que possamos caracterizar o comportamento dos estoques e fluxos como funções matemáticas. Felizmente, a intuição por trás da relação entre estoques e fluxos é direta e não requer rigor matemático, pelo menos no nível do Ensino Médio, o que será esclarecido posteriormente.

Se o processo de relacionamento entre estoques e fluxos em uma dinâmica *se inicia conhecendo, através de um gráfico, o comportamento dos fluxos ao longo do tempo, de tal forma que seja possível inferir o comportamento do estoque*, esse processo será chamado de *integração gráfica*. Analogamente, de forma inversa, se o *processo de relacionamento se inicia conhecendo a trajetória ou comportamento do estoque, de tal forma que seja possível inferir sua taxa de variação líquida*, vamos chamar esse processo de *diferenciação gráfica*.

Integração e diferenciação são as duas operações fundamentais do cálculo. A seguir, vamos definir esses conceitos graficamente e em linguagem simples.

3.1.4 Integração Gráfica

Definição 20. *A integração gráfica é o processo que relaciona a dinâmica de estoques e fluxos a partir do gráfico do fluxo, de tal forma que conhecendo o comportamento dos fluxos é possível estimar o comportamento do estoque.*

Observação 7.

- *Os estoques acumulam ou integram seu fluxo líquido. A quantidade adicionada a um estoque em qualquer intervalo de tempo resulta ser a área delimitada pelo gráfico da taxa líquida, entre o início e o fim do intervalo.*

- O valor final do estoque é o valor inicial mais a área sob a curva da taxa líquida entre os tempos inicial e final.

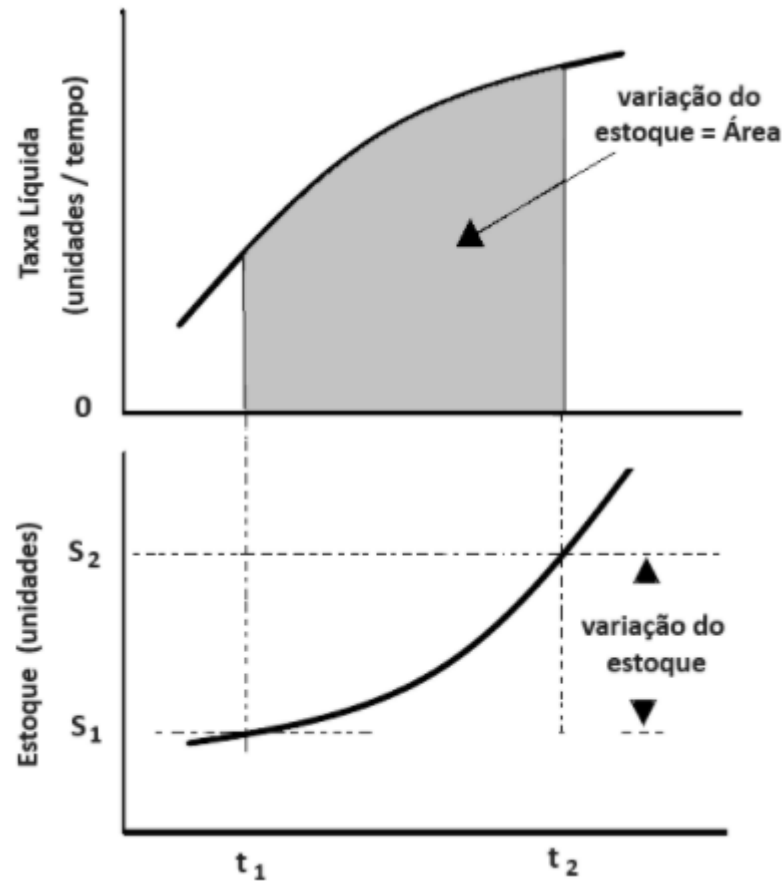


Figura 3.1: Representação gráfica da Integração (estoque) a partir da taxa líquida (diferenciação). Os estoques acumulam ou integram seu fluxo líquido.

De acordo a Definição 20 e a Observação 7, o valor adicionado a um estoque durante qualquer intervalo de tempo é representado pela área delimitada pela curva que define sua taxa líquida de variação. Mas por que isso acontece? Vamos explicar o processo de integração gráfica por meio de um exemplo geral, utilizando, para fins didáticos, a metáfora da banheira.

Processo de Integração Gráfica

Questão: Quanta água é adicionada a um reservatório em qualquer intervalo de tempo $[t_1, t_2]$?

Para responder a questão, vamos a dividir o intervalo inteiro $[t_1, t_2]$ em vários subintervalos de comprimento pequeno, o suficiente, para que o *fluxo líquido de água não mude*

consideravelmente durante o subintervalo (Figura 3.2). O comprimento de cada subintervalo será denotado por “ dt ”, que pode ser lido por “tempo delta de t ou passo de tempo dt ”. Suponhamos que o valor do estoque no tempo inicial t_1 seja S_1 . A soma da área sob a curva de taxa líquida entre os tempos t_1 e t_2 aumenta o estoque para S_2 .

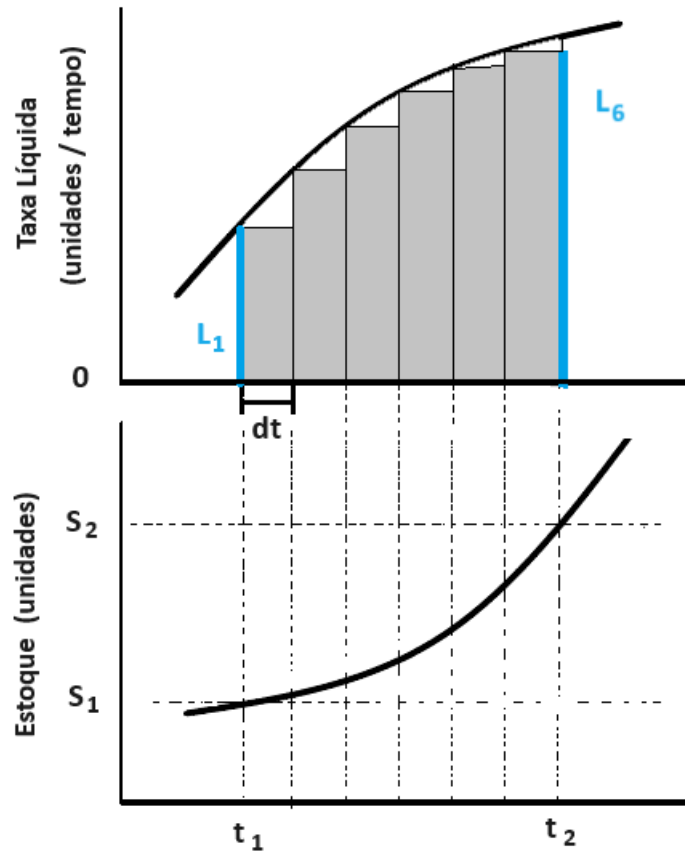


Figura 3.2: Integração gráfica. O tempo $[t_1, t_2]$ é dividido em pequenos intervalos de comprimento dt . Cada retângulo representa a quantidade adicionada durante o intervalo dt , supondo que a taxa líquida L_i naquele momento permaneça constante durante o intervalo. A área de cada retângulo é $L_i dt$. O total adicionado ao estoque entre t_1 e t_2 é então a soma das áreas dos retângulos. Dividir o tempo em incrementos menores aumenta a precisão da aproximação.

Nosso interesse está agora em analisar a quantidade de água que flui na banheira durante cada pequeno intervalo de duração de tempo dt . Quanta água flui durante cada intervalo de tempo dt ? A quantidade adicionada resulta ser o fluxo líquido durante o intervalo, digamos L , multiplicado pelo comprimento do subintervalo, ou seja, a área do retângulo dt períodos de largura e L unidades/período de altura.

$$\text{Quantidade adicionada durante o intervalo } dt = L \times dt \quad (3.1)$$

$$(\text{Unidades}) = (\text{Unidades/Tempo})(\text{Tempo})$$

É importante destacar as unidades de medida: O *fluxo em unidades por tempo*, acumulado por um período de tempo, resulta na quantidade adicionada ao estoque. Vamos apresentar o seguinte exemplo numérico para esclarecer o processo de integração gráfica.

Exemplo 13. *Suponha que $t_1 = 1$ hora e $t_2 = 2$ horas. A questão é, quanta água flui para a banheira durante essa hora?*

Solução: Inicialmente dividimos a hora em seis intervalos de 10 minutos e vamos a supor que o fluxo seja constante ao longo de cada um desses intervalos. Se no início do primeiro intervalo o fluxo fosse de 6 litros por hora, ou seja, 0,1 litros/minuto, então a quantidade adicionada seria (0,1 litros/minuto) (10 minutos) = 1 litro. No início do segundo intervalo de 10 minutos, o fluxo aumentou, talvez para 6+1=7 litros/hora, ou cerca de 0,117 litros/minuto. A área do segundo retângulo é então (0,117 litros/minuto)(10 minutos)=1,17 litros. Iniciando o terceiro intervalo de 10 minutos, o fluxo aumentou, talvez para 7+1=8 litros/hora, ou cerca de 0,133 litros/minuto. A área do terceiro retângulo é então (0,133 litros/minuto)(10 minutos)=1,33 litros. Calcular a área de todos os seis retângulos e somá-los dá uma aproximação do volume total de água adicionado durante uma hora. Observe que a aproximação não é ótima, pois o fluxo líquido muda durante cada intervalo de 6 segundos.

De forma geral, na Figura 3.2, quando o fluxo líquido (inclinação) está realmente aumentando, então o valor calculado do estoque será muito pequeno, pois a vazão é rápida. Para *aumentar a precisão da aproximação, é necessário dividir o tempo em intervalos ainda mais finos*, o que implica o aumento do número de retângulos. O procedimento descrito acima é conhecido como integração de Euler e é o método mais comumente utilizado para simulação numérica. As simulações por computador integram os estoques no modelo exatamente dessa maneira; o modelador deve escolher o passo de tempo dt para que a aproximação seja aceitável para o objetivo. Como é conhecido, à medida que o intervalo de tempo se torna infinitesimal (suficientemente pequeno), no limite, *a soma das áreas de todos os retângulos se torna igual à área total sob a curva de taxa líquida*. O cálculo diferencial e integral fornece fórmulas que fornecem a área exata sob a taxa líquida, desde que a taxa líquida possa ser expressa como uma função matemática. Mas se a taxa líquida pode ser integrada analiticamente ou não, a quantidade adicionada a um estoque é sempre a área sob a taxa líquida. Em conclusão, *a integração gráfica é o processo de estimar essa área a partir de um gráfico da taxa líquida*.

Etapas do Processo de Integração Gráfica

De acordo a Sterman (2000) o processo de Integração Gráfica pode obedecer as seguintes etapas:

1. Calcule e represente graficamente a taxa total de entrada e a taxa total de saída no estoque.
2. Calcule e represente graficamente a taxa líquida de variação do estoque.
3. Faça um conjunto de eixos para representar graficamente o estoque. Os estoques e seus fluxos têm diferentes unidades de medida (se um estoque é medido em unidades, seus fluxos são medidos em unidades por período de tempo). Portanto, os estoques e seus fluxos devem ser representados graficamente escalas separadas. Faça um gráfico separado para o estoque sob o gráfico dos fluxos, com os eixos de tempo alinhados.
4. Trace o valor inicial do estoque no gráfico de estoques. O valor inicial deve ser especificado; não pode ser inferido a partir da taxa líquida.
5. Divida o fluxo líquido em intervalos com o mesmo comportamento e calcule o valor adicionado ao estoque durante o intervalo.
6. Esboce a trajetória do estoque entre o início e o final de cada segmento. Encontre o valor da taxa líquida no início do segmento. É positivo ou negativo? Se o fluxo líquido for positivo, o estoque será crescente durante esse tempo. Se o fluxo líquido for negativo, o estoque será decrescente.
7. Sempre que a taxa líquida é zero, o estoque permanece inalterado. Certifique-se de que seu gráfico do estoque não mostre nenhuma mudança no estoque em todos os lugares em que a taxa líquida de variação é zero. Se a taxa líquida permanecer zero durante algum intervalo, o estoque permanece constante em qualquer valor que tinha quando a taxa líquida se tornou zero.
8. Repita as etapas 5 a 7 até terminar.

Para ilustrar o processo de integração gráfica, vamos a considerar o sistema mais básico de estoque e fluxo, aquele formado por um único estoque com uma entrada e uma saída.

Exemplo 14. *Suponhamos que o fluxo de entrada no estoque siga o padrão mostrado na Figura 3.3 e que a saída do estoque seja zero (unidades por segundo). Se o nível inicial do*

estoque é de 100 unidades, quanto há no estoque no momento 80 e qual é o comportamento do estoque ao longo do tempo?

Solução: O fluxo de entrada começa em zero. No tempo 10, o fluxo aumenta repenti-

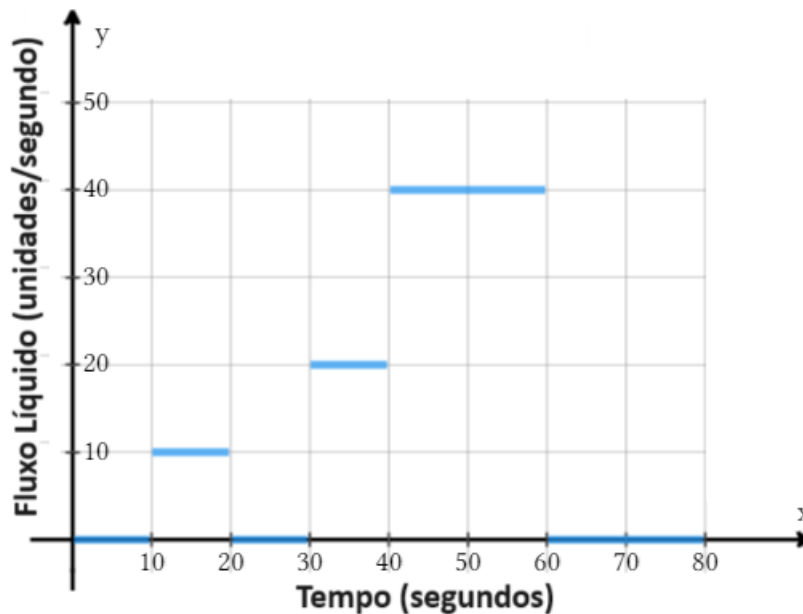


Figura 3.3: Fluxo de entrada.

namente para 10 unidades por segundo, permanece nesse nível por 10 segundos e depois volta a zero. A dinâmica do fluxo de entrada continua zero por 10 segundos, para subir para 20 unidades por segundo ficando por 10 segundos nesse nível. Por 20 segundos o fluxo aumenta para 40, para depois ficar zero outros 20 segundos.

Aplicamos as etapas do processo de integração gráfica ao Exemplo 14, Primeiro, na Figura 3.4 fazemos um conjunto de eixos para o estoque, alinhados sob o gráfico para os fluxos. Em seguida, calculamos a taxa líquida. Como há somente uma entrada e uma saída, e como a saída é zero em todos os momentos, a taxa líquida de variação do estoque (Entrada Total - Saída Total) é simplesmente igual à entrada. Inicialmente, o estoque tem um valor de 100 unidades. Entre o tempo 0 e o tempo 10, o fluxo líquido é zero unidades/segundo, de modo que o estoque permanece constante em seu valor inicial. No tempo 10, a taxa líquida apresenta um salto para 10 unidades por segundo e permanece lá por 10 segundos. O valor adicionado ao estoque é a área sob a curva da taxa líquida (entre a curva da taxa líquida e a linha zero). Como a taxa é constante, a área é um retângulo de 10 unidades por segundo de altura e 10 segundos de duração, de modo que o estoque aumenta em 100 unidades, dando um nível total de 200 unidades no tempo 20. Como a taxa líquida é positiva e constante durante esse intervalo, o estoque sobe linearmente a

uma taxa de 10 unidades por segundo (a inclinação do estoque é de 10 unidades/segundo). No tempo 20, o fluxo de entrada cessa repentinamente. A taxa líquida de variação é agora zero e permanece constante, e o estoque permanece novamente inalterado, embora agora ao nível de 200 unidades. No início do tempo 30, a taxa líquida apresenta um salto para 20 unidades por segundo e permanece lá por 10 segundos. O valor adicionado ao estoque é a área sob a curva da taxa líquida (entre a curva da taxa líquida e a linha zero). Sendo a taxa constante, a área é um retângulo de 20 unidades por segundo de altura e 10 segundos de duração, de modo que o estoque aumenta em 200 unidades, dando um nível total de 400 unidades no tempo 40. No tempo 40, o fluxo de entrada cresce repentinamente. A taxa líquida de variação é agora 40 e permanece constante até o início do tempo 60. Como a taxa é constante, a área é um retângulo de 40 unidades por segundo de altura e 20 segundos de duração, de modo que o estoque aumenta em 800 unidades, dando um nível total de 1200 unidades no tempo 60. Como a taxa líquida é positiva e constante durante esse intervalo, novamente o estoque sobe linearmente a uma taxa de 40 unidades por segundo (a inclinação do estoque é de 40 unidades/segundo). Por último no intervalo de tempo 60 a 80 o fluxo é zero, de tal maneira que o estoque permanece constante 1200 unidades.

Observação 8.

- *A inércia é a tendência natural de um objeto em resistir a alterações em seu estado original de repouso ou movimento. O Exemplo 14 mostra como o processo de acumulação cria inércia: embora a taxa suba e caia de volta ao seu nível original, o estoque não retorna ao seu nível original. Em vez disso, permanece em seu máximo quando a taxa líquida volta a zero.*
- *Dessa forma, os estoques fornecem uma memória de todos os eventos passados em um sistema. A única maneira de o estoque cair é a taxa líquida se tornar negativa (para que a saída exceda a entrada).*
- *Observe também como o processo de acumulação mudou a forma do insumo. A entrada é um pulso retangular com dois saltos descontínuos; a saída é uma curva suave e contínua.*

Exemplo 15. *Considere os fluxos especificados na Figura 3.5. A saída é constante em 120 unidades/mês, se o valor inicial do estoque é de 600 unidades, use o processo de integração gráfica para encontrar o estoque da dinâmica do sistema.*

Solução: Consideramos os fluxos especificados na Figura 3.5. A saída é constante em

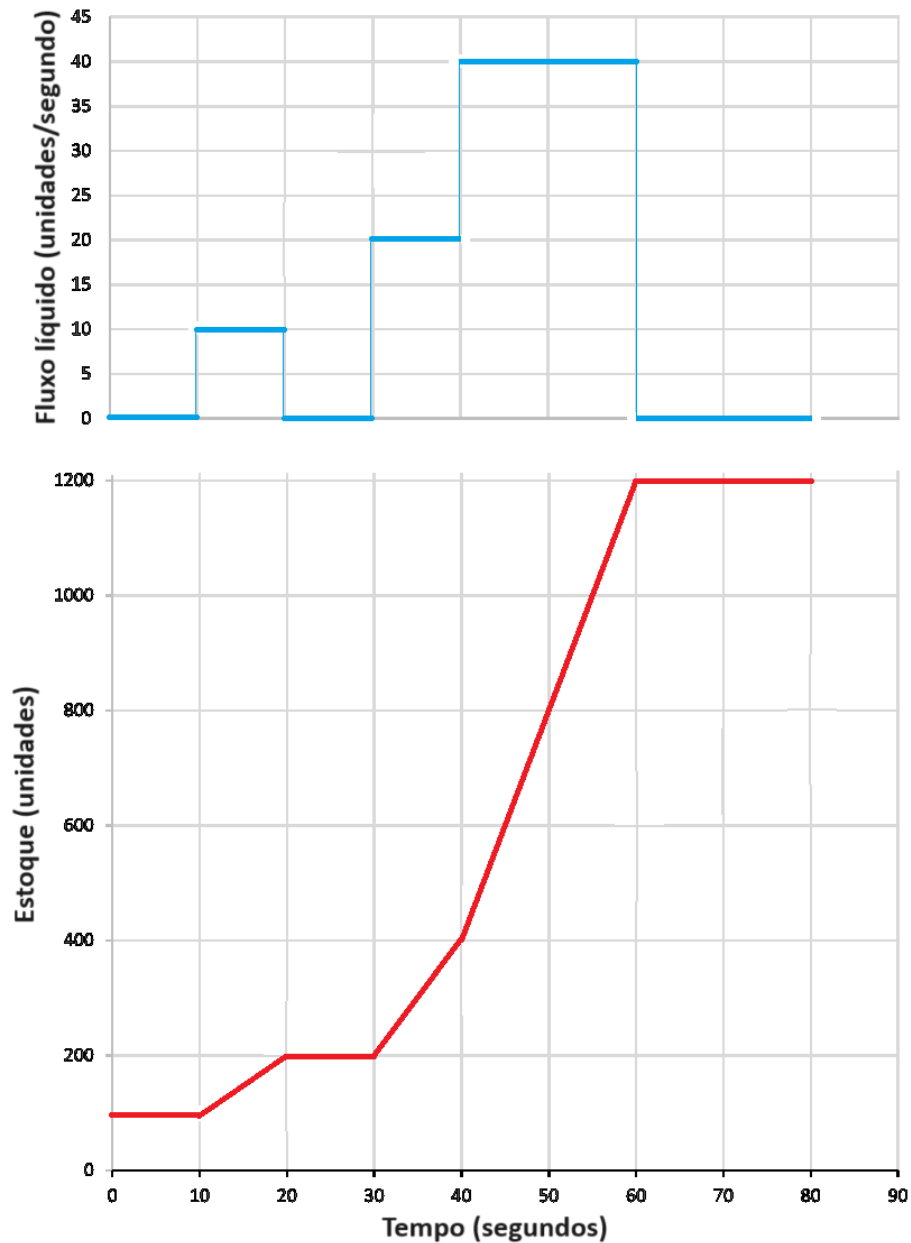


Figura 3.4: Integração gráfica: Enquanto a taxa sobe e desce, o estoque sobe e permanece em um nível mais elevado. Observe as diferentes unidades de medida para o fluxo e o estoque.

120 unidades/mês, mas a entrada flutua em torno de uma média de 120 com período de 12 meses e amplitude de ± 60 unidades/mês. No início, a entrada está no seu máximo. Como a vazão de saída é constante, o fluxo total é uma flutuação com amplitude ± 60 unidades/mês e média zero. **No intervalo $[0,3]$** , o estoque inicia com seu valor inicial de 600 unidades, mas como a entrada está no máximo, o estoque inicialmente sobe com uma inclinação de 60 unidades/mês. Contudo, o fluxo total cai durante os primeiros três meses, pelo que o estoque aumenta a uma taxa decrescente. No terceiro mês, o fluxo total chega a zero e depois torna-se negativo. O estoque deve portanto atingir um máximo no

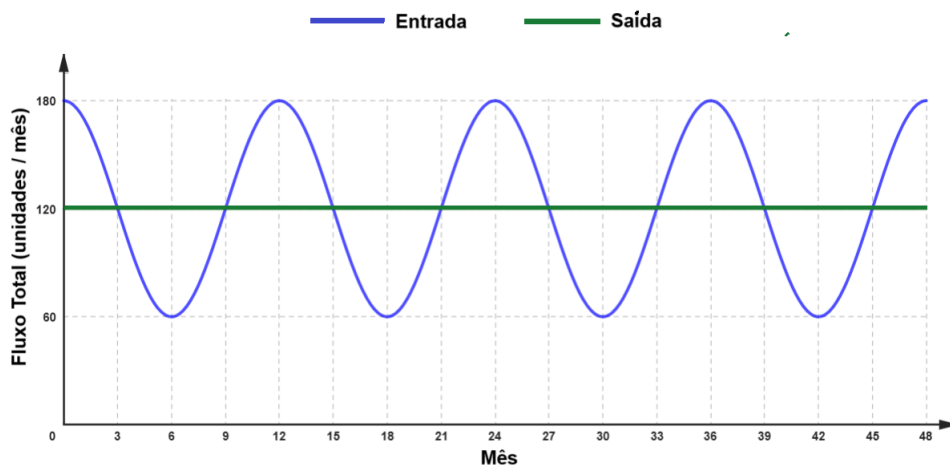


Figura 3.5: Fluxo de entrada e fluxo de saída.

terceiro mês. A quantidade adicionada em relação ao estoque nos primeiros 3 meses é a

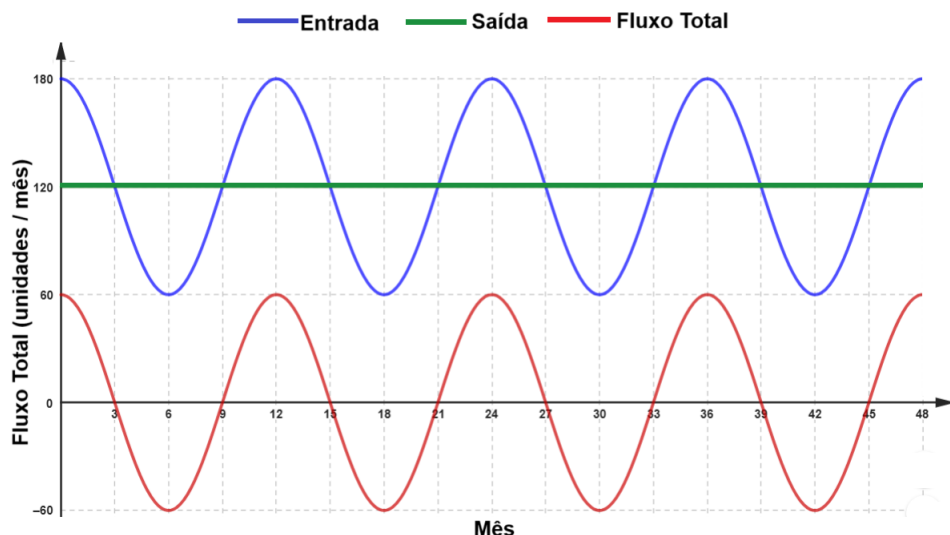


Figura 3.6: Fluxo Total.

área sob a curva do fluxo total. Não é fácil estimar a área do gráfico pois a curva da taxa de variação total está sempre mudando. Uma simulação da área mostra que pouco menos de 120 unidades são acrescentadas ao estoque, no momento em que o fluxo total cai para zero no terceiro mês. **No intervalo $[3,6]$** , o fluxo total é negativo, portanto, o estoque está caindo. Logo após o terceiro mês, o fluxo total é ligeiramente negativo, então a *taxa de declínio do estoque é leve*. No entanto, a magnitude do fluxo total aumenta, fazendo com que o *estoque caia a uma taxa crescente*. No início do sexto mês, o fluxo total atinge seu valor mínimo (a maior parte negativa), de -60 unidades/mês. O estoque está caindo à sua taxa máxima, e há um ponto de inflexão na trajetória do estoque no mês 6. *Quanto o estoque perdeu entre o mês 3 e o mês 6?* Assumindo que a flutuação da taxa líquida é

simétrica, a perda apenas equilibrou o que foi ganho nos primeiros 3 meses, reduzindo o estoque de volta ao seu nível inicial de 600 unidades. **No intervalo [6,9]**, o fluxo total permanece negativo, então *o estoque continua a cair, mas agora a uma taxa decrescente*. No nono mês, o fluxo total chega novamente a zero, fazendo com que *o estoque para de cair e atinge seu mínimo*. Utilizando novamente o pressuposto de simetria, a quantidade perdida entre os meses 6 a 9 é igual à quantidade perdida dos meses 3 a 6, o que faz o estoque cair para um nível ligeiramente acima de 480 unidades. **No intervalos de meses [9,12]**, o fluxo líquido é positivo, portanto *o estoque está subindo*. Durante este período, a taxa líquida aumenta, o que faz *o estoque aumentar a uma taxa crescente*, terminando com uma inclinação de

60 unidades/mês à medida que a taxa líquida atinge o seu máximo. Novamente, *o estoque ganha o mesmo valor*, recuperando seu nível inicial de 600 unidades exatamente no mês 12. **Após o mês 12 o ciclo se repete**. O exemplo ilustra a forma como o processo de acumulação cria atrasos. A entrada para o sistema é uma flutuação com um período de 12 meses, atingindo seu pico no tempo 0, 12, 24,... meses. *O estoque*, ou estado do sistema, também flutua num período de 12 meses, mas *fica atrasado em relação à taxa de entrada líquida*, atingindo seus picos nos tempos 3, 15, 27,... meses. *O retardo é precisamente um quarto de ciclo, aproximadamente três meses*. **O atraso ocorre porque o estoque só pode diminuir quando o fluxo líquido é negativo. Se o fluxo líquido for positivo e cair para zero, o estoque aumenta e atinge seu valor máximo**. Tudo o que foi descrito acima está mostrado na Figura 3.7, onde a curva de cor lilás mostra uma estimativa do processo de integração gráfica do estoque.

3.1.5 Diferenciação Gráfica

No contexto do cálculo diferencial e integral, lembramos que o inverso da integração é a diferenciação, mais exatamente, diferenciação é o cálculo da taxa líquida de variação de uma função a partir de sua trajetória, veja Capítulo 1. No contexto da dinâmica de um sistema, dado o gráfico de um estoque, é sempre possível inferir a taxa líquida de variação e representá-la graficamente. Tal como no caso da integração, existem métodos analíticos para calcular a taxa líquida de um estoque se a função que descreve a trajetória do estoque for conhecida. Entretanto, no caso dos modelos dinâmicos nenhuma função analítica para os estoques é previamente conhecida, portanto o objetivo principal é desenvolver a habilidade de diferenciação gráfica, mais exatamente temos a seguir a seguinte definição.

Definição 21. *A diferenciação gráfica é o processo que relaciona a dinâmica de estoques e fluxos a partir do gráfico do estoque, de tal forma que conhecendo o comportamento dos*

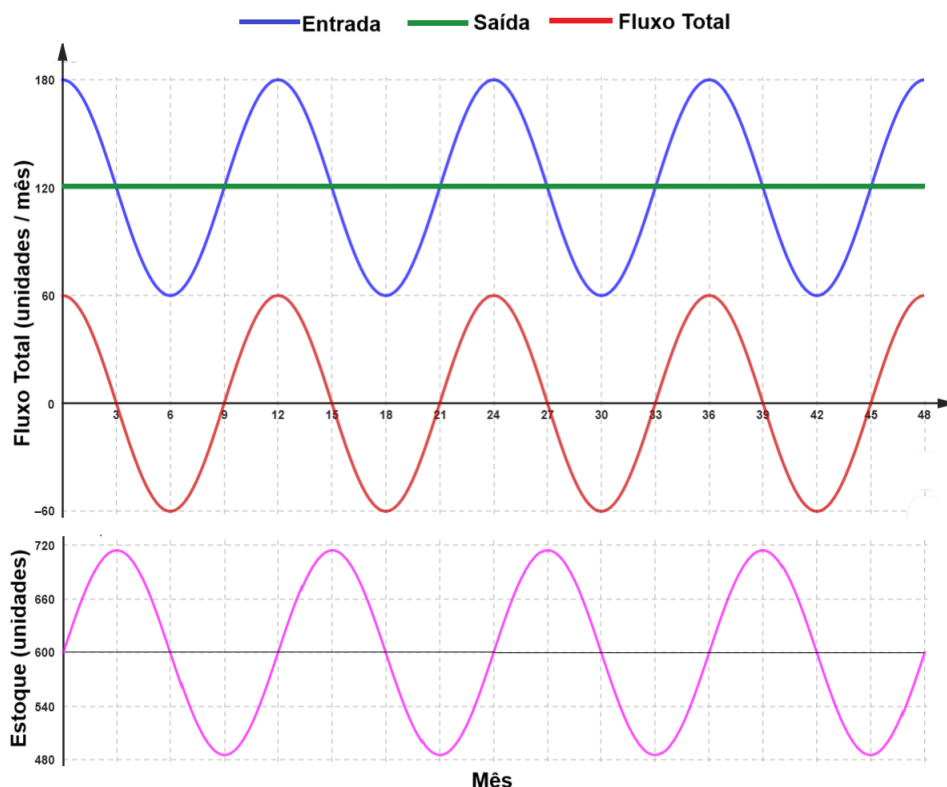


Figura 3.7: O Processo de Integração Gráfica. A curva de cor lilas representa o estoque da dinâmica do sistema.

estoques é possível prever o comportamento do fluxo total.

Observação 9.

- *O processo de diferenciação gráfica é o cálculo da taxa líquida de variação de um estoque a partir de sua trajetória.*
- *A inclinação de uma linha tangente a qualquer ponto da trajetória do estoque é igual à taxa líquida de variação do estoque naquele ponto. A inclinação da trajetória do estoque é a derivada do estoque.*

Na Figura 3.8 abaixo, uma representação hipotética da inclinação da trajetória do estoque no tempo t_1 é L_1 , então a taxa líquida em $t_1 = L_1$. No tempo t_2 , a inclinação do estoque é maior, de modo que a taxa neta em $t_2 = L_2$ é maior que L_1 . O *estoque aumenta a uma taxa crescente*, de modo que a *taxa líquida é positiva e crescente*.

O processo de diferenciação gráfica é direta, não precisa de alguma prévia apresentação, basta estimar a inclinação do estoque em cada momento e representado em um gráfico da taxa líquida. O exemplo a seguir fornece o desenvolvimento do processo.

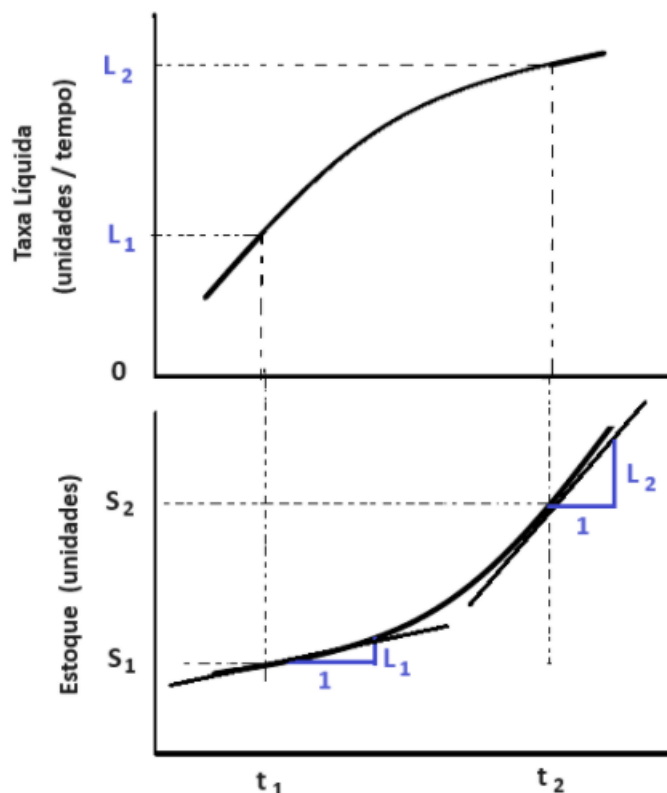


Figura 3.8: Representação gráfica de um estoque, exemplo hipotético.

Exemplo 16. A trajetória de um estoque é mostrada na Figura 3.9. Determine o comportamento de sua taxa líquida por diferenciação gráfica. Não use computador.

Solução: O estoque inicial é de 50 unidades. Durante a primeira metade $[0 ; 2,5]$ do intervalo de tempo $[0 ; 5]$, o estoque aumenta linearmente, de modo que a taxa líquida durante esse intervalo é positiva e constante. O estoque aumenta de 50 para 100 unidades em 2,5 unidades de tempo, então a **taxa líquida (a inclinação do estoque) é de 20 unidades por unidade de tempo**, na primeira metade. Na segunda metade $[2,5 ; 5]$ do intervalo $[0 ; 5]$, o estoque começa a diminuir linearmente e repentinamente de 100 para 0 unidades em 2,5 unidades de tempo, então a **taxa líquida (a inclinação do estoque é negativa) é de -40 unidades por unidade de tempo**. Análises no intervalo de tempo $(5 ; 10]$; o estoque começa a aumentar repentinamente na primeira metade de tempo e diminuir na outra metade. No tempo 5, o estoque começa a aumentar repentinamente. Desenhar uma linha de inclinação α que aproxima à tangente à curva de estoque no tempo 5, sendo essa linha a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 1,25 e 50, dá uma estimativa da inclinação de $40 = \tan \alpha = \frac{50}{1,25}$ unidades/tempo. **A taxa líquida, portanto, aumenta de -40 unidades/tempo no instante anterior ao início do tempo 5 para +50 unidades/tempo logo após seu início.** No intervalo $(5 ;$

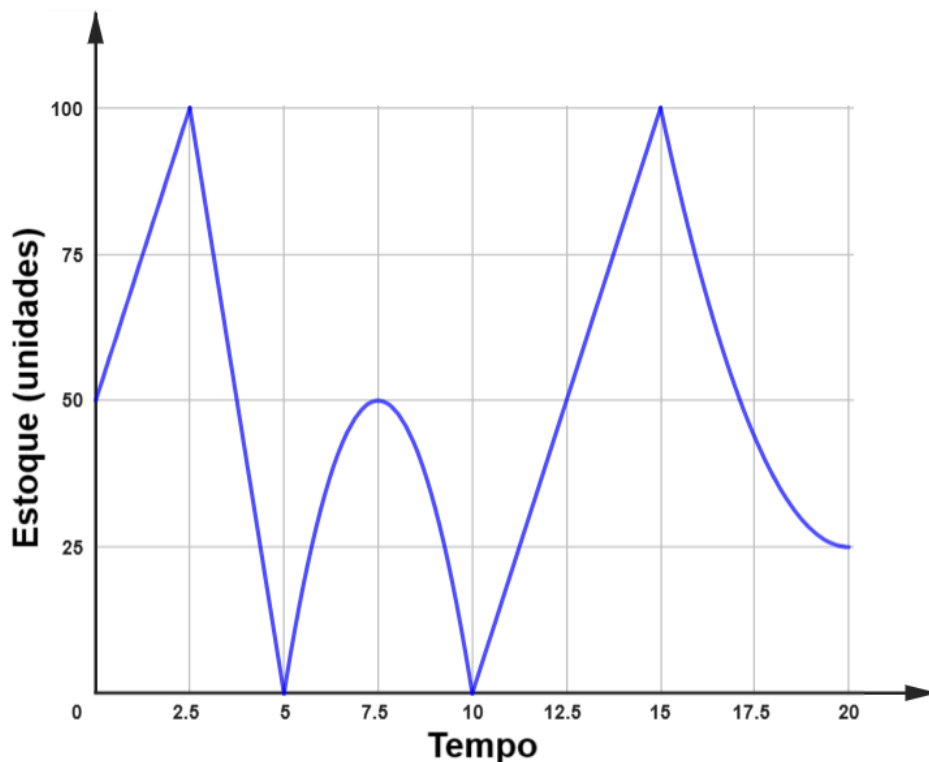


Figura 3.9: Representação gráfica da diferenciação (taxa líquida) a partir da integração (estoque). A inclinação da trajetória do estoque é chamada de derivada do estoque.

7,5], o estoque aumenta a uma taxa decrescente, pelo que **a taxa líquida é positiva, mas decrescente**. No **tempo 7,5**, o estoque atinge o máximo, então a **taxa líquida é zero**. Não há distorções ou solavancos na trajetória do estoque, o que implica um declínio constante e linear na **taxa líquida de 40 unidades/tempo no tempo 5 para zero no instante 10**. No **intervalo [7,5 ; 10]** o estoque está caindo. No instante 10, está caindo rapidamente; a inclinação de uma linha tangente à trajetória do estoque no instante 10 tem uma inclinação de -40 unidades/tempo. Novamente, não há distorções na trajetória, portanto a **taxa líquida cai linearmente de zero no instante 7,5 para -40 unidades/tempo no instante 10**. No **intervalo (10 ; 15]**, o estoque cresce repentinamente de forma linear a uma taxa líquida positiva constante. O estoque aumenta de 0 para 100 unidades em 20= $\tan \beta = \frac{100}{5}$ unidades/tempo, onde β é o ângulo de inclinação da reta que liga os pontos (10;0) e (15;100). **A taxa líquida, portanto, aumenta de -40 unidades/tempo no instante anterior ao início do tempo 10 para +20 unidades/tempo logo após seu início** permanecendo constante até o tempo 15. No intervalo de tempo **(15 ; 20]**, o estoque diminui a uma taxa crescente, pelo que **a taxa líquida é negativa, mas crescente**. Após do tempo de início 15 podemos desenhar uma linha de inclinação θ que aproxima à tangente à curva de estoque no tempo

15, sendo essa linha a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 75 e 2,5, dá uma estimativa da inclinação de $-30 = -\tan \theta = \frac{75}{2,5}$ unidades/tempo. **A taxa líquida, portanto, diminui de 20 unidades/tempo no instante anterior ao início do tempo 15 para -30 unidades/tempo crescendo linearmente até chegar a 0 por unidade de tempo no instante 20.**

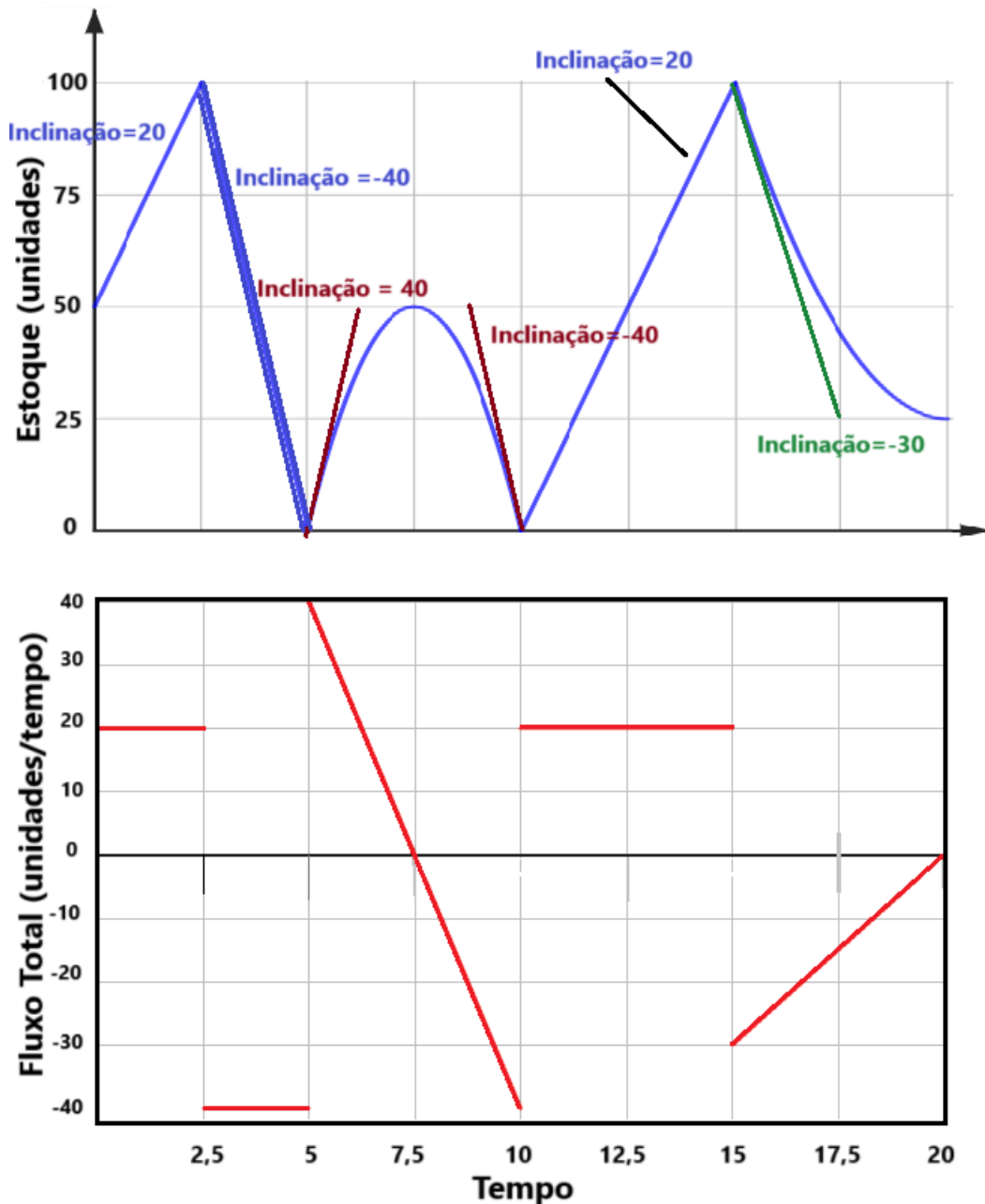


Figura 3.10: Representação gráfica do processo de diferenciação (taxa líquida) a partir da estoque.

Exemplo 17. A Figura 3.11, mostra a representação gráfica do estoque de um produto ao longo do tempo, calcule as taxas de fluxo total usando o método de diferenciação gráfica.

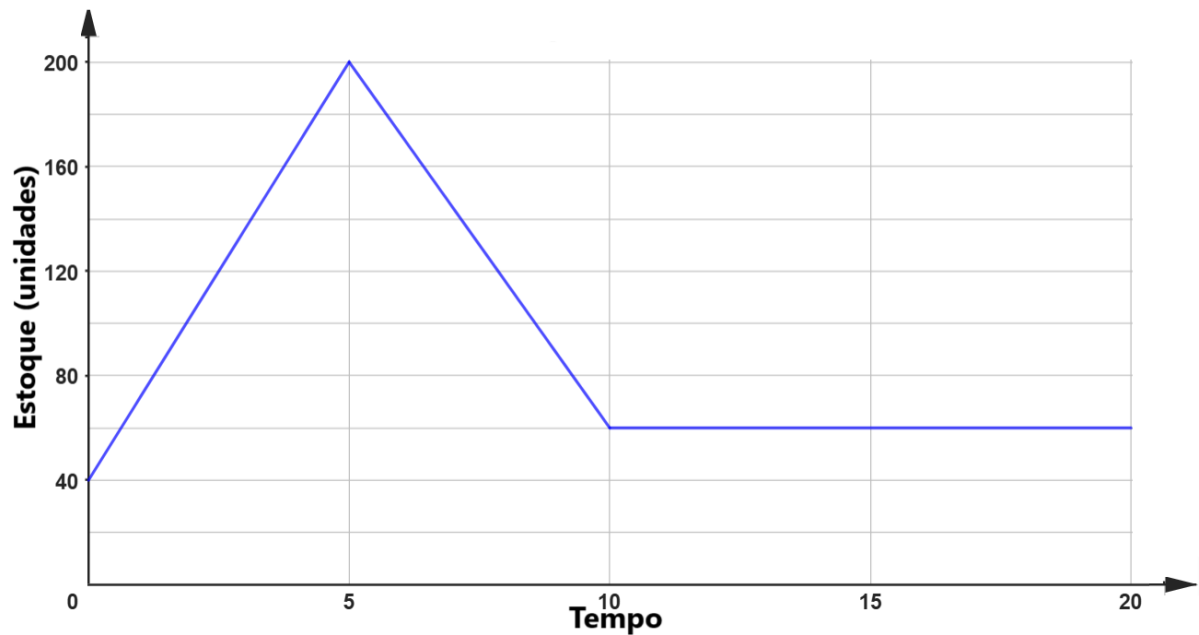


Figura 3.11: Representação gráfica do estoque do Exemplo 17.

Solução: Da Figura 3.11 temos o seguinte relato:

O estoque inicial é de 40 unidades. Durante o intervalo de tempo $[0,5]$, o estoque aumenta linearmente, de modo que a taxa líquida durante esse intervalos é constante e positiva. O estoque vai se acumulando de 40 para 200 unidades em 5 unidades de tempo, então a **taxa líquida (a inclinação do estoque é positiva)** é de $32 = (200 - 40) / 5$ unidades por unidade de tempo.

Intervalo de tempo $(5,10]$; nesse intervalo o estoque começa a diminuir repentinamente de forma linear de 200 para 60 unidades em 5 unidades de tempo, então a **taxa de fluxo total (a inclinação do estoque é negativa)** é de $-28 = -140 / 5$ unidade/tempo.

No intervalo de $(10,20]$ o estoque permanece constante e igual a 60 unidades, o que significa que o **fluxo total é constante e igual a zero**. A Figura 3.12 mostra o as taxas de fluxo total usando o processo de diferenciação gráfica.

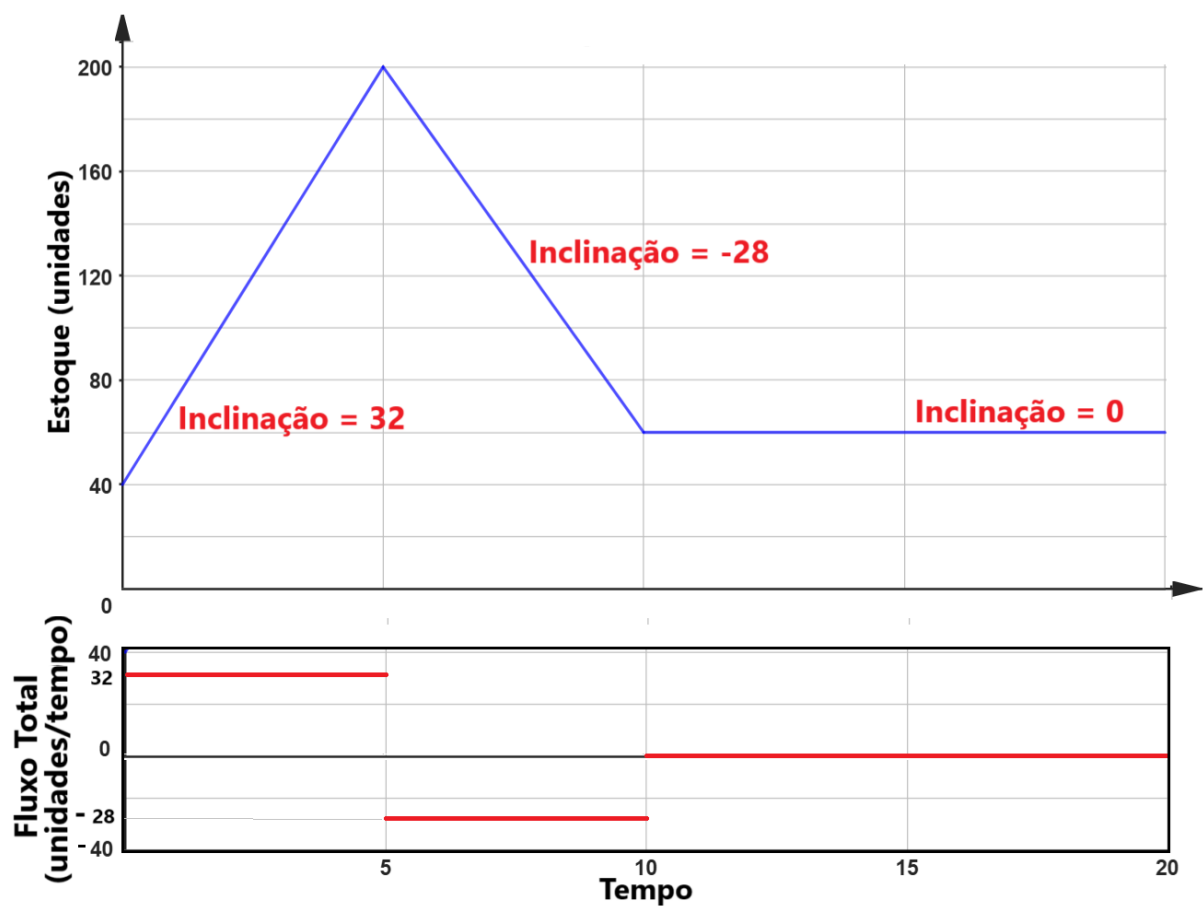


Figura 3.12: Representação gráfica do processo de diferenciação a partir da estoque do Exemplo 17.

Capítulo 4

Proposta de Sequência Didática: Processos de Integração e Diferenciação Gráfica no Ensino Médio

Vimos no Capítulo 3 que o processo de Integração e Diferenciação Gráfica representa um primeiro cultivo no ensino de integração e diferenciação de funções, pelo menos no aspecto intuitivo. Colocando como instrumento didático os estoques e fluxos, conjecturamos que é possível desenvolver a intuição desses conceitos através desses processos gráficos e preparar ao aluno de Ensino Médio a entender e usar os conceitos de derivadas e integrais presentes na disciplina de Cálculo.

Neste capítulo, colocaremos em prática a metodologia de Dinâmica de Sistemas abordada nessa dissertação. Propomos uma sequência didática focada no desenvolvimento da intuição dos conceitos de derivada e integral por meio dos processos gráficos de diferenciação e integração. Partindo da base estabelecida nos capítulos anteriores, onde exploramos as taxas de variação e acumulação de grandezas, nosso objetivo é guiar o aluno do Ensino Médio na construção de uma compreensão mais profunda e intuitiva sobre como esses conceitos matemáticos se aplicam a situações concretas.

Ao longo deste capítulo, utilizaremos os conceitos de estoques e fluxos como ferramentas didáticas centrais. Essa abordagem é fundamentada na metodologia de dinâmica de sistemas, que foi apresentada no Capítulo 2. Através dessa metodologia, os alunos serão desafiados a explorar e entender como a taxa de variação (derivada) e o acúmulo de grandezas (integral) podem ser representados graficamente, sem a necessidade de formalismos

excessivos, mas com uma base sólida que favorece a compreensão intuitiva.

A proposta didática será estruturada de modo a incentivar a exploração ativa e a reflexão dos alunos, utilizando gráficos, simulações e exemplos práticos para reforçar a relação entre os conceitos e suas aplicações no mundo real. Essa abordagem visa não apenas preparar o aluno para a compreensão dos conceitos de Cálculo, mas também tornar esses conceitos mais acessíveis e interessantes, conectando-os com situações do cotidiano e problemas práticos. Agora, vamos iniciar a sequência didática, que abordará as etapas de indução dos conceitos de derivada e integral por meio de atividades que envolvem visualizações gráficas e a modelagem de sistemas dinâmicos.

4.1 Proposta de Sequência didática sobre a indução dos conceitos de derivada e integral usando DS

Objetivo:

Induzir os conceitos de derivada e integral de maneira intuitiva e compreensível no ensino médio, utilizando abordagens teóricas e computacionais da dinâmica de sistemas.

Justificativa:

A utilização de abordagens teóricas e computacionais da dinâmica de sistemas visa preparar os alunos para compreenderem intuitivamente os conceitos de derivada e integral no ensino médio, antecipando uma base sólida para estudos mais avançados no ensino superior. Esta metodologia não apenas facilita a compreensão dos fundamentos matemáticos, mas também fomenta o interesse pela matemática aplicada, proporcionando uma transição suave para um aprendizado mais profundo e abstrato nas disciplinas futuras.

Metodologia:

A sequência didática foi desenvolvida para uma turma do 2º ano do ensino médio, consistindo em 07 aulas adaptadas para o itinerário formativo Núcleo de Inovação Matemática do novo ensino médio. A proposta de ensinar derivada e integral através da dinâmica de sistemas neste contexto se justifica pela atual relevância dos princípios da dinâmica de sistemas, pela integração interdisciplinar que fomenta, pela preparação dos alunos para estudos superiores e para o mercado de trabalho, além de estimular a curiosidade e a inovação.

AULA 1: O Conceito de Sistema

Nesta primeira aula serão ensinados os conceitos preliminares sobre sistemas, componentes de um sistema, características e propósitos de um sistema com exemplos diversificados que levem em conta a realidade onde os estudantes estão inseridos.

Definição 22. *Um sistema é um conjunto de elementos inter-relacionados que trabalham juntos para alcançar um objetivo ou finalidade específica. Esses elementos podem ser físicos, como partes de uma máquina, ou abstratos, como componentes de um processo organizacional. A chave é que todos esses elementos devem interagir e cooperar de forma coordenada para que o sistema funcione eficazmente e alcance o seu propósito.*



Figura 4.1: Fonte: Adaptação de <https://www.estudoadministracao.com.br/ler/20-11-2014-o-que-significa-sic/>.

Exemplo 18 (Sistema biológico). *O corpo humano é um sistema composto por vários sistemas menores, como o sistema circulatório, respiratório e digestivo, que interagem para manter a saúde e o funcionamento do organismo.*

Exemplo 19 (Sistema informático). *Um computador é um sistema que inclui hardware (como o processador e a memória) e software (como o sistema operacional e os aplicativos), trabalhando em conjunto para processar dados e realizar tarefas.*

Exemplo 20 (Sistema Educacional). *Inclui escolas, professores, alunos, currículos e métodos de ensino.*

Exemplo 21 (Sistema social). *Uma organização ou empresa é um sistema social composto por pessoas, estruturas e processos que colaboram para alcançar metas e objetivos empresariais.*

Cada sistema tem sua própria dinâmica e pode ser analisado em termos de variáveis de entrada e saída, processos, além das interações entre seus componentes.

Componentes de um sistema

Um sistema é composto por elementos, interconexões e propósitos, por exemplo, no caso de um time de futebol: os elementos básicos são os jogadores e o técnico, os elementos estão interconectados e com um propósito comum: ganhar a partida.

Características de um sistema

No exemplo do time do futebol, se mudarmos os jogadores de um time ou o técnico, isso pode afetar de diversas maneiras o comportamento e a performance do time. Imagine que um time de futebol é um sistema. Aqui estão algumas características fundamentais dos sistemas, explicadas de forma simples com o exemplo do time.

- **São dinâmicos:** Porque mudam com o tempo. Por exemplo no time de futebol, se trocamos jogadores ou o técnico, o time muda e pode jogar de forma diferente em cada jogo produzindo resultados diferentes.
- **São acoplados:** As partes estão conectadas e interagem entre si. No time de futebol, os jogadores e o técnico trabalham juntos. Mudanças na composição do time por um ou mais jogadores podem afetar o desempenho dos outros.
- **São governados por retroalimentação:** As ações têm consequências que podem afetar quem as tomou. Assim, se um jogador faz uma jogada ruim, o técnico pode mudar a estratégia. O resultado da mudança pode influenciar a próxima decisão do técnico.
- **Podem ser não linear:** O efeito pode ser muito maior ou menor do que a causa. Em consequência, trocar um jogador pode, às vezes, ter um impacto muito grande no desempenho do time, ou nenhum impacto significativo, dependendo de muitas outras variáveis.
- **O estado atual depende dos anteriores:** O que acontece agora é influenciado pelo passado. Assim, se o time teve uma série de derrotas, isso pode afetar a moral e o desempenho dos jogadores em jogos futuros.
- **A estrutura interna determina o comportamento:** Como o sistema é organizado afeta como ele funciona. Dessa maneira, a forma como o time está organizado e a estratégia do técnico influenciam como o time joga e se comporta em campo.

- **Complexidade além da compreensão:** Às vezes, o sistema é tão complexo que é difícil entender completamente. No time de futebol, a interação entre jogadores, técnico, e outros fatores como lesões e condições do jogo pode ser tão complexa que é difícil prever exatamente como o time vai se sair.

Propósito de um Sistema

O propósito de um sistema pode variar amplamente dependendo do contexto em que o termo é usado. No entanto, de forma geral, um sistema é projetado para alcançar um objetivo específico ou para facilitar a realização de determinadas tarefas.

Donella Meadows (2000), ao discutir os sistemas, faz uma consideração importante sobre o propósito desses sistemas. Ela afirma: “*O propósito de um sistema é difícil de ser notado. A função ou propósito de um sistema não é necessariamente dito, escrito ou expresso explicitamente. Propósitos podem ser deduzidos do comportamento, e não da retórica e nem de metas definidas*”.

De acordo com Meadows, o propósito de um sistema não é algo que está sempre claramente expresso. O que um sistema realmente busca pode ser entendido mais pelas suas ações e pelos resultados que ele gera, e não pelas metas ou intenções que ele declara. Ou seja, o comportamento do sistema é que revela seu verdadeiro propósito. Às vezes, o que o sistema diz que quer fazer não corresponde ao que ele efetivamente realiza. Por exemplo, uma empresa pode afirmar que seu objetivo é oferecer produtos de qualidade para melhorar a vida das pessoas. No entanto, se, na prática, ela se concentra em maximizar seus lucros e reduz a qualidade para reduzir custos, o comportamento real da empresa pode sugerir que seu verdadeiro propósito é outro, como o lucro, e não o bem-estar dos consumidores.

Alguns exemplos de sistemas com seus respectivos componentes, interconexões e propósitos

Exemplo 22. *Sistema solar.*

Elementos: Sol, planetas, luas, asteroides.

Interconexões: Planetas orbitam o Sol, luas orbitam planetas, asteroides estão em cinturões entre planetas.

Propósitos: Regulam a gravidade e a órbita dos corpos celestes, fornecem luz e calor, influenciam a formação de planetas.

Exemplo 23. *Sistema de esgoto urbano.*

Elementos: Tubos de esgoto, estações de tratamento, fossas sépticas.

Interconexões: Águas residuais são coletadas e transportadas para tratamento.



Figura 4.2: Fonte: Adaptação de <https://brasilescola.uol.com.br/geografia/sistema-solar.htm>.

Propósitos: Remoção de resíduos e poluentes, proteção da saúde pública, preservação do meio ambiente.

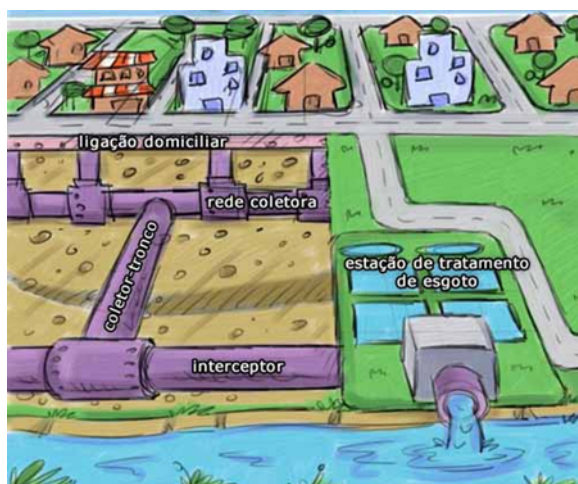


Figura 4.3: Fonte: Adaptação de <https://www.saaec.com.br/esgoto/o-que-e-esgoto/>.

Exemplo 24. *Sistema de Educação.*

Elementos: Escolas, professores, alunos, currículos.

Interconexões: Professores ensinam alunos, currículos guiam o aprendizado.

Propósitos: Formação acadêmica e social dos alunos, preparo para o mercado de trabalho, desenvolvimento pessoal.

Formação de grupos: Após esse último exemplo, recomenda-se a formação de grupos para realizarem as tarefas correspondentes. A quantidade de grupos formados levará em consideração o número de alunos da turma. Recomenda-se 4 ou 5 integrantes por grupo.

Tarefa 1: Cada grupo formado deverá apresentar, na próxima aula, um exemplo de sistema em que sejam identificados: elementos, interconexões e propósitos.



Figura 4.4: Fonte: Adaptação de <https://profseducacao.com.br/artigos/>.

AULA 2: Introdução ao Pensamento Sistêmico

Nessa aula, retornaremos com os resultados das tarefas sobre sistemas e discutiremos o pensamento sistêmico. Nosso objetivo é garantir que os alunos compreendam o que é o pensamento sistêmico, sua relevância e como ele pode ser aplicado para resolver problemas complexos do mundo real utilizando a matemática. Este enfoque proporcionará aos alunos uma visão ampliada sobre como os sistemas funcionam, como estão interligados e como podem ser abordados matematicamente para encontrar soluções eficazes. O pensamento sistêmico é uma abordagem que nos permite enxergar a totalidade das interações dentro de um sistema, em vez de nos concentrarmos apenas nas suas partes isoladas. Ele nos ajuda a identificar padrões e relacionamentos que moldam o comportamento do sistema ao longo do tempo, facilitando a compreensão das dinâmicas complexas que governam sistemas em diversos contextos. De acordo com Peter Senge (1990), em *A Quinta Disciplina*, "O pensamento sistêmico é a disciplina que permite ver as inter-relações em vez de coisas isoladas, ver os padrões de mudança ao longo do tempo e entender como a estrutura de um sistema cria os resultados que ele gera". Ou seja, o pensamento sistêmico nos permite enxergar o todo e compreender como as interações entre as partes de um sistema influenciam seu comportamento, muitas vezes de maneira inesperada e complexa.

Definição 23 (Pensamento Sistêmico). *O pensamento sistêmico é uma abordagem matemática para entender como as coisas funcionam no contexto de sistemas maiores ou mais complexas. Ele se concentra em como as partes de um sistema interagem e se influenciam mutuamente.*

Benefícios do Pensamento Sistêmico

- **Resolução de Problemas Complexos:** Melhora a capacidade de lidar com problemas complexos e multifacetados, permitindo soluções mais eficazes e integradas.



Figura 4.5: <https://www.ebrccoaching.com.br/a-importancia-do-pensamento-sistemico-nas-empr>

- **Planejamento e Estratégia:** Auxilia no planejamento e na formulação de estratégias que consideram as interações e os efeitos de longo prazo.
- **Inovação e Melhoria Contínua:** Facilita a identificação de oportunidades para inovação e melhoria contínua ao compreender como as mudanças afetam o sistema como um todo.

Definição 24 (Modelos Causais). *São representações visuais que ajudam a entender como diferentes partes de um sistema estão conectadas e como uma mudança em uma parte pode afetar outras. Esses modelos são apresentados através de diagramas que descrevem uma situação ou problema com base nas observações e no conhecimento de quem está analisando o sistema.*

Definição 25 (Relações Causais). *As relações Causais descrevem como uma variável afeta outra dentro de um sistema. Essas relações podem ocorrer de duas formas principais:*

- *Diretas: Quando uma variável influencia diretamente outra.*
- *Feedbacks: Quando a influência entre variáveis cria ciclos de retroalimentação, os quais podem ser: positivo (a mudança inicial reforça e amplia a mudança original) e negativo (a mudança inicial provoca efeitos que ajudam a estabilizar o sistema)*

Exemplo 25. *Se aumentamos a quantidade (fluxo) de água que entra em um tanque, o nível de água (armazenado) no tanque aumenta diretamente, temos uma relação positiva. Mais nascimentos aumentam a população, o que pode levar a ainda mais nascimentos, criando um ciclo de crescimento acelerado, temos uma relação causal do tipo feedback positivo. Se a população aumenta, a mortalidade dos indivíduos reduz a população e ajuda a manter o sistema mais equilibrado, estamos ante a presença de um feedback negativo.*

O que é um diagrama causal?

Um diagrama causal é uma ferramenta que ajuda a visualizar como diferentes coisas estão relacionadas e como uma mudança em uma coisa pode afetar outra. Assim, como exemplos de diagramas causais temos:

a) Ciclo de Realimentação Positiva

Características: Nesse tipo de ciclo, um aumento em uma variável causa um aumento adicional na mesma variável. Isso ocorre porque o efeito inicial reforça a mudança, criando um ciclo de reforço.

Exemplo 26. Suponha que desejamos representar a relação entre "nascimentos" e "população". O diagrama causal inicial apresentado na Figura xx ilustra que a taxa de nascimentos afeta o tamanho da população, e, por sua vez, o tamanho da população influencia a taxa de nascimentos.

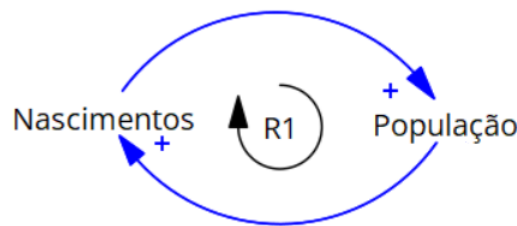


Figura 4.6: Feedback positivo do Exemplo 26.

São definidas as Variáveis:

Nascimentos: Refere-se à taxa de novos nascimentos.

População: O número total de pessoas em uma determinada área.

Interpretando as relações causais entre as variáveis:

É claro que se os nascimentos aumenta a população cresce, estamos ante um feedback positivo. O que é interpretado no Diagrama Causal da Figura 4.6 através da seta com sinal positivo $\curvearrowright$. Analogamente, se a população aumenta, haverá mais nascimentos porque há mais pessoas.

Como foi visto na Capítulo 2, matematicamente, ciclos positivos são as estruturas básicas responsáveis pelo crescimento exponencial. Um bom exemplo é a caderneta de poupança.

Exemplo 27. Imagine que você abriu uma conta de poupança e fez um depósito de um capital inicial C_0 de R\$ 1000,00, com uma taxa de juros (i) de 12% ao ano. Assim, ao final do primeiro ano você terá $1000,00 + 0,12 \cdot 1000 = 1120,00$. No

segundo ano você terá $1120 + 0,12 \cdot 1120 = 1254,40$ e assim sucessivamente. Em quanto tempo levará para dobrar o capital inicial?

Solução: A função exponencial tem uma característica interessante: em intervalos de tempos iguais ocorrem dobrar de valores. Significa que se demorou 6 anos para seu capital passar de R\$ 1000,00 para R\$ 2000,00, demorará mais 6 anos para dobrar de R\$ 2000,00 para R\$ 4000,00. Observe que nos primeiros 20 anos o seu patrimônio crescerá lentamente, mas depois desse tempo começa ter um crescimento notável, como pode ser observado na seguinte Tabela (a) e Gráficos (b e c) da Figura 4.7.

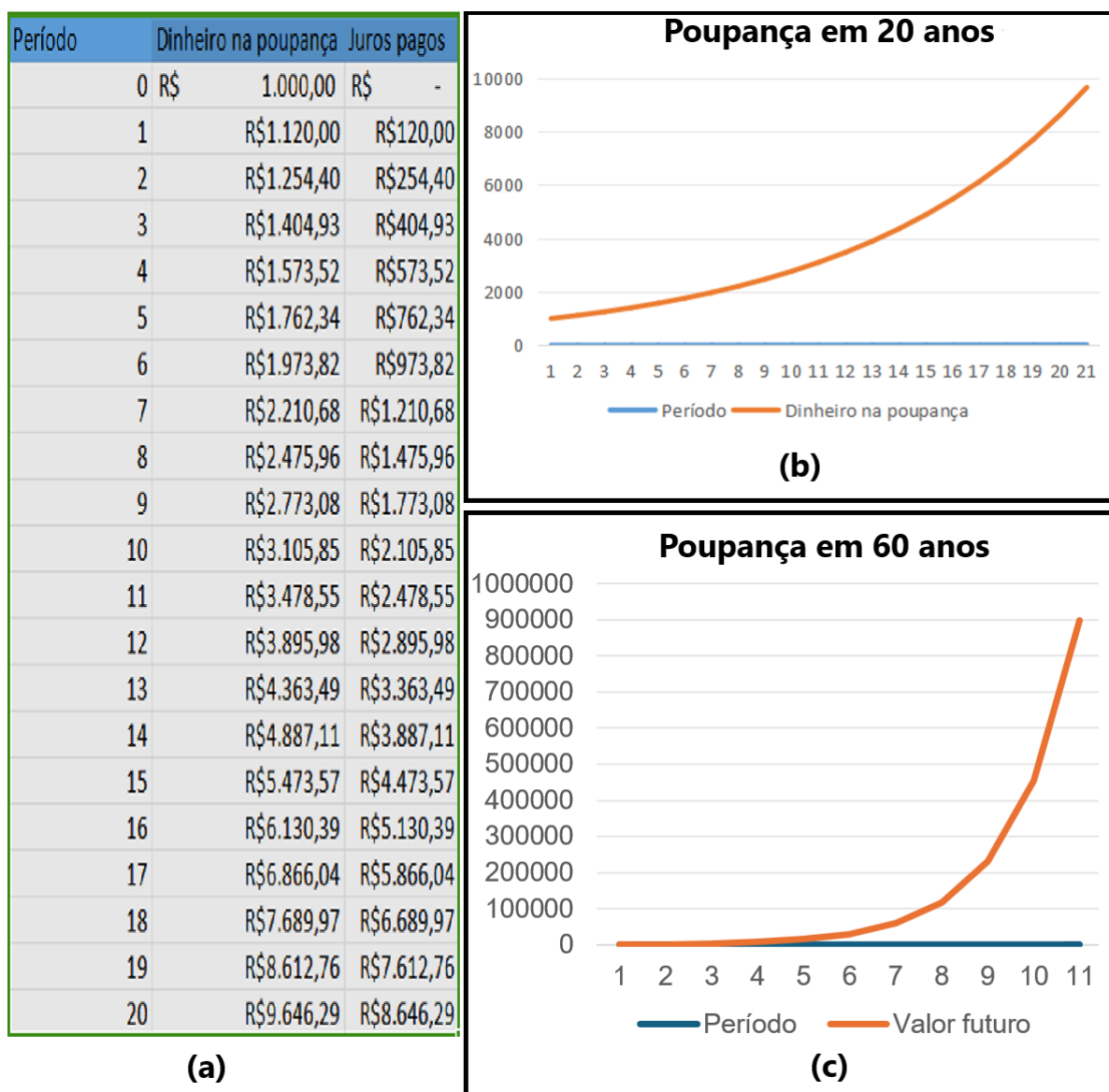


Figura 4.7: Feedback positivo no crescimento exponencial do Exemplo 26.

b) Ciclo de realimentação negativa

Um ciclo de realimentação negativa é um tipo de feedback onde uma mudança em uma variável leva a uma série de efeitos que, no final, causam uma redução na variável original. Em outras palavras, um aumento em uma variável pode eventualmente levar a uma diminuição, ou uma diminuição pode levar a um aumento, ajudando a manter o sistema estável e equilibrado. Os ciclos de realimentação negativa representam também ações que conduzem à estabilização de um sistema, buscando atingir uma meta. Eles surgem sempre que há uma diferença entre o estado atual e o estado desejado, ou seja, o objetivo a ser alcançado. Esses ciclos ajustam continuamente o sistema, reduzindo a diferença entre o estado atual e o estado desejado, promovendo assim a estabilidade e o equilíbrio.

Exemplo 28. *Representação do diagrama causal das relações entre as variáveis fome e consumo de comida.*

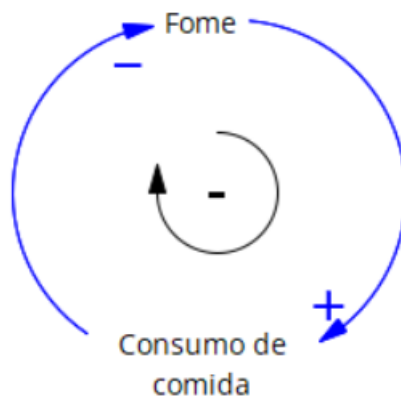


Figura 4.8: Feedback negativo entre as variáveis fome e consumo de comida do Exemplo 28.

São definidas as Variáveis:

Fome: É a necessidade fisiológica de comida, que surge como um sinal de que o corpo precisa de nutrientes.

Consumo de Comida: A quantidade de comida que você ingere.

Interpretando as relações causais entre as variáveis:

É claro que quando uma pessoa tem mais fome, aumenta a vontade de comer, estamos diante um feedeback positivo. O que é interpretado no Diagrama Causal da Figura 4.8 através da seta com sinal positivo $\curvearrowright$. Analogamente, a medida que uma pessoa come, sua fome diminui. Portanto, um aumento no consumo de comida leva a uma diminuição na fome, isso é representado pela seta $\curvearrowright$ com sinal negativo.

Observação 10. *O sinal “-” não indica que a variável destino da seta sempre será diminuída, mas sim que terá um comportamento contrário ao da variável de origem.*

Exemplo 29. *[Feedback positivo e negativo] O crescimento de uma determinada população de indivíduos é afetada pelo número de nascimentos e mortes por ano. Encontre o modelo causal das variáveis que relacionam a dinâmica do crescimento da população.*

Solução:

Identificamos as variáveis **população**, **nascimentos** e **mortes**.

Relações Causais:

- **Nascimentos e População:** Nascimentos aumentam a população. Quando mais pessoas nascem, a população cresce.
- **Mortes e População:** Mortes diminuem a população. Quando pessoas morrem, a população diminui.
- **População e Nascimentos:** População pode influenciar o número de nascimentos. Em uma população maior, pode haver mais nascimentos devido ao maior número de pessoas.
- **População e Mortes:** População também pode influenciar a taxa de mortes. Em uma população maior, pode haver mais mortes simplesmente devido ao maior número de pessoas.
- **Feedback Positivo:** Aumentos contínuos em nascimentos levam a um crescimento exponencial da população, que por sua vez leva a mais nascimentos. Esse ciclo pode levar a um crescimento acelerado da população, se não for controlado. Em geral, um ciclo de realimentação positiva equivale a tendência de crescimento (ou decrescimento) e é representado por $\odot$ com o sinal $+$ entre o círculo.
- **Feedback Negativo:** Aumentos na população podem resultar em mais mortes, que então diminuem a população e estabilizam o sistema. Esse ciclo ajuda a manter a população em um intervalo mais estável e controlado. Em geral, um ciclo de realimentação negativa equivale a tendência de estabilidade (ou equilíbrio) e é representado por $\ominus$ com o sinal $-$ entre o círculo. Em resumo as relações causais analisadas são especificadas no Diagrama Causal da Figura 4.9.

Tarefa 2. Na próxima aula, cada grupo deverá apresentar um exemplo de ciclo de realimentação positiva e um exemplo de realimentação negativa, identificando as variáveis e as relações causais.

AULA 3: Estoque e Fluxo

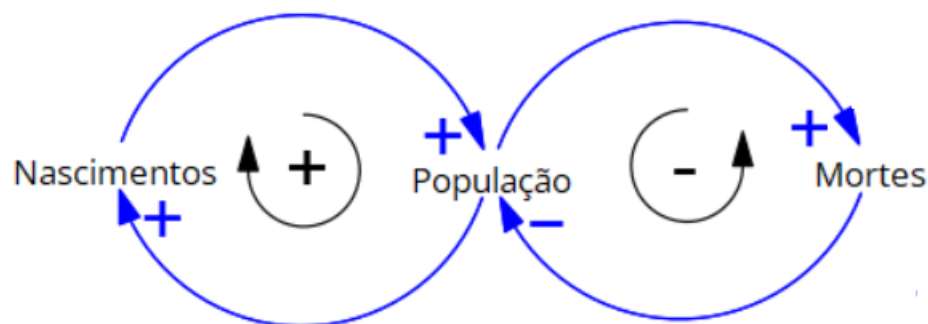


Figura 4.9: Feedback positivo e negativo entre as variáveis nascimento, população e morte do Exemplo 29.

Nesta aula, focaremos na introdução dos conceitos de estoques e fluxos. Para consolidar a compreensão desses conceitos, utilizaremos o “Jogo do mamute”, uma ferramenta prática e interativa.

Dinâmica de Estoque e Fluxo

Definição 26 (Estoque). *O estoque representa a quantidade de alguma grandeza que está acumulado em um determinado momento.*

O estoque pode ser qualquer recurso, como água em um tanque, dinheiro em uma conta bancária ou mesmo a quantidade de pessoas em uma cidade.

Definição 27 (Fluxo). *O fluxo representa a taxa de mudança do estoque ao longo do tempo. É a velocidade com que uma grandeza entra ou sai do estoque.*

Exemplo 30. *Em um tanque que dispõe de uma entrada e uma saída, o fluxo representa a quantidade de água que entra ou sai de um tanque por minuto, o dinheiro que entra ou sai de uma conta bancária por mês, ou a quantidade de pessoas que se mudam para dentro ou para fora de uma cidade por ano, entre outros.*

Metáfora da Banheira: A Figura 4.10 a seguir, mostra essa ideia de um estoque como sendo uma caixa de água e os fluxos de entrada e saída são as torneiras.

A Figura 4.10 acima é uma representação metafórica do estoque e fluxo. No entanto existem softwares educacionais, como o Vensim, que produz uma ilustração de estoque e fluxo, veja a Figura 4.11.

Atividade

A seguir implementaremos a atividade lúdica: **Jogo do mamute – estoque e fluxo.**

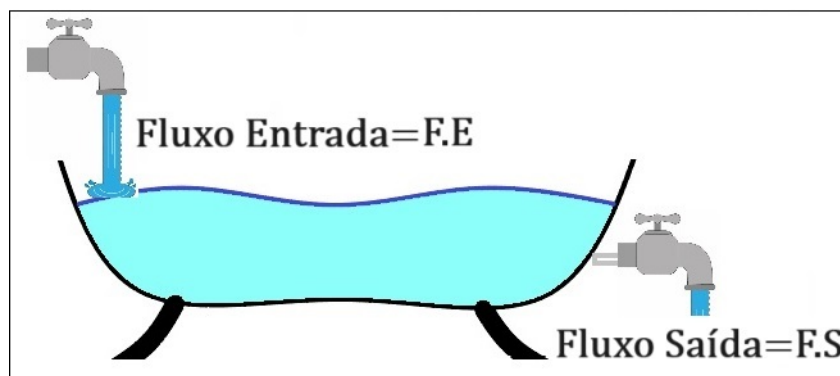


Figura 4.10: Ilustração metafórica da representação da Dinâmica de Estoque e Fluxo.

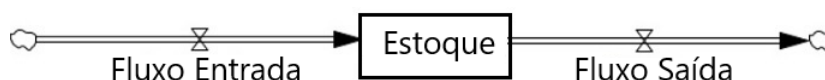


Figura 4.11: Diagrama de Estoque e Fluxo feito no Software educacional Vensim, representando a metáfora da banheira.

Nesta atividade, as equipes de alunos participarão de um jogo interativo que simula o gerenciamento de um rebanho de vinte mamutes. Usando dados e gráficos, os alunos rastrearão o crescimento e o declínio da população de mamutes, aplicando conceitos matemáticos fundamentais de estoque e fluxo.

Objetivos:

- Proporcionar aos alunos uma experiência prática para a aplicação e o aprofundamento de conceitos matemáticos como gráficos, probabilidade, porcentagens, frações, decaimento exponencial, além de estoque e fluxo.
- Aplicar esses conceitos para analisar dinâmicas de sistemas, fazendo conexões entre dados quantitativos e as implicações de decisões no gerenciamento de recursos.

A implementação desta atividade pretende reforçar:

- **Simulação de estoque e fluxo:** Cada equipe jogará um jogo de dados e construirá gráficos para monitorar o número de mamutes em seu rebanho. O estoque inicial é de 20 mamutes, e os fluxos incluem taxas de nascimento e mortalidade que alteram esse estoque ao longo do tempo.
- **Aplicação de conceitos matemáticos:** Os alunos utilizarão cálculos de probabilidade, porcentagens e frações para simular eventos de nascimento e mortalidade. Eles também criarão gráficos para visualizar as mudanças no estoque e analisar

Tabela 4.1: Exemplos de estoque e fluxo.

Estoque	Fluxo Entrada	Fluxo Saída
saldo da conta bancária	dinheiro depositado na conta	dinheiro retirado
pessoas de um país	imigrantes	emigrantes

como diferentes taxas de fluxo influenciam o crescimento ou declínio da população de mamutes.

- **Análise de decaimento exponencial:** Ao ajustar variáveis e probabilidades, os alunos explorarão como o decaimento exponencial pode ocorrer na população, ajudando a compreender como um estoque pode diminuir rapidamente sob certas condições.

Por meio do jogo, os alunos irão explorar a complexidade do gerenciamento de uma população, entendendo como o estoque (a quantidade de mamutes na população) e o fluxo (as taxas de nascimento e morte) interagem, e como equilibrar as taxas de entrada e saída é essencial para manter um sistema sustentável. Ao final, os alunos serão capazes de aplicar esses conceitos para analisar dinâmicas de sistemas, fazendo conexões entre dados quantitativos e as implicações de decisões no gerenciamento de recursos.

Materiais:

- 20 dados por equipe (mais alguns extras para o professor).
- Caixas de papelão para rolar os dados.
- Marcadores das mesmas duas cores para cada aluno.
- Uma cópia das regras do jogo do mamute para cada equipe.
- Cópias de duas planilhas para cada aluno: Acompanhando seu rebanho e gráfico da sua população de mamutes.

Texto Introdutório:

Mamutes lanosos foram uma vez abundantes na América do Norte, mas desapareceram há cerca de 11.000 anos. A causa de sua extinção é debatida: poderia ter sido o aquecimento do clima, uma doença desconhecida ou a pressão de predadores. A maioria dos cientistas acredita que a chegada de humanos intensificou a pressão sobre uma população já enfraquecida pelo clima quente. Caçadores humanos podem ter contribuído para a extinção

ao reduzir os mamutes a níveis críticos.

Na atividade, os alunos simularão o impacto da caça humana sobre uma população decinante de mamutes usando o "Jogo do mamute". Eles jogarão duas versões do jogo: uma sem caça humana e outra com a presença de caçadores. Comparando as curvas de extinção geradas, os alunos observarão como a caça humana acelera a taxa de extinção e entenderão melhor os padrões de comportamento populacional.



Figura 4.12: <https://revistagalileu.globo.com/ciencia/biologia/noticia/2023/04/pesquisadores-descobrem-tracos-evolutivos-inusitados-do-mamute-lanoso.ghml>

Observação 11. *Esta atividade é uma simulação. Queremos entender por que os mamutes foram extintos, mas como não podemos estudar mamutes reais na sala de aula, usaremos dados para representá-los.*

Procedimento:

1. Conversar com os alunos sobre teorias de extinção dos mamutes, discutindo possíveis causas como mudanças climáticas, doenças e caça.
2. Diga aos alunos que eles vão fingir rastrear a população de um rebanho de vinte mamutes ao longo do tempo. Então, eles vão representar graficamente a população.

Jogando o Jogo 1

3. Distribua 20 dados por equipe de alunos. Cada dado representará um mamute, então a população inicial é 20. Os alunos registram isso na planilha, acompanhando seu rebanho no Jogo 1. (Mantenha alguns dados extras disponíveis caso a população de um rebanho suba acima de 20 durante o jogo).

	Jogo 1		Jogo 2
Ano	Mamutes	Ano	Mamutes
Começo	20	Começo	20
1		1	
2		2	

4. Dê uma cópia das regras do Jogo do mamute para cada equipe ou use um projetor para explicar as regras. Cada vez que o conjunto de dados é rolado, um ano simulado passa. O número em cada dado determina o destino do mamute individual que ele representa. Para começar a jogar, sacuda e role todos os dados na caixa de papelão. Classifique os dados usando as regras na caixa abaixo.

Atribuir	Regras de Jogo 1
1	um filhote nasce
2	o mamute é morto por um predador
3	o mamute morre de fome
4	o mamute continua vivendo mais um ano
5	o mamute continua vivendo mais um ano
6	o mamute continua vivendo mais um ano

5. A precisão é muito importante, então gaste tempo suficiente estabelecendo procedimentos. Cada aluno deve rastrear a população em sua própria tabela, mas todos os membros da equipe devem concordar com os números.
- Classifique, conte e registre o número de mamutes restantes após o primeiro ano.
 - Para o segundo ano, role os dados novamente, usando apenas os mamutes que sobreviveram ao primeiro ano mais quaisquer novos bezerros. Registre os resultados.
 - Jogue e registre por 20 “anos” ou até que os mamutes se tornem extintos.

Observação 12. *como eles querem que os mamutes sobrevivam, os alunos mais jovens podem ficar tentados a trapacear e mudar os resultados dos dados. Explique que esta é uma simulação, não uma competição.*

- O objeto é semelhante a um experimento científico – se você criar certas condições, qual é o resultado?

6. Dependendo da idade dos alunos e das rotinas da sala de aula, você pode atribuir tarefas aos membros da equipe ou deixá-los escolher as tarefas entre si. Por exemplo, um aluno pode remover mamutes mortos, outro adiciona novos filhotes, um terceiro é o contador oficial e assim por diante. Alterne as tarefas para envolver todos. O aprendizado cooperativo em equipe funciona melhor quando os alunos entendem quais são suas funções.
7. Depois que os alunos terminarem de jogar, peça que eles plotem os resultados na planilha “Gráfico de sua população de mamutes”.

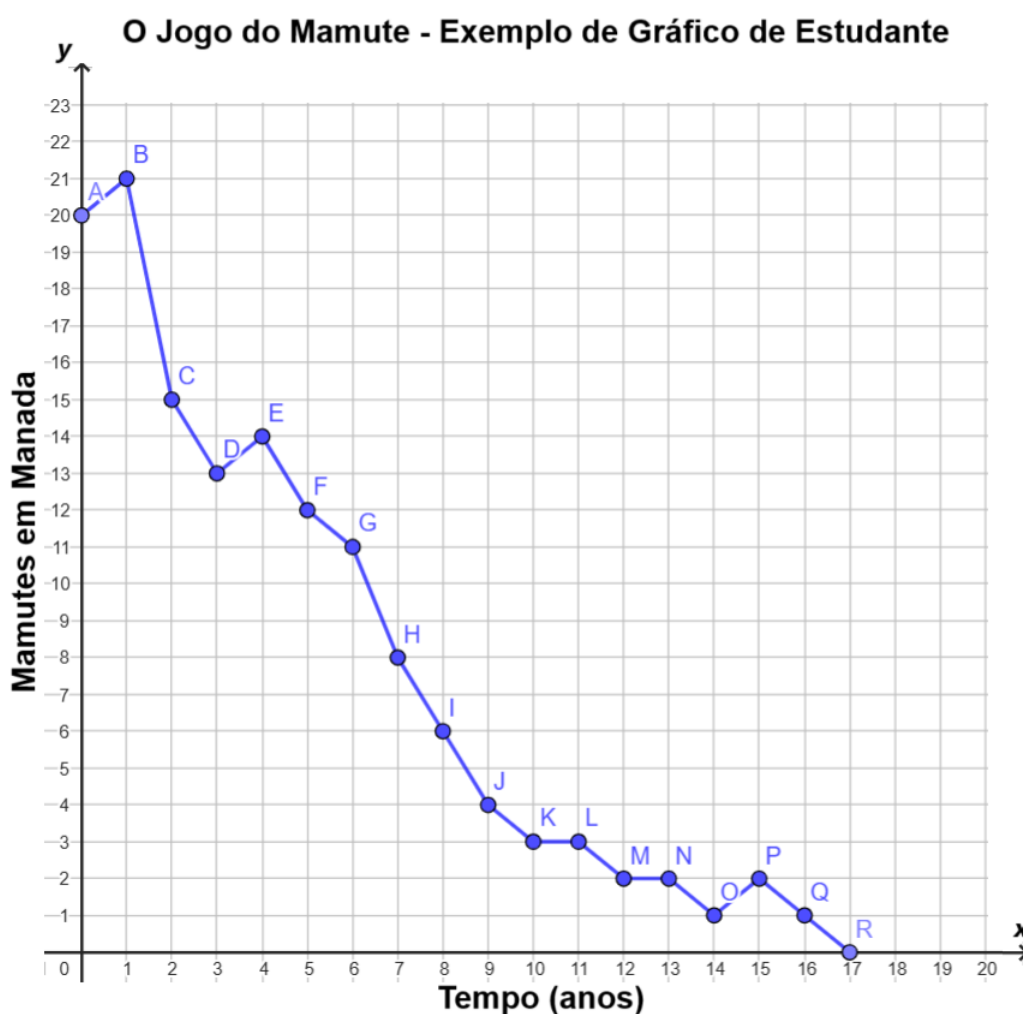


Figura 4.13: Jogo do mamute. Exemplo de um possível resultado para o Jogo 1.

Observação 13.

- Cada aluno deve representar graficamente os dados usando o mesmo lápis ou marcador de cor.

- Representar gráficos pode ser difícil para alunos mais jovens, então certifique-se de que eles estejam plotando os pontos corretamente antes de conectá-los para fazer um gráfico de linhas.
- Funciona melhor jogar o jogo primeiro e depois desenhar o gráfico.
- Os alunos desenham gráficos de linhas para que possam discernir mais facilmente padrões de comportamento ao longo do tempo.

Jogando o Jogo 2

1. Mude um dos destinos “o mamute continua vivendo mais um ano” para “o mamute é morto por um caçador”. A introdução de caçadores humanos no jogo permite que os jogadores comparem o que acontece com a população de mamutes quando a pressão de caça é aplicada.

Atribuir	Regras de Jogo 2
1	um filhote nasce
2	o mamute é morto por um predador
3	o mamute morre de fome
4	o mamute é morto por um caçador
5	o mamute continua vivendo mais um ano
6	o mamute continua vivendo mais um ano

2. Peça aos alunos para prever o que pode acontecer no Jogo 2 e explique seu raciocínio. Não importa se uma previsão está certa ou errada. As reflexões ajudam os alunos a refletirem sobre seu pensamento conforme o jogo avança? Quantos números de dados representam mortes no Jogo 2?
A fração de mortes no Jogo 2 é $3/6$ ou $1/2$. No Jogo 1 era $2/6$ ou $1/3$. Em média, quando os dados são lançados, uma fração maior do rebanho morrerá a cada ano no Jogo 2.
3. Jogue o jogo dois seguindo as novas regras. Represente graficamente os resultados em uma segunda cor no mesmo gráfico usado para o Jogo 1, conforme mostrado abaixo.

Tarefa 3: Jogando “Jogo do mamute” em grupo

Cada grupo deverá jogar os jogos 1 e 2 e apresentar os gráficos produzidos. O professor regente deverá solicitar que cada grupo analise os gráficos com base nas seguintes perguntas:

O Jogo do Mamute - Exemplo de Gráfico de Estudante

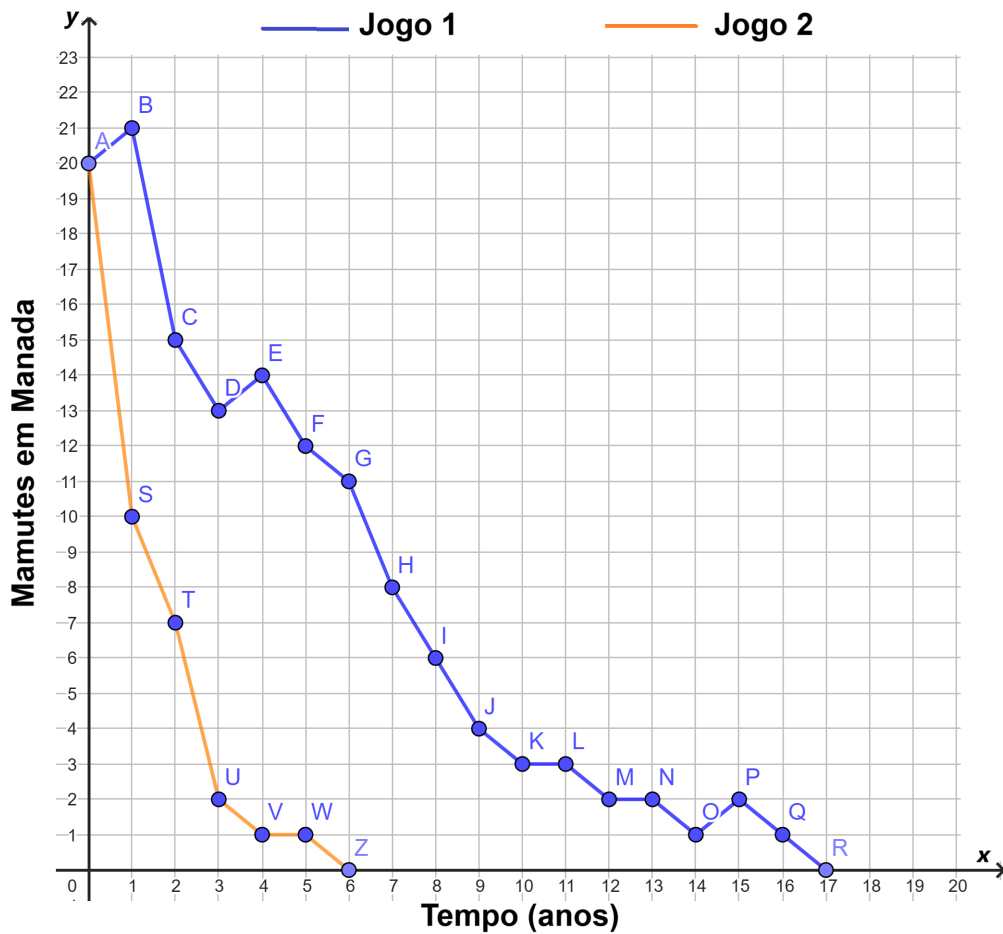


Figura 4.14: Jogo do mamute. Exemplo de um possível resultado para o Jogo 2.

1. O que mudou desta vez?
2. Como foi o padrão de extinção dos mamutes?
3. Quando os mamutes foram extintos?
4. Foi o que você havia previsto? Por quê?
5. Os mamutes foram extintos mais rapidamente desta vez? Por que isso aconteceu?
Havia mais mortes anuais e menos nascimentos?
6. Por que os gráficos mostram uma curva descendente que se estabiliza à medida que a população de mamutes se aproxima da extinção?
7. No início, a população diminuiu rapidamente devido à alta taxa de mortalidade. No final, havia menos mamutes restantes para morrer. Como isso influencia a forma da curva?

8. Por que a linha é curva e não reta? A linha seria reta se o número de mortes e nascimentos fosse constante a cada ano?
9. Como as linhas dos Gráficos do Jogo 1 e Jogo 2 se assemelham?
10. Quais são as diferenças entre elas?

Logo, registre o número de mamutes restantes no seu rebanho após cada ano.

Publicar os gráficos produzidos por cada grupo para possibilitar a comparação e a discussão em sala de aula posteriormente.

Jogo 1		Jogo 2	
Ano	Mamutes	Ano	Mamutes
Começo	20	Começo	20
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

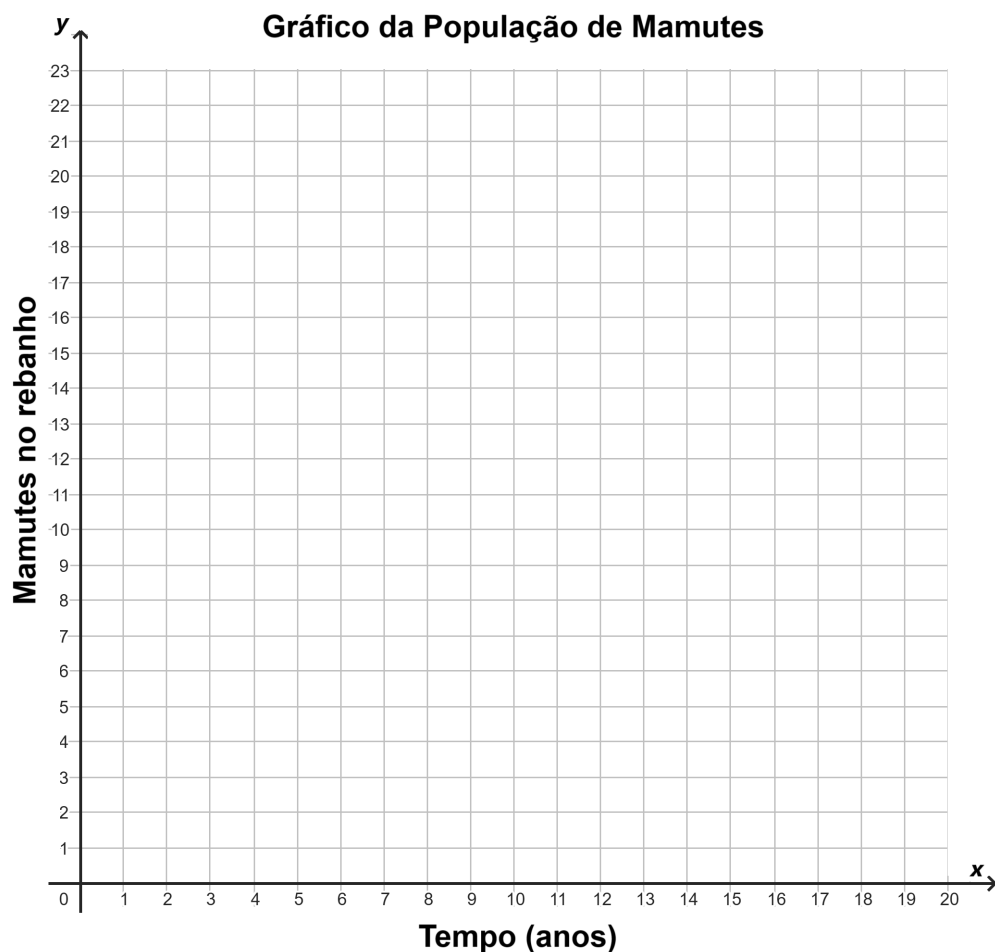


Figura 4.15: Registro de dados em tabela e planilha para o esboço dos gráficos.

Aula 4: Continuação Jogo do Mamute

Retomar com a discussão sobre a tarefa relacionada ao “Jogo do mamute” de acordo com os resultados produzidos.

Discussão sobre Estoque e Fluxo no Declínio Populacional

Estoque: A quantidade total de uma população (mamutes, no caso) em um momento específico.

Fluxo: As mudanças no estoque ao longo do tempo, como a taxa de nascimento ou morte.

Declínio Populacional

Curvas de Declínio: A forma das curvas nos gráficos indica como o estoque de mamutes diminui. Uma taxa de mortalidade maior resulta em um declínio mais rápido do estoque, como visto no jogo 2

Estabilização: O estoque pode se estabilizar à medida que a população se aproxima da

extinção devido ao menor número de mamutes restantes.

Impacto dos Caçadores

Diferença entre jogos: No jogo 2, a maior taxa de mortalidade causada pelos caçadores leva a um declínio mais acentuado do estoque de mamutes. Comparar as curvas dos jogos 1 e 2, ajuda a entender o efeito dos caçadores.

Reflexão

Mudanças Populacionais: O jogo mostra como o estoque pode mudar com base nos fluxos de nascimentos e mortes. Se os nascimentos excedem mortes, o estoque cresce; se as mortes excedem nascimentos, o estoque diminui.

Estabilidade Populacional: Uma população se mantém estável quando nascimentos e mortes estão equilibrados.

Agora que os estudantes já compreendem os conceitos de estoque e fluxo, vamos explorar os conceitos de fluxo líquido e taxa líquida. Esses conhecimentos são essenciais para que possam entender o método de integração e diferenciação gráfica.

Fluxo líquido

Fluxo líquido, por exemplo, é uma maneira de medir quanto dinheiro está entrando e saindo de um lugar durante um certo período.

Exemplo 31. *Imagine que você tem uma mesada e, ao longo de um mês, você recebe R\$ 100,00, mas gasta R\$ 60,00 em lanches e passeios. O fluxo líquido é a diferença entre o que você ganhou e o que você gastou.*

- Entradas: R\$ 100,00 (mesada recebida).
- Saídas: R\$ 60,00 (gastos).
- Fluxo Líquido: $R\$ 100,00 - R\$ 60,00 = R\$ 40,00$.

Portanto, o fluxo líquido é o que sobra depois de considerar todas as entradas e saídas de dinheiro. No seu caso, você ficou com R\$ 40,00 ao final do mês.

Exemplo 32. *Suponha que você tem um balde que está vazio e pretende enchê-lo de água. Você começa a encher o balde com a mangueira com uma vazão de 4 litros/minuto e há um buraco no fundo do balde com vazão de 2 litros por minuto. Qual será o fluxo líquido de água?*

Solução:

Dados do Problema

- Taxa de Entrada (mangueira): 4 litros por minuto.
- Taxa de Saída (buraco): 2 litros por minuto.

Cálculo do Fluxo Líquido: O fluxo líquido de água é a diferença entre a taxa de entrada e a taxa de saída. Assim, podemos calcular o fluxo líquido através da fórmula:

$$\text{Fluxo Líquido} = \text{Taxa de Entrada} - \text{Taxa de Saída}.$$

Aplicando a fórmula, temos:

$$\text{Fluxo Líquido} = 4 \text{ litros/minuto} - 2 \text{ litros/minuto} = 2 \text{ litros/minuto}.$$

Após 1 minuto:

Entrada de água: 4 litros.

Saída de água: 2 litros.

Nível de água no balde: $4 - 2 = 2$ litros.

Após 2 minutos:

Entrada de água: $4 + 4 = 8$ litros.

Saída de água: $2 + 2 = 4$ litros.

Nível de água no balde: $8 - 4 = 4$ litros.

Após 3 minutos:

Entrada de água: $4 + 4 + 4 = 12$ litros.

Saída de água: $2 + 2 + 2 = 6$ litros.

Nível de água no balde: $12 - 6 = 6$ litros.

Neste exemplo, o nível de água no balde está aumentando 2 litros por minuto (diferença entre a entrada e a saída).

Taxa Líquida

Taxa líquida refere-se a uma taxa ou porcentagem depois de descontar custos ou deduções. No contexto de sistemas, isso pode se referir, por exemplo, ao que você realmente ganha ou perde após considerar todas as perdas ou despesas, ou seja, taxa líquida é o ganho real após descontar custos ou taxas.

Exemplo 33. *Você investe R\$ 1000,00 em um fundo que promete 10% de retorno. Após uma taxa de administração de 2%, a taxa líquida é:*

- Retorno Bruto: 10% de R\$ 1000,00, isto é R\$ 100,00.
- Taxa de Administração: 2% de R\$ 1000,00, isto é R\$ 20,00.

- Retorno Líquido: $R\$ 100,00 - R\$ 20,00 = R\$ 80,00$.
- Taxa Líquida: $8\% = 10\% - 2\%$ de $R\$ 1000,00 = R\$ 80,00$.

Então, a taxa líquida é a taxa de retorno que você realmente recebe depois de descontar os custos ou impostos.

Tarefa 4: Na próxima aula, cada grupo deverá apresentar dois exemplos: um exemplo de estoque e fluxo envolvendo o conceito de fluxo líquido e o outro exemplo envolvendo a taxa líquida.

AULA 5: O Processo de Integração Gráfica

Nessa aula será introduzido o conceito de integral de funções através da técnica chamada integração gráfica.

Definição 28 (Integração Gráfica). *Integração é o processo de acumular ou somar quantidades ao longo do tempo.*

Esse processo pode ser entendido em termos de estoques e fluxos, objetivo principal dessa aula. Um *estoque acumula (ou integra) seu fluxo líquido*, sendo que a quantidade adicionada a um estoque, em qualquer intervalo, **é a área delimitada pelo gráfico da taxa líquida entre o início e o fim do intervalo.**

Exemplo 34. *Suponha que você tem um tanque de água e está monitorando a taxa de fluxo de água que entra no tanque ao longo de 5 minutos. Qual a quantidade de água no tanque após 5 minutos, considerando que o tanque estava vazio e a taxa de fluxo de entrada é de 2 litros/minuto?*

Solução: Primeiramente, para resolver o exemplo apresentado podemos usar a informação “Qual a quantidade de água no tanque após 5 minutos, considerando que o tanque estava vazio e a taxa de fluxo de entrada é de 2 litros/minuto?” Logo, a resposta seria, como o tanque está vazio, sendo o fluxo de entrada 2 litros/minuto, em 5 minutos teremos $2(5) = 10$ litros de água. Por outro lado, desejamos resolver o problema, identificando a teoria aprendida sobre estoques e fluxos. Começaremos identificando o estoque e o fluxo no problema em questão.

Fluxo: Somente há um fluxo de entrada de água. Nesse caso 2 litros/minuto.

Estoque: A quantidade de água se acumulando no tanque ao longo do tempo é o estoque. Pela definição de integração gráfica “Um estoque acumula (ou integra) seu fluxo líquido,

sendo que a quantidade adicionada a um estoque, em qualquer intervalo, é a área delimitada pelo gráfico da taxa líquida entre o início e o fim do intervalo”. Logo, para calcular a quantidade total de água acumulada no tanque (estoque) usando integração gráfica, iremos representar graficamente a taxa constante de fluxo (curva) e finalmente calcular a área sob a curva. Como o fluxo é 2 litros/minuto, identificamos que o fluxo pode ser modelado matematicamente por uma função constante, por exemplo $f(t) = 2$, $0 \leq t \leq 5$. O gráfico dessa função é a linha de cor azul da Figura 4.16, ela representa o fluxo líquido da dinâmica.

Calculo do Estoque: A área sob o gráfico da função f representa o estoque (ou estado

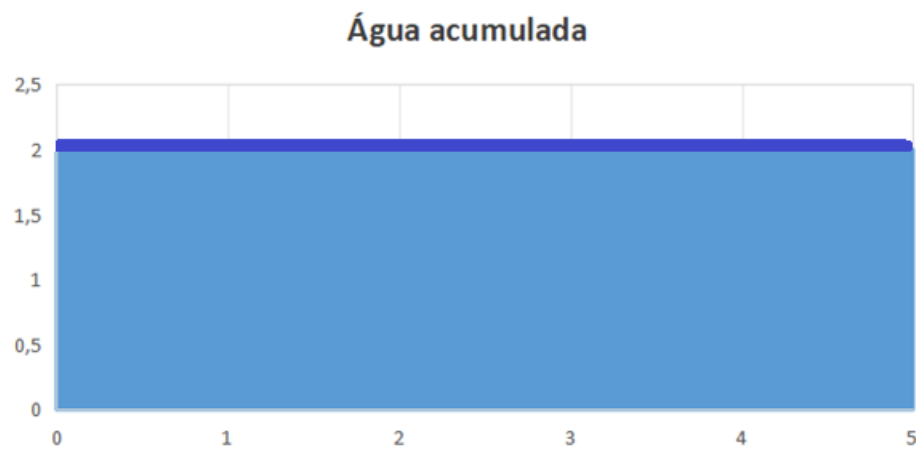


Figura 4.16: O tanque acumula seu fluxo de entrada, a tendencia da água é subir, pois não existe fluxo de saída.

do problema) da dinâmica do sistema e representa a quantidade total de água acumulada no intervalo de tempo. Como a taxa de fluxo é constante, a área sob a curva é a área do retângulo de base 5 e altura 2.

$$\text{Área} = \text{altura} \times \text{largura} = 2 \text{ litros/minuto} \times 5 \text{ minutos} = 10 \text{ litros.}$$

Por outro lado, esse tipo de abordagem para resolver o problema em questão nos oferece também uma maneira de como descrever matematicamente, na forma de função, não apenas o taxa de entrada de água (fluxo) mas também a quantidade de água acumulada ao longo do tempo (estoque).

Função para Descrever a Quantidade de Água: A maneira de como construir o modelo matemático do estoque é representado pela fórmula que descreve a área sob a curva. Nesse caso, para um fluxo constante, como é nosso caso, a quantidade de água acumulada no tanque ao longo do tempo é dada por:

$$Q(t) = \text{taxa de fluxo} \times t,$$

onde:

- $Q(t)$ é a quantidade de água no tanque (em litros) no tempo t (em minutos).
- A taxa de fluxo é 2 litros por minuto.
- t é o tempo em minutos.

Dessa forma, a função $Q(t)$ que descreve a quantidade de água no tanque em função do tempo t é:

$$Q(t) = 2t.$$

Para calcular a quantidade de água no tanque após 5 minutos, basta avaliar t na função Q , logo $Q(5) = 2 \times 5 = 10$ litros. Algumas vantagens de termos o estoque definida em forma de função são:

- Uma vez fornecida uma função que modela o estoque do problema, podemos calcular rapidamente, sob as mesmas condições do problema, por exemplo, a quantidade de água em 5 horas (300 minutos). Nesse caso, basta fazer o seguinte cálculo: $Q(300) = 2 \times 300 = 600$ litros.
- Também, uma vez modelado o estoque, podemos responder à seguinte pergunta: Qual o tempo necessário para a caixa de água acumular 1000 litros? Nesse caso, se consideramos esse tempo por τ , resolvemos da forma seguinte:

$$Q(\tau) = 1000 \Rightarrow Q(\tau) = 2\tau, \Rightarrow 1000 = 2\tau \Rightarrow \tau = \frac{1000}{2} = 500 \text{ minutos.}$$

Ou seja, o tempo necessário para que a caixa acumule 1000 litros são 500 minutos ou $500/60 = 8,3$ horas.

Observação 14. *No caso específico do Exemplo 34, devido a que o fluxo é constante ao longo do tempo, é usado uma função contante para modelar o fluxo. Em casos de fluxos variáveis, a função seria mais complexa e poderia envolver outras ferramentas matemáticas ou gráficos para calcular o estoque.*

Lembre-se que: Ao usar integração gráfica, calcula-se a quantidade total de água acumulada ao longo do tempo especificado. Graficamente, esse cálculo corresponde a encontrar a área sob a curva da taxa de fluxo que, neste caso, é constante e resulta no cálculo da área de um retângulo.

Exemplo 35. *Suponha que um trabalhador de uma fábrica utiliza um tanque de armazenamento de água para seu processo de produção. O tanque está sendo preenchido por*

um sistema de bombeamento cuja capacidade de fornecimento de água varia ao longo do tempo devido a ajustes no sistema. A taxa de entrada de água no tanque é dada pela função $f(t) = 3 + 2t$, onde t é o tempo em horas e $f(t)$ é a quantidade de água que entra no tanque a cada hora, medida em litros por hora. Suponha que o tanque estava vazio no início. O trabalhador precisa calcular: quantos litros de água serão acumulados no tanque após 4 horas.

Solução: Para entender a dinâmica de acúmulo de água vamos criar uma tabela de valores em função do fluxo $f(t) = 3 + 2t$. Da Tabela 4.2 temos as seguintes informações: no

Tabela 4.2: Tabela de valores.

t (horas)	$f(t) = 3 + 2t$
0	$f(0) = 3 + 2(0) = 3$
1	$f(1) = 3 + 2(1) = 5$
2	$f(2) = 3 + 2(2) = 7$
3	$f(3) = 3 + 2(3) = 9$
4	$f(4) = 3 + 2(4) = 11$

Fonte: Realização própria.

tempo $t = 0$ temos a entrada de 3 litros de água, no tempo $t = 1$ hora, temos $3 + 2(1) = 5$ litros de água, ou seja, o fluxo aumentou em $2(1)$ litros. No tempo $t = 2$ horas, temos $3 + 2(2) = 7$ litros de água, ou seja, o fluxo aumentou $2(2)$ litros, e assim sucessivamente. Podemos interpretar, através da função que modela o fluxo, que a partir de uma hora, o fluxo de entrada de água muda de comportamento para $f(t) = 3 + 2t$ litros no tempo t . A Figura 4.17 mostra o gráfico da função afim $f(t) = 3 + 2t$, $0 \leq t \leq 4$, a reta, representa o fluxo dado no intervalo de tempo $[0, 4]$. O fluxo começa com uma taxa de entrada de 3 litros por hora e aumenta em 2 litros por hora a cada hora que passa. **Calculo do**

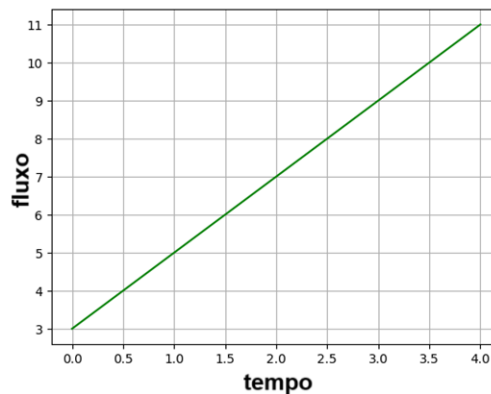


Figura 4.17: Fluxo de entrada.

Estoque: A área sob o gráfico da função $f(t) = 3 + 2t$ entre $t = 0$ e $t = 4$, representa o estoque (ou estado do problema) da dinâmica, ele representa a quantidade total de água acumulada no tanque no intervalo de tempo $[0, 4]$, Figura 4.18 . Como a função é afim, nesse caso, a região que calcularemos sua área é poligonal. Logo, podemos calcular sua área como a área de um trapézio.

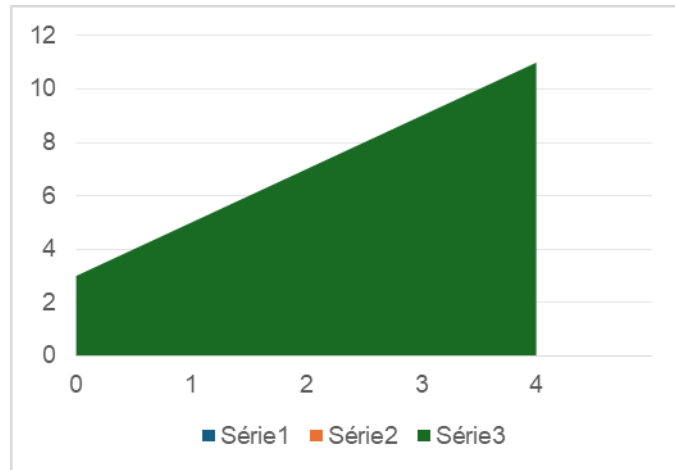


Figura 4.18: Fluxo de entrada.

$$\text{Área do trapézio} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \cdot (\text{altura})}{2}.$$

Então,

$$\text{Área do trapézio} = \frac{(11 + 3) \cdot (4)}{2} = 28.$$

A área sob a curva é a quantidade total de água acumulada (estoque), ou seja, 28 litros.

Tarefa 5: Cada grupo deverá apresentar na próxima aula um exemplo de aplicação e solução por meio da integração gráfica, os seguintes casos:

- 1) Uma aplicação considerando fluxo constante em um intervalo de tempo.
- 2) Uma aplicação considerando fluxo variável (modelado por uma função afim) em um intervalo de tempo.

AULA 6: O Processo de Integração Gráfica

Os exemplos anteriores norteiam a compreensão da importância da dinâmica de sistema, porém o uso das técnicas do método gráfico é mais interessante em problemas complexos. Nessa aula os estudantes aprofundarão o tema, aprendendo a analisar e fazer interpretação de problemas através da integração gráfica. Lembrando que integração gráfica é o processo

de encontrar a área sob a curva de uma função a partir do fluxo líquido. Esta área representa a acumulação de uma quantidade (estoque) ao longo do tempo em função do fluxo de entrada.

Análise do Processo de Integração Gráfica

Nessa aula explicaremos o processo de integração gráfica através de um exemplo, colocamos em pratica o processo seguindo uma sequência de passos. Lembramos que o processo consiste em estimar o estoque a partir do seu gráfico de fluxo líquido.

Exemplo 36. *Suponhamos que o fluxo de entrada no estoque siga o padrão mostrado na Figura 4.19 e o fluxo de saída do estoque é zero. Se existe um estoque inicial de 100 unidades, qual é o comportamento do estoque ao longo do tempo e quanto há no estoque após 50 segundos?*

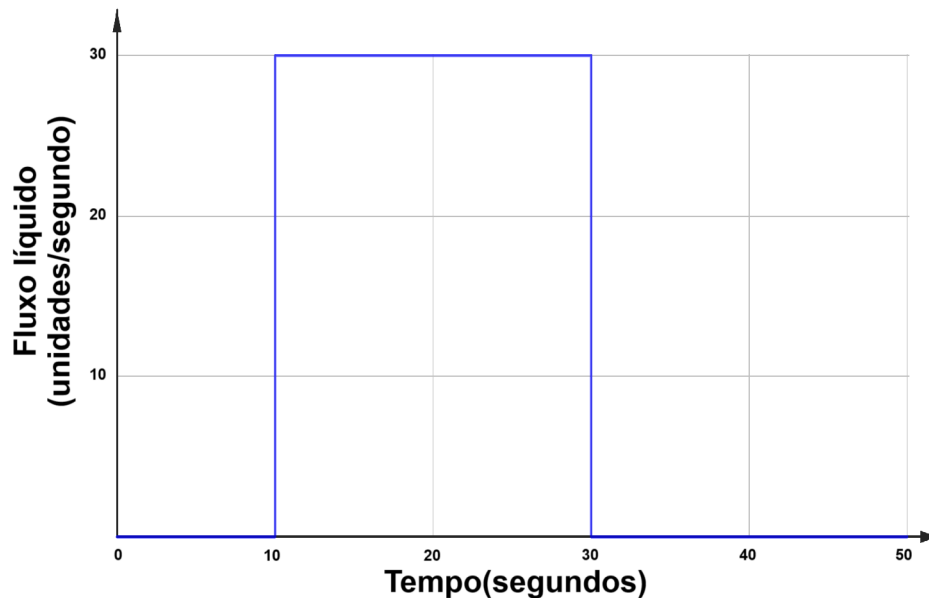


Figura 4.19: O estoque acumula seus fluxos de entrada (linha de cor azul) e saída (nula).

Solução: A seguir descreveremos o processo em etapas.

1. Calcule e represente graficamente a **taxa total de entrada**, a **taxa total de saída do estoque** e a **taxa total de variação do estoque**.

$$\begin{aligned}\text{Taxa total do estoque} &= \text{Taxa total de entrada} - \text{Taxa total de saída} \\ &= \text{Fluxo líquido (linha de cor azul na Figura 4.19.)}\end{aligned}$$

2. Faça um gráfico separado para os estoques abaixo do diagrama de fluxo com os eixos de tempo alinhados.

Gráfico Superior: Fluxo Líquido

Eixo y (fluxo líquido em unidades/segundo): Indica a variação do estoque em unidades por segundo.

Eixo x (tempo): Indica o tempo em segundos.

Gráfico Inferior: Estoque

Eixo y (estoque em unidades): Indica a quantidade acumulada de estoque em unidades.

Eixo x (tempo): Indica o tempo em segundos.

- Trace o valor inicial do estoque no gráfico de estoques. O valor inicial do estoque em nosso exemplo é 100 unidades.

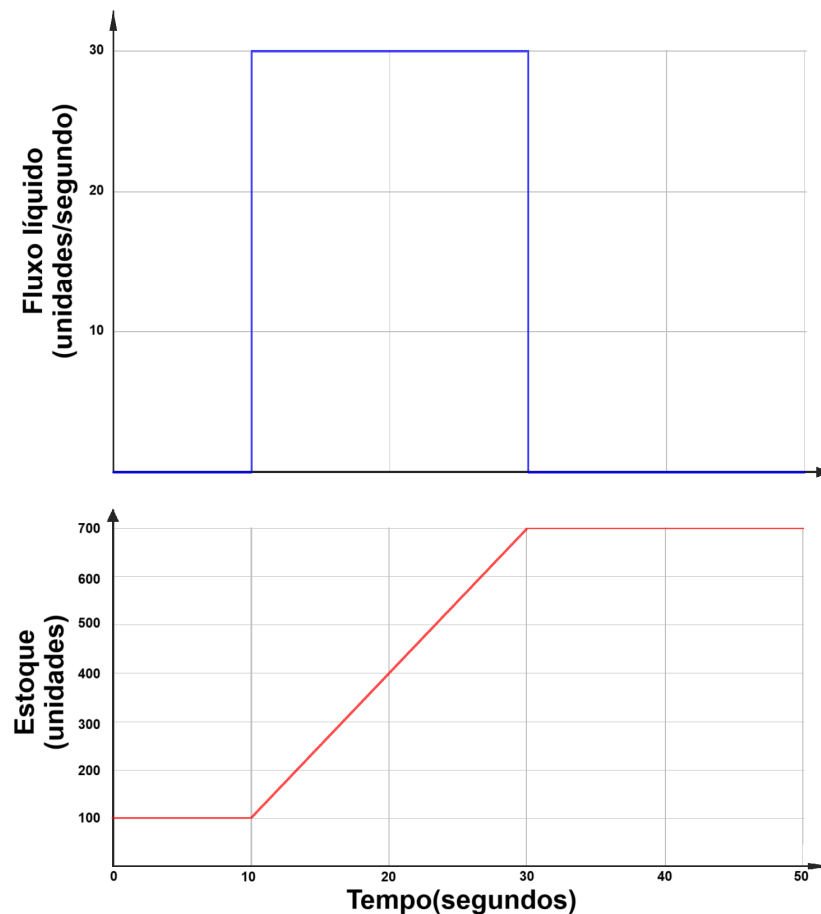


Figura 4.20: O estoque (linha de cor vermelha) acumula seu fluxo de entrada, a tendência da água é subir, pois não existe fluxo de saída.

- Divida o fluxo líquido em intervalos de tempos iguais e calcule o valor adicionado ao estoque durante cada subintervalo. No exemplo, cada subintervalo tem comprimento de 10 segundos.

Temos as seguintes observações do processo:

- No intervalo de tempo de 0 a 10 segundos, a entrada é 0 unidades/segundo.
- No tempo 10 segundos, o fluxo de entrada aumenta repentinamente para 30 unidades/segundo e permanece nesse ritmo por 20 segundos. Logo, no intervalo de tempo de 10 a 30 segundos o fluxo líquido é de 30 unidades/segundo.
- Após 30 segundos, a entrada retorna a 0 unidades/segundo e permanece por 20 segundos, logo no intervalo de tempo de 30 a 50 segundos o fluxo de entrada é de 0 unidades/segundo.

5. Esboce a trajetória do estoque entre o início e o final de cada intervalo. Encontre o valor da taxa líquida no início do segmento. É positivo ou negativo? Se o fluxo líquido for positivo, o estoque será crescente durante esse tempo. Se o fluxo líquido for negativo, o estoque será decrescente.

No exemplo, para determinar quanto há no estoque no tempo de 50 segundos, devemos somar o acúmulo do estoque ao longo do tempo, ou seja, precisamos integrar o fluxo ao longo do tempo. Na Figura 4.20, a linha vermelha representa a trajetória do estoque, ela é calculada pela área sob a curva da taxa total do estoque, adicionado pelo fluxo a partir do estoque inicial.

6. Sempre que a taxa total é zero, o estoque permanece inalterado. Certifique-se de que seu gráfico do estoque não mostre nenhuma mudança no estoque em todos os lugares em que a taxa líquida de variação é zero. **Se a taxa líquida permanecer zero** durante algum intervalo, **o estoque permanece constante** em qualquer valor que tinha quando a taxa líquida se tornou zero.

Cálculo da Integração Gráfica:

- De 0 a 10 segundos: Fluxo de entrada: 0 unidades/segundo, logo a área sob a curva é: $0 \times 10 = 0$ unidades

Estoque ao final do período: $100 + 0 = 100$ unidades.

- De 10 a 30 segundos: Fluxo de entrada: 30 unidades/segundo.

Área sob a curva: $20 \times 30 = 600$ unidades.

Estoque ao final do período: $100 + 600 = 700$ unidades.

- De 30 a 50 segundos: Fluxo de entrada: 0 unidades/segundo.

Área sob a curva: $0 \times 10 = 0$ unidades Estoque ao final do período: $700 + 0 = 700$ unidades. Portanto, no tempo 50 segundos, o estoque terá 700 unidades. O comportamento do estoque ao longo do tempo é descrito a seguir:

Comportamento do Estoque:

- De 0 a 10 segundos: O estoque permanece constante em 100 unidades, pois a

entrada é zero.

- De 10 a 30 segundos: O estoque aumenta linearmente de 100 para 600 unidades, pois a entrada é 30 unidades/segundo.
- De 30 a 50 segundos: O estoque permanece constante em 700 unidades, pois a entrada volta a zero.

7. Repita as etapas 4 a 6 até terminar.

Resumo:

- Fluxo Líquido: Representa a taxa de mudança no estoque. Um fluxo líquido positivo indica que o estoque está aumentando.
- Estoque: Representa a quantidade acumulada ao longo do tempo. Depende diretamente do fluxo líquido.

Tarefa 6: As atividades desta tarefa serão realizadas na sala de aula. Cada grupo será responsável por um exercício específico, e é possível que diferentes grupos realizem o mesmo exercício, porém com diferentes valores. Os exercícios que envolve a tarefa serão descritos a seguir.

Exercício 1: Economia Doméstica

Situação: Uma pessoa está monitorando suas economias, considerando seus depósitos mensais e retiradas. São encontrados os seguintes dados:

- Taxa de depósitos: 200 reais por mês.
- Taxa de retiradas: 150 reais por mês.
- Tempo de observação: 0 a 12 meses.
- Valor inicial do estoque: 1000 reais.

Calcule e represente graficamente a taxa líquida de variação das economias.

Solução:

Taxa líquida de variação = Depósitos - Retiradas = $200 - 150 = 50$ reais por mês.

Você pode criar um gráfico de linha para mostrar a taxa líquida de variação ao longo dos 12 meses.

Configure gráficos para economias e fluxos. Crie dois gráficos:

Gráfico de Economias: Mostre o saldo da conta ao longo do tempo. Inicie com 1000,00 reais e adicione a taxa líquida de variação mensal.

Gráfico de Fluxos: Mostre depósitos e retiradas ao longo dos meses.

Passos a realizar para a obtenção da solução:

1. Calcule e represente graficamente a taxa total de depósitos e retiradas.
2. Calcule e represente graficamente a taxa líquida de variação das economias.
3. Configure gráficos para economias e fluxos.
4. Trace o valor inicial das economias no gráfico de estoques.
5. Divida o fluxo líquido em intervalos e calcule o valor adicionado ao estoque.
6. Esboce a trajetória das economias.

Exercício 2: Inventário de Produtos em uma Loja

Situação: Uma loja está monitorando o estoque de um produto, considerando as entradas de novas mercadorias e as vendas.

Temos os seguintes dados:

1. Taxa de entradas: 20 unidades por semana.
2. Taxa de vendas: 15 unidades por semana.
3. Tempo de observação: 0 a 8 semanas.
4. Valor inicial do estoque: 100 unidades.

Solução:

Passos a realizar para a obtenção da solução:

1. Calcule e represente graficamente a taxa total de entradas e vendas.
2. Calcule e represente graficamente a taxa líquida de variação do estoque.
3. Configure gráficos para estoques e fluxos.
4. Trace o valor inicial do estoque no gráfico de estoques.
5. Divida o fluxo líquido em intervalos e calcule o valor adicionado ao estoque.
6. Esboce a trajetória do estoque.

AULA 7: Processo de Diferenciação Gráfica

Nesta aula, será introduzido o conceito de diferenciação gráfica e suas aplicações. Primeiramente, nos debruçaremos nas seguintes definições.

Taxa de Variação Líquida: A taxa de variação líquida de um estoque é determinada pela diferença entre as taxas de entrada e saída (fluxos). Se a taxa de entrada for maior que a taxa de saída em um determinado momento, o estoque aumentará mais rapidamente; se a taxa de saída for maior, o estoque diminuirá.

Diferenciação Gráfica: O inverso da integração é a diferenciação, isto é, o **cálculo da taxa líquida de variação de uma ação a partir de sua trajetória**.

Diferenciação gráfica refere-se, pois, à interpretação da taxa de variação líquida a partir do gráfico do estoque ao longo do tempo. Visualmente, a inclinação da curva do estoque em um ponto específico representa a taxa de variação instantânea desse estoque naquele momento. Para entendermos a obtenção do fluxo a partir de seu estoque é importante interpretarmos a inclinação de uma reta. Assim, iremos reforçar este conteúdo através de uma atividade.

Tarefa 07: Proponha um exercício para os alunos desenvolverem na sala de aula. Após a conclusão, realizar uma discussão em grupo para compartilhar e refletir sobre as soluções encontradas.

Exercício: Explorando a inclinação de gráficos

Situação: Vamos explorar como a inclinação do gráfico de uma função afim (reta) pode ser compreendida e interpretada.

Dados: Considere a função afim representada pela equação: $f(x) = 3x + 2$ no intervalo $[0, 20]$.

- Desenhe o gráfico da função $f(x) = 3x + 2$ no intervalo $[0, 20]$ no sistema de coordenadas cartesianas.
- Identifique e marque os pontos de intercepto da reta com o eixo y e o eixo x .
- Selecione dois pontos diferentes na reta que você desenhou. Por exemplo, os pontos $(0, 2)$ e $(2, 8)$.
- Para os dois pontos escolhidos, calcule a mudança vertical (diferença em y) e a mudança horizontal (diferença em x) entre eles.

Mudança vertical = valor de y do segundo ponto - valor de y do primeiro ponto.

Mudança horizontal = valor de x do segundo ponto - valor de x do primeiro ponto.

- e) Divida a mudança vertical pela mudança horizontal. Esse valor representa a inclinação da reta.
- f) O que a inclinação indica sobre a reta?

Após responder os itens da questão, será feita uma discussão sobre a interpretação da inclinação.

Conclusão da atividade: A inclinação da reta reflete a taxa de variação de y em relação a x . Uma inclinação positiva mostra um aumento, uma inclinação negativa mostra uma diminuição, e uma inclinação zero indica estabilidade horizontal. Esta interpretação ajuda a entender a relação entre as variáveis representadas no gráfico.

A seguir, iremos obter o fluxo líquido através das informações do estoque dado.

Exemplo 37 (Acúmulo de água num reservatório). *Um reservatório inicialmente vazio é enchido por um fluxo de água sem a presença de fluxo de saída. Após 5 segundos o estoque de água resulta ser 25 litros. Encontre o fluxo da água que permitiu o acúmulo no reservatório dado na Figura 4.21.*

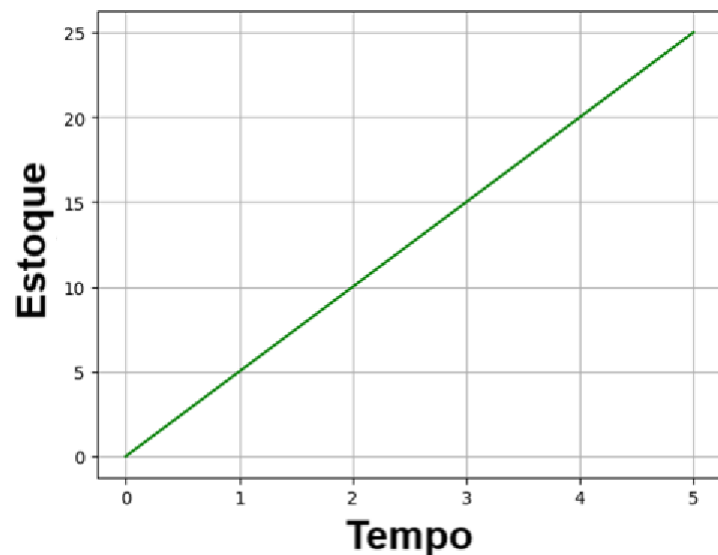


Figura 4.21: Relação estoque (linha de cor verde) e tempo.

Solução: Se não há fluxo de saída, então, o reservatório vai acumular água a ritmo constante. O estoque de água cresce de forma linear e é dado pela função $y(t) = 5t$, $t \geq 0$, onde t é o tempo dado em segundos. Temos:

$$\text{Fluxo total} = \text{Fluxo entrada} - \text{Fluxo saída} = \text{Fluxo entrada}.$$

Do gráfico do estoque (4.21), vamos a estimar o fluxo total. Observamos a Tabela 4.3: O coeficiente 5 é a taxa de variação de y em relação a t , que representa o fluxo total

Tabela 4.3: Fluxo Total.

t (segundos)	$f(t+1) - f(t)$	Taxa de variação
1	$f(1) - f(0) = 5$	5
2	$f(2) - f(1) = 5$	5
3	$f(3) - f(2) = 5$	5
4	$f(4) - f(3) = 5$	5
5	$f(5) - f(4) = 5$	5

Fonte: Realização própria.

da água para o reservatório. Portanto, o fluxo de água é de 5 (constante, pois não há fluxo de saída) litros por segundo, veja Figura 4.22. Esse valor indica que a água está sendo adicionada à reservatório a uma taxa constante de 5 litros a cada segundo. A taxa de variação do nível da água no reservatório (estoque) é representada pela inclinação da curva do nível da água em relação ao tempo. Se a inclinação for positiva, o nível da água está aumentando; se for negativa, está diminuindo.

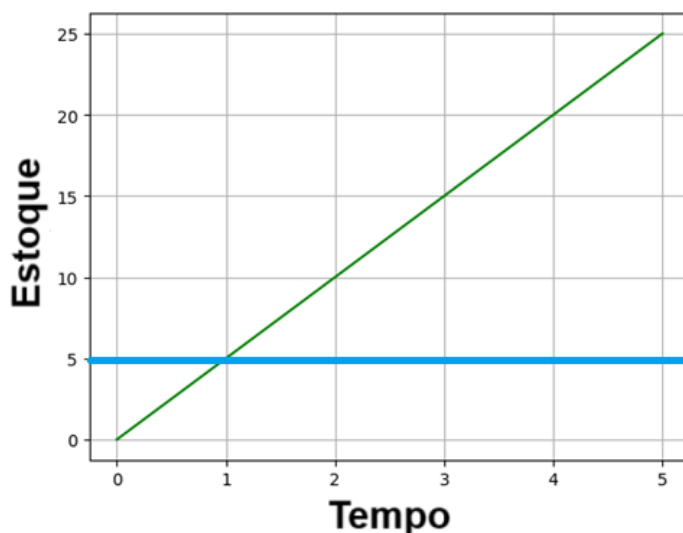


Figura 4.22: Fluxo total do estoque (linha de cor azul).

Exemplo 38. A trajetória de um estoque é mostrada na Figura 4.23. Determine o comportamento de sua taxa líquida por diferenciação gráfica. Não use computador.

Solução: A diferenciação gráfica é direta. Basta estimar a inclinação do estoque em cada momento e plotá-lo em um gráfico da taxa líquida.

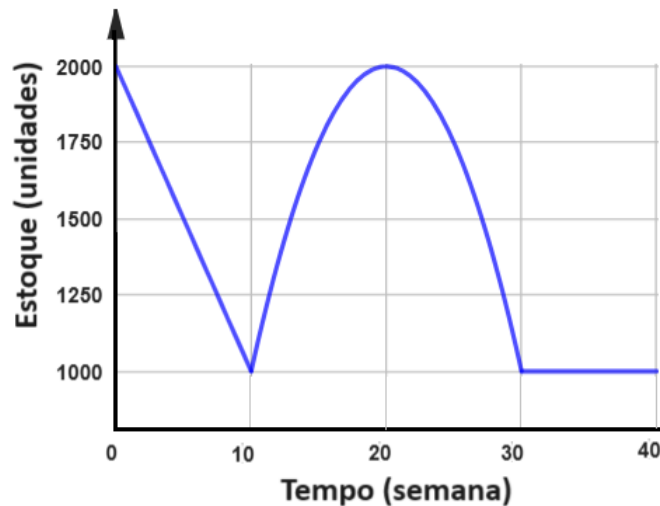


Figura 4.23: Distribuição do estoque (linha de cor azul).

Início do estoque:

O estoque inicial é de 2.000 unidades. Nas primeiras 10 semanas, a ação cai linearmente, com uma taxa líquida constante de -100 unidades por semana.

Aumento repentino:

Na semana 10, o estoque começa a aumentar rapidamente. Desenhar uma linha tangente à curva de estoque no tempo 10 anos dá uma estimativa da inclinação de 200 unidades/semana. A taxa líquida aumenta de -100 unidades por semana antes da semana 10 para +200 unidades por semana logo após o início da semana 10.

Pico e queda:

Das semanas 10 a 20, o estoque aumenta a uma taxa decrescente, atingindo o máximo no momento 20. A taxa líquida é zero no momento 20.

Queda linear:

Da semana 20 à semana 30, o estoque está caindo. Na semana 30, a taxa líquida cai rapidamente, com uma inclinação de -200 unidades por semana.

Estabilidade Final:

Após a semana 30, o estoque para de mudar e permanece constante. A taxa líquida sobe abruptamente de -200 para zero por semana e permanece em zero.

Em resumo, temos uma trajetória interessante do estoque, com mudanças significativas na taxa líquida ao longo do tempo, veja a Figura 4.24.

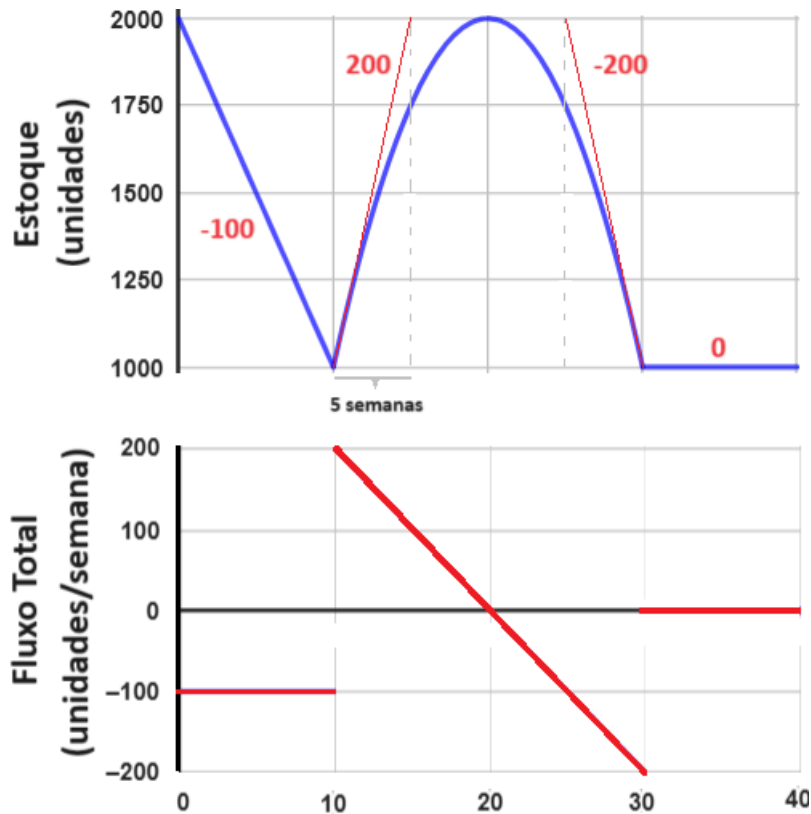


Figura 4.24: Superposição do estoque e o fluxo total (linha de cor vermelho).

Tarefa 7: Escrever um relatório individual sobre como a dinâmica de sistemas ajudou a entender melhor os conceitos de derivada e integral e como esses conceitos podem ser aplicados em situações reais.

Avaliação: A avaliação será baseada em:

- Participação nas atividades de grupo.
- Qualidade e clareza das apresentações dos grupos.
- Compreensão demonstrada nas tarefas de casa e relatório final.

Esta sequência didática teve como objetivo principal proporcionar uma compreensão intuitiva dos conceitos de derivadas e integrais de funções através da prática e aplicação em sistemas dinâmicos, preparando os alunos para estudos futuros e aplicações práticas.

Capítulo 5

Considerações Finais

Nessa dissertação foi apresentada uma proposta de sequência didática para o Ensino Médio, com o objetivo de introduzir os conceitos de estoque e fluxo por meio da metodologia da dinâmica de sistemas, de maneira acessível e intuitiva. A proposta se alinha com a necessidade crescente de modernizar o ensino da matemática, oferecendo aos alunos uma compreensão mais concreta e visual de conceitos matemáticos avançados, como derivada e integral, sem recorrer a uma matemática abstrata e complexa em estágios iniciais da aprendizagem. Embora a sequência didática não tenha sido aplicada de forma prática neste estudo, espera-se que, ao ser implementada em futuras turmas, ela possa promover uma mudança significativa na forma como os alunos compreendem os processos de diferenciação e integração. A dinâmica de sistemas, com suas representações gráficas e simulações, tem o potencial de proporcionar uma abordagem mais interativa e envolvente, permitindo que os alunos desenvolvam uma intuição matemática fundamental para o estudo posterior de cálculo. A expectativa é que, ao trabalhar com fluxos e estoques de forma prática, os estudantes compreendam, de maneira visual e aplicada, os conceitos subjacentes à diferenciação (taxa de variação) e à integração (acúmulo ao longo do tempo). Os principais benefícios esperados com a aplicação dessa abordagem incluem:

Desenvolvimento da intuição matemática: Ao aplicar o conceito de fluxos e estoques em modelos simples e dinâmicos, os alunos terão uma visão mais intuitiva do comportamento de sistemas matemáticos, o que facilitará a compreensão dos conceitos de derivada e integral quando abordados futuramente no currículo do ensino superior.

Maior engajamento e motivação: A utilização de simulações computacionais e a visualização gráfica por meio de ferramentas como o Vensim-PLE tornam o aprendizado mais atraente e dinâmico, potencializando o engajamento dos alunos e despertando seu interesse por áreas das ciências exatas, engenharia ou ciências aplicadas.

Integração de conteúdos matemáticos com situações reais: A proposta visa mostrar aos alunos

como a matemática se aplica a fenômenos reais e do cotidiano (ex: populações, recursos naturais, sistemas econômicos), o que pode aumentar a percepção da relevância da matemática em suas vidas e futuras carreiras. **Apoio à formação continuada de professores:** A aplicação dessa metodologia, se bem implementada, também poderá ser uma importante ferramenta para a formação continuada dos professores, que poderão aprender a usar tecnologias educacionais e técnicas de modelagem matemática para ensinar de forma mais interativa e eficaz. Contudo, como a proposta ainda não foi testada em sala de aula, não é possível validar empiricamente os resultados e os benefícios mencionados. Espera-se que, em futuras pesquisas e aplicações práticas, os professores possam implementar essa sequência didática e analisar os efeitos na compreensão dos alunos e no desempenho acadêmico, possibilitando a realização de ajustes conforme necessário. Finalmente, os autores desse trabalho esperam ter contribuído em mostrar caminhos possíveis para o ensino de conceitos importantes nas primeiras disciplinas de um curso da área de exatas, engenharia ou ciências aplicadas. Dessa forma, espera-se que o amadurecimento dos conceitos de derivada e integral contribua na diminuição das taxas de reprovação e evasão no ensino superior.

Referências Bibliográficas

- [1] AMARAL, João A. Arantes do. **Desvendando sistemas**. São Paulo: Ed. do Autor, 2012.
- [2] ARANTES, F. B. et al. **Evolução do Número de Alunos Reprovados nas Disciplinas do Curso De Matemática Da UFU**. FAMAT em Revista, p. 39. 2007.
- [3] BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino - aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2006.
- [4] BARUFI, M. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral**.1999. 184p. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.
- [5] BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular**, Brasília: MEC, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf
- [6] CAMARGO, D. A. F. **Um estudo quantitativo sobre a reprovação no curso primário**. Cadernos de Pesquisa, n. 12, p. 3-18, 2013.
- [7] DONEL, M. H. **Dificuldades de aprendizagem em cálculo e a relação com o raciocínio lógico formal - uma análise no ensino superior**. 2015. 179p. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Marília, 2015.
- [8] FARIA, E. M. **Os alunos reprovados no Brasil: uma análise das proficiências e das taxas de abandono por meio das avaliações Prova Brasil e Pisa. Estudando Educação**. Portal de Estudos e Pesquisas em Educação. Brasil. 2011.
- [9] FERREIRA, W, T. et al. **As principais causas da reprovação nos cursos de engenharia elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora**. 2016.
- [10] FORRESTER, J. W. **Industrial Dynamics**. [S.l.]: New York: John Wiley e Sons,

1961.

[11] FORRESTER, Jay W. **Urban Dynamics**. The MIT Press, Massachusetts 1969.

[12] KUBICEK, Astrid. **Models for Logistic Growth Processes (e.g. Fish Population in a Pond, Number of Mobile Phones within a Given Population)** Real-World Problems for Secondary School Mathematics Students: Case Studies, Juer-gen Maasz and John O'Donoghue eds. 187-208. Sense Publishers, Netherlands, 2011.

[13] LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[14] MAASZ, J. and O'DONOGHUE, J. **Real-World Problems for Secondary School Mathematics Students** Case Studies. SENSE PUBLISHERS, Rotterdam, Netherlands, 2011.

[15] MEADOWS, D. H. **Thinking in Systems: A Primer**. Chelsea Green Publishing, 2008.

[16] MENEZES-FILHO, N. A. **Os determinantes do desempenho escolar do Brasil**. IFB, 2007.

[17] OLIVEIRA, R. P. **Da universalização do ensino fundamental ao desafio da qualidade: uma análise histórica**. Educação & Sociedade, Campinas, v.28, n.100, p.661-690. 2007. Disponível em: < <http://www.scielo.br/pdf/es/v28n100/a0328100.pdf>>.

[18] PASSOS, F. G. et al. **Diagnóstico sobre a reprovação nas disciplinas básicas dos cursos de engenharia da UNIVASF**. 2007.

[19] RADZICKI, Michael J; TAYLOR Robert A. **“Origin of System Dynamics: Jay W. Forrester and the History of System Dynamics”**. In: U.S. Department of Energy's Introduction to System Dynamics, 2008.

[20] RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. **Research on calculus: what do we know and where do we need to go?** ZDM Mathematics Education, v.46, p. 507–515, 2014.

- [21] REZENDE, W. M. **O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação). Universidade de São Paulo, 450p. São Paulo, 2003.
- [22] SARAIVA, Paulo; MURTEIRA, José. **Equações de Diferenças: Introdução Teórica e Aplicações**. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2013.
- [23] SENGE, P. **The Fifth Discipline: The art and practice of the learning organization**. Doubleday, New York, 1990.
- [24] SILVA, Andrade. M.; DÁVALOS José. **Dinâmica de Sistemas: Uma Proposta Metodológica na Interpretação de Modelos no Ensino Médio**. Anais do CMD, Volume (3):1476-1499, 2023.
- [25] SILVA, G. C. R SILVA, V. C. et al. **A reprovação no curso de engenharia elétrica do Unileste-MG: uma investigação baseada na visão dos alunos**. In: Anais XXXIII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. 2005.
- [26] SILVA, G. C. R. F.; F.; MASCARENHAS, S. A. N.; SILVA, I. R. **Vivências de reprovação e as atribuições causais de estudantes sobre o rendimento escolar em Manaus**. In: X Congresso Nacional de Psicologia Escolar e Educacional, Maringá. 2011.
- [27] STERMAN, John D. **Business Dynamics: Systems Thinking and Modeling for a Complex World**. Irwin / McGraw-Hill (2000).
- [28] VILLELA, P. R. C. **Introdução à Dinâmica de Sistemas**. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2005.
- [29] VENSIM, V. P. **User Guide - Vensim Introduction and Tutorials**. [S.l.], 2017.