

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO - UFTM



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UM MODELO DE REDUÇÃO DE FORÇA DE UMA
BICICLETA APLICADO AO ENSINO DA
TRIGONOMETRIA

RAPHAEL BOTTA TEIXEIRA

UBERABA - MINAS GERAIS

ABRIL DE 2025

UM MODELO DE REDUÇÃO DE FORÇA DE UMA BICICLETA APLICADO AO ENSINO DA TRIGONOMETRIA

RAPHAEL BOTTA TEIXEIRA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Nunes de Souza.

Uberaba - Minas Gerais

Abril de 2025

**Catlogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do
Triângulo Mineiro**

T269m Teixeira, Raphael Botta
Um modelo de redução de força de uma bicicleta aplicado ao ensino da trigonometria / Raphael Botta Teixeira. -- 2025.
83 p. : il., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)
-- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2025
Orientador: Prof. Dr. Bruno Nunes de Souza

1. Educação. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Trigonometria.
4. Torque. 5. Bicycletas. I. Souza, Bruno Nunes de. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 51(07):531.781

RAPHAEL BOTTA TEIXEIRA

Um Modelo de Redução de Força de uma Bicicleta Aplicado ao Ensino da Trigonometria

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, área de concentração Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de mestre

Uberaba, 25 abril de 2025

Banca Examinadora:

Dr. Bruno Nunes de Souza – Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dra. Michelli Maldonado Carretero de Oliveira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dra. Simone Vasconcelos da Silva
Universidade de Brasília



Documento assinado eletronicamente por **BRUNO NUNES DE SOUZA, Coordenador(a) do Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**, em 09/06/2025, às 15:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#) e no art. 34 da [Portaria Reitoria/UFTM nº 215, de 16 de julho de 2024](#).



Documento assinado eletronicamente por **MICHELLI MALDONADO CARRETERO DE OLIVEIRA, Professor do Magistério Superior**, em 11/06/2025, às 09:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#) e no art. 34 da [Portaria Reitoria/UFTM nº 215, de 16 de julho de 2024](#).



Documento assinado eletronicamente por **Simone Vasconcelos da Silva, Usuário Externo**, em 16/06/2025, às 13:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#) e no art. 34 da [Portaria Reitoria/UFTM nº 215, de 16 de julho de 2024](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.uftm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1536301** e o código CRC **FFAB21E5**.

Dedico este trabalho à minha família, pois a família é o berço de tudo. À todos vocês,
meu muito obrigado.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente, a DEUS, ao NOSSO SENHOR JESUS CRISTO, por ter me honrado com a oportunidade de realizar o curso de mestrado. É tudo para a sua maior honra e glória.

Agradeço aos meus familiares, meus pai Aguinomar, minha mãe Edilma, minha irmã Mariana e minha esposa Patrícia, pessoas que muito me ajudaram durante todo o curso.

Agradeço a três grandes pessoas, que não posso deixar de citar, o professor Reginaldo Manhezzo, grande mestre e amigo que muito me apoiou, a professora Gislene Freitas, uma pessoa ímpar, de imensa bondade e humanidade, que muito me ensinou durante nosso convívio, e o Dr Heitor

Agradeço aos amigos que adentraram comigo no mestrado, Darlley, Bruna e Letícia, que compartilharam junto a mim essa jornada tão incrível.

Agradeço aos professores e professoras, Adriana, Osmar, Leandro, Flávio, Rafael, Heron, Nelson, Marcelo, Marcela, Leonardo Raphael Otoboni, mestres, que nos ensinaram nessa jornada.

Um agradecimento especial ao professor Bruno Nunes de Souza, que se dispôs a me orientar nesse projeto, MUITO OBRIGADO!

Agradeço às professoras Dra. Michelli Maldonado Carretero de Oliveira e Simone Vasconcelos da Silva, bem como ao professor Dr. Bruno Nunes de Souza, por terem disponibilizado seu tempo e conhecimento para participarem da banca examinadora. Muito obrigado!

Um agradecimento a todos que de certa forma se envolveram nesse projeto, mas que minha memória falha em citá-los aqui, sintam-se agradecidos.

“Ora a fé é o fundamento das coisas que se esperam, e o argumento das que não se vêm. Foi por a terem possuído que os antigos obtiveram um bom testemunho (de Deus). Pela fé reconhecemos que o mundo foi formado pela palavra de Deus, e sorte que o visível foi feito pelo invisível.”HEBREUS 11.1 – 3

Resumo

O mecanismo utilizado em um dos meios de transporte mais antigos do mundo, a bicicleta, praticamente não sofreu alterações ao longo dos anos. A maneira de pedalar uma bicicleta, exercendo torque em movimento circular, foi inventada há mais de 200 anos. Neste trabalho, vamos exibir um modelo de pedalar em que a variação do comprimento da pedivela da bicicleta pode dobrar o torque exercido no movimento de pedalar nos pontos de maior força. Ainda assim, será possível mostrar matematicamente que o movimento descrito continuará sendo circular. Além de fornecer uma forma diferente de construção do mecanismo de transferência de força em uma bicicleta, este trabalho apresentará uma aplicação da trigonometria em um problema real, utilizando teoremas e leis de trigonometria acessíveis para alunos do ensino médio.

Palavras-chave: Ensino, Educação Matemática, Bicicleta, Trigonometria, Torque.

Abstract

The mechanism used in one of the world's oldest means of transportation, the bicycle, has undergone practically no changes over the years. The method of pedaling a bicycle, by applying torque in a circular motion, was invented more than 200 years ago. In this work, we present a pedaling model in which varying the length of the bicycle crank can double the torque applied at the points of greatest force during pedaling. Nevertheless, it will be mathematically demonstrated that the described motion will remain circular. In addition to proposing a different design for the force transfer mechanism in a bicycle, this work will present an application of trigonometry to a real-world problem, using theorems and trigonometric laws accessible to high school students.

Keywords: Teaching, Mathematics Education, Bicycle, Trigonometry, Torque.

Sumário

INTRODUÇÃO	15
Motivação para o estudo	16
Metodologia	16
Estrutura do trabalho	17
1 Conceitos Iniciais de Trigonometria	18
1.1 Arco	18
1.1.1 Unidades para medir arcos	19
1.1.2 Ciclo Trigonométrico	20
1.2 Semelhança de Triângulos	20
1.2.1 Teorema Fundamental da Semelhança	21
1.2.2 Casos de Semelhança entre Triângulos	22
1.3 Trigonometria no Triângulo Retângulo	24
1.3.1 Seno, Cosseno e Tangente	25
1.3.2 Relações entre seno, cosseno e tangente	25
1.3.3 Arcos Notáveis	27
1.4 Trigonometria em triângulos quaisquer	31
1.4.1 Lei dos Cossenos	31
1.4.2 Lei do Seno	35
1.4.3 Seno e Cosseno de ângulos obtusos	37
1.5 Transformações Trigonométricas	37
1.5.1 Adição e subtração de Arcos	40
1.5.2 Arco duplo	44
1.5.3 Arco Metade	45
2 Desenvolvimento do Projeto	48
2.1 Um pouco da história da bicicleta	48
2.2 A Ideia do Projeto	49
2.2.1 Traço do modelo 1 do pedivela aumentável	50
2.2.2 Traço do modelo 2 do pedivela aumentável	57

2.3	Modelo de Funcionamento do Pedivela Variável	62
2.4	Torque	63
2.4.1	Cálculo do Torque do Pedivela Aumentável em Alguns Pontos	64
2.5	Redução da Força Aplicada Pelo Ciclista em Alguns Pontos	70
3	Geometria de Construção de uma Bicicleta com Pedivela Aumentável	74
3.1	Geometria da Bicicleta com Pedivela Aumentável	74
3.2	Montagem de um Protótipo do Pedivela Aumentável	75
3.2.1	Orçamento dos Componentes Para a Montagem do Protótipo	77
4	Conclusão	80
	APÊNDICES	83

Lista de Figuras

1.1	Arco \widehat{AB}	18
1.2	Arco nulo	19
1.3	arco em radianos	19
1.4	ciclo trigonométrico	20
1.5	Semelhança de triângulos	21
1.6	Teorema fundamental da trigonometria	22
1.7	Reta r cortando AB e AC	22
1.8	Desmembrando os triângulos ABC e ADE	22
1.9	Critério i)	23
1.10	Critério ii)	23
1.11	Critério iii)	24
1.12	Triângulo retângulo	24
1.13	Triângulo retângulo	26
1.14	Triângulo equilátero	28
1.15	Altura CD	28
1.16	Triângulo Isósceles	30
1.17	Triângulo qualquer	31
1.18	Triângulo de ângulos agudos	32
1.19	Segmento de reta \overline{AH} traçado	32
1.20	Triângulos ABH e ACH	33
1.21	Altura h no triângulo obtuso	34
1.22	Triângulos AHB e AHC	34
1.23	Lei do Seno	35
1.24	Altura h	36
1.25	Triângulo Equilátero ABC	38
1.26	Altura \overline{AD} no triângulo equilátero	38
1.27	Triângulos ACD e ECB	39
1.28	Triângulo ABC	40

2.1	Evolução da Bicicleta	48
2.2	Conjunto pedivela pedal	49
2.3	Modelo 1	50
2.4	Desenvolvimento do modelo 1	51
2.5	Triângulo retângulo do modelo 1	52
2.6	Triângulo isósceles OAP	52
2.7	Flor de pétala	54
2.8	Modelo 2	58
2.9	Desenvolvimento do Modelo 2	58
2.10	ângulos $A\hat{O}P$ e $P\hat{O}A$	59
2.11	Triângulo retângulo Modelo 2	59
2.12	Triângulo isósceles modelo 2	60
2.13	Funcionamento do pedivela - posição inicial	62
2.14	Aumento do pedivela	63
2.15	Pedivela com tamanho máximo	63
2.16	Diminuição do comprimento do pedivela	64
2.17	Ilustração do torque	64
2.18	Torque em 120°	65
2.19	Torque em 140°	66
2.20	Torque em 150°	67
2.21	Torque em 180°	68
3.1	Geometria de uma bicicleta padrão	74
3.2	Bicicleta adaptada	75
3.3	Componentes utilizados para a montagem do protótipo	76
3.4	Passo Inicial da montagem do protótipo	77
3.5	Montagem das roldanas e corrente	78
3.6	Montagem do segundo pedivela	78
3.7	Protótipo montado	78

Lista de Tabelas

1.1	Seno, Cosseno e tangente dos arcos notáveis	30
2.1	Tabela de Torques	70
2.2	Tabela de Redução de Forças	73
3.1	Preço dos componentes	79

INTRODUÇÃO

A matemática é uma ciência com registros milenares, todavia se atualiza constantemente, sempre com novas descobertas, novos métodos para a solução de determinados conteúdos, inclusive, em outubro de 2024, foi noticiado em vários portais de notícias, G1, CNN, Terra, uma possível solução para um problema matemático de 124 anos. Nos dias atuais a matemática se apresenta em vários aspectos da nossa vida cotidiana, desde as compras no mercado até em desenvolvimentos mais avançados de tecnologia.

Entretanto, apesar de toda a relevância do conhecimento matemático, nos bancos de sala de aula mais especificamente, existem problemas relatados por professores e alunos, quanto ao processo de ensino e aprendizagem da matemática. Pelo lado dos alunos, é relatado a dificuldade em aprender o conteúdo, sendo considerado muito difícil. Somando-se a isso, os alunos enxergam a matemática com pouca aplicabilidade no cotidiano. Pelo lado dos professores, é relatado a falta de comprometimento e interesse dos alunos em aprender e desenvolver o conteúdo. O fato é que esses problemas são geradores de desmotivação tanto para alunos quanto para professores.

Buscando solucionar os problemas descritos, muitas estratégias vêm sendo implementadas em sala de aula, como a utilização de jogos, a utilização de softwares específicos de matemática e a formação continuada para professores. Nesse contexto, foi desenvolvido este presente trabalho. Para tal, unimos a bicicleta, um meio de transporte popular entre jovens e adultos e também entre professores e alunos, com a trigonometria do ensino médio, um tema relevante dentro da matemática básica, pois esta presente no ENEM e demais vestibulares para acesso universitário.

A bicicleta, um meio de transporte inventado há mais de 200 anos, que adquiriu alta popularidade, é um bom exemplo de como a matemática do ensino médio, mais especificamente o conteúdo de trigonometria, pode ser trabalhado no nosso cotidiano. Assim, propomos uma inovação tecnológica no ato de pedalar. Embora a bicicleta tenha sido inventada no século XVIII, e durante estes mais de duzentos anos tenha sofrido várias inovações, o ato de pedalar em si literalmente não mudou.

De forma sucinta, o que estamos propondo é uma nova maneira de pedalar, em que o pedivela da bicicleta vai obter um aumento no seu comprimento nos momentos propícios. Esse aumento do pedivela vai proporcionar ao ciclista uma redução do esforço, um maior torque e conseqüentemente um aumento de velocidade.

Com a utilização da trigonometria para desenvolver esse projeto, podemos contribuir para um processo de ensino mais eficaz. Além disso, busca contribuir para a relevância da matemática no nosso dia a dia, não apenas para lidar com dinheiro, mas também para medir a eficiência e melhorar vários processos.

Motivação para o estudo

É fundamental para jovens e adultos o conhecimento matemático, pois é essencial para tomada de decisões e resolução de problemas. Em um artigo Do jornal Correio Braziliense, escreve que durante a pandemia as profissões ligadas à matemática tiveram uma menor redução que em relação às demais profissões. Assim, nota-se que o conhecimento matemático ultrapassa os bancos da sala de aula, sendo também de fundamental importância para o campo profissional, onde encontra aplicação em várias áreas.(SZYLLER, 2024)

No entanto, o processo de ensino e aprendizagem têm se tornado motivo de preocupação para professores e alunos, haja visto que os resultados apresentados pelos estudantes brasileiros nos mais variados testes não são satisfatórios. Nossos alunos demonstram grande dificuldade em aprender e aplicar os conceitos matemáticos, que é um quadro desafiador para o país.

Sobre a percepção que os alunos possuem da matemática, nota-se que os alunos veem a matemática como um monstro, uma disciplina chata e de difícil entendimento, considerada até mesmo impossível de ser entendida. (FREITAS ETAL, 2016)

De forma objetiva, sobre o conteúdo de trigonometria, elenca-se as seguintes dificuldades encontradas por alunos e professores:(NASCIMENTO, 2013)

- as limitações dos professores em relação ao conhecimento do conteúdo;
- o aluno não compreende as fórmulas e os termos técnicos;
- o aluno encontra muitas dificuldades para interpretar os exercícios;
- a mecanização na resolução dos conteúdos;
- os alunos não enxergam significado no conteúdo;

Muitos esforços estão sendo feitos para a alteração desse quadro, e este trabalho se propõe a ser mais um desses esforços, com o objetivo de aproximar o conteúdo de matemática do ensino médio a elementos cotidianos do dia a dia, neste caso, a junção da trigonometria com a bicicleta.

Metodologia

Para a execução deste trabalho, foi feita uma pesquisa bibliográfica, com a utilização de livros, nas bases de dados da Scielo, Google academics e nos periódicos da Capes, além de artigos de jornais.

“A pesquisa é a busca ou a investigação sistematizada de conhecimentos científicos. Pode ser classificada quanto à sua natureza pura (científica) ou aplicada (tecnológica).”(PRADO, GONÇALVES, MARCELINO. 2013 p.3)

Para a escrita do trabalho, utilizamos o Overleaf, uma plataforma gratuita, que nos permite uma escrita em $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, que facilita a escrita de elementos matemáticos. Utilizamos o GeoGebra que também é um software gratuito, para confeccionarmos os desenhos do trabalho.

Estrutura do Trabalho

O presente trabalho foi dividido em três capítulos. No primeiro capítulo, fizemos o referencial teórico de trigonometria, apresentaremos as principais fórmulas utilizadas no desenvolvimento do conteúdo, suas respectivas demonstrações, contraexemplos. Isso é feito com a utilização de livros sobre o conteúdo.

No segundo capítulo, relatamos um pouco sobre a história da bicicleta, o tamanho da sua frota e o seu impacto no ambiente. Abordamos de forma breve o conceito de torque e a fórmula para que possamos efetuar o seu cálculo. Por fim, apresentamos a ideia do projeto, os cálculos necessários para mostrar que a execução da ideia pode acontecer.

No terceiro capítulo, mostramos a geometria da bicicleta com o pedivela variável, a sua forma de funcionamento e montagem, apresentamos um protótipo que simula o movimento do pedivela variável, mostramos também um roteiro de montagem desse protótipo, visando aulas práticas de trigonometria e elaboramos um orçamento de itens para a montagem do mesmo, discriminando os custos de cada item.

1 Conceitos Iniciais de Trigonometria

O conteúdo de trigonometria é de fundamental importância na matemática. A palavra trigonometria é composta por três radicais gregos, tri: que significa três, gonos: que significa ângulos, e metron: que significa medir (SILVA, 2019). A trigonometria nos permite estabelecer relações entre os lados e ângulos de um triângulo.

Esse capítulo faz um estudo sobre trigonometria, apresentando os teoremas de Pitágoras e da semelhança as funções de seno, cosseno, tangente, lei do seno, lei do cosseno, as transformações trigonométricas e suas respectivas demonstrações.

1.1 Arco

Define-se que arco é cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos (IEZZI ET AL, 1980). Tomando uma circunferência de centro O e posicionando sobre ela os pontos distintos A e B , fica definido o arco \widehat{AB} , como mostra a figura 1.1.

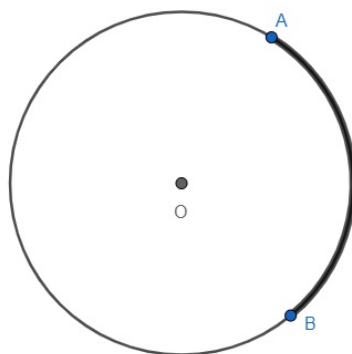


Figura 1.1: Arco \widehat{AB}

Na figura 1.2, os pontos A e B coincidem, ou seja, $A = B$, assim, fica definido o arco nulo.

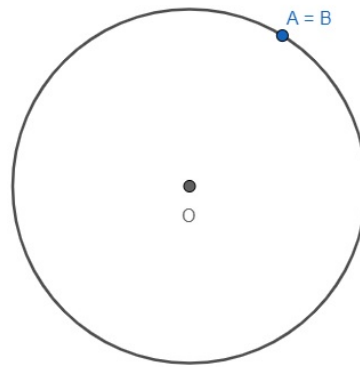


Figura 1.2: Arco nulo

1.1.1 Unidades para medir arcos

Para efetuarmos as medidas de arcos, as unidades mais utilizadas são o grau e o radiano.

A ideia de grau é uma circunferência dividida em 360 partes iguais, onde cada uma dessas partes fica subentendida a medida de um grau (1°) (NETO, 2013).

Na medida em radianos, os ângulos são medidos pelo comprimento de arco que eles subentendem sobre um círculo de raio 1 quando o vértice está no centro. Uma unidade de arco sobre um círculo de raio 1 é denominada radiano (ANTON, BIVEN, DAVIS, 2014). A figura 1.3 ilustra a ideia de radianos.

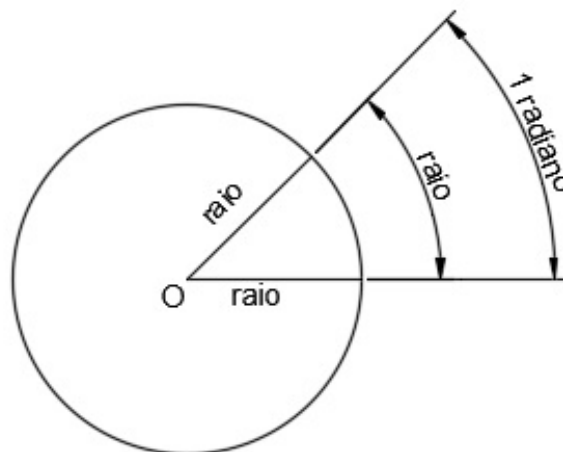


Figura 1.3: arco em radianos

Uma referência importante na trigonometria é o número π . O número π é uma constante matemática, também um número irracional, que pode ser escrito como:

$$\pi = 3,14159265\dots$$

A constante π também relaciona o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, que pode ser representada pela expressão 1.1:

$$\pi = \frac{\text{comprimento}}{\text{diâmetro}} = \frac{c}{d} \quad (1.1)$$

O fato é que a constante π nos ajuda a estabelecer uma relação entre graus e radianos, escrita pela expressão 1.2:

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \quad (1.2)$$

1.1.2 Ciclo Trigonométrico

No plano Cartesiano, o ciclo Trigonométrico é o círculo Γ , centrado na origem com raio 1 e comprimento 2π (NETO, 2012, p.295).

No ciclo trigonométrico, convencionou-se o sentido anti-horário como positivo, e o sentido horário como negativo (DANTE, 2014). Note que os eixos x e y do plano cartesiano, dividem o ciclo trigonométrico em 4 partes iguais, cada uma delas são chamadas de quadrantes, numeradas no sentido positivo. A figura 1.4 ilustra essa situação.

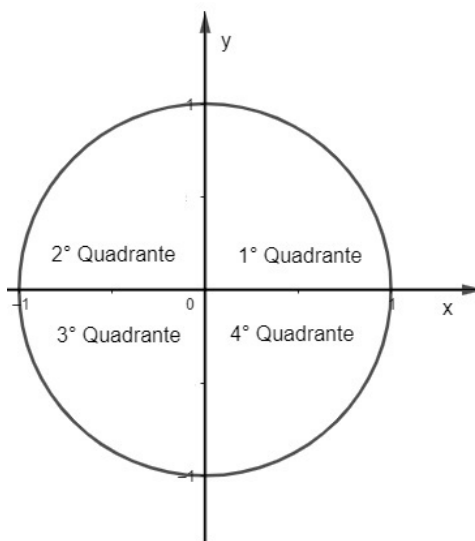


Figura 1.4: ciclo trigonométrico

1.2 Semelhança de Triângulos

São Tomás de Aquino(1225 - 1274), em sua Suma Teológica, diz que duas coisas são semelhantes se forem iguais na forma, mas diferente nas medidas(AQUINO, 2020). Na matemática, dois triângulos de medidas iguais também são ditos semelhantes. Elencamos duas condições para que dois triângulos sejam semelhantes (DANTE, 2014):

- i) os ângulos correspondentes são iguais;
- ii) os lados correspondentes têm medidas de comprimentos proporcionais;

Chamamos de razão de semelhança, um valor k positivo, que relaciona as medidas dos lados correspondentes de dois triângulos semelhantes.(NETO, 2013)

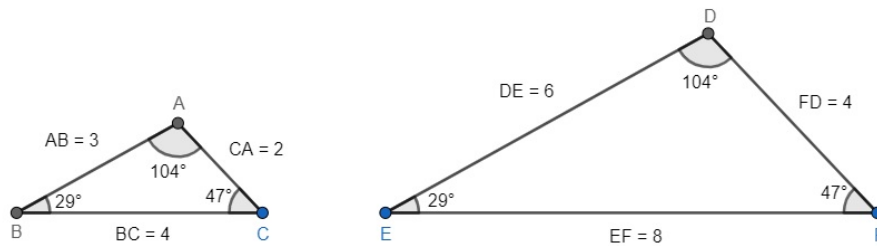


Figura 1.5: Semelhança de triângulos

Notamos que os triângulos ABC e DEF da figura 1.5 são semelhantes, pois:

- i) os ângulos $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$, $\hat{B}\hat{C}\hat{A}$ e $\hat{C}\hat{A}\hat{B}$ são respectivamente iguais aos ângulos $\hat{D}\hat{E}\hat{F}$, $\hat{E}\hat{F}\hat{D}$ e $\hat{F}\hat{D}\hat{E}$.
- ii) o comprimento dos lados são proporcionais, nesse caso, temos que a constante de proporcionalidade é $k = 2$. Veja:

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$3 \cdot 2 = 6$$

$$4 \cdot 2 = 8$$

1.2.1 Teorema Fundamental da Semelhança

Neste tópico vamos apresentar o Teorema Fundamental da Semelhança.

Teorema 1.2.1. *Teorema Fundamental da Semelhança: se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo cruza os outros dois lados formando um novo triângulo, então esses triângulos são semelhantes.*

Para ilustrar o teorema, tomemos o triângulo ABC da figura 1.6:

Agora, tracemos uma reta r paralela ao da \overline{BC} , que corta os lados \overline{AB} e \overline{AC} , como na figura 1.7:

O teorema garante que o triângulo ADE, formado pelo corte da reta r nos lados AB e AC, é semelhante ao triângulo original ABC. Isso ocorre pois o ângulo $\hat{A}\hat{D}\hat{E}$, é igual ao ângulo

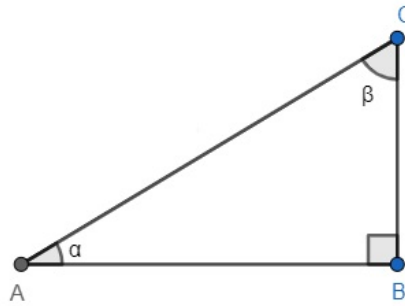


Figura 1.6: Teorema fundamental da trigonometria

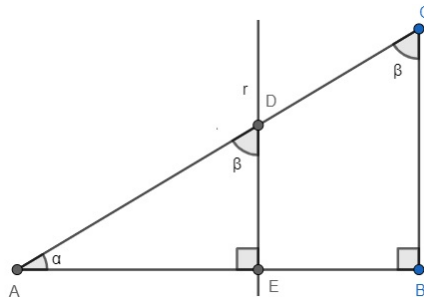


Figura 1.7: Retra r cortando AB e AC

$\hat{A}CB$, e que o ângulo $\hat{A}ED$, é igual ao ângulo $\hat{A}BC$, como podemos observar na figura 1.7.

Para expressar a razão de semelhança k , vamos desmembrar os triângulos conforme a figura 1.8:

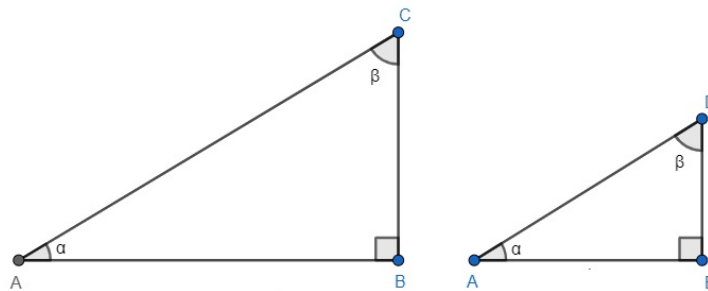


Figura 1.8: Desmembrando os triângulos ABC e ADE

Assim, de acordo com a figura 1.8 podemos escrever a seguinte expressão para calcular a razão de semelhança:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = k$$

1.2.2 Casos de Semelhança entre Triângulos

Temos três critérios para semelhança de triângulos (NETO, 2013):

- i) **Lado, lado, lado:** Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes.
- ii) **Lado, ângulo, lado:** Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos são iguais, então os triângulos são semelhantes.
- iii) **Ângulo, ângulo:** Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Para ilustrar cada um dos critérios, vamos utilizar a figura 1.9 que ilustra o critério i); a figura 1.10 que ilustra o critério ii) e a figura 1.11 que ilustra o critério iii).

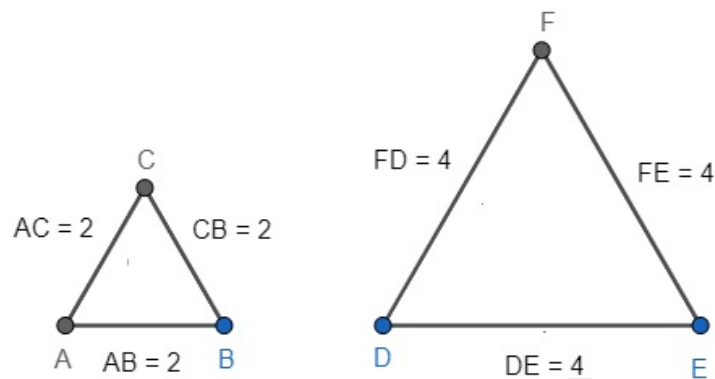


Figura 1.9: Critério i)

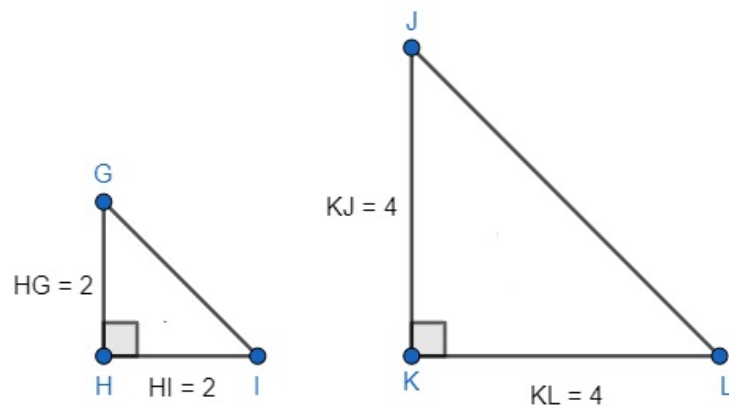


Figura 1.10: Critério ii)

Na figura 1.9, observamos que os lados dos triângulos ABC e DEF são proporcionais, cumprindo dessa forma o critério i). Na figura 1.10, observamos que os triângulos GHI e JKL possuem lados correspondentes proporcionais e que os ângulos compreendidos entre esses ângulos são iguais, cumprindo assim o critério ii). Na figura 1.11, os triângulos MNO e PQR possuem dois ângulos iguais, cumprindo assim o critério iii).

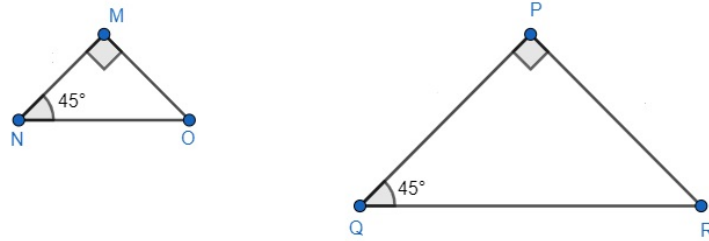


Figura 1.11: Critério iii)

1.3 Trigonometria no Triângulo Retângulo

Inicialmente a trigonometria foi desenvolvida para a resolução de problemas em triângulos, determinando cada uma das medidas de seus três ângulos internos e também a medida de cada um dos seus três lados (LIMA ET AL, 2006). Vamos iniciar nossa abordagem pelo triângulo retângulo.

Definimos triângulo retângulo, como qualquer triângulo que possui um ângulo de 90° ; a figura 1.12, mostra um triângulo retângulo em A.

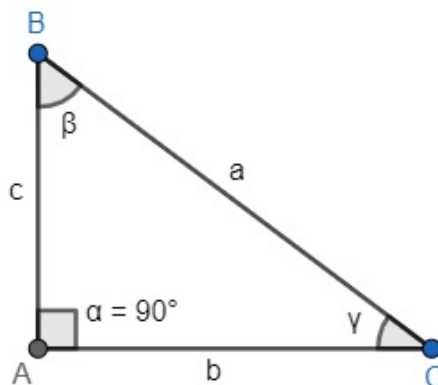


Figura 1.12: Triângulo retângulo

Como o triângulo da figura 1.12 é retângulo, temos:

a = hipotenusa;

b e c = catetos;

α = ângulo de 90° ;

β = ângulo agudo;

γ = ângulo agudo;

Os catetos podem ser chamado de cateto oposto ou cateto adjacente, dependendo do ângulo a ser observado. Pelo ponto de vista do ângulo β , temos:

b = cateto oposto;

c = cateto adjacente;

Pelo ponto de vista do ângulo γ , temos:

$b =$ cateto adjacente;

$c =$ cateto oposto;

Um teorema muito importante utilizada no triângulo retângulo, é o Teorema de Pitágoras, que relaciona o comprimento da hipotenusa através dos catetos. Logo, utilizando o triângulo retângulo da figura 1.12, podemos escrever o Teorema de Pitágoras utilizando a expressão:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A semelhança de triângulos é a base da trigonometria, logo, utilizaremos a semelhança de triângulos para definir às fórmulas de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. (DANTE, 2014)

1.3.1 Seno, Cosseno e Tangente

Utilizando um triângulo retângulo e sendo α um ângulo agudo deste triângulo, podemos definir seno, cosseno e tangente:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{C.O}{Hip} \\ \operatorname{cos}(\alpha) &= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{C.A}{Hip} \\ \operatorname{tan}(\alpha) &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{C.O}{C.A}\end{aligned}$$

1.3.2 Relações entre seno, cosseno e tangente

Podemos destacar duas relações trigonométricas entre seno, cosseno e tangente, com o ângulo α variando de $0^\circ < \alpha < 90^\circ$:

i) $\operatorname{tan}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)}$

ii) $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \operatorname{cos}^2(\alpha) = 1$ (Teorema Fundamental da Trigonometria)

Vamos demonstrar ambos os itens.

Demonstração item i).

Da seção anterior, temos seguintes definições para seno, cosseno e tangente:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{C.O}{hip} \tag{1.3}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{C.A}{hip} \quad (1.4)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{C.O}{C.A} \quad (1.5)$$

Isolando C.O na expressão (1.3) e C.A na expressão (1.4), temos que:

$$C.O = \text{sen}(\alpha) \cdot hip \quad (1.6)$$

$$C.A = \cos(\alpha) \cdot hip \quad (1.7)$$

Substituindo a expressão (1.6) e a expressão (1.7) na expressão (1.5), temos:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot hip}{\cos(\alpha) \cdot hip} \quad (1.8)$$

Simplificando a expressão (1.8), encontramos:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Como queríamos demonstrar.

Demonstração do item ii).

Tomemos o triângulo retângulo ABC na figura 1.13.

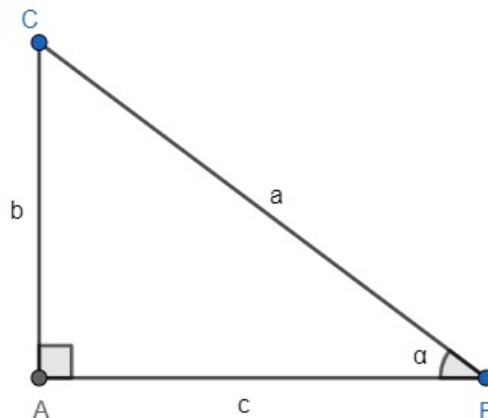


Figura 1.13: Triângulo retângulo

Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos a expressão abaixo:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Dividindo o Teorema de Pitágoras por a^2 , encontramos:

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \quad (1.9)$$

Simplificando (1.9):

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \\ 1 &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Utilizando seno e cosseno no triângulo da figura 1.13, encontramos:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{b}{a} \quad (1.11)$$

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{c}{a} \quad (1.12)$$

Substituindo a expressão (1.11) e a expressão (1.12) na expressão (1.10), encontramos:

$$\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1$$

Como queríamos demonstrar.

1.3.3 Arcos Notáveis

Na seção anterior, mostramos a definição de seno, cosseno e tangente, que relaciona as medidas dos lados do triângulo retângulo; esses valores são encontrados através de uma tabela de razões trigonométricas, que indica valores de acordo com o ângulo. Essa tabela pode ser consultada no Apêndice A do trabalho. Vamos focar nos arcos notáveis.

Temos que algumas medidas de arcos são ditas notáveis, esses arcos são assim conhecidos devido a frequência em que aparecem na trigonometria. Os arcos de 30° , 45° e 60° são arcos notáveis. Com a utilização do triângulo equilátero e de um triângulo isósceles, vamos demonstrar os valores de seno cosseno e tangente para cada um destes ângulos (DANTE, 2014).

Demonstração de seno, cosseno e tangente para o ângulo de 30° e 60° . Para fazer essa demonstração vamos utilizar um triângulo equilátero. Podemos definir triângulo equilátero como um triângulo que possui a medida dos lados iguais e a medida dos ângulos internos também iguais. Assim, tomamos o triângulo equilátero cujo a medida dos lados é l , como mostra a figura 1.14

No triângulo equilátero da figura 1.14, tracemos a altura \overline{CD} , para assim formarmos os triângulos retângulos CAD e CDB, como mostra a figura 1.15.

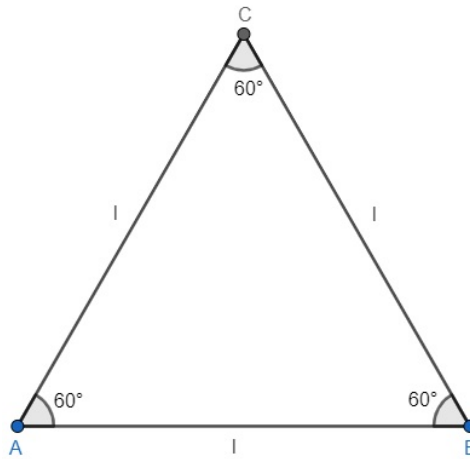


Figura 1.14: Triângulo equilátero

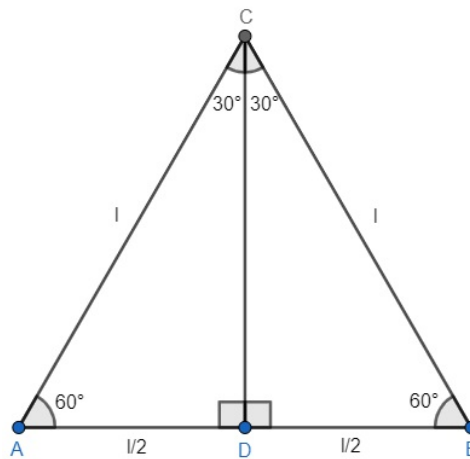


Figura 1.15: Altura CD

Utilizamos o Teorema de Pitágoras em qualquer um dos triângulos retângulos, para

calcular a altura \overline{CD} :

$$\begin{aligned}(\overline{BC})^2 &= (\overline{DB})^2 + (\overline{CD})^2 \Rightarrow \\(l)^2 &= \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (\overline{CD})^2 \Rightarrow \\l^2 &= \frac{l^2}{4} + (\overline{CD})^2 \Rightarrow \\(\overline{CD})^2 &= l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow \\(\overline{CD})^2 &= \frac{4l^2}{4} - \frac{l^2}{4} \Rightarrow \\(\overline{CD})^2 &= \frac{3l^2}{4} \Rightarrow \\ \overline{CD} &= \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \Rightarrow \\ \overline{CD} &= \frac{l\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Conhecendo a altura \overline{CD} , podemos aplicar seno, cosseno e tangente em qualquer um dos dois triângulos retângulos. Dessa forma, utilizando o triângulo CDB, vamos aplicar seno, cosseno e tangente no ângulo de 30° :

$$\begin{aligned}\text{sen}(30^\circ) &= \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \text{sen}(30^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{l} \Rightarrow \text{sen}(30^\circ) = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} \Rightarrow \text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2} \\ \text{cos}(30^\circ) &= \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \Rightarrow \text{cos}(30^\circ) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \Rightarrow \text{cos}(30^\circ) = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} \Rightarrow \text{cos}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{tan}(30^\circ) &= \frac{\overline{DB}}{\overline{CD}} \Rightarrow \text{tan}(30^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \text{tan}(30^\circ) = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tan}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

Utilizando novamente o triângulo retângulo CDB e aplicando seno, cosseno e tangente no ângulo de 60° :

$$\begin{aligned}\text{sen}(60^\circ) &= \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \text{sen}(60^\circ) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \Rightarrow \text{sen}(60^\circ) = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} \Rightarrow \text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{cos}(60^\circ) &= \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \text{cos}(60^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{l} \Rightarrow \text{cos}(60^\circ) = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} \Rightarrow \text{cos}(60^\circ) = \frac{1}{2} \\ \text{tan}(60^\circ) &= \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \Rightarrow \text{tan}(60^\circ) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} \Rightarrow \text{tan}(60^\circ) = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{l} \Rightarrow \text{tan}(60^\circ) = \sqrt{3}\end{aligned}$$

Demonstração de seno, cosseno e tangente para o ângulo de 45° .

Para demonstrar seno, cosseno e tangente do ângulo de 45° , utilizaremos um triângulo isósceles. Definimos triângulo isósceles como qualquer triângulo que possua dois lados iguais e conseqüentemente, o ângulo opostos a esses lados também são iguais.

Para a demonstração, vamos utilizar o triângulo isósceles da figura 1.16:

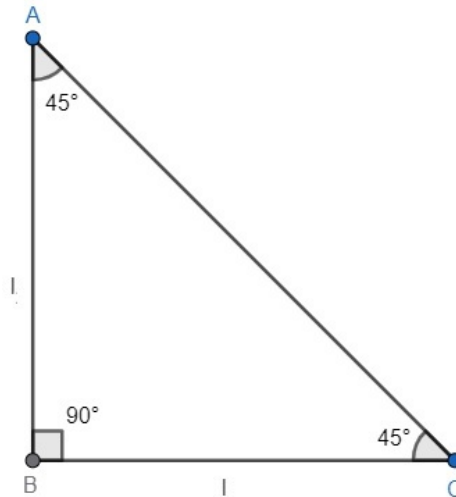


Figura 1.16: Triângulo Isósceles

Utilizaremos o Teorema de Pitágoras, para calcular a hipotenusa \overline{AC} :

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 \Rightarrow$$

$$(\overline{AC})^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow$$

$$(\overline{AC})^2 = 2l^2 \Rightarrow$$

$$(\overline{AC})^2 = \sqrt{2l^2} \Rightarrow$$

$$\overline{AC} = l\sqrt{2}$$

Aplicando seno, cosseno e tangente:

$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Rightarrow \text{sen}(45^\circ) = \frac{l}{l\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos}(45^\circ) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \text{cos}(45^\circ) = \frac{l}{l\sqrt{2}} \Rightarrow \text{cos}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tan}(45^\circ) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \text{tan}(45^\circ) = \frac{l}{l} \Rightarrow \text{tan}(45^\circ) = 1$$

Finalizado o cálculo das medidas dos arcos notáveis, vamos organiza-los na tabela de arcos notáveis.

arco	30°	45°	60°
radianos	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 1.1: Seno, Cosseno e tangente dos arcos notáveis

1.4 Trigonometria em triângulos quaisquer

Podemos expandir a utilização da trigonometria para outros triângulos, além do triângulo retângulo, para isso, utilizamos a lei dos cossenos e a lei dos senos. Neste tópico, vamos mostrar a expressão de cada uma dessas leis e suas respectivas demonstrações.

1.4.1 Lei dos Cossenos

Tomemos o triângulo ABC da figura 1.17:

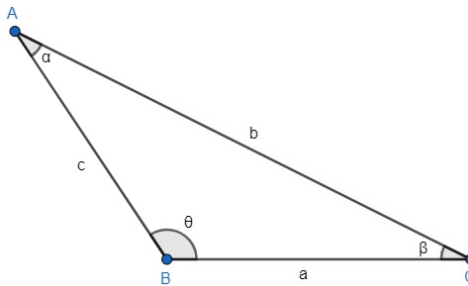


Figura 1.17: Triângulo qualquer

A Lei dos Cossenos relaciona as medidas dos lados com a medida de seu ângulo oposto, utilizamos as fórmulas abaixo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\theta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta)$$

Vamos fazer a demonstração da Lei dos Cossenos em duas partes:

- i) triângulo formado apenas com ângulos agudos;
- ii) triângulo com um ângulo obtuso;

Demonstração do item i

Tomemos o triângulo ABC da figura 1.18, onde os ângulos α , β e θ são ângulos agudos.

Na figura 1.19, traçamos o segmento de reta \overline{AH} , que será a altura h do triângulo ABC, representado anteriormente pela figura 1.18.

Observe também na figura 1.20 que agora temos dois triângulos retângulos, ABH, ACH.

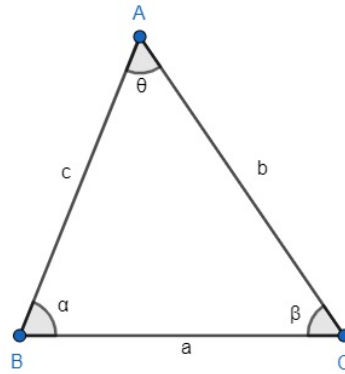


Figura 1.18: Triângulo de ângulos agudos

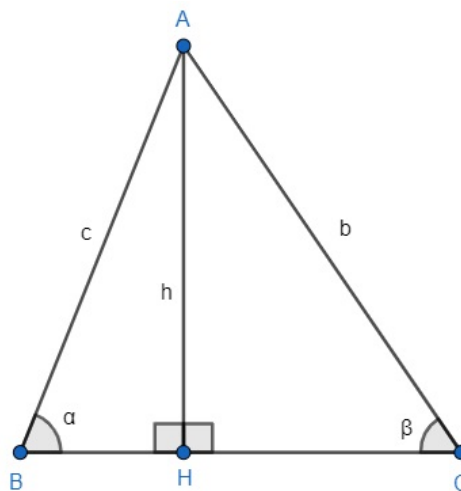


Figura 1.19: Segmento de reta \overline{AH} traçado

No triângulo ACH, aplicando o teorema de pitágoras e o cosseno de β , temos as seguintes expressões:

$$h^2 = b^2 - (a - x)^2 \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \frac{a - x}{b} \Rightarrow \\ x &= -b \cdot \cos(\beta) + a \end{aligned} \quad (1.14)$$

No triângulo ABH, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = h^2 + x^2 \quad (1.15)$$

Substituindo a expressão (1.13) e a expressão (1.14) na expressão (1.15), e efetuando as operações:

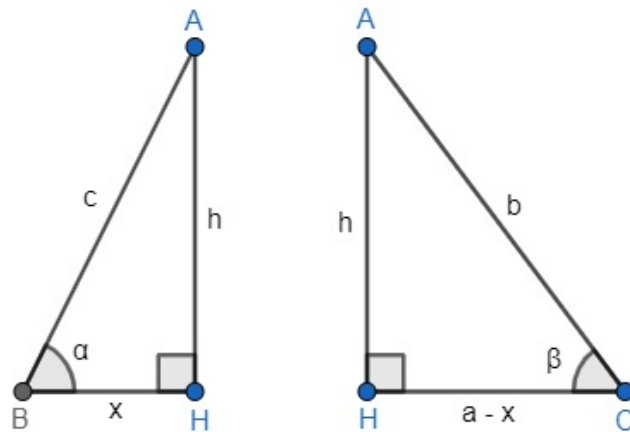


Figura 1.20: Triângulos ABH e ACH

$$c^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow$$

$$c^2 = b^2 - (a - x)^2 + x^2 \Rightarrow$$

$$c^2 = b^2 - (a^2 - 2 \cdot a \cdot x + x^2) + x^2 \Rightarrow$$

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2 \cdot a \cdot x - x^2 + x^2 \Rightarrow$$

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2 \cdot a \cdot x \Rightarrow$$

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b \cdot \cos(\beta) + a) \Rightarrow$$

$$c^2 = b^2 - a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta) + 2a^2 \Rightarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta)$$

Destarte fica demonstrado que a lei dos cossenos para triângulos com ângulos internos agudo, embora tenhamos demonstrado apenas para o lado de medida c , seguindo os mesmos procedimentos demonstra-se também para os lados de medidas a e b .

Demonstração do item ii

Tomemos o triângulo ABC da figura 1.17, onde θ é um ângulo obtuso.

Na figura 1.21, a partir do vértice A, traçamos a altura h , representado pelo segmento de reta \overline{AH} .

Por conseguinte, formamos dois triângulos AHB e AHC, como nos mostra a figura 1.22.

No triângulo AHB vamos aplicar cosseno e o Teorema de Pitágoras, assim, encontramos

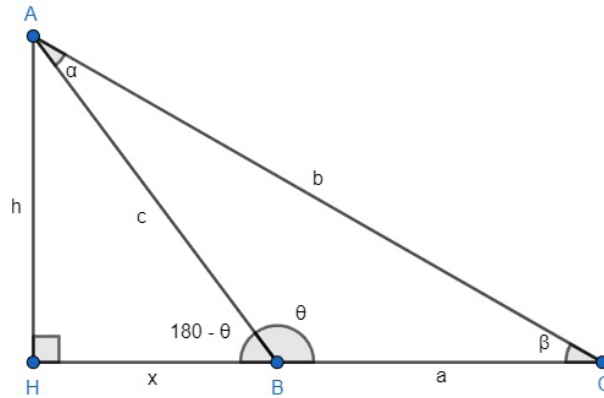


Figura 1.21: Altura h no triângulo obtuso

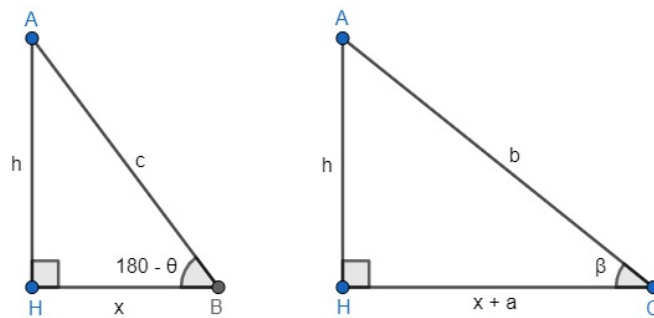


Figura 1.22: Triângulos AHB e AHC

as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \cos(180 - \theta) &= \frac{x}{c} \Rightarrow \\ x &= \cos(180 - \theta) \cdot c \Rightarrow \\ x &= -\cos(\theta) \cdot c \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + x^2 \Rightarrow \\ h^2 &= c^2 - x^2 \end{aligned} \tag{1.17}$$

No triângulo AHC, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$b^2 = h^2 + (x + a)^2 \tag{1.18}$$

Substituindo a expressão (1.16) e a expressão (1.17) na expressão (1.18), e efetuando as

operações, encontramos:

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + (x + a)^2 \Rightarrow \\ b^2 &= c^2 - x^2 + x^2 + 2 \cdot x \cdot a + a^2 \Rightarrow \\ b^2 &= c^2 + 2 \cdot x \cdot a + a^2 \Rightarrow \\ b^2 &= c^2 + 2 \cdot (-\cos(\theta) \cdot c) \cdot a + a^2 \Rightarrow \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\theta) \end{aligned}$$

Portanto, fica demonstrado a lei dos Cossenos para triângulos com um ângulo obtuso.

1.4.2 Lei do Seno

Tomemos um triângulo qualquer, como o triângulo ABC da figura 1.23.

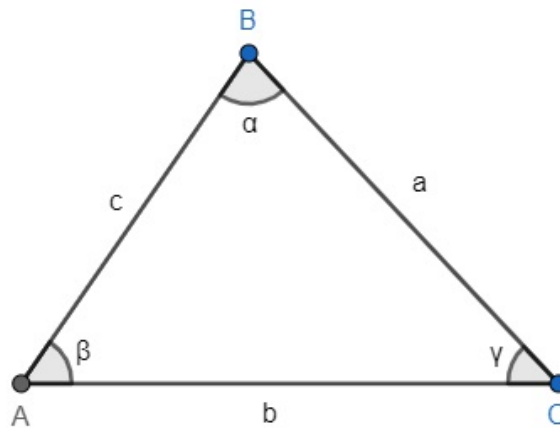


Figura 1.23: Lei do Seno

A Lei dos Senos relaciona as medidas de cada um dos lados do triângulo com seus ângulos opostos, como mostra expressão 1.19:

$$\frac{a}{\text{sen}(\beta)} = \frac{b}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)} \quad (1.19)$$

Segue a demonstração da Lei dos Senos.

Demonstração Utilizaremos o triângulo ABC da figura 1.23. Inicialmente, vamos mostrar que a área de um triângulo pode ser calculada pela metade do produto de dois de seus lados e o seno do ângulo entre esses lados. No triângulo ABC da figura 1.23, tracemos a altura h , representado pelo segmento \overline{BD} , como podemos verificar na figura 1.24.

Podemos calcular a Área (A) do triângulo ABC pela expressão:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad (1.20)$$

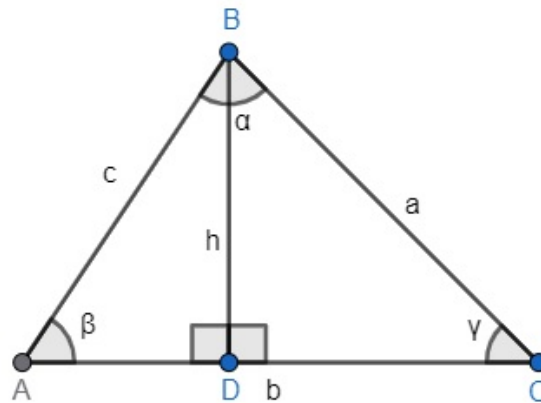


Figura 1.24: Altura h

Aplicando o $\text{sen}(\beta)$ no triângulo ABD da figura 1.24 e isolando h , temos:

$$\text{sen}(\beta) = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \text{sen}(\beta) \quad (1.21)$$

Substituindo a expressão (1.21) na expressão (1.20), podemos determinar a área pela expressão:

$$A = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \text{sen}(\beta) \quad (1.22)$$

Repetindo os mesmos passos para os vértices A e C, encontramos:

$$A = \frac{c \cdot a}{2} \cdot \text{sen}(\alpha) \quad (1.23)$$

$$A = \frac{b \cdot a}{2} \cdot \text{sen}(\gamma) \quad (1.24)$$

Igualando duas a duas as expressões para o cálculo da área e efetuando as operações:

Expressão(1.23) e expressão(1.24):

$$\begin{aligned} \frac{c \cdot a}{2} \cdot \text{sen}(\alpha) &= \frac{b \cdot a}{2} \cdot \text{sen}(\gamma) \Rightarrow \\ \frac{c}{\text{sen}(\gamma)} &= \frac{b}{\text{sen}(\alpha)} \end{aligned}$$

Expressão(1.23) e expressão(1.22):

$$\begin{aligned} \frac{c \cdot a}{2} \cdot \text{sen}(\alpha) &= \frac{b \cdot c}{2} \cdot \text{sen}(\beta) \Rightarrow \\ \frac{a}{\text{sen}(\beta)} &= \frac{b}{\text{sen}(\alpha)} \end{aligned}$$

Expressão(1.24) e expressão(1.22):

$$\begin{aligned} \frac{b \cdot a}{2} \cdot \text{sen}(\gamma) &= \frac{b \cdot c}{2} \cdot \text{sen}(\beta) \Rightarrow \\ \frac{a}{\text{sen}(\beta)} &= \frac{c}{\text{sen}(\gamma)} \end{aligned}$$

Assim, chegamos na expressão abaixo:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}$$

Em vista disso, fica demonstrado a Lei dos Senos. Destaca-se que essa maneira elegante de demonstrar a lei dos senos geralmente não está presente nos livros.

1.4.3 Seno e Cosseno de ângulos obtusos

Ao observarmos a tabela de arcos no apêndice, nota-se que os valores de arcos θ para seno, cosseno e tangente encontram no intervalo:

$$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

Para a utilização das Leis de Seno e Cosseno, é necessário conhecermos valores de seno, cosseno e tangente para ângulos obtusos. Dessa forma, Neto (2013), nos apresenta duas fórmulas para que possamos calcular os valores de seno e cosseno de arcos obtusos:

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\operatorname{cos}(180^\circ - \theta) = -\operatorname{cos}(\theta)$$

1.5 Transformações Trigonométricas

Na trigonometria nem sempre é intuitivo que o seno da soma é diferente da soma dos senos e que o cosseno da soma também é diferente da soma dos cossenos, ou seja:

$$\operatorname{sen}(a + b) \neq \operatorname{sen}(a) + \operatorname{sen}(b) \quad (1.25)$$

$$\operatorname{cos}(a + b) \neq \operatorname{cos}(a) + \operatorname{cos}(b) \quad (1.26)$$

para valores de a e b reais:

Inicialmente, vamos mostrar um contra exemplo para mostrar que de fato a igualdade não ocorre.

Tomemos o triângulo equilátero ABC da figura 1.25.

Tracemos a altura \overline{AD} no triângulo ABC, como mostra a figura 1.26.

Aplicando $\operatorname{sen}(30^\circ)$ nos triângulos ABD e ACD, temos que:

$$\overline{BD} = \operatorname{sen}(30^\circ)$$

$$\overline{CD} = \operatorname{sen}(30^\circ)$$

Logo:

$$\overline{BD} + \overline{CD} = \operatorname{sen}(30^\circ) + \operatorname{sen}(30^\circ) = 1$$

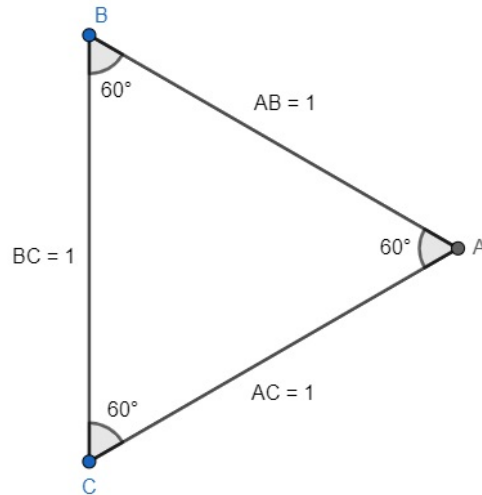


Figura 1.25: Triângulo Equilátero ABC

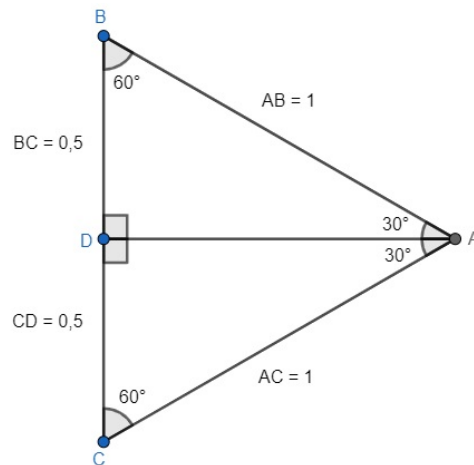


Figura 1.26: Altura \overline{AD} no triângulo equilátero

Entretanto, se fizermos:

$$\begin{aligned}\sin(30^\circ + 30^\circ) &= \sin(60^\circ) \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ &= \sin(60^\circ) \neq 1\end{aligned}$$

Aplicando $\cos(60^\circ)$ nos triângulos ABD e ACD, temos que:

$$\overline{BD} = \cos(60^\circ)$$

$$\overline{CD} = \cos(60^\circ)$$

Logo:

$$\overline{BD} + \overline{CD} = \cos(60^\circ) + \cos(60^\circ) = 1$$

Entretanto, se fizermos:

$$\begin{aligned}\cos(60^\circ + 60^\circ) &= \cos(120^\circ) \\ &= \cos(120^\circ) \neq 1\end{aligned}$$

Como contra exemplo para (1.25) e (1.26) utilizamos o triângulo da figura 1.27:

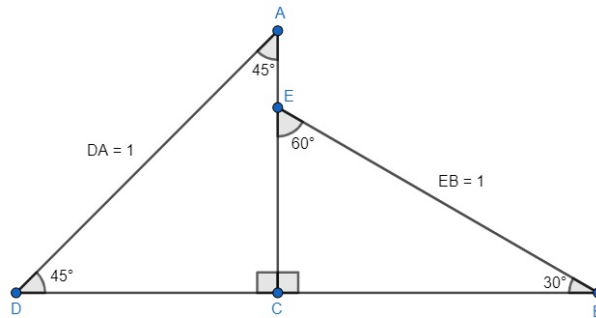


Figura 1.27: Triângulos ACD e ECB

No triângulo ECD vamos aplicar $\text{sen}(45^\circ)$ e no triângulo ACB o $\text{sen}(60^\circ)$. Assim:

$$\overline{CD} = \text{sen}(45^\circ)$$

$$\overline{CB} = \text{sen}(60^\circ)$$

Logo:

$$\overline{CD} + \overline{CB} = \text{sen}(45^\circ) + \text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$$

Entretanto, se fizermos:

$$\begin{aligned} \text{sen}(45^\circ + 60^\circ) &= \text{sen}(105^\circ) \\ &= \text{sen}(105^\circ) \neq \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Aplicando $\text{cos}(45^\circ)$ no triângulo ECD e $\text{cos}(30^\circ)$ no triângulo ACB:

$$\overline{CD} = \text{cos}(45^\circ)$$

$$\overline{CB} = \text{cos}(30^\circ)$$

Logo:

$$\overline{CD} + \overline{CB} = \text{cos}(45^\circ) + \text{cos}(30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$$

Entretanto, se fizermos:

$$\begin{aligned} \text{cos}(45^\circ + 30^\circ) &= \text{cos}(75^\circ) \\ &= \text{cos}(75^\circ) \neq \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Essas considerações mostram que de fato:

$$\text{sen}(a + b) \neq \text{sen}(a) + \text{sen}(b)$$

$$\text{cos}(a + b) \neq \text{cos}(a) + \text{cos}(b)$$

Vejam na próxima subseção, as fórmulas corretas para adição e subtração de arcos.

1.5.1 Adição e subtração de Arcos

Neto (2013), nos apresenta as seguintes fórmulas de adição de arcos:

$$\text{i) } \operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(a)$$

$$\text{ii) } \operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) - \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(a)$$

$$\text{iii) } \cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$$

$$\text{iv) } \cos(a - b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$$

$$\text{v) } \tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

$$\text{vi) } \tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

Vamos demonstrar todos os itens.

Demonstração item i.

Tomemos o triângulo ABC da figura 1.28:

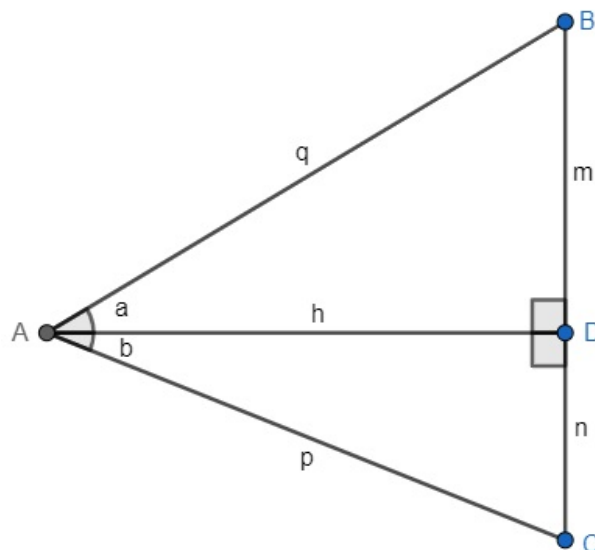


Figura 1.28: Triângulo ABC

No triângulo ABD da figura (1.28), seja A_1 a área deste triângulo e $\cos(a)$:

$$A_1 = \frac{q \cdot h}{2} \cdot \operatorname{sen}(a)$$

$$\cos(a) = \frac{h}{q}$$

No triângulo ADC da figura (1.28), seja A_2 a área deste triângulo e $\cos(b)$:

$$A_2 = \frac{p \cdot h}{2} \cdot \text{sen}(b)$$

$$\cos(b) = \frac{h}{p}$$

Do triângulo ABC, seja (A) a sua área, que pode ser definida por:

$$A = \frac{p \cdot q}{2} \cdot \text{sen}(a + b)$$

Podemos afirmar que a área do triângulo ABC é igual a soma das áreas dos triângulos ABD e ADC. Logo:

$$A = A_1 + A_2$$

Substituindo as expressões:

$$\frac{p \cdot q}{2} \cdot \text{sen}(a + b) = \frac{q \cdot h}{2} \cdot \text{sen}(a) + \frac{p \cdot h}{2} \cdot \text{sen}(b)$$

Simplificando a expressão acima, temos:

$$\begin{aligned} \frac{p \cdot q}{2} \cdot \text{sen}(a + b) &= \frac{q \cdot h}{2} \cdot \text{sen}(a) + \frac{p \cdot h}{2} \cdot \text{sen}(b) \Rightarrow \\ p \cdot q \cdot \text{sen}(a + b) &= q \cdot h \cdot \text{sen}(a) + p \cdot h \cdot \text{sen}(b) \Rightarrow \\ \text{sen}(a + b) &= \frac{q \cdot h}{p \cdot q} \cdot \text{sen}(a) + \frac{p \cdot h}{p \cdot q} \cdot \text{sen}(b) \Rightarrow \\ \text{sen}(a + b) &= \frac{h}{p} \cdot \text{sen}(a) + \frac{h}{q} \cdot \text{sen}(b) \Rightarrow \\ \text{sen}(a + b) &= \text{sen}(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}(b) \cdot \cos(a) \end{aligned}$$

Portanto, fica demonstrado o item i.

Demonstração do item ii.

Para demonstrar o item ii, vamos partir do item i. Inicialmente, faremos a equivalência:

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a + (-b))$$

Do item i, escrevemos:

$$\text{sen}(a + (-b)) = \text{sen}(a) \cdot \cos(-b) + \text{sen}(-b) \cdot \cos(a)$$

Logo:

$$\text{sen}(a + (-b)) = \text{sen}(a) \cdot \cos(-b) + \text{sen}(-b) \cdot \cos(a) \quad (1.27)$$

Utilizaremos as seguintes relações:

$$\text{sen}(-b) = -\text{sen}(b) \quad (1.28)$$

$$\cos(-b) = \cos(b) \quad (1.29)$$

Substituindo as expressões (1.28) e (1.29) na expressão (1.27), temos:

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) - \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(a)$$

Assim, fica demonstrado o item ii.

Demonstração do item iii.

Para demonstrar o item iii, vamos inicialmente, demonstrar a seguinte expressão:

$$\operatorname{sen}(90^\circ - x) = \cos(x) \quad (1.30)$$

$$\cos(90^\circ - x) = \operatorname{sen}(x) \quad (1.31)$$

Desenvolvendo a expressão (1.30), a partir de $\operatorname{sen}(90^\circ - x)$, encontramos:

$$\operatorname{sen}(90^\circ - x) = \operatorname{sen}(90^\circ) \cdot \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(90^\circ) \quad (1.32)$$

Consultando a tabela de arcos trigonométricos no Apêndice A deste trabalho, podemos verificar que:

$$\operatorname{sen}(90^\circ) = 1$$

$$\cos(90^\circ) = 0$$

Substituindo os valores consultados na expressão (1.32) e efetuando as operações, temos:

$$\operatorname{sen}(90^\circ - x) = \operatorname{sen}(90^\circ) \cdot \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(90^\circ) \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(90^\circ - x) = 1 \cdot \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(90^\circ - x) = \cos(x)$$

Desenvolvendo a expressão (1.31), a partir de $\cos(90^\circ - x)$, encontramos:

$$\cos(90^\circ - x) = \cos(90^\circ) \cdot \cos(x) + \operatorname{sen}(90^\circ) \cdot \operatorname{sen}(x) \Rightarrow$$

$$\cos(90^\circ - x) = 0 \cdot \cos(x) + 1 \cdot \operatorname{sen}(x) \Rightarrow$$

$$\cos(90^\circ - x) = \operatorname{sen}(x)$$

Demonstrada as expressões (1.30) e (1.31), podemos demonstrar o item iii). Portanto:

$$\cos(x) = \operatorname{sen}(90^\circ - x) \quad (1.33)$$

Fazendo $x = a + b$; temos:

$$\cos(a + b) = \operatorname{sen}(90^\circ - (a + b)) \Rightarrow$$

$$\cos(a + b) = \operatorname{sen}((90^\circ - a) - b)$$

Vamos desenvolver o termo $\text{sen}((90^\circ - a) - b)$:

$$\text{sen}((90^\circ - a) - b) = \text{sen}(90^\circ - a) \cdot \cos(b) - \text{sen}(b) \cdot \cos(90^\circ - a) \quad (1.34)$$

Das expressões (1.30) e (1.31), podemos afirmar que:

$$\text{sen}(90^\circ - a) = \cos(a) \quad (1.35)$$

$$\cos(90^\circ - a) = \text{sen}(a) \quad (1.36)$$

Substituindo as expressões (1.35) e (1.36) na expressão (1.34), encontramos:

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)$$

Portanto, concluímos a demonstração do item iii.

Demonstração do item iv.

Para demonstrar o item iv, vamos partir da expressão do item iii. Logo, vamos utilizar a seguinte equivalência:

$$\cos(a - b) = \cos(a + (-b))$$

Portanto:

$$\cos(a + (-b)) = \cos(a) \cdot \cos(-b) - \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(-b) \quad (1.37)$$

Sabendo que:

$$\text{sen}(-b) = -\text{sen}(b) \quad (1.38)$$

$$\cos(-b) = \cos(b) \quad (1.39)$$

Logo, substituindo (1.38) e (1.39) em (1.37), obtemos:

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)$$

Desta forma, demonstramos o item iv.

Demonstração do item v.

Sabemos que:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad (1.40)$$

Fazendo:

$$\alpha = a + b \quad (1.41)$$

Assim, substituindo (1.41) em (1.40):

$$\tan(a + b) = \frac{\text{sen}(a + b)}{\cos(a + b)}$$

Substituindo as expressões $\text{sen}(a + b)$ e $\text{cos}(a + b)$:

$$\tan(a + b) = \frac{\text{sen}(a) \cdot \text{cos}(b) + \text{cos}(a) \cdot \text{sen}(b)}{\text{cos}(a) \cdot \text{cos}(b) - \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da expressão por:

$$\frac{1}{\text{cos}(a) \cdot \text{cos}(b)}$$

Temos:

$$\tan(a + b) = \frac{\frac{\text{sen}(a) \cdot \text{cos}(b) + \text{cos}(a) \cdot \text{sen}(b)}{\text{cos}(a) \cdot \text{cos}(b)}}{\frac{\text{cos}(a) \cdot \text{cos}(b) - \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}{\text{cos}(a) \cdot \text{cos}(b)}}$$

Simplificando a expressão, temos que:

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

Demonstração do item vi.

Para demonstrar o item vi, utilizamos os mesmos passos do item v. Para culminar, tomando:

$$\alpha = a - b$$

Seguindo os mesmos passos do item v, verificamos que:

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

Demonstrando, dessa forma, o item vi.

1.5.2 Arco duplo

Temos as seguintes identidades trigonométricas para arcos duplos:

- i) $\text{sen}(2a) = 2 \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{cos}(a)$
- ii) $\text{cos}(2a) = \text{cos}^2(a) - \text{sen}^2(a)$
- iii) $\tan(2a) = \frac{2 \cdot \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

Faremos as demonstrações de todos os itens.

Demonstração do item i.

Sabemos que:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a) \cdot \text{cos}(b) + \text{sen}(b) \cdot \text{cos}(a)$$

Fazendo $b = a$ e desenvolvendo a expressão:

$$\begin{aligned} \text{sen}(a + a) &= \text{sen}(a) \cdot \text{cos}(a) + \text{sen}(a) \cdot \text{cos}(a) \Rightarrow \\ \text{sen}(2a) &= 2 \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{cos}(a) \end{aligned}$$

Portanto, fica demonstrado o item i.

Demonstração do item ii.

Sabemos que:

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$$

Fazendo $b = a$ e desenvolvendo a expressão:

$$\begin{aligned}\cos(a + a) &= \cos(a) \cdot \cos(a) - \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(a) \Rightarrow \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)\end{aligned}$$

Assim, demonstra-se o item ii.

Demonstração do item iii.

Sabemos que:

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

Fazendo $b = a$ e desenvolvendo a expressão:

$$\begin{aligned}\tan(a + a) &= \frac{\tan(a) + \tan(a)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(a)} \Rightarrow \\ \tan(2a) &= \frac{2 \cdot \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}\end{aligned}$$

Então, fica demonstrado o item iii.

1.5.3 Arco Metade

Temos as seguintes identidades trigonométricas para arco metade:

$$\text{i) } \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$$

$$\text{ii) } \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$$

Faremos as demonstrações de ambos os itens.

Demonstração do item i.

Para demonstrar o item i, vamos partir da identidade de arco duplo do cosseno descrita abaixo:

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a) \tag{1.42}$$

Utilizando o teorema fundamental da trigonometria, temos que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2(a) + \cos^2(a) &= 1 \Rightarrow \\ \operatorname{sen}^2(a) &= 1 - \cos^2(a)\end{aligned} \tag{1.43}$$

Substituindo a expressão (1.43) na expressão (1.42), temos:

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - [1 - \cos^2(a)] \quad (1.44)$$

Desenvolvendo a expressão (1.44), encontramos:

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2(a) - [1 - \cos^2(a)] \Rightarrow \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - 1 + \cos^2(a) \Rightarrow \end{aligned}$$

Portanto:

$$\cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1 \quad (1.45)$$

Fazendo:

$$a = \frac{x}{2} \quad (1.46)$$

Substituindo a expressão (1.46) na expressão (1.45):

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 2 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow \\ \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 + \cos(x)}{2} \end{aligned}$$

Assim, fica demonstrado o item i.

Demonstração do item ii.

Para demonstrar o item i, vamos partir da identidade de arco duplo do cosseno descrita abaixo:

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a) \quad (1.47)$$

Utilizando o teorema fundamental da trigonometria, temos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(a) + \cos^2(a) &= 1 \Rightarrow \\ \cos^2(a) &= 1 - \operatorname{sen}^2(a) \end{aligned} \quad (1.48)$$

Substituindo a expressão (1.48) na expressão (1.47), temos:

$$\cos(2a) = 1 - \operatorname{sen}^2(2a) - \operatorname{sen}^2(2a) \quad (1.49)$$

Desenvolvendo a expressão (1.49), encontramos:

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= 1 - \operatorname{sen}^2(2a) - \operatorname{sen}^2(2a) \Rightarrow \\ \cos(2a) &= 1 - \operatorname{sen}^2(2a) - \operatorname{sen}^2(2a) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\cos(2a) = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(2a) \quad (1.50)$$

Fazendo:

$$a = \frac{x}{2} \quad (1.51)$$

Substituindo a expressão (1.51) na expressão (1.50):

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \\ \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(x)}{2}\end{aligned}$$

Portanto, fica demonstrado o item ii.

2 Desenvolvimento do Projeto

Neste capítulo abordaremos de forma breve a história da bicicleta e alguns dados sobre sua utilização. Trataremos o conceito de torque e apresentaremos a ideia do projeto, os modelos de funcionamento formulados e uma comparação de torque na bicicleta comum e da bicicleta proposta por esse projeto.

2.1 Um pouco da história da bicicleta

A bicicleta foi inventada no ano de 1817, pelo barão Von Drais, que queria se locomover mais rápido pelos seus jardins sem ficar cansado (PHILBIN, 2006). Nestes mais de dois séculos desde a sua invenção, com novos materiais, novos designer, novos componentes e etc, sempre buscando melhor rendimento e conforto para os ciclistas.

A data de 03 de junho é conhecido como dia da bicicleta, o Jornal Cruzeiro do Vale no dia 03/06/2024, traçou uma linha do tempo sobre a evolução da bicicleta, que podemos conferir na figura 2.1.

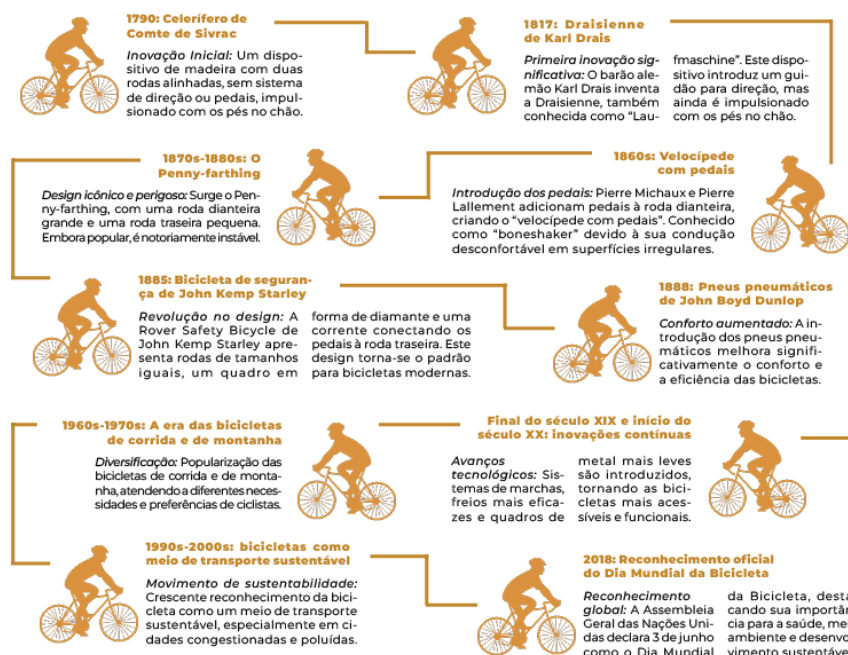


Figura 2.1: Evolução da Bicicleta

A bicicleta se configurou como um meio de transporte muito popular. Apenas um por cento dos brasileiros não andam de bicicleta (DOS SANTOS, 2024). Estima-se em 33,2 milhões a frota de bicicletas no Brasil no ano de 2019.(PEREIRA, 2024)

Atualmente há esforços para a melhoria do meio ambiente e também para melhorar a mobilidade urbana nos grandes centros. Podemos elencar vários benefícios para uma maior utilização da bicicleta:(SANTOS, SANTOS, 2022)

- baixo custo;
- proporciona a prática de atividade física;
- não emite gases poluentes;

“O conjunto homem-bicicleta é o mais eficiente meio de locomoção conhecido, visto que nenhum organismo vivo ou veículo motorizado desprende igual ou menor quantidade de energia para deslocar a mesma massa em igual distância.”(DOS SANTOS, 2024, p. 16)

2.2 A Ideia do Projeto

Considerando as dificuldades apresentadas por alunos e professores no processo de ensino da matemática, que foram abordadas na seção de Motivação para o estudo, e nos beneficiando da popularidade da bicicleta entre jovens e adultos, podemos utilizar a trigonometria do Ensino Médio para propor uma inovação tecnológica na bicicleta.

O ato de pedalar consiste no ciclista depositar energia no pedal, fazendo o pedivela girar, que através de correntes e um conjunto de engrenagens transmite o movimento para as rodas, proporcionando a locomoção da bicicleta.(DOS SANTOS, 2024) Na figura 2.2 podemos observar um conjunto pedivela pedal.



Figura 2.2: Conjunto pedivela pedal

De fato, queremos propor um modelo de pedalar que possibilita um torque maior ao ciclista em determinados instantes do movimento. Uma forma fácil de fazer isso seria simplesmente aumentar o tamanho do pedivela, mas isso pode causar problemas para o ciclista, devido

à limitação do tamanho de suas pernas. Além disso, um aumento muito expressivo do pedivela pode gerar problemas na geometria de construção da bicicleta. É preciso levar em consideração que atualmente o tamanho do pedivela de uma bicicleta obedece uma padronização, principalmente devido a altura do ciclista.

A ideia do projeto é desenvolver uma nova maneira de pedalar, que se diferencia do modo atual em que o pedivela tem um comprimento fixo, para um pedivela que aumenta de tamanho no momento em que o ciclista consegue colocar mais força no pedal, e que diminui no momento em que o ciclista precisa completar o movimento circular.

Para desenvolver esse projeto, iremos utilizar apenas o conteúdo de trigonometria do Ensino Médio, visando assim aumentar o interesse dos alunos em aprender o conteúdo.

2.2.1 Traço do modelo 1 do pedivela aumentável

A primeira ideia que tivemos foi construir um sistema com dois pedivelas acoplados de tal forma que o ângulo do pedivela aumentável variasse de acordo com o ângulo do pedivela principal. Para isso, à medida que o pedivela variável rotaciona 360° , o pedivela aumentável também deve rotacionar 360° . Para tal vamos elaborar um modelo matemático que descreva essa situação. Para elaborarmos esse modelo matemático, utilizaremos apenas as expressões desenvolvidas no primeiro capítulo deste trabalho.

Considere a Figura 2.3, temos um plano cartesiano cuja a origem é o ponto O , o segmento \overline{OA} indica o pedivela principal, o segmento \overline{AP} indica pedivela aumentável, ambos com comprimento r , o segmento \overline{OP} seria o tamanho do pedivela efetivo, o ponto A um ponto de acoplamento entre os pedivelas e o ponto P o pedal da bicicleta.

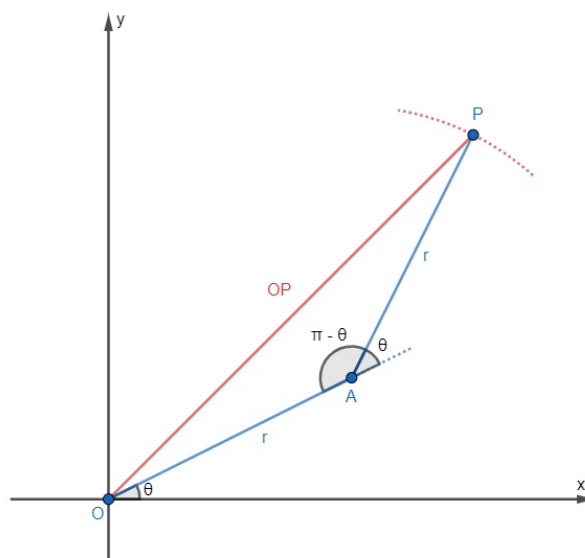


Figura 2.3: Modelo 1

Neste sistema o ângulo entre os pedivelas em $A(\pi - \theta)$ varia de acordo com o ângulo entre o pedivela principal e o eixo $x(\theta)$. Sabendo que o ângulo formado entre os segmentos \overline{OA} e \overline{AP} seja de $\pi - \theta$, logo, temos o triângulo isósceles OAP, como mostra a figura 2.4:

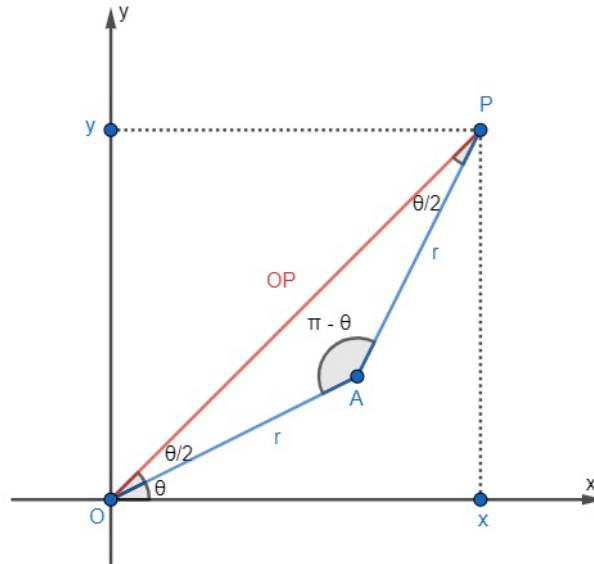


Figura 2.4: Desenvolvimento do modelo 1

Desenvolvimento matemático do traço do modelo 1

Ao acoplar um novo componente à bicicleta, surge a preocupação com a forma da curva gerada por esse sistema durante a pedalada. É fundamental que a curva gerada descreva um movimento circular, semelhante ao atual, quando o ciclista pedala. Portanto, precisamos verificar se o modelo proposto gera uma trajetória circular, ou seja, uma circunferência. Para isso, vamos utilizar as coordenada x e y do ponto P em função de θ e, conseqüentemente, o traço $t(\theta)$:

$$t(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$$

Temos que o triângulo OAP é isósceles, esse triângulo foi abordado no capítulo anterior deste trabalho, uma das característica desse triângulo é que dois de seus ângulos são iguais, conseqüentemente, temos que os ângulos \hat{AOP} e \hat{OPA} são iguais, como podemos verificar na figura 2.4.

Somando os ângulos $\theta + \frac{\theta}{2}$, obtemos:

$$\theta + \frac{\theta}{2} = \frac{3\theta}{2}$$

Logo, temos o triângulo retângulo da figura 2.5:

Aplicando as expressões de seno e cosseno, que foram definidas na seção 1.3.1, temos:

$$\text{sen} \left(\frac{3\theta}{2} \right) = \frac{y}{OP} \quad (2.1)$$

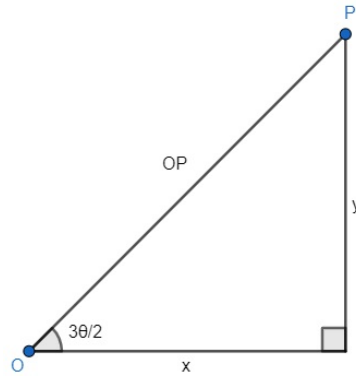


Figura 2.5: Triângulo retângulo do modelo 1

$$\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) = \frac{x}{\overline{OP}} \quad (2.2)$$

Para determinar \overline{OP} , vamos aplicar a Lei dos Cossenos, já abordada na seção 1.4.1, no triângulo isósceles da figura 2.6:

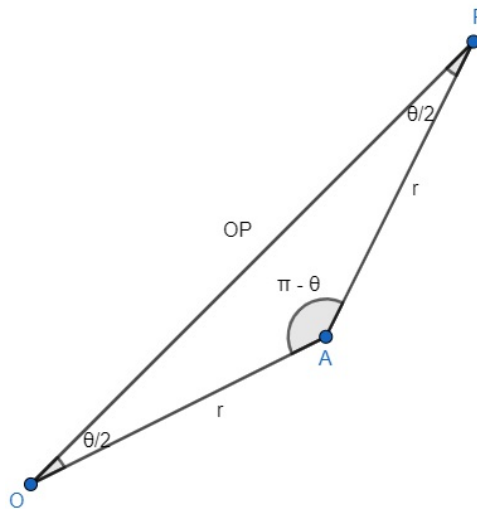


Figura 2.6: Triângulo isósceles OAP

Sabendo que:

$$\cos(\pi) = -1$$

$$\text{sen}(\pi) = 0$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 (\overline{OP})^2 &= r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos(\pi - \theta) \\
 (\overline{OP})^2 &= 2 \cdot r^2 - 2 \cdot r^2 \cdot \cos(\pi - \theta) \\
 (\overline{OP})^2 &= 2 \cdot r^2 - 2 \cdot r^2 \cdot [\cos(\pi) \cdot \cos(\theta) + \text{sen}(\pi) \cdot \text{sen}(\theta)] \\
 (\overline{OP})^2 &= 2r^2 - 2r^2 \cdot [(-1) \cdot \cos(\theta) + 0 \cdot \text{sen}(\theta)] \\
 (\overline{OP})^2 &= 2r^2 - 2r^2 \cdot (-\cos(\theta)) \\
 (\overline{OP})^2 &= 2r^2(1 + \cos(\theta))
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Utilizando a identidade de arco metade, demonstrada na seção 1.5.3, temos:

$$1 + \cos(\theta) = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{2.4}$$

Aplicando a expressão 2.4 na expressão 2.3, encontramos:

$$\begin{aligned}
 (\overline{OP})^2 &= 2r^2 \left(2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \\
 (\overline{OP})^2 &= 4r^2 \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)
 \end{aligned}$$

Como $\overline{OP} \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
 (\overline{OP}) &= \sqrt{4r^2 \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)} \Rightarrow \\
 \overline{OP} &= 2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Substituindo em (2.1), temos:

$$\begin{aligned}
 \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) &= \frac{y}{\overline{OP}} \\
 \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) &= \left(\frac{y}{2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) \\
 y(\theta) &= 2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Substituindo em (2.2), temos:

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) &= \frac{x}{\overline{OP}} \Rightarrow \\
 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) &= \left(\frac{x}{2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) \Rightarrow \\
 x(\theta) &= 2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como r é constante, consideramos que x e y está em função de θ , assim, temos o traço $t(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$, do modelo 1:

$$t(\theta) = \left(2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right), 2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right), \theta \in [0, 2\pi) \quad (2.8)$$

Após calcularmos a expressão que designa o traço do modelo 1, vamos verificar se a curva do traço gera uma circunferência. Para isso, vamos utilizar o *geogebra* e seguir o roteiro abaixo:

- i) Na aba ferramenta, criar dois controles deslizantes, um para a incógnita r e outro para a incógnita θ .
- ii) Dentro da janela de controle deslizante especificar os intervalos de $\theta = [0, 2\pi]$ e $r = [18, 22]$;
- iii) Na aba álgebra, escrever o traço do modelo;
- iv) Com o botão direito do mouse, clique sobre o traço e habilite o rastro;
- v) Com o botão direito do mouse, acione a animação da incógnita θ

Assim, a figura 2.7 nos mostra a curva gerada por $t(\theta)$ do modelo 1.

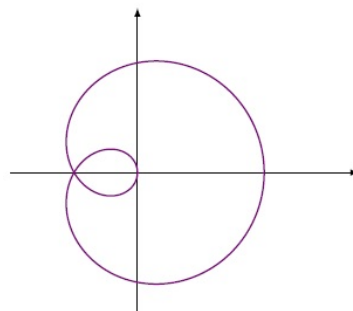


Figura 2.7: Flor de pétala

Portanto, a curva formada é uma flor de pétala, observada na Figura 2.7 que embora seja uma curva elegante, não é indicada para descrever o movimento do pedal, pois, o movimento não é circular. Caso não seja possível dispor de um recurso computacional, é possível verificar matematicamente que o traço $t(\theta)$ possui uma auto intersecção.

Para mostrarmos a existência de uma autointersecção no traço $t(\theta)$, precisamos encontrar dois valores distintos para θ que resulta no mesmo ponto no plano cartesiano. No caso do nosso

traço $t(\theta)$, temos que esses valores são $\theta = \frac{2\pi}{3}$ e $\theta = \frac{4\pi}{3}$. Vamos calcular x e y para cada um dos valores.

O Apêndice A deste trabalho, apresenta a Tabela de Arcos Trigonômétricos. Inicialmente, para tornar mais fácil a consulta ao apêndice, vamos converter os valores de radianos para graus, para isso utilizaremos a expressão para conversão de unidades de ângulos vista no capítulo anterior. Assim, converteremos inicialmente o valor de $\frac{2\pi}{3}$ iniciamos com a expressão:

$$\pi = 180^\circ$$

Multiplicando ambos os lados da expressão por $\frac{2}{3}$, encontramos:

$$\frac{2}{3} \cdot \pi = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ$$

Efetuando os cálculos e simplificando, encontramos:

$$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

Da mesma forma, vamos proceder para o ângulo de $\frac{4\pi}{3}$. Logo:

$$\frac{4\pi}{3} = 240^\circ$$

Convertidas as medidas, vamos calcular o ponto de autointersecção, inicialmente para $\theta = 120^\circ$. Para x , temos que:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= 2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \Rightarrow \\ x(120^\circ) &= 2r \cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right) \cos\left(\frac{3 \cdot 120^\circ}{2}\right) \Rightarrow \\ x(120^\circ) &= 2r \cdot \cos(60^\circ) \cdot \cos(180^\circ) \end{aligned}$$

Como abordamos na seção 1.3.3, sabemos que o ângulo de 60° é um arco notável, logo encontramos o seu valor de seno e cosseno correspondente na tabela de arco notáveis da seção 1.3.3. Logo:

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

É necessário encontrarmos o $\cos(180^\circ)$, para isso, vamos utilizar a expressão $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos(\theta)$ abordada na seção 1.4.3. Logo:

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - \theta) &= -\cos(\theta) \Rightarrow \\ \cos(180^\circ - 180^\circ) &= -\cos(180^\circ) \Rightarrow \\ \cos(0^\circ) &= -\cos(180^\circ) \end{aligned}$$

Consultando o apêndice A desse trabalho, verificamos que o $\cos(0^\circ) = 1$. Assim:

$$\cos(180^\circ) = -1$$

Portanto:

$$\begin{aligned} x(120^\circ) &= 2r \cdot \cos(60^\circ) \cdot \cos(180^\circ) \Rightarrow \\ x(120^\circ) &= 2r \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \Rightarrow \\ x(120^\circ) &= -r \end{aligned}$$

Para y , temos que:

$$\begin{aligned} y(\theta) &= 2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \Rightarrow \\ y(120^\circ) &= 2r \cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right) \sin\left(\frac{3 \cdot 120^\circ}{2}\right) \Rightarrow \\ y(120^\circ) &= 2r \cdot \cos(60^\circ) \cdot \sin(180^\circ) \end{aligned}$$

Assim como fizemos para x , vamos proceder da mesma maneira para encontrarmos os valor de $\sin(180^\circ)$, utilizando a expressão $\sin(180^\circ - \theta) = \sin(\theta)$, também abordada na seção 1.4.3. Logo:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - x) &= \sin(x) \Rightarrow \\ \sin(180^\circ - 180^\circ) &= \sin(180^\circ) \Rightarrow \\ \sin(0^\circ) &= \sin(180^\circ) \end{aligned}$$

Consultando o apêndice A desse trabalho, verificamos que o $\sin(0^\circ) = 0$. Assim:

$$\sin(180^\circ) = 0$$

Portanto:

$$\begin{aligned} y(120^\circ) &= 2r \cdot \cos(60^\circ) \cdot \sin(180^\circ) \Rightarrow \\ y(120^\circ) &= 2r \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 \Rightarrow \\ y(120^\circ) &= 0 \end{aligned}$$

Finalizando os cálculos, temos que para $\theta = 120^\circ$ temos o ponto $(-r, 0)$. Faremos novamente os cálculos, para $\theta = 240^\circ$. Para x , temos que:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= 2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \Rightarrow \\ x(240^\circ) &= 2r \cos\left(\frac{240^\circ}{2}\right) \cos\left(\frac{3 \cdot 240^\circ}{2}\right) \Rightarrow \\ x(240^\circ) &= 2r \cdot \cos(120^\circ) \cdot \cos(360^\circ) \end{aligned}$$

Sabendo que o ângulo de 120° é obtuso, temos:

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - 120^\circ) &= -\cos(120^\circ) \Rightarrow \\ \cos(60^\circ) &= -\cos(120^\circ)\end{aligned}$$

Utilizando a tabela de arco notáveis, verificamos que:

$$\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$$

Temos que:

$$\cos(360^\circ) = \cos(0^\circ) = 1$$

Portanto:

$$\begin{aligned}x(240^\circ) &= 2r \cdot \cos(120^\circ) \cdot \cos(360^\circ) \Rightarrow \\ x(240^\circ) &= 2r \cdot -\frac{1}{2} \cdot 1 \Rightarrow \\ x(240^\circ) &= -r\end{aligned}$$

Para y , temos que:

$$\begin{aligned}y(\theta) &= 2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \Rightarrow \\ y(240^\circ) &= 2r \cos\left(\frac{240^\circ}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3 \cdot 240^\circ}{2}\right) \Rightarrow \\ y(240^\circ) &= 2r \cdot \cos(120^\circ) \cdot \operatorname{sen}(360^\circ)\end{aligned}$$

Assim como fizemos para x , vamos proceder da mesma maneira para encontrarmos os valor de $\operatorname{sen}(360^\circ)$. Logo:

$$\operatorname{sen}(360^\circ) = \operatorname{sen}(0) = 0$$

Portanto:

$$\begin{aligned}y(240^\circ) &= 2r \cdot \cos(120^\circ) \cdot \operatorname{sen}(360^\circ) \Rightarrow \\ y(240^\circ) &= 2r \cdot -\frac{1}{2} \cdot 0 \Rightarrow \\ y(240^\circ) &= 0\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que o traço $t(\theta)$ possui uma intersecção no ponto $(-r, 0)$.

2.2.2 Traço do modelo 2 do pedivela aumentável

Como a curva gerada pelo modelo 1 não obedece o movimento circular, implementamos uma sutil modificação no modelo 1, em que o ângulo entre o pedivela principal e o pedivela aumentável varia da mesma forma descrita no modelo anterior, no entanto orientado no sentido

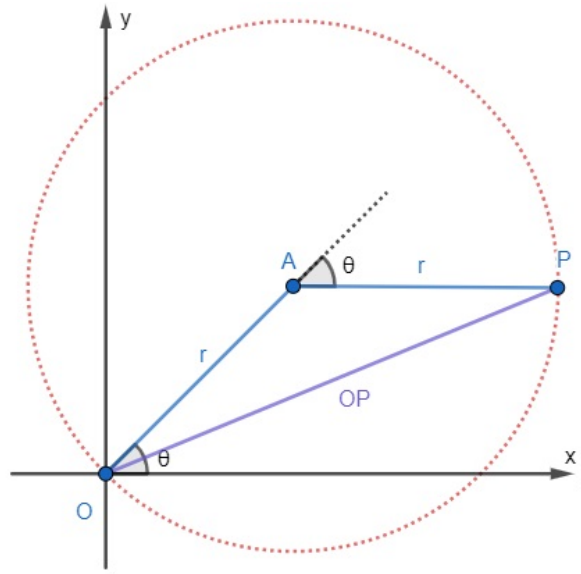


Figura 2.8: Modelo 2

oposto. Vamos descrever matematicamente o funcionamento do novo modelo. Considere no plano cartesiano o segmento \overline{OA} de comprimento r , em que O é a origem. Esse segmento forma um ângulo θ com o eixo x , orientado no sentido anti-horário, como mostra a figura 2.8.

Desenvolvimento matemático do traço do modelo 2

Partindo do modelo 1, temos que o ângulo formado entre os segmentos \overline{OA} e \overline{AP} seja de $\pi - \theta$, dessa forma temos o triângulo isósceles OAP , como mostra a figura 2.9

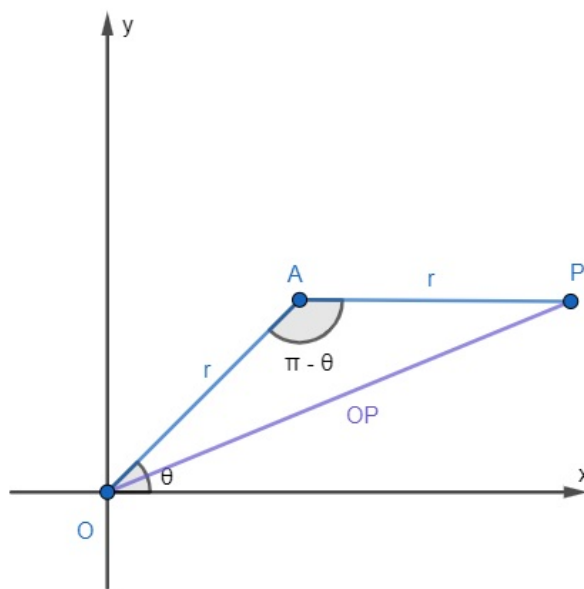


Figura 2.9: Desenvolvimento do Modelo 2

Como o triângulo OAP é isósceles, temos que os ângulos \hat{AOP} e \hat{POA} são iguais, como mostra a figura 2.10

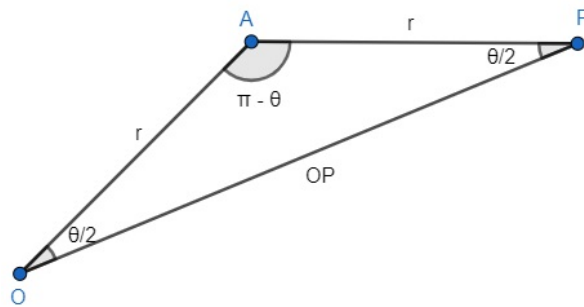


Figura 2.10: ângulos \widehat{AOP} e \widehat{POA}

Agora, vamos utilizar o triângulo retângulo da figura 2.11 para desenvolver o traço $t(\theta)$ do Modelo 2.

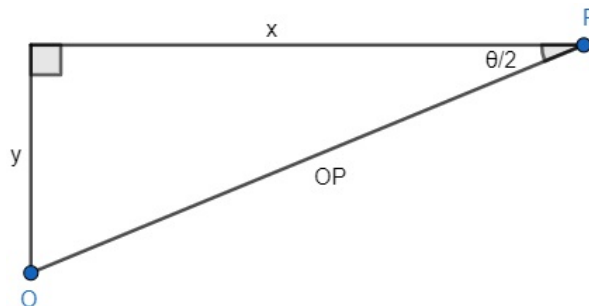


Figura 2.11: Triângulo retângulo Modelo 2

Aplicando seno e cosseno no triângulo retângulo da figura 2.11, expressões definidas na seção 1.3.1 e utilizada no modelo 1, encontramos:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{x}{\overline{OP}} \quad (2.9)$$

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{\overline{OP}} \quad (2.10)$$

Para determinar \overline{OP} , vamos aplicar a Lei dos Cossenos, utilizada no modelo 1, no triângulo isósceles da figura 2.12.

Aplicando a lei dos cossenos:

$$\begin{aligned} (\overline{OP})^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(\pi - \theta) \\ (\overline{OP})^2 &= 2r^2 - 2r^2 \cos(\pi - \theta) \\ (\overline{OP})^2 &= 2r^2 - [1 - \cos(\pi - \theta)] \\ (\overline{OP})^2 &= 2r^2 - [1 - (\cos \pi \cdot \cos(\theta) + \sin \pi \cdot \sin \theta)] \\ (\overline{OP})^2 &= 2r^2 - [1 - (-1 \cdot \cos(\theta) + 0 \cdot \sin \theta)] \\ (\overline{OP})^2 &= 2r^2 \cdot (1 + \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (2.11)$$

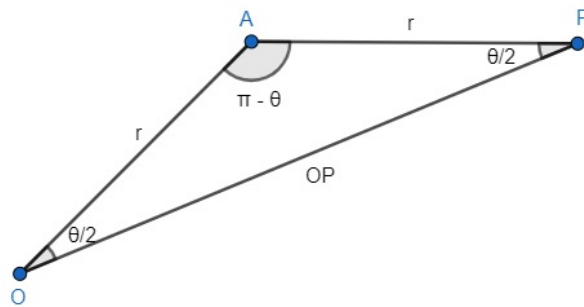


Figura 2.12: Triângulo isósceles modelo 2

Utilizando a identidade de arco metade, desenvolvida na seção 1.5.3, encontramos:

$$1 + \cos(\theta) = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.12)$$

Substituindo a expressão (2.12) na expressão (2.11), encontramos:

$$\begin{aligned} (\overline{OP})^2 &= 2r^2 \cdot \left(2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ (\overline{OP})^2 &= 4r^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Como $\overline{OP} \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned} (\overline{OP})^2 &= \sqrt{4r^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ \overline{OP} &= 2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Substituindo o resultado encontrado em (2.14), encontramos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{y}{\overline{OP}} \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \left(\frac{y}{2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\ y(\theta) &= 2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{x}{\overline{OP}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \left(\frac{x}{2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\ x(\theta) &= 2r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Assim, temos o traço $t(\theta)$, do modelo 2:

$$t(\theta) = \left(2r \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), 2r \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right), \theta \in [0, 2\pi)$$

Temos duas maneiras de mostrar que o traço $t(\theta)$ descreve uma circunferência; podemos utilizar um *software* de geometria dinâmica, como o *geogebra* para desenhar o traço como fizemos no modelo 1, seguindo os mesmos procedimentos, inserindo somente o traço encontrado do modelo 2, mas podemos também provar isso matematicamente, como faremos no modelo atual.

Sabemos que equação de uma circunferência é dada pela seguinte expressão:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (2.17)$$

onde (a, b) é o centro e r é o raio da circunferência. No traço $t(\theta)$, temos:

$$x = 2r \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.18)$$

$$y = 2r \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.19)$$

Substituindo a expressão (2.18) e a expressão (2.19) no primeiro membro da expressão (2.17), temos:

$$\left(2r \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - a \right)^2 + \left(2r \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - b \right)^2 \quad (2.20)$$

Desenvolvendo a expressão (2.20):

$$\begin{aligned} & 4r^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 4r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot a + a^2 + \\ & 4r \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 4r \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot b + b^2 \end{aligned}$$

Fazendo $a = r$ e $b = 0$; temos:

$$\begin{aligned} & 4r^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 4r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot r + r^2 + \\ & 4r \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 4r \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot 0 + 0^2 \\ & = 4r^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 4r^2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + r^2 + 4r \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Colocando em evidência $4r \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e reescrevendo a expressão:

$$4r^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - 4r^2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + r^2 \quad (2.21)$$

Utilizando o Teorema Fundamental da Trigonometria que abordamos na seção 1.3.2, podemos afirmar que:

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 \quad (2.22)$$

Substituindo (2.22) e, (2.21) e desenvolvendo a expressão:

$$\begin{aligned} & 4r^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot [1] - 4r^2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + r^2 \\ &= 4r^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 4r^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + r^2 \\ &= 0 + r^2 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

Assim, mostramos que para $a = r$ e $b = 0$, o traço $t(\theta)$ descreve uma circunferência de raio r , centro $(r, 0)$.

2.3 Modelo de Funcionamento do Pedivela Variável

Neste tópico vamos explicar detalhadamente o modo de pedalar e o funcionamento do pedivela aumentável.

Para iniciarmos a explicação podemos utilizar a figura 2.13, logo, essa será a posição inicial com a bicicleta parada.



Figura 2.13: Funcionamento do pedivela - posição inicial

Assim que o ciclista iniciar o movimento com a bicicleta, o pedal vai se deslocar no sentido horário.

Logo, o pedivela aumentável entra em ação, em conjunto com o pedivela principal, como podemos visualizar na figura 2.14

O comprimento do pedivela continua a aumentar de tamanho até alcançar seu comprimento máximo, como mostra a figura 2.15.

Após alcançar seu comprimento máximo, o pedivela aumentável passa a diminuir de tamanho até alcançar o tamanho inicial, dessa forma, iniciando um novo ciclo de funcionamento. A figura 2.16 mostramos a diminuição do comprimento do pedivela, próximo ao seu comprimento inicial.



Figura 2.14: Aumento do pedivela



Figura 2.15: Pedivela com tamanho máximo

2.4 Torque

Definimos torque ou momento torçor, como a capacidade de uma força F fazer um corpo girar, como mostra a figura 2.17. (HALLIDAY, RESNICK, WALKER, 2016, p.638).

A intensidade do torque é medida em *Newton – metro* ($N \cdot m$) e pode ser calculada pela expressão:

$$\tau = r \cdot F \cdot \text{sen}(\gamma)$$

onde:

$$\tau = \text{Torque ou momento torçor}(N \cdot m)$$

$$F = \text{Força}(N)$$

$$r = \text{raio}(m)$$

$$\gamma = \text{ângulo entre } r \text{ e } F$$



Figura 2.16: Diminuição do comprimento do pedivela

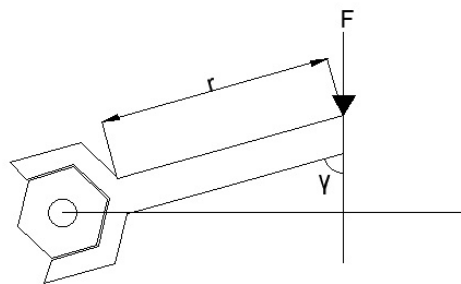


Figura 2.17: Ilustração do torque

2.4.1 Cálculo do Torque do Pedivela Aumentável em Alguns Pontos

Nesta seção vamos calcular o torque resultante em alguns pontos, com o objetivo de comparar os valores de torque com uma bicicleta comum, para isso, utilizamos a expressão de torque, apresentada neste capítulo.

Para maior facilidade na compreensão dos cálculos e análise de resultados, vamos considerar o pedivela com um comprimento de 20 centímetros, e que a força F exercida pelo ciclista no pedal é constante, com $F = 100\text{N}$.

Cálculo do Torque no Instante de 120° :

Temos a posição dos pedais dada pela figura:

Inicialmente, vamos calcular o comprimento \overline{CD} , que é o comprimento do pedivela que exerce o torque para 120° . Para efetuar esse calculo, vamos usar a lei dos cossenos, demonstrada no capítulo anterior:

$$\begin{aligned}(\overline{CD})^2 &= (\overline{CA})^2 + (\overline{AD})^2 - 2 \cdot (\overline{CA}) \cdot (\overline{AD}) \cdot \cos(120^\circ) \Rightarrow \\(\overline{CD})^2 &= (20)^2 + (20)^2 - 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \cos(120^\circ)\end{aligned}$$

Como o ângulo de 120° é obtuso, vamos usar a expressão apresentada no capítulo ante-

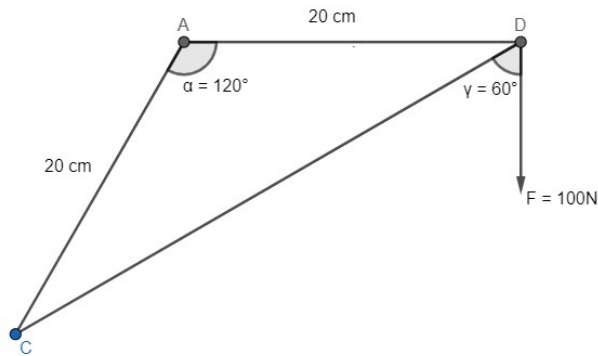


Figura 2.18: Torque em 120°

rior para calcularmos o valor do seu cosseno:

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - 120^\circ) &= -\cos(120^\circ) \Rightarrow \\ \cos(60^\circ) &= -\cos(120^\circ) \Rightarrow \\ \frac{1}{2} &= -\cos(120^\circ) \Rightarrow \\ \cos(120^\circ) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para encontrarmos o $\cos(60^\circ)$ consultamos a tabela 1.1. Substituindo e continuando a desenvolver a expressão:

$$\begin{aligned} (\overline{CD})^2 &= 400 + 400 - 800 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \\ (\overline{CD})^2 &= 800 + 400 \Rightarrow \\ (\overline{CD})^2 &= 1200 \Rightarrow \\ \overline{CD} &= \sqrt{1200} \Rightarrow \\ \overline{CD} &= 34,6 \text{ cm} \end{aligned}$$

Depois de calculado o comprimento do segmento \overline{CD} , vamos calcular o torque, utilizando a expressão abordada neste capítulo:

$$\tau = F \cdot r \cdot \text{sen}(\gamma) \quad (2.23)$$

Como r tem que ser expresso em metros, $\overline{CD} = 0,346\text{m}$ e sabendo que $F = 100\text{N}$, substituindo 2.23, temos:

$$\tau = 100 \cdot 0,346 \cdot \text{sen}(60^\circ)$$

Consultando a tabela 1.1, encontramos o $\text{sen}(60^\circ)$:

$$\text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Substituindo e continuando a desenvolver a expressão:

$$\tau = 100 \cdot 0,346 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\tau = 29,41 N \cdot m$$

Para efeito comparativo, calcularemos o torque de uma bicicleta normal, cujo o pedivela possui $r = 0,2m$. Logo:

$$\tau = 100 \cdot 0,2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\tau = 17 N$$

Cálculo do Torque no Instante de 140° :

Temos a posição dos pedais dada pela figura 2.19:

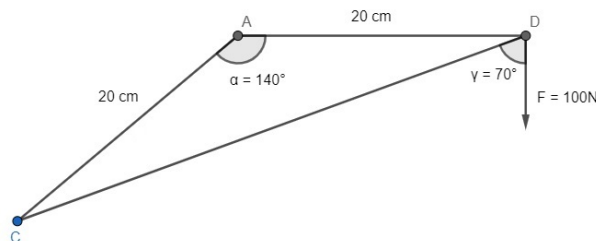


Figura 2.19: Torque em 140°

Inicialmente, vamos calcular o comprimento \overline{CD} , que é o comprimento do pedivela que exerce o torque para 140° . Para efetuar esse cálculo, vamos usar a lei dos cossenos:

$$(\overline{CD})^2 = (\overline{CA})^2 + (\overline{AD})^2 - 2 \cdot (\overline{CA}) \cdot (\overline{AD}) \cdot \cos(140^\circ) \Rightarrow$$

$$(\overline{CD})^2 = (20)^2 + (20)^2 - 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \cos(140^\circ)$$

Como o ângulo de 140° é obtuso, vamos usar a expressão apresentada no capítulo anterior para calcularmos o valor do seu cosseno:

$$\cos(180^\circ - 140^\circ) = -\cos(140^\circ) \Rightarrow$$

$$\cos(40^\circ) = -\cos(140^\circ) \Rightarrow$$

$$0,76 = -\cos(140^\circ) \Rightarrow$$

$$\cos(140^\circ) = -0,76$$

Para encontrarmos o $\cos(140^\circ)$ consultamos o apêndice A desse trabalho. Substituindo e continuando a desenvolver a expressão:

$$(\overline{CD})^2 = 400 + 400 - 800 \cdot (-0,76) \Rightarrow$$

$$(\overline{CD})^2 = 800 + 608 \Rightarrow$$

$$(\overline{CD})^2 = 1408 \Rightarrow$$

$$\overline{CD} = \sqrt{1408} \Rightarrow$$

$$\overline{CD} = 37,5 cm$$

Depois de calculado o comprimento do segmento \overline{CD} , podemos calcular o torque utilizando a expressão:

$$\tau = F \cdot r \cdot \text{sen}(\gamma) \quad (2.24)$$

Como r tem que ser expresso em metros, $\overline{CD} = 0,375\text{m}$ e sabendo que $F = 100\text{N}$, substituindo 2.24, temos:

$$\tau = 100 \cdot 0,375 \cdot \text{sen}(70^\circ)$$

Consultando o Apêndice A, encontramos o $\text{sen}(70^\circ)$:

$$\text{sen}(70^\circ) = 0,93$$

Substituindo e continuando a desenvolver a expressão:

$$\tau = 100 \cdot 0,375 \cdot 0,93 \Rightarrow$$

$$\tau = 34,875\text{N} \cdot \text{m}$$

Para efeito comparativo, calcularemos o torque de uma bicicleta normal, cujo o pedivela possui $r = 0,2\text{m}$. Logo:

$$\tau = 100 \cdot 0,2 \cdot 0,93 \Rightarrow$$

$$\tau = 18,6\text{N} \cdot \text{m}$$

Cálculo do Torque no Instante de 150° :

Temos a posição dos pedais dada pela figura:

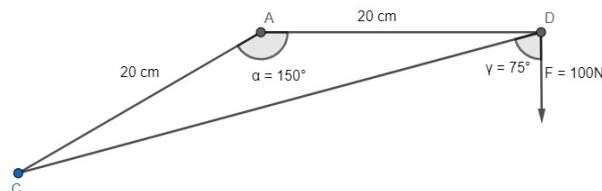


Figura 2.20: Torque em 150°

Inicialmente, vamos calcular o comprimento \overline{CD} , que é o comprimento do pedivela que exerce o torque para 150° . Para efetuar esse cálculo, vamos usar a lei dos cossenos:

$$(\overline{CD})^2 = (\overline{CA})^2 + (\overline{AD})^2 - 2 \cdot (\overline{CA}) \cdot (\overline{AD}) \cdot \cos(150^\circ) \Rightarrow$$

$$(\overline{CD})^2 = (20)^2 + (20)^2 - 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \cos(150^\circ)$$

Como o ângulo de 150° é obtuso, vamos usar a expressão apresentada no capítulo anterior para calcularmos o valor do seu cosseno:

$$\cos(180^\circ - 150^\circ) = -\cos(140^\circ) \Rightarrow$$

$$\cos(30^\circ) = -\cos(150^\circ) \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos(150^\circ) \Rightarrow$$

$$\cos(150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para encontrarmos o $\cos(30^\circ)$ consultamos a tabela 1.1. Substituindo e continuando a desenvolver a expressão:

$$\begin{aligned}(\overline{CD})^2 &= 400 + 400 - 800 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \\(\overline{CD})^2 &= 800 + 400 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \\(\overline{CD})^2 &= 800 + 680 \Rightarrow \\(\overline{CD})^2 &= 1480 \Rightarrow \\ \overline{CD} &= \sqrt{1480} \Rightarrow \\ \overline{CD} &= 38,5\text{cm}\end{aligned}$$

Depois de calculado o comprimento do segmento \overline{CD} , podemos calcular o torque utilizando a expressão:

$$\tau = F \cdot r \cdot \text{sen}(\gamma) \quad (2.25)$$

Como r tem que ser expresso em metros, $\overline{CD} = 0,385\text{m}$ e sabendo que $F = 100\text{N}$, substituindo 2.25, temos:

$$\tau = 100 \cdot 0,385 \cdot \text{sen}(75^\circ)$$

Consultando o Apêndice A, encontramos o $\text{sen}(75^\circ)$:

$$\text{sen}(75^\circ) = 0,96$$

Substituindo e continuando a desenvolver a expressão:

$$\begin{aligned}\tau &= 100 \cdot 0,385 \cdot 0,96 \Rightarrow \\ \tau &= 36,96\text{N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Para efeito comparativo, calcularemos o torque de uma bicicleta normal, cujo o pedivela possui $r = 0,2\text{m}$. Logo:

$$\begin{aligned}\tau &= 100 \cdot 0,2 \cdot 0,96 \Rightarrow \\ \tau &= 19,6\text{N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Cálculo do Torque no Instante de 180° :

Temos a posição dos pedais dada pela figura:

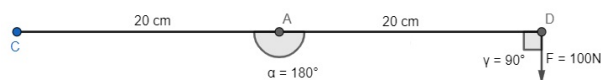


Figura 2.21: Torque em 180°

Inicialmente, vamos calcular o comprimento \overline{CD} , que é o comprimento do pedivela que exerce o torque para 180° . Para efetuar esse cálculo, vamos usar a lei dos cossenos:

$$\begin{aligned}(\overline{CD})^2 &= (\overline{CA})^2 + (\overline{AD})^2 - 2 \cdot (\overline{CA}) \cdot (\overline{AD}) \cdot \cos(180^\circ) \Rightarrow \\(\overline{CD})^2 &= (20)^2 + (20)^2 - 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \cos(180^\circ)\end{aligned}$$

Vamos utilizar a mesma expressão anterior para definir o $\cos(180^\circ)$

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - 180^\circ) &= -\cos(180^\circ) \Rightarrow \\ \cos(0^\circ) &= -\cos(180^\circ) \Rightarrow \\ 1 &= -\cos(180^\circ) \Rightarrow \\ \cos(180^\circ) &= -1\end{aligned}$$

Para encontrarmos o $\cos(0^\circ)$ utilizamos o apêndice A do trabalho. Substituindo e continuando a desenvolver a expressão:

$$\begin{aligned}(\overline{CD})^2 &= 400 + 400 - 800 \cdot (-1) \Rightarrow \\(\overline{CD})^2 &= 800 + 800 \Rightarrow \\(\overline{CD})^2 &= 1600 \Rightarrow \\ \overline{CD} &= \sqrt{1600} \Rightarrow \\ \overline{CD} &= 40,0\text{cm}\end{aligned}$$

Depois de calculado o comprimento do segmento \overline{CD} , podemos calcular o torque utilizando a expressão:

$$\tau = F \cdot r \cdot \text{sen}(\gamma) \quad (2.26)$$

Como r tem que ser expresso em metros, $\overline{CD} = 0,4\text{m}$ e sabendo que $F = 100\text{N}$, substituindo 2.26, temos:

$$\tau = 100 \cdot 0,4 \cdot \text{sen}(90^\circ)$$

Consultando o Apêndice A, encontramos o $\text{sen}(90^\circ)$:

$$\text{sen}(90^\circ) = 1$$

Substituindo e continuando a desenvolver a expressão:

$$\begin{aligned}\tau &= 100 \cdot 0,4 \cdot 1 \Rightarrow \\ \tau &= 40,0\text{N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Para efeito comparativo, calcularemos o torque de uma bicicleta normal, cujo o pedivela possui $r = 0,2\text{m}$. Por isso:

$$\begin{aligned}\tau &= 100 \cdot 0,2 \cdot 1 \Rightarrow \\ \tau &= 20,0\text{N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Através da tabela 3.1, organizamos e comparamos os valores de torque de acordo com o ângulo γ .

γ	Torque na bicicleta normal	Torque na bicicleta com pedivela Aumentável
60°	17	29,41
70°	18,6	34,875
75°	19,6	36,96
90°	20,0	40,0

Tabela 2.1: Tabela de Torques

Observando a expressão para calcular o torque, notamos que o torque máximo é dado quando $\gamma = 90^\circ$, pois o $\text{sen}(90^\circ) = 1$. Analisando a tabela 3.1, notamos que o torque máximo dobra de valor ao compararmos as bicicletas, isso ocorre por duas razões:

- i) quando o ângulo entre os pedivelas é de 180° , o braço alcança seu comprimento máximo, pois o $\text{cos}(180^\circ) = -1$.
- ii) ao dobrarmos o comprimento do pedivela, dobramos também o torque, pois a relação entre o torque e o comprimento do pedivela é diretaente proporcional;

2.5 Redução da Força Aplicada Pelo Ciclista em Alguns Pontos

Anteriormente, na seção 2.4.1, determinamos o ganho de torque do ciclista em uma bicicleta com pedivela aumentável. Nesta seção, vamos analisar a redução de força em pontos específicos, utilizando os mesmos dados previamente utilizados.

Redução de Força no Instante 120°

Partindo dos dados previamente estabelecidos na seção 2.4.1, consideraremos uma bicicleta padrão com as seguintes características: força aplicada pelo ciclista $F = 100N$ e comprimento do pedivela $r = 20cm$, que, para fins de cálculo, é convertido para $r = 0,2m$. Com esses valores, o torque $\tau = 17N \cdot m$.

Considerando agora a bicicleta com pedivela aumentável, temos um comprimento de pedivela de $r = 34,6cm$, que é convertido para $r = 0,346m$ para fins de cálculo. O ângulo γ é de 60° . Para manter o torque $\tau = 17N \cdot m$, vamos calcular a força F necessária aplicada pelo

ciclista. Portanto:

$$\begin{aligned}\tau &= F \cdot r \cdot \sin(60^\circ) \\ 17 &= F \cdot 0,346 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ F &= 56,73N\end{aligned}$$

Calculando a redução da força:

$$100 - 56,73 = 43,27N.$$

A força necessária para manter o torque de $\tau = 17N \cdot m$ seria de $F = 56,73N$, representando uma redução de $43,27N$ em relação à força inicial.

Redução de Força no Instante 140°

Partindo dos dados previamente estabelecidos na seção 2.4.1, consideraremos uma bicicleta padrão com as seguintes características: força aplicada pelo ciclista $F = 100N$ e comprimento do pedivela $r = 20cm$, que, para fins de cálculo, é convertido para $r = 0,2m$. Com esses valores, o torque $\tau = 18,6N \cdot m$.

Considerando agora a bicicleta com pedivela aumentável, temos um comprimento de pedivela de $r = 37,5cm$, que é convertido para $r = 0,375m$ para fins de cálculo. O ângulo γ é de 70° . Para manter o torque $\tau = 18,6N \cdot m$, vamos calcular a força F necessária aplicada pelo ciclista. Portanto:

$$\begin{aligned}\tau &= F \cdot r \cdot \sin(70^\circ) \\ 18,6 &= F \cdot 0,375 \cdot 0,93 \\ F &= 53,33N\end{aligned}$$

Calculando a redução da força:

$$100 - 53,33 = 46,67N.$$

A força necessária para manter o torque de $\tau = 18,6N \cdot m$ seria de $F = 53,33N$, representando uma redução de $46,67N$ em relação à força inicial.

Redução de Força no Instante 150°

Partindo dos dados previamente estabelecidos na seção 2.4.1, consideraremos uma bicicleta padrão com as seguintes características: força aplicada pelo ciclista $F = 100N$ e comprimento do pedivela $r = 20cm$, que, para fins de cálculo, é convertido para $r = 0,2m$. Com esses valores, o torque $\tau = 19,6N \cdot m$.

Considerando agora a bicicleta com pedivela aumentável, temos um comprimento de pedivela de $r = 38,5cm$, que é convertido para $r = 0,385m$ para fins de cálculo. O ângulo γ

é de 75° . Para manter o torque $\tau = 19,6N \cdot m$, vamos calcular a força F necessária aplicada pelo ciclista. Portanto:

$$\begin{aligned}\tau &= F \cdot r \cdot \text{sen}(75^\circ) \\ 19,6 &= F \cdot 0,385 \cdot 0,96 \\ F &= 53,03N\end{aligned}$$

Calculando a redução da força:

$$100 - 53,03 = 46,97N.$$

A força necessária para manter o torque de $\tau = 19,6N \cdot m$ seria de $F = 53,03N$, representando uma redução de $46,97N$ em relação à força inicial.

Redução de Força no Instante 180°

Partindo dos dados previamente estabelecidos na seção 2.4.1, consideraremos uma bicicleta padrão com as seguintes características: força aplicada pelo ciclista $F = 100N$ e comprimento do pedivela $r = 20cm$, que, para fins de cálculo, é convertido para $r = 0,2m$. Com esses valores, o torque $\tau = 20N \cdot m$.

Considerando agora a bicicleta com pedivela aumentável, temos um comprimento de pedivela de $r = 40,0cm$, que é convertido para $r = 0,4m$ para fins de cálculo. O ângulo γ é de 90° . Para manter o torque $\tau = 20N \cdot m$, vamos calcular a força F necessária aplicada pelo ciclista. Portanto:

$$\begin{aligned}\tau &= F \cdot r \cdot \text{sen}(60^\circ) \\ 20 &= F \cdot 0,4 \cdot 1 \\ F &= 50,00N\end{aligned}$$

Calculando a redução da força:

$$100 - 50,00 = 50,00N.$$

A força necessária para manter o torque de $\tau = 20N \cdot m$ seria de $F = 50,0N$, representando uma redução de $50,00N$ em relação à força inicial.

Utilizando a tabela 2.2, organizamos e comparamos os valores de força de acordo com o ângulo γ .

γ	Força na bicicleta normal	Força na bicicleta com pedivela Aumentável	Redução de Força
60°	100	56,73	43,27
70°	100	46,67	46,67
75°	100	46,97	46,97
90°	100	50,0	50

Tabela 2.2: Tabela de Redução de Forças

3 Geometria de Construção de uma Bicicleta com Pedivela Aumentável

Neste capítulo vamos abordar a geometria de construção da bicicleta com pedivela aumentável, fazendo um comparativo com o modelo de construção de um modelo de bicicleta comum.

3.1 Geometria da Bicicleta com Pedivela Aumentável

Tomemos a geometria de construção da bicicleta, descrita na Figura 3.1:

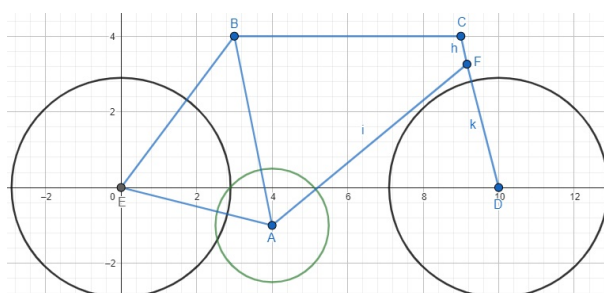


Figura 3.1: Geometria de uma bicicleta padrão

Para construir esse modelo, utilizamos o *software geogebra*, e podemos descrever a construção da bicicleta com alguns elementos da geometria analítica. Para a construção da roda traseira e dianteira, utilizamos as equações que descrevem uma circunferência no plano:

$$x^2 + y^2 = 8.41 \tag{3.1}$$

$$(x - 10)^2 + y^2 = 8.41 \tag{3.2}$$

Para a construção da coroa do pedivela, temos a equação 3.3, que corresponde a circunferência:

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 2.25 \tag{3.3}$$

Para referenciar a construção no plano, temos o ponto $A = (4,-1)$ que é o centro da circunferência da coroa do pedivela, o ponto $E = (0,0)$ que é o centro da circunferência da roda

traseira, o ponto $D = (10,0)$ que é o centro da circunferência da roda dianteira. Para referenciar o quadro da bicicleta, utilizamos os polígonos $ABCF$ e AEB , cujo os pontos $B = (3,4)$, $C = (9,4)$ e $F = (9.16, 3.26)$.

Para a construção da nossa bicicleta, utilizaremos a Figura 3.2, construída no geogebra.

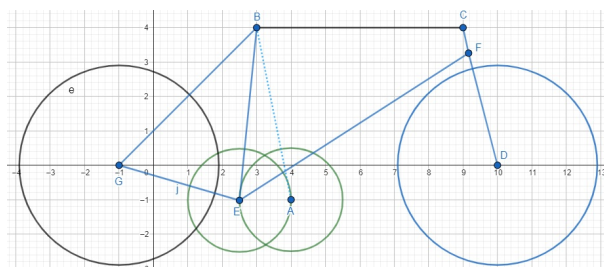


Figura 3.2: Bicicleta adaptada

Para construir a bicicleta proposta pelo trabalho, inicialmente chegamos para trás a roda traseira para que assim consigamos adicionar a coroa do pedivela auxiliar.

A roda traseira, centrada no ponto $G = (-1,0)$ e que pode ser descrita pela equação:

$$(x + 1)^2 + y^2 = 8,41 \quad (3.4)$$

A roda traseira, centrada no ponto $G = (10,0)$ e que pode ser descrita pela equação:

$$(x - 10)^2 + y^2 = 8,41 \quad (3.5)$$

A coroa do pedivela, centrada no ponto $E = (2.5, -1)$ e que pode ser descrita pela equação:

$$(x - 2.5)^2 + (y + 1)^2 = 2.25 \quad (3.6)$$

A coroa do pedivela auxiliar, centrada no ponto $A = (4, -1)$ e que pode ser descrita pela equação:

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 2.25 \quad (3.7)$$

Os polígonos BEG e $EBCF$ se referem a geometria do quadro da bicicleta, com os pontos $B = (3,4)$, $C = (9,4)$, $F = (9.16, 3.26)$.

3.2 Montagem de um Protótipo do Pedivela Aumentável

Visando a utilização desse modelo em sala de aula, vamos descrever o processo de montagem de um protótipo que simula o funcionamento do pedivela aumentável. Os materiais de montagem são facilmente encontrados em lojas de ferramentaria, com baixo custo. Os componentes necessários para a montagem, estão descritos abaixo e podemos visualizar pela figura 3.3:

- I) 10 porcas de $\frac{5}{16}$;
- II) 2 pedivelas;
- III) 3 barras roscadas com diâmetro de $\frac{5}{16}$, com 100 milímetros de comprimento;
- IV) 2 roldanas do câmbio da bicicleta;
- VI) 1 corrente de bicicleta;
- VII) 6 arruelas para parafuso $\frac{5}{16}$;

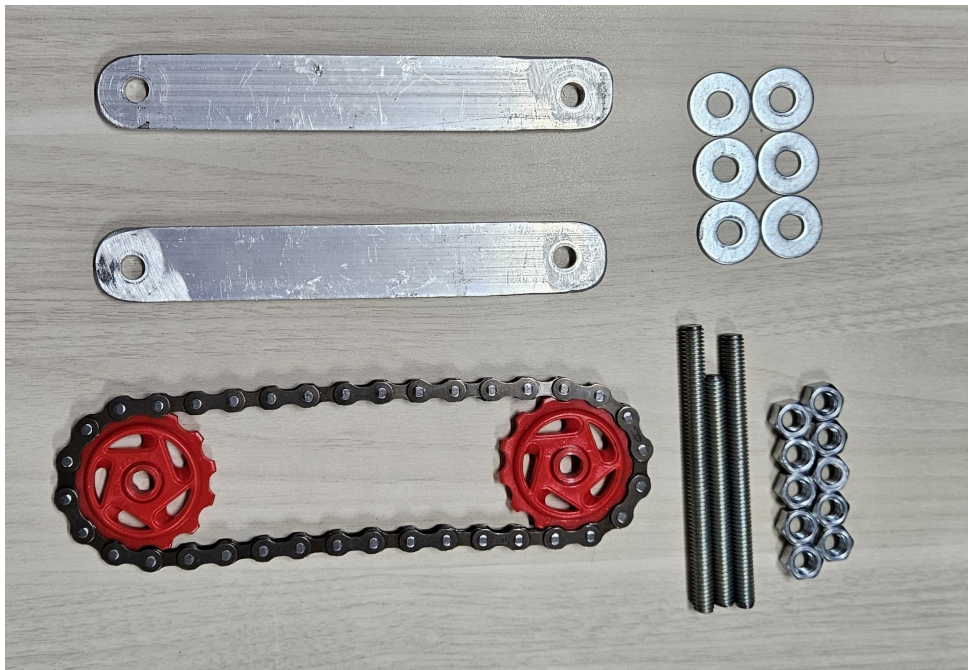


Figura 3.3: Componentes utilizados para a montagem do protótipo

Inicialmente, com a utilização de uma chave 13, monte os componentes como indicado na figura 3.4:

Como próximo passo, encaixe as duas roldanas e a corrente, como mostra a figura 3.5:

Em seguida, monte o outro pedivela como mostra a figura 3.6:

Por fim, encaixe a última barra roscada que será utilizado como pedal, como mostra a figura 3.7 e, assim, esta montado o sistema de pedivela aumentável.



Figura 3.4: Passo Inicial da montagem do protótipo

3.2.1 Orçamento dos Componentes Para a Montagem do Protótipo

Como já especificado anteriormente, os componentes para a montagem do protótipo são facilmente encontrados em lojas de ferramentas, assim a tabela abaixo mostra o custo de cada componente:

Em relação aos pedivelas, é necessário fabricá-lo em uma máquina especializada, que pode gerar um pouco de dificuldade, deve-se também cortar a barra roscada no tamanho necessário, pois a mesma é adquirida com comprimento de um metro.



Figura 3.5: Montagem das roldanas e corrente



Figura 3.6: Montagem do segundo pedivela



Figura 3.7: Protótipo montado

Quantidade	Componente	Custo Unitário (em reais)
10	Porca $\frac{5}{16}$	0,50
1	Barra roscada $\frac{5}{16}$	6,00
6	Arruela $\frac{5}{16}$	0,20
1	Corrente	55,00
2	Roldana do Câmbio	10,00

Tabela 3.1: Preço dos componentes

4 Conclusão

A proposta de ensino apresentada neste trabalho, usando a bicicleta como um meio para o ensino e a aprendizagem do conteúdo de trigonometria, é uma abordagem que busca se juntar a várias outras para contribuir para o desenvolvimento de habilidades matemáticas nos alunos.

A trigonometria é um conteúdo importante para os alunos do Ensino Médio, pois a mesma está presente nos vários processos seletivos para a educação universitária, e se considerarmos também a educação universitária, temos a presença da trigonometria não só na matemática, mas também nas áreas de engenharia e física.

Através dessa proposta, esperamos motivar alunos, inspirá-los, para que se desenvolvam matematicamente, se interessando pela área, aumentando suas habilidades de analisar e resolver problemas e que assim, consigam alcançar seus objetivos acadêmicos e profissionais.

Essa abordagem, que junta uma situação do cotidiano com os conteúdos abordados dentro da sala de aula, busca ser uma contribuição valiosa para o processo de ensino aprendizagem e também pode vir a ser um modelo para outros conteúdos, contribuindo para a melhoria do ensino como um todo.

REFERÊNCIAS

- ANTON, H. BIVENS, I. DAVIS S. **Cálculo** 10. ed. Porto Alegre. Editora Bookman. 2014.
- AQUINO, São Tomás de. Suma Teológica. Volume 1. Tradução de Alexandre Correia. São Paulo: Editora Ecclesiae, 2020.
- DANTE, L. R. **Matemática Contexto e aplicações** 3.ed. São Paulo. Editora Ática. 2014. 736p.
- DO CARMO, M, P., MORGADO A. C., WAGNER E. **Trigonometria Números Complexos**. 1. ed. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção do Professor de Matemática, 1992. 121p.
- DE FREITAS, Raquel Silva; etal. As dificuldades apresentadas por professores e alunos no ensino da trigonometria. 2016.
- DO PRADO, P. P. L., GONÇALVES, J. B., MARCELINO, M. A. **Métodos Experimentais de Engenharia - Introdução aos Métodos Científicos** 1. ed. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna. 2013. 68p.
- DOS SANTOS, C. C., **Sobre a Bicicleta Um dos Inventos Mais Importantes da Humanidade** 1. ed. Editora Viseu LTDA. 2024. 786p.
- HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER., J. **Fundamentos da Física: Mecânica** 10. ed. Rio de Janeiro. LTC - Livros Técnicos e Científicos. 2016. 797p.
- IEZZI, G. et al. **Matemática** 8. ed. São Paulo. Atual Editora LTDA. 1980. 325p.
- IEZZI, G. et al. **Matemática Ciência e Aplicações** 8. ed. São Paulo. Saraiva. 2016. 444p.
- LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino médio. Volume 1.** 9. ed. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção do Professor de Matemática, 2006. 237p.
- NASCIMENTO, Maurício Alves. Ensino-aprendizagem de trigonometria: explorando e resolvendo problemas. Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013.
- NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2, Geometria Euclidiana Plana.** 2. ed. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção do Professor de Matemática, 2013. 448p.
- NETO, A. C. M. **Geometria.** 2. ed. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção PROFMAT, 2013. 427p.
- PHILBIN. T. **AS 100 Maiores Invenções da História** 1. ed. Rio de Janeiro. Difel. 2006. 416p.
- PEREIRA Galucia. Estimativa de Frota de Bicicletas no Brasil. **Journal Sustainable Urban Mobility.** 1(1-2). Recuperado de <https://ipmmu.com.br/josum/article/view/2>. Acesso em: 04 nov. 2024.
- SANTOS, Janio Laurentino de Jesus; SANTOS, Luiz Eduardo Pereira Ferreira dos. Planejamento e mobilidade urbana no Brasil: o uso da bicicleta como uma nova maneira de pensar e construir a cidade. Revista de Direito da Cidade, v. 14, n. 1, p. 113-137, 2022.
- SILVA, Regina Cláudia Tinto Zeca. **Trogonometria: História e Aplicação no Contexto Escolar.** Mestrado em Matemática PROFMAT - Unesp, Bauru, 2019.

SZYLLER, Dennys. **A Importância do aprendizado de matemática para o sucesso profissional**. Correio Braziliense, 16/06/2024. Disponível em: <https://www.correio braziliense.com.br/euestudante-e-formacao/2024/06/6871564-a-importancia-do-ensino-da-matematica-para-o-sucesso-profissional.html>. Acesso em: 09/10/2024.

Linha do Tempo Traça a História da Bicicleta. Cruzeiro do Vale. 03 jun. 2024. Disponível em: <https://www.cruzeiro do vale.com.br/entretenimento/linha-do-tempo-traca-a-historia-da-bicicleta/>. Acesso em: 02/05/2025.

Apêndice A

TABELA TRIGONOMÉTRICA

Ângulo (°)	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo (°)	Seno	Cosseno	Tangente
0	0	1	0	46	0,71934	0,69466	1,03553
1	0,01745	0,99985	0,01745	47	0,73135	0,68200	1,07236
2	0,0349	0,99939	0,03492	48	0,74314	0,66914	1,11060
3	0,05234	0,99863	0,05241	49	0,75471	0,65606	1,15037
4	0,06976	0,99756	0,06993	50	0,76604	0,64279	1,19174
5	0,08716	0,99619	0,08749	51	0,77715	0,62932	1,23491
6	0,10453	0,99452	0,10511	52	0,78801	0,61566	1,27994
7	0,12187	0,99255	0,12279	53	0,79864	0,60181	1,32707
8	0,13917	0,99027	0,14054	54	0,80903	0,58777	1,37645
9	0,15643	0,98769	0,15838	55	0,81915	0,57358	1,42814
10	0,17365	0,98481	0,17633	56	0,82904	0,55919	1,48257
11	0,19087	0,98162	0,19444	57	0,83867	0,54464	1,53986
12	0,20791	0,97815	0,21255	58	0,84805	0,52992	1,60035
13	0,22495	0,97437	0,23087	59	0,85717	0,51503	1,66430
14	0,24192	0,97030	0,24933	60	0,86603	0,49999	1,73209
15	0,25882	0,96593	0,26795	61	0,87462	0,48481	1,80405
16	0,27564	0,96126	0,28675	62	0,88295	0,46947	1,88075
17	0,29237	0,95631	0,30573	63	0,89101	0,45398	1,96265
18	0,30902	0,95106	0,32492	64	0,89879	0,43838	2,05026
19	0,32557	0,94552	0,34433	65	0,90631	0,42261	2,14454
20	0,34202	0,93969	0,36397	66	0,91355	0,40673	2,24610
21	0,35837	0,93358	0,38387	67	0,9205	0,39074	2,35577
22	0,37461	0,92718	0,40403	68	0,92718	0,37462	2,47501
23	0,39073	0,92051	0,42447	69	0,93358	0,35837	2,60508
24	0,40674	0,91354	0,44523	70	0,93969	0,34203	2,74741
25	0,42262	0,90631	0,46631	71	0,94552	0,32556	2,90425
26	0,43837	0,89879	0,48773	72	0,95106	0,30901	3,07780
27	0,45399	0,89101	0,50952	73	0,9563	0,29239	3,27066
28	0,46947	0,88295	0,53171	74	0,96126	0,27564	3,48733
29	0,48481	0,87462	0,55431	75	0,96523	0,26140	3,69251
30	0,5	0,86603	0,57735	76	0,9703	0,24190	4,01108
31	0,51504	0,85717	0,60086	77	0,97437	0,22495	4,33147
32	0,52992	0,84805	0,62487	78	0,97815	0,20790	4,70490
33	0,54464	0,83867	0,64941	79	0,98163	0,19079	5,14496
34	0,55919	0,82904	0,67450	80	0,98481	0,17364	5,67171
35	0,57358	0,81915	0,70021	81	0,98769	0,15642	6,31419
36	0,58779	0,80901	0,72655	82	0,99027	0,13916	7,11609
37	0,60182	0,79863	0,75356	83	0,99255	0,12184	8,14647
38	0,61566	0,78801	0,78128	84	0,99452	0,10455	9,51271
39	0,62932	0,77715	0,80978	85	0,99619	0,08721	11,42296
40	0,64279	0,76604	0,83910	86	0,99756	0,06981	14,28875
41	0,656006	0,75476	0,86916	87	0,99863	0,05233	19,08438
42	0,66913	0,74315	0,90040	88	0,99939	0,03492	28,61682
43	0,692	0,72190	0,95858	89	0,99985	0,01732	57,72853
44	0,69466	0,71934	0,96569	90	1	0	
45	0,70711	0,70711	1				