

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PRODUTO EDUCACIONAL

**A GEOMETRIA ESPACIAL EM QUESTÕES DO ENEM E VESTIBULAR:
SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DOS VAN HIELE**

Wellington Carlos Vieira da Silva

Rodrigo Manoel Dias Andrade

Vanessa Largo Andrade

TOLEDO

2024

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Wellington Carlos Vieira da Silva

Rodrigo Manoel Dias Andrade

Vanessa Largo Andrade

**A GEOMETRIA ESPACIAL EM QUESTÕES DO ENEM E VESTIBULAR:
SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DOS VAN HIELE**

TOLEDO

2024

WELLINGTON CARLOS VIEIRA DA SILVA

**A GEOMETRIA ESPACIAL EM QUESTÕES DO ENEM E VESTIBULAR:
SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DOS VAN HIELE**

**Spacial Geometry in ENEM and College Entrance Exam Questions: Analyses
Acoording to van Hiele's Theory**

Dissertação apresentada como requisito para
obtenção do título de Mestre em Matemática/Profm
da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Orientador:Rodrigo Manoel Dias Andrade
Coorientadora:.Vanessa Largo Andrade

**TOLEDO
2024**



**Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Toledo**



WELLINGTON CARLOS VIEIRA DA SILVA

**A GEOMETRIA ESPACIAL EM QUESTÕES DO ENEM E VESTIBULAR: ALGUMAS ANÁLISES SEGUNDO A
TEORIA DOS VAN HIELE**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como
requisito para obtenção do título de Mestre Em Matemática
da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 20 de Dezembro de 2024

Rodrigo Manoel Dias Andrade, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Leandro Antunes, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Plinio Lucas Dias Andrade, Doutorado - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 20/12/2024.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO.....	13
1	GEOMETRIA ESPACIAL E A TEORIA DOS VAN HIELE.....	15
2	SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	19
2.1	Nível 1: Reconhecimento	20
2.2	Nível 2: Análise.....	23
2.3	Nível 3: Abstração.....	27
3	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	32
	REFERÊNCIAS	34

INTRODUÇÃO

Este material, apresentado como produto educacional, é parte integrante da pesquisa de Dissertação de Mestrado intitulada “A Geometria Espacial em questões de ENEM e vestibular: algumas análises segundo a teoria dos van Hiele” tem como público alvo professores de matemática e foi desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Toledo, sob orientação do Professor Dr. Rodrigo Manoel Dias Andrade e coorientação da Professora Dra. Vanessa Largo Andrade.

A dissertação que originou este produto educacional teve como objetivo principal de analisar como o aprendizado de estudantes do Ensino Médio sobre a disciplina de Geometria Espacial é utilizado para a resolução de exercícios do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e vestibulares. Ao reconhecer a dificuldade dos estudantes com a disciplina de Geometria, especificamente a Geometria Espacial, entende-se que uma das maneiras de interpretar essas dificuldades é através da teoria do pensamento geométrico, principalmente a dos níveis de pensamento geométrico dos van Hielen.

Nesse sentido, a fim de compreender o nível de pensamento geométrico dos estudantes do Ensino Médio e de como as questões de ENEM e vestibulares demandam desses conhecimentos, principalmente relacionados a Geometria Espacial, foram selecionadas questões para que os estudantes resolvessem. Assim, conseguiu-se avaliar o nível dos estudantes em relação ao aprendizado de Geometria Espacial, fornecendo um importante diagnóstico das próprias aulas ministradas. Além disso, foi possível compreender como esses conhecimentos de geometria espacial são mobilizados pelo próprio ENEM e vestibulares, sendo essas provas um aspecto essencial para o ingresso no Ensino Superior. Essa etapa de realizar as provas de ingresso a universidades e faculdades é tão importante que parte dos currículos e das práticas pedagógicas em matemáticas são voltadas especificamente para essas provas. Portanto, estudar essas relações é crucial para compreender e sanar os desafios do ensino e aprendizagem da Geometria Espacial no Brasil.

Reconhecendo que as provas de avaliação em larga escala, como o ENEM e em certa medida os vestibulares, estão centralizadas na vida dos estudantes e

professores, buscou-se colocar os exercícios de vestibular como um possível eixo de ensino, aprendizado e diagnóstico dos níveis de pensamento geométrico dos estudantes. As questões que abordam a Geometria Espacial podem ser um ótimo ponto de partida para o ensino dessa disciplina, além de também já preparar os estudantes para essa etapa avaliativa. Nesse sentido, cabe a pergunta: como as questões de ENEM e vestibulares podem contribuir para o ensino e aprendizagem de Geometria Espacial?

Para isso, é apresentada uma sequência didática que pode ser aplicada para os alunos do terceiro ano do Ensino Médio e/ou fazer adaptações para aplicar nas demais turmas. A sequência didática está organizada em nove atividades, distribuídas em três questões para os níveis 1, 2 e 3 da teoria dos van Hiele, adaptadas questões de ENEM e Vestibulares. A ordem das questões segue a progressão sequencial e cumulativa da teoria, permitindo que os alunos avancem gradualmente nos níveis de compreensão geométrica. Para cada questão, será fornecido um comentário sobre o que é esperado do aluno em relação ao nível proposto e sugestões de encaminhamentos pedagógicos, garantindo um aprendizado progressivo e fundamentado.

1 GEOMETRIA ESPACIAL E A TEORIA DOS VAN HIELE

A Geometria Espacial é um tópico que gera dificuldades para ensinar e aprender, seja no Ensino Fundamental – Anos Finais ou no próprio Ensino Médio. Por um momento, a disciplina já sofreu um “abandono” do seu ensino nas escolas públicas brasileiras como aponta a matemática Pavanello (2009). Por outro lado, é comum encontrar estudantes que tenham dificuldade com as noções de sólidos e de suas propriedades matemáticas. Ao mesmo tempo, como mostra Santos e Araujo (2022), a disciplina de Geometria, principalmente a Espacial, ocupa um grande espaço no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), sendo assim o aprendizado de Geometria Espacial um dos objetivos de estudantes que buscam entrar no ensino superior.

Uma das formas de contribuir para sanar as dificuldades e desafios do ensino e aprendizado em Geometria Espacial é repensar também as práticas docentes. Nesse sentido, a possibilidade de analisar o aprendizado dos estudantes em relação a disciplina de Geometria Espacial é fundamental, onde a teoria dos níveis de compreensão do pensamento geométrico dos van Hiele são de grande ajuda. Nesse sentido, o objetivo é desenvolver um produto educacional que contemple os níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico para o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial com o intuito de formar professores para utilizar esses instrumentos de análise em suas aulas.

Em resumo, a teoria dos van Hiele pode ser resumida em cinco níveis de compreensão: 1. reconhecimento; 2. análise; 3. abstração; 4. dedução; e 5. rigor. No primeiro nível “Reconhecimento” os estudantes conseguem reconhecer as figuras geométricas e conseguem nomeá-las com base em suas características. Para Villers (2010) os estudantes reconhecem as figuras pelas suas características globais através da visualidade. Conseguem reconhecer triângulos, quadrados, paralelogramos e outras formas, mas não conseguem identificar suas propriedades. Eles conseguem, segundo Nasser (1993 *apud* Passos, 2015), no nível “Reconhecimento” os objetos de pensamento são as classificações de figuras geométricas. Para Silva (2015), os estudantes no nível 1, os estudantes conseguem observar, construir e manipular os objetos a maneira de identificar e classificar as formas geométricas.

No nível 2, de “Análise”, segundo Villers (2010) os estudantes começam a analisar as propriedades das figuras e aprendem as terminologias adequadas para as descrever. Porém, não conseguem realizar uma ligação entre as figuras e as propriedades delas. A análise das propriedades das figuras é através da observação e experimentação, já que conseguem identificar as características de uma figura geométrica. Além disso, as propriedades são utilizadas para definir as formas e classes de uma figura. Um exemplo disso é identificar um quadrado por meio das propriedades: 1. o quadrado tem quatro lados iguais; 2. o quadrado tem quatro ângulos retos e lados opostos iguais e paralelos (Nasser; Sant’anna, 2017). Nesse sentido, Nasser (1993 *apud* Passos, 2015) comenta que no nível de “Análise” o objeto de pensamento gira em torno da descrição das figuras geométricas através das propriedades das classificações e das formas. Além disso, para Filho (2015), no nível 2 os estudantes podem observar, por exemplo, um paralelepípedo como uma “caixa” e comparar com os prismas, percebendo uma possível semelhança entre as figuras. Portanto, um diálogo entre as figuras começa, onde o estudante faz suposições sobre as propriedades das figuras geométricas.

Já no nível 3, de “Abstração”, os estudantes adquirem a capacidade de perceber a necessidade de definições mais precisas e detalhadas das propriedades das figuras geométricas. Matos (2019) dá o exemplo da capacidade no nível de “Abstração” a relação entre as propriedades de uma figura geométrica como o quadrado sendo relacionado com um retângulo. A partir daí surgem as argumentações lógicas informais e de ordenação das classes das de figuras geométricas através dos pensamentos das propriedades dessas mesmas figuras. Outro exemplo é o apontado por Nasser e Sant’anna (2017) onde a abstração se relaciona a descrever um quadrado por meio de suas propriedades mínimas - quatro lados iguais e quatro ângulos retos - com um retângulo. Assim, para Nasser (1993 *apud* Passos, 2015), no nível 3 de “Abstração” as propriedades e as formas geométricas são objetos de pensamento dos estudantes na hora de construir um argumento lógico-informal.

No nível 4, de “Dedução”, segundo Villiers (2010), os estudantes começam a elaborar enunciados sequenciados mais longos e compreender elementos mais complexos, como a importância da dedução, os axiomas e suas funções, teoremas e provas matemáticas. Exemplo do nível de “Dedução” é apontado por Nasser e Sant’anna (2017) onde os estudantes demonstram as propriedades dos triângulos e dos quadriláteros através da congruência de triângulos. Assim, Nasser (1993 *apud*

Passos, 2015) também argumenta para que os estudantes compreendam a função dos axiomas, teoremas e prova são utilizadas às sequências de enunciados para objetos de pensamento.

Por fim, no nível 5, de “Rigor”, o último na hierarquia da teoria dos níveis de aprendizado geométrico dos van Hiele, os estudantes adquirem a capacidade de entender demonstrações lógico formais. Para Nasser (1993, *apud* Passos, 2015) e Nasser e Sant’anna (2017) os estudantes conseguem no nível 5 realizar comparações entre diferentes sistemas axiomáticos e esses mesmos sistemas axiomáticos tornam-se objetos de pensamento. Além disso, o estudante tem capacidade de realizar demonstrações formais de teoremas, axiomas e comparar diferentes geometrias, como a geometria euclidiana e a não euclidiana, estabelecendo relações.

Os níveis de compreensão da teoria de aprendizagem geométrica dos van Hiele pode ser sintetizado pelo seguinte quadro:

Quadro 1 – Níveis de compreensão segunda a teoria de aprendizagem geométrica dos van Hiele

Nível de compreensão	Características	Exemplo
Nível 1: Reconhecimento	- Nomear e comparar com base na aparência global. - Condições de aprender o vocabulário geométrico.	O aluno consegue ver uma pirâmide, identificá-la, mas não consegue explicá-la.
Nível 2: Análise	- Análise das figuras pelos componentes. - Reconhecimento de propriedades sem inter-relacioná-las. - Uso das propriedades para resolução de problemas	O aluno identifica que a pirâmide tem uma base e suas faces laterais são triângulos, reconhecendo suas propriedades individuais sem relacioná-las.
Nível 3: Abstração	- Necessidade de definição precisa. - Percepção de que uma propriedade pode decorrer de outra (inter-relação). - Argumentação lógica informal. - Ordenação de classes de figuras geométricas.	O aluno entende a relação dos elementos da pirâmide (como a quantidade de lados da base e a quantidade de faces laterais) e consegue reconhecer diferenças (como a diferença entre a pirâmide e o prisma).
Nível 4: Dedução	- Domínio do processo dedutivo e das demonstrações. - Reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	O aluno é capaz de definir formalmente o que é uma pirâmide e provar formalmente que uma pirâmide quadrada regular (condição necessária)

	- Capaz de fazer provas formais.	possui todas as suas faces laterais congruentes (condição suficiente).
Nível 5: Rigor	- Capacidade de comparar sistemas baseados em diferentes axiomas.	O aluno tem compreensão de que, na geometria euclidiana, a soma dos ângulos das faces laterais da pirâmide é 180 graus, enquanto, na geometria não euclidiana, isso não se aplica devido à curvatura do espaço.

Para Villiers (2010), ocorrem transições entre os níveis da teoria do aprendizado geométrico. A transição do nível 1 para o nível 2 necessita da capacidade de reconhecer novas relações entre conceitos, além de revisão dos conceitos já aprendidos. Ou seja, não é necessariamente uma aquisição de linguagem, mas sim uma progressão da capacidade de reconhecer e organizar conceitos relacionados às propriedades das figuras geométricas. Já a passagem do nível 2 para o nível 3 depende de alguns procedimentos. Envolve a associação de propriedades a tipos de figuras geométricas e as ligações entre figuras de acordo com suas propriedades envolvendo relações lógicas. Assim, para progredir ao nível 3, os conceitos e a linguagem devem ter uma forte relação com o raciocínio matemático (lógico-dedutivo) e com as definições das propriedades geométricas e de teoremas. Já a transição do nível 3 para 4 e subsequente até chegar no nível 5 é mais complexa, necessitando de níveis de pensamentos geométricos mais altos - como mostra Matos (2019), relacionados também ao ensino superior.

2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, é apresentada uma sequência didática para trabalhar Geometria Espacial a partir de questões de ENEM e Vestibulares sob a perspectiva da Teoria dos Níveis de Compreensão Geométrica dos van Hiele. Trata-se de uma sequência de aulas, com o objetivo de promover o desenvolvimento gradativo das habilidades geométricas, alinhando os conteúdos ao contexto das avaliações externas e estimulando o raciocínio lógico e abstração.

A sequência didática proposta é composta por nove atividades, organizadas de acordo com os níveis de compreensão dos van Hiele. Como o foco são estudantes do Ensino Médio, trabalharemos os níveis 1, 2 e 3, adequados a essa etapa escolar. Serão distribuídas três questões para cada nível, todas extraídas integralmente ou adaptadas de questões de ENEM ou Vestibulares, a partir de 2013, priorizando questões mais recentes.

A teoria dos van Hiele possui, entre suas características, a progressão sequencial e cumulativa, ou seja, o aluno precisa passar por cada nível para progredir ao próximo. Assim, a ordem das questões foi planejada considerando esse aspecto, seguindo uma lógica gradual que permite o avanço progressivo do conteúdo.

Junto à questão, está incluído um comentário detalhado sobre o que se espera do aluno, como essa questão se relaciona com o nível de conhecimento proposto, e uma sugestão de possíveis encaminhamentos para as atividades propostas. Esses encaminhamentos se referem a atividades a serem feitas antes da resolução da questão, com o objetivo de proporcionar um aprendizado significativo e contextualizado para o aluno.

Sequência de atividades sobre geometria espacial segundo o modelo dos van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico a partir de questões de ENEM e Vestibulares.

2.1 Nível 1: Reconhecimento

Nesse nível é importante sugerir aos alunos atividades que envolvam identificar, comparar e nomear figuras com base em suas características visuais, sem exigir necessariamente uma justificativa e/ou explicação.

Atividade 1 – (Enem PPL 2023 - adaptada) A tartaruga ou tachão de trânsito é um dispositivo de sinalização horizontal utilizado para canalizar o tráfego ou garantir o afastamento do fluxo de veículos de zonas perigosas ou com grande risco de acidentes. A Figura 1 apresenta alguns deles já instalados.



Figura 1

Disponível em: www.alfasinalizacao.com.br. Acesso em: 28 nov. 2021 (adaptado).

O modelo geométrico de um tachão está representado na Figura 2.

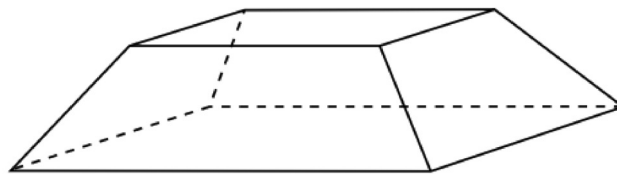


Figura 2

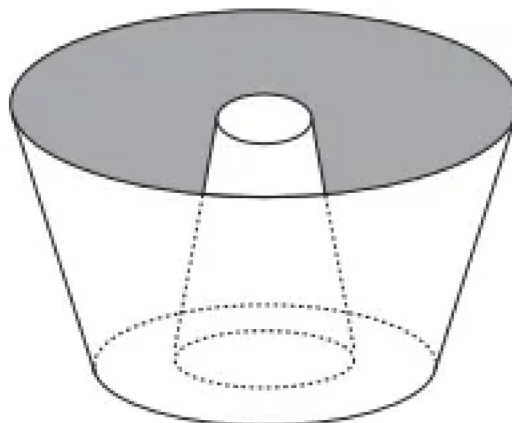
Qual é o sólido representado pelo modelo geométrico do tachão?

- a) Paralelepípedo reto.
- b) Paralelepípedo oblíquo.
- c) Pirâmide quadrangular.
- d) Tronco de pirâmide hexagonal.
- e) Tronco de pirâmide quadrangular.

Comentários sobre a questão: Nessa atividade é esperado que os alunos reconheçam a figura geométrica com base na sua aparência global. O exercício apresenta um exemplo de objeto do cotidiano e pede para que os alunos relacionem o objeto ao seu modelo geométrico. Não é necessário identificar partes ou propriedades do sólido, sendo o foco apenas o uso correto do vocabulário geométrico.

Sugestão de encaminhamentos: A ideia é incentivar os alunos a buscar e identificar formas geométricas no ambiente escolar, promovendo a observação e a contextualização dos conceitos geométricos no cotidiano. Como o conteúdo é previsto para alunos do Ensino Médio, será introduzido os sólidos geométricos de forma breve, seguida de uma exploração pelo espaço da escola. A exploração acontece em áreas distintas da escola e fazer identificações dos modelos geométricos, nomeando-os. Os objetos podem ir desde lápis ao formato do prédio da escola. A imaginação é o limite.

Atividade 2 – (Enem 2013) Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais.

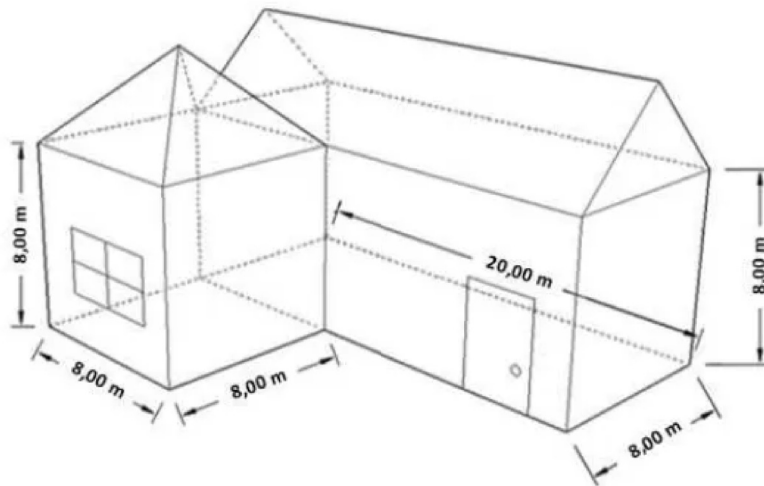
Essas figuras são

- a) um tronco de cone e um cilindro.
- b) um cone e um cilindro.
- c) um tronco de pirâmide e um cilindro.
- d) dois troncos de cone.
- e) dois cilindros.

Comentários sobre a questão: Nessa questão o aluno precisa compreender a ideia de decompor a imagem, separando a representação em duas partes: parte externa e parte interna da forma de bolos apresentada no exercício. Após essa decomposição, o aluno deve relacionar essas partes da representação aos seus respectivos modelos geométricos, utilizando apenas o vocabulário geométrico adequado.

Sugestão de encaminhamentos: Uma possibilidade é trazer o debate de sólidos geométricos que podem ser decompostos. A ideia é promover uma chuva de ideia com os alunos, perguntando em quais objetos do cotidiano é possível decompor em sólidos geométricos. Após o levantamento, orientar os alunos a representar de forma gráfica (desenhos) o objeto como um todo e uma segunda parte o objeto com suas decomposições, nomeando-as com base no seu modelo geométrico.

Atividade 3 – (Uncisal 2016) Na figura, desconsidere a porta e a janela da casa.



Quais são as figuras geométricas espaciais que formam a casa?

- a) Um cubo, um paralelepípedo, uma pirâmide e um prisma.
- b) Um cubo, um paralelepípedo e duas pirâmides.
- c) Um quadrado, um retângulo e dois triângulos.
- d) Dois quadrados e dois triângulos.
- e) Dois cubos e duas pirâmides.

Comentários sobre a questão: Assim como a questão anterior, nesta questão os estudantes precisam realizar a decomposição da casa, identificando e separando as partes que a compõem em figuras geométricas básicas. É interessante observar que, além do vocabulário geométrico adequado, o aluno precisa compreender a diferença da geometria plana para a espacial. Isso se torna relevante pois, entre as alternativas de respostas, temos figuras planas como “quadrado” e “triângulo”, e sólidos geométricos. O enunciado ao perguntar “Quais são as FIGURAS GEOMÁTRICAS”, exige que o aluno reconheça a diferença entre essas categorias. Além disso, nesta questão o aluno começa a identificar propriedades e características que diferenciam as figuras geométricas, marcando uma transição entre os níveis 1 e o nível 2 da teoria dos van Hiele. Essa transição fica evidente na capacidade do aluno de conseguir identificar diferenças entre sólidos geométricos, como cubo e paralelepípedo, mas sem precisar utilizar muitas propriedades e relações matemáticas, mas focando em identificar suas diferenças principais de forma visual.

Sugestão de encaminhamentos: A partir de materiais manipuláveis como sólidos geométricos de diferentes formatos, conduza uma atividade interativa com os alunos, a fim de explorar as propriedades e características visuais desses sólidos. Em um primeiro momento, disponibilizar os materiais manipuláveis para que os alunos manuseiem e observem suas características. Depois, levantar questões que incentivem os alunos às reflexões sobre as propriedades desses sólidos e possíveis características visuais, tais como: “O que diferencia um triângulo de uma pirâmide? Uma figura é composta pela outra?”, “O que diferencia um cubo de um paralelepípedo?” “Visualmente falando, como identificar um prisma?”, “Como podemos identificar de forma visual a diferença entre um prisma e um cilindro?”. A partir das respostas, oriente os alunos a estabelecer definições para os sólidos manipuláveis, como “A área lateral de um prisma é composta por retângulos”.

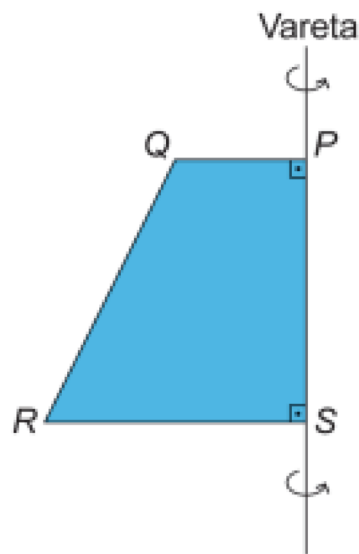
2.2 Nível 2: Análise

Nesse nível é importante sugerir aos alunos atividades que envolvem analisar as figuras em base em seus componentes, reconhecer suas propriedades e aplicá-las na resolução de situações problemas.

Atividade 4 – (Enem 2024) Para obter um sólido de revolução (rotação de 360° em torno de um eixo fixo), uma professora realizou as seguintes etapas:

- recortou o trapézio retângulo PQRS de um material rígido;
- afixou o lado PS do trapézio em uma vareta fixa retilínea (eixo de rotação);
- girou o trapézio 360° em torno da vareta e obteve um sólido de revolução.

Observe a figura que apresenta o trapézio afixado na vareta e o sentido de giro.



O sólido obtido foi um(a)

- a) cone.
- b) cilindro.
- c) pirâmide.
- d) tronco de cone.
- e) tronco de pirâmide.

Comentários sobre a questão: Nessa atividade os alunos começam a reconhecer as propriedades das figuras geométricas com base em suas características, como a forma e a estrutura. Exige que o aluno compreenda a transformação geométrica (rotação do trapézio) e seja capaz de reconhecer do sólido gerado, fazendo conexão com os sólidos de revolução. Para resolver o exercício, o aluno precisa ter um conhecimento sobre propriedades e características do sólido, mas a questão não exige um entendimento formal e rigoroso das propriedades e relações.

Sugestão de encaminhamentos: Disponibilize materiais rígidos como papelão, EVA, papel cartão para que, em grupo, os alunos confeccionem figuras planas diversas, incluindo retângulo, triângulos, trapézio e semicircunferências. Com varetas, peça aos alunos que fixem cada figura à vareta, que representará o eixo de rotação e peça para eles girarem. Com isso, o grupo deverá associar cada figura plana com um sólido geométrico e responder perguntas como “Todas as figuras planas produziram sólidos geométricos conhecidos?”, “Qual é o tipo de sólido geométrico gerado?”, “Qual característica as figuras planas precisam ter para que produza um sólido geométrico mais usual?”, “Quais características da figura inicial determinam o formato do sólido gerado?”, “O que diferencia um cone de um tronco de cone? E um cilindro?”, “Se mudarmos o eixo de rotação, o sólido gerado também muda?”, “Os elementos da figura plana estão relacionados com quais elementos de casa sólido gerado?”

Atividade 5 – (UFPR 2019) Diana pretende distribuir 6 litros de geleia em 25 potes iguais. Cada pote possui internamente o formato de um paralelepípedo de base quadrada com 5 cm de lado. Dividindo igualmente a geleia em todos os potes, qual é a altura interna que a geleia atingirá em cada recipiente?

- a) 6,0 cm.
- b) 7,5 cm.
- c) 9,6 cm.
- d) 15,0 cm.
- e) 24,0 cm.

Comentários sobre a questão: A questão exige que o aluno compreenda o conceito de volume e como calcular o volume do paralelepípedo, uma propriedade geométrica importante dessa figura. Para isso, ele deverá entender que, primeiramente, é necessário dividir igualmente a geleia entre os 25 potes, e que o volume equivalente para cada pote é o volume que ele deve calcular, considerando que sua base do pote é quadrada. Para que consiga resolver a questão, o aluno precisa manipular as propriedades geométricas, nesse caso o cálculo do volume, mas sem exigir um raciocínio muito complexo. Em contrapartida, a questão mostra que o aluno reconhece e aplica as propriedades geométricas de forma prática e direta.

Sugestão de encaminhamentos: Transforme essa atividade em uma atividade concreta. Use recipientes reais (como caixas pequenas ou copos descartáveis) que representem os potes descritos na questão. Preencha um recipiente maior com 6 litros de água colorida (para simular a geleia). Divida a água igualmente entre recipientes usando copos medidores (pode ser 25 recipientes ou menos – o importante é que os alunos entendam o procedimento). Peça que os alunos observem o nível atingido e discutam como calcular a altura. Relacione a observação prática ao cálculo teórico, explicando como o volume total é dividido e como a altura é determinada com base na área da base do paralelepípedo.

Atividade 6 – (ENEM 2020) No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de Natal, conforme as figuras 1 e 2.



Figura 1

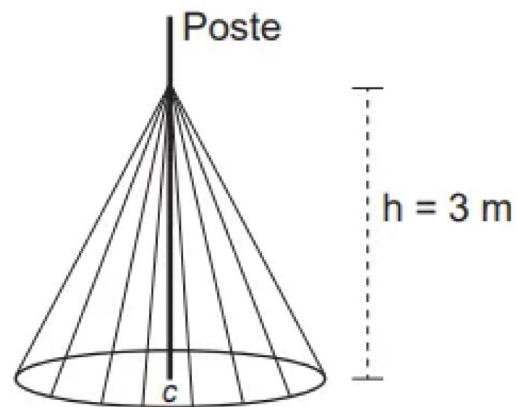


Figura 2

A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a 3 m de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação, no chão, de tal forma que esta fique dividida em 20 arcos iguais. O poste está fixado no ponto C (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão.

Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram pouco mais de 100 m de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente 100 m e deixar o restante como reserva.

Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser de

- a) 4,00.
- b) 4,87.

- c) 5,00.
- d) 5,83.
- e) 6,26.

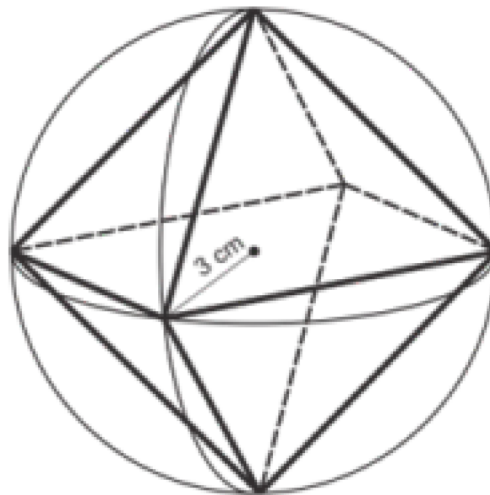
Comentários sobre a questão: Para resolver essa questão, o aluno precisa inicialmente determinar a medida de cada mangueira. Um aspecto importante é que o aluno deve reconhecer que, ao fazer uma secção meridional, formamos um triângulo retângulo entre o poste, a mangueira e o raio do cone, o que possibilita o cálculo do raio pelo Teorema de Pitágoras. Para isso o aluno precisa ter domínio das características e propriedades do cone e utilizá-las na resolução do problema de maneira eficaz. Essa questão marca a transição entre o nível 2 e o nível 3 da teoria dos van Hiele, uma vez que envolve as propriedades geométricas e a compreensão de relações mais complexas, inicialmente a abstração entre as relações de diferentes componentes geométricos.

Sugestão de encaminhamentos: Faça a simulação de um exemplo parecido. Peça para que os alunos, em grupo, construam um cone com altura fixa de 15 cm e desenhem sua base em uma folha de sulfite. Com a ajuda de um transferidor, eles devem dividir a base em 10 partes iguais e marcar essas divisões na borda do cone. Usando barbante, eles devem conectar o vértice do cone a cada uma dessas 10 marcações e medir o comprimento do barbante. A ideia é que, ao relacionar essa atividade com a atividade dos sólidos de revolução, os alunos reconheçam que, com a altura fixa e o comprimento do barbante, é possível identificar um triângulo retângulo e, a partir disso, calcular o raio da base do cone.

2.3 Nível 3: Abstração

Nesse nível é importante sugerir aos alunos atividades que envolvem analisar as figuras de uma forma mais abstrata, reconhecendo e utilizando propriedades de maneira dedutiva. Eles são capazes de estabelecer relações entre as propriedades, sem depender tanto da representação visual. As atividades incentivam os alunos a realizar generalizações e raciocínios lógicos sobre as propriedades e as relações geométricas.

Atividade 7 – (Unioeste 2023) Uma gema preciosa foi submetida a uma lapidação precisa, assumindo a forma de um octaedro regular, e posteriormente inserida com precisão em uma esfera de vidro de raio igual a 3 centímetros. O valor atribuído a esta peça é calculado com base no volume da gema preciosa, excluindo completamente o volume ocupado pela esfera circundante. Supondo que o octaedro da gema preciosa esteja devidamente inscrito na esfera, conforme ilustrado na figura, qual é o volume do octaedro em questão?



- a) $\frac{2}{3}\sqrt{2} \text{ cm}^3$
- b) $3\sqrt{2} \text{ cm}^3$
- c) 16 cm^3
- d) 32 cm^3
- e) 36 cm^3

Comentários sobre a questão: Nessa questão, o aluno deve ser capaz de relacionar as características e propriedades do octaedro com as características e propriedades da esfera. Neste caso, é fundamental que o aluno compreenda o octaedro como a junção de duas pirâmides de base quadrada. A partir disso, o aluno deve relacionar que o diâmetro da esfera corresponde à diagonal do quadrado da base da pirâmide, e então é possível determinar a aresta da base e, conseqüentemente, área da base, elemento importante para o cálculo do volume da pirâmide. Além disso, o aluno deve perceber que a altura da pirâmide equivale com o raio da esfera, já que o raio vai do centro da esfera até qualquer extremidade, que nesse caso corresponde ao vértice que determina a altura. Com esses elementos, é possível calcular o volume da

pirâmide de base quadrada e, conseqüentemente, o volume do octaedro. Essa questão, embora contenha uma ilustração, exige que o aluno seja capaz de estabelecer diversas relações entre os sólidos geométricos chegar à resposta correta.

Sugestão de encaminhamentos: Utilizando o GeoGebra para modelagem 3D, os alunos podem construir digitalmente um octaedro a partir de suas propriedades, como pirâmides de base quadrada, e depois circunscrever a esfera. É um momento importante também para refletir sobre as diferenças de um sólido inscrito e circunscrito. No GeoGebra, os estudantes podem explorar a relação entre a esfera e o octaedro, visualizando como o sólido se encaixa perfeitamente dentro da esfera e observando as dimensões envolvidas. Os alunos poderiam, então, simular a movimentação da esfera, visualizando as diferentes diagonais e a relação entre o raio e a altura da pirâmide que compõe o octaedro. Isso permitiria que eles aplicassem as propriedades geométricas para calcular o volume do octaedro e calcular esse volume digitalmente.

Atividade 8 – (Unioeste 2019) Coloca-se uma esfera de raio r no interior de um recipiente com formato de um cilindro circular reto com raio da base R . Em seguida, preenche-se o recipiente com água até que a esfera fique exatamente coberta por água, ou seja, a esfera tangencia a superfície da água. Retira-se, então, a esfera e é observado que o nível da água é reduzido em $\frac{1}{4}$. O valor da razão $\frac{r}{R}$ é igual a:

- a) $\frac{1}{4}$.
- b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- c) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.
- d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- e) $\frac{3}{4}$.

Comentários sobre a questão: Nessa questão, o aluno precisa entender como o volume da esfera interage com o volume do cilindro e como a redução do nível da água está associada a essa diferença de volumes. Ou seja, o volume reduzido corresponde ao volume da esfera que foi retirada. Assim, o volume da esfera

corresponde a $\frac{1}{4}$ do volume do cilindro. O aluno não precisa necessariamente reconhecer as figuras, mas sim utilizar suas propriedades, neste caso o cálculo de volume, e relacioná-las. Para determinar a razão $\frac{r}{R}$, é necessário manipular equações e abstrair das relações entre os volumes.

Sugestão de encaminhamentos: Para recriar uma atividade similar, os alunos podem utilizar um objeto cilíndrico, como uma lata, com marcações para medir o nível da água. Em seguida, devem inserir um (ou mais) objetos esféricos idênticos no cilindro, medindo o nível da água com e sem os objetos. A diferença entre os dois níveis de água representa o volume deslocado pelos objetos, ou seja, o volume da(s) esfera(s). A primeira parte da atividade consiste em calcular o volume de cada esfera e determinar seu raio a partir da diferença de níveis. Na segunda parte, os alunos devem calcular a razão entre o volume da esfera e o volume restante no cilindro, utilizando as fórmulas dos volumes do cilindro e da esfera. Perceba que será necessário obter a altura do cilindro, que corresponde ao nível de água no cilindro. Na terceira parte, os alunos devem calcular a razão entre o raio da esfera e o raio do cilindro, a partir da razão obtida no exercício anterior. Por fim, é possível medir o raio do cilindro e comparar os valores da primeira parte (raio da esfera) com a razão, a fim de verificar a consistência dos resultados.

Atividade 9 – (ENEM 2022) Uma loja comercializa cinco modelos de caixas-d'água (I, II, III, IV e V), todos em formato de cilindro reto de base circular. Os modelos II, III, IV e V têm as especificações de suas dimensões dadas em relação às dimensões do modelo I, cuja profundidade é P e área da base é Ab , como segue:

- modelo II: o dobro da profundidade e a metade da área da base do modelo I;
- modelo III: o dobro da profundidade e a metade do raio da base do modelo I;
- modelo IV: a metade da profundidade e o dobro da área da base do modelo I;
- modelo V: a metade da profundidade e o dobro do raio da base do modelo I.

Uma pessoa pretende comprar nessa loja o modelo de caixa-d'água que ofereça a maior capacidade volumétrica.

O modelo escolhido deve ser o

- a) I.
- b) II.
- c) III.
- d) IV.
- e) V.

Comentários sobre a questão: Nessa questão o aluno precisa de uma compreensão mais aprofundada sobre as relações entre os componentes geométricos e de que forma essas relações influenciam o volume do sólido. É fundamental que o aluno perceba que a profundidade e a área da base estão diretamente relacionadas de forma proporcional com o volume, ou seja, o volume do cilindro aumenta com o aumento da profundidade e da área da base, enquanto o raio afeta a área da base de forma proporcional ao quadrado do raio, o que, por sua vez, influencia o volume de forma quadrática. Essa questão exige abstração das propriedades geométricas e a capacidade de aplicar conceitos geométricos para entender como essas propriedades se relacionam.

Sugestão de encaminhamentos: Para ajudar os alunos a entender as relações geométricas e como elas afetam o volume do cilindro, no GeoGebra os alunos irão criar um cilindro padrão de altura 2 e raio 1. A partir desse modelo, os alunos poderão manipular as variáveis da profundidade e do raio da base. Com as ferramentas de cálculo de área e volume do GeoGebra, à medida que ajustam essas variáveis, os alunos poderão observar como as mudanças nas dimensões afetam a área da base e o volume de cada caixa. Isso permitirá aos alunos comparar facilmente os volumes dos diferentes modelos e tomar a decisão informada sobre qual modelo oferece a maior capacidade volumétrica.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste produto educacional destinado a professores de matemática que atuam principalmente no Ensino Médio com a disciplina de Matemática buscamos mostrar possibilidades de uso de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e de vestibulares para o ensino e aprendizado de Geometria Espacial. Em um primeiro momento, é necessário conhecer uma das principais teorias que analisam o aprendizado e o desenvolvimento de saberes sobre o pensamento geométrico. Nesse caso, a teoria dos níveis do pensamento geométrico desenvolvida pelos van Hiele é essencial para analisar o estágio atual e o progresso dos estudantes em relação aos conhecimentos em Geometria Espacial.

Para isso, se houver a utilização dos exercícios de ENEM e vestibular, é também importante compreender como as questões levantadas demandam os conhecimentos necessários. Portanto, é crucial saber que nível do pensamento geométrico cada exercício irá avaliar. Para isso, este produto educacional foi elaborado, principalmente em uma sequência didática com uma duração maior para que sejam abarcados, não apenas os níveis de compreensão, mas outras duas análises. A primeira diz respeito a transição entre os níveis de pensamento geométrico. Buscou-se valorizar a transição dos níveis (nível 1 – nível 2 e nível 2 – nível 3), uma vez que essa transição é uma etapa importante e imprescindível para o desenvolvimento dos estudantes. A segunda é que outros elementos de ensino de Matemática, principalmente de Geometria Espacial, já testados empiricamente em outras pesquisas e relacionadas a teoria dos van Hiele podem ser úteis. Sendo assim, deixa-se como sugestão o uso de material concreto e do software GeoGebra como uma possibilidade de ensino. Não se quer dizer que é necessário desfocar das questões do ENEM e de vestibulares, mas que outros elementos podem contribuir para o aprendizado.

Por fim, a sequência didática aqui apresentada é livre para as alterações dos professores, sendo que o a sua metodologia e ordem das atividades, além do uso das questões de ENEM e vestibulares, é o essencial. A ordem as questões podem ser alteradas. Os próprios exercícios devem ser atualizados constantemente se quisermos levar em consideração a própria demanda de acesso ao Ensino Superior. Nesse sentido, o produto educacional proposto também é uma orientação. Porém,

para ser eficaz no ensino e aprendizado de Geometria Espacial, é necessário que as análises das questões e das respostas dos estudantes se baseie na teoria dos níveis de pensamento geométrico dos van Hiele permaneça.

Além disso, como o foco são conteúdos abordados no Ensino Médio, o nível 3 é o esperado que os estudantes aprendam. Dito isso, não significa que a retomada dos níveis 1 e 2 sejam dispensáveis, ao contrário: é necessário que o ensino seja sequencial, gradativo e cumulativo, sendo indispensável a retomada dos níveis anteriores.

Com isso, este produto educacional poderá contribuir para auxiliar professores tanto no aprendizado da teoria dos níveis do pensamento geométrico dos van Hiele quanto da aplicação práticas dessas ideias para a avaliação e ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio da educação brasileira.

REFERÊNCIAS

MATOS, Daiane de Almeida Brazeiro de. **OS NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE EM QUESTÕES DE GEOMETRIA ESPACIAL DO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO**: uma análise de protocolos de acadêmicos ingressantes na educação superior. 2019. 52 f. TCC (Graduação) - Curso de Curso de Matemática - Licenciatura, Universidade Federal do Pampa, Itaqui, 2019.

NASSER, L. SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 3º ed. rev. 101 p.: il. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2017.

PASSOS, A. Q. Van Hiele, **Educação Matemática realística e GEPEMA**: algumas aproximações. 2015.148 f. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Londrina. Paraná.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causa e consequências. **Zetetike**, [S.l.], v. 1, n. 1, p. 7-17, dez. 2009.

SANTOS, Ana Clara Almeida dos; ARAÚJO, Maria de Lourdes Haywanon Santos. A Geometria no ENEM: reflexões sobre avaliação educacional e o ensino de matemática em uma perspectiva crítica. **Perspectivas da Educação Matemática**, [S.L.], v. 15, n. 40, p. 1-20, 9 dez. 2022. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. <http://dx.doi.org/10.46312/pem.v15i40.16158>.

SILVA FILHO, G. B. da. **Geometria espacial no ensino médio: uma abordagem concreta**. 2015.175 p. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual da Paraíba.

VILLERS, M. de. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. Some reflections on the Van Hiele Theory. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 12, n.3, p. 400-431, 2010.