UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

WELLINGTON CARLOS VIEIRA DA SILVA

A GEOMETRIA ESPACIAL EM QUESTÕES DO ENEM E VESTIBULAR: ALGUMAS ANÁLISES SEGUNDO A TEORIA DE VAN HIELE

TOLEDO

2024

WELLINGTON CARLOS VIEIRA DA SILVA

A GEOMETRIA ESPACIAL EM QUESTÕES DO ENEM E VESTIBULAR: ALGUMAS ANÁLISES SEGUNDO A TEORIA DE VAN HIELE

Spacial Geometry in ENEM and College Entrance Exam Questions: Analyses Acoording to van Hiele's Theory

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientador(a): Rodrigo Manoel Dias Andrade.
Coorientador(a): Vanessa Largo Andrade.

TOLEDO

2024

4.0 Internacional

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Toledo

WELLINGTON CARLOS VIEIRA DA SILVA

A GEOMETRIA ESPACIAL EM QUESTÕES DO ENEM E VESTIBULAR: ALGUMAS ANÁLISES SEGUNDO A TEORIA DOS VAN HIELE

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 20 de Dezembro de 2024

Rodrigo Manoel Dias Andrade, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Leandro Antunes, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Plinio Lucas Dias Andrade, Doutorado - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 20/12/2024.

A Deus, pela força e inspiração que me sustentaram nesta jornada.

À minha esposa, Gleiciely, pelo amor, paciência e apoio incondicional.

Ao meu filho, Isaac, por ser minha maior motivação e alegria.

Aos meus pais, por acreditarem em mim e me guiarem sempre pelo melhor caminho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por mais esta bênção em minha vida. Ele me abençoou e honrou mesmo quando eu não merecia e, nos momentos em que não me sentia capaz, me fortaleceu e me fez chegar até aqui.

À minha família, pela base de amor e apoio incondicional em todos os momentos deste curso. Em especial, à minha esposa, Gleiciely, que me deu todo suporte durante esses anos cheios de desafios. Sou grato pela sua compreensão com as minhas horas de ausência, pelos momentos de incentivo quando eu pensava em desistir e, principalmente, pelo apoio durante esse ano difícil que enfrentamos. Te amo.

Ao meu filho, Isaac, pela compreensão diante de minhas ausências. Nas sextas-feiras em que precisava escolher entre viajar para as aulas e ficar com você, meu coração ficava apertado. Essa foi, sem dúvida, a decisão mais difícil que tive que tomar. Mas chegamos ao fim, e tudo valeu a pena, meu pequeno. Papai te ama muito.

Agradeço aos meus pais, que sempre me incentivaram e foram meus motivadores ao longo deste processo. Mesmo nos momentos em que eu não valorizava o estudo ou não me dedicava, vocês tiveram paciência e estiveram presentes, me auxiliando nas minhas decisões. Muito obrigado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rodrigo Manoel Dias Andrade, e à minha coorientadora, Prof.ª Dr.ª Vanessa Largo Andrade, expresso meus sinceros agradecimentos pelo acompanhamento, orientação, disponibilidade, interesse e receptividade ao longo desta jornada. Mesmo sem conhecer os desafios pessoais que enfrentei neste período, vocês nunca desistiram do trabalho. Pelo contrário, sempre trouxeram palavras de incentivo que me motivaram a continuar.

Aos professores do PROFMAT, pela iniciativa, dedicação e brilhantismo que demonstraram ao longo das aulas, levo comigo uma admiração especial por cada um de vocês, cada um com suas características únicas me trouxeram conhecimentos que levarei comigo por toda vida. Um agradecimento especial à Prof. Rosângela, que acreditou em mim e me falou que tudo daria certo, mesmo quando eu não acreditava. Que você continue sendo luz para as pessoas ao seu redor, professora.

Agradeço aos meus colegas de turma, pelo companheirismo e apoio recebido no decorrer do mestrado, e pelos momentos em que não me deixaram desistir.

RESUMO

A presente dissertação tem como temática o estudo do ensino e aprendizagem de Geometria Espacial, com foco na aprendizagem de estudantes do Ensino Médio. O objetivo da dissertação é compreender a partir da teoria dos níveis de pensamento geométrico de van Hiele como os estudantes da terceira série do Ensino Médio aprendem e desenvolvem seus conhecimentos de Geometria Espacial através de questões de avaliações externas, como do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e vestibulares. Para isso, a metodologia utilizada para a coleta de dados foi a realização de um simulado contendo dez questões dessas provas. As perguntas e as resoluções foram analisadas e classificadas a partir dos níveis de aprendizado de pensamento geométrico de van Hiele. Nesse sentido, percebemos que os estudantes estão situados entre o nível 1 e 2 de pensamento geométrico, aquém do espero nesta etapa educacional (nível 3). Como produto educacional foi elaborado uma sequência didática abarcando o uso de questões de ENEM e vestibulares, dada a centralidade dessas provas na vida desses estudantes, que investigue e auxilie professores de matemática a identificar e ensinar Geometria Espacial a partir das contribuições da teoria de van Hiele. Além disso, a partir da bibliografia levantada, realizamos sugestões que podem funcionar para combater as dificuldades contemporâneas do ensino e aprendizado de Geometria Espacial no Brasil.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem de Geometria; Ensino Médio; Pensamento Geométrico; Teoria de van Hiele.

ABSTRACT

This dissertation focuses on the teaching and learning of Spatial Geometry, with an emphasis on high school students' learning. The objective is to understand, based on van Hiele's theory of geometric thinking levels, how third-year high school students learn and develop their knowledge of Spatial Geometry through exercises from external assessments, such as the National High School Exam (ENEM) and college entrance exams. To achieve this, the methodology involved the application of ten questions from these exams to third-year students. The questions and solutions were analyzed and classified according to van Hiele's levels of geometric thinking. The results indicate that students are situated between levels 1 and 2 of geometric thinking, below the expected level (level 3) for this educational stage. As an educational product, a didactic sequence was developed that incorporates questions from ENEM and college entrance exams—given the centrality of these exams in students' lives—to assist mathematics teachers in identifying and teaching Spatial Geometry using the contributions of van Hiele's theory. Additionally, based on the reviewed literature, suggestions are proposed to address contemporary challenges in the teaching and learning of Spatial Geometry in Brazil.

Keywords: Teaching and Learning of Geometry; High School; Geometric Thinking; van Hiele's Theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Prisma.....22
Figura 2 – Princípio de Cavalieri.....23
Figura 3 – Pirâmide.....23
Figura 4 – Pirâmide Regular.....24
Figura 5 – Tetraedro Regular.....24
Figura 6 – Volume da Pirâmide.....25
Figura 7 – Cilindro Circular.....25
Figura 8 – Elementos do Cilindro.....26
Figura 9 – Cone Circular.....26
Figura 10 – Seção Plana de uma Esfera.....27
Figura 11 – Secção de uma Pirâmide por um plano paralelo à base.....28
Figura 12 – Razão de Semelhança entre Sólidos Semelhantes.....29
Figura 13 – Tronco da Pirâmide.....30
Figura 14 – Tronco de Cone.....30
Figura 15 – Esfera Inscrita em um Octaedro.....31
Figura 16 – Resolução do aluno A4 na Questão 1.....55
Figura 17 – Resolução do aluno A5 na Questão 1.....56
Figura 18 – Resolução do aluno A6 na Questão 1.....57
Figura 19 – Resolução do aluno A7 na Questão 1.....58
Figura 20 – Resolução do aluno A2 na Questão 2.....61
Figura 21 – Resolução do aluno A5 na Questão 2.....62
Figura 22 – Resolução do aluno A6 na Questão 2.....63
Figura 23 – Resolução do aluno A7 na Questão 2.....64
Figura 24 – Resolução do aluno A6 na Questão 3.....67
Figura 25 – Resolução do aluno A9 na Questão 3.....68
Figura 26 – Resolução do aluno A12 na Questão 3.....69
Figura 27 – Resolução do aluno A2 na Questão 4.....71
Figura 28 – Resolução do aluno A3 na Questão 4.....72
Figura 29 – Resolução do aluno A12 na Questão 4.....73
Figura 30 – Resolução do aluno A5 na Questão 4.....73
Figura 31 – Resolução do aluno A6 na Questão 4.....74
Figura 32 – Resolução do aluno A7 na Questão 4.....75
Figura 33 – Resolução do aluno A9 na Questão 4.....75
Figura 34 – Resolução do aluno A10 na Questão 4.....76
Figura 35 – Resolução do aluno A12 na Questão 5.....78
Figura 36 – Resolução do aluno A11 na Questão 5.....79
Figura 37 – Resolução do aluno A7 na Questão 6.....82
Figura 38 – Resolução do aluno A12 na Questão 6.....83
Figura 39 – Resolução do aluno A5 na Questão 7.....86
Figura 40 – Resolução do aluno A6 na Questão 7.....86
Figura 41 – Resolução do aluno A5 na Questão 8.....89
Figura 42 – Resolução do aluno A9 na Questão 8.....90
Figura 43 – Resolução do aluno A4 na Questão 9.....92
Figura 44 – Resolução do aluno A9 na Questão 9.....93
Figura 45 – Resolução do aluno A3 na Questão 10.....95
Figura 46 – Resolução do aluno A2 na Questão 10.....96
Figura 47 – Resolução do aluno A5 na Questão 10.....97

Figura 48 – Resolução do aluno A6 na Questão 10.....98
Figura 49 – Resolução do aluno A7 na Questão 10.....99

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Níveis de compreensão segundo a Teoria de Aprendizagem Geométrica de van Hiele..... 50
Quadro 2 – Análise dos níveis de van Hielemáximo atingidos pelos estudantes na Questão 1..... 100
Quadro 3 – Análise dos níveis de van Hielemáximo atingidos pelos estudantes na Questão 2..... 101
Quadro 4 – Análise dos níveis de van Hielemáximo atingidos pelos estudantes na Questão 3..... 101
Quadro 5 – Análise dos níveis de van Hielemáximo atingidos pelos estudantes na Questão 4..... 101
Quadro 6 – Análise dos níveis de van Hielemáximo atingidos pelos estudantes na Questão 5..... 101
Quadro 7 – Análise dos níveis de van Hielemáximo atingidos pelos estudantes na Questão 6..... 102
Quadro 8 – Análise dos níveis de van Hielemáximo atingidos pelos estudantes na Questão 7..... 102
Quadro 9 – Análise dos níveis de van Hielemáximo atingidos pelos estudantes na Questão 8..... 102
Quadro 10 – Análise dos níveis de van Hielemáximo atingidos pelos estudantes na Questão 9..... 102
Quadro 11 – Análise dos níveis de van Hielemáximo atingidos pelos estudantes na Questão 10..... 103

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	**13**
1	**A GEOMETRIA ESPACIAL**	**17**
1.1	**Nos Documentos Oficiais**	**17**
1.1.1	Na Base Nacional Comum Curricula	17
1.1.2	No Referencial Curricular do Paraná	19
1.2	**Ensino e Aprendizagem de Geometria Espacial**	**21**
1.2.1	Definições	21
1.2.2	O Ensino e a Aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio.	31
2	**ENCAMINHAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS**	**34**
2.1	**ENEM e Vestibular: considerações**	**34**
2.1.1	Sobre o ENEM	35
2.1.2	Matemática nas provas externas: ENEM e Vestibulares	39
2.2	**Seleção das Questões e Elaboração do Simulado**	**46**
2.3	**A Teoria de van Hiele**	**47**
3	**DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS**	**52**
3.1	**Análise das resoluções das questões sob a perspectiva da Teoria de van Hiele**	**52**
3.2	**Algumas considerações sobre as análises**	**99**
4	**DESCRIÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL**	**105**
5	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	**107**
	REFERÊNCIAS	**110**
	APÊNDICE A – SIMULADO APLICADO PARA OS ALUNOS	**113**

INTRODUÇÃO

Uma das áreas da matemática que apresenta maior dificuldade de compreensão e aprendizagem para os alunos do ensino médio e que, para muitos, acaba se tornando um obstáculo, é a Geometria Espacial, como demonstram pesquisas anteriores e recentes. Esses temas são abordados principalmente no Ensino Fundamental, e é justamente nessa etapa que começam a surgir defasagens de aprendizado. Tenho experiência em lecionar matemática desde 2011, abrangendo turmas do Ensino Fundamental e Médio. Nos últimos 8 anos, foquei exclusivamente no Ensino Médio e em turmas de Pré-Vestibular. Dentro da sala de aula, é frequente me deparar com um número significativo de alunos que não possuem a noção de sólidos, ou apresentam dificuldade em relacionar propriedades associadas aos mesmos, entre outras limitações na apropriação do tema, principalmente no Ensino Médio. A compreensão significativa da Geometria Espacial está associada a processos interpretativos específicos dos conceitos geométricos, uma vez que o acesso a esses conceitos está vinculado muitas vezes as suas representações e visualizações.

Com base na minha experiência como professor, observo que há uma desvalorização dessa área da matemática como um todo, sendo possível observar isso na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018 e no próprio Referencial Curricular Paranaense de 2021. Esses documentos são relevantes para nossa pesquisa pois justamente incidem na prova do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e nos vestibulares. Observo que influenciam diretamente na vida dos estudantes por concentrarem a possibilidade de avanço para o Ensino Superior.

Nesses documentos, e por consequência, nos currículos, a Geometria Espacial não é tão presente, onde o foco está em temas ligados, por exemplo, a ideia de Funções. Porém, nas provas de acesso à faculdade, como ENEM e vestibulares, a Geometria Espacial é altamente requisitada.

A geometria, apesar de seu abandono no ensino básico (Pavanello, 2009), corresponde a uma parte significativa da prova do ENEM. Segundo Santos e Araújo (2022, p. 10-11), se olharmos somente as questões da área de Conhecimentos Geométricos do ENEM, encontramos nas provas do ENEM, entre os anos de 2010 a

2020, a quantidade de 144 questões somente vinculadas a geometria, sendo 29,1% do total. A área com maior quantidade de questões é a de Conhecimentos Numéricos, sendo 153 o total, representando 30,91% das questões. Porém, se somados o número de questões de Conhecimento Geométrico e Conhecimento Algébrico, o número de questões chegam a um total de 165, representando 33,34% - correspondendo a um terço da prova. Portanto, uma em cada três questões da prova de matemática do ENEM são relacionadas a geometria. A partir disso é possível afirmar que o ENEM, devido a sua importância e centralidade para o acesso ao Ensino Superior no Brasil, também influencia na criação do currículo educacional (Minhoto, 2016).

Levando em consideração a importância da geometria espacial para os alunos — em nosso caso, principalmente pela quantidade de questões relacionadas à mesma que aparecem no ENEM e nos vestibulares analisados — justifica-se este estudo.

Deste modo, entender o que gera as dificuldades de aprendizados relacionados a Geometria Espacial em questões podem nos auxiliar a compreender esse processo.

Além disso, na prática docente que desenvolvo, observo que os estudantes, cada vez mais, precisam mobilizar conhecimentos para a resolução de provas objetivas da área de Matemática, especialmente de Geometria Espacial. É comum perceber como alguns estudantes têm dificuldades de interpretar as imagens existentes nessas questões ou mesmo quando a imagem não existe e ficam confusos, sem saber como resolver os exercícios.

É importante ressaltar que essas mesmas provas objetivas de matemática fazem parte do cotidiano dos estudantes das escolas públicas no estado do Paraná, onde semestralmente ocorre a avaliação Prova Paraná que mede os acertos e erros em larga escala. Além disso, no Ensino Médio é onde as discussões sobre vestibulares, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e provas nacionais como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) que impacta diretamente no índice de Desenvolvimento Escolar Brasileiro (IDEB).

Desse modo, com esta dissertação, buscaremos responder à questão: Como classificar os diferentes níveis do pensamento geométrico dos alunos em questões do ENEM e vestibulares? Nosso objetivo geral é identificar os níveis do

desenvolvimento do pensamento geométrico em questões de Geometria Espacial do ENEM e
vestibulares. Como objetivos específicos, temos: realizar estudos teóricos sobre a Geometria Espacial, o seu ensino e aprendizagem e sobre a teoria de van Hiele que em síntese, investiga e descreve cinco níveis de desenvolvimento da aprendizagem de geometria, no qual os três primeiros competem o aprendizado de geometria no Ensino Básico. A teoria dos níveis de pensamento geométrico de van Hiele será discutida na seção dois desta dissertação. Além disso, também é selecionar questões de Geometria Espacial para serem desenvolvidas por meio de um simulado, com alunos do Ensino Médio; analisar, tanto os enunciados quanto as resoluções, de acordo com a teoria de van Hiele; e, elaborar um produto educacional que contemple os níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico para o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial, com o intuito de auxiliarmos no aprendizado dos alunos.

Para isso, elaboramos um produto educacional que sirva como formação docente para que os professores compreendam a importância da teoria de van Hiele para ensinar matemática, seja na disciplina ampliada de Geometria ou mesmo a parte específica de Geometria Espacial. Além disso, o produto educacional prevê uma sequência didática que pode ser replicada pelos professores, ao mesmo tempo que em sua modulação existe a possibilidade de atualização das questões de ENEM e vestibular utilizadas, em conformidade com as avaliações externas mais recentes. Outro ponto importante desse produto educacional e que serve como uma orientação pedagógica é que existem sugestões de abordagem dos níveis de aprendizado baseado na teoria de van Hiele. Estas sugestões não retiram de foco os exercícios do ENEM e vestibulares – ponto principal de nossa pesquisa – mas podem complementar o ensino de matemática a partir de outras pesquisas já levantadas e que relacionam o ensino de Geometria Espacial e a teoria de van Hiele.

Esta pesquisa configura-se como qualitativa, pois o interesse é compreender os desafios relacionados com a aprendizagem de Geometria Espacial principalmente dos estudantes do Ensino Médio que realizaram o nosso simulado. Como encaminhamentos teórico-metodológicos, utilizaremos os níveis da teoria de van Hiele como categorias de análise dos nossos dados. Nossa pesquisa está dividida em quatro partes principais: o capítulo 1 que tratará da disciplina de

Geometria e principalmente da Geometria Espacial nos documentos oficiais brasileiros e paranaense; no capítulo 2 apresentaremos as principais perspectivas acerca dos exames de ingresso ao Ensino Superior, como a história do Exame Nacional do Ensino Médio e de vestibulares, além da relação entre Geometria Espacial nessa provas com foco a partir da teoria de van Hiele; no capítulo 3 realizaremos a análise e descrição dos dados levantados, sendo as questões e a resolução dos estudantes a partir da teoria dos níveis de pensamento geométrico de van Hiele; por fim, apresentaremos e descreveremos nosso produto educacional, uma sequência didática voltada para o uso de questões do ENEM e vestibulares a partir da teoria de van Hiele; na sequência, as nossas considerações finais.

1 A GEOMETRIA ESPACIAL

No presente capítulo, apresentaremos algumas considerações sobre o documento oficial Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no que diz respeito ao ensino de Geometria. Na sequência, algumas definições da Geometria Espacial, presentes em nosso simulado, e considerações a respeito do seu ensino e aprendizagem.

1.1 Nos Documentos Oficiais

Apresentaremos algumas considerações sobre a Geometria Espacial presentes na Base Nacional Comum Curricular e no Referencial Curricular do Estado do Paraná.

1.1.1 Na Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento curricular de caráter normativo em escala nacional que orienta os demais currículos (estaduais e municipais), ou seja, todo o chamado Ensino Básico (Ensino Fundamental - Anos iniciais e finais e Ensino Médio). Além disso, o documento define ao longo das etapas da formação na educação básica o conjunto fundamental e progressivo de aprendizagens que os estudantes devem desenvolver ao longo de sua passagem pela escola (Brasil, 2018, p. 7).

Neste documento, competência é a “mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), e atitudes e valores, para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (Brasil, 2018, p. 8).

Segundo a BNCC, o estudante deve ter contato com os sólidos geométricos a partir do 1º ano do Ensino Fundamental, iniciando assim uma interação entre a linguagem natural e as representações matemáticas (Brasil, 2017, p. 280-305). No Ensino Fundamental - anos finais, o ensino de geometria, busca partir dos aprendizados anteriores e dar sequência no desenvolvimento de ideias da geometria espacial. Porém, ao fazer essas relações, ainda mais com outras áreas como a Álgebra, não deve ser realizado a partir de ligações “mecânicas” ou somente por

fórmulas. Os estudantes devem entender e desenvolver os conceitos da geometria espacial (Brasil, 2017, p. 272-273).

Para Santos e Araújo (2022, p. 6) a partir da BNCC (Brasil, 2018) do Ensino Médio, são apresentadas competências como “[...] desenvolvimento do raciocínio, representação de objetos matemáticos, comunicação e capacidade de argumentação, envolvendo a interpretação de fenômenos e situações da realidade que cercam o estudante [...]”. Ainda sobre as habilidades, o documento aponta que:

> Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história. Assim, as habilidades previstas para o Ensino Médio são fundamentais para que o letramento matemático dos estudantes se torne ainda mais denso e eficiente, tendo em vista que eles irão aprofundar e ampliar as habilidades propostas para o Ensino Fundamental e terão mais ferramentas para compreender a realidade e propor as ações de intervenção especificadas para essa etapa (Brasil, 2018, p. 522)

Além disso, como mostra Santos e Araújo (2022, p. 6), a BNCC do Ensino Médio aponta cinco competências para garantir o letramento matemático, sendo basicamente “[...] interpretar situações em vários contextos, tomar decisões responsáveis, construir modelos, resolver problemas, analisar e construir argumentação consistente”. Para o Ensino Médio, o pensamento geométrico é considerado como uma competência, onde é necessário estabelecer conjecturas e demonstrações cada vez mais formais. Assim, é proposto pelo currículo como a competência relacionada ao pensamento geométrico:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 540)

Assim, os estudantes devem saber estabelecer análises a partir de conceitos e propriedades de geometria espacial, como volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones. Já as habilidades nos campos de Geometria e de Grandezas e Medidas “[...] enfatizam o cálculo de áreas e volumes de sólidos e as representações geométricas de funções no plano cartesiano” e estão ligadas a “[...] resolução e elaboração de problemas, identificação de características, comparação e análise de representações e investigações de relações e propriedades (Brasil, 2018 *apud*

Santos e Araújo, 2022, p. 6). Nesse sentido, saber o que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe como geometria, pensamento geométrico e suas competências e habilidades é essencial já que, como o próprio documento orienta, as avaliações de larga escala devem utilizar esses parâmetros em suas questões avaliativas. Destacamos que “as matrizes de referência das avaliações e dos exames, em larga escala relativas ao Ensino Médio, devem ser alinhadas à BNCC-EM [...]” (Santos e Araujo (2022, p. 7).

1.1.2 No Referencial Curricular do Paraná

Um dos principais documentos orientadores do ensino e aprendizagem em matemática do Paraná e elaborado de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é o Referencial Curricular do Paraná (Paraná, 2021), um documento que orienta em todos os níveis os conteúdos, competências e habilidades que devem ser aprendidos pelos estudantes. Além disso, é esse mesmo currículo que deve ser seguido nas aulas no estado do Paraná e, por consequência, como orientador dos vestibulares das universidades paranaenses.

Especificamente a área de Geometria Espacial é denominada como um “objeto de conhecimento” pelo documento curricular. Além disso, prevê habilidades e conteúdos específicos. A seguir, apresenta-se as habilidades relacionadas pelo próprio currículo como ligadas a geometria espacial e outras que se observa uma relação com geometria espacial

> (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

> (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados. (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. (EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica

Já os conteúdos relacionados ao tema de Geometria Espacial são: Poliedros (área e volume); Corpos redondos (área e volume); e Princípio de Cavalieri. Além disso, a Geometria Espacial aparece relacionada a outros objetos de conhecimento, como Geometria Plana e Geometrias Não Euclidianas nos conteúdos “transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições), transformações homotéticas, fractais. Noções de geometria elíptica e hiperbólica. geometria projetiva” e “ângulos e suas variações (deformação), transformações homotéticas” (Paraná, 2021, p. 543).

Destaca-se que a menção a Geometria Espacial aparece duas vezes no documento. A primeira é para introduzir a unidade temática “Geometrias”, como se lê:

> A unidade temática Geometrias é ampla e dá suporte ao desenvolvimento de várias habilidades da BNCC. Como, por exemplo, as habilidades relacionadas aos conhecimentos de trigonometria e geometria espacial para desenvolver medições. Dessa forma, o estudante deverá saber utilizar instrumentos de medidas desde os mais comuns, como réguas e transferidores, aos menos usuais, como um teodolito, necessário em situações de objetos e/ou distâncias maiores, como, por exemplo, a altura de um monumento ou um prédio (Paraná, 2021, p. 541)

A segunda menção no documento destaca da necessidade de relacionar a Geometria Espacial com o cotidiano dos estudantes:

> Em situações que envolvam a capacidade e o volume de embalagens e recipientes ou áreas para revestimento, o estudante deverá dominar conhecimentos relacionados ao cálculo do volume de poliedros, corpos redondos e áreas de superfícies, respectivamente, articulando-os, ainda, com a composição e decomposição. Nessa unidade temática, o uso das tecnologias digitais, como os softwares de geometria dinâmica, é uma ferramenta importante no desenvolvimento de atividades exploratórias e

> investigativas que envolvem os conteúdos relacionados às geometrias (Paraná, 2021, p. 542)

Neste sentido, o “abandono da geometria” tem sua origem no currículo, que direciona para outros conteúdos mais “práticos”, a exemplo das Funções, ou com impactos mais técnicos, situações ressaltadas por Pavanello (2009) desde a década de 1980.

Contrariando o abandono da geometria, considera-se de extrema importância se ensinar e aprender Geometria, sendo elemento constitutivo da experiência cotidiana das pessoas, em nosso caso, a Geometria Espacial. Deste modo, apresentaremos algumas considerações sobre o ensino e a aprendizagem do conteúdo.

1.2 Ensino e Aprendizagem de Geometria Espacial

Nesta seção, abordaremos algumas definições do conteúdo e que estão presentes nas questões do nosso simulado, bem como algumas considerações sobre o seu ensino e aprendizagem.

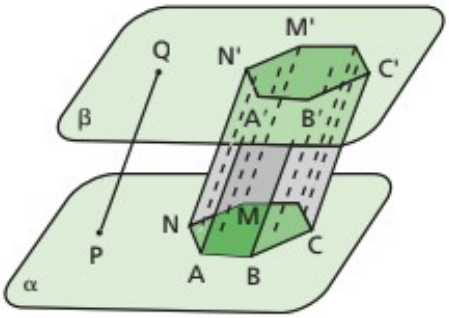
1.2.1 Definições

A Geometria Espacial é uma área da matemática que se apoia em conhecimentos prévios, como os conceitos de Geometria de Posição, essenciais para compreender a disposição dos elementos no espaço, e de Geometria Plana, indispensáveis para os cálculos de áreas que se conectam à análise tridimensional.

No entanto, considerando que este trabalho se concentra especificamente em tópicos de Geometria Espacial, apresentaremos apenas as definições e conceitos relevantes para as questões que compõem o simulado. Para embasar a exposição, utilizaremos como principal referência o livro *Fundamentos de Matemática Elementar – vol.10: Geometria Espacial* de Dolce e Pompeo (2013).

Definição 1 Considere dois planos paralelos e distintos α e β, um polígono convexo ABC..MN contido em α e um segmento PQ concorrente aos planos. Denomina-se **prisma** a região formada pela união de todos os segmentos de reta com uma extremidade no polígono e outra no plano β que são paralelos a PQ.

Figura 1 – Prisma



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 136).

Dessa forma, o prisma é um poliedro convexo que tem duas faces paralelas e congruentes com *n* lados, chamadas de bases, *n* faces laterais em formato de paralelogramo, *(n+2)* faces, *2n* vértices e *3n* arestas.

A altura de um prisma é a distância h entre os planos das bases.

Podemos classificar o prisma como reto (arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases), obliquo (arestas laterais são obliquas aos planos das bases) e regular (prima reto cujas bases são polígonos regulares).

Definição 2 Chamamos de **paralelepípedo** o prisma cujas bases são paralelogramos. O paralelepípedo reto retângulos (ou paralelepípedo retângulo) é um prisma reto cujas bases são retângulos.

O *volume* de um sólido geométrico é uma grandeza que representa o espaço que esse sólido geométrico ocupa.

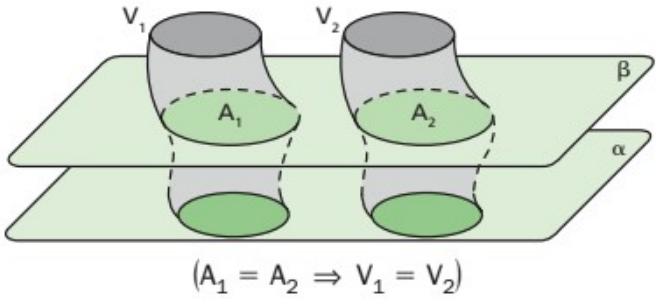
Podemos calcular **o volume de um paralelepípedo reto** com dimensões *a*, *b* e *c* como o produto das medidas de suas três dimensões, ou seja, $V = a \cdot b \cdot c$. Tomando como base a face de dimensões *a* e *b*, indicando por A_B a área dessa base ($A_B = a \cdot b$) e a altura *c* por *h*, podemos escrever:

$$V = A_B \cdot h$$

Assim, o volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto da área da base pela medida da altura.

O *princípio de Cavalieri* diz que “Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).”

Figura 2 – Princípio de Cavalieri



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 159).

A aplicação do princípio de Cavalieri implica no que conhecemos como fórmula do volume de um prisma. O volume de um prisma é o produto da área da base pela medida da altura, ou seja,

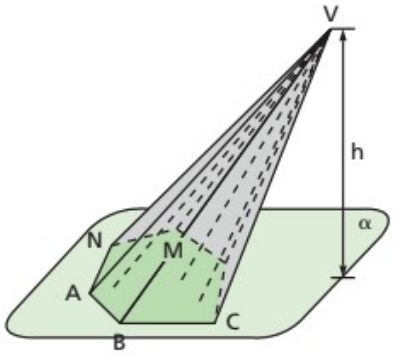
$$V = A_B \cdot h$$

Definição 3 Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) ABC... MN situado num plano a e um ponto V fora de a. Chama-se **pirâmide** (ou pirâmide convexa) à reunião dos segmentos com uma extremidade em V, chamado vértice da pirâmide) e a outra nos pontos do polígono.

Dessa forma, a pirâmide é um poliedro convexo que tem uma face com *n* lados, chamada de base, *n* faces laterais em formato de triângulos, *(n+1)* faces, *n+1* vértices e *2n* arestas.

A altura de uma pirâmide é a distância *h* entre o vértice V e o plano da base.

Figura 3 – Pirâmide

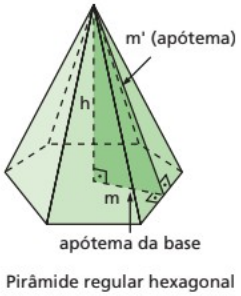


Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 178).

Chamamos a atenção para dois tipos de pirâmides: pirâmide regular e tetraedro regular.

A **pirâmide regular** é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.
Chama-se *apótema* de uma pirâmide regular à altura relativa ao lado da base de uma face lateral.

Figura 4 – Pirâmide Regular

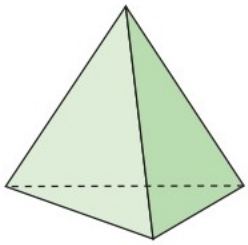


Pirâmide regular hexagonal

Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 179).

Chama-se **tetraedro regular** uma pirâmide de base triangular que tem as seis arestas congruentes entre si, ou seja, suas faces são triângulos equiláteros congruentes.

Figura 5 – Tetraedro Regular



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 180).

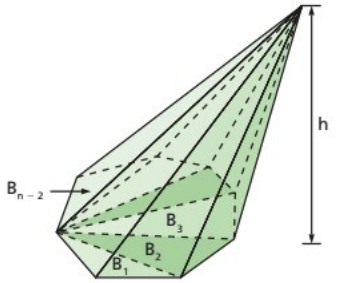
O volume da pirâmide é calculado a partir do volume do prisma. Todo prisma triangular é a soma de três pirâmides triangulares equivalentes entre si (de volumes iguais V_T). Assim, um prisma de volume V pode ser pensado como $V = 3 \cdot V_T$. Como o volume do prisma é calculado por $V = A_B \cdot h$, temos que

$$3 \cdot V_T = A_B \cdot h \Rightarrow V_T = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

onde a base A_B e altura *h* são equivalentes a base e altura do prisma.

Podemos dividir a pirâmide com base de *n* lados em *n-2* tetraedros todos com altura *h*. Então o volume da pirâmide é a soma do volume dos tetraedros e assim, $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$.

Figura 6 – Volume da Pirâmide

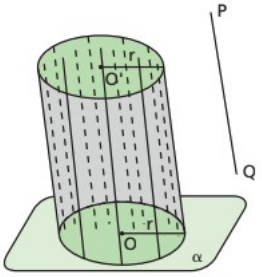


Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 185).

Temos então que o **volume de uma pirâmide** é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

Definição 4 Consideremos um círculo (região circular) de centro O e raio r, situado num plano a, e um segmento de reta PQ, não nulo, não paralelo e não contido em a. Chama-se **cilindro circular** ou cilindro à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a PQ, com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semiespaço dos determinados por a.

Figura 7 – Cilindro Circular

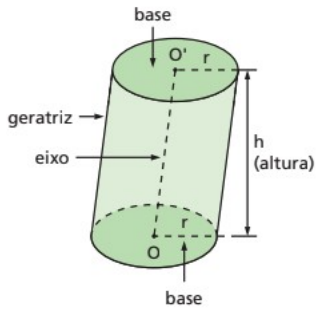


Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 209).

Dessa forma, o cilindro é um sólido com 2 círculos congruentes em planos paralelos, chamados de bases, e geratrizes, que são segmentos que partem da circunferência de uma base a outro ponto correspondente a outra base.

A altura de um cilindro é a distância *h* entre os planos das bases.

Figura 8 – Elementos do Cilindro



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 210).

A partir do princípio de Cavalieri, um cilindro com a medida de altura e área da base equivalentes a um prisma possuem volumes iguais. Assim, **volume do cilindro** é igual ao volume do prisma, ou seja,

$$V = A_B \cdot h$$

Com isso, o volume de um cilindro é o produto da área da base pela medida da altura. Como a base do cilindro é sempre circular, podemos também representar o volume como

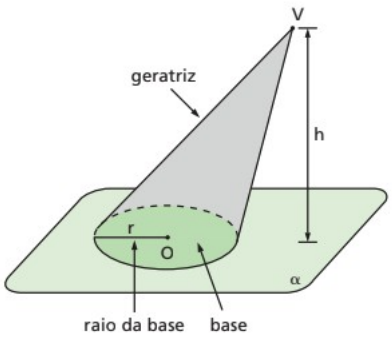
$$V = A_B \cdot h \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot h$$

Definição 5 Consideremos um círculo (região circular) de centro O e raio r situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se **cone circular** ou **cone** à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo.

Dessa forma, o cone é um sólido com uma base circular de raio r, vértice V e geratrizes, com uma extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base.

A altura de um cone é a distância *h* entre o vértice V e o plano da base.

Figura 9 – Cone Circular



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 227).

A partir do princípio de Cavalieri, um cone com a medida de altura e área da base equivalentes a um tetraedro possuem volumes iguais. Assim, **volume do cone** é igual ao volume do tetraedro, ou seja,

$$V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

Com isso, o volume de um cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura. Como a base do cone é sempre circular, podemos também representar o volume como

$$V = \frac{A_B \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

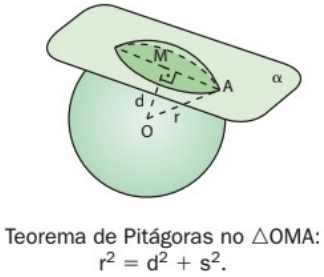
Definição 6 Consideremos um ponto O e um segmento de medida r. Chama-se **esfera** de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja menor ou igual a r.

Toda seção plana de uma esfera é um círculo. Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como seção um círculo máximo da esfera.

Sendo r o raio da esfera, d a distância do plano secante ao centro e s o raio da seção, vale a relação:

$$s^2 = r^2 - d^2$$

Figura 10 – Seção Plana de uma Esfera

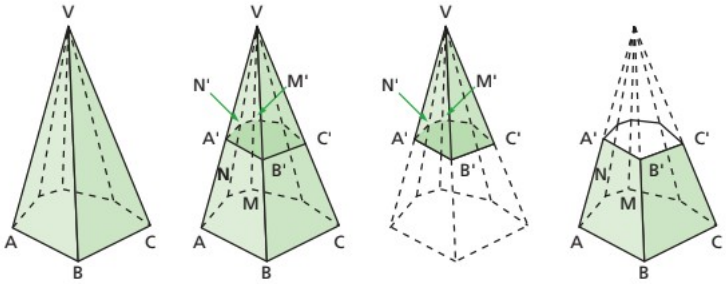


Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 242).

O volume da esfera de raio r é $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Definição 7 Seccionando uma pirâmide por um plano paralelo à base, separamos essa pirâmide em dois sólidos: o sólido que contém o vértice que é uma nova pirâmide e o sólido que contém a base da pirâmide dada que é um tronco de pirâmide de bases paralelas.

Figura 11 – Secção de uma Pirâmide por um plano paralelo à base



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 258).

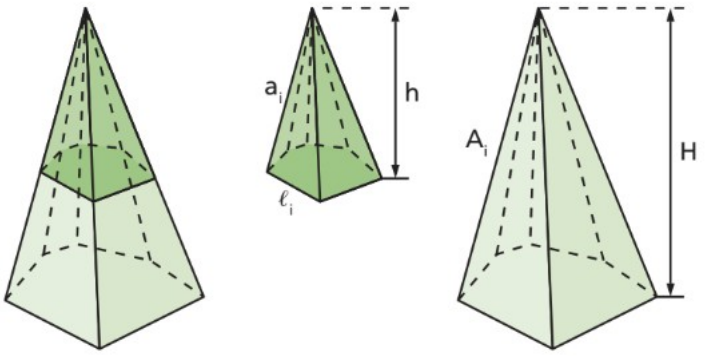
A nova pirâmide e a pirâmide primitiva têm a mesma natureza, os ângulos ordenadamente congruentes e os elementos lineares homólogos (arestas das bases,
arestas laterais, alturas, ...) são proporcionais. Dizemos que elas são **semelhantes**.

De forma análoga, seccionando um cone por um plano paralelo à base, separamos esse cone em dois sólidos: o sólido que contém o vértice que é um novo cone e o sólido que contém a base do cone dado que é um tronco de cone de bases paralelas.

O novo cone e o cone primitivo têm a mesma natureza, os ângulos ordenadamente congruentes e os elementos lineares homólogos são proporcionais. Dizemos que os cones são **semelhantes**.

Em sólidos semelhantes temos a razão de semelhança que é a razão entre dois elementos lineares homólogos, representada por *k.* Assim, temos

Figura 12 – Razão de Semelhança entre Sólidos Semelhantes



$$\frac{a_i}{A_i} = \frac{\ell_i}{L_i} = \frac{h}{H} = k$$

(razão de semelhança)

Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 259).

Como são sólidos semelhantes, valem algumas propriedades:

- A razão entre as áreas das bases é igual ao quadrado da razão de semelhança;

- A razão entre as áreas laterais (ou das áreas de superfícies) é igual ao quadrado da razão de semelhança;

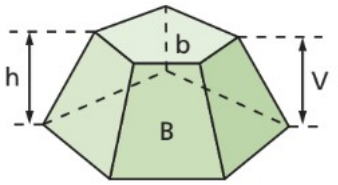
- A razão entre as áreas totais é igual ao quadrado da razão de semelhança;

- A razão entre os volumes é igual ao cubo da razão de semelhança;

A partir da relação de semelhanças dos sólidos, conseguimos deduzir a fórmula do volume do **tronco de pirâmide** (V_{TP}) e volume do **tronco de cilindro** (V_{TC}).

Para tronco de pirâmide, temos como elementos a base maior com área A_B, a base menor com área A_b e altura *h.*

Figura 13 – Tronco da Pirâmide



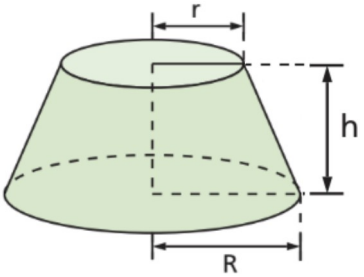
Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 257).

Assim, seu volume pode ser calculado como

$$V_{TP}=\frac{h}{3}\left(A_B+\sqrt{A_B\cdot A_b}+A_b\right)$$

Por sua vez, o tronco de cilindro tem como elementos a base maior de raio *R*, a base menor de raio *r* e altura *h.*

Figura 14 – Tronco de Cone



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Assim, o volume do tronco de cilindro pode ser calculado por

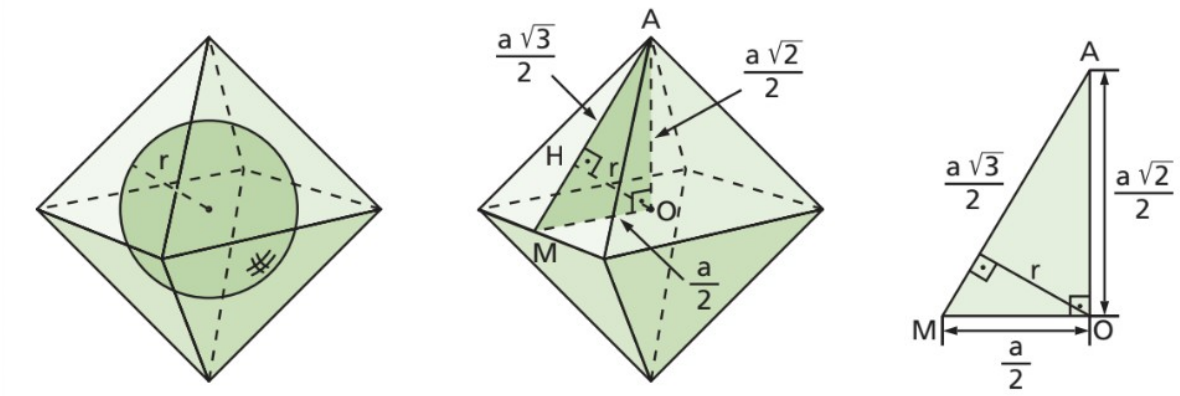
$$V_{TC}=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+R\cdot r+r^2\right)$$

Definição 8 Podemos falar que um sólido A está **inscrito** de um outro sólido B quando A está "**dentro**" de B. Por outro lado, dizemos que um sólido B circunscreve um sólido A quando B "engloba" A.

Os casos mais comuns de inscrição de sólidos envolvem esfera. Nesse caso, nos restringiremos a esfera inscrita em um octaedro regular, assunto contemplado em uma das questões do simulado.

Abaixo temos uma esfera de raio *r* inscrita em um octaedro regular de aresta *a*.

Figura 15 – Esfera Inscrita em um Octaedro



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 293).

O raio da esfera inscrita é a altura OH do triângulo retângulo AOM. As medidas dos lados do triângulo AOM são calculadas pelas relações de pirâmide quadrangular.

Aplicando as relações métricas no triângulo AOM $(hipotenusa \cdot altura = cateto\,1 \cdot cateto\,2)$, temos:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot r = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{6}}{6} e a = r\sqrt{6}$$

Deste modo, com as definições apresentadas, passaremos para a seção que abordará o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio.

1.2.2 O Ensino e a Aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio

Nesta seção, buscamos por pesquisas que abordam possibilidades de se ensinar a Geometria Espacial de maneiras diversificadas. Segundo Heck (2020), a dificuldade de estudantes tanto do ensino fundamental e médio em relação a Geometria Espacial, mesmo com inovações metodológicas para o aprendizado, é latente.

Com o objetivo de ensinar a Geometria Espacial para alunos da Educação de Jovens e Adultos, Oliveira *et al.* (2021) partem do cotidiano e da vida dos estudantes para compor o aprendizado matemático, ao utilizarem elementos simples e do cotidiano dos estudantes. Os pesquisadores propuseram a realização de uma exposição geométrica feita com caixas de utensílios domésticos ou de mantimentos, e foi solicitado que os estudantes desenhassem onde encontravam a geometria. Foi

possível observar registros de imagens como a de uma bola, de uma casa ou de uma mesa de sinuca.

Destacamos que essa atividade utilizou um caminho diferente de diversas pesquisas na área de ensino de matemática e de geometria (seja a analítica, espacial ou visual) que utilizam como método de aprendizado softwares como o GeoGebra. Oliveira *et. al.* (2021) evidenciam que antes de buscar soluções tecnológicas, um dos elementos fundamentais para se aprender matemática é partir da experiência dos estudantes.

Fernandes (2015) busca analisar e propor que estudantes da segunda série do Ensino Médio internalizem os conhecimentos de Geometria Euclidiana Espacial de diversas formas, como com o uso de material concreto e softwares relacionados a geometria espacial. Como resultado da pesquisa, o autor aponta que para a ocorrência de uma aprendizagem significativa são necessárias a motivação para aprender geometria espacial pelos estudantes, principalmente ao partir de suas experiências; e uma educação holística, que pode ser traduzida através da pesquisa como uma diversidade metodológica de ensino.

Silva e Braz (2017) buscaram investigar as dificuldades de aprendizagem de estudantes da segunda série do Ensino Médio, e as principais e também, de longa data no ensino da disciplina, foram a defasagem de conhecimentos sobre Geometria Plana, fato que dificulta o aprendizado da Geometria Espacial; a dificuldade na visualização e em entender as fórmulas para calcular a grandeza dos sólidos geométricos, na interpretação dos enunciados dos exercícios, e o problema da Geometria Espacial não ser relacionada ao cotidiano, segundo Santos *et. al* (2021) a experiência cotidiana é fundamental para aprender Geometria Espacial.

Na mesma pesquisa, algumas questões gerais foram realizadas aos alunos, destacamos algumas respostas, como aquelas em que a maioria dos alunos responderam terem visto pouco sobre geometria no Ensino Fundamental, e ainda, uma constatação que trazemos da pesquisa de Silva e Braz (2017, p.7) para o nosso estudo, se refere a consideração dos alunos de que a Geometria Espacial em escolas públicas é pouco abordada se comparada com escolas privadas, corroborando com a crítica de Pavanello (2009) realizada a há anos anteriores, de que ainda a geometria é mais aprofundada no ensino privado do que na educação pública brasileira.

Pontes (2018), busca utilizar materiais concretos como metodologia de ensino e aprendizado de Geometria Espacial para estudantes do 1° ano do Ensino Médio, e constata que houve melhoria do aprendizado com o uso de material concreto, bem como, aumento na frequência das aulas por parte dos alunos. A metodologia incentivou e estimulou os alunos para estudarem Geometria.

Menegais *et. al.* (2022) afirmam que o uso de softwares pode melhorar o aprendizado dos estudantes em relação a geometria. A consideração que as tecnologias digitais, principalmente o GeoGebra3D, auxiliam o aprendizado de estudantes do Ensino Médio na disciplina de Geometria Espacial também é compartilhada por Meireles; Schimiguel e Gozzi (2021).

Como visto até aqui, o ensino e aprendizagem de Geometria, principalmente a Geometria Espacial no Ensino Médio perpassa por desafios e possibilidades. Os desafios são históricos e que não começam justamente no Ensino Médio já que a etapa do Ensino Fundamental é crucial para ter os primeiros contatos com um estado aprofundado da Geometria Espacial. Esse mesmo estudo deve ser revisto e aprofundado no Ensino Médio, até mesmo como orientam os documentos curriculares brasileiros. Além disso, percebemos que o uso da contextualização e partir do cotidiano dos estudantes é fundamental para melhorar essa defasagem em relação ao aprendizado de Geometria Espacial. Por fim, tanto metodologias mais tradicionais, como o material concreto, quanto tecnologias, como o GeoGebra, contribuem com o aprendizado de Geometria Espacial e é recomendados seu uso pelos professores.

2 ENCAMINHAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Esta pesquisa configura-se como qualitativa, em que a preocupação com o processo é maior do que com o produto (Creswel 2007, p. 186). O instrumento para a coleta dos dados deste estudo foi um simulado, contendo questões de múltipla escolha, aplicado para uma turma da terceira série do Ensino Médio.

O simulado foi elaborado a partir de questões do ENEM e vestibulares dos últimos cinco anos. Dentro de um banco de trinta questões dos diferentes exames, foram selecionadas dez questões variadas de geometria espacial. O critério aplicado para a escolha das questões foi de envolver questões com e sem figuras no enunciado. Além disso, as questões foram descaracterizadas de modo que o aluno não saberia de qual exame ele estaria fazendo. A duração de aplicação do simulado foi de 80 minutos e doze alunos participaram.

A turma escolhida para a aplicação do simulado foi da terceira série do ensino médio de uma escola privada no município de Umuarama. Para análise dos dados, serão utilizados alguns conceitos da Análise de Conteúdo (Bardin, 2002), tais como leituras flutuantes, resultando nas categorias e no tratamento dos resultados. As leituras flutuantes dizem respeito as leituras para exploração do material ou *corpus* da pesquisa. Deste modo, as categorias foram estabelecidas *a priori*, nomeadas de acordo com os níveis da teoria de van Hiele, que será anunciada na seção 2.3 desta dissertação.

Com base nas categorias, busca-se entender em que nível do desenvolvimento do pensamento geométrico os estudantes avaliados estão, para assim poder propor um produto educacional que auxilia os professores a trabalharem com os estudantes para sanar defasagens. Com a finalidade de preservarmos a identidade dos alunos que realizaram o simulado, para cada um deles atribuímos um código A1, A2, ..., A12. Na sequência, exporemos algumas considerações sobre o ENEM e sobre vestibulares, provas das quais as questões foram selecionadas.

2.1 ENEM e Vestibular: considerações

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado em 1998 e tido como inovador pelo governo federal pelo seu caráter interdisciplinar e na ênfase na

avaliação de competências e habilidades. Além de levantar e sistematizar dados sobre aspectos educacionais no Brasil, também abrir acesso para o Ensino Superior. Como mostra Minhoto (2016, p. 84), os objetivos iniciais do ENEM foram:

> avaliar o desempenho do aluno ao término da escolaridade básica; aferir o desenvolvimento de competências fundamentais ao exercício pleno da cidadania; oferecer uma referência de auto-avaliação aos jovens, tanto em relação ao mercado de trabalho quanto em relação à continuidade de estudos; servir como modalidade alternativa ou complementar aos processos de seleção nos diferentes setores do mundo do trabalho, bem como de cursos profissionalizantes pós-médios e do ensino superior.

Segundo a mesma autora, até 2008, a prova continha 63 questões. Em 2009 passou por uma reformulação metodológica. Houve alterações principalmente na quantidade de questões, sendo 45 de cada área, totalizando 180 questões. Essa reformulação foi utilizada como proposta para que o ENEM fosse aceito nas universidades públicas como forma de ingresso:

> No ano de 2009, o MEC formalizou uma proposta de reestruturação metodológica do ENEM à Associação Nacional de Dirigentes das Instituições Federais de Educação Superior (Andifes) e ao Conselho Nacional de Secretários de Educação (Consed) para que fosse utilizado por todas as Instituições Federais de Educação Superior (IFES) como subsídio aos seus processos seletivos de ingresso, argumentando positivamente sobre os "ganhos de um processo unificado de seleção e a possibilidade concreta de [...] reestruturação de currículos no ensino médio" (BRASIL, 2009b, p. 1). De acordo com a proposta, a adesão das diversas IFES a um sistema unificado de seleção permitiria ampliar as oportunidades de acesso aos jovens brasileiros às respectivas vagas, além de estimular a mobilidade dos estudantes entre as diferentes regiões do país e propiciar uma relação positiva entre o EM e o ensino superior (ES), com a discussão e o estabelecimento de novas diretrizes para a prova (Minhoto, 2016, p. 85)

Hoje o ENEM ocupa lugar central na sociedade, sendo uma das principais formas de entrada nas universidades públicas - maior até mesmo que o vestibular - ou como forma de receber uma bolsa de estudos em cursos privados através das políticas públicas como o Fundo de Financiamento Estudantil (FIES)[1] e o Programa Universidade Para Todos (ProUni), criado em 2004, que oferta bolsas de estudo de forma integral ou parcial[2].

---

1 O FIES foi criado em 1999, um ano após o ENEM, e determina regras de financiamento estudantil onde o governo federal custeia o estudo em faculdades privadas. Para acessar o FIES, o estudante necessita tirar uma nota mínima geral na prova do ENEM (450). Quanto maior a nota, maior o financiamento.

Assim, como afirma Minhoto (2016, p. 84), foi um dos motivos do significativo aumento do número de participantes do exame: “em 2004, foram cerca de 1,5 milhões de inscritos e, em 2005, o número dobrou para cerca de 3 milhões. Em 2010, passou a ser uma das principais formas de acesso ao ensino superior público, tendo contado, em 2014, com mais de 8,7 milhões participantes”. Além disso, foi também em 2009 que o Sistema de Seleção Unificado (SiSu) foi criado a fim de selecionar alunos para cursos superiores de instituições federais e estaduais, tomando como base a nota obtida no ENEM. A partir desse momento o ENEM começa a ser olhado de formas diferentes tanto por estudantes como por instituições de ensino.

Compreender o impacto do ENEM na educação brasileira é fundamental, principalmente por ser um instrumento avaliativo de larga escala e que dita muito da progressão da carreira estudantil dos jovens brasileiros. Para Minhoto (2016, p. 85), ao colocar o ENEM como um importante instrumento de ingresso no ensino superior, o Ministério da Educação (MEC) definiu novos objetivos para esse instrumento avaliativo em escala nacional:

> democratizar as oportunidades de acesso às vagas federais de ES e pós-médio; induzir a reestruturação dos currículos do EM; possibilitar a mobilidade acadêmica dos estudantes pelo país; promover avaliação do desempenho acadêmico dos ingressantes nas IES; promover certificação de jovens e adultos no nível de conclusão do EM e possibilitar sua participação em programas governamentais

No entanto, para a autora, esses objetivos tiveram resultados oblíquos. Em relação ao primeiro objetivo, não parece haver evidências que o Novo ENEM (a partir de 2009) foi uma medida eficiente para “[...] alterar de forma significativa o perfil dos ingressantes nas instituições e cursos superiores de grande atratividade e, por isso mesmo, muito seletivos” (Minhoto, 2016, p. 85). O instrumento avaliativo não conseguiu alterar as características socioeconômicas dos estudantes, nem a sua escolarização - fator crucial para uma melhoria na educação e acesso ao ensino superior público. Para Minhoto (2016), é provável um dos instrumentos mais eficazes para realizar esse objetivo - de maior diversidade socioeconômica e de auxílio de diferentes tipos de ingressantes - foi a própria Lei nº 12.711, de 29 de agosto de 2012, conhecida também como “Lei de Cotas”, que institui cotas raciais para o ingresso no ensino público federal universitário e técnico.

---

2 No ano seguinte, em 2005, segundo Minhoto (2006), o ENEM se torna critério de seleção de bolsistas do ProUni.

A partir dessa lei, houve o desenvolvimento de outros tipos de cotas, como a por renda e indígena. Recentemente, em 2023 a “Lei de Cotas” foi revista e ampliada, onde foram incluídos estudantes quilombolas, além de alteração da faixa de renda para aumentar o acesso de estudantes no ensino público. Além disso, como mostra Minhoto (2016, p. 85), o aumento da diversidade socioeconômica dos estudantes no ensino superior também se deu pelo aumento do número de vagas e pelo “[...] Plano Nacional de Assistência Estudantil (PNAES, Portaria Normativa nº 39, de 2007), que financia a permanência dos estudantes mais carentes nas instituições federais” (Minhoto, 2016, p. 85).

Porém, como argumenta Minhoto (2016), o Novo ENEM, por ocupar um lugar de destaque na educação brasileira, foi efetivo em induzir a mudanças no currículo do Ensino Médio. Concordamos com Minhoto (2016, p. 85-86) ao afirmar que o ENEM

> vem exercendo interferência no trabalho do professor, no que toca ao planejamento das aulas e à adoção de instrumentos didático-metodológicos afinados com sua matriz de habilidades e competências, e contribuído para o estabelecimento de uma característica mais propedêutica ao EM em detrimento de uma formação voltada eminentemente ao exercício da cidadania e à preservação de conhecimentos socialmente valorizados, como deveria ocorrer com a etapa final da escolarização básica, de acordo com a CF/88 e a LDB/96.

Além disso, para ser aceito como instrumento de ingresso, o Novo ENEM teve que se aproximar da matriz e dos conteúdos curriculares dos antigos e concorridos vestibulares. É assim que o Novo ENEM a partir de 2009 atendeu ao objetivo de selecionar indivíduos ao Ensino Superior (ES) público, ou “candidatos extremamente preparados”, a partir de “itens de alta complexidade, capazes de discriminar alunos de altíssima proficiência daqueles de alta proficiência” (Brasil, 2009b, p. 5). É nesse “novo” formato que “[...] com a apresentação dos conteúdos em textos extensos e tipicamente acadêmicos, revela a aproximação do ENEM às necessidades de seleção para o ingresso no competitivo mundo do ES público brasileiro, deixando claro seu principal caráter atualmente” (Minhoto, 2016, p. 86). Além disso, a nota avaliativa do ENEM também tem sido utilizada como possibilidade para ingressar em universidades em Portugal, como o caso das universidades portuguesas de Coimbra, Algarve e Beira Interior.

Por fim, uma mudança importante hoje que difere da análise de Minhoto (2016) em relação ao ENEM é a sua possibilidade como declaração de proficiência e certificação do Ensino Médio pela Portaria normativa n. 4 de 11 de fevereiro de 2010. Essa modalidade não existe mais e para que algo semelhante aconteça é necessário nota suficiente na prova do Exame Nacional de Certificação de Competência de Jovens e Adultos (ENCCEJA). Porém, com tudo até agora apresentado, pode-se afirmar que o ENEM é central para compreendermos partes significativas da educação brasileira.

A forma de elaboração da prova do ENEM também leva em consideração aspectos diferentes. A principal delas é que não está baseada em abordar conteúdos específicos como são os vestibulares tradicionais. Além da sua inovadora interdisciplinaridade destacada anteriormente, a prova do ENEM parte de uma Matriz de Referência com quatro grandes áreas: Linguagens e Códigos e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias (Gomes, 2018, p. 14).

Na prova do ENEM são avaliadas habilidades e competências e conta com cinco Eixos Cognitivos: 1. Dominar Linguagens (DL); 2. Compreender Fenômenos (CF); 3. Enfrentar Situações-problema (SP); 4. Construir Argumentação (CA) e, por fim, 5. Elaborar Propostas (EP) Gomes (2018, p. 14) baseado em Brasil (2009). O primeiro eixo é “Dominar linguagens (DL) que diz o seguinte: dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa” (Brasil, 2009 *apud* Gomes, 2018, p. 14).

O segundo eixo é “Compreender fenômenos (CF) tem como proposta construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas” (Brasil, 2009 *apud* Gomes 2018, p. 15). Já o terceiro eixo é “Enfrentar situações-problema (SP)”, ou seja, selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema. Brasil (2009) apud Gomes (2018, p. 15).

O quarto eixo é “Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente” (Brasil, 2009 *apud* Gomes (2018, p. 16). Por fim, o quinto eixo é “Elaborar propostas (EP), e vem salientar esse

caráter humano: recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural" (Brasil, 2009 *apud* Gomes, 2018, p. 17).

2.2 Seleção das Questões e Elaboração do Simulado

Para a elaboração do simulado utilizado com os estudantes, foi realizada uma seleção de questões próprias para o Ensino Médio, tanto de provas do ENEM como de vestibulares. Para esta seleção, foi utilizado um "banco de questões" do Ensino Médio, com o tema Geometria Espacial.

Para selecionar as questões, elaborou-se alguns critérios. O primeiro deles foi a presença ou não de figuras para a resolução das questões. Nesse sentido, foram observadas as questões que traziam figuras geométricas e as que não traziam. Em um segundo momento, separa-se as questões que poderiam ser realizadas sem a figura geométrica. O motivo disso é que apesar de algumas questões do ENEM, e principalmente de vestibulares, apresentarem figuras geométricas, seus enunciados são explícitos ou diretos o suficiente para que sejam apenas utilizadas as informações presentes no próprio enunciado para a resolução. Em outras palavras, algumas questões encontradas traziam informações suficientes no enunciado de modo que a aplicação direta de alguma fórmula já resolveria (como as de volumes e áreas de figuras geométricas espaciais) e o resultado já estaria posto. Como essas questões são geralmente mais naturais e diretas, as excluímos da seleção.

Como foi aplicado o simulado para estudantes que já tiveram aula com o autor, optou-se por retirar questões que os estudantes já sabiam fazer, como aquelas que foram propostas em listas de exercícios, na apostila ou mesmo em provas. Para dificultar a identificação das questões, caso o estudante já tivesse contato com o mesmo exercício, retirou-se a identificação da questão em relação a sua origem e a data (exemplo: [ENEM 2014]).

A partir dessa seleção, chegou-se a um total de 30 questões levantadas, contendo exercícios do ENEM, vestibulares e de elaboração própria do banco de questões da rede privada de ensino. Foram selecionadas 10 questões que conseguiriam abarcar conceitos imediatos ou não, na resolução de questões com imagens; a priorização, por parte do aluno, de questões com figuras caso houvesse

um limite de tempo ou ordem nas escolhas destas questões para serem resolvidas; e se a opção por questões com uma possível aplicação direta de uma fórmula.

Dessa forma, elaboramos e aplicamos o simulado contendo 10 questões que estarão na parte de Apêndice A. Para fazer o simulado, foi possível utilizar lápis, caneta e borracha, além de folhas de rascunho que deveriam ser entregues com os resultados para que a nossa análise fosse feita.

Na sequência, apresentaremos considerações sobre a principal ferramenta de análise das resoluções dos alunos, a teoria de van Hiele, referencial teórico-metodológico desta pesquisa.

2.3 A Teoria de van Hiele

Desenvolvido pelo casal holandês Dina van Hiele-Geodolf e Pierre Marie van Hiele a pesquisa buscou compreender as dificuldades dos estudantes em aprender geometria.

Para Passos (2015 apud Matos, 2019), a pesquisa de Dina van Hiele Geldof foi inovadora para o período, pois a experiência e os dados foram retirados a partir de situações e práticas reais em sala de aula, e por meio da obra *Structure and Education, insight: a theory of Mathematics* publicada em 1986, foi possível compreender a teoria do pensamento geométrico de van Hiele, principalmente a descrição dos níveis do pensamento geométrico e como analisar e compreender as fases do processo de aprendizagem para desenvolver e progredir nos níveis de aprendizado.

A teoria de van Hiele é interessante por elaborar uma teoria da aprendizagem em matemática que comporta elementos próprios da matemática, não se baseando em teorias psicologizantes da psicologia da educação. Diferente das interpretações educacionais a partir de Jean Piaget, a teoria do pensamento geométrico de van Hielenão depende do avanço na idade para a progressão no conhecimento geométrico.

Segundo Walle (2009 *apud* Matos, 2019), a teoria do pensamento geométrico está ligada a quatro características de seus níveis: são sequenciais (é necessário passar pelos níveis); os níveis não dependem da idade para o aprendizado ou para passar de nível; é a experiência geométrica que influencia o avanço nos níveis; quando o ensino ou a linguagem de ensino está em um nível superior do que o nível de pensamento geométrico do estudante existe uma falta de comunicação onde o

estudante somente memorizará os elementos, assim ocorrendo uma aprendizagem mecânica e não um pensamento geométrico. Portanto, o processo de aprendizagem geométrico depende do progresso dos níveis, não do avanço da idade do estudante (Nasser, 1993, p. 31 *apud* Matos, 2019).

Um exemplo disso, é a pesquisa de Matos (2019) que investigou as respostas de estudantes ingressantes no curso de licenciatura de matemática a questões do ENEM que abordam o conteúdo de geometria. A finalidade da pesquisa era compreender os níveis de aprendizado geométrico de van Hiele. A conclusão foi que estudantes na faixa etária de 17 a 20 anos estariam no nível 3 de aprendizado geométrico - nível esperado para a faixa escolar e conteúdos vistos, já que os níveis 4 e 5 serão desenvolvidos no ensino superior.

Podemos perceber que a teoria e pesquisa de van Hiele é influente em interpretações contemporâneas no Brasil sobre o aprendizado em geometria como é possível encontrar nos trabalhos de Liliana Nasser e Adriana Quimentão Passos. É a partir desses trabalhos que iremos descrever os níveis de aprendizagem do pensamento geométrico de van Hiele. Segundo Passos (2015 *apud* Matos, 2019), a teoria de aprendizagem geométrica de van Hiele e seus desenvolvimentos posteriores consistem em cinco níveis de compreensão: 1. reconhecimento; 2. análise; 3. abstração; 4. dedução; e 5. rigor. No primeiro nível “Reconhecimento” os estudantes conseguem reconhecer as figuras geométricas e conseguem as nomear com base em suas características. Para Villiers (2010 *apud* Matos, 2019) os estudantes reconhecem as figuras pelas suas características globais através da visualidade. Conseguem reconhecer triângulos, quadrados, paralelogramos e outras formas, mas não conseguem identificar suas propriedades. Eles conseguem, segundo Nasser (1993 *apud* Passos, 2015), no nível “Reconhecimento” os objetos de pensamento são as classificações de figuras geométricas. Para Filho (2015 *apud* Matos, 2019), os estudantes no nível 1, os estudantes conseguem observar, construir e manipular os objetos a maneira de identificar e classificar as formas geométricas.

No nível 2, de “Análise”, segundo Villiers (2010 *apud* Matos, 2019) os estudantes começam a analisar as propriedades das figuras e aprendem as terminologias adequadas para as descrever. Porém, não conseguem realizar uma ligação entre as figuras e as propriedades delas. A análise das propriedades das figuras é através da observação e experimentação, já que conseguem identificar as

características de uma figura geométrica. Além disso, as propriedades são utilizadas para definir as formas e classes de uma figura. Um exemplo disso é identificar um quadrado por meio das propriedades: 1. o quadrado tem quatro lados iguais; 2. o quadrado tem quatro ângulos retos e lados opostos iguais e paralelos (Nasser; Sant'anna, 2017 *apud* Matos, 2019). Nesse sentido, Nasser (1993 *apud* Matos, 2019) comenta que no nível de "Análise" o objeto de pensamento gira em torno da descrição das figuras geométricas através das propriedades das classificações e das formas. Além disso, para Filho (2015 *apud* Matos, 2019), no nível 2 os estudantes podem observar, por exemplo, um paralelepípedo como uma "caixa" e comparar com os prismas, percebendo uma possível semelhança entre as figuras. Portanto, um diálogo entre as figuras começa, onde o estudante faz suposições sobre as propriedades das figuras geométricas.

No nível 3, de "Abstração", os estudantes adquirem a capacidade de perceber a necessidade de definições mais precisas e detalhadas das propriedades das figuras geométricas. Matos (2019) dá o exemplo da capacidade no nível de "Abstração" a relação entre as propriedades de uma figura geométrica como o quadrado sendo relacionado com um retângulo. A partir daí surgem as argumentações lógicas informais e de ordenação das classes das de figuras geométricas através dos pensamentos das propriedades dessas mesmas figuras. Outro exemplo é o apontado por Nasser e Sant'anna (2017 *apud* Matos, 2019) onde a abstração se relaciona a descrever um quadrado por meio de suas propriedades mínimas - quatro lados iguais e quatro ângulos retos - com um retângulo. Assim, para Nasser (1993 *apud* Matos, 2019), no nível 3 de "Abstração" as propriedades e as formas geométricas são objetos de pensamento dos estudantes na hora de construir um argumento lógico-informal.

No nível 4, de "Dedução", segundo Villiers (2010 *apud* Matos, 2019), os estudantes começam a elaborar enunciados sequenciados mais longos e compreender elementos mais complexos, como a importância da dedução, os axiomas e suas funções, teoremas e provas matemáticas. Exemplo do nível de "Dedução" é apontado por Nasser e Sant'anna (2017 *apud* Matos, 2019) onde os estudantes demonstram as propriedades dos triângulos e dos quadriláteros através da congruência de triângulos. Assim, Nasser (1993 *apud* Matos, 2019) também argumenta para que os estudantes compreendam a função dos axiomas, teoremas e prova são utilizadas as sequências de enunciados para objetos de pensamento.

Por fim, no nível 5, de “Rigor”, o último na hierarquia da teoria dos níveis de aprendizado geométrico de van Hiele, os estudantes adquirem a capacidade de entender demonstrações lógico formais. Para Nasser (1993 *apud* Matos, 2019) e Nasser e Sant’anna (2017 *apud* Matos, 2019) os estudantes conseguem no nível 5 realizar comparações entre diferentes sistemas axiomáticos e esses mesmos sistemas axiomáticos tornam-se objetos de pensamento. Além disso, o estudante tem capacidade de realizar demonstrações formais de teoremas, axiomas e comparar diferentes geometrias, como a geometria euclidiana e a não euclidiana, estabelecendo relações.

Os níveis de compreensão da teoria de aprendizagem geométrica de van Hielepode ser sintetizado pelo seguinte quadro:

Quadro 1 – Níveis de compreensão segundo a Teoria de Aprendizagem Geométrica de van Hiele

Nível de compreensão	Características	Exemplo
Nível 1: Reconhecimento	- Nomear e comparar com base na aparência global. - Condições de aprender o vocabulário geométrico.	O aluno consegue ver uma pirâmide, identificá-la, mas não consegue explicá-la.
Nível 2: Análise	- Análise das figuras pelos componentes. - Reconhecimento de propriedades sem inter-relacioná-las. - Uso das propriedades para resolução de problemas	O aluno identifica que a pirâmide tem uma base e suas faces laterais são triângulos, reconhecendo suas propriedades individuais sem relacioná-las.
Nível 3: Abstração	- Necessidade de definição precisa. - Percepção de que uma propriedade pode decorrer de outra (inter-relação). - Argumentação lógica informal. - Ordenação de classes de figuras geométricas.	O aluno entende a relação dos elementos da pirâmide (como a quantidade de lados da base e a quantidade de faces laterais) e consegue reconhecer diferenças (como a diferença entre a pirâmide e o prisma).
Nível 4: Dedução	- Domínio do processo dedutivo e das demonstrações. - Reconhecimento de condições necessárias e suficientes. - Capaz de fazer provas formais.	O aluno é capaz de definir formalmente o que é uma pirâmide e provar formalmente que uma pirâmide quadrada regular (condição necessária) possui todas as suas faces laterais

		congruentes (condição suficiente).
Nível 5: Rigor	- Capacidade de comparar sistemas baseados em diferentes axiomas.	O aluno tem compreensão de que, na geometria euclidiana, a soma dos ângulos das faces laterais da pirâmide é 180 graus, enquanto, na geometria não euclidiana, isso não se aplica devido à curvatura do espaço.

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Para Villiers (2010 *apud* Matos, 2019), ocorrem transições entre os níveis da teoria do aprendizado geométrico. A transição do nível 1 para o nível 2 necessita da capacidade de reconhecer novas relações entre conceitos, além de revisão dos conceitos já aprendidos. Ou seja, não é necessariamente uma aquisição de linguagem, mas sim uma progressão da capacidade de reconhecer e organizar conceitos relacionados às propriedades das figuras geométricas. Já a passagem do nível 2 para o nível 3 depende de alguns procedimentos. Envolve a associação de propriedades a tipos de figuras geométricas e as ligações entre figuras de acordo com suas propriedades envolvendo relações lógicas. Assim, para progredir ao nível 3, os conceitos e a linguagem devem ter uma forte relação com o raciocínio matemático (lógico-dedutivo) e com as definições das propriedades geométricas e de teoremas. Já a transição do nível 3 para 4 e subsequente até chegar no nível 5 é mais complexa, necessitando de níveis de pensamentos geométricos mais altos, como mostra Matos (2019), relacionados também ao ensino superior.

Destacamos que nas pesquisas que relacionam questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e de vestibulares como forma de compreender os níveis de aprendizado de geometria de estudantes a partir da teoria do pensamento geométrico de van Hiele(Matos, 2019; Lanhoso 2020; Oliveira e Cristovão, 2022) normalmente, as atividades são elaboradas *a priori*, de acordo com os níveis desta Teoria. Nesta pesquisa, realizamos o movimento contrário. Depois de elaborado o simulado, a teoria de van Hiele surge para dar suporte para as nossas análises. Deste modo, realizamos a análise, tanto dos enunciados das questões como das resoluções, tendo como categorias, os níveis da teoria de van Hiele.

Na sequência, exporemos a descrição e análise dos nossos dados.

3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

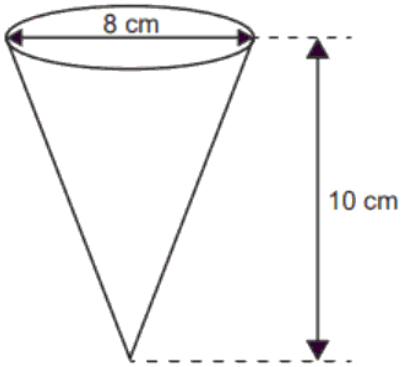
Neste capítulo serão apresentados os resultados das respostas dos estudantes da 3ª série do ensino médio para cada uma das dez questões. A escolha por essa série escolar se deve ao fato de que os alunos já estão concluindo o ciclo de ensino básico, o que permite avaliar seus conhecimentos geométricos adquiridos ao longo de sua trajetória.

As questões serão apresentadas uma a uma, com uma resolução sugerida dos exercícios e analisando a resolução a partir da Teoria dos níveis de compreensão de van Hiele. Após a resolução sugerida, serão apresentados resultados dos estudantes e análises detalhadas para cada questão.

Analisamos as resoluções dos alunos que resolveram parcialmente a questão, pois aqueles que as completaram com sucesso e chegaram ao resultado esperado já demonstraram os níveis de compreensão desejados. Por outro lado, não é possível avaliar os estudantes que deixaram certas questões em branco; contudo, nas questões com grande número de alunos que não responderam, será feita uma discussão desses casos, abordando os possíveis motivos que podem ter levado à não realização das questões com base nos níveis de compreensão de van Hiele.

3.1 Análise das resoluções das questões sob a perspectiva da Teoria de van Hiele

Questão 1. Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e alturas iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.



Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm. Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

a) 1,52. b) 3,24 c) 3,60. d) 6,48. e) 7,20.

Resolução sugerida – Questão 1

Passo 1 - Calcular o volume inicial do cone: A resolução do exercício começa com a resolução do volume inicial do cone, sendo necessário para o cálculo o valor do raio inicial, sendo o raio metade do diâmetro. Assim, temos:

$$V_{inicial} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 10}{3} = \frac{160\pi}{3}$$

No nível de compreensão da teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa análise como pertencente ao nível 2 (Análise) pois são necessárias às identificações das propriedades geométricas e da aplicação de fórmula do volume de cone.

Passo 2 - Calcular a redução do volume: A próxima etapa é determinar o novo volume pós redução de 19%. Como será reduzido 19%, o volume final será 81% do volume inicial. Assim, temos:

$$V_{redução} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 10}{3} \cdot \frac{81}{100} = \frac{160\pi}{3} \cdot \frac{81}{100}$$

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 2 (Análise) pois é demandada uma interpretação de redução percentual do volume. Porém, não é necessário um entendimento aprofundado das propriedades geométricas, apenas de aritmética.

Passo 3 - Determinar o novo raio: Como o volume final calculado, a determinação do novo raio se dá a partir da fórmula de volume do cone, onde o volume será em função do raio que se quer determinar. Portanto,

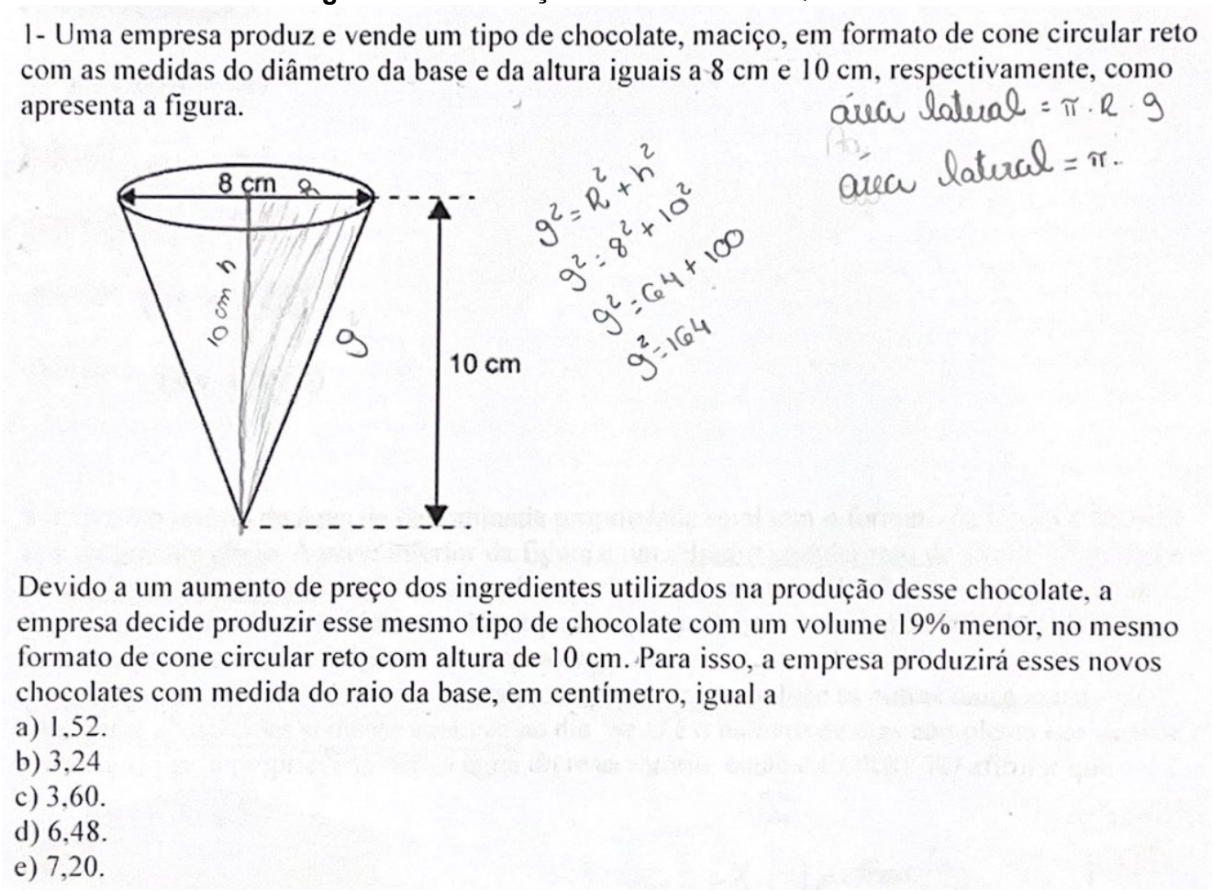
$$V_{redução} = \frac{160\pi}{3} \cdot \frac{81}{100} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 10}{3} \Longrightarrow r = 3{,}6$$

A partir do nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível observar a passagem do nível 2 (Análise) para o nível 3 (Abstração) pois a solução obriga a manipulação de expressão algébrica com variáveis geométricas e uma compreensão profunda da relação entre essas mesmas variáveis. Assim, o estudante necessita abstrair o volume como uma função do raio.

Sobre as resoluções dos estudantes na questão 1, seis alunos conseguiram resolver a questão por completo, cinco alunos resolveram parcialmente e um aluno não resolveu.

Na figura abaixo, apresenta-se a resolução do aluno A4. O estudante identifica o cone e algumas de suas propriedades, como o cálculo da geratriz e da área lateral, mas não aplica a fórmula do volume, que é o objetivo do exercício. Observando essa resposta à luz dos níveis de compreensão de van Hiele, percebe-se que ele pode estar no nível 2, identificando formas e características isoladas, mas não utiliza essas propriedades para resolver o problema.

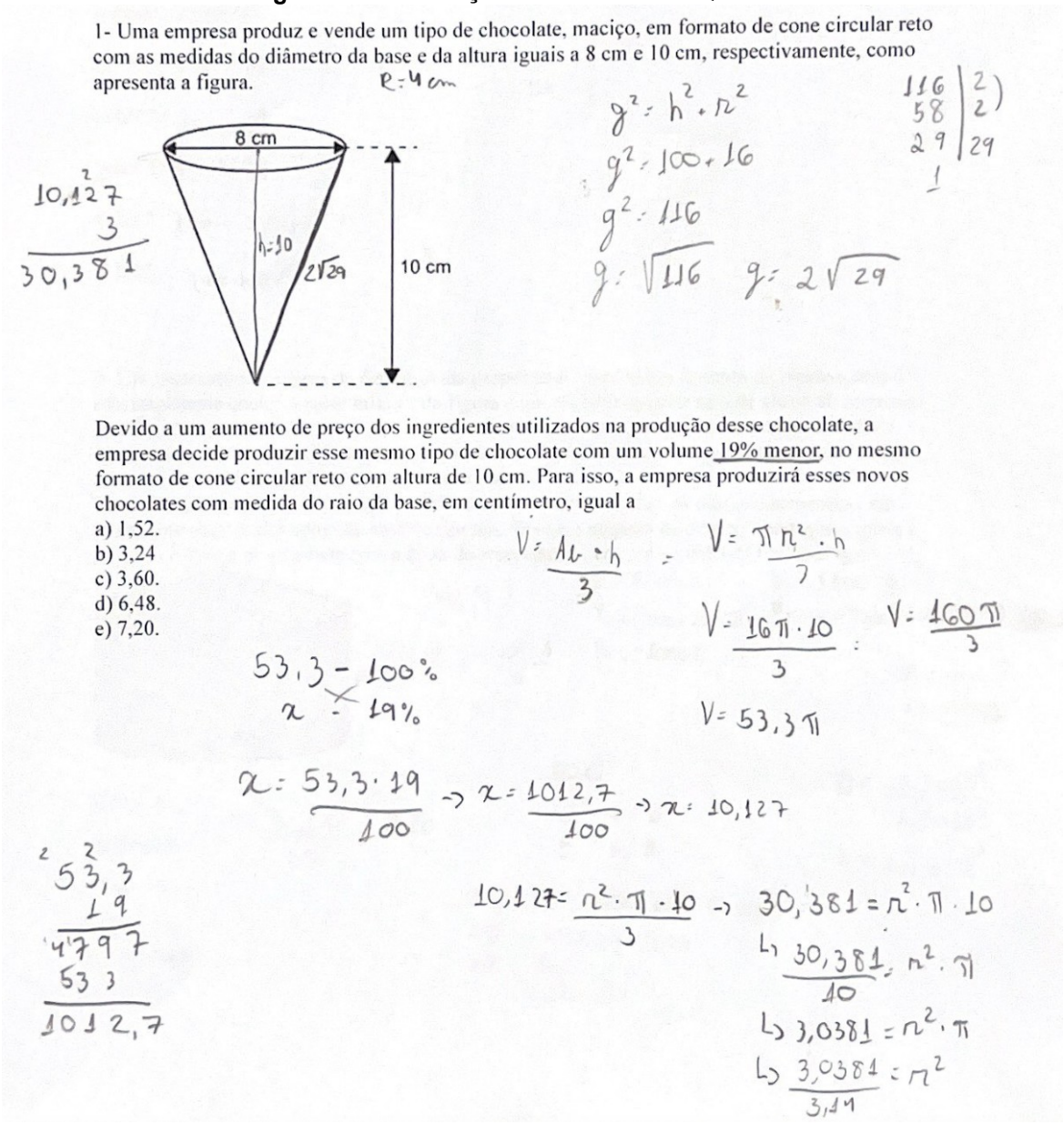
Figura 16 – Resolução do aluno A4 na Questão 1



Fonte: da pesquisa (2024).

Na figura abaixo, o aluno A5 resolveu a questão parcialmente. Observa-se que o estudante calcula a geratriz do cone, que não é necessária neste exercício, e em seguida aplica corretamente a fórmula do volume, mostrando que reconhece a figura e suas propriedades, correspondendo ao nível 2 da teoria de van Hiele. No entanto, o erro da resolução se dá no Passo 2 da resolução, pois o aluno interpreta que o volume pós redução equivale a 19% do volume original, sendo que a redução é de 19%, resultando em 81% do volume original. Esse erro se repete no estudante A9.

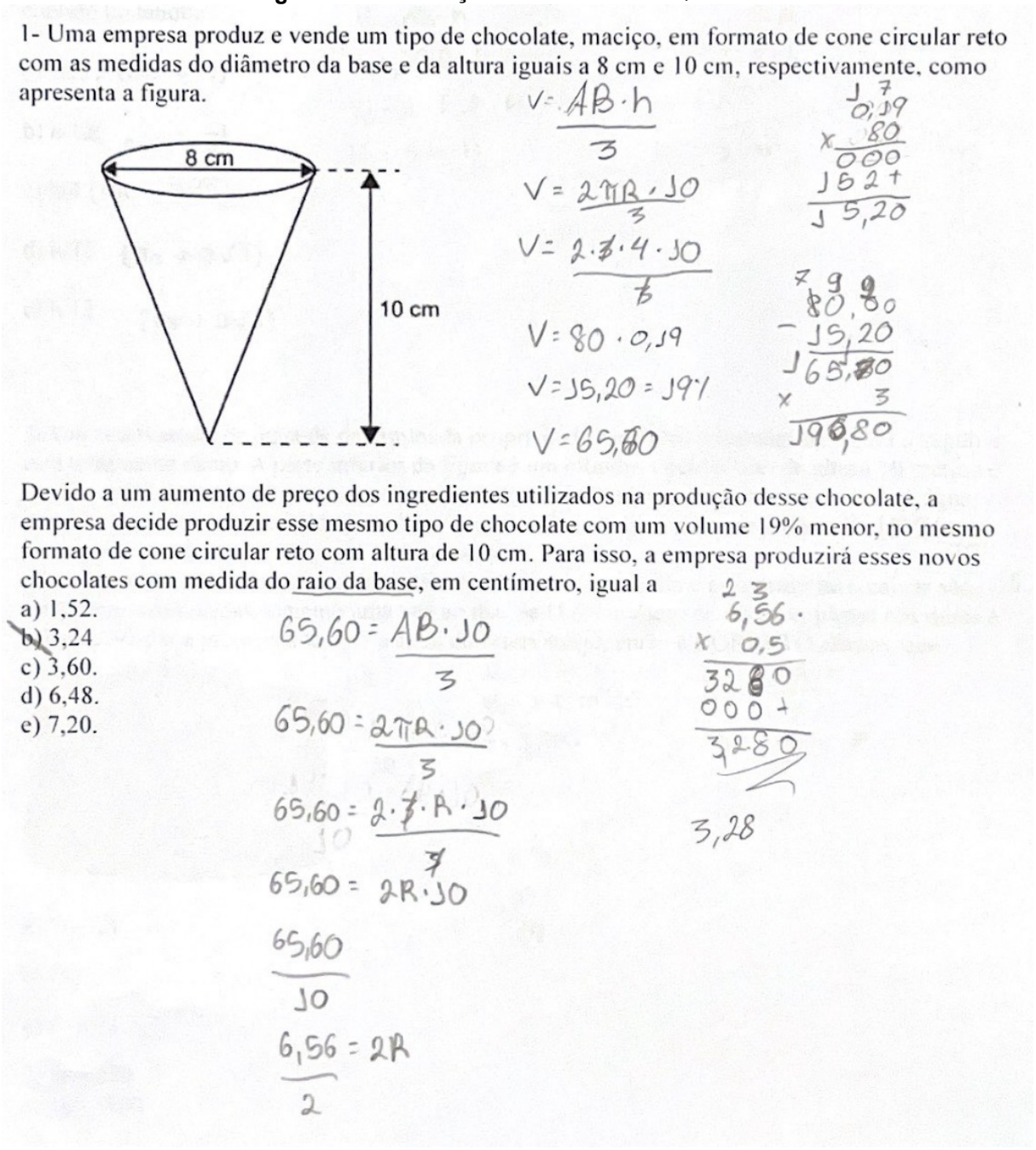
Figura 17 – Resolução do aluno A5 na Questão 1



Fonte: da pesquisa (2024).

Já o aluno A6, cuja resolução está na figura abaixo, interpreta o exercício corretamente, porém, ao calcular a área da base, ele comete um erro ao confundir a fórmula da área pela fórmula do comprimento do círculo. Esse erro indica que o aluno está no nível 2 da teoria de van Hiele, mostrando que ele ainda está em um nível que exige mais familiaridade e prática para distinguir e aplicar as propriedades corretamente.

Figura 18 – Resolução do aluno A6 na Questão 1

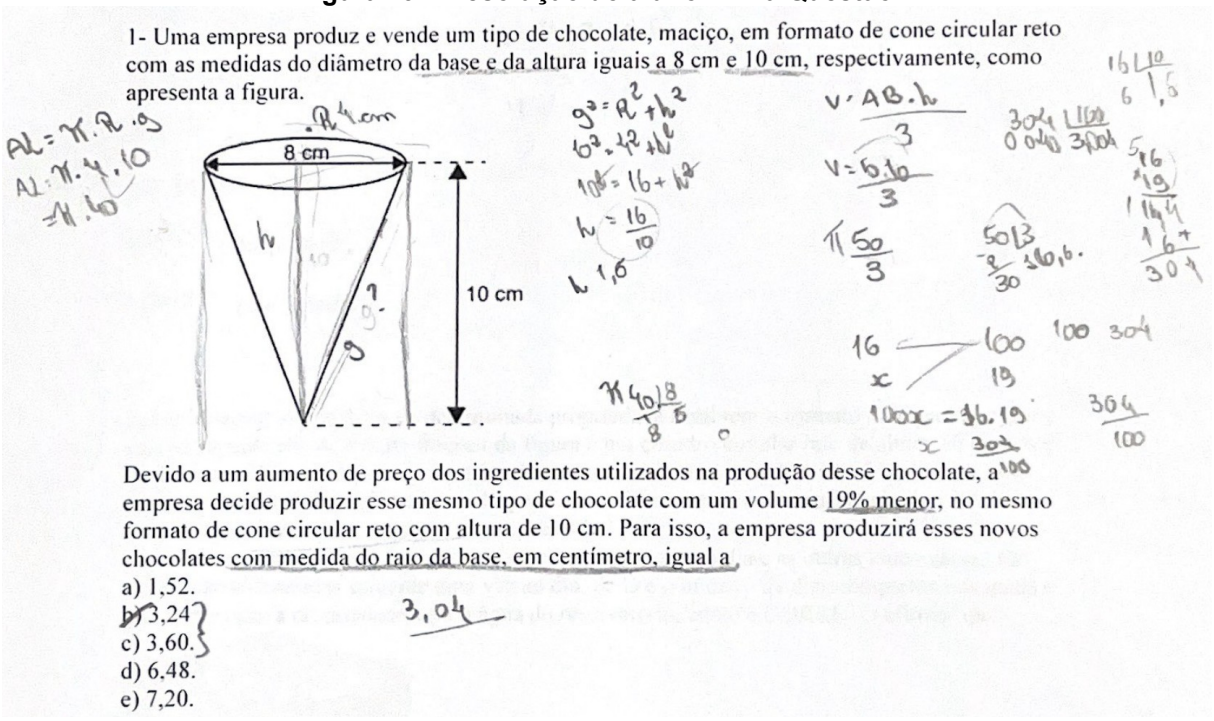


Fonte: da pesquisa (2024).

A resolução do aluno A7 apresenta a fórmula do volume, mas inclui elementos desconexos, como o cálculo da geratriz, feito de forma errônea, e a área lateral, elementos não necessários para resolução desse exercício. Além disso, a área da base está errada e ele interpreta incorretamente quando reduz o volume a 19%, sendo que se trata de uma redução de 19%. Com essas características, nota-se que o aluno está na transição entre o nível 1 e 2 da teoria de van Hiele, uma vez que reconhece determinadas propriedades, mas não consegue utilizá-las e aplicá-

las corretamente. Os cálculos e conceitos equivocados mostra que ele está na fase inicial compreendendo o uso dessas propriedades de forma prática, mas ainda não pode utilizá-las de forma consistente e correta.

Figura 19 – Resolução do aluno A7 na Questão 1


1- Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.

8 cm

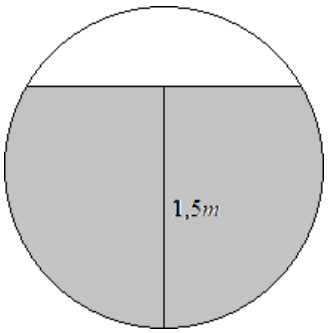
10 cm

Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm. Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

a) 1,52.
b) 3,24
c) 3,60.
d) 6,48.
e) 7,20.

Fonte: da pesquisa (2024).

Questão 2. Um tanque de óleo possui formato de cilindro circular reto e está posicionado deitado em relação ao solo, isto é, os planos que contém as faces circulares é perpendicular ao plano do solo. O tanque contém óleo de forma que a qualquer secção do cilindro, paralela às faces circulares, mostra a altura do óleo em relação ao solo, de 1,5m, conforme a figura abaixo.



O comprimento do tanque é de h metros e o raio das faces circulares é de 1 metro. Desprezando a espessura do material com o qual o tanque é fabricado, qual o volume do óleo contido no tanque?

a) $\frac{h}{12}(8\pi+3)$ b) $\frac{h}{12}(4\pi+\sqrt{3})$ c) $\frac{h}{4}(8\pi+3\sqrt{3})$

d) $\frac{h}{12}(8\pi+3\sqrt{3})$ e) $\frac{h}{12}(4\pi+3\sqrt{3})$

Resolução sugerida – Questão 2

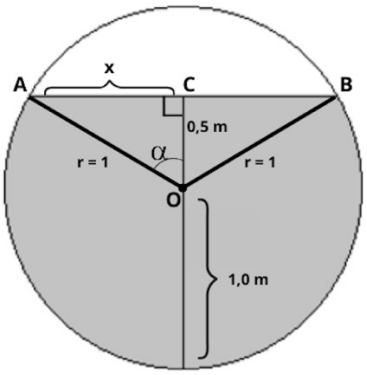
Passo 1 - Identificar o volume inicial do tanque: A resolução do exercício começa com a identificação do volume inicial do tanque que é cilíndrico. A altura nesse caso é predefinida como h e devemos calcular a área da base do cilindro, definida aqui como A_B. Assim, temos:

$$V_{inicial} = A_B \cdot h$$

No nível de compreensão da teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa análise como pertencente ao nível 2 (Análise) pois exige a identificação das propriedades geométricas básicas do cilindro e a aplicação da fórmula de volume, reconhecendo o formato do sólido e as variáveis envolvidas.

Passo 2 - Cálculo da área da base: Para que seja calculada a área da base apresentada na figura, o aluno deve decompor a figura da seguinte forma:

a. Dividir o círculo e identificar o triângulo isósceles: Ao interpretar que a seção, observa-se que o círculo de raio 1 está parcialmente preenchido e então, ligando o centro O as extremidades A e B da seção, forma-se um triangulo isósceles ABO de altura 0,5 m, que pode ser dividido em dois triângulos retângulos congruentes (ACO e BCO), ilustrado na figura abaixo. Aqui, o aluno deve perceber que o triângulo retângulo tem hipotenusa igual ao raio (1 m) e um dos catetos no valor de 0,5 m.



b. Calcular o outro cateto e a base do triângulo isósceles: Para calcular o outro cateto, pode-se usar relações trigonométricas ou teorema de Pitágoras. Independente do método utilizado, resulta em $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, e então a base do triângulo isósceles ABO é $2x=\sqrt{3}$. Logo, o triângulo ABO tem área igual a

$$A_{ABO}=\frac{base\cdot altura}{2}=\frac{\sqrt{3}\cdot 0,5}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2.$$

c. Calcular a área do setor circular: Utilizando a relação trigonométrica de seno, conseguimos determinar que o valor de α, sendo $sen\alpha=\frac{catetooposto}{hipotenusa}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=60^\circ$. Então o restante da área da figura é um setor circular de 240°, podendo calcular a área como

$$A_{setor}=\frac{\pi\cdot 1^2\cdot 240}{360}=\frac{2\pi}{3}m^2.$$

Assim, a área da base do cilindro é a soma do triângulo isósceles e do setor circular resultando em

$$A_B=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)m^2.$$

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 3 (Abtração) pois o aluno precisa relacionar propriedades geométricas do círculo e aplicar fórmulas e reconhecer propriedades específicas para calcular a área de um setor e de um triângulo.

Passo 3 - Cálculo do volume de óleo no tanque: Com a área da base preenchida com óleo, podemos calcular o volume do óleo dentro do tanque:

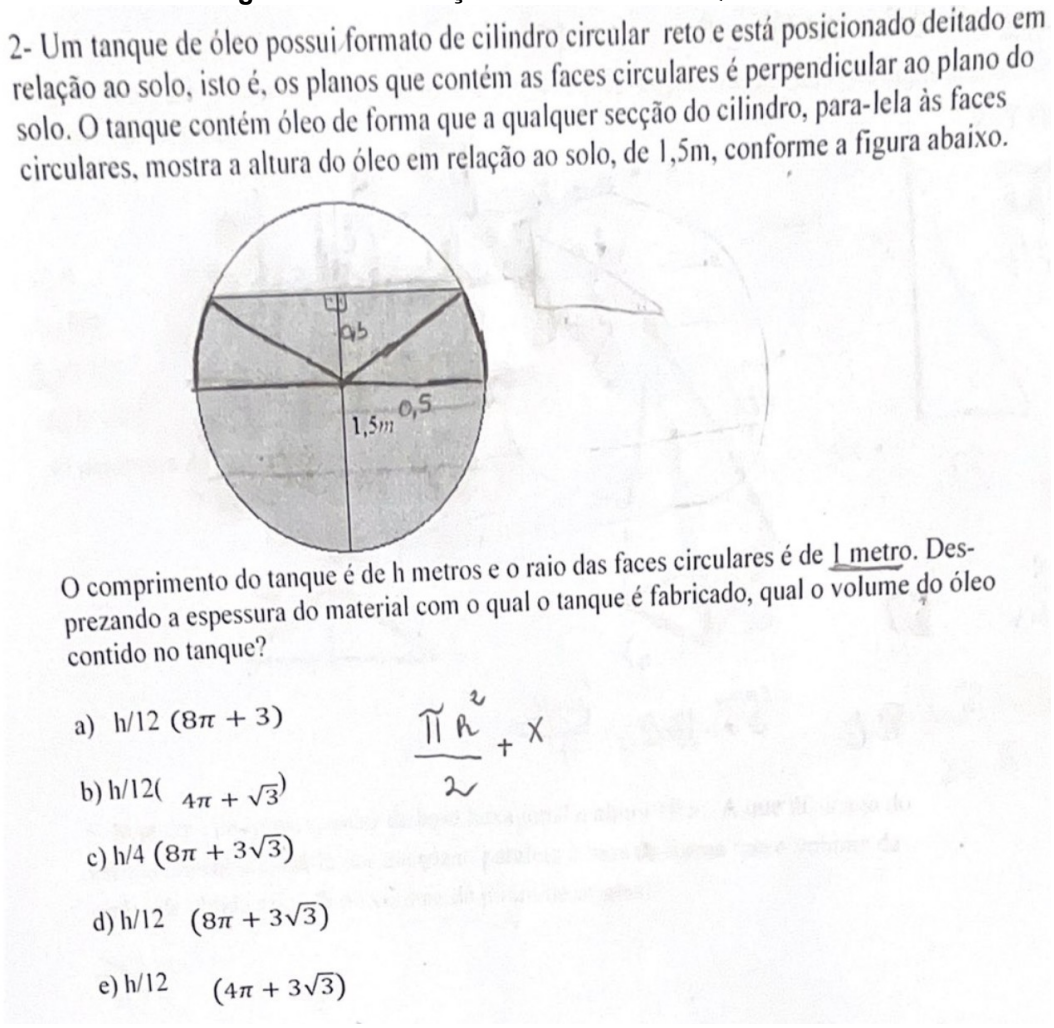
$$V_{inicial} = A_B \cdot h = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) \cdot h = \left(\frac{3\sqrt{3}}{12} + \frac{8\pi}{12} \right) \cdot h = \frac{h}{12} (3\sqrt{3} + 8\pi).$$

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 2 (Análise) já que o estudante está aplicando uma fórmula conhecida (volume do cilindro) sem precisar manipular relações ou abstrair novas propriedades geométricas.

Sobre as resoluções dos estudantes na questão 2, dois alunos conseguiram resolver a questão por completo, seis alunos resolveram parcialmente e quatro alunos não resolveram.

O aluno A2 resolveu parcialmente a questão, conforme figura abaixo. O aluno determina os triângulos retângulos necessários para a resolução e sua altura. Ele também indica a área de semicírculo, mas não sendo possível calcular o restante do setor. Isso indica que o aluno está no nível 2 da teoria de van Hiele, uma vez que ele reconhece figuras geométricas e propriedades básicas, mas não aplica suas propriedades de forma eficiente.

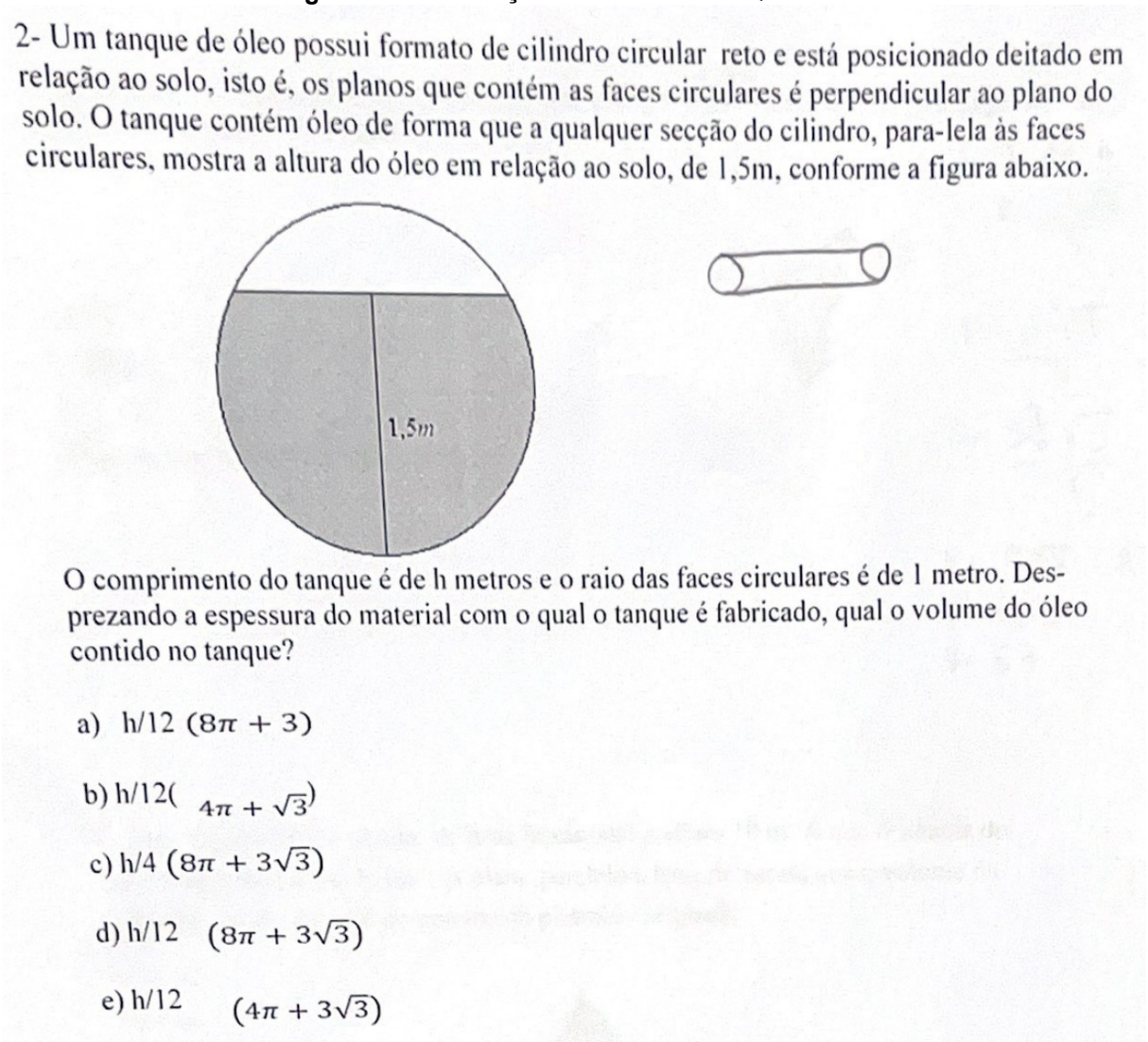
Figura 20 – Resolução do aluno A2 na Questão 2



Fonte: da pesquisa (2024).

Na figura abaixo, o aluno A5 reconheceu o cilindro e até percebeu que ele está na posição horizontal, mas não aplicou nenhuma propriedade ou fórmula relacionada ao problema. O mesmo acontece com o aluno A10, porém ele desenha o cilindro em sua posição característica vertical. Isso indica que ambos os alunos se encontram no nível 1 da teoria de van Hiele, uma vez que conseguem reconhecer a figura, mas não são capazes de utilizar suas propriedades e fórmulas.

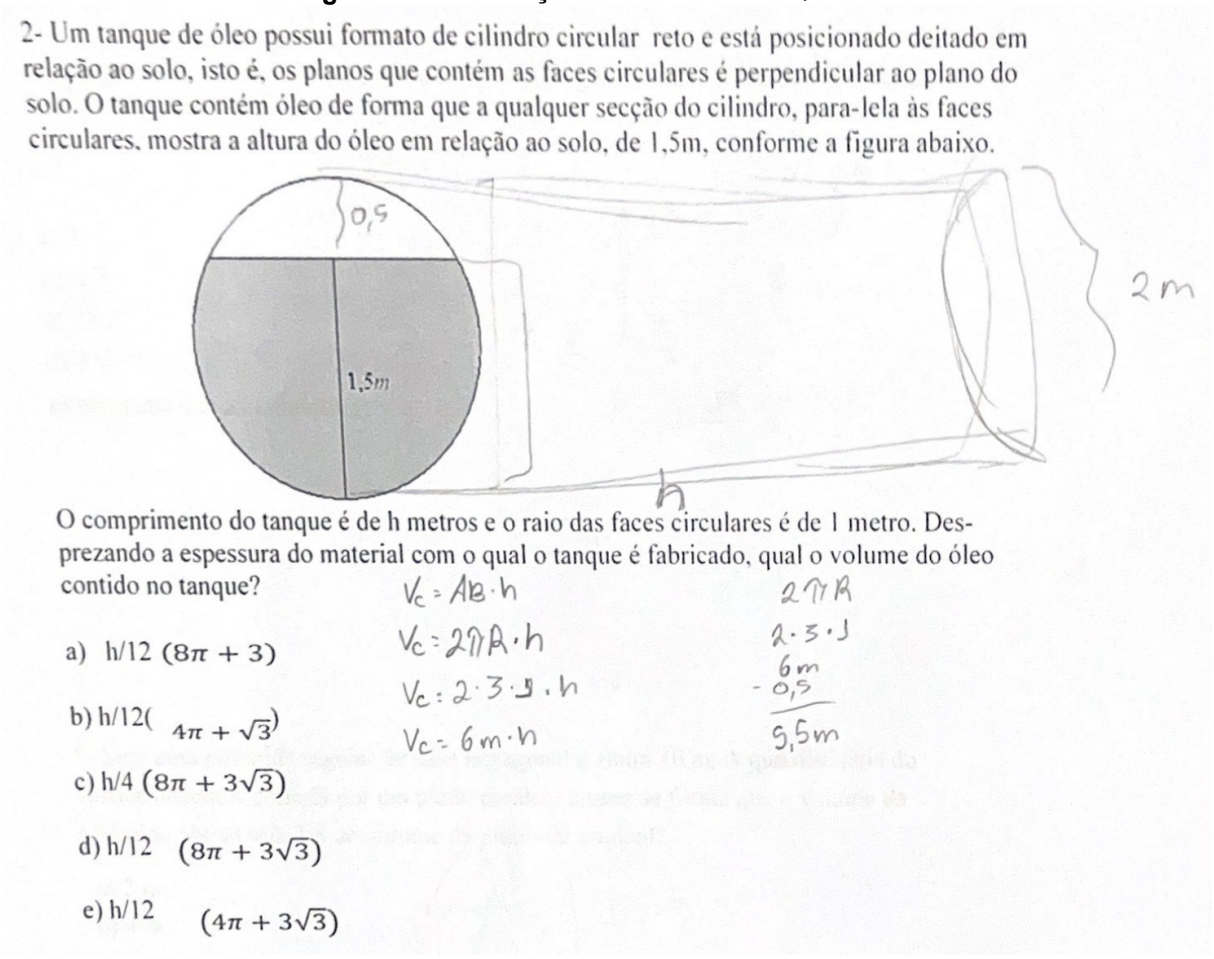
Figura 21 – Resolução do aluno A5 na Questão 2



Fonte: da pesquisa (2024).

Na figura abaixo, o aluno A6 reconhece o cilindro em posição horizontal, utiliza a fórmula do volume, mas comete um erro ao confundir a área da base com o comprimento da circunferência. Além disso, ele não reconhece que pela área não estar totalmente preenchida, seria necessário calcular ela com decomposições. Isso sugere que o aluno está no nível 2 de van Hiele, pois identifica a figura e aplica a fórmula do volume, mas comete erros ao utilizar essas propriedades de forma mais complexa. O estudante ainda não consegue realizar análises mais profundas, como a decomposição da área da base.

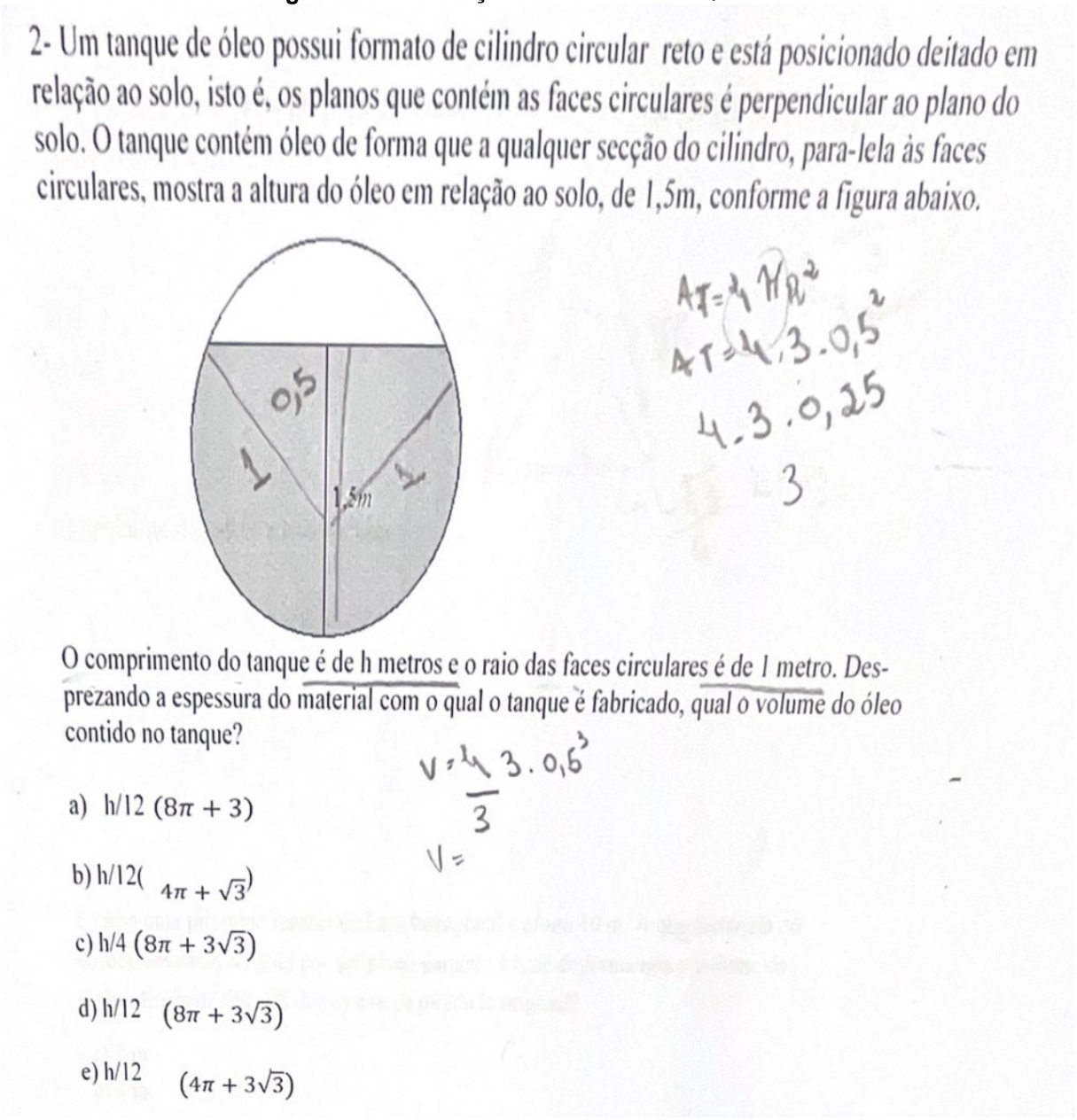
Figura 22 – Resolução do aluno A6 na Questão 2



Fonte: da pesquisa (2024).

A resolução do aluno A7 é semelhante com a do aluno A2: ele reconhece os triângulos retângulos na decomposição da base e sua altura, mas calcula o volume por meio da fórmula da esfera e calcula a área da total como sendo área da superfície esférica. Isso mostra que o aluno está na transição entre os níveis 1 e 2 de van Hiele, uma vez que ele identifica algumas propriedades, mas as usa de forma equivocada, como confundir as fórmulas de esfera com as do cilindro. O aluno A9, de maneira muito similar ao aluno A7, também utiliza as fórmulas de volume da esfera, se encontrando no mesmo nível de compreensão.

Figura 23 – Resolução do aluno A7 na Questão 2



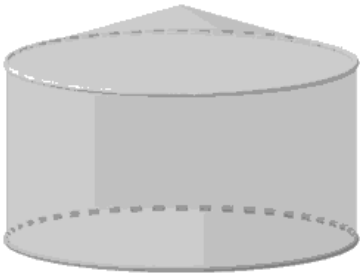
Fonte: da pesquisa (2024).

Analisando as respostas obtidas dessa questão, percebe-se que mais de 80% dos alunos não conseguiram respondê-la (parcialmente ou integralmente). Isso pode ser explicado pelo fato de a questão exigir um nível mais avançado de compreensão. Pela resolução sugerida, observa-se que a área da base do cilindro ao ser calculada necessita o nível 3 (abstração) da teoria de van Hiele, pois os alunos precisam relacionar propriedades geométricas. Além disso, como a figura apresentada pela questão mostra apenas da base do cilindro, alguns alunos, por

possível desatenção ao enunciado, confundiram essa imagem com uma esfera e utilizaram propriedades esféricas incorretamente.

Questão 3. Um reservatório de água de determinada propriedade rural tem o formato da figura a seguir e está totalmente cheio. A parte inferior da figura é um cilindro circular reto de altura 10 metros e de diâmetro 20 metros. A parte superior do reservatório é um cone de altura 3 metros. A água desse reservatório é transferida para 10 pequenas caixas d'água com capacidade de 1000 litros cada uma e é usada para irrigação na propriedade.

Cinco dessas caixas são abastecidas totalmente duas vezes ao dia e as outras cinco caixas são totalmente abastecidas somente uma vez ao dia. Se D é o número de dias completos nos quais é possível irrigar a propriedade com a água do reservatório, então é CORRETO afirmar que



a) D = 23 b) D = 30 c) D = 73 d) D = 230 e) D = 1100

Resolução sugerida – Questão 3

Passo 1 - Calcular o volume do reservatório: A resolução do exercício começa com a resolução do volume do reservatório, composto por um cilindro e um cone que compartilham a mesma base circular de 20 metros de diâmetro, ou seja, com raio 10 metros. Portanto:

$$V_{CILINDRO} + V_{CONE} = \pi \cdot (10)^2 \cdot 10 + \frac{\pi \cdot (10)^2 \cdot 3}{3} = 1100\,\pi\, m^3$$

Aproximando o valor de π = 3,14, temos volume igual a 3454 m^3.

No nível de compreensão da teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa análise como pertencente ao nível 2 (Análise) pois é necessário às identificações das propriedades geométricas do cone e cilindro e da aplicação de fórmula de volume de cada um.

Passo 2 - Transformando a capacidade das caixas: O exercício pede para adequarmos a água do reservatório em caixas de 1000 litros. Fazendo a conversão, temos que 1000 litro equivale a 1 m^3. Portanto, cada caixa tem volume de 1 m^3.
Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 1 (Reconhecimento) pois acontece apenas transformando uma unidade de medida, sem raciocínio geométrico complexo.

Passo 3 - Cálculo do consumo diário de água: Conforme o enunciado, cinco dessas caixas são abastecidas totalmente duas vezes ao dia e as outras cinco caixas são totalmente abastecidas somente uma vez ao dia. Portanto, como cada caixa tem volume 1 m^3, temos $5 \cdot 2 + 5 = 15\, m^3$ por dia.
Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 2 (Análise) pois é necessário interpretar a descrição da frequência de abastecimento e somar as quantidades de água consumidas, uma operação aritmética direta, mas que exige interpretação cuidadosa dos dados fornecidos.

Passo 4 - Determinação do número de dias completos: Como o volume total do reservatório é $3454\, m^3$ e o consumo diário é $15\, m^3$, temos que o número de dias D é

$$D = \frac{3454}{15} = 230,2\, dias$$

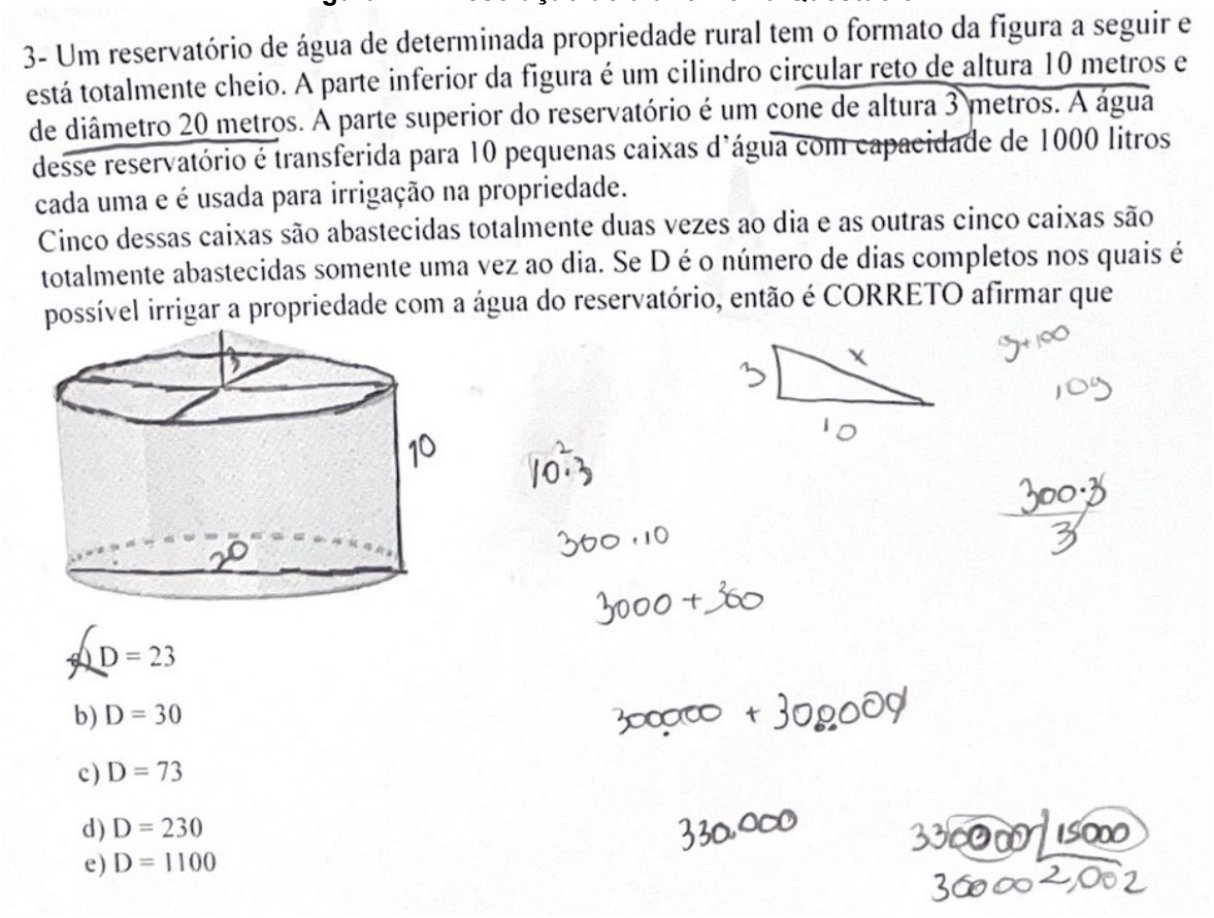
Como são dias completos, D = 230 dias.
Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 1 (Reconhecimento) pois envolve apenas uma divisão simples, sem raciocínio geométrico complexo.

Sobre as resoluções dos estudantes na questão 3, seis alunos conseguiram resolver a questão por completo, três alunos resolveram parcialmente e três alunos não resolveram.

O estudando A2 resolveu a questão de forma parcial, conforme figura a seguir. O aluno identificou de forma correta os sólidos (cilindro e cone) e seus respectivos cálculos de volume. No entanto, cometeu um erro na conversão de unidades, assumindo que $1\, m^3 = 100\, l$ (10 vezes menor do que seria), o que

compromete toda sua resolução. Os passos seguintes estão corretos, porém a transformação equivocada fez com que a resposta final fosse 23 em vez de 230 (10 vezes menos do que seria). Apesar do erro, que pode ter sido por falta de atenção, entende-se que o aluno está no nível 2 de van Hiele, pois demonstrou compreensão das propriedades geométricas dos sólidos, apesar da falha na conversão.

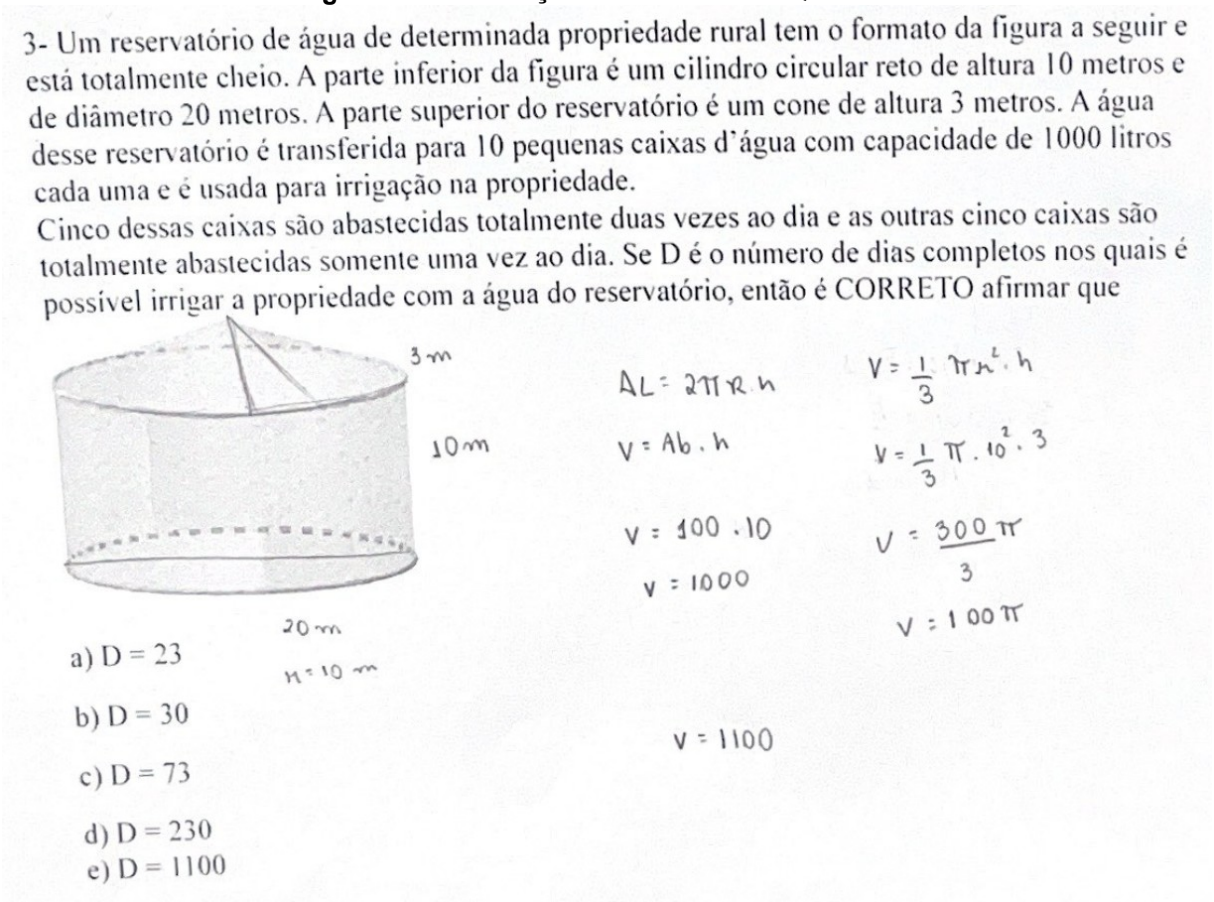
Figura 24 – Resolução do aluno A6 na Questão 3



Fonte: da pesquisa (2024).

Na figura abaixo se tem a resolução do aluno A9. O estudante fez os cálculos de volume de forma correta, indicando que reconhece os sólidos e entende suas propriedades. Porém, ao chegar ao valor 1100π, não realiza a substituição de π por sua aproximação e interrompe a resolução, sem seguir adiante para a interpretação do valor ou concluir o exercício. Isso sugere uma dificuldade em conectar o cálculo obtido com a aplicação prática exigida pela questão, o que se alinha com o nível 2 dos níveis de van Hiele.

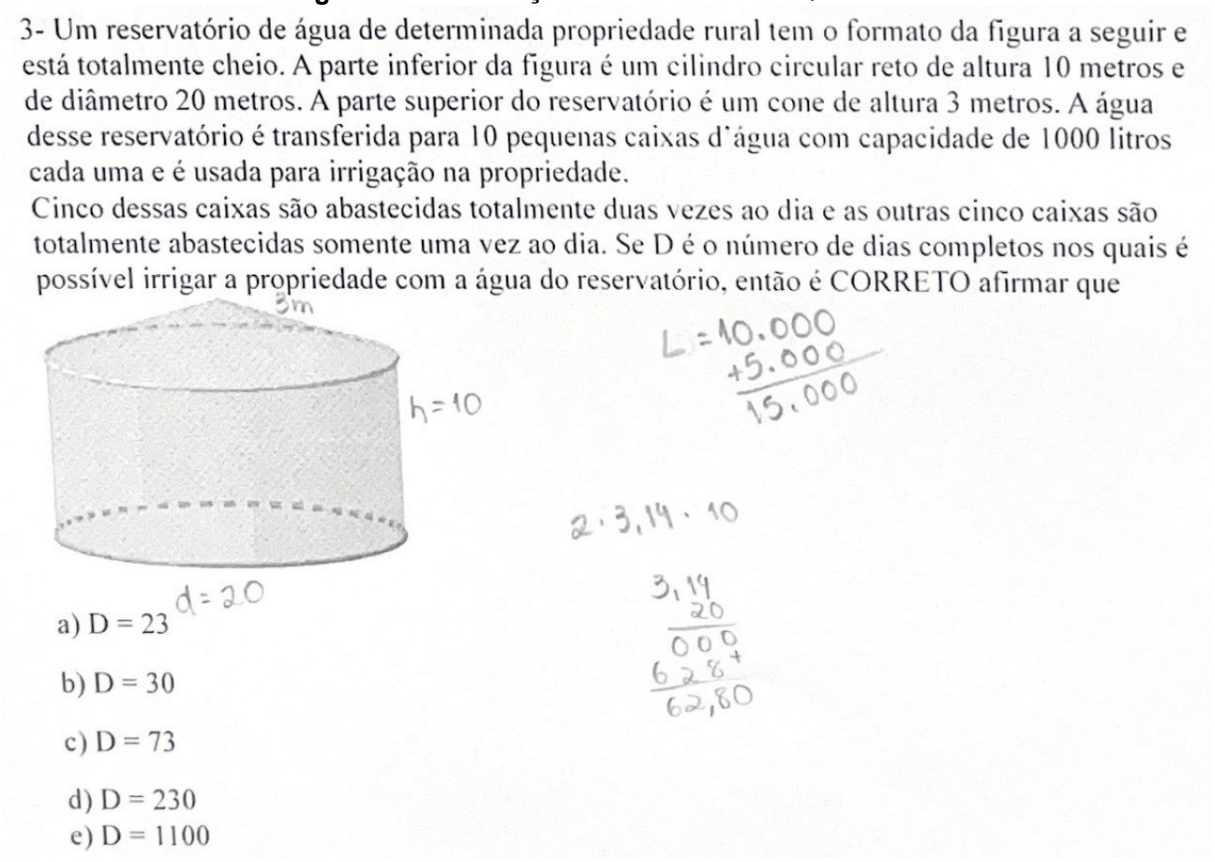
Figura 25 – Resolução do aluno A9 na Questão 3



Fonte: da pesquisa (2024).

A resolução do estudante A12 apresenta uma sequência de passos não muito clara. Conforme figura abaixo, percebe-se que o aluno reconhece que a base é um círculo, pois calcula o comprimento da circunferência com raio de 10, o que sugere também que o aluno reconhece que o diâmetro é o dobro do raio. Apesar disso, seus cálculos não condizem com a resolução esperada, o que mostra que o aluno, seguindo os níveis de compreensão de van Hiele, está na transição entre o nível 1 e nível 2. A transição sugere que ele está começando a entender algumas propriedades, mas ainda apresenta dificuldade em aplicá-las de forma adequada.

Figura 26 – Resolução do aluno A12 na Questão 3



Fonte: da pesquisa (2024).

Questão 4. O volume de uma pirâmide cuja base é um triângulo equilátero de lado 6 e cujas arestas laterais têm medida $\sqrt{15}$ vale:

a) 9 b) 9/2 c) 27/2 d) 9 √3/2 e) NDA

Resolução sugerida – Questão 4

Passo 1 - Reconhecer a fórmula do volume: A resolução do exercício começa com o reconhecimento da fórmula do volume da pirâmide, onde precisa-se da área da base (A_B) e altura da pirâmide (H).

$$V = \frac{A_B \cdot H}{3}$$

No nível de compreensão da teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa análise como pertencente ao nível 2 (Análise) pois identifica a fórmula do volume da pirâmide.

Passo 2 - Calcular a área da base: Como a base é um triângulo equilátero de lado 6, podemos calcular sua área como

$$A_B = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 2 (Análise) pois é necessário às identificações das propriedades geométricas e da aplicação de fórmula de área do triângulo equilátero.

Passo 3 - Calcular a altura da pirâmide: Para determinar a altura H da pirâmide, é necessário perceber que a altura H e a aresta lateral da pirâmide formam um triângulo retângulo com o raio da circunferência circunscrita à base (R). Assim, a medida do terceiro lado é

$$R = \frac{l\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Então o triângulo retângulo que usaremos para calcular a altura da pirâmide H, tem hipotenusa como aresta lateral $\sqrt{15}$, cateto igual ao raio $R = 2\sqrt{3}$ e outro cateto igual a H. Portanto, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos

$$\left(\sqrt{15}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + H^2 \Rightarrow H = \sqrt{3}$$

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 3 (Abstração) pois o aluno precisa abstrair as propriedades geométricas e visualizar as relações entre os elementos do triângulo retângulo, aplicando o Teorema de Pitágoras.

Passo 4 - Calcular o volume da pirâmide: Com todos os elementos determinados, podemos calcular o volume da pirâmide.

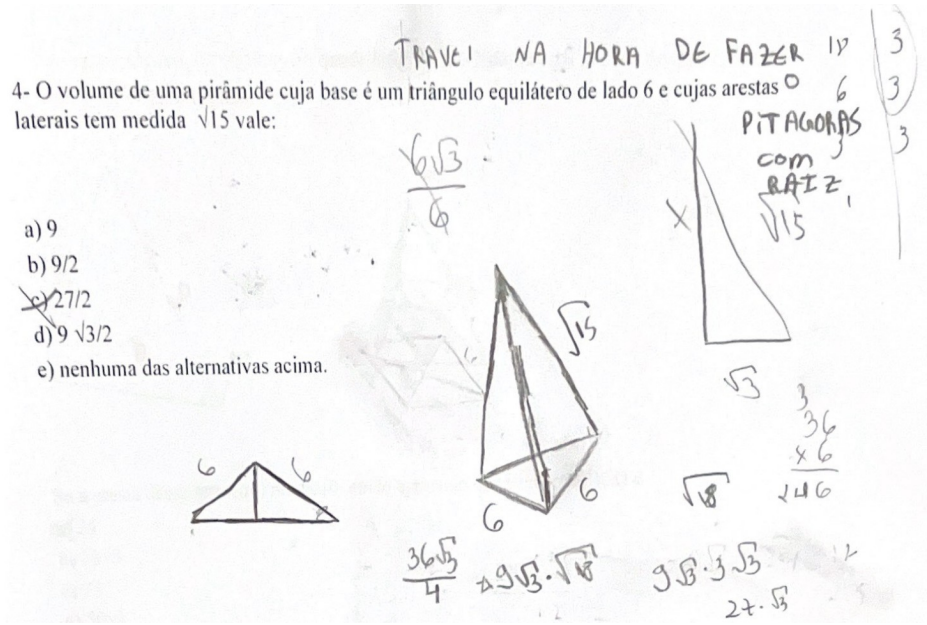
$$V = \frac{A_B \cdot H}{3} \Rightarrow V = \frac{9\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 9$$

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 2 (Análise) pois a aplicação da fórmula do volume ocorre de forma direta, sem envolver raciocínios dedutivos complexos, mas apenas substituição e multiplicação de valores conhecidos.

Sobre as resoluções dos estudantes na questão 4, dois alunos conseguiram resolver a questão por completo, nove alunos resolveram parcialmente e um aluno não resolveu.

Na figura abaixo, o estudante A2 resolveu parcialmente a questão, reconhecendo a figura e realizando um desenho dela. Ele calcula corretamente a área da base, porém ao determinar o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, elemento necessário para o cálculo da altura da pirâmide, ele confunde o raio com o apótema do triângulo equilátero, resultando em erro. Apesar disso, o aluno compreende qual é a próxima etapa para a resolução dos exercícios, mas apresenta dificuldade ao realizar o teorema de Pitágoras com números irracionais. Isso sugere que o aluno está no nível 2 de van Hiele, uma vez que reconhece as propriedades básicas da figura e identifica as etapas de resolução, mas ainda apresenta dificuldade em cálculos mais complexos.

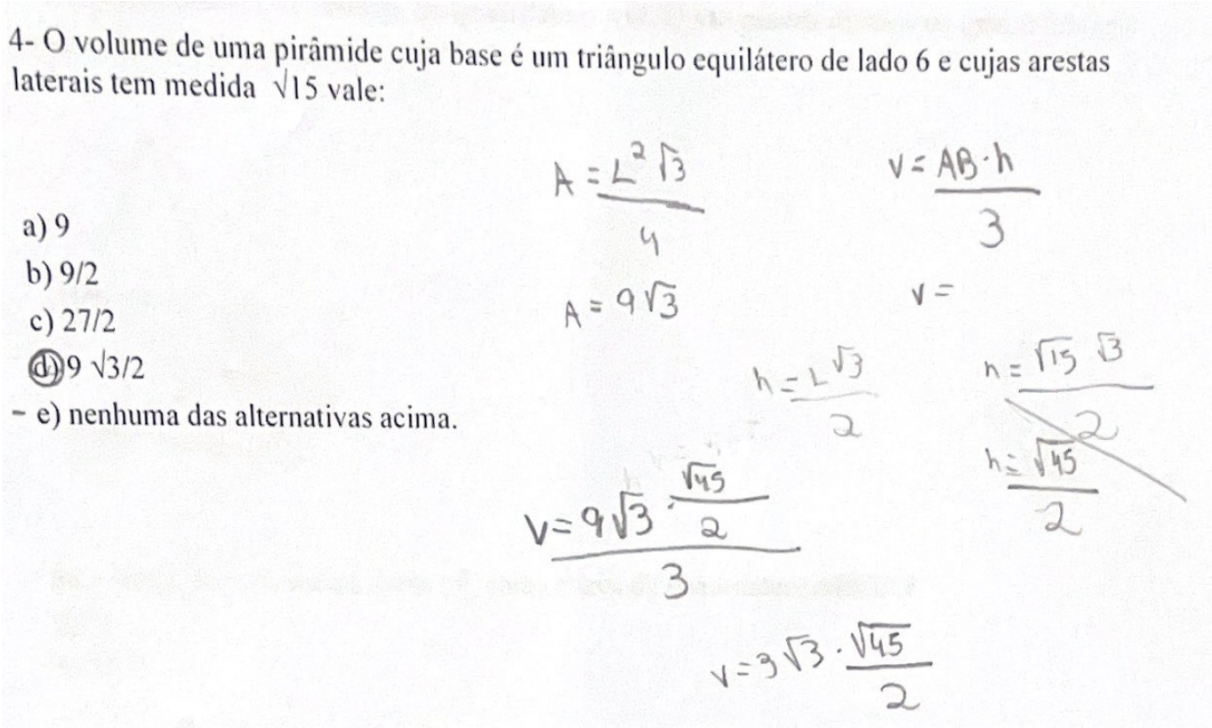
Figura 27 – Resolução do aluno A2 na Questão 4



Fonte: da pesquisa (2024).

O aluno A3, conforme figura abaixo, mostra que reconhece a área da base, calculando a de forma correta, e a fórmula do volume da pirâmide. Novamente, ao calcular a altura da pirâmide, não reconhecendo o jeito como se chegar a ela, fazendo cálculos que não se consegue explicar (cálculos aleatórios). Isso sugere que o aluno está na transição entre o nível 1 e nível 2. A transição sugere que ele está começando a entender algumas propriedades, mas ainda apresenta dificuldade em aplicá-las de forma adequada.

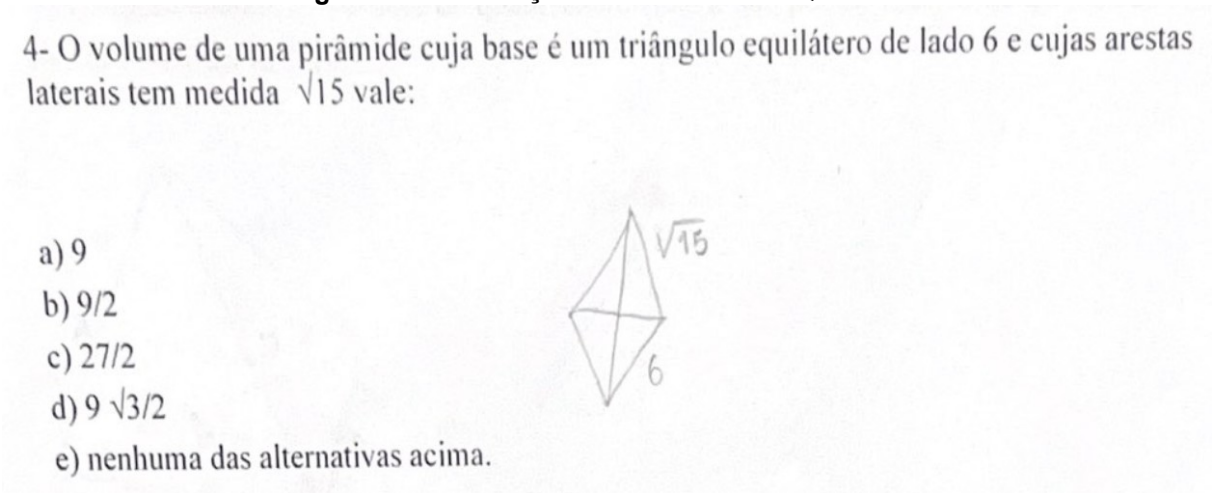
Figura 28 – Resolução do aluno A3 na Questão 4



Fonte: da pesquisa (2024).

O estudante A4 e A12 realizam a questão de forma semelhante, reconhecendo o sólido descrito. Abaixo está a resolução do aluno A12, que desenha a pirâmide, reconhecendo seus elementos do enunciado, mas não aplica nenhuma propriedade ou fórmula relacionada ao problema. Isso sugere que os alunos estão no nível 1 de compreensão de van Hiele, pois conseguem reconhecer a figura, mas não são capazes de reconhecer suas propriedades e fórmulas para avançar na resolução.

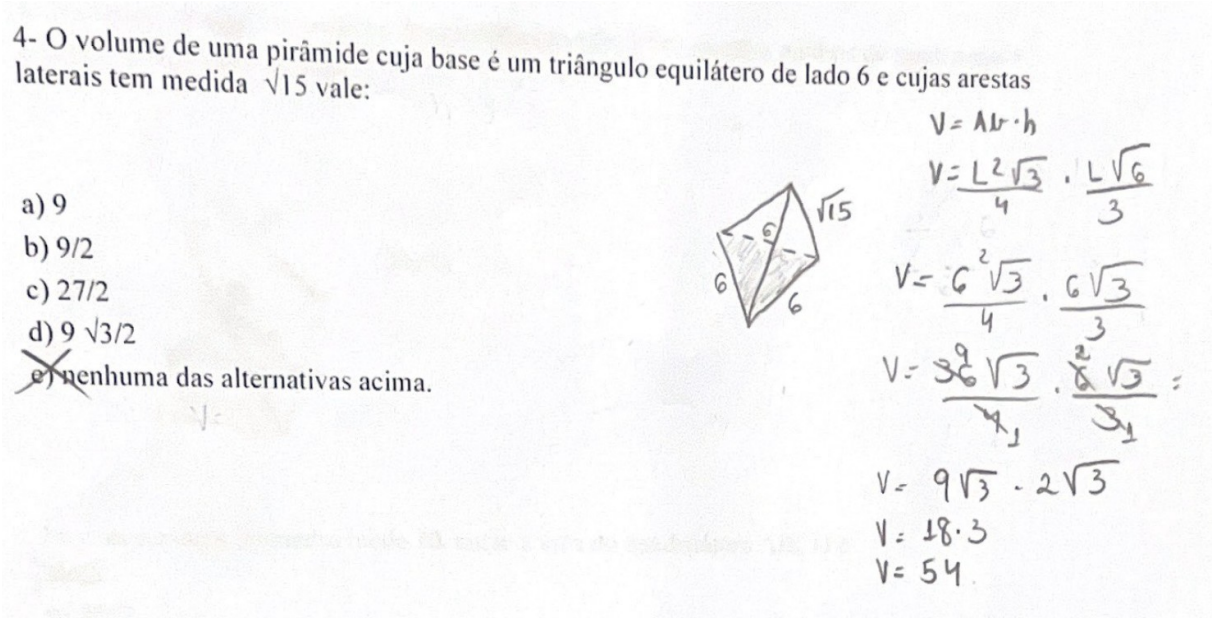
Figura 29 – Resolução do aluno A12 na Questão 4



Fonte: da pesquisa (2024).

Na figura abaixo, o estudante A5 desenha a figura, mostrando que reconhece ela e seus elementos, porém se confunde com a fórmula do volume da pirâmide, assumindo que seja apenas área da base multiplicada pela altura da pirâmide. Além disso, ele confunde o cálculo da altura da pirâmide com o raio da circunferência circunscrita a base. Dessa forma, entende-se que o aluno se encontra na transição entre o nível 1 e nível 2, pois ele identifica a figura, está começando a entender algumas propriedades, mas não as compreende plenamente, tratando as fórmulas de forma isolada e com pouca análise critica na aplicação da fórmula.

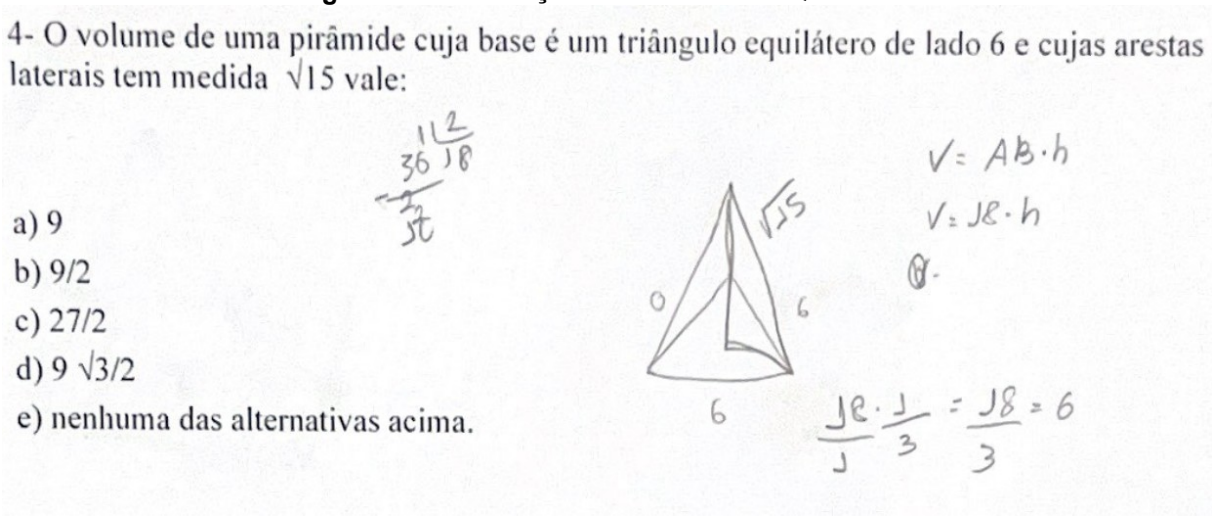
Figura 30 – Resolução do aluno A5 na Questão 4



Fonte: da pesquisa (2024).

O estudante A6 reconhece o sólido e seus elementos, porém, assim como o estudante acima, confunde a área do volume. Além disso, ele entende que a base é um triângulo, mas calcula sua área pela multiplicação de base e altura dividida por 2, assumindo que a altura do triângulo em questão seja o mesmo valor que os lado, ignorando o fato de que por se tratar de um triângulo equilátero. Isso sugere que, de acordo com os níveis de compreensão de van Hiele, o aluno está na transição do nível 1 para o 2, onde já reconhece as geometrias e seus elementos, mas confunde ainda suas propriedades, especialmente as que necessitam de um nível maior de atenção.

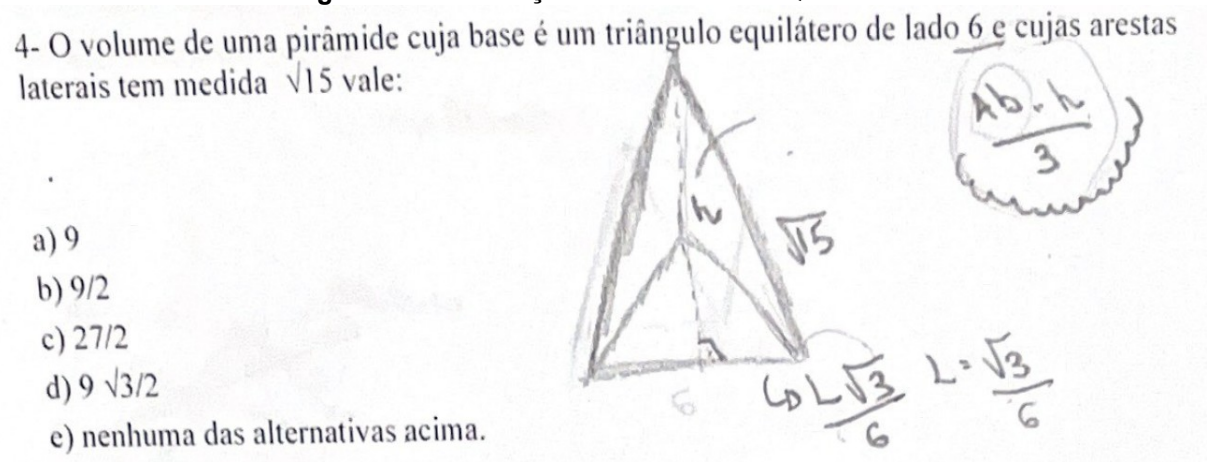
Figura 31 – Resolução do aluno A6 na Questão 4



Fonte: da pesquisa (2024).

A figura abaixo mostra a resolução de forma parcial do aluno A7, que faz o desenho, reconhecendo a pirâmide e seus elementos, identifica suas fórmulas de volume e apótema da base, elemento esse que não é necessário para a resolução do exercício. Isso sugere que o aluno deve ter confundido o apótema da base com a altura da base, ou até com a área da base. Assim, conforme os níveis de compreensão de van Hiele, o aluno se encontra na transição do nível 1 para o nível 2 pois ele identifica propriedades, mas apresenta dificuldade para distinguir os elementos.

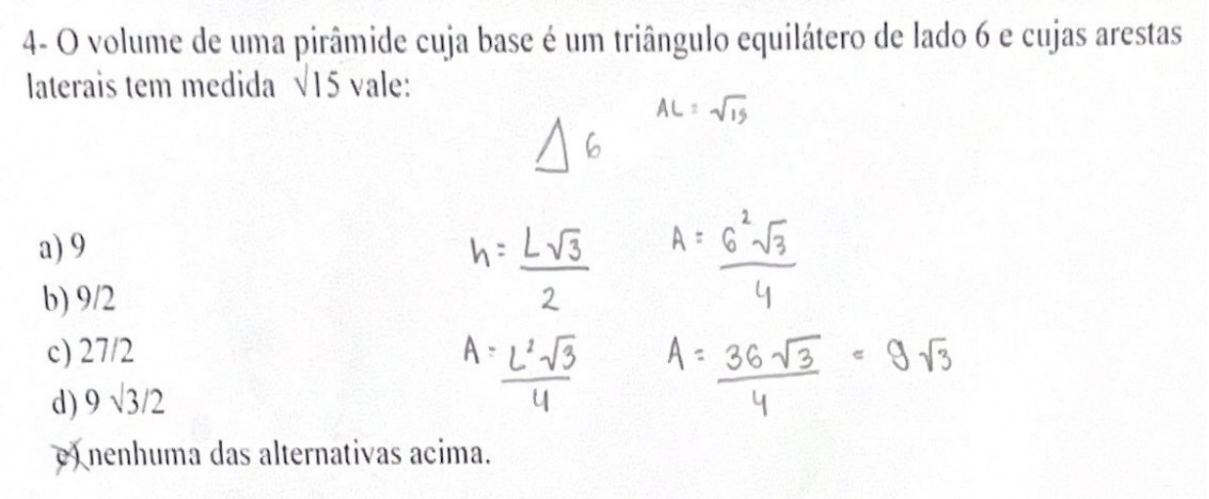
Figura 32 – Resolução do aluno A7 na Questão 4



Fonte: da pesquisa (2024).

Abaixo, o estudante A9 calcula a área da base da pirâmide, mas apenas isso, não relacionando com o volume pedido no enunciado. Isso sugere que o aluno está no nível 1 de compreensão de van Hiele, uma vez que ele identifica e calcula a área da base isoladamente, sem conseguir analisar e relacionar este resultado com o cálculo final do volume.

Figura 33 – Resolução do aluno A9 na Questão 4

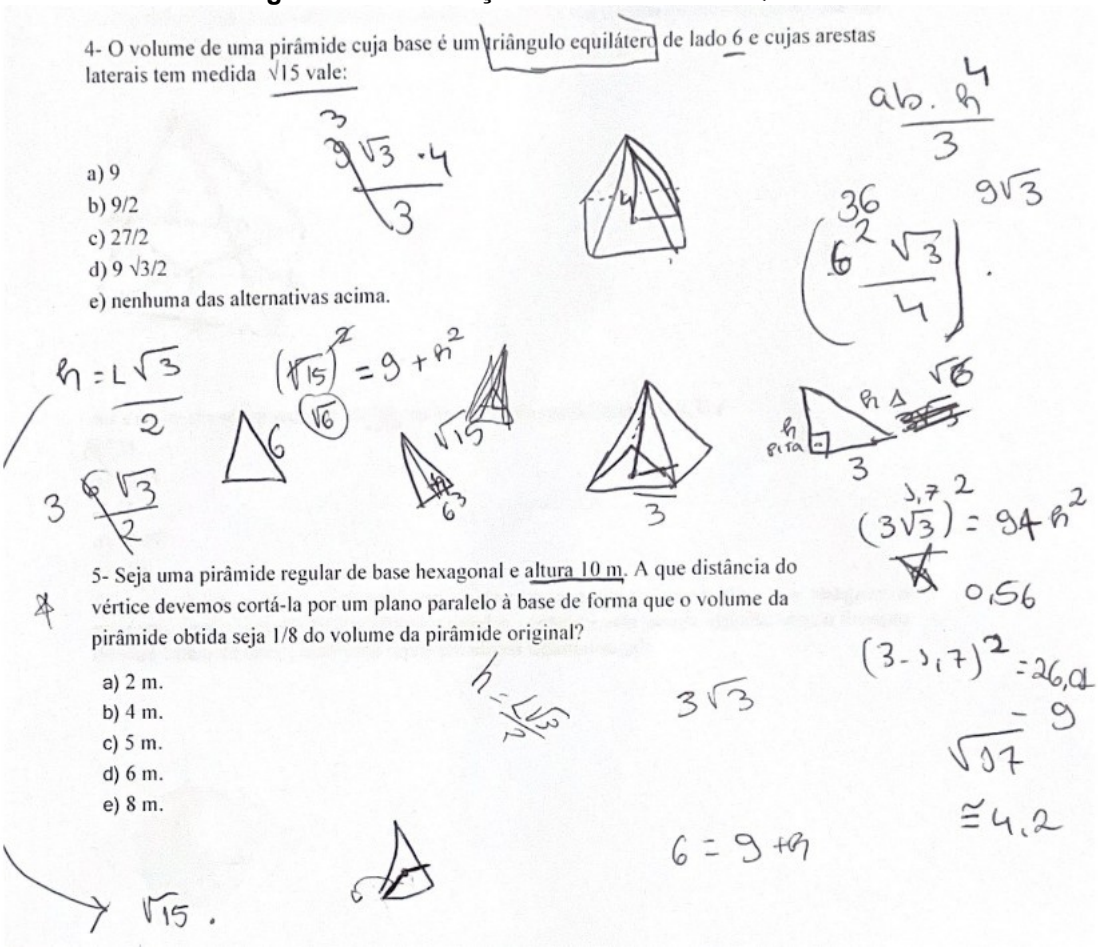


Fonte: da pesquisa (2024).

Por fim, conforme figura abaixo, o estudante A10 calcula a área da base de forma correta, mas não consegue relacionar a maneira como calcular a altura da pirâmide, ele entende que será necessário calcular por meio do teorema de Pitágoras, mas não identifica o raio da circunferência circunscrita a base como o cateto necessário para essa conta. Isso sugere que o aluno está na transição do

nível 2 para o nível 3 de van Hiele, pois ele identifica propriedades e alguns relacionamento geométricos básicos, mas ainda falta a compreensão completa.

Figura 34 – Resolução do aluno A10 na Questão 4



Fonte: da pesquisa (2024).

Analisando as respostas obtidas a partir dessa questão, percebe-se que mais de 80% dos alunos não conseguiram respondê-la (parcialmente ou integralmente). Isso pode ser explicado pelo fato de a questão exigir um nível mais avançado de compreensão. Pela resolução sugerida, percebe-se que a altura da pirâmide necessita o nível 3 (abstração) da teoria de van Hiele, pois os alunos precisam relacionar propriedades geométricas. Justamente esse ponto foi o que mais trouxe dúvidas dos estudantes, onde, 5 dos 9 alunos que resolveram a questão de forma parcial, apresentaram dificuldade explicita nesse ponto.

Questão 5. Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja 1/8 do volume da pirâmide original?

a) 2 m. b) 4 m. c) 5 m. d) 6 m. e) 8 m.

Resolução sugerida – Questão 5

Passo 1 - Estabelecer a relação entre volume: Inicialmente, entendemos que o corte de um plano paralelo à base determina uma nova pirâmide com altura h, sendo h a distância do vértice até o plano de corte. Além disso, estabelecemos a relação conforme o enunciado de que o volume da nova pirâmide (V_2) é 1/8 do volume da pirâmide original (V_1).

$$V_2 = \frac{V_1}{8}$$

No nível de compreensão da teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa análise como pertencente ao nível 2 (Análise) pois envolve a identificação e compreensão das propriedades dos volumes em relação ao corte da pirâmide.

Passo 2 - Reconhecer a semelhança dos sólidos: Ao realizar o corte na pirâmide original, a pirâmide menor resultante é semelhante à pirâmide original, pois o corte foi feito por um plano paralelo à base. Com isso, podemos usar as relações de proporcionalidade para os sólidos. Nesse caso, podemos relacionar o volume e altura das pirâmides, onde H = 10 é a altura da pirâmide original e h é a altura da pirâmide menor.

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{H}{h}\right)^3$$

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 3 (Abstração) pois exige a compreensão das relações de proporcionalidade e a aplicação do conceito de semelhança em três dimensões.

Passo 3 - Cálculo da altura da nova pirâmide: Como queremos determinar a

distância do vértice à seção transversal da pirâmide, basta calcularmos a altura h da pirâmide menor, segundo a fórmula de semelhança do passo acima. Portanto,

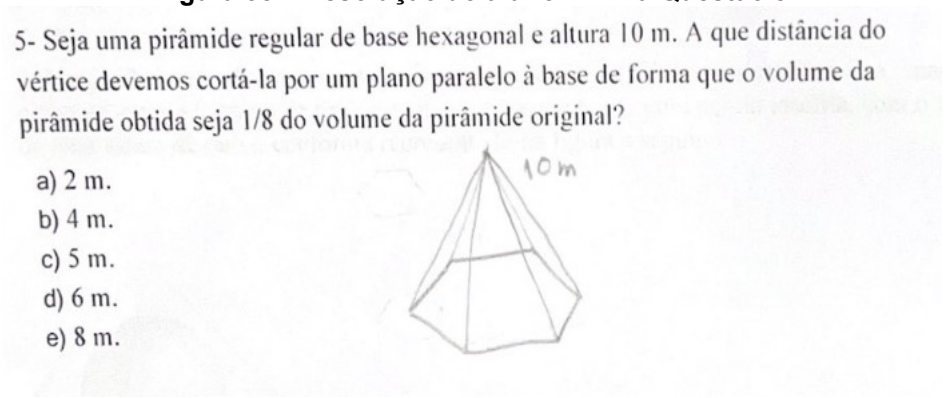
$$\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{H}{h}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_1}{\frac{V_1}{8}}=\left(\frac{10}{h}\right)^3 \Rightarrow 8=\left(\frac{10}{h}\right)^3 \Rightarrow h=5$$

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 3 (Abstração) pois envolve o uso de uma relação geométrica abstrata (semelhança dos volumes) e a manipulação algébrica para resolver a altura.

Sobre as resoluções dos estudantes na questão 5, um aluno conseguiu resolver a questão por completo, sete alunos resolveram parcialmente e quatro alunos não resolveram.

Nessa questão, teve um fato interessante quanto à resolução parcial. 6 dos 7 estudantes que resolveram de forma parcial, apenas desenharam a pirâmide original e identificaram sua altura de 10 metros. Isso aconteceu com os estudantes A2, A4, A5, A6, A9 e A12, cuja figura abaixo é a resolução de A12. Mesmo que o enunciado fale sobre um corte paralelo a base, nenhum desenho dessas resoluções parciais contou com essa representação. Assim, esses estudantes se encaixam no nível 1 da teoria dos níveis de compreensão de van Hiele, pois reconhecem a figura e seus elementos básicos, mas não possuem domínio suficiente de suas propriedades.

Figura 35 – Resolução do aluno A12 na Questão 5

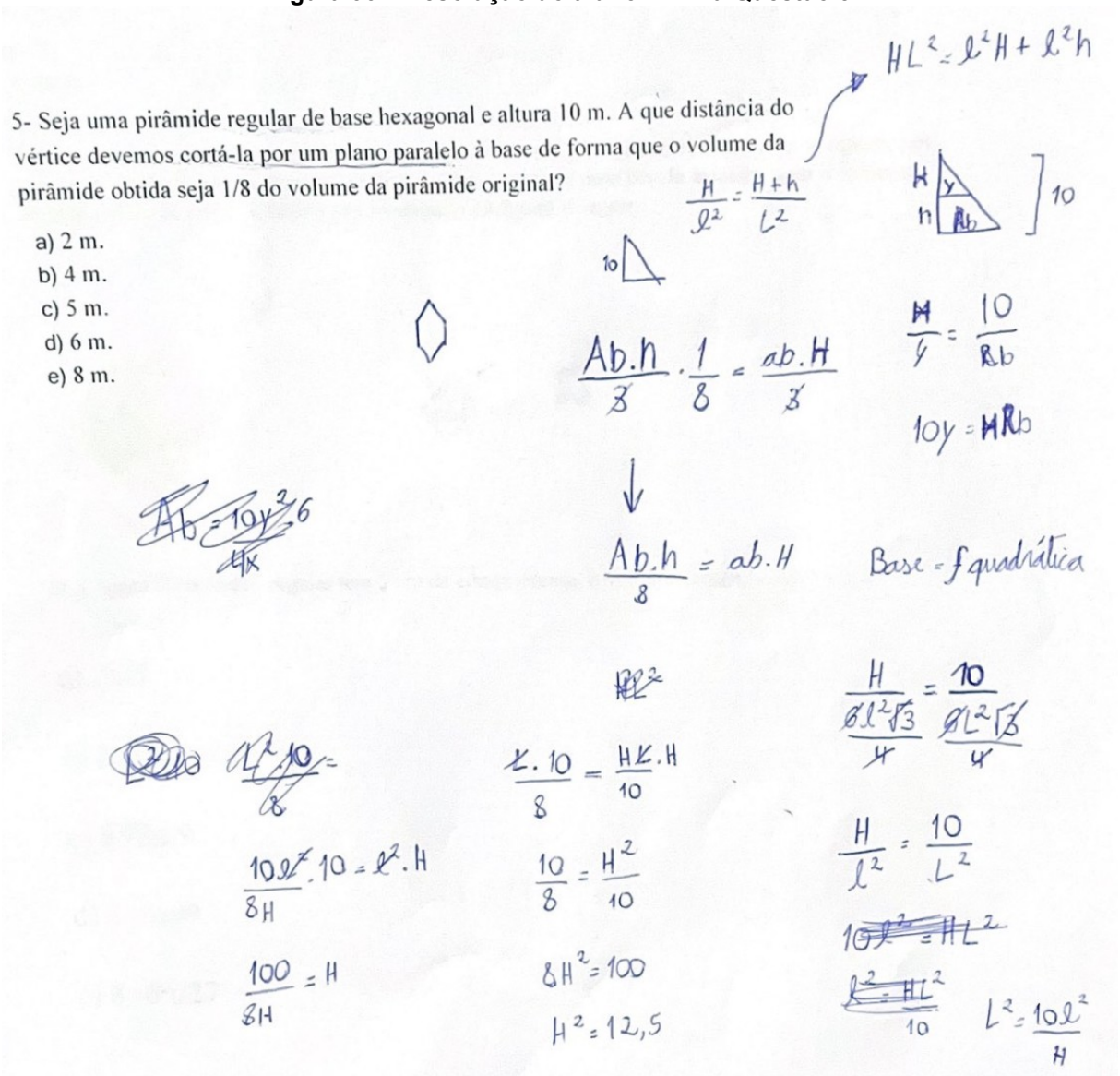


Fonte: da pesquisa (2024).

O aluno A11 resolveu a questão de forma parcial, conforme figura abaixo. Ele demonstrou uma compreensão mais avançada ao representar a pirâmide cortada e

identificar as alturas das duas pirâmides resultantes (H e h). No entanto, ele relacionou incorretamente a altura com a área da base, ao invés de conectar a altura ao volume da pirâmide, mostrando que compreende o conceito de semelhança de sólidos, mas ainda apresenta dificuldades em relacioná-la. Isso sugere que o aluno está no nível 2 de van Hiele, uma vez que começa a identificar as propriedades e relações, mas não tem domínio completo da abstração necessária.

Figura 36 – Resolução do aluno A11 na Questão 5

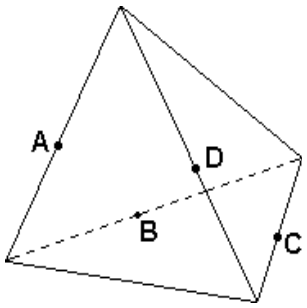


Fonte: da pesquisa (2024).

Analisando essa questão, tem-se que metade dos alunos apenas desenharam, sem que tivessem um entendimento profundo sobre as propriedades. Além disso, apenas 2 de 12 dos alunos conseguiu ir além do desenho, tentando

aplicar conceitos de semelhança dos sólidos, e apenas um conseguiu resolver corretamente. Acredita-se que isso se dê pelo fato de que conseguir relacionar as propriedades e semelhança, conforme o passo 2 da resolução, requer que o aluno esteja no nível 3 (Abstração) dos níveis de van Hiele, sugerindo que esse seja um desafio considerável para a maioria dos estudantes, exigindo do aluno uma compreensão global do exercício e análise profunda quanto à interpretação.

Questão 6. Na figura abaixo, os vértices do quadrilátero ABCD são pontos médios de quatro das seis arestas do tetraedro regular.



Se a aresta desse tetraedro mede 10, então a área do quadrilátero ABCD é

a) 25. b) 25√3. c) 75. d) 50√3. e) 100

Resolução sugerida – Questão 6

Passo 1 - Entendimento inicial da figura e propriedades do tetraedro: Inicialmente, devemos entender que, como temos um tetraedro regular, todas suas arestas tem mesma medida, ou seja, 10 unidades, e suas faces são compostas por triângulos equiláteros, com isso os ângulos das faces são de 60˚.

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 2 (Análise) pois o aluno reconhece a estrutura do tetraedro, suas arestas e faces, mas ainda não faz conexões mais complexas entre essas propriedades geométricas.

Passo 2 - Identificação das distâncias e propriedades dos pontos médios: Seja E o vértice do tetraedro que determina, ao mesmo tempo, as arestas que contém C e D. Assim, o triângulo formado por C, D e E também é equilátero, de lado 5, uma vez

que C e D são pontos médios da aresta do tetraedro, ou seja, CD mede 5.

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 3 (Abstração) pois o aluno começa a relacionar propriedades geométricas mais avançadas, como a semelhança dos triângulos e a relação entre os pontos médios e as distâncias.

Passo 3 - Propriedade do quadrilátero e análise dos ângulos: Como A, B, C e D são pontos médios de arestas do tetraedro, e estas arestas se encontram em faces adjacentes, os ângulos formados entre os planos dessas faces são de 90°. Logo, o ângulo DCB é reto, assim como os outros ângulos do quadrilátero ABCD, pois todos são formados por interseções perpendiculares das faces do tetraedro. Temos então que o quadrilátero apresenta todos os lados iguais e ângulos retos, podendo ser classificado como um quadrado.

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 3 (Abstração) pois o aluno já consegue relacionar as propriedades dos ângulos e lados para concluir que o quadrilátero é um quadrado, utilizando seu conhecimento prévio de figuras geométricas e suas características.

Passo 4 - Cálculo da área do quadrado ABCD: Como ABCD é um quadrado, utiliza-se sua fórmula de área, resultando em

$$A_{ABCD} = l^2 = 5^2 = 25.$$

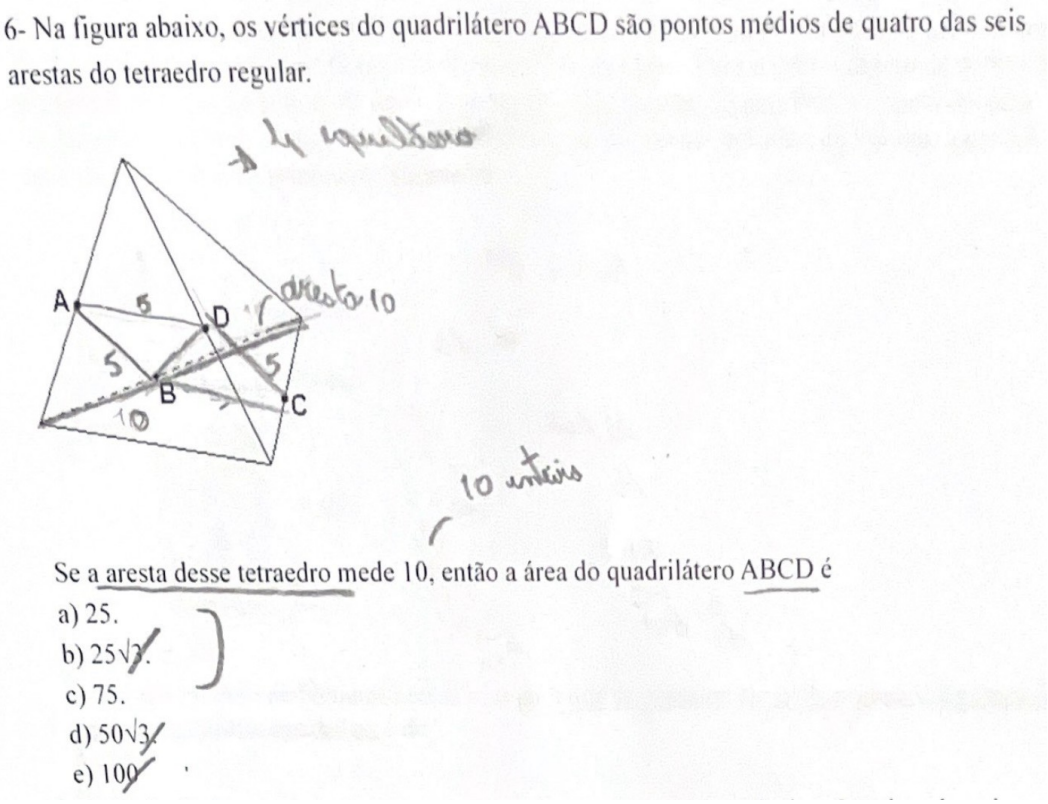
Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 2 (Análise) pois envolve o reconhecimento do quadrado e seu cálculo de área, sem abstrações adicionais.

Sobre as resoluções dos estudantes na questão 6, seis alunos conseguiram resolver a questão por completo, três alunos resolveram parcialmente e três alunos não resolveram.

Os alunos que resolveram de forma parcial, A3, A7 e A12, fizeram o desenho do quadrilátero ABCD e determinaram que a medida dos segmentos desse quadrilátero é 5. Abaixo temos a resolução do aluno A7. Esses alunos se encontram

no nível 2 de compreensão de van Hiele, pois são capazes de reconhecer as medidas e propriedades dos segmentos, mas não integram todas as informações para calcular sua área, indicando uma compreensão limitada das relações entre as propriedades dos elementos geométricos.

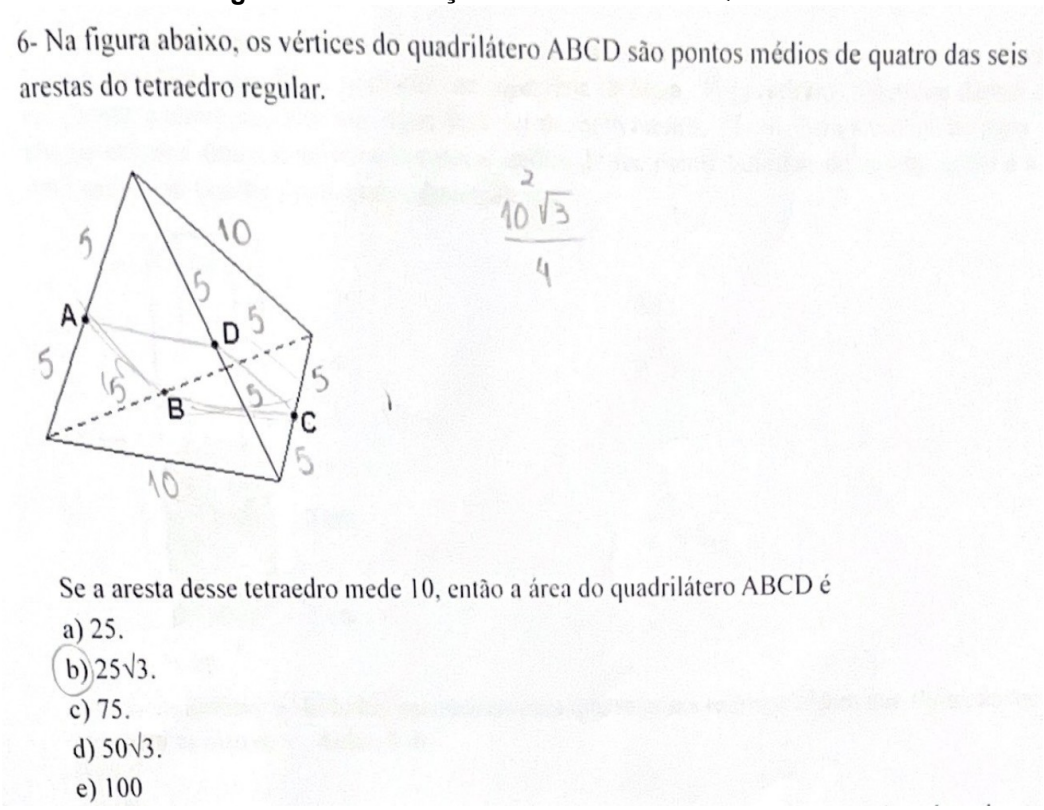
Figura 37 – Resolução do aluno A7 na Questão 6



Fonte: da pesquisa (2024).

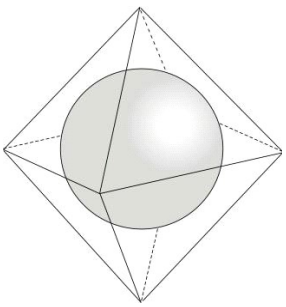
O aluno A12, conforme figura abaixo, apesar de ter desenhado o quadrilátero, ao calcular a área, utilizou a fórmula do triângulo equilátero e com lado 10, sendo esse o cálculo para a área de uma face do tetraedro. Esse erro mostra que o aluno compreende parcialmente a estrutura da figura, mas não tem um domínio completo de suas propriedades. Isso sugere que o aluno está na transição do nível 1 para o nível 2 de van Hiele, uma vez que reflete o desenvolvimento do aluno na identificação de características e propriedades, mas ainda de forma inicial.

Figura 38 – Resolução do aluno A12 na Questão 6



Fonte: da pesquisa (2024).

Questão 7. Um joalheiro resolveu presentear uma amiga com uma joia exclusiva. Para isto, imaginou um pingente, com o formato de um octaedro regular, contendo uma pérola inscrita, com o formato de uma esfera de raio r, conforme representado na figura a seguir.



Se a aresta do octaedro regular tem 2 cm de comprimento, o volume da pérola, em cm3, é:

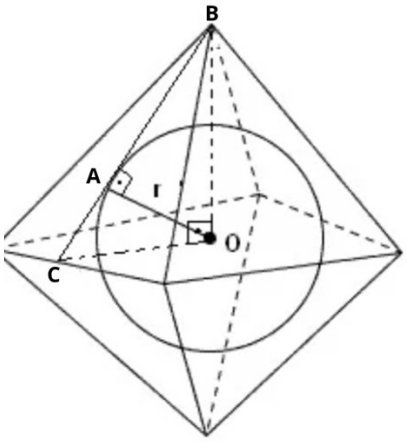
a) 2π/3 b) 8π/3 c) 8√2π/9 d) 4√6π/9 e) 8√6π/27

Resolução sugerida – Questão 7

Passo 1 - Entendimento inicial da figura e propriedades do octaedro: O octaedro é um poliedro composto por 8 faces triangulares equiláteras, e todas as suas arestas possuem a mesma medida, no caso, 2 cm. Como a esfera está inscrita no octaedro, então ela tangencia todas as faces.

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 2 (Análise) pois o aluno reconhece a estrutura do octaedro, suas arestas e faces, mas ainda não faz conexões mais complexas entre essas propriedades geométricas.

Passo 2 - Identificação das distâncias e relações geométricas: Seja A um ponto de tangência, pertencente tanto ao octaedro quanto a esfera, e O o centro da esfera, que coincide com o centro do octaedro. Temos então que o segmento AO é o raio da esfera (r), e ele é perpendicular à face do octaedro que contém o ponto A. Além disso, sabemos que as faces do octaedro são triângulos equiláteros, e, portanto, podemos utilizar essa propriedade para calcular as distâncias relevantes. Seja B um vértice da face do octaedro que contém A, e C o ponto médio do lado oposto a B dessa mesma face, conforme figura abaixo.



Como a face de um octaedro regular é um triângulo equilátero, perceba que BC é a altura desse triângulo equilátero e, portanto, podemos calcular sua medida como

$$BC = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 3 (Abstração) pois o aluno está fazendo uma análise mais profunda das propriedades geométricas envolvidas, como a relação entre os pontos médios, as distâncias e as alturas dos triângulos equiláteros.

Passo 3 - Cálculo do raio da esfera: Podemos entender o octaedro como a junção de duas pirâmides regulares de base quadrada. Assim, o segmento OC é o apótema da base quadrada, sendo seu comprimento dado por:

$$OC = \frac{L}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Observando o triângulo retângulo BCO, temos como hipotenusa BC e catetos BO e OC, e OC a altura relativa à hipotenusa. Usando o Teorema de Pitágoras, temos

$$(BC)^2 = (BO)^2 + (CO)^2 \Rightarrow (\sqrt{3})^2 = (BO)^2 + 1^2 \Rightarrow BO = \sqrt{2}$$

Usando as relações métricas no triângulo retângulo, temos

$$AO \cdot BC = BO \cdot CO \Rightarrow r \cdot \sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 3 (Abstração) pois o aluno já consegue fazer conexões entre as propriedades geométricas e aplicar métodos mais avançados, como o uso do Teorema de Pitágoras para relacionar distâncias em um triângulo retângulo e a aplicação de uma proporção geométrica.

Passo 4 - Cálculo do volume da esfera: Portanto, para calcular o volume da esfera, utiliza-se a fórmula do volume, sendo

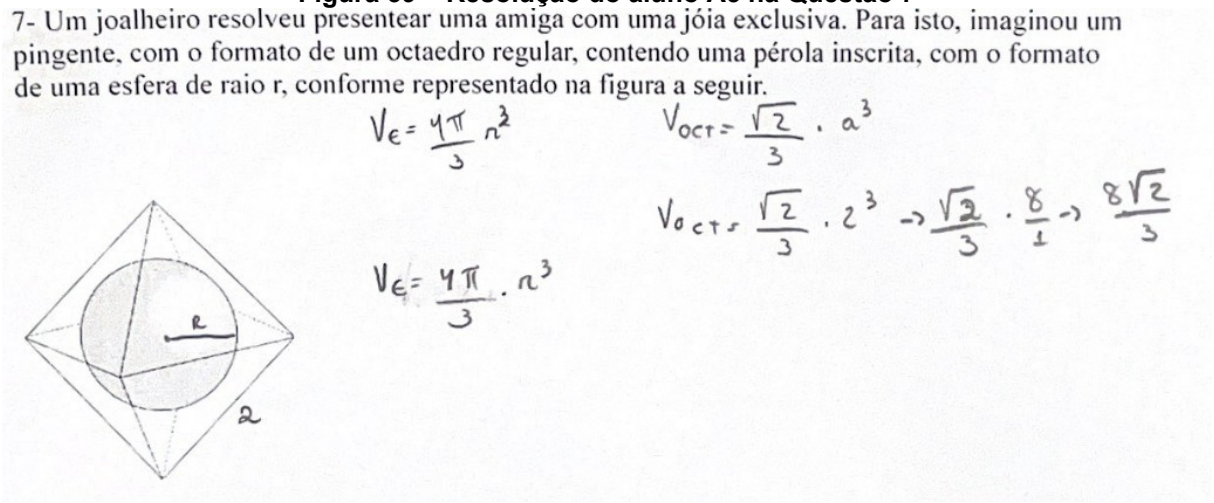
$$V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3}{3} = \frac{8\pi\sqrt{6}}{27}$$

Baseado no nível de teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa operação ao nível 2 (Análise) pois a aplicação da fórmula do volume ocorre de forma direta, sem envolver raciocínios dedutivos complexos, mas apenas substituição e multiplicação de valores conhecidos.

Sobre as resoluções dos estudantes na questão 7, nenhum aluno conseguiu resolver a questão por completo, quatro alunos resolveram parcialmente e oito alunos não resolveram.

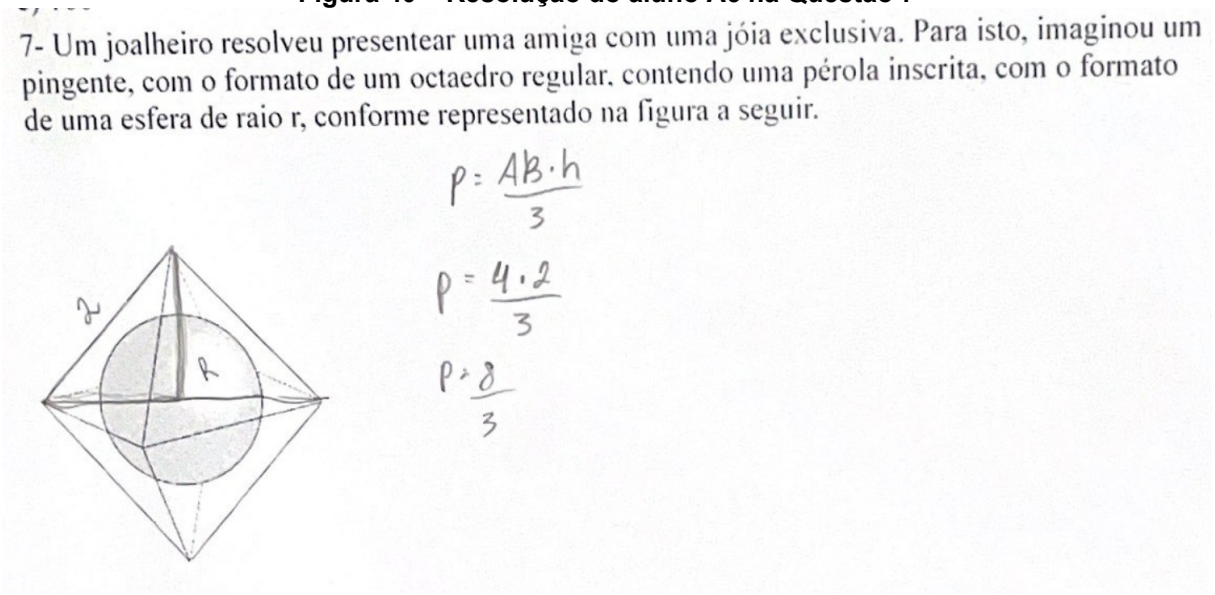
Os alunos A1, A4, A5 e A6 resolveram parcialmente a questão se aproximando nas resoluções e se diferenciando em alguns pontos. Todos tentaram resolver a questão calculando de forma direta o volume. A1, A4 e A5 reconhecem a fórmula do volume da esfera. A1 calcula de forma equivocada o volume do tetraedro e A5 calcula a fórmula do octaedro. Já A6, não reconhece o volume da esfera e tentar calcular o volume de metade do octaedro, porém assumindo que a altura é 2 quando na verdade esse é o valor da aresta do octaedro. Abaixo estão as resoluções dos alunos A5 e A6, respectivamente.

Figura 39 – Resolução do aluno A5 na Questão 7



Fonte: da pesquisa (2024).

Figura 40 – Resolução do aluno A6 na Questão 7

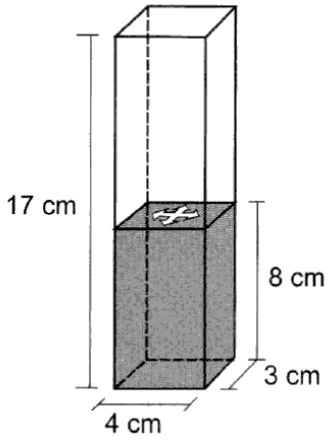


Fonte: da pesquisa (2024).

Analisando essa questão, percebe-se que como o enunciado pedia o cálculo do volume da pérola (esfera), a abordagem dos 4 alunos que tentaram resolver foi ir direto para o cálculo dos volumes. Nenhum dos anos se atentou que para resolver o volume da esfera é necessário o raio e então seria necessário calcular pelos elementos do octaedro, como apótema e por relações métricas, revelando um pensamento focado na aplicação de fórmulas conhecidas, sem uma análise mais profunda, cuja análise condiz com o nível 3 (Abstração) de van Hiele. Isso indica que os alunos estão no nível 2 da teoria de van Hiele, uma vez que reconhecem a figura e fórmulas básicas, não realizando conexões mais complexas e abstratas.

De forma geral, entende-se que, além de se tratar de uma questão de octaedro (sólido não tão comum para os alunos), a questão requer um nível mais alto de compreensão geométrica, o que justifica o grande número de alunos que não tentaram resolver a questão, sendo esses 66% dos alunos.

Questão 8. Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água. Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a 6 cm3 cada, que ficarão totalmente submersas.



O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de

a) 14. b) 16. c) 18. d) 30. e) 34

Resolução sugerida – Questão 8

Passo 1 - Determinar a altura faltante do nível de água: A resolução do exercício começa com o aluno identificando que para alcançar os 15 cm do recipiente conforme desejado, o nível de água deve subir mais 7 cm.

No nível de compreensão da teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa análise como pertencente ao nível 1 (Reconhecimento) pois é necessário identificar e visualizar a altura a ser aumentada.

Passo 2 - Percepção do volume faltante do nível de água: Para chegar ao nível desejado, o aluno precisa compreender que o volume necessário é um equivalente à um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões da base 3 cm x 4 cm e altura 7 cm, resultando em um volume:

$$V = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84\,cm^3$$

No nível de compreensão da teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa análise como pertencente ao nível 2 (Análise) pois envolve o reconhecimento do prisma e seu cálculo de volume.

Passo 3 - Relacionar o volume necessário como volume das bolinhas: Como esse volume faltante ($84\,cm^3$) deve ser preenchido com o volume das bolinhas, o aluno deve relacionar quantas bolinhas são necessárias para chegar ao volume calculado. Como cada bolinha tem $6\,cm^3$, a quantidade de bolinhas é dada por 84/6 = 14

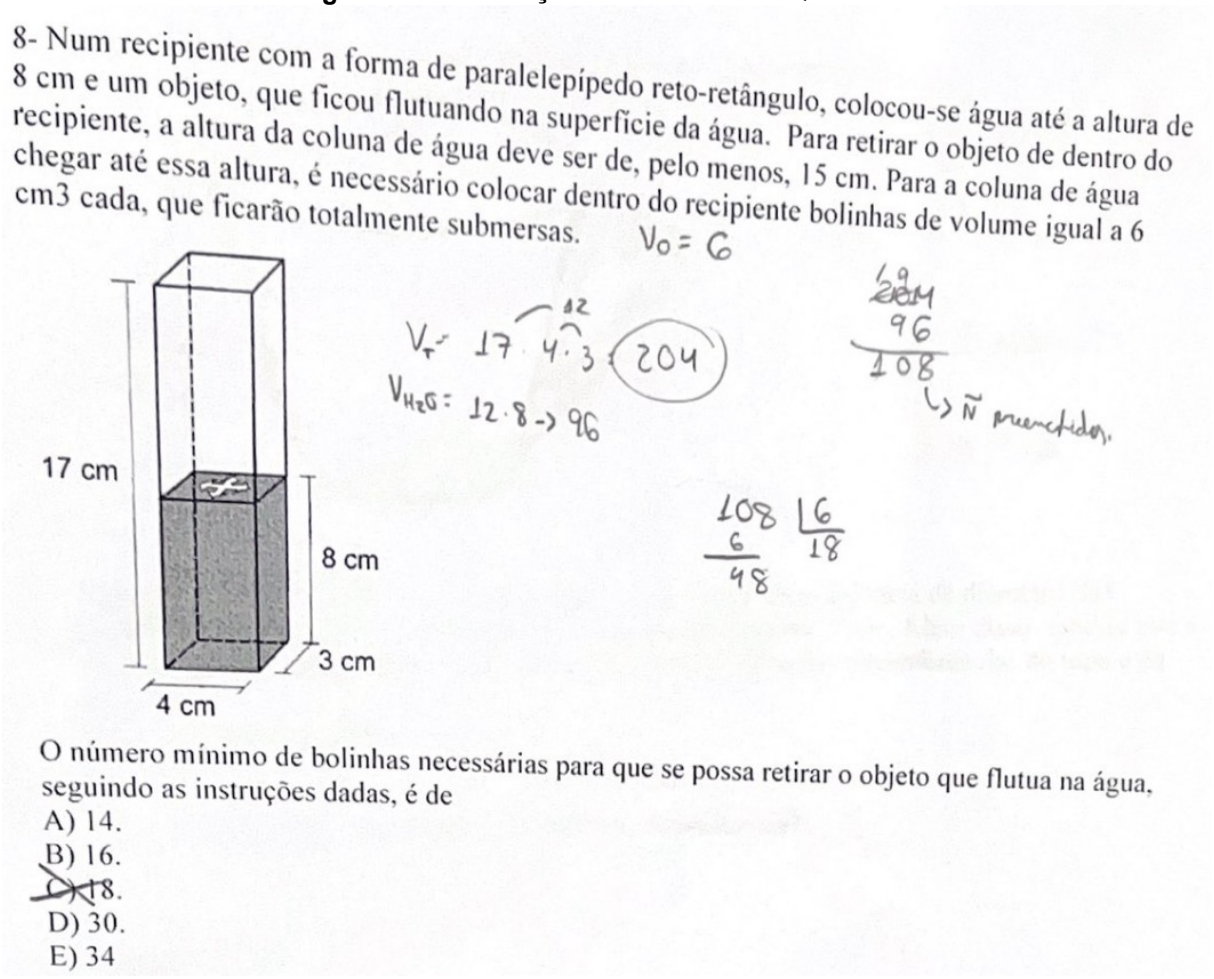
bolinhas.

No nível de compreensão da teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa análise como pertencente nível 2 (Análise) pois utiliza as relações e propriedades para a resolução da situação-problema.

Sobre as resoluções dos estudantes na questão 8, todos os alunos tentaram resolver de alguma forma, sendo sete alunos que conseguiram resolver a questão por completo e cinco alunos que resolveram parcialmente.

Entre os alunos que responderam parcialmente, 4 cometeram o mesmo engano: calcularam o volume faltante do recipiente como um todo, com altura de 17 cm, ao invés de calcular com a altura mínima proposta, 15 cm. Esses estudantes foram A2, A4, A5 e A7. Abaixo está a resolução do aluno A5, que calculou o volume total do recipiente e subtraiu do volume já preenchido do recipiente. Nesse caso, entende-se que o erro pode ter corrido por falta de atenção, e não necessariamente por falta de domínio de algum conteúdo geométrico, uma vez que todos os passos que remetem a geometria foram realizados de forma correta, mas com altura errada.

Figura 41 – Resolução do aluno A5 na Questão 8

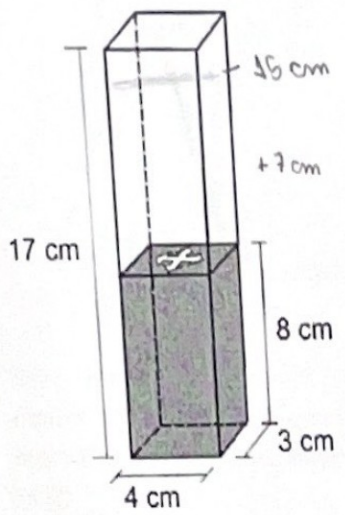


Fonte: da pesquisa (2024).

Na resolução abaixo, o estudante A9 reconhece a altura de 7cm necessária para que se atinja a altura mínima de 15 cm, mas não continua a resolução. De acordo com os níveis de compreensão de van Hiele, o estudante se encontra no nível 1 (Reconhecimento), pois identifica e visualiza a altura a ser aumentada, mas não compreende as propriedades e relações geométricas do prima, necessárias para a resolução do exercício.

Figura 42 – Resolução do aluno A9 na Questão 8

8- Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água. Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a 6 cm3 cada, que ficarão totalmente submersas.

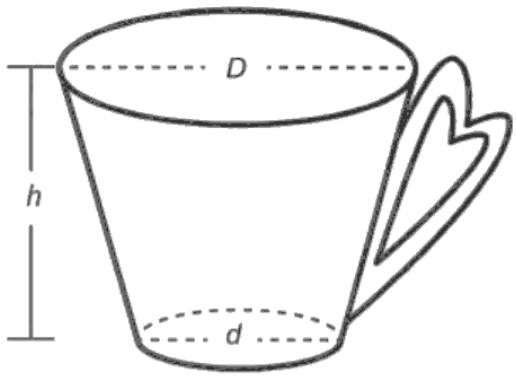


O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de

A) 14.
B) 16.
C) 18.
D) 30.
E) 34

Fonte: da pesquisa (2024).

Questão 9. Uma pessoa comprou uma caneca para tomar sopa, conforme ilustração.



Sabe-se que 1cm3 = 1 mL e que o topo da caneca é uma circunferência de diâmetro (D) medindo 10 cm, e a base é um círculo de diâmetro (d) medindo 8 cm. Além disso, sabe-se que a altura (h) dessa caneca mede 12 cm (distância entre o centro das circunferências do topo e da base). Utilize 3 como aproximação para π. Qual é a capacidade volumétrica, em mililitro, dessa caneca?

a) 216 b) 408 c) 732 d) 2 196 e) 2 928

Resolução sugerida – Questão 9

Passo 1 - Identificar o formato da caneca: A resolução do exercício começa com o aluno identificando que a caneca tem formato de tronco de cone.

No nível de compreensão da teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa análise como pertencente ao nível 1 (Reconhecimento) pois é necessário identificar e visualizar o formato da caneca.

Passo 2 - Cálculo do volume da caneca: Sabendo que a caneca se trata de um tronco de cone, para calcular seu volume com a fórmula é necessário determinar os raios de topo e da base, sendo respetivamente, 10/2 = 5 cm e 8/2 = 4 cm. Assim, seu volume é

$$V=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right) \Longrightarrow V=\frac{3\cdot 12}{3}\left(5^2+5\cdot 4+4^2\right)=732\,cm^3$$

No nível de compreensão da teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa análise como pertencente ao nível 2 (Análise) pois envolve o reconhecimento do tronco de pirâmide e seu cálculo de volume.

Passo 3 - Converter o volume para a capacidade em ml: O volume calculado está em cm^3, mas é necessário converter para ml. Conforme o enunciado, $1\,cm^3=1\,ml$, e então $732\,cm^3=732\,ml$.

No nível de compreensão da teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa análise como pertencente ao nível 2 (Análise) pois trata-se de uma aplicação direta da conversão de unidades fornecida no enunciado.

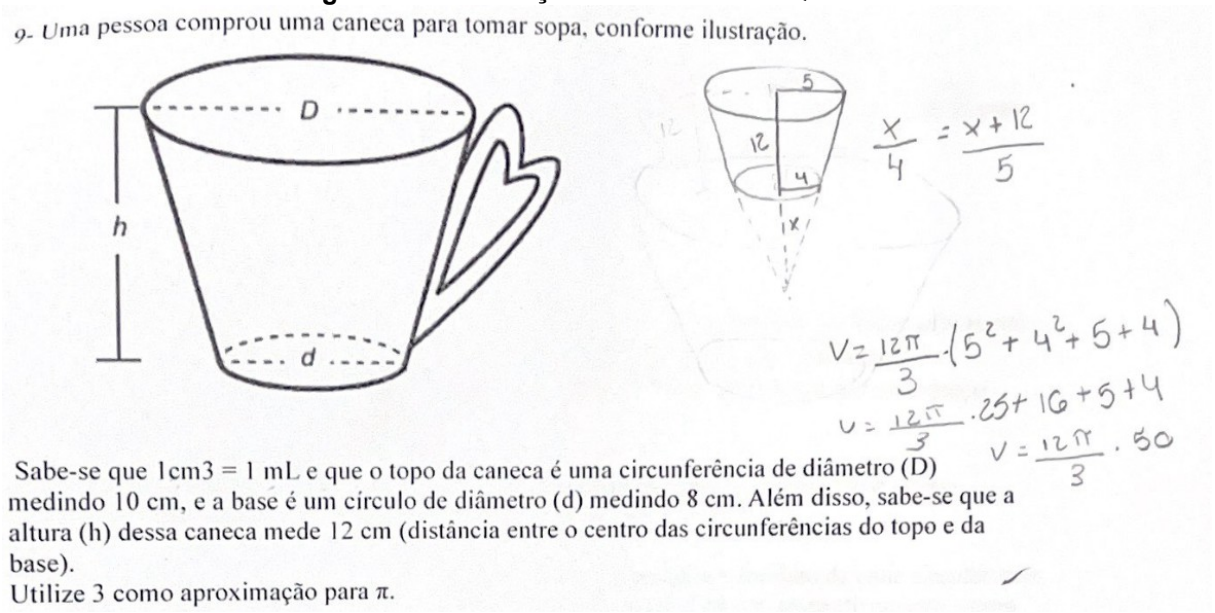
Sobre as resoluções dos estudantes na questão 9, dez alunos conseguiram resolver a questão por completo e dois alunos resolveram parcialmente.

Abaixo, apresenta-se a resolução do estudante A4. A4 esboça duas possíveis abordagens: uma utilizando sólidos semelhantes e outra aplicando a fórmula de

tronco de cone. Na primeira abordagem, ele reconhece que o tronco de cone é resultado de uma seção paralela à base de um cone maior, onde a parte removida corresponde a um cone menor. Com isso, o aluno chama x a altura do cone menor que foi subtraído do cone maior e utiliza as relações de semelhança entre sólidos, mais especificamente relacionando altura e raio dos cones, e simboliza o cálculo, montando as razões necessárias. Embora tenha realizado todo o processo de forma certa, o aluno desiste dessa resolução e não dá continuidade.

Já na segunda abordagem, ao utilizar a fórmula de volume do tronco de cone, o estudante comete um pequeno erro ao substituir valores da fórmula. Era esperado $\frac{12\pi(5^2+4^2+5\cdot4)}{3}$ como volume, mas o estudante calcula como $\frac{12\pi(5^2+4^2+5+4)}{3}$, trocando multiplicação pela soma no meio da fórmula. Esse último erro também é percebido na resolução do estudante A9, que escreve corretamente a fórmula, mas acaba fazendo essa troca.

Figura 43 – Resolução do aluno A4 na Questão 9

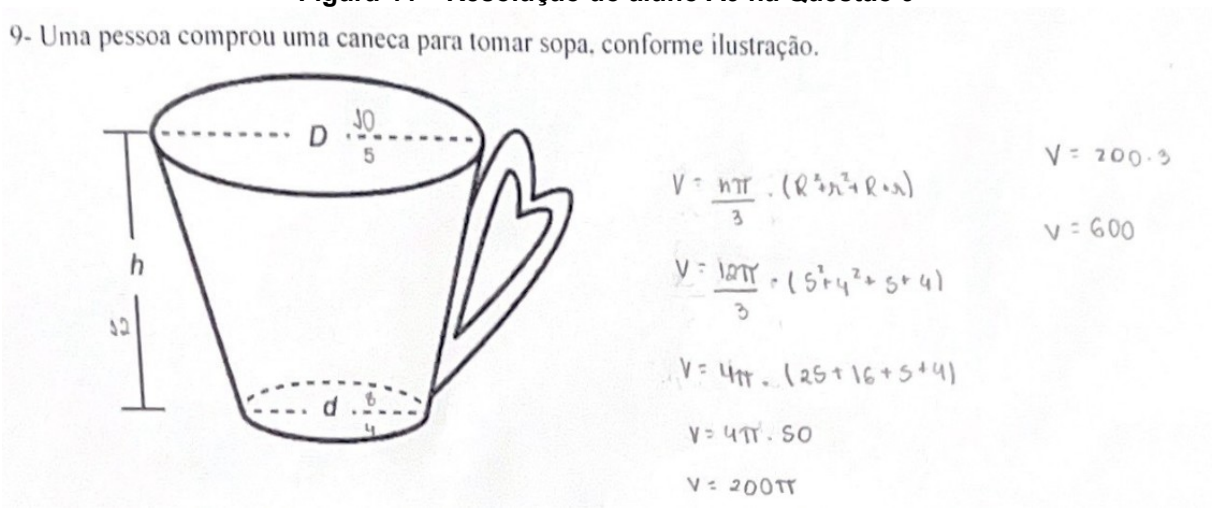


Fonte: da pesquisa (2024).

Com relação aos níveis de compreensão de van Hiele, o estudante A4 está em transição do nível 2 para o nível 3, uma vez que o estudante reconhece propriedades e relações, mas, ao ter desistido da primeira abordagem, demonstra que ainda está desenvolvendo a confiança e a habilidade necessárias para utilizar estratégias mais avançadas de resolução.

Quanto ao estudante A9, conforme figura abaixo, ele se encontra no nível 2 de van Hiele, pois reconhece a fórmula, mas ainda comete erros ao aplicá-la, indicando uma compreensão parcial, sem domínio completo para uma aplicação precisa.

Figura 44 – Resolução do aluno A9 na Questão 9



Fonte: da pesquisa (2024).

Questão 10. Uma loja comercializa cinco modelos de caixas-d'água (I, II, III, IV e V), todos em formato de cilindro reto de base circular. Os modelos II, III, IV e V têm as especificações de suas dimensões dadas em relação às dimensões do modelo I, cuja profundidade é P e área da base é Ab, como segue:

- modelo II: o dobro da profundidade e a metade da área da base do modelo I;
- modelo III: o dobro da profundidade e a metade do raio da base do modelo I;
- modelo IV: a metade da profundidade e o dobro da área da base do modelo I;
- modelo V: a metade da profundidade e o dobro do raio da base do modelo I.

Uma pessoa pretende comprar nessa loja o modelo de caixa-d'água que ofereça a maior capacidade volumétrica. O modelo escolhido deve ser o
a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

Resolução sugerida – Questão 10

Passo 1 - Compreender que maior capacidade volumétrica é dada pelo volume: A

resolução do exercício começa com o aluno identificando que para determinar qual é a caixa-d'água com maior capacidade volumétrica deve-se calcular o volume de cada modelo, sendo todos cilindros reto de base circular.

No nível de compreensão da teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa análise como pertencente ao nível 2 (Análise) pois envolve a compreensão da fórmula do volume do cilindro e sua relação com a capacidade.

Passo 2 - Compreensão da fórmula do volume: Tratando-se de cilindros, seu volume é calculado pela área da base (A_B) e altura, nesse caso dada pela profundidade (p). Como não há valores numéricos, o cálculo dos volumes deverá ser feito com manipulações de variáveis, como

$$V = A_B \cdot h \Longrightarrow V = \pi r^2 \cdot p$$

No nível de compreensão da teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa análise como pertencente ao nível 2 (Análise) pois o aluno deve observar relações entre as propriedades de volume, mesmo sem valores numéricos.

Passo 3 - Realização do cálculo para todos os modelos: Adotando como A_B a área da base do modelo I, r o raio do modelo I e p como a sua profundidade, o aluno deve calcular o volume dos modelos, atentando-se com as características dadas e relacionar o volume calculado com o volume padrão do modelo I.

$$V_{II} = \frac{A_B}{2} \cdot 2p = A_B \cdot p$$

$$V_{III} = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot 2p = \frac{\pi r^2}{4} \cdot 2p = \frac{A_B \cdot p}{2}$$

$$V_{IV} = 2A_B \cdot \frac{p}{2} = A_B \cdot p$$

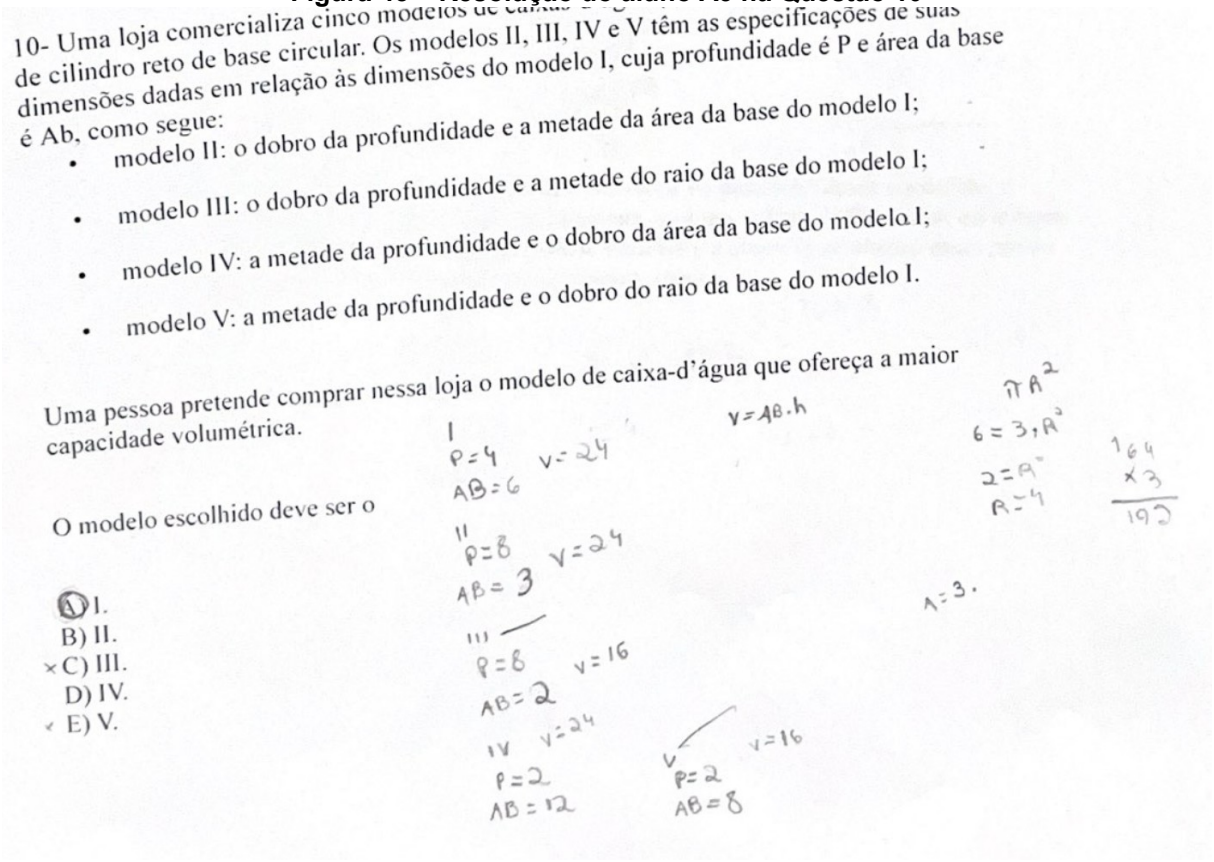
$$V_V = \pi (2r)^2 \cdot \frac{p}{2} = 4\pi r^2 \cdot \frac{p}{2} = 2A_B \cdot p$$

No nível de compreensão da teoria do pensamento geométrico de van Hiele é possível classificar essa análise como pertencente ao nível 3 (Abstração) pois o aluno precisa relacionar as propriedades de área da base, raio e profundidade de cada modelo, generalizar, manipulá-las e comparar os resultados para chegar à solução.

Sobre as resoluções dos estudantes na questão 10, um aluno resolveu a questão por completo, dez alunos resolveram parcialmente e um aluno não resolveu.

Entre as resoluções parciais, nota-se que as dificuldades dos alunos se repetem. Os alunos A1, A3 A4, A9, A10 e A12 tentaram resolver a questão supondo valores numéricos para as dimensões em questão (profundidade, área da base e raio da base). Observa-se que os alunos têm dificuldade no exercício ao lidar com a dimensão do raio. Embora tenham conseguido fazer a relação de dobro/metade da profundidade e área da base, necessárias para o cálculo do volume do cilindro, apresentaram dificuldades com as proporções envolvendo o raio da base. Abaixo temos a resolução do aluno A3, que ao tentar determinar o raio a partir da área da base suposta (Ab = 6), manipulou o raio de forma errada e então os passos posteriores ficaram incorretos.

Figura 45 – Resolução do aluno A3 na Questão 10



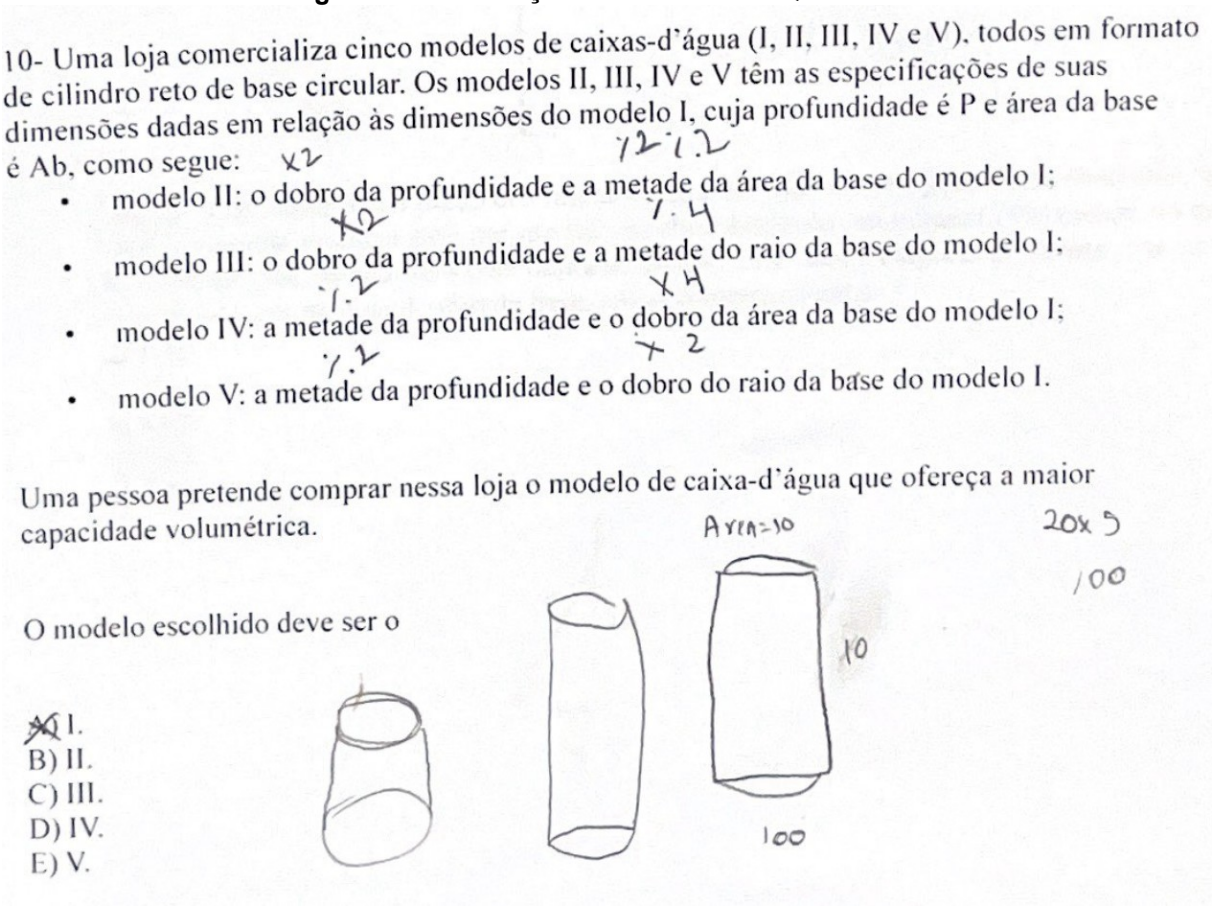
Fonte: da pesquisa (2024).

Essas resoluções indicam que os alunos estão no nível 2 de compreensão de van Hiele, pois reconhecem a fórmula de volume do cilindro, mas ao fazer

manipulações mais abstratas, como compreender a proporcionalidade do raio nesse calculo, apresentam dificuldades.

O aluno A2 mostra em sua resolução que entende que o cálculo do volume do cilindro e relaciona corretamente o impacto das dimensões sobre o volume. Por exemplo, ao se tratar de metade do raio, ele sinaliza que o volume será dividido por 4. No entanto, ele comete erros em outras análises, como considerar que a metade da área da base resultaria em dividir o volume 2 vezes por 2, ou o dobro da área da base seria o equivalente a multiplicar o volume por 4, conforme figura abaixo.

Figura 46 – Resolução do aluno A2 na Questão 10



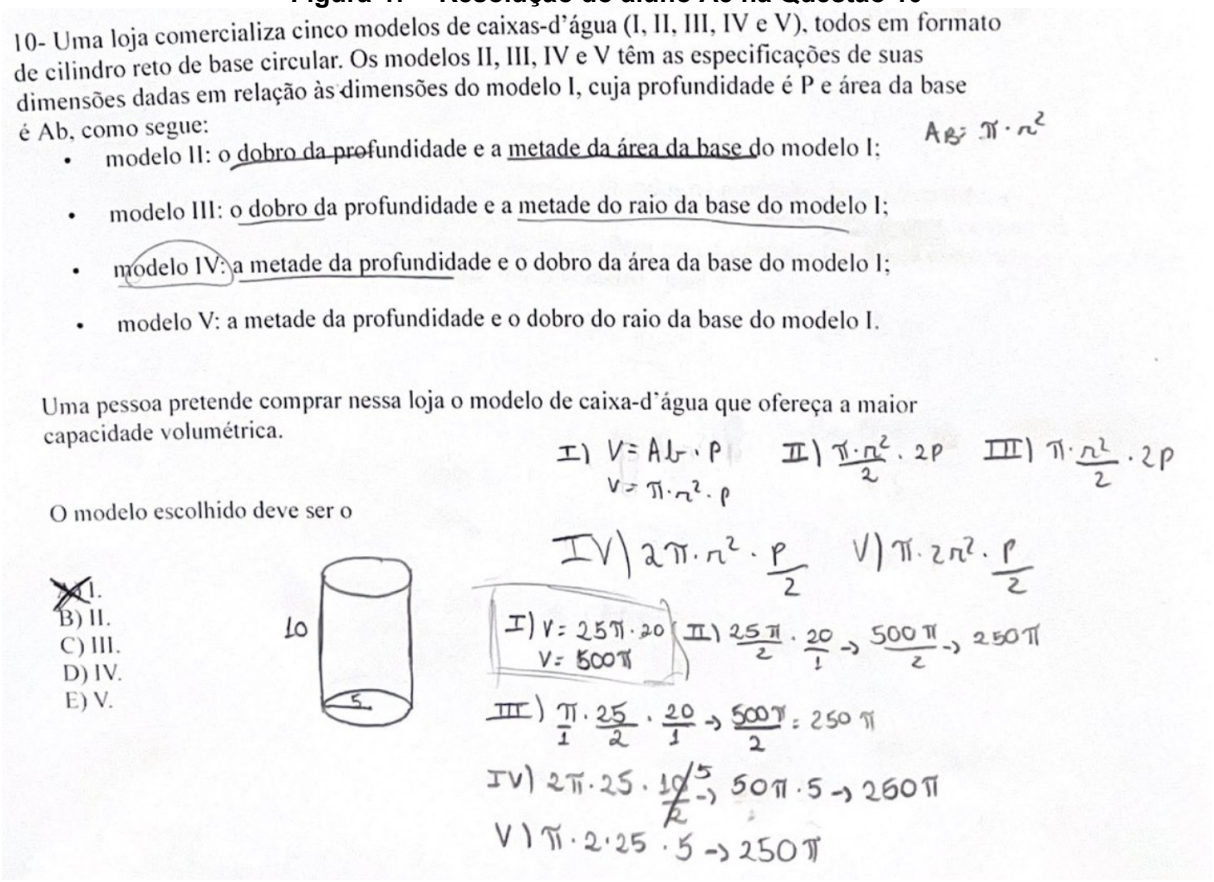
Fonte: da pesquisa (2024).

De acordo com os níveis de compreensão de van Hiele, o aluno está em transição do nível 2 para o nível 3, pois demonstra entendimento conceitual, mas há algumas dificuldades em realizar generalizações de forma consistente.

Abaixo tem-se a resolução do aluno A5. Inicialmente o aluno faz a resolução de forma analítica, mas cometeu erros ao tratar do raio. Ele não compreendeu que,

ao dividir o raio por 2, essa fração toda fica ao quadrado resultando em uma divisão por 4. O mesmo acontece com o dobro do raio. A partir de sua resolução analítica, o aluno substitui valores numéricos para chegar ao resultado. De acordo com os níveis de compreensão de van Hiele, o estudante se encontra no nível 2, pois mostra que tem compreensão parcial da resolução analítica, mas ainda não possui domínio suficiente para lidar com relações mais complexas.

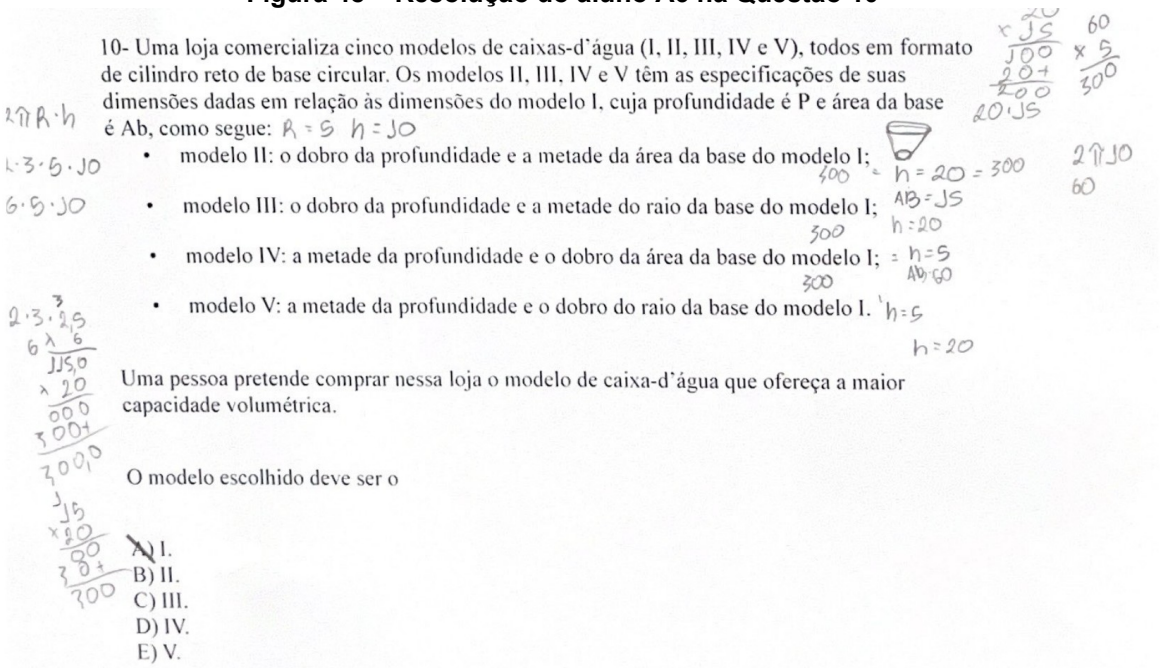
Figura 47 – Resolução do aluno A5 na Questão 10



Fonte: da pesquisa (2024).

Na figura abaixo, o aluno A6 sugere valores numéricos para profundidade e o raio da base, e a partir desses valores realiza o cálculo dos modelos. A abordagem está certa, porém o aluno trocou a fórmula de área da base com a fórmula de comprimento da circunferência, resultando em um cálculo incorreto.

Figura 48 – Resolução do aluno A6 na Questão 10

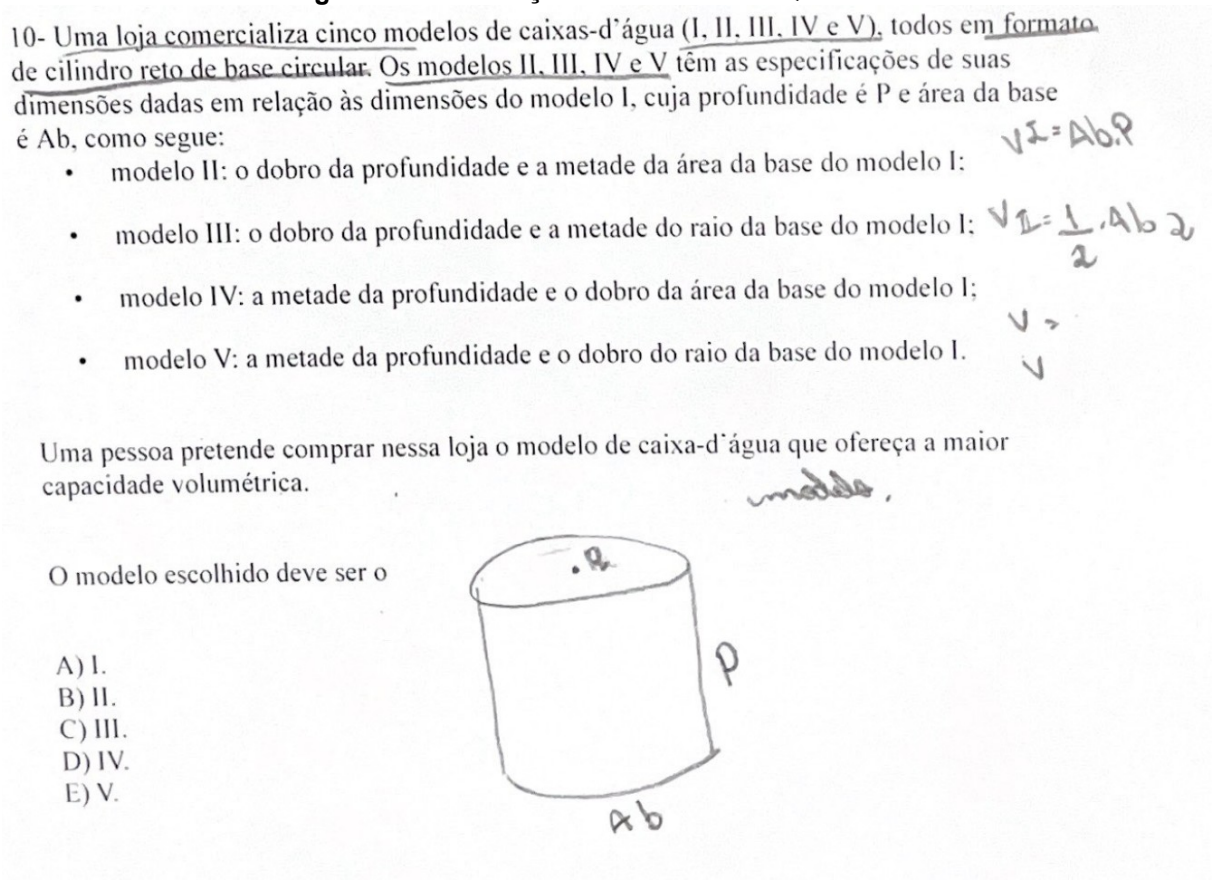


Fonte: da pesquisa (2024).

Isso indica que o aluno está no nível 2 de compreensão de van Hiele, pois mostra domínio na estratégia de resolução do exercício, mas comete erro conceitual demonstrando que ainda não possui total domínio das relações entre as propriedades geométricas.

O estudante A7, conforme resolução abaixo, entende a formulada para cálculo do volume do cilindro e esboça uma resolução analítica, porém ao se deparar com situações que diz respeitos a metade do raio, ele não continua a resolução, mostrando dificuldade em relacionar os efeitos do raio no volume do cilindro. Isso indica que o aluno está no nível 2 de compreensão de van Hiele, pois compreende relações básicas, mas não consegue aplicar generalizações abstratas.

Figura 49 – Resolução do aluno A7 na Questão 10



Fonte: da pesquisa (2024).

Analisando a questão, observa-se que, apesar de muitos alunos terem tentado resolver, 10 dos 12 não chegaram à solução correta. Percebe-se que há uma limitação em abstrair as relações proporcionais entre raio e área da base, especialmente lidando com as mudanças ao se elevar ao quadrado. Além disso, identifica-se uma dependência de valores numéricos para simplificar o problema. Embora seja uma abordagem valida, muitos alunos cometeram erros ao aplicas as relações geométricas. De forma geral, os alunos operam no nível 2 de compreensão de van Hiele, reconhecendo as fórmulas e algumas relações entre as propriedades geométricas, mas encontrando dificuldades em lidar com abstrações mais complexas necessárias para resolver a questão completamente.

3.2 Algumas considerações sobre as análises

A partir das análises das respostas dos alunos às dez questões selecionadas, apresenta-se uma síntese em quadros que avalia até que pontos estudantes avançaram em relação aos níveis de compreensão geométrica de van Hiele.

Embora existam cinco níveis de compreensão do pensamento geométrico, as questões do ENEM e/ou vestibulares, voltadas para estudantes que estão concluindo o Ensino Médio, abrangem até o nível 3 (Abstração). Já os níveis 4 (Dedução) e 5 (Rigor) são geralmente aprendidos ou alcançados no Ensino Superior.

Para cada quadro, são identificados os níveis de pensamento geométrico necessários para a resolução de cada questão. Quando a questão é originada de uma prova anterior do (ENEM), a fonte é indicada como “ENEM”; nas demais questões, a fonte está indicada como “Vestibular”. Esse procedimento visa analisar o nível de compreensão em relação às diferentes provas.

A síntese dos resultados está organizada em quadros que detalham os níveis exigidos para resolver cada questão, a porcentagem de estudantes que atingiu cada nível e a quantidade de alunos que deixaram a questão em branco, sem qualquer tentativa de resolução. Com essa abordagem, busca-se identificar o nível máximo alcançado pelos estudantes, padrões recorrentes e oportunidades para intervenções pedagógicas mais direcionadas.

Quadro 2 – Análise dos níveis de van Hiele máximo atingidos pelos estudantes na Questão 1

Questão 1 - ENEM	Porcentagem de estudantes
Não responderam	8,33 %
Nível 1	8,33 %
Nível 2	83,33 %

Fonte: elaborado pelo autor.

Quadro 3 – Análise dos níveis de van Hiele máximo atingidos pelos estudantes na Questão 2

Questão 2 - Vestibular	Porcentagem de estudantes
Não responderam	33,33 %
Nível 1	33,33 %
Nível 2	16,67 %
Nível 3	16,67 %

Fonte: elaborado pelo autor.

Quadro 4 – Análise dos níveis de van Hiele máximo atingidos pelos estudantes na Questão 3

Questão 3 - Vestibular	Porcentagem de estudantes
Não responderam	25 %
Nível 1	8,33 %
Nível 2	66,67 %

Fonte: elaborado pelo autor.

Quadro 5 – Análise dos níveis de van Hiele máximo atingidos pelos estudantes na Questão 4

Questão 4 - Vestibular	Porcentagem de estudantes
Não responderam	8,33 %
Nível 1	58,33 %
Nível 2	16,67 %
Nível 3	16,67 %

Fonte: elaborado pelo autor.

Quadro 6 – Análise dos níveis de van Hiele máximo atingidos pelos estudantes na Questão 5

Questão 5 - Vestibular	Porcentagem de estudantes
Não responderam	33,33 %
Nível 1	50 %
Nível 2	8,33 %
Nível 3	8,33 %

Fonte: elaborado pelo autor.

Quadro 7 – Análise dos níveis de van Hiele máximo atingidos pelos estudantes na Questão 6

Questão 6 - Vestibular	Porcentagem de estudantes
Não responderam	25 %
Nível 1	8,33 %
Nível 2	16,67 %
Nível 3	50 %

Fonte: elaborado pelo autor.

Quadro 8 – Análise dos níveis de van Hiele máximo atingidos pelos estudantes na Questão 7

Questão 7 - Vestibular	Porcentagem de estudantes
Não responderam	66,67 %
Nível 1	0 %
Nível 2	33,33 %
Nível 3	0 %

Fonte: elaborado pelo autor.

Quadro 9 – Análise dos níveis de van Hiele máximo atingidos pelos estudantes na Questão 8

Questão 8 - ENEM	Porcentagem de estudantes
Não responderam	0 %
Nível 1	8,33 %
Nível 2	91,67 %

Fonte: elaborado pelo autor.

Quadro 10 – Análise dos níveis de van Hiele máximo atingidos pelos estudantes na Questão 9

Questão 9 - ENEM	Porcentagem de estudantes
Não responderam	0 %
Nível 1	0 %
Nível 2	100 %

Fonte: elaborado pelo autor.

Quadro 11 – Análise dos níveis de van Hiele máximo atingidos pelos estudantes na Questão 10

Questão 10 - ENEM	Porcentagem de estudantes
Não responderam	8,33 %
Nível 1	0 %
Nível 2	83,33 %
Nível 3	8,33 %

Fonte: elaborado pelo autor.

Das dez questões analisadas, quatro são provenientes do ENEM e as demais de vestibulares. Das questões do ENEM, três (75%) exigem dos estudantes o nível 2 de compreensão geométrica, enquanto uma exige nível 3. Nas questões que requerem nível 2, as porcentagens de estudantes que atingiram esse nível são, respectivamente, 83,33%, 91,67% e 100%. A média geral indica que 91,67% dos estudantes atingiram o nível de compreensão 2 nessas questões, um resultado considerado muito satisfatório. Conforme abordado nas análises, alcançar um nível de compreensão não implica necessariamente acertar a questão, mas demonstrar capacidade de raciocínio compatível com o nível exigido.

Entretanto, a questão 10, do ENEM, que exige nível 3, apresentou resultados mais desafiadores: apenas 8,33 % dos estudantes, equivalente a um aluno, conseguiram atingir esse nível.

Fazendo uma análise similar nas questões oriundas de vestibulares, das seis questões analisadas, apenas uma requer um nível de compreensão 2, enquanto as demais requerem nível 3. Na questão de nível 2, 66,67% dos estudantes atingiram o nível esperado. Já nas questões de nível 3, a média de estudantes que chegaram a esse nível foi de apenas 18,33%.

Essa análise revela que, de forma geral, os estudantes têm maior facilidade em alcançar o nível 2 de compreensão, especialmente nas questões do ENEM. Por outro lado, questões que exigem nível 3 apresentam as menores porcentagens de alunos que alcançaram esse patamar, independente da fonte da questão. Assim, entende-se que o maior desafio está no nível de compreensão exigido, e não na origem da questão.

É relevante destacar que as questões utilizadas representam uma amostra de provas externas, e não sua totalidade. Na seleção inicial das questões aplicadas aos alunos, não foi considerada a classificação dos níveis de van Hiele. No entanto, ao

longo da pesquisa, a teoria mostrou-se essencial para compreender os resultados e possibilitar uma análise mais ampla da compreensão geométrica dos estudantes.

Por fim, reforça-se que o objetivo da pesquisa não foi comparar se o ENEM apresenta mais questões de nível 2 ou nível 3 em relação aos vestibulares. O foco foi analisar como os estudantes resolvem esses dois tipos de questões, identificando padrões de desempenho e possibilidades de intervenção pedagógica para aprimorar a aprendizagem geométrica.

4 DESCRIÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional derivado desta dissertação tem como objetivo propor sequência didática que forme e auxilie professores de matemática a ensinar a disciplina de Geometria Espacial, utilizando questões de provas externas (ENEM e vestibulares) sob a perspectiva da Teoria dos Níveis de compreensão de van Hiele.

De início, de forma sintética, apresenta-se um breve resumo da principal teoria que compõe a análise da dissertação, a teoria dos níveis de pensamento geométrico proposta pelos van Hiele. Com essa breve introdução, buscou-se apresentar a professores partes da teoria de van Hiele que são fundamentais para entender como o aprendizado de Geometria Espacial se dá e progride através dos estudos em matemática. Assim, essa parte do produto educacional tenta combater as dificuldades relacionadas ao ensino de Geometria Espacial já levantadas tanto na prática docente quando na literatura analisada na própria da dissertação. Nesse sentido, considera-se ser de grande valia que o professor aprenda e entenda como operam os níveis de compreensão do pensamento geométrico para conseguir avaliar e sanar dúvidas dos estudantes em relação a Geometria Espacial.

Além disso, ao adentrar na sequência didática, foram colocados exercícios de vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) em destaque. Essa escolha se dá ela centralidade que esses exames de larga escala têm nas vidas dos estudantes, dos professores e das próprias escolas. Para acessar o ensino universitário, os estudantes devem passar por essas provas que, como já foi mostrado na dissertação, abordam o tema da Geometria Espacial com certo destaque. Assim, acaba que existe uma demanda própria por esse conteúdo disciplinar.

Nesse sentido, o objetivo com a sequência didática é incorporar esses exercícios que abordam a disciplina de Geometria Espacial para dentro da sala de aula. Portanto, inicia-se as atividades com exercícios do ENEM e de vestibular que levam em consideração os níveis do pensamento geométrico de van Hiele. Foram escolhidos três exercícios de cada nível que deve ser aprendido até o Ensino Médio, etapa escolhida para a aplicação da sequência didática. Foram eleitas três questões do nível 1; três do nível 2 e três do nível 3. A ordem escolhida foram do nível 1 até o nível 3. Além disso, os exercícios foram postos em uma ordem que contemple o conteúdo de forma gradativa. No total, são nove atividades.

Na sequência, as aulas propostas também levaram em consideração os exercícios do ENEM e de vestibular, principalmente aqueles que faziam uma “transição” de nível (nível 1 para o 2 e nível 2 para o 3). Na sequência didática, são postos comentários sobre as questões, detalhando os conceitos importantes que o aluno deve ter para a realização da questão e como a questão se encaixa no nível proposto de van Hiele.

Além disso, levando em consideração que outras abordagens são possíveis para o aprendizado de Geometria Espacial a partir da teoria do pensamento geométrico de van Hiele, realiza-se sugestões de adaptações ou mesmo de complementação didática, em alguns casos relacionada ao uso de material concreto e, em outros, ao uso do software GeoGebra, ambos funcionando como auxílio e método para aprender Geometria Espacial.

Outro fator importante é que as sugestões didáticas não são para a resolução dos exercícios, mas sim para a complementação didática ou mesmo para sanar possíveis dificuldades que os estudantes apresentassem durante a aula. Assim a sequência didática buscou trazer os exercícios do ENEM e vestibulares como potencias educativas, possibilitando um trabalho efetivo para o aprendizado de Geometria Espacial no Ensino Médio.

Sequência de atividades sobre geometria espacial segundo o modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico a partir de questões de ENEM e Vestibulares.

Nível 1: Reconhecimento

Nesse nível é importante sugerir aos alunos atividades que envolvam identificar, comparar e nomear figuras com base em suas características visuais, sem exigir necessariamente uma justificativa e/ou explicação.

Atividade 1 – (Enem PPL 2023 - adaptada) A tartaruga ou tachão de trânsito é um dispositivo de sinalização horizontal utilizado para canalizar o tráfego ou garantir o afastamento do fluxo de veículos de zonas perigosas ou com grande risco de acidentes. A Figura 1 apresenta alguns deles já instalados.

Figura 1

Disponível em: www.alfasinalizacao.com.br. Acesso em: 28 nov. 2021 (adaptado).

O modelo geométrico de um tachão está representado na Figura 2.

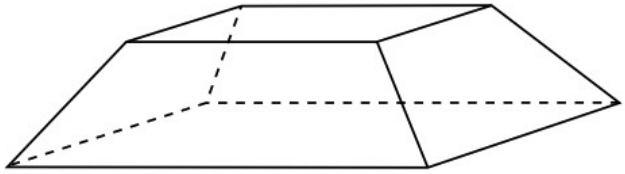


Figura 2

Qual é o sólido representado pelo modelo geométrico do tachão?

a) Paralelepípedo reto.

b) Paralelepípedo oblíquo.

c) Pirâmide quadrangular.

d) Tronco de pirâmide hexagonal.

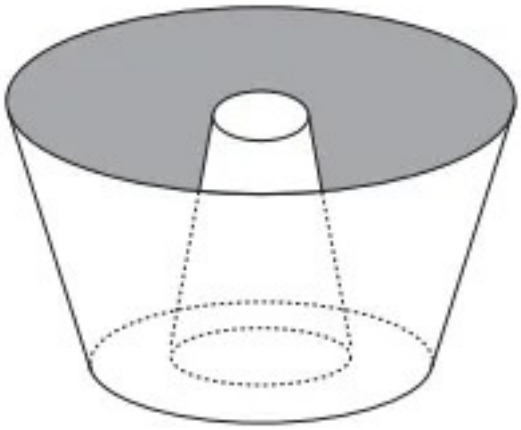
e) Tronco de pirâmide quadrangular.

Comentários sobre a questão: Nessa atividade é esperado que os alunos reconheçam a figura geométrica com base na sua aparência global. O exercício apresenta um exemplo de objeto do cotidiano e pede para que os alunos relacionem o objeto ao seu modelo geométrico. Não é necessário identificar partes ou propriedades do sólido, sendo o foco apenas o uso correto do vocabulário geométrico.

Sugestão de encaminhamentos: A ideia é incentivar os alunos a buscar e identificar formas geométricas no ambiente escolar, promovendo a observação e a contextualização dos conceitos geométricos no cotidiano. Como o conteúdo é previsto para alunos do Ensino Médio, será introduzido os sólidos geométricos de forma breve, seguida de uma exploração pelo espaço da escola. A exploração acontece em áreas distintas da escola e fazer identificações dos modelos

geométricos, nomeando-os. Os objetos podem ir desde lápis ao formato do prédio da escola. A imaginação é o limite.

Atividade 2 – (Enem 2013) Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são

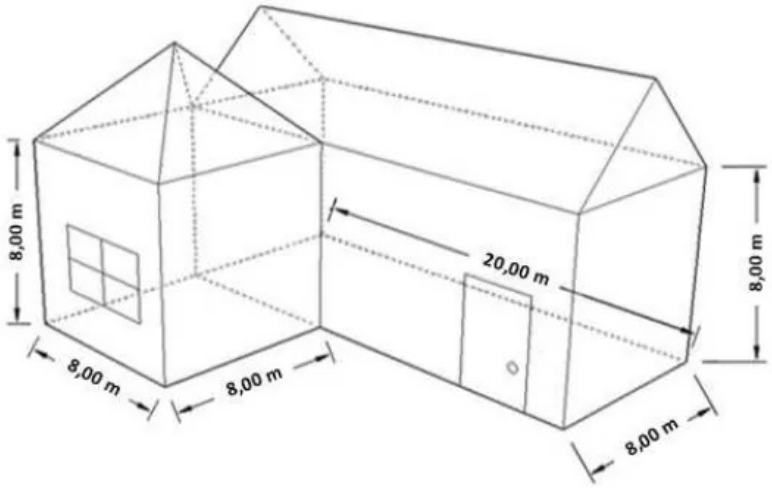
a) um tronco de cone e um cilindro.
b) um cone e um cilindro.
c) um tronco de pirâmide e um cilindro.
d) dois troncos de cone.
e) dois cilindros.

Comentários sobre a questão: Nessa questão o aluno precisa compreender a ideia de decompor a imagem, separando a representação em duas partes: parte externa e parte interna da forma de bolos apresentada no exercício. Após essa decomposição, o aluno deve relacionar essas partes da representação aos seus respectivos modelos geométricos, utilizando apenas o vocabulário geométrico adequado.

Sugestão de encaminhamentos: Uma possibilidade é trazer o debate de sólidos geométricos que podem ser decompostos. A ideia é promover uma chuva de ideia com os alunos, perguntando em quais objetos do cotidiano é possível decompor em sólidos geométricos. Após o levantamento, orientar os alunos a representar de forma

gráfica (desenhos) o objeto como um todo e uma segunda parte o objeto com suas decomposições, nomeando-as com base no seu modelo geométrico.

Atividade 3 – (Uncisal 2016) Na figura, desconsidere a porta e a janela da casa.



Quais são as figuras geométricas espaciais que formam a casa?

a) Um cubo, um paralelepípedo, uma pirâmide e um prisma.
b) Um cubo, um paralelepípedo e duas pirâmides.
c) Um quadrado, um retângulo e dois triângulos.
d) Dois quadrados e dois triângulos.
e) Dois cubos e duas pirâmides.

Comentários sobre a questão: Assim como a questão anterior, nesta questão os estudantes precisam realizar a decomposição da casa, identificando e separando as partes que a compõem em figuras geométricas básicas. É interessante observar que, além do vocabulário geométrico adequado, o aluno precisa compreender a diferença da geometria plana para a espacial. Isso se torna relevante pois, entre as alternativas de respostas, temos figuras planas como “quadrado” e “triângulo”, e sólidos geométricos. O enunciado ao perguntar “Quais são as FIGURAS GEOMÉTRICAS”, exige que o aluno reconheça a diferença entre essas categorias. Além disso, nesta questão o aluno começa a identificar propriedades e características que diferenciam as figuras geométricas, marcando uma transição

entre os níveis 1 e o nível 2 da teoria de van Hiele. Essa transição fica evidente na capacidade do aluno de conseguir identificar diferenças entre sólidos geométricos, como cubo e paralelepípedo, mas sem precisar utilizar muitas propriedades e relações matemáticas, mas focando em identificar suas diferenças principais de forma visual.

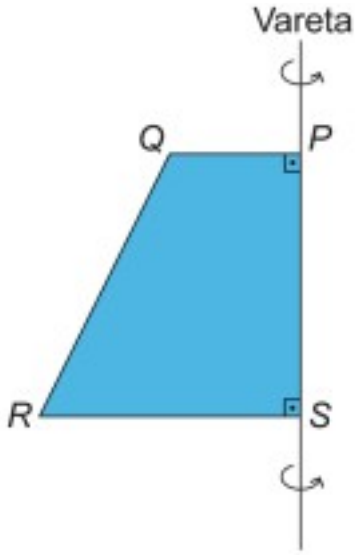
Sugestão de encaminhamentos: A partir de materiais manipuláveis como sólidos geométricos de diferentes formatos, conduza uma atividade interativa com os alunos, a fim de explorar as propriedades e características visuais desses sólidos. Em um primeiro momento, disponibilizar os materiais manipuláveis para que os alunos manuseiem e observem suas características. Depois, levantar questões que incentivem os alunos às reflexões sobre as propriedades desses sólidos e possíveis características visuais, tais como: “O que diferencia um triângulo de uma pirâmide? Uma figura é composta pela outra?”, “O que diferencia um cubo de um paralelepípedo?” “Visualmente falando, como identificar um prisma?”, “Como podemos identificar de forma visual a diferença entre um prisma e um cilindro?”. A partir das respostas, oriente os alunos a estabelecer definições para os sólidos manipuláveis, como “A área lateral de um prisma é composta por retângulos”.

Nível 2: Análise

Nesse nível é importante sugerir aos alunos atividades que envolvem analisar as figuras em base em seus componentes, reconhecer suas propriedades e aplicá-las na resolução de situações problemas.

Atividade 4 – (Enem 2024) Para obter um sólido de revolução (rotação de 360° em torno de um eixo fixo), uma professora realizou as seguintes etapas:
• recortou o trapézio retângulo PQRS de um material rígido;
• afixou o lado PS do trapézio em uma vareta fixa retilínea (eixo de rotação);
• girou o trapézio 360° em torno da vareta e obteve um sólido de revolução.

Observe a figura que apresenta o trapézio afixado na vareta e o sentido de giro.



O sólido obtido foi um(a)

a) cone.
b) cilindro.
c) pirâmide.
d) tronco de cone.
e) tronco de pirâmide.

Comentários sobre a questão: Nessa atividade os alunos começam a reconhecer as propriedades das figuras geométricas com base em suas características, como a forma e a estrutura. Exige que o aluno compreenda a transformação geométrica (rotação do trapézio) e seja capaz de reconhecer do sólido gerado, fazendo conexão com os sólidos de revolução. Para resolver o exercício, o aluno precisa ter um conhecimento sobre propriedades e características do sólido, mas a questão não exige um entendimento formal e rigoroso das propriedades e relações.

Sugestão de encaminhamentos: Disponibilize materiais rígidos como papelão, EVA, papel cartão para que, em grupo, os alunos confeccionem figuras planas diversas, incluindo retângulo, triângulos, trapézio e semicircunferências. Com varetas, peça aos alunos que fixem cada figura à vareta, que representará o eixo de rotação e peça para eles girarem. Com isso, o grupo deverá associar cada figura plana com um sólido geométrico e responder perguntas como “Todas as figuras planas produziram sólidos geométricos conhecidos?”, “Qual é o tipo de sólido geométrico

gerado?”, “Qual característica as figuras planas precisam ter para que produza um sólido geométrico mais usual?”, "Quais características da figura inicial determinam o formato do sólido gerado?", "O que diferencia um cone de um tronco de cone? E um cilindro?", "Se mudarmos o eixo de rotação, o sólido gerado também muda?", “Os elementos da figura plana estão relacionados com quais elementos de casa sólido gerado?”

Atividade 5 – (UFPR 2019) Diana pretende distribuir 6 litros de geleia em 25 potes iguais. Cada pote possui internamente o formato de um paralelepípedo de base quadrada com 5 cm de lado. Dividindo igualmente a geleia em todos os potes, qual é a altura interna que a geleia atingirá em cada recipiente?

a) 6,0 cm.
b) 7,5 cm.
c) 9,6 cm.
d) 15,0 cm.
e) 24,0 cm.

Comentários sobre a questão: A questão exige que o aluno compreenda o conceito de volume e como calcular o volume do paralelepípedo, uma propriedade geométrica importante dessa figura. Para isso, ele deverá entender que, primeiramente, é necessário dividir igualmente a geleia entre os 25 potes, e que o volume equivalente para cada pote é o volume que ele deve calcular, considerando que sua base do pote é quadrada. Para que consiga resolver a questão, o aluno precisa manipular as propriedades geométricas, nesse caso o cálculo do volume, mas sem exigir um raciocínio muito complexo. Em contrapartida, a questão mostra que o aluno reconhece e aplica as propriedades geométricas de forma prática e direta.

Sugestão de encaminhamentos: Transforme essa atividade em uma atividade concreta. Use recipientes reais (como caixas pequenas ou copos descartáveis) que representem os potes descritos na questão. Preencha um recipiente maior com 6 litros de água colorida (para simular a geleia). Divida a água igualmente entre recipientes usando copos medidores (pode ser 25 recipientes ou menos – o importante é que os alunos entendam o procedimento). Peça que os alunos

observem o nível atingido e discutam como calcular a altura. Relacione a observação prática ao cálculo teórico, explicando como o volume total é dividido e como a altura é determinada com base na área da base do paralelepípedo.

Atividade 6 – (ENEM 2020) No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de Natal, conforme as figuras 1 e 2.

Figura 1

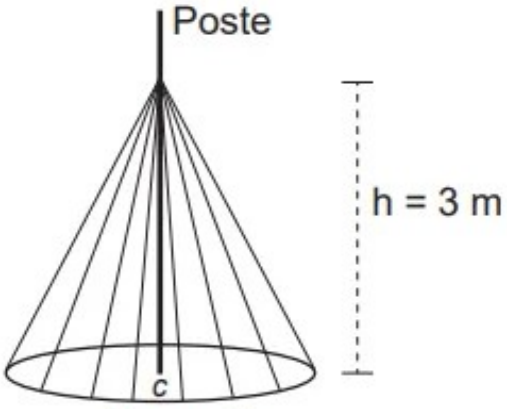


Figura 2

A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a 3 m de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação, no chão, de tal forma que esta fique dividida em 20 arcos iguais. O poste está fixado no ponto C (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão.

Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram pouco mais de 100 m de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente 100 m e deixar o restante como reserva.

Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser de

a) 4,00.
b) 4,87.
c) 5,00.
d) 5,83.
e) 6,26.

Comentários sobre a questão: Para resolver essa questão, o aluno precisa inicialmente determinar a medida de cada mangueira. Um aspecto importante é que

o aluno deve reconhecer que, ao fazer uma secção meridional, formamos um triângulo retângulo entre o poste, a mangueira e o raio do cone, o que possibilita o cálculo do raio pelo Teorema de Pitágoras. Para isso o aluno precisa ter domínio das características e propriedades do cone e utilizá-las na resolução do problema de maneira eficaz. Essa questão marca a transição entre o nível 2 e o nível 3 da teoria de van Hiele, uma vez que envolve as propriedades geométricas e a compreensão de relações mais complexas, inicialmente a abstração entre as relações de diferentes componentes geométricos.

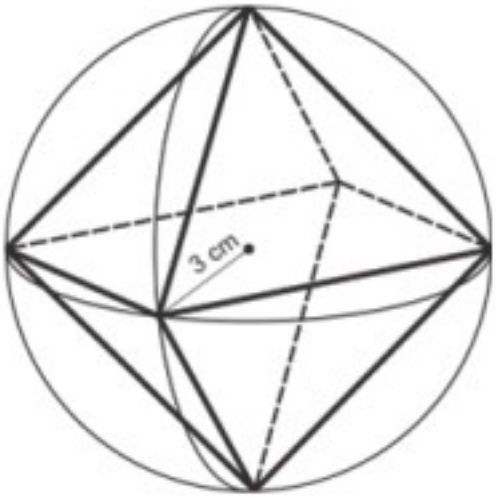
Sugestão de encaminhamentos: Faça a simulação de um exemplo parecido. Peça para que os alunos, em grupo, construam um cone com altura fixa de 15 cm e desenhem sua base em uma folha de sulfite. Com a ajuda de um transferidor, eles devem dividir a base em 10 partes iguais e marcar essas divisões na borda do cone. Usando barbante, eles devem conectar o vértice do cone a cada uma dessas 10 marcações e medir o comprimento do barbante. A ideia é que, ao relacionar essa atividade com a atividade dos sólidos de revolução, os alunos reconheçam que, com a altura fixa e o comprimento do barbante, é possível identificar um triângulo retângulo e, a partir disso, calcular o raio da base do cone.

Nível 3: Abstração

Nesse nível é importante sugerir aos alunos atividades que envolvem analisar as figuras de uma forma mais abstrata, reconhecendo e utilizando propriedades de maneira dedutiva. Eles são capazes de estabelecer relações entre as propriedades, sem depender tanto da representação visual. As atividades incentivam os alunos a realizar generalizações e raciocínios lógicos sobre as propriedades e as relações geométricas.

Atividade 7 – (Unioeste 2023) Uma gema preciosa foi submetida a uma lapidação precisa, assumindo a forma de um octaedro regular, e posteriormente inserida com precisão em uma esfera de vidro de raio igual a 3 centímetros. O valor atribuído a esta peça é calculado com base no volume da gema preciosa, excluindo completamente o volume ocupado pela esfera circundante. Supondo que o octaedro

da gema preciosa esteja devidamente inscrito na esfera, conforme ilustrado na figura, qual é o volume do octaedro em questão?



a) $\frac{2}{3}\sqrt{2}\,cm^3$

b) $3\sqrt{2}\,cm^3$

c) $16\,cm^3$

d) $32\,cm^3$

e) $36\,cm^3$

Comentários sobre a questão: Nessa questão, o aluno deve ser capaz de relacionar as características e propriedades do octaedro com as características e propriedades da esfera. Neste caso, é fundamental que o aluno compreenda o octaedro como a junção de duas pirâmides de base quadrada. A partir disso, o aluno deve relacionar que o diâmetro da esfera corresponde à diagonal do quadrado da base da pirâmide, e então é possível determinar a aresta da base e, consequentemente, área da base, elemento importante para o cálculo do volume da pirâmide. Além disso, o aluno deve perceber que a altura da pirâmide equivale com o raio da esfera, já que o raio vai do centro da esfera até qualquer extremidade, que nesse caso corresponde ao vértice que determina a altura. Com esses elementos, é possível calcular o volume da pirâmide de base quadrada e, consequentemente, o volume do octaedro. Essa questão, embora contenha uma ilustração, exige que o aluno seja capaz de estabelecer diversas relações entre os sólidos geométricos chegar à resposta correta.

Sugestão de encaminhamentos: Utilizando o GeoGebra para modelagem 3D, os alunos podem construir digitalmente um octaedro a partir de suas propriedades, como pirâmides de base quadrada, e depois circunscrever a esfera. É um momento importante também para refletir sobre as diferenças de um sólido inscrito e circunscrito. No GeoGebra, os estudantes podem explorar a relação entre a esfera e o octaedro, visualizando como o sólido se encaixa perfeitamente dentro da esfera e observando as dimensões envolvidas. Os alunos poderiam, então, simular a movimentação da esfera, visualizando as diferentes diagonais e a relação entre o raio e a altura da pirâmide que compõe o octaedro. Isso permitiria que eles aplicassem as propriedades geométricas para calcular o volume do octaedro e calcular esse volume digitalmente.

Atividade 8 – (Unioeste 2019) Coloca-se uma esfera de raio r no interior de um recipiente com formato de um cilindro circular reto com raio da base R. Em seguida, preenche-se o recipiente com água até que a esfera fique exatamente coberta por água, ou seja, a esfera tangencia a superfície da água. Retira-se, então, a esfera e é observado que o nível da água é reduzido em $\frac{1}{4}$. O valor da razão $\frac{r}{R}$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$.

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) $\frac{3}{4}$.

Comentários sobre a questão: Nessa questão, o aluno precisa entender como o volume da esfera interage com o volume do cilindro e como a redução do nível da água está associada a essa diferença de volumes. Ou seja, o volume reduzido corresponde ao volume da esfera que foi retirada. Assim, o volume da esfera corresponde a $\frac{1}{4}$ do volume do cilindro. O aluno não precisa necessariamente

reconhecer as figuras, mas sim utilizar suas propriedades, neste caso o cálculo de volume, e relacioná-las. Para determinar a razão $\frac{r}{R}$, é necessário manipular equações e abstrair das relações entre os volumes.

Sugestão de encaminhamentos: Para recriar uma atividade similar, os alunos podem utilizar um objeto cilíndrico, como uma lata, com marcações para medir o nível da água. Em seguida, devem inserir um (ou mais) objetos esféricos idênticos no cilindro, medindo o nível da água com e sem os objetos. A diferença entre os dois níveis de água representa o volume deslocado pelos objetos, ou seja, o volume da(s) esfera(s). A primeira parte da atividade consiste em calcular o volume de cada esfera e determinar seu raio a partir da diferença de níveis. Na segunda parte, os alunos devem calcular a razão entre o volume da esfera e o volume restante no cilindro, utilizando as fórmulas dos volumes do cilindro e da esfera. Perceba que será necessário obter a altura do cilindro, que corresponde ao a nível de água no cilindro. Na terceira parte, os alunos devem calcular a razão entre o raio da esfera e o raio do cilindro, a partir da razão obtida no exercício anterior. Por fim, é possível medir o raio do cilindro e comparar os valores da primeira parte (raio da esfera) com a razão, a fim de verificar a consistência dos resultados.

Atividade 9 – (ENEM 2022) Uma loja comercializa cinco modelos de caixas-d'água (I, II, III, IV e V), todos em formato de cilindro reto de base circular. Os modelos II, III, IV e V têm as especificações de suas dimensões dadas em relação às dimensões do modelo I, cuja profundidade é P e área da base é Ab, como segue:

- modelo II: o dobro da profundidade e a metade da área da base do modelo I;
- modelo III: o dobro da profundidade e a metade do raio da base do modelo I;
- modelo IV: a metade da profundidade e o dobro da área da base do modelo I;
- modelo V: a metade da profundidade e o dobro do raio da base do modelo I.

Uma pessoa pretende comprar nessa loja o modelo de caixa-d'água que ofereça a maior capacidade volumétrica.

O modelo escolhido deve ser o

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

Comentários sobre a questão: Nessa questão o aluno precisa de uma compreensão mais aprofundada sobre as relações entre os componentes geométricos e de que forma essas relações influenciam o volume do sólido. É fundamental que o aluno perceba que o a profundidade e a área da base estão diretamente relacionadas de forma proporcional com o volume, ou seja, o volume do cilindro aumenta com o aumento da profundidade e da área da base, enquanto o raio afeta a área da base de forma proporcional ao quadrado do raio, o que, por sua vez, influencia o volume de forma quadrática. Essa questão exige abstração das propriedades geométricas e a capacidade de aplicar conceitos geométricos para entender como essas propriedades se relacionam.

Sugestão de encaminhamentos: Para ajudar os alunos a entender as relações geométricas e como elas afetam o volume do cilindro, no GeoGebra os alunos irão criar um cilindro padrão de altura 2 e raio 1. A partir desse modelo, os alunos poderão manipular as variáveis da profundidade e do raio da base. Com as ferramentas de cálculo de área e volume do GeoGebra, à medida que ajustam essas variáveis, os alunos poderão observar como as mudanças nas dimensões afetam a área da base e o volume de cada caixa. Isso permitirá aos alunos comparar facilmente os volumes dos diferentes modelos e tomar a decisão informada sobre qual modelo oferece a maior capacidade volumétrica.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dessa dissertação e do produto educacional elaborado, pode-se considerar que o ensino e o aprendizado da disciplina de Geometria Espacial é um desafio até mesmo histórico. A disciplina vem enfrentando uma importante contradição: ela é abandonada no ensino fundamental/médio, sendo deixada de lado nos currículos e na distribuição de aulas ao longo do ano; ao mesmo tempo que tem um espaço destacado no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e em vestibulares. Portanto, ao mesmo tempo que a disciplina tem saído de cena no ensino público, ela é demandada nas avaliações de larga escala brasileiras.

Sabendo dessas dificuldades relacionadas ao ensino de Geometria Espacial no Brasil e da centralidade do ENEM e vestibulares um dos objetivos desta pesquisa foi compreender como se dá o aprendizado de Geometria Espacial através de exercícios dessas avaliações. Como forma de compreender como estudantes do ensino médio mobilizam o pensamento geométrico para resolver essas questões e ao mesmo tempo para entender como os exercícios do ENEM e vestibulares mobilizam conceitos e ideias de Geometria Espacial para avaliar os estudantes, busca-se a teoria dos níveis de pensamento geométrico de van Hiele para interpretar esses exercícios e a resolução dos estudantes. Assim, a divisão em níveis de pensamento geométrico elaboradas pelos van Hiele foi crucial para separar e compreender as estruturas das questões, seus objetivos e o que elas demandavam dos estudantes. Já a teoria de van Hiele também foi essencial para justamente compreender os passos, os argumentos e a própria resolução das questões por parte dos estudantes.

Nesse sentido, com os estudantes selecionados – alunos da terceira série do Ensino Médio – podemos afirmar que os estudantes, em relação a Geometria Espacial, estão em sua maioria na transição do nível 2 para o nível 3 ou propriamente no nível 2, compreendendo que o nível 1 é de “reconhecimento”, o nível 2 é de “análise” e o nível 3 de “abstração” são níveis de pensamento geométrico que devem ser desenvolvidos até o final do Ensino Médio, tendo começado já no Ensino Fundamental (pelo menos o nível 1). Portanto, a pesquisa mostrou que, apesar dos estudantes estarem no Ensino Médio, eles ainda não tinham atingido o nível 3 de “abstração”, onde é demandado dos estudantes um conhecimento relacional entre as propriedades geométricas, sendo capaz de realizar

uma argumentação lógica do conteúdo. Assim, os estudantes apenas conseguiam identificar as figuras geométricas (nível 1) e descrever suas propriedades (nível 2), mas nem sempre conseguindo aplicar tais propriedades na resolução de situações-problema.

Além disso, observamos que as questões de nível 3 dos vestibulares e do ENEM também tiveram taxas de erro altas. Nesse sentido, contrariando o senso comum e a ideia ingênua de que os exercícios do ENEM de matemática são mais “fáceis” do que questões de vestibulares, o foco do problema não é a questão em si, mas sim o nível de aprendizado do pensamento geométrico em questão. Em suma, os estudantes avaliados não conseguiram desenvolver com exatidão os aprendizados geométricos relacionados a transição do nível 2 para o nível 3 nem o nível 3 propriamente dito, independente da fonte da questão (vestibulares e ENEM).

Observando isso, percebe-se que é importante que os estudantes atinjam e desenvolvam seus conhecimentos matemáticos esperados no Ensino Médio, tanto para a sua vida prática e até mesmo o acesso ao Ensino Superior. Entendendo que a dificuldade de aprendizado de Geometria Espacial também está relacionada ao próprio ensino da disciplina, buscou-se construir um produtor educacional que auxilie professores de matemática a abordar essa temática. Para isso, foi construído uma sequência didática que sirva como formação docente complementar e que possa ser utilizada por professores de matemática, colocando os exercícios do ENEM e vestibulares como eixo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial. Assim, foi possível abordar as avaliações em larga escala no Ensino Básico, contribuindo para o acesso de estudantes ao Ensino Superior. Para isso, elaborou-se nove atividades que os professores podem utilizar em suas práticas cotidianas. São atividades flexíveis e que dependem das questões para serem realizadas. É recomendado aos professores que utilizarem a atividade, além de compreender a teoria dos níveis de pensamento geométrico de van Hiele, atualizar as questões sempre que possível. Já para o estudo da teoria de van Hiele, foi adicionada uma breve explicação resumida dos principais níveis de pensamento geométrico advindos da dissertação.

Outro ponto importante da pesquisa foi o reconhecimento de outras pesquisas que relacionam o ensino de Geometria Espacial com a teoria de van Hiele, principalmente utilizando outras metodologias, como o uso de material concreto, levar a experiência dos estudantes em consideração no momento de ensinar Geometria Espacial e até mesmo o uso do software GeoGebra. Parte

dessas considerações foram incorporadas dentro da sequência didática como sugestões de encaminhamentos para as atividades. Elas não substituem os exercícios propostos e nem são uma possível resolução, mas podem auxiliar o professor no momento de pós ou pré aplicação das atividades propostas.

Por fim, a pesquisa revelou o quão fundamental é pensar as dificuldades no ensino e aprendizagem de Geometria Espacial no Brasil. Além disso, uma possibilidade de solucionar esses desafios está justamente em incorporar a teoria dos níveis de pensamento geométrico de van Hiele na prática de pesquisa e docente. Outro fator é levar em consideração as constantes demandas relacionadas a exames como o ENEM e vestibulares, principalmente no ensino de Geometria Espacial. Para propor uma possível solução, a incorporação desses elementos, juntos, podem contribuir para o avanço do ensino e aprendizado da Geometria Espacial no Brasil.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, Márcia Angela da Silva. Relato da resistência à instituição da BNCC pelo Conselho Nacional de Educação mediante pedido de vista e declarações de votos. In: AGUIAR, M. A. S.; DOURADO, L. F. (org.). **A BNCC na contramão do PNE 2014-2024**: avaliação e perspectivas. Recife: ANPAE, 2018. p. 8-22.

AZEVEDO, Livia Dias. Do vestibular ao ENEM: trajetórias, permanências e transformações (1750-2018). **EDUCA - Revista Multidisciplinar em Educação**, *[S. l.]*, v. 7, n. 17, p. 505–531, 2020. DOI: 10.26568/2359-2087.2020.4483. Disponível em: https://periodicos.unir.br/index.php/EDUCA/article/view/4483. Acesso em: 5 nov. 2024.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2002.

BARROS, Aparecida da Silva Xavier. Vestibular e Enem: um debate contemporâneo. **Ensaio**: aval. pol. públ. Educ, Rio de Janeiro, v. 22, n. 85, p. 1057-7090, out./dez. 2014.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ensino Médio. Brasília: MEC. Versão entregue ao CNE em 03 de abril de 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc-etapa-ensino-medio. Acesso em: 30 out. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCNs+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, DF, 2002.

CRESWEL, J. W. **Projeto de pesquisa**: método qualitativo, quantitativo e misto. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

DENZIN, N. K. e LINCOLN, Y. S. Introdução: a disciplina e a prática da pesquisa qualitativa. In: DENZIN, N. K. e LINCOLN, Y. S. (Orgs.). **O planejamento da pesquisa qualitativa**: teorias e abordagens. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 15-41.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar:** Geometria espacial. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

FERNANDES, Lacordério Tavares. **Aprendizagem significativa**: uma proposta de enisno e aprendizagem da geometria euclidiana espacial no ensino médio. 2015. 155 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

GOMES, Raimundo Wagner Gonçalves de Medeiros. Conhecendo a Matriz de Referência do ENEM: os eixos cognitivos. **Revista Docentes**, [S.I.], v. 3, n. 6, p. 11-18, 2018.

HECK, Miriam Ferrazza. Ensino e Aprendizagem de Geometria na Educação Básica: análise dos artigos publicados nos anais do v, vi e vii sipem. **Ensino da matemática em Debate**, [S.L.], v. 7, n. 3, p. 123-143, 29 dez. 2020. Pontifical Catholic University of Sao Paulo (PUC-SP). http://dx.doi.org/10.23925/2358-4122.2020v7i3p123-143.

LANHOSO, Lionel Batista. **Análise dos níveis do pensamento geométrico dos estudantes ingressantes em um curso de licenciatura em matemática n perspectiva de Van Hiele**. 2020. 158 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Estadual de Ponta Grossa., Ponta Grossa, 2020.

MATOS, Daiane de Almeida Brazeiro de. **Os níveis do pensamento geométrico de Van Hiele em questões de geometria espacial do exame nacional do ensino médio**: uma análise de protocolos de acadêmicos ingressantes na educação superior. 2019. 52 f. TCC (Graduação) - Curso de Curso de Matemática - Licenciatura, Universidade Federal do Pampa, Itaqui, 2019.

MEIRELES, Sílvia Mourão; SCHIMIGUEL, Juliano; GOZZI, Marcelo Pupim. Metodologias ativas na educação matemática: contribuições do geogebra e pbl na aprendizagem de geometria espacial. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, [S.l.], v. 11, n. 4, p. 290-311, 2021.

MENEGAIS, Denice Aparecida Fontana Nisxota *et al*. A utilização das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de geometria espacial: a percepção dos estudantes do 3 ano do ensino médio. **Cadernos do Aplicação**, [S.L.], v. 35, p. 1-13, 16 set. 2022. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. http://dx.doi.org/10.22456/2595-4377.120825.

MINHOTO, Maria Angélica Pedra. Política de avaliação da educação brasileira: limites e perspectivas. **Jornal de Políticas Educacionais**, [S.l], v. 10, n. 19, p. 77-90, jan./jun. 2016.

MORAN, M.; POLIZELI, R.; RHEA, V. C.; CASSOLI, C.B. de A. O ensino da geometria: entrevista com a professora Regina Maria Pavanello. **Educação Matemática em Revista**, v. 28, n. 79, p. 1-11, 7 jun. 2023.

OLIVEIRA, Sandra Alves de *et al*. Contributos da abordagem da etnomatemática no processo de ensino e aprendizagem da geometria na educação de jovens e adultos no ensino médio. **Educação matemática em pesquisa**: Perspectivas e Tendências - Volume 2, [S.L.], p. 208-224, 2021. Editora Científica Digital. http://dx.doi.org/10.37885/201202610.

OLIVEIRA, W. F. S. de; CRISTOVÃO, E. M. Geometria espacial nas questões do Enem: uma análise a partir dos níveis de van Hiele. **Educação matemática em revista**, v. 27, n. 74, p. 104-116, 16 maio 2022.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. **Referencial Curricular do Paraná:** *Ensino Médio*. Curitiba: SEED, 2021

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causa e consequências. **Zetetike**, [S.l.], v. 1, n. 1, p. 7-17, dez. 2009.

PONTES, Valderlândio de Araújo. **Materiais concretos**: uma estratégia para o ensino aprendizagem de geometria plana e espacial no ensino médio. 2018. 95 f.

Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós- Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual do Maranhão, São Luis, 2018.

ROGÉRIO, Paola de Castro; MACÁRIO, Tábata Bianca dos Santos; OLIVEIRA, Sheila Fernandes Pimenta e. Identidade do ensino médio – Para o desatar do nó: formação ou instrução para o vestibular?. **Revista Eletrônica de Letras (Online)**, [S.I.], v. 1, n. 9, p. 1-41, jan./dez. 2016.

SANTOS, Ana Clara Almeida dos; ARAÚJO, Maria de Lourdes Haywanon Santos. A geometria no ENEM: reflexões sobre avaliação educacional e o ensino de matemática em uma perspectiva crítica. **Perspectivas da Educação Matemática**, [S.L.], v. 15, n. 40, p. 1-20, 9 dez. 2022. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. http://dx.doi.org/10.46312/pem.v15i40.16158.

SILVA, Marina Andrade Alves da; BRAZ, Lúcia Helena Costa. Geometria espacial no ensino médio: investigação sobre as dificuldades no ensino-aprendizagem. In: VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 7., 2017, Canoas. **Anais [...] .** Canoas: Editora Ulbra, 2017. p. 1-12.

APÊNDICE A – Simulado Aplicado para os Alunos

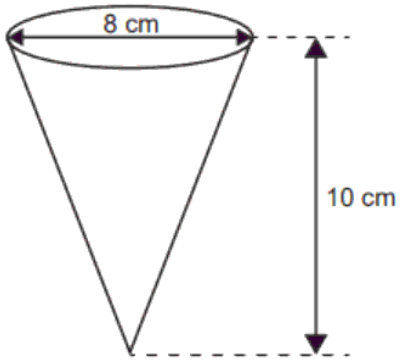
Aluno:_____ .

Este simulado é parte de meu trabalho de dissertação de mestrado junto ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UTFPR campus Toledo.

Orientações gerais:

- *Todas as respostas devem ser acompanhadas de justificativa e desenvolvimento.*
- *Questões com somente alternativas assinaladas serão desconsideradas.*
- *As justificativas, desenvolvimento e/ou rascunho devem ser feitos no espaço deixado para cada questão.*
- *A duração do simulado será de 60 minutos.*
- *Será permitido somente o uso somente de lápis, caneta, borracha e régua.*

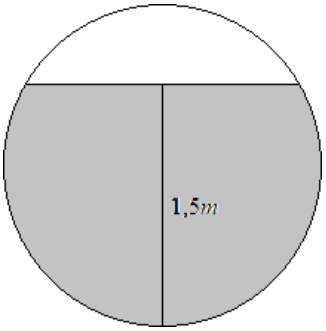
1- Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.



Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm. Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

a) 1,52.
b) 3,24
c) 3,60.
d) 6,48.
e) 7,20.

2- Um tanque de óleo possui formato de cilindro circular reto e está posicionado deitado em relação ao solo, isto é, os planos que contém as faces circulares é perpendicular ao plano do solo. O tanque contém óleo de forma que a qualquer secção do cilindro, para- lela às faces circulares, mostra a altura do óleo em relação ao solo, de 1,5m, conforme a figura abaixo.



O comprimento do tanque é de h metros e o raio das faces circulares é de 1 metro. Des- prezando a espessura do material com o qual o tanque é fabricado, qual o volume do óleo contido no tanque?

a) h/12 $(8\pi + 3)$

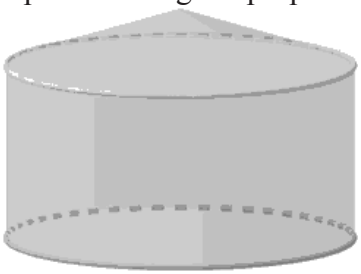
b) h/12$(4\pi + \sqrt{3}\ )$

c) h/4 $(8\pi + 3\sqrt{3})$

d) h/12 $(8\pi + 3\sqrt{3})$

e) h/12 $(4\pi + 3\sqrt{3})$

3- (Unioeste 2023) Um reservatório de água de determinada propriedade rural tem o formato da figura a seguir e está totalmente cheio. A parte inferior da figura é um cilindro circular reto de altura 10 metros e de diâmetro 20 metros. A parte superior do reservatório é um cone de altura 3 metros. A água desse reservatório é transferida para 10 pequenas caixas d'água com capacidade de 1000 litros cada uma e é usada para irrigação na propriedade.
Cinco dessas caixas são abastecidas totalmente duas vezes ao dia e as outras cinco caixas são totalmente abastecidas somente uma vez ao dia. Se D é o número de dias completos nos quais é possível irrigar a propriedade com a água do reservatório, então é CORRETO afirmar que



a) D = 23
b) D = 30
c) D = 73
d) D = 230
e) D = 1100

4- O volume de uma pirâmide cuja base é um triângulo equilátero de lado 6 e cujas arestas laterais tem medida $\sqrt{15}$ vale:

a) 9

b) 9/2

c) 27/2

d) $9\sqrt{3}/2$

e) nenhuma das alternativas acima.

5- (ITA) Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja 1/8 do volume da pirâmide original?

a) 2 m.

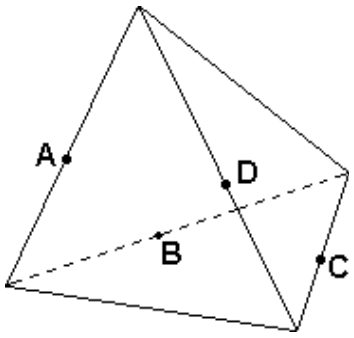
b) 4 m.

c) 5 m.

d) 6 m.

e) 8 m.

6- (Mackenzie)Na figura abaixo, os vértices do quadrilátero ABCD são pontos médios de quatro das seis arestas do tetraedro regular.



Se a aresta desse tetraedro mede 10, então a área do quadrilátero ABCD é

a) 25.

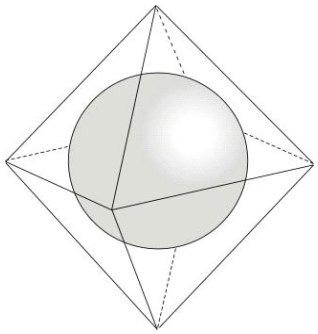
b) $25\sqrt{3}$.

c) 75.

d) $50\sqrt{3}$.

e) 100

7- (UEL) Um joalheiro resolveu presentear uma amiga com uma jóia exclusiva. Para isto, imaginou um pingente, com o formato de um octaedro regular, contendo uma pérola inscrita, com o formato de uma esfera de raio r, conforme representado na figura a seguir.



Se a aresta do octaedro regular tem 2 cm de comprimento, o volume da pérola, em cm3, é:

a) $2\pi/3$

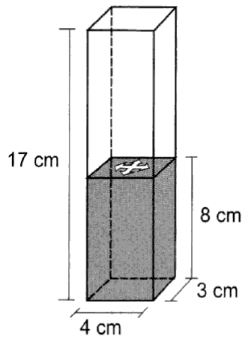
b) $8\pi/3$

c) $8\sqrt{2}\pi/9$

d) $4\sqrt{6}\pi/9$

e) $8\sqrt{6}\pi/27$

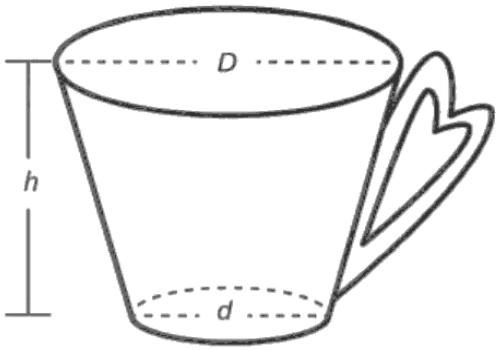
8- Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água. Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a 6 cm3 cada, que ficarão totalmente submersas.



O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de

A) 14.
B) 16.
C) 18.
D) 30.
E) 34.

9- (ENEM 2021) Uma pessoa comprou uma caneca para tomar sopa, conforme ilustração.



Sabe-se que 1cm3 = 1 mL e que o topo da caneca é uma circunferência de diâmetro (D) medindo 10 cm, e a base é um círculo de diâmetro (d) medindo 8 cm. Além disso, sabe-se que a altura (h) dessa caneca mede 12 cm (distância entre o centro das circunferências do topo e da base). Utilize 3 como aproximação para π.

Qual é a capacidade volumétrica, em mililitro, dessa caneca?

A) 216
B) 408
C) 732
D) 2 196
E) 2 928

10-(ENEM 2022) Uma loja comercializa cinco modelos de caixas-d'água (I, II, III, IV e V), todos em formato de cilindro reto de base circular. Os modelos II, III, IV e V têm as especificações de suas dimensões dadas em relação às dimensões do modelo I, cuja profundidade é P e área da base é Ab, como segue:

- modelo II: o dobro da profundidade e a metade da área da base do modelo I;
- modelo III: o dobro da profundidade e a metade do raio da base do modelo I;
- modelo IV: a metade da profundidade e o dobro da área da base do modelo I;
- modelo V: a metade da profundidade e o dobro do raio da base do modelo I.

Uma pessoa pretende comprar nessa loja o modelo de caixa-d'água que ofereça a maior capacidade volumétrica.

O modelo escolhido deve ser o

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.