UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

GUSTAVO PRATES DE OLIVEIRA

Uma sequência didática para o estudo da medida do volume do dodecaedro regular por meio de composição e decomposição em pirâmides

VITÓRIA DA CONQUISTA – BA
2024

GUSTAVO PRATES DE OLIVEIRA

Uma sequência didática para o estudo da medida do volume do dodecaedro regular por meio de composição e decomposição em pirâmides

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Galvina Maria de Souza.

VITÓRIA DA CONQUISTA – BA

2024

O47u Oliveira, Gustavo Prates de.
Uma sequência didática para o estudo da medida do volume do dodecaedro regular por meio de composição e decomposição em pirâmide. / Gustavo Prates de Oliveira, 2024.
156f. il.
Orientador (a): Drª. Galvina Maria de Souza.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2024.
Inclui referências. 91- 94.
1.Ensino de Geometria. 2. Dodecaedro Regular - Realidade aumentada. 3. Sequência Didática. 4. Teoria dos Registros de Representação semiótica. I. Souza, Galvina Maria de. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - Ba. III. T.

CDD: 516.007

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção - CRB 5/1890
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

Gustavo Prates de Oliveira

Uma sequência didática para o estudo da medida do volume do dodecaedro regular por meio de composição e decomposição em pirâmides

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof.ª Dr.ª Galvina Maria de Souza - UESB

Prof. Dr. Fernando dos Santos Silva - UESB

Prof. Dr. Jonson Ney Dias da Silva - UESB

Prof.ª Dr.ª Barbara Lutaif Bianchini - PUC-SP

Vitória da Conquista - Ba

Aprovada em 28 de junho de 2024

Documento assinado eletronicamente por **Barbara Lutaif Bianchini**, **Usuário Externo**, em 28/06/2024, às 14:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014.

Documento assinado eletronicamente por **Jonson Ney Dias Da Silva**, **Professor Adjunto**, em 09/07/2024, às 09:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014.

Documento assinado eletronicamente por **Fernando dos Santos Silva**, **Professor Adjunto**, em 18/07/2024, às 17:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014.

Documento assinado eletronicamente por **Galvina Maria de Souza**, **Professor Assistente**, em 19/07/2024, às 09:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://seibahia.ba.gov.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **00092911177** e o código CRC **AB7BE129**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por sua misericórdia e por todos os dias de vida que Ele concede a mim.

Agradeço aos meus pais, Wilton e Lúcia, e a minha irmã Maria Luísa, por sempre me incentivarem a estudar, pelo carinho e conselhos.

Agradeço à minha Tia Elza, que me apoiou e deu suporte para a minha qualificação.

Agradeço ao corpo escolar do Colégio Modelo de Itapetinga, aos professores que foram compreensivos quanto à organização do cronograma dos horários de aula. Em especial, agradeço à Coordenadora Maria Auxiliadora**,** ao Diretor Edmo e aos Vices Diretores Maria de Lourdes e Carlito**,** pela compreensão e organização de horários, que permitiram a minha frequência ao mestrado.

Agradeço aos professores, que lecionaram cada uma das disciplinas do mestrado, pelos ensinamentos que permitiram o meu desenvolvimento e capacitação.

Agradeço à Profa. Galvina, orientadora deste trabalho pela paciência, dedicação, disponibilidade e boa vontade em aconselhar e orientar.

Agradeço aos membros da banca examinadora pelos convites aceitos e contribuições para o trabalho desenvolvido.

Agradeço aos colegas, pelos momentos de estudo, de ajuda e incentivo de cada um para com os outros.

RESUMO

Este estudo, de cunho qualitativo, explorou o cálculo da medida de volume do dodecaedro regular, por meio da composição e decomposição de pirâmides regulares, empregando o *software* GeoGebra 3D para visualizar e manipular as construções realizadas pelos estudantes de forma dinâmica, com foco na dedução de fórmulas para cálculo de medida de área de regiões planas e volume de sólidos geométricos, especialmente para a medida do volume do dodecaedro regular. Teve como objetivo implementar e analisar uma Sequência Didática abordando a composição e decomposição em pirâmides com o uso do GeoGebra 3D com ênfase na Realidade Aumentada para desenvolver o estudo do volume do dodecaedro regular. Os sujeitos de pesquisa eram estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Os dados foram produzidos, principalmente, por meio da implementação da Sequência Didática e foram analisados ancorados em algumas ideias da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Os principais resultados mostraram, que o uso do GeoGebra 3D, no processo de aprendizagem de sólidos geométricos, pode potencializar a visualização de elementos importantes desses sólidos, principalmente, por meio da Realidade Aumentada. Quanto às principais dificuldades apresentadas pelos estudantes, durante a implementação da sequência, os resultados mostraram que elas foram mais frequentes em questões que requeriam respostas discursivas dos alunos. Concluímos que o recurso Realidade Aumentada foi fundamental para que os estudantes conseguissem realizar a conversão do sistema de registros de representação semiótica figural para o sistema algébrico e da língua materna, ou seja, os estudantes transitaram entre esses sistemas durante a implementação da Sequência Didática como um todo. Isto, conforme a teoria adotada, pôde contribuir para que esses estudantes compreendessem que é possível calcular a medida do volume do dodecaedro regular por meio da composição e decomposição desse sólido em pirâmides de base pentagonal que, por sua vez, eram compostas por pirâmides de base triangular.

Palavras-chave: Sequência Didática; Teoria dos Registros de Representação Semiótica; Ensino de Geometria; Dodecaedro Regular; Realidade Aumentada.

ABSTRACT

This qualitative study explored the calculation of the volume of the regular dodecahedron through the composition and decomposition of regular pyramids, using GeoGebra 3D software to visualize and manipulate the constructions made by the students in a dynamic way, with a focus on the deduction of formulas for calculating the area of flat regions and the volume of geometric solids, especially for the volume of the regular dodecahedron. It aimed to implement and analyze a Didactic Sequence addressing composition and decomposition in pyramids using GeoGebra 3D with an emphasis on Augmented Reality to develop the study of the volume of the regular dodecahedron. The research subjects were 2nd year high school students. The data was produced mainly through the implementation of the Didactic Sequence and was analyzed based on some ideas from the Theory of Semiotic Representation Registers. The main results showed that the use of GeoGebra 3D in the process of learning geometric solids can enhance the visualization of important elements of these solids, mainly through Augmented Reality. As for the main difficulties presented by the students during the implementation of the sequence, the results showed that they were more frequent in questions that required discursive answers from the students. We conclude that the Augmented Reality resource was fundamental for the students to be able to convert the system of semiotic representation registers from figural to algebraic and mother tongue, i.e., the students moved between these systems during the implementation of the Didactic Sequence as a whole. This, according to the adopted theory, helped the students understand that it is possible to calculate the volume of a regular dodecahedron by composing and decomposing this solid into pentagonal pyramids, which in turn were composed of triangular pyramids.

Keywords: Didactic Sequence; Theory of Registers of Semiotic Representation; Geometry Teaching; Regular Dodecahedron; Augmented Reality.

RESUMEN

Este estudio cualitativo exploró el cálculo del volumen del dodecaedro regular a través de la composición y descomposición de pirámides regulares, utilizando el software GeoGebra 3D para visualizar y manipular las construcciones realizadas por los alumnos de forma dinámica, con un enfoque en la deducción de fórmulas para el cálculo del área de regiones planas y del volumen de sólidos geométricos, especialmente para el volumen del dodecaedro regular. El objetivo fue implementar y analizar una Secuencia Didáctica que aborda la composición y descomposición en pirámides utilizando GeoGebra 3D con énfasis en Realidad Aumentada para desarrollar el estudio del volumen del dodecaedro regular. Los sujetos de la investigación fueron alumnos de 2º de Bachillerato. Los datos fueron producidos principalmente a través de la implementación de la Secuencia Didáctica y fueron analizados con base en algunas ideas de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica. Los principales resultados mostraron que el uso de GeoGebra 3D en el proceso de aprendizaje de los sólidos geométricos puede mejorar la visualización de elementos importantes de estos sólidos, principalmente a través de la Realidad Aumentada. En cuanto a las principales dificultades presentadas por los alumnos durante la implementación de la secuencia, los resultados mostraron que eran más frecuentes en las preguntas que requerían respuestas discursivas por parte de los alumnos. Concluimos que el recurso de la Realidad Aumentada fue fundamental para que los alumnos pudieran convertir el sistema de registros de representación semiótica de figural a algebraico y lengua materna, es decir, los alumnos se movieron entre estos sistemas durante la implementación de la Secuencia Didáctica como un todo. Esto, de acuerdo con la teoría adoptada, ayudó a los alumnos a comprender que es posible calcular el volumen de un dodecaedro regular componiendo y descomponiendo este sólido en pirámides pentagonales, que a su vez estaban compuestas por pirámides triangulares.

Palabras clave: Secuencia Didáctica; Teoría de los Registros de Representación Semiótica; Enseñanza de la Geometría; Dodecaedro Regular; Realidad Aumentada.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Quadrado de medida de área unitária 60
Figura 2 – Quadrado de medida de lado unitária..60
Figura 3 – Formação de triângulos semelhantes no pentágono regular 63
Figura 4 – Triângulo formado pelos segmentos AF, BF e AB 63
Figura 5 – Triângulo ABF com identificação da altura, do lado e do ângulo 64
Figura 6 – Bloco com medida de volume unitário 65
Figura 7 – Prisma formado por blocos de medida de volume unitário 65
Figura 8 – Pirâmide de base pentagonal 67
Figura 9 – Triângulo ABF com identificação da altura, do lado e do ângulo 67
Figura 10 – Ângulo entre a base e a face lateral da pirâmide pentagonal 68
Figura 11 – Resposta da primeira questão 1ª atividade do Grupo 1........................72
Figura 12 – Resposta da primeira questão da 1ª atividade do Grupo 2 72
Figura 13 – Resposta da quinta questão da 1ª atividade do Grupo 1 73
Figura 14 – Projeção de linhas paralelas em relação à base e à altura...................74
Figura 15 – Respostas da quarta questão da 3ª atividade do Grupo 5....................74
Figura 16 – Identificação do ponto impróprio na construção dos triângulos............75
Figura 17 – Manipulação com superfícies indesejadas 75
Figura 18 – Resposta da segunda questão da 4ª atividade do Grupo 3 75
Figura 19 – Resposta da terceira questão da 4ª atividade do Grupo 3....................76
Figura 20 – Respostas da quinta e sexta questões da 4ª atividade do Grupo 3. 76
Figura 21 – Respostas da quinta e sexta questões da 4ª atividade do Grupo 6 77
Figura 22 – Resposta da segunda questão da 5ª atividade do Grupo 5 78
Figura 23 – Projeção da construção do prisma em RA..78
Figura 24 – Respostas da tabela da 6ª atividade do Grupo 5.................................79
Figura 25 – Respostas dos itens a e b da 6ª atividade do Grupo 5 79
Figura 26 – Construções de pirâmides realizadas pelo Grupo 5 81
Figura 27 – Composição e decomposição do prisma pentagonal em prismas triangulares. 82
Figura 28 – Pirâmide de base pentagonal, exposta em RA....................................83
Figura 29 – Pirâmide de base triangular, exposta em RA.......................................83
Figura 30 – Respostas da décima e décima primeira questões da 8ª atividade pelo Grupo 3..83

Figura 31 – Composição do dodecaedro por 12 pirâmides....................................84
Figura 32 – Identificação de dois troncos de pirâmides no dodecaedro 85
Figura 33 – Respostas da terceira e quarta questões da 9ª atividade do Grupo 3 ..85
Figura 34 – Identificação de uma pirâmide no dodecaedro 86
Figura 35 – Composição e decomposição do dodecaedro por meio de pirâmides ..86
Figura 36 – Resposta da sétima questão da 9ª atividade do Grupo 3 86

Figuras presentes nos apêndices:

Figura 37 – Representação de figuras planas. 102
Figura 38 – Representação do quadrado com lados de 1 u.c...............................102
Figura 39 – Representação do quadrado de área unitária...................................102
Figura 40 – Quadrilátero formado por 6 quadrados de medida unitária.................103
Figura 41 – Quadrilátero formado por 12 quadrados de medida unitária 103
Figura 42 – Quadrilátero com medidas de área por conjuntos horizontais e verticais de quadrados unitários. 104
Figura 43 – Quadrilátero com referência de medidas por segmentos em seus lados. 104
Figura 44 – Quadrilátero com referência de dimensão em dois lados adjacentes. 105
Figura 45 – Quadrilátero com referência das dimensões por valores numéricos...105
Figura 46 – Interface do GeoGebra...108
Figura 47 – Configuração da Janela de Visualização do GeoGebra.....................109
Figura 48 – Triângulo ABC construído no GeoGebra 109
Figura 49 – Triângulo ABC com sua altura relativa ao vértice B. 110
Figura 50 – Triângulo ABC com sua altura relativa ao vértice B e o ponto D na base. 110
Figura 51 – Polígonos internos ao triângulo ABC. 112
Figura 52 – Polígono t1 e t2 e o triângulo ABC..113
Figura 53 – Projeção de paralelas em relação à base e à altura 113
Figura 54 – Demarcação dos vértices referentes aos encontros das perpendiculares. 114
Figura 55 – Formação dos polígonos t3 e t4. 117
Figura 56 – Demarcação das áreas dos polígonos t1, t2, t3 e t4. 117
Figura 57 – Pentágono regular. 121

Figura 58 – Pentágono regular com vértice no centro. 121
Figura 59 – Formação de triângulos semelhantes no pentágono regular. 122
Figura 60 – Triângulo ABF. 122
Figura 61 – Triângulo ABF com altura FG. 123
Figura 62 – Triângulo ABF com demarcação de ângulo...................................... 123
Figura 63 – Triângulo ABF com demarcação de altura, lado e ângulo 123
Figura 64 – Cubo com medida de volume unitário. 125
Figura 65 – Prisma formado por cubos de medida de volume unitário. 125
Figura 66 – Identificação da função de Realidade Aumentada no *Smartphone*..... 126
Figura 67 – Identificação de superfície pela Realidade Aumentada do GeoGebra 127
Figura 68 – Posicionamento do prisma em uma superfície 127
Figura 69 – Projeção do prisma na Realidade Aumentada.................................. 127
Figura 70 – Prisma formado por cubos de medida de volume unitário 128
Figura 71 – Prisma com referencia de nomenclatura para seus lados 129
Figura 72 – Polígono com controle deslizante no GeoGebra................................ 136
Figura 73 – Projeção de um polígono em 2D e 3D no GeoGebra......................... 136
Figura 74 – Projeção de uma pirâmide em 2D e 3D no GeoGebra....................... 137
Figura 75 – Alteração da base da pirâmide, para um polígono com oito lados, em 2D e 3D no GeoGebra 137
Figura 76 – Alteração da base da pirâmide, para um polígono com trinta lados, em 2D e 3D no GeoGebra 138
Figura 77 – Decomposição do prisma pentagonal em prismas triangulares. 143
Figura 78 – Construção de um segmento em 2D e 3D no GeoGebra. 147
Figura 79 – Recurso para criar um pentágono regular no GeoGebra. 148
Figura 80 – Pentágono regular em 2D e 3D no GeoGebra.................................. 148
Figura 81 – Face pentagonal e dodecaedro no GeoGebra.................................. 149
Figura 82 – Pirâmide de base pentagonal. 152
Figura 83 – Ângulo entre a base e a face lateral da pirâmide pentagonal. 152

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Critérios de inclusão e exclusão 20
Quadro 2 – Combinação das *strings* obtidas nas questões de pesquisa 24
Quadro 3 – Base de dados e Endereços eletrônicos..25
Quadro 4 – *Strings* e resultados de busca..25
Quadro 5 – Resultados da primeira busca no banco de dados da CAPES............27
Quadro 6 – Resultados da segunda busca no banco de dados da CAPES...........28
Quadro 7 – Resultados da terceira busca no banco de dados da CAPES.............28
Quadro 8 – Resultados da primeira busca no banco de dados da PUC-SP 29
Quadro 9 – Resultados da segunda busca no banco de dados da PUC-SP 30
Quadro 10 – Resultados da terceira busca no banco de dados da PUC-SP 30
Quadro 11 – Resultados da quarta busca no banco de dados da PUC-SP 31
Quadro 12 – Resultados da quinta busca no banco de dados da PUC-SP 32
Quadro 13 – Resultados da busca no banco de dados do Google Acadêmico........33
Quadro 14 – Seleção final das obras da Revisão de Literatura 35
Quadro 15 – Representação de retângulos com alterações no registro geométrico e registro numérico 61
Quadro 16 – Comparação das áreas do triângulo, do paralelogramo e do retângulo 62
Quadro 17 – Representação do pentágono e a identificação do seu ponto central .62

Quadros presentes nos apêndices:

Quadro 18 – Habilidades relacionadas com a competência especifica 3...............100
Quadro 19 – Habilidades relacionadas com a competência especifica 5...............101
Quadro 20 – Comparação entre prisma e pirâmide. 132

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **14**

2 PROBLEMÁTICA **18**

2.1 TRAJETÓRIA ACADÊMICA E PROFISSIONAL 18

2.2 PROCEDIMENTOS E DEFINIÇÃO DOS ESTUDOS ANALISADOS NA REVISÃO DE LITERATURA 19

2.2.1 Protocolo de Kitchenham e as questões que nortearam a Revisão de Literatura **21**

2.2.2 Estratégias de busca **23**

2.2.3 Bases de dados e processo de extração **24**

2.2.4 *Strings* de busca e resultados **25**

2.2.5 Análise e seleção das obras **26**

2.3 REVISÃO DE LITERATURA 36

2.3.1 Análise e descrição das obras **36**

2.3.2 Síntese das análises e concomitâncias com esta investigação **46**

2.4 JUSTIFICATIVA 48

3 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS **50**

4 REFERENCIAL TEÓRICO **53**

4.1 IDEIAS DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA UTILIZADAS NESTA INVESTIGAÇÃO. 53

4.2 O USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE GEOMETRIA 55

4.2.1 A Realidade Aumentada no ensino de Geometria Espacial **56**

5 O ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO **58**

5.1 A GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO 58

5.2 A CONSTRUÇÃO DO OBJETO MATEMÁTICO 59

5.2.1 Medida de área de superfície **60**

5.2.2 Medida de área do retângulo **60**

5.2.3 Medida de área do triângulo **61**

5.2.4 Medida de área do pentágono regular **62**

5.2.5 Medida de volume do prisma **65**

5.2.6 Medida de volume da pirâmide **66**

5.2.7 Medida de volume da pirâmide de base pentagonal e regular **66**

5.2.8 Medida de volume do dodecaedro **69**
6 A IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 70
6.1 PRIMEIRO MOMENTO 70
6.1.1 Primeira atividade **71**
6.1.2 Segunda atividade **73**
6.2 SEGUNDO MOMENTO 73
6.2.1 Terceira atividade **73**
6.2.2 Quarta atividade **75**
6.3 TERCEIRO MOMENTO 77
6.3.1 Quinta atividade **77**
6.3.2 Sexta atividade **78**
6.3.3 Sétima atividade **80**
6.4 QUARTO MOMENTO 81
6.4.1 Oitava atividade **82**
6.4.2 Nona atividade **84**
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS **88**
REFERÊNCIAS **91**
APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA **96**

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação apresenta o resultado de uma investigação na qual elaboramos e aplicamos uma Sequência Didática, para o 2º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública de Itapetinga - Bahia, com o objetivo de investigar o impacto do uso de uma Sequência Didática, abordando a medida do volume do dodecaedro regular por meio da composição e decomposição por pirâmides, fundamentada em algumas ideias da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS).

A fim de estruturar as estratégias didáticas empregadas na pesquisa, produção e análise dos dados, utilizamos algumas ideias da TRRS como visto em Duval (2009), considerando que o uso de registros de representação semióticas diferentes no estudo de um objeto matemático e a coordenação entre esses registros podem levar ao aprendizado dos conteúdos e conceitos intrínsecos a um objeto matemático.

Em relação à abordagem metodológica, esta pesquisa é classificada como qualitativa, uma vez que tanto os registros dos alunos quanto as observações tiveram o objetivo de compreender os raciocínios e as ações efetuadas por eles, devido à necessidade de utilizar “diferentes alegações de conhecimento, estratégias de investigação e métodos de coleta e análise de dados” (Creswell, 2010, p. 184).

Dessa forma, consideramos que o processo de desenvolvimento do conhecimento matemático, quanto à responsabilidade do professor, está intimamente relacionado aos métodos de abordagem, aprofundamento e progressão do conteúdo elaborado. E, ainda, que as teorias e metodologias matemáticas vêm dar suporte e aprimorar os processos de ensino e de aprendizagem, visto que as mais variadas formas de instigar o aluno ao contato com o objeto de aprendizagem são essenciais, tanto no despertar do interesse, quanto para facilitar sua assimilação, abstração, progressão e, consequentemente, a construção do conhecimento pelo estudante.

Para a escolha do objeto matemático, consideramos que o conhecimento em Geometria é fundamental para o ser humano, tanto para compreender situações do dia a dia quanto para fortalecer o pensamento lógico e habilidades dedutivas. Consideramos que existem objetos de difícil representação e visualização, o que muitas vezes pode prejudicar a compreensão de conceitos em situações de sala de aula, mesmo que abordados por ilustrações. E, por fim, que a Geometria, quase sempre negligenciada na Educação Básica, carece de estudos que possam contribuir para as discussões e reflexões da comunidade da Educação Matemática.

Assim, os objetos matemáticos foram escolhidos, levando em consideração a possibilidade de composição e decomposição entre os mesmos, o que resultou em uma das estruturas matemáticas geométricas, tida como complexa e menos abordada no Ensino Médio, que é o dodecaedro. Pois sua abordagem acontece apenas em relação à nomenclatura e contabilização dos elementos que o compõem, como vértices, arestas e faces. Então, propusemos estudar esse objeto matemático levando em consideração a abordagem por meio de outras figuras, que contribuiriam para a compreensão da medida do volume.

Quanto ao principal recurso didático utilizado neste estudo, consideramos que para facilitar os processos de ensino e de aprendizagem de objetos da Geometria faz-se necessário o uso de recursos computacionais como o GeoGebra, que permite representar e manipular os objetos em três dimensões e em Realidade Aumentada (RA). Nesse sentido, consideramos que a utilização de diferentes recursos, como materiais manipuláveis, *softwares* e artefatos tecnológicos, são destacados como uma maneira eficaz de promover a aprendizagem da Matemática e, consequentemente, da Geometria.

Nesse contexto, propusemos a questão de pesquisa: *de que maneira uma Sequência Didática elaborada a partir da composição e decomposição em pirâmides, com o uso do GeoGebra 3D, com ênfase na ferramenta Realidade Aumentada, pode contribuir para a compreensão do volume do dodecaedro regular pelos estudantes do 2º ano do Ensino Médio?*

A fim de responder essa questão de pesquisa, definimos como objetivo geral implementar e analisar uma Sequência Didática abordando a composição e decomposição em pirâmides com o uso do GeoGebra 3D com ênfase na Realidade Aumentada para desenvolver o estudo do volume do dodecaedro regular em uma turma de estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

Com o objetivo geral definido, elaboramos e aplicamos uma Sequência Didática para estudantes do segundo ano do Ensino Médio abordando os conceitos de composição e decomposição em pirâmides, relacionando-os à medida do volume do dodecaedro regular e definimos os objetivos específicos:

- Aplicar e analisar a Sequência Didática construída;

- Verificar as contribuições da Sequência Didática para a aprendizagem dos conceitos e propriedades do objeto matemático estudado, principalmente por meio do trânsito entre os sistemas de registros de representação semiótica;
- Propor recomendações e sugestões para o aprimoramento de práticas pedagógicas no ensino da Geometria Espacial, considerando os resultados obtidos na pesquisa e as reflexões teóricas desenvolvidas.

O trabalho está estruturado em sete capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma visão geral da pesquisa desenvolvida, tema abordado, questão de pesquisa, objetivo geral e objetivos específicos, que desenvolvem o produto da pesquisa.

O segundo capítulo informa a problemática desta pesquisa, com a trajetória acadêmica e profissional do autor, os procedimentos para a realização da Revisão de Literatura segundo o Protocolo Kitchenham e a Revisão de Literatura, na qual apresentamos os principais resultados de outras pesquisas relacionadas à que está sendo produzida, apontando as lacunas que justificaram esta pesquisa e contribuem para a delimitação da questão que norteia esta pesquisa.

No terceiro capítulo explicitamos a metodologia e os procedimentos metodológicos que conduziram este estudo, detalhamos o contexto, os sujeitos de pesquisa, o processo de desenvolvimento da Sequência Didática e o cronograma para sua implementação, bem como os processos de coleta e análise dos dados.

No quarto capítulo apresentamos o referencial teórico, apresentando ideias referentes à TRRS e como ela foi utilizada na investigação da Sequência Didática, a fim de identificar os possíveis processos aos quais os alunos recorrem durante a aprendizagem. Apresentamos também, a utilização das Tecnologias Digitais e suas contribuições durante a realização da proposta deste trabalho.

O quinto capítulo expõe os objetos matemáticos utilizados na Sequência Didática, aborda os elementos que compõem triângulos, quadrados, retângulos, pentágonos, prismas, pirâmides e o dodecaedro. Além de estabelecer relações entre os objetos e as expressões que possivelmente serão utilizadas pelos sujeitos da pesquisa.

No sexto capítulo discorremos sobre os momentos da aplicação da Sequência Didática, as produções realizadas pelos sujeitos e suas respectivas análises com base na TRRS.

Por fim, o sétimo capítulo traz as conclusões finais acerca da aplicação didática e os resultados, que analisamos no capitulo seis, a fim de responder a questão de pesquisa. Então, discutimos os entendimentos e apresentamos alguns resultados sobre a investigação. Isso posto, destacamos as contribuições potenciais que este estudo pode oferecer e sugerimos novas direções para pesquisas futuras que possam surgir a partir desta investigação.

No capítulo a seguir, apresentamos à problemática, que servirá para delimitar o tema e estabelecer um direcionamento para a pesquisa.

2 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo, trouxe a problemática que me levou a construir esta pesquisa, destacando a minha trajetória profissional e as lacunas que encontrei na literatura, que a justificaram.

Optei por utilizar, nesta introdução e na próxima seção, que tratou da minha trajetória profissional, a primeira pessoa do verbo no singular. No entanto, nas seções seguintes, voltei a utilizar a primeira pessoa do verbo no plural considerando que este estudo foi construído por mim, minha orientadora e as diversas vozes que contribuíram para sua produção.

Assim, neste capítulo, apresentei à justificativa pela qual o tema foi escolhido, as motivações, a correlação de temas que envolvem o produto desenvolvido, o uso das Tecnologias Digitais nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática e a utilização da Realidade Aumentada; apresentei também, a Revisão de Literatura, na qual analisei trabalhos relacionados ao que foi produzido.

2.1 TRAJETÓRIA ACADÊMICA E PROFISSIONAL

Minha trajetória acadêmica é marcada por uma profunda paixão pela Geometria desde os primeiros anos de minha jornada acadêmica. Durante a Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), participei de diversos programas que a instituição disponibilizou, como a monitoria voluntária para a disciplina de Prática como Componente Curricular IV, o Programa de Iniciação Científica, com ênfase em Educação Matemática e Álgebra, atuando principalmente no tema de Álgebra não-comutativa, e o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), programa no qual permaneci por mais tempo e cujas atividades desenvolvidas foram voltadas para a área da Geometria.

Ao explorar algumas áreas da Matemática na graduação, a Geometria foi a que mais tive contato e a que mais me intrigou, devido à possibilidade de tornar os objetos visuais, manipuláveis e integrados com outras áreas da Matemática, colaborando para a apreensão do conteúdo e, assim, auxiliando nas etapas da prática docente.

Durante a minha jornada profissional, atuando em uma escola pública da cidade à qual pertenço, os alunos relataram dificuldades na compreensão dos objetos matemáticos espaciais, principalmente dos sólidos que possuem grande quantidade de faces, devido à capacidade de visualizar e imaginar os elementos que compõem tais objetos.

Deste modo, a motivação para a presente proposta surgiu da observação das angustias frequentemente enfrentadas e relatadas pelos alunos ao estudar Geometria, especialmente no que diz respeito à compreensão do espaço tridimensional. Este desafio requer a habilidade de elaborar ou reconhecer representações de objetos matemáticos que estão em uma dimensão para outra dimensão, como a planificação de objetos espaciais, bem como a capacidade cognitiva de visualizar mentalmente seus elementos, que muitas vezes não estão facilmente expostos ou perceptíveis.

Destarte, após apresentar minha trajetória, na qual foram evidenciados os anseios e inquietudes que considerei relevantes para realizar um estudo abordando a composição e a decomposição de figuras geométricas para o cálculo da medida do volume do dodecaedro regular, apresento na próxima seção os procedimentos utilizados para a seleção das obras analisadas na Revisão de Literatura, seguida desta revisão. Vale ressaltar que esta problemática não se limita às minhas percepções, mas também às lacunas observadas nos estudos da comunidade da Educação Matemática.

Passamos então para a próxima seção.

2.2 PROCEDIMENTOS E DEFINIÇÃO DOS ESTUDOS ANALISADOS NA REVISÃO DE LITERATURA

Utilizamos a abordagem metodológica, seguindo o Protocolo estabelecido por Kitchenham (2004). Essa abordagem visa garantir a validade e a confiabilidade dos resultados da pesquisa ao empregar padrões, diretrizes e processos de forma a garantir uma revisão holística e de qualidade dos trabalhos acadêmicos publicados.

O Protocolo incluiu definições claras de elementos da revisão: planejamento da revisão, condução da revisão, síntese dos resultados, relato da revisão e avaliação da revisão. Essas etapas permitiram definir as questões de pesquisa, palavras-chave, *string*[1] de busca, fontes de publicações, sujeitos de estudo, teóricos principais, metodologias aplicadas, resultados principais e critérios de inclusão e exclusão de trabalhos, os quais foram explorados para retratar o processo de seleção dos estudos relevantes, visando atingir os objetivos da pesquisa.

A revisão foi dividida em cinco seções; na primeira foi escolhida uma abordagem metodológica que norteava o processo de seleção e análise das produções. A segunda seção foi dedicada para a delimitação das questões que nortearam a determinação das *strings* de busca, conforme o objetivo do trabalho aqui proposto. Na terceira seção foi definida a estratégia de busca, escolhidos os bancos de dados e formados as *strings* de busca, além da apresentação dos resultados da aplicação das *strings* nos bancos de dados, a fim de tornar o processo replicável e confiável. Na quarta seção, foram verificadas as produções que atendiam aos processos de seleção de trabalhos relevantes sobre o tema, identificados na leitura das produções, resultando em 20 trabalhos selecionados. Por fim, a quinta seção apresenta os trabalhos selecionados e uma breve introdução das produções, suas fundamentações, os sujeitos da pesquisa, os questionamentos da pesquisa e as motivações.

Para as etapas de seleção das produções, foram aplicados os critérios de inclusão e exclusão, presentes no Quadro 1, a fim de filtrar as produções que estão de acordo com o que é proposto neste trabalho.

Quadro 1 – Critérios de inclusão e exclusão

(I) Critérios de Inclusão
(I. 1) Estudos que estão relacionados às questões norteadoras da Revisão de Literatura;
(I. 2) Estudos que estão relacionados com os objetivos da pesquisa;
(I. 3) Estudos que abordam os elementos descritos nas palavras-chave.
(E) Critérios de Exclusão
(E. 1) Estudos que não estão disponibilizados integralmente e de forma gratuita;
(E. 2) Estudos que não abordaram sequências didáticas ou transposição didática[2];
(E. 3) Estudos publicados em que a Geometria não é o foco na área da Matemática;
(E. 4) Estudos que não são destinados para o público do Ensino Médio.

Fonte: De autoria própria (2023).

[1] *String* é uma sucessão ordenada de caracteres que possibilita a representação de nomes, endereços e outras informações textuais.
[2] A transposição didática é um processo pelo qual o saber científico é transposto para o conhecimento didático, voltado para a sala de aula.

A seguir, apresentamos o Protocolo de Kitchenham e sua aplicação juntamente com as questões de pesquisa, por nós elaborados, que conduziram à Revisão de Literatura.

2.2.1 Protocolo de Kitchenham e as questões que nortearam a Revisão de Literatura

A definição das questões que norteiam a Revisão de Literatura é considerada um elemento crucial no planejamento da Revisão Sistemática de Literatura (RSL), pois segundo Kitchenham e Charters (2007), elas orientam a busca, auxiliando o pesquisador na seleção de trabalhos relevantes.

Barbara Kitchenham, renomada pesquisadora na área de Engenharia de *Software*, desenvolveu o Protocolo de Kitchenham, que é amplamente utilizado nas mais variadas áreas do conhecimento e oferece uma estrutura para planejar, conduzir e relatar revisões sistemáticas, garantindo que o processo seja transparente, replicável e livre de vieses. Os passos que envolvem o Protocolo, segundo Kitchenham e Charters (2007), são: o Planejamento, a Busca de Estudos, a Seleção de Estudos, a Extração de Dados, Avaliação da Qualidade dos Estudos, a Síntese dos Resultados e a Interpretação e Relato.

1. Planejamento: Nesta fase inicial, define-se o escopo da revisão sistemática, incluindo os objetivos, as questões de pesquisa e os critérios de inclusão e exclusão dos estudos a serem analisados. Também é elaborado um protocolo detalhado que descreve o método a ser seguido durante toda a revisão (Kitchenham; Charters, 2007).
2. Busca de Estudos: Nesta etapa, realiza-se uma busca abrangente e sistemática da literatura relevante em bases de dados acadêmicas, bibliotecas digitais e outras fontes pertinentes. A busca deve ser conduzida para minimizar o viés e garantir que todos os estudos relevantes sejam identificados (Kitchenham; Charters, 2007).
3. Seleção de Estudos: Os estudos identificados na busca são avaliados quanto à sua relevância conforme os critérios pré-definidos. Essa seleção é geralmente realizada em duas fases: uma triagem inicial com base nos títulos e resumos, seguida de uma avaliação mais detalhada dos textos

completos dos estudos selecionados na triagem inicial (Kitchenham; Charters, 2007).

4. Extração de Dados: Os dados relevantes de cada estudo incluído na revisão são extraídos de forma sistemática e registrados de acordo com um formato predefinido. Esses dados geralmente incluem informações sobre os participantes do estudo, métodos, resultados e conclusões (Kitchenham; Charters, 2007).
5. Avaliação da Qualidade dos Estudos: Os estudos incluídos na revisão são avaliados quanto à sua qualidade metodológica. Isso pode ser feito usando ferramentas padronizadas de avaliação da qualidade, como escalas de pontuação ou listas de verificação (Kitchenham; Charters, 2007).
6. Síntese dos Resultados: Os resultados dos estudos incluídos na revisão são sintetizados e analisados de forma sistemática. Isso pode envolver a realização de meta-análises, se apropriado, ou uma análise narrativa dos resultados (Kitchenham; Charters, 2007).
7. Interpretação e Relato: Os resultados da revisão são interpretados à luz dos objetivos e questões de pesquisa da revisão. Os achados são então relatados de forma clara e precisa, seguindo as diretrizes de relato específicas para revisões sistemáticas (Kitchenham; Charters, 2007).

Nesse contexto, realizamos o passo 1 nas seções 2.3.1 e 2.3.2; os passos 2 e 3 na seção 2.3.3; o passo 4 na seção 2.3.4 e os passos 5, 6 e 7 na seção 2.3.5.

Assim, para iniciar a Revisão Sistemática de Literatura, foram delineadas três questões principais (QP) para este estudo, com o propósito de relacionar ao objetivo definido para este trabalho. As questões são:

- QP1: Como as Tecnologias Digitais, especialmente o GeoGebra, têm sido empregadas no contexto escolar?
- QP2: Quais foram os procedimentos e abordagens metodológicas predominantes nos estudos analisados?
- QP3: Quais foram os Teóricos principais que nortearam o desenvolvimento dos estudos?

A partir das questões, foram formuladas três questões secundárias (QS) visando orientar a definição de *strings* de busca para facilitar a análise dos estudos selecionados:

- QS1: Quais objetos matemáticos são explorados no GeoGebra?

- QS2: Para qual público os estudos estão sendo realizados?
- QS3: Qual o produto que pretende ser desenvolvido pelo estudo?

2.2.2 Estratégias de busca

Para delinear o escopo da pesquisa, foram estabelecidos alguns critérios na condução da revisão para garantir a confiabilidade, a viabilidade da execução e reprodução da revisão, permitindo o acesso aos dados e a abrangência do estudo. Para a busca, por opção do autor, foram utilizados bancos de publicações digitais de instituições relevantes no Brasil, além de considerar que os objetos matemáticos e as teorias subjacentes mantiveram sua relevância ao longo do tempo. Foram utilizados trabalhos publicados nos últimos 25 anos e em quatro repositórios digitais: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), *Scientific Electronic Library Online* (SciELO) e Google Acadêmico.

Esses repositórios direcionam a busca das *strings* por meio da identificação dos termos no próprio texto. Desse modo, ocorre a seleção do trabalho, mesmo que o termo seja apenas uma referência utilizada pelo autor e não necessariamente relacionado com a característica do trabalho. Assim, realizamos a inclusão ou exclusão com base nos critérios definidos.

A CAPES e a PUC são nacionais. A CAPES foi escolhida devido ao fato de ser uma das principais instituições brasileiras para pesquisadores acadêmicos. Enquanto a PUC de São Paulo (PUC-SP) foi escolhida devido à representatividade da universidade nas instituições nacionais e internacionais e à dimensão do banco de dados. A PUC-SP também possui grupos de pesquisa especializados na temática abordada, o que confere a essa instituição uma representatividade significativa nos estudos relacionados com este que está sendo desenvolvido.

O repositório da SciELO é uma plataforma online que reúne e disponibiliza uma vasta quantidade de periódicos científicos de acesso aberto, principalmente de países da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal, possibilitando a visibilidade, acessibilidade e qualidade da produção científica dessas regiões.

No banco de dados do Google Acadêmico, foi realizada uma busca que incluiu o banco de dados do PROFMAT, então não há perda na Revisão de Literatura deste local. Além disso, é gratuita e acessível a qualquer pessoa, tornando-se uma das principais fontes de pesquisa acadêmica online em todo o mundo.

Para encontrarmos os estudos desejados nas bases de trabalhos acadêmicos, definimos, primeiramente, as *strings* de busca a partir da junção das palavras-chave relacionadas às questões de pesquisa. As palavras-chave referenciaram o que queríamos obter nos trabalhos pesquisados, como produtos produzidos, metodologia, recursos e objetos matemáticos utilizados. Assim, utilizamos a composição das *strings* a fim de tornar a busca mais efetiva, as quais estão dispostas no Quadro 2.

Quadro 2 – Combinação das *strings* obtidas nas questões de pesquisa

Combinação de *Strings*
"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica"
"Realidade Aumentada" AND "Geometria" AND "Semiótica"
"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica" AND "Realidade Aumentada"
"Sequência Didática" AND "Geometria Plana" OR "Geometria Espacial" AND "Semiótica"
"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica" AND "Dodecaedro"

Fonte: De autoria própria (2023).

Obtidas as *strings* e selecionados os locais para a obtenção dos trabalhos, definimos os respectivos locais de acesso para cada banco, conforme especificado na seção seguinte.

2.2.3 Bases de dados e processo de extração

A busca pelos estudos primários ocorreu por meio da consulta às principais bases eletrônicas e científicas de dados, visando responder às questões QP1 a QP3 e QS1 a QS3. Essa Revisão Sistemática de Literatura (RSL) concentra-se exclusivamente na busca automática. As bases bibliográficas utilizadas para a obtenção dos estudos estão dispostas no Quadro 3, juntamente com os endereços virtuais das páginas.

Quadro 3 – Base de dados e Endereços eletrônicos

Base de dados	**Endereços eletrônicos**
Periódico da CAPES	https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/
Repositório PUC-SP	https://tede2.pucsp.br/
SciELO	https://www.scielo.org
Google Acadêmico	https://scholar.google.com.br

Fonte: De autoria própria (2023).

Na seção seguinte, trazemos resultados obtidos pelo processo de busca nos bancos de obras acadêmicas.

2.2.4 *Strings* de busca e resultados

No Quadro 4, estão dispostos a síntese de resultados com base nos bancos de pesquisa e as *strings* com seus operadores. Alguns resultados retornaram valores muito altos, então foi necessária a utilização de filtros disponibilizados nos próprios bancos de busca. Os filtros foram detalhados na filtragem de cada busca, disposta na seção 1.6.7 e as informações foram obtidas e atualizadas até 19 de fevereiro de 2024.

Quadro 4 – *Strings* e resultados de busca

Operadores	***Strings* de busca**	**Resultados**	**Local**
OR / AND	"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica"	*31*	CAPES
	"Realidade Aumentada" AND "Geometria" AND "Semiótica"	*1*	CAPES
	"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica" AND "Realidade Aumentada"	*0*	CAPES
	"Sequência Didática" AND "Geometria Plana" OR "Geometria Espacial" AND "Semiótica"	*2*	CAPES
	"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica" AND "Dodecaedro"	*0*	CAPES
	"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica"	*299*	REPOSITÓRIO PUC-SP
	"Realidade Aumentada" AND "Geometria" AND "Semiótica"	*44*	REPOSITÓRIO PUC-SP
	"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica" AND "Realidade Aumentada"	*10*	REPOSITÓRIO PUC-SP
	"Sequência Didática" AND "Geometria Plana" OR "Geometria Espacial" AND "Semiótica"	*68*	REPOSITÓRIO PUC-SP
	"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica" AND "Dodecaedro"	*12*	REPOSITÓRIO PUC-SP

(conclusão)

Operadores	Strings de busca	***Resultados***	Local
OR / AND	"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica"	*0*	SciELO
	"Realidade Aumentada" AND "Geometria" AND "Semiótica"	*0*	SciELO
	"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica" AND "Realidade Aumentada"	*0*	SciELO
	"Sequência Didática" AND "Geometria Plana" OR "Geometria Espacial" AND "Semiótica"	*0*	SciELO
	"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica" AND "Dodecaedro"	*0*	SciELO
	"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica"	*1600*	GOOGLE ACADÊMICO
	"Realidade Aumentada" AND "Geometria" AND "Semiótica"	*349*	GOOGLE ACADÊMICO
	"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica" AND "Realidade Aumentada"	*63*	GOOGLE ACADÊMICO
	"Sequência Didática" AND "Geometria Plana" OR "Geometria Espacial" AND "Semiótica"	*514*	GOOGLE ACADÊMICO
	"Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica" AND "Dodecaedro"	*35*	GOOGLE ACADÊMICO

Fonte: De autoria própria (2023).

Na próxima seção são apresentados os procedimentos para a obtenção, filtragem, exclusão e seleção das obras obtidas em cada banco de obras acadêmicas.

2.2.5 Análise e seleção das obras

Nesse momento, apresentamos o relatório da revisão das obras que foram analisadas a partir de uma leitura crítica. Em seguida, foi realizada a extração de informações das obras aprovadas segundo os critérios de exclusão e identificadas, como *Não Excluídas*, as obras reprovadas pelos critérios de exclusão foram identificadas quanto a justificativa de exclusão pertinente disposta no Quadro 1. As ordens em que os trabalhos foram dispostos nos Quadros vão da numeração 05 à 13 e seguem as ordens apresentadas pelos repositórios de onde foram obtidas.

Iniciamos a etapa de Revisão de Literatura com a base de dados da CAPES, seguindo a ordem das *strings* descrita no Quadro 4. Assim, com base nas combinações das *strings*, os resultados retornam somente três situações diferentes de zero. Logo, analisamos somente esses três casos.

Ao consultarmos o banco de dissertações e teses da CAPES com a seguinte busca: "Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica", encontramos trinta e um trabalhos, conforme mostra o Quadro 5.

Quadro 5 – Resultados da primeira busca no banco de dados da CAPES

Autores (ano)	**Títulos das obras**	**Critério de exclusão**
Andrade (2011)	"Geometria Esférica: uma Sequência Didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico"	*Não Excluída*
Silva (2012)	Uma Proposta Para o Ensino da Noção de Taxa de Variação Instantânea no Ensino Médio	(E. 3)
Silva (2011)	Conhecimento de professores polivalentes em geometria: contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica	(E. 4)
Possani (2012)	Uma Sequência Didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular.	*Não Excluída*
Neto (2010)	Registro De Representação Semiótica com o GeoGebra: um ensaio para o ensino das funções trigonométricas	(E. 3)
Scano (2009)	Função afim: uma Sequência Didática envolvendo atividades com o GeoGebra.	(E. 3)
Moreira (2004)	Representações gráficas: investigando apreensões perceptivas e operatórias em alunos do curso de licenciatura em Matemática.	(E. 3)
Paula (2011)	Mobilização e articulação de conceitos de geometria plana e de álgebra em estudos da geometria analítica	(E. 3)
Ferreira (2007)	Demonstrações em geometria euclidiana: o uso da Sequência Didática como recurso metodológico em um curso de licenciatura de Matemática	*Não Excluída*
Piza (2009)	Registros de Representação Semiótica e uso Didático da História da Matemática: um estudo sobre parábola	(E. 3)
Arrebola (2013)	Uma Sequência Didática sobre transformações lineares em um ambiente de geometria dinâmica	(E. 3)
Paulo (2012)	Uma proposta para o ensino e aprendizagem dos conceitos de área de círculo e perímetro de circunferência.	*Não Excluída*
Lopes (2014)	Uma Sequência Didática para o ensino de parábola enquanto lugar geométrico	(E. 3)
Miranda (2009)	Um sistema baseado em conhecimento com interface em língua natural para o ensino de transformações geométricas	*Não Excluída*
Vizolli (2001)	Registro de representação semiótica no estudo de percentagem.	(E. 3) e (E. 4)
Vieira (2008)	Análise exploratória de dados: uma abordagem com alunos do Ensino Médio	(E. 3)
Martins (2012)	Instrumentos virtuais de desenho e a argumentação em geometria	*Não Excluída*
Silva (2006)	Explorando equações cartesianas e paramétricas em um ambiente informático	(E. 3)
Oliveira (2015)	Análise de Sequência Didática sobre funções lineares afins em um ambiente de geometria dinâmica	(E. 3)
Barbosa (2018)	Aprendizagem significativa do conceito de polígono: uma Sequência Didática para o sexto ano do ensino fundamental	(E. 4)
Neto (2020)	Funções trigonométricas e fenômenos periódicos: Uma proposta metodológica	(E. 3)
Dallemole (2010)	Registros de Representação Semiótica e geometria analítica: uma experiência com o ambiente virtual siena	(E. 3)

(conclusão)

Autores (ano)	Títulos das obras	Critério de exclusão
Oliveira (2010)	Números Complexos - um estudo dos Registros de Representação e de aspectos gráficos.	(E. 3)
Cardia (2007)	Integrando a geometria com a álgebra na construção de expressões algébricas	(E. 4)
Castro (2001)	Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação.	(E. 3)
Santos (2021)	Ensino de pirâmides no Ensino Médio: uma Sequência Didática apoiada na Teoria de Registro de Representação Semiótica	*Não Excluída*
Ferraz (2010)	Prisma e pirâmide: um estudo didático de uma abordagem computacional.	*Não Excluída*
Kiefer (2020)	Área de figuras planas: uma análise de produções *stricto sensu*	(E. 2)
Santos (2002)	Mensuração, Algarismos Significativos e Notação Científica: um estudo diagnóstico do processo Ensino-Aprendizagem, considerando o cálculo e a precisão de medidas.	(E. 3)
Carvalho (2020)	Abordagens e descritores de pesquisas sobre o ensino de números complexos realizadas no período de 1992 a 2017: um percurso para a meta-análise	(E. 2) e (E. 3)
Lucas (2019)	O *software* geogebra no ensino de funções para licenciados em matemática: uma abordagem sociocultural.	(E. 3)

Fonte: De autoria própria (2023).

De acordo com os critérios definidos, identificamos oito trabalhos passíveis de análise nesta revisão.

Em uma nova busca, utilizando as *strings* "Realidade Aumentada" AND "Geometria" AND "Semiótica", foi encontrado apenas um trabalho que está em conformidade com os critérios definidos, exposto no Quadro 6.

Quadro 6 – Resultados da segunda busca no banco de dados da CAPES

Autores (ano)	Títulos das obras	Critério de exclusão
Duarte (2021)	Realidade Aumentada no ensino e aprendizagem dos sólidos geométricos	*Não Excluída*

Fonte: De autoria própria (2023).

Para a última busca, foi utilizada a combinação de *strings* dada por "Sequência Didática" AND "Geometria Plana" OR "Geometria Espacial" AND "Semiótica", que resultou em duas obras, dispostas no Quadro 7.

Quadro 7 – Resultados da terceira busca no banco de dados da CAPES.

Autores (ano)	Títulos das obras	Critério de exclusão
Possani (2012)	Uma Sequência Didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular.	*Não Excluída*

(conclusão)

Autores (ano)	Títulos das obras	Critério de exclusão
Santos (2021)	Ensino de pirâmides no Ensino Médio: uma Sequência Didática apoiada na teoria de registro de representação semiótica	*Não Excluída*

Fonte: De autoria própria (2023).

Finalizado o processo de busca no banco de dados da CAPES, realizamos o mesmo processo no repositório da PUC-SP; ao utilizar as strings "Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica", encontramos duzentas e noventa e nove dissertações, sendo duzentas e sessenta e seis relacionadas à área do conhecimento de “CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA”, conforme disponível no local de busca. A fim de tornar as buscas mais precisas e com uma quantidade menor de resultados, foram utilizados os filtros, disponíveis também no site, para delimitar o “ASSUNTO”, e selecionamos “Educação Matemática”, resultando em cinquenta e sete trabalhos. Por fim, também foi selecionada “Sequência Didática” no filtro “ASSUNTO”, resultando em cinco trabalhos. Depois de analisados com base nos critérios de exclusão, esses estudos foram apresentados no Quadro 8.

Quadro 8 – Resultados da primeira busca no banco de dados da PUC-SP

Autores (ano)	Títulos das obras	Critério de exclusão
Mello (1999)	Demonstração: uma Sequência Didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria	(E. 4)
Haruna (2000)	Teorema de Thales: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem	(E. 4)
Bastian (2000)	O Teorema de Pitágoras	(E. 4)
Armando (2002)	Sistema de inequações do 1º grau: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações	(E. 3)
Oliveira (1997)	Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem	(E. 3)

Fonte: De autoria própria (2023).

Os resultados das *strings* “Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica", resultaram em nenhuma obra qualificada de acordo com os critérios de inclusão e exclusão. Então, foi realizada nova busca, e, alterando as *strings* para: "Realidade Aumentada" AND "Geometria" AND "Semiótica", foram obtidas quarenta e quatro obras como resultado. Posteriormente, aplicamos o filtro “Áreas do conhecimento", com a opção “CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA”, obtendo seis resultados, que estão dispostos no Quadro 9.

Quadro 9 – Resultados da segunda busca no banco de dados da PUC-SP

Autores (ano)	**Títulos das obras**	**Critério de exclusão**
Santos (2016)	O estado da Arte das pesquisas brasileiras sobre geometria analítica no período de 1991 a 2014	(E. 2)
Siqueira (2021)	Um modelo didático de referência baseado em atividades de estudo e investigação para o ensino de cônicas na escola básica	*Não Excluída*
Freitas (2019)	Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta	(E. 2) e (E. 4)
Okamoto (2021)	Processos e subprocessos do pensamento matemático avançado identificados nas habilidades do pensamento computacional	(E. 2), (E. 3) e (E. 4)
Geronimo (2021)	Uma proposta para o ensino do teorema de Tales com gamificação	(E. 4)
Takinaga (2023)	Ensino da Matemática para alunos com Transtorno do Espectro Autista: um estudo sobre o planejamento de tarefas na perspectiva da Teoria da Objetivação	(E. 3)

Fonte: De autoria própria (2023).

Após a aplicação dos critérios de inclusão e exclusão, apenas uma obra estava de acordo com os parâmetros do Quadro 1.

Realizando outra busca, utilizando as *strings* "Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica" AND "Realidade Aumentada", obtivemos apenas dez resultados, dispostos no Quadro 10, dos quais apenas um estava de acordo com os critérios apontados no Quadro 1.

Quadro 10 – Resultados da terceira busca no banco de dados da PUC-SP

Autores (ano)	**Títulos das obras**	**Critério de exclusão**
Santos (2016)	O estado da Arte das pesquisas brasileiras sobre geometria analítica no período de 1991 a 2014	(E. 2)
Siqueira (2021)	Um modelo didático de referência baseado em atividades de estudo e investigação para o ensino de cônicas na escola básica	*Não Excluída*
Freitas (2019)	Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta	(E. 2) e (E. 4)
Geronimo (2021)	Uma proposta para o ensino do teorema de Tales com gamificação	(E. 4)
Okamoto (2021)	Processos e subprocessos do pensamento matemático avançado identificados nas habilidades do pensamento computacional	(E. 2), (E. 3) e (E. 4)
Takinaga (2023)	Ensino da Matemática para alunos com Transtorno do Espectro Autista: um estudo sobre o planejamento de tarefas na perspectiva da Teoria da Objetivação	(E. 3)
Corrêa (2021)	Tecelãs(ões) da vida, artesãs(ões) de si mesmas(os): transletramento em TEIA e aprendizagem da linguagem de programação por profissionais da Educação Básica	(E. 3) e (E. 4)

(conclusão)

Autores (ano)	Títulos das obras	Critério de exclusão
Silva (2019)	Imersão nas tecnologias digitais para educação: uma experiência pedagógica no curso de Pedagogia da PUC-SP	(E. 2), (E.3) e (E. 4)
Arruda (2012)	Planejamento de aula e o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação: percepção de docentes do Ensino Médio	(E. 2) e (E. 3)
Mandaio (2021)	Integração currículo e tecnologia educacional no ensino fundamental: web currículo na prática	(E. 2), (E. 3) e (E. 4)

Fonte: De autoria própria (2023.

Utilizando as *strings* “Sequência Didática” AND "Geometria Plana" OR "Geometria Espacial" AND "Semiótica", conseguimos sessenta e oito dissertações como resultado da pesquisa. A fim de delimitar ainda mais os resultados, acrescentamos o filtro “ASSUNTO”, escolhendo a opção “Matemática - Estudo e ensino”, desse modo, obtivemos quatorze trabalhos, que foram analisados quanto aos critérios elaborados no Quadro 1 e inseridos no Quadro 11.

Quadro 11 – Resultados da quarta busca no banco de dados da PUC-SP

Autores (ano)	Títulos das obras	Critério de exclusão
Ferraz (2010)	Prisma e pirâmide: um estudo didático de uma abordagem computacional	*Não Excluída*
Silva (2006)	Explorando equações cartesianas e paramétricas em um ambiente informático	(E. 3)
Junho (2003)	Panorama das dissertações de educação matemática sobre o ensino superior da PUC/SP de 1994 a 2000	(E. 2) e (E. 3)
Vieira (2008)	Análise exploratória de dados: uma abordagem com alunos do Ensino Médio	(E. 3)
Maciel (2004)	O conceito de semelhança: uma proposta de ensino	*Não Excluída*
Miranda (2009)	Um sistema baseado em conhecimento com interface em língua natural para o ensino de transformações geométricas	*Não Excluída*
Tojo (2006)	Concepção de uma Sequência Didática para o ensino/aprendizagem da congruência	*Não Excluída*
Bilac (2008)	Possibilidades da aprendizagem de transformações geométricas com o uso do Cabri-Géomètre	(E. 4)
Imafuku (2008)	Sobre a passagem do estudo de função de uma variável real para o caso de duas variáveis	(E. 2) e (E. 3)
Secco (2007)	Conceito de área: da composição e decomposição de figuras até as fórmulas	(E. 4)
Carvalho (2007)	Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do Ensino Médio	(E. 2) e (E. 3)
Corrêa (2010)	O conhecimento profissional e a abordagem do ensino da probabilidade: um estudo de caso	(E. 2) e (E. 3)
Costa (2004)	A perspectiva no olhar: ciência e arte do renascimento	(E. 2)
Fernandes (2004)	Uma análise Vygotskiana da apropriação do conceito da simetria por aprendizes sem acuidade visual	(E. 2)

Fonte: De autoria própria (2023).

A última busca no repositório da PUC-SP resultou em doze obras ao aplicar as *strings* "Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica" AND "dodecaedro". Essas obras foram relacionadas no Quadro 12.

Quadro 12 – Resultados da quinta busca no banco de dados da PUC-SP

Autores (ano)	**Títulos das obras**	**Critério de exclusão**
Santos (2016)	Construção e medida de volume dos poliedros regulares convexos com o Cabri 3D: uma possível Transposição Didática	*Não Excluída*
Almeida (2010)	Sólidos arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento	*Não Excluída*
Possani (2012)	Uma Sequência Didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular	*Não Excluída*
Sanchez (2018)	Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre Geometria Espacial: período 2007 a 2017	(E. 2)
Carvalho (2008)	Análise da organização didática da Geometria Espacial métrica nos livros didáticos	(E. 2)
Salazar (2009)	Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço	*Não Excluída*
Nobre (2018)	As dimensões do domínio afetivo identificadas em alunos com indicação de fracasso em matemática escolar, durante uma Sequência Didática envolvendo a geometria	(E. 4)
Marquetti (2015)	O uso de tecnologias digitais para a compreensão da construção de sólidos a partir de suas propriedades	*Não Excluída*
Luna (2009)	Estudo das trajetórias hipotéticas da aprendizagem de Geometria Espacial para o Ensino Médio na perspectiva construtivista	(E. 2)
Santos (2007)	Formação continuada de professores em geometria por meio de uma plataforma de educação à distância: uma experiência com professores de Ensino Médio	(E. 2)
Maia (2022)	Estado da arte de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais no Brasil (1997 – 2021): um olhar sobre materiais e tecnologias	(E. 2) e (E. 3)
Barbosa (2008)	O teorema fundamental da aritmética: jogos e problemas com alunos do sexto ano do ensino fundamental	(E. 3)

Fonte: De autoria própria (2023).

Após concluir a etapa de pesquisa na base de dados da PUC-SP, demos início à investigação utilizando o repositório da SciELO.

O Repositório da SciELO conta com publicações de dezesseis países, sendo eles: África do Sul, Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Costa Rica, Cuba, Equador, Espanha, Índias Ocidentais, México, Paraguai, Peru, Portugal e Uruguai. Porém, não foram encontrados resultados ao utilizar as *strings* de busca.

Concluída a busca no banco de dados da SciELO, avançamos para o próximo estágio, que foi a consulta ao repositório do Google Acadêmico. Para a primeira busca, utilizamos as *strings* "Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica", que resultou em mil quinhentas e noventa publicações. Deste modo, foi necessário utilizar a pesquisa avançada, colocamos o critério “sem as palavras” e informamos “PUC AND PUC-SP”, a fim de excluir as dissertações já encontradas nos repositórios anteriores. Informamos também “Ensino Médio” no campo “com a expressão exata”, a fim de obter o filtro referente à fase escolar.

O banco de produções, disponibilizado pelo Google Acadêmico, permite a filtragem das informações apenas por data, ordem de relevância, idioma, tipo e inclusões de patente, e citação. Sendo assim, a filtragem fica apenas na utilização das *strings*, pois a combinação de *strings* "Sequência Didática" AND "Geometria" AND "Semiótica" AND "dodecaedro", é bem objetiva e retorna uma quantidade mais plausível para análise das obras. Dessa maneira, analisamos trinta e cinco dissertações, que, resultantes dessa busca, foram dispostas no Quadro 13.

Quadro 13 – Resultados da busca no banco de dados do Google Acadêmico

Autores (ano)	**Títulos das obras**	**Critério de exclusão**
Santos (2021)	Ensino de pirâmides no Ensino Médio: uma Sequência Didática apoiada na Teoria de Registro de Representação Semiótica	*Não Excluída*
Nobre (2018)	As dimensões do domínio afetivo identificadas em alunos com indicação de fracasso em matemática escolar, durante uma Sequência Didática envolvendo a geometria	(E.4)
Possani (2012)	Uma Sequência Didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular	*Não Excluída*
Brandt (2018)	O desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em Geometria segundo raymond duval: uma articulação com o ambiente dinâmico GeoGebra	(E.4)
Silva (2016)	O *software* Cabri 3D como instrumento para o ensino de Geometria Espacial no Ensino Fundamental	(E.4)
Scheifer (2017)	Design metodológico para análise de atividades de geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica	(E.2)
Carvalho (2008)	Análise da organização didática da Geometria Espacial métrica nos livros didáticos	(E.2)
Santos (2020)	Medida de Volume do Dodecaedro e do Icosaedro: Novos Desafios e Estratégias Inovadoras	(E.1) e (E.2)
Santos (2016)	Construção e medida de volume dos poliedros regulares convexos com o Cabri 3D: uma possível transposição didática	*Não Excluída*
Lima (2017)	Uma Sequência Didática para o ensino de poliedros explorando o movimento lógico-histórico do conceito	(E.4)
Oliveira (2016)	Reconfiguração e matemágica: um caminho para a aprendizagem de geometria	(E.1) e (E.4)
Medeiros (2012)	Geometria Dinâmica no Ensino de Transformações no Plano: uma experiência com professores da Educação Básica	(E.4)
Novak (2018)	O ambiente dinâmico GeoGebra para o desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em Geometria segundo Raymond Duval: olhares, apreensões e desconstrução dimensional	(E.4)
Sanchez (2018)	Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre Geometria Espacial: período 2007 a 2017	(E.2)

(conclusão)

Autores (ano)	Títulos das obras	Critério de exclusão
Santos (2022)	Lemas de Kaplansky, Problema de Lucas e alguns exemplos de Geometria Combinatória	(E.1)
Ribeiro (2019)	Estudo de sólidos geométricos e suas representações planas e espaciais por meio de materiais manipulativos para o 6º ano	(E.4)
Salazar (2009)	Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço	*Não Excluída*
Brandt, Moretti e Novak (2018)	O desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em geometria segundo Raymond Duval: uma articulação com o ambiente dinâmico GeoGebra	(E.4)
Meneguzzi (2009)	Os perspectógrafos de Dürer na educação matemática: história, geometria e visualização	*Não Excluída*
Marquetti (2015)	O uso de tecnologias digitais para a compreensão da construção de sólidos a partir de suas propriedades	*Não Excluída*
Luna (2009)	Estudo das trajetórias hipotéticas da aprendizagem de Geometria Espacial para o Ensino Médio na perspectiva construtivista	(E.2)
Dumont (2008)	Um estudo de caso sobre aspectos do conhecimento profissional de professoras que ensinam Geometria em turmas de quarta série	(E.4)
Almeida (2010)	Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento	*Não Excluída*
Máximo (2016)	Conhecimentos de visualização espacial: tarefas de representações visuais com uso de recursos físicos e virtuais	(E.1)[3]
Souza (2020)	Sequências didáticas com Realidade Aumentada como auxílio para desenvolver a habilidade de visualização espacial	(E.4)
Santos (2014)	Poliedros de Platão: Uma abordagem segundo o Modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico.	*Não Excluída*
Canaveze (2013)	O ensino-aprendizagem de probabilidade em uma escola pública de Sorocaba/SP	(E.3)
Laudares, Reis, Furletti (2018)	Apresentação da metodologia de passos utilizada no livro didático: equações diferenciais ordinárias e transformadas de laplace: análise gráfica de fenômenos com resolução de problemas atividades com *softwares* livres	(E.2), (E.3) e (E.4)
Silva, Almouloud, Saddo (2021)	La enseñanza de las matemáticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de geometría	(E.2)
Dumont (2008)	Um estudo de caso sobre aspectos do conhecimento profissional de professoras que ensinam Geometria em turmas de quarta série	(E.2) e (E.4)
Leão (2020)	Abordagem de volume e capacidade em uma coleção de livros didáticos: uma análise à luz da Teoria Antropológica do Didático	(E.4)
Ávila (2022)	A formação do conceito de cálculo de volume em uma proposta de atividade na perspectiva do ensino desenvolvimental de Davydov	*Não Excluída*
Guerra (2012)	IBEROCABRI 2012	(E.1)
Monzón (2018)	Génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular mediada con Cabri 3D en estudiantes del cuarto grado de secundaria [tesis]	*Não Excluída*
Monzón (2018)	Génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular mediada con Cabri 3D en estudiantes del cuarto grado de secundaria [artigo].	(E.1)

Fonte: De autoria própria (2023).

[3] A produção está alocada no repositório da Universidade Federal de Pernambuco e a mesma estava com o acesso indisponível durante todo o período de produção deste trabalho.

Depois de feitas as buscas nas bases de dados e aplicados os critérios de exclusão, foram apuradas para análises, as obras constantes no Quadro 14.

Quadro 14 – Seleção final das obras da Revisão de Literatura

Autores (ano)	Títulos das obras
Maciel (2004)	O conceito de semelhança: uma proposta de ensino
Tojo (2006)	Concepção de uma Sequência Didática para o ensino/aprendizagem da congruência
Ferreira (2007)	Demonstrações em Geometria Euclidiana: o uso da Sequência Didática como recurso metodológico em um curso de licenciatura de matemática
Salazar (2009)	Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço
Meneguzzi (2009)	Os perspectógrafos de Dürer na educação matemática: história, geometria e visualização
Miranda (2009)	Um sistema baseado em conhecimento com interface em língua natural para o ensino de transformações geométricas
Almeida (2010)	Sólidos arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento
Ferraz (2010)	Prisma e pirâmide: um estudo didático de uma abordagem computacional.
Andrade (2011)	"Geometria Esférica: uma Sequência Didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico"
Possani (2012)	Uma Sequência Didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular.
Paulo (2012)	Uma proposta para o Ensino e Aprendizagem dos Conceitos de Área de Círculo e Perímetro de Circunferência.
Martins (2012)	Instrumentos virtuais de desenho e a argumentação em geometria
Santos (2014)	Poliedros de Platão: Uma abordagem segundo o Modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico.
Marquetti (2015)	O uso de tecnologias digitais para a compreensão da construção de sólidos a partir de suas propriedades
Santos (2016)	Construção e medida de volume dos poliedros regulares convexos com o Cabri 3D: uma possível transposição didática
Monzón (2018)	Génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular mediada con Cabri 3D en estudiantes del cuarto grado de secundaria (tesis)
Santos (2021)	Ensino de pirâmides no Ensino Médio: uma Sequência Didática apoiada na teoria de registro de representação semiótica
Siqueira *(2021)*	Um modelo didático de referência baseado em atividades de estudo e investigação para o ensino de cônicas na escola básica
Duarte (2021)	Realidade Aumentada no ensino e aprendizagem dos sólidos geométricos
Ávila (2022)	A formação do conceito de cálculo de volume em uma proposta de atividade na perspectiva do ensino desenvolvimental de Davydov

Fonte: De autoria própria (2023).

O Quadro 14 possui um total de vinte obras, obtidas pelas buscas realizadas. Foram excluídas as repetições das obras que surgiram em mais de uma busca. A distribuição é apresentada em ordem cronológica.

Finalmente, para concluir a problemática desta pesquisa, trazemos na próxima seção a Revisão de Literatura, seguida das nossas observações e comentários que justificaram o presente estudo.

2.3 REVISÃO DE LITERATURA

A Revisão de Literatura construída foi conduzida conforme proposto em Creswell (2010), como já pontuamos anteriormente. Assim, realizamos o registro da revisão evidenciando os objetivos, os sujeitos de pesquisa, os principais teóricos que sustentaram esses trabalhos, as metodologias utilizadas e os resultados principais, para posteriormente apontar as concomitâncias entre os trabalhos analisados e esta pesquisa, que foi registrado durante a delimitação do problema de pesquisa.

2.3.1 Análise e descrição das obras

A obra de Maciel (2004) aborda a análise das dificuldades encontradas por alunos do primeiro ano do Ensino Médio na formação do conceito de semelhança, além de investigar se uma sequência de ensino que utiliza o conceito de homotetia[4], integrado com a Óptica Geométrica, pode auxiliar na compreensão desse conceito. Com base em três hipóteses, o estudo visa responder se essa sequência de ensino proporciona uma aprendizagem significativa do conceito de semelhança. Para isso, é empregado um Quadro de Ensino da Geometria elaborado por Parsysz (1989), com base na TRRS, de acordo com Duval (1993, 1994, 1995), e o Funcionamento de uma Figura. Após a aplicação da sequência de ensino, foi realizado um pós-teste e uma análise qualitativa e quantitativa para validar as hipóteses, que, segundo o autor, tratavam sobre condições para que o aluno possa trabalhar o objeto físico real e alcançar uma Geometria formal; uma sequência de atividades que vise ao desenvolvimento do conceito de semelhança de figuras a partir de situações de formação de sombra e de imagem em Ótica Geométrica; a utilização das situações experimentais e uma transferência dessas situações para o contexto matemático, contribuindo para a abordagem das variabilidades de configurações dos casos de homotetia e, posteriormente, a transferência e ampliação das configurações para as

[4] A homotetia é uma transformação geométrica que trata de problemas com ampliações ou reduções de uma figura, mas mantém as características principais, como proporções e ângulos.

situações de semelhança de forma mais significativa. e responder à questão de pesquisa. Os resultados mostram que atividades baseadas em situações de formação de sombra e de imagem em câmara escura relacionadas ao conceito de homotetia contribuem para uma abordagem ampla do conceito de semelhança, trabalhando diversos tipos de configurações e as condições necessárias e suficientes para a existência da semelhança entre figuras. Conclui-se que a abordagem utilizada possibilitou a aprendizagem do conceito de semelhança e foram feitas recomendações quanto ao conteúdo e à metodologia de ensino. O pré-teste revelou que os alunos apresentaram dificuldades em aplicar a Matemática em situações contextuais, indicando a necessidade de maior integração entre os conhecimentos matemáticos e situações do cotidiano para uma compreensão mais efetiva dos conteúdos e conceitos abordados.

Tojo (2006) investigou como alunos do primeiro ano do Ensino Médio se apropriam do conceito de congruência e o utilizam no processo de prova. A pesquisa se baseou em estudos anteriores sobre o desenvolvimento do pensamento para o ensino da Geometria, a rede de conhecimentos, a organização local para o estudo da congruência e os tipos de provas. Utilizando alguns princípios da Engenharia Didática (Artigue, 1988), a pesquisa envolveu quatorze alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de São Paulo. As análises mostraram que o processo de transição do concreto para o espaço gráfico contribuiu para a apropriação do conceito de congruência e facilitou parcialmente a passagem do empírico para o dedutivo. No entanto, foram identificadas necessidades de complementos na Sequência Didática para que essa transição seja mais amplamente concretizada.

Ferreira (2007) desenvolveu uma Sequência Didática sobre demonstrações geométricas, fundamentada na TRRS (Duval, 1988, 1995, 2003). O objetivo era trabalhar com Técnicas de Demonstração no ensino de Geometria Euclidiana, sendo que os sujeitos de pesquisa foram alunos de um curso de formação de professores de Matemática, mas podem ser estendidas para outros níveis de ensino e servir de material de apoio para professores e estudantes. Durante o trabalho foi abordada a demonstração conforme o conceito dado por Balacheff (1987), explorando atividades de verificação de afirmações a fim de que o aluno explore as figuras planas e demonstração de teoremas, incentivado por questões discursivas e ilustrativas. O autor não expõe conclusão, nem resultados, pois não foi feita a aplicação da

Sequência Didática, nem mesmo discorrido um tópico sobre esse aspecto em relação ao trabalho produzido.

Salazar (2009) investigou como os estudantes do segundo ano do Ensino Médio se apropriam das transformações geométricas no espaço ao interagirem com o ambiente de Geometria Dinâmica Cabri 3D e qual raciocínio mobilizam durante atividades que envolvem esse conteúdo. A pesquisa visou responder como os alunos se apropriam das ferramentas do Cabri 3D na aprendizagem das transformações e como essa integração interfere no processo de aprendizagem. A metodologia seguiu os princípios da Engenharia Didática (Artigue, 1995) com base na Abordagem Instrumental (Rabardel, 1995a, 2008) para compreender a interação dos alunos com o *software* e na TRRS (Duval, 1995, 2002, 2003) para analisar as diferentes formas de compreensão das figuras. A análise das atividades revelou novas possibilidades de uso dos instrumentos pelos alunos e diferentes estratégias no uso do Cabri 3D, além de facilitar a relação entre o *software* e os conhecimentos matemáticos dos estudantes. Observou-se o processo de Gênese Instrumental[5], com a evidência de esquemas de utilização pré-estabelecidos ou o desenvolvimento de novos esquemas pelos alunos. O uso do Cabri 3D facilitou a apreensão perceptiva das figuras, permitindo sua dinamização e oferecendo registro figural dinâmico, modificação posicional e outras modificações, além de auxiliar na visualização das figuras geométricas.

O trabalho de Meneguzzi (2009) aborda os perspectógrafos segundo Dürer (1525), que são máquinas desenvolvidas no Renascimento alemão para desenhar em perspectiva. O autor não adota uma metodologia específica, mas faz citações a teóricos como Duval (1995) e Pavanello (1993). Não é especificada para qual público a produção foi destinada. O objetivo do trabalho é explorar a conexão entre a história das máquinas e o ensino de Geometria, propondo atividades problematizadoras que permitam essa articulação. Pretende-se discutir os perspectógrafos de Dürer como ferramenta para construção de imagens em perspectiva e sua aplicação em sala de aula, destacando a importância da história da perspectiva e da visualização matemática no ensino de Geometria. Embora o foco principal seja a teoria da perspectiva em sua vertente histórica, a historicidade

[5] Rabardel (1995) denomina gênese instrumental como o processo de aprendizagem no qual uma ferramenta ou artefato torna-se, progressivamente, um instrumento.

das máquinas é considerada elemento norteador do trabalho e fonte de potencialidades para a criação de problemáticas didáticas na atividade matemática.

Miranda (2009) realizou uma pesquisa para desenvolver uma ferramenta computacional utilizando técnicas de Processamento de Línguas Naturais (PLN) e inserir sequências didáticas no campo da Geometria das Transformações. A pesquisa baseou-se na Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1986) e na TRRS (Duval,1993, 2004, 2005), além dos princípios da Engenharia Didática (Artigue, 2005). Embora o foco fosse o Ensino Fundamental II e o início do Ensino Médio, um projeto piloto foi realizado com dois alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Os resultados indicaram que a simples utilização da ferramenta não garantiu o aprendizado, porém os alunos demonstraram capacidade de elaborar demonstrações a partir das sequências didáticas fornecidas. Em todas as atividades, o papel foi utilizado como apoio para o raciocínio. O autor concluiu que a pesquisa contribuiu para o ensino e aprendizagem das Transformações Geométricas no plano.

A pesquisa de Almeida (2010) visa explorar os Sólidos Arquimedianos, utilizando o ambiente de Geometria Dinâmica Cabri 3D como habitat para seu ensino na Escola Básica. O estudo se baseia na Transposição Didática (Chevallard, 1999) e na TRRS (Duval, 1995, 2002, 2008). A metodologia incluiu um estudo bibliográfico sobre procedimentos matemáticos renascentistas para a obtenção de arquimedianos. A pesquisa envolveu 41 alunos do Ensino Médio, investigando como os objetos espaciais eram visualizados por eles. As análises mostraram que as construções dos arquimedianos no Cabri 3D foram possíveis mediante a articulação entre o registro figural dinâmico[6] e um registro discursivo[7], seja por meio da língua natural ou da álgebra. Concluiu-se que o Cabri 3D se confirmou como um habitat adequado para o estudo desses sólidos, permitindo a realização das construções e reconhecendo a importância dos saberes envolvidos nesse objeto matemático. A pesquisa ressalta a relevância de utilizar meios informáticos na escola para resgatar conteúdos matemáticos que não são mais ensinados, destacando a importância de estudos futuros explorarem novas tecnologias para reintroduzir esses conteúdos no cotidiano escolar.

[6] O termo registro figural dinâmico foi introduzido por Salazar (2009) para designar o registro figural utilizado em ambientes de Geometria Dinâmica.

[7] Refere-se ao uso da linguagem natural para descrever, explicar e argumentar sobre conceitos matemáticos.

O trabalho de Ferraz (2010) propôs o aprofundamento dos conhecimentos relacionados ao estudo do volume de prismas e pirâmides por meio de uma sequência de ensino, concebida à luz da Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2008) e da TRRS (Duval, 1995, 2003). Mediada pelo uso de um *software* de geometria dinâmica, o Cabri 3D, visava verificar a contribuição do uso desse *software* no aprofundamento do estudo sobre o tema. Nesse sentido teve como objetivo desenvolver uma sequência de ensino para aprofundar o estudo com professores da rede pública estadual que contribuísse para o desenvolvimento da capacidade de expressar na forma algébrica e gráfica o volume de prismas e pirâmides, favorecendo o quadro das grandezas. O trabalho teve como resultado principal uma sequência desenvolvida e aplicada com base na Teoria das Situações Didáticas e na TRRS, que conduz os professores a reconhecer o volume de prismas e pirâmides como grandezas.

A dissertação de Andrade (2011) pretende investigar a apropriação de conceitos elementares de Geometria Esférica em uma sequência, cujos sujeitos são alunos do 2º ano do Ensino Médio. O trabalho tem como teorias e teóricos principais a TRRS (Duval, 2009) e a Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2008). Mediante uma abordagem investigativa qualitativa e, como metodologia adotando os pressupostos da Engenharia Didática (Artigue, 1996), a fim de propor atividades, que, em sua maioria, exigiam que os alunos fossem ativos. Para o autor o objetivo foi alcançado já que os sujeitos desta pesquisa se apropriaram dos conceitos de Geometria Esférica, aplicando objetos manipuláveis, a fim de comparar os resultados obtidos com a Geometria Euclidiana. Outro ponto de destaque foi relacionado à TRRS (Duval, 2009), pois a todo o momento foi trabalhado com, pelo menos, dois registros de representação. Para o autor é possível abordar conteúdos que não fazem parte dos currículos educacionais, desde que relacionados com um conteúdo que faça parte. Segundo o autor, “a Geometria Euclidiana proposta no currículo não é a única possível, mas uma das muitas possíveis”.

O objetivo da dissertação de Possani (2012) foi investigar como os alunos do 3º ano do Ensino Médio se apropriam do cálculo para medir o volume de um icosaedro regular, por meio de uma sequência de atividades utilizando o *software* Cabri 3D. A pesquisa foi embasada na Engenharia Didática (Artigue, 1996), na Teoria das Situações Didáticas e na TRRS (Duval, 2009). Os sujeitos destinatários foram os alunos do Ensino Médio. A metodologia utilizada foi na aplicação de uma sequência de atividades mediadas pelo *software* Cabri 3D, em que os estudantes foram desafiados a refletir sobre situações-problema envolvendo diversos objetos geométricos, visando compreender como calcular o volume do icosaedro regular. Os resultados indicaram que os alunos tiveram dificuldades em encontrar as ferramentas necessárias no *software* Cabri 3D e também para construir os cinco poliedros regulares. No entanto, ao final das atividades, essas dificuldades foram superadas. A pesquisa apontou que o processo de desenvolvimento da Sequência Didática não é fácil, havendo desafios na elaboração, aplicação e análise das atividades, especialmente no que diz respeito à investigação dos conhecimentos prévios dos alunos e à previsão de dificuldades.

A pesquisa de Paulo (2012) teve como objetivo estudar os processos de ensino e aprendizagem dos conceitos de área de círculo e perímetro de circunferência no Ensino Fundamental II. A sequência exigiu que o aluno comparasse a medida da área do círculo e a medida do perímetro da circunferência com a medida da área e perímetro de outras figuras, a fim de minimizar as dificuldades na compreensão e diferenciação desses dois objetos matemáticos. O pesquisador apoiou-se na Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2008), na Dialética Ferramenta-objeto (Douady, 1986) e na TRRS (Duval, 2003), assim como nos princípios da Engenharia Didática de Michèle Artigue (1988 apud Almouloud, 2007). O público-alvo do estudo eram alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Apesar dos alunos não serem do Ensino Médio, o conteúdo abordado pode ser também trabalhado em tal etapa escolar. Seus resultados indicaram um avanço na compreensão do significado de área como grandeza e na diferenciação entre circunferência e círculo, assim como entre área e perímetro. O objetivo geral desta pesquisa foi contribuir para o avanço na melhoria da qualidade de aprendizagem dos alunos em relação à Geometria, sobretudo na formação da noção de área do círculo como grandeza e a diferenciação entre o perímetro e a medida de área de figuras planas. Os resultados sugerem que sejam consideradas as reformulações das redações de algumas atividades, além de ser necessário um tempo de aplicação maior que o dispensado na pesquisa, a fim de favorecer mais discussões entre os alunos e uma institucionalização para o professor.

A dissertação de Martins (2012) propõe o uso da argumentação dedutiva em Geometria na escola, utilizando material digital com instrumentos virtuais de desenho para realizar transformações geométricas. A Sequência Didática elaborada consiste em três etapas: exploração, construção e argumentação. A experiência foi realizada com alunos do primeiro ano do Ensino Médio, embora a estrutura da sequência não tenha sido fundamentada em teorias específicas, as atividades foram embasadas na TRRS (Duval, 2003). A análise do processo de aprendizagem dos alunos envolveu as Teorias de Van Hiele (Gravina, 2001), sobre níveis de pensamento geométrico e a TRRS (Duval, 2003). Os resultados indicaram que o uso dos instrumentos virtuais contribuiu para o entendimento da argumentação dedutiva em Geometria, ressaltando a importância de gradualmente introduzir esse tipo de trabalho no ensino básico. Concluiu-se que o processo de ensino e aprendizagem de argumentações em Geometria deve desenvolver habilidades de criação, articulação de ideias, proposição de hipóteses e raciocínio lógico nos alunos.

Santos (2014) investigou a eficácia da aplicação do Modelo de Van Hiele (1957) do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico e do uso de material concreto no ensino da Geometria Espacial em contraposição à metodologia tradicional e a manipulação de material concreto sem uma metodologia específica. Três turmas do segundo ano do Ensino Médio foram submetidas a diferentes abordagens: uma utilizou o Modelo de Van Hiele com material concreto, outra seguiu o ensino tradicional e a terceira apenas manipulou sólidos geométricos sem embasamento teórico. Foram aplicados dois testes para avaliar o conhecimento em Geometria Plana e Espacial. Os resultados mostraram que a turma submetida ao Modelo de Van Hiele teve o melhor desempenho e o maior crescimento percentual das médias no teste de Geometria Plana, indicando a eficácia dessa abordagem.

O estudo de Marquetti (2015) não expõe a fundamentação teórica que embase o seu trabalho, porém ele investiga o uso de tecnologias digitais, especificamente o *software* GeoGebra, por um grupo de cinco estudantes do Ensino Médio em uma escola particular de São Paulo. O objetivo é explorar a compreensão dos alunos sobre propriedades dos sólidos geométricos, como cubos e pirâmides, e a relação entre eles, utilizando o ambiente tridimensional oferecido pelo *software*. A pesquisa qualitativa analisa as interações dos alunos com o GeoGebra em duas sessões, observando como a visualização, experimentação e dinamismo da interface contribuem para a compreensão de relações e propriedades geométricas. Embora os resultados sugiram que o *software* facilitou a compreensão de certas relações e propriedades, uma limitação do estudo é a falta de elementos para comparação com grupos que não utilizaram o *software*, sugerindo a necessidade de estudos adicionais para validar essas descobertas.

Santos (2016) investiga a construção de poliedros regulares convexos no *software* Cabri 3D como uma Transposição Didática (Chevallard, 1999) da abordagem desenvolvida por Euclides. O estudo visa verificar se as construções proporcionam as relações necessárias para o cálculo do volume desses poliedros, além de explorar a composição e decomposição do dodecaedro e do icosaedro. Utilizando como base a Transposição Didática e a Problemática Ecológica (Chevallard, 1999), juntamente com a TRRS (Duval, 1995, 1999, 2004, 2005) a pesquisa adota uma abordagem qualitativa documental, centrada na análise do livro XIII dos Elementos de Euclides. Os procedimentos são divididos em adaptação das construções euclidianas para o ambiente do Cabri 3D, exploração das relações e medidas para dedução de fórmulas de volume, e determinação das condições para composição e decomposição dos poliedros. Como resultado, verificou-se que a partir das construções dos poliedros por composição no Cabri 3D e deduzidas fórmulas para o cálculo do volume, concluiu-se que as relações espaciais e geométricas exploradas no ambiente virtual facilitam a compreensão dos conceitos envolvidos e permitem a dedução precisa das fórmulas de volume dos poliedros. Além disso, a possibilidade de manipulação e visualização tridimensional oferecida pelo Cabri 3D contribuiu significativamente para o entendimento das condições necessárias para a composição e decomposição dos poliedros, evidenciando a eficácia do *software* como ferramenta didática no ensino da Geometria Espacial.

Monzón (2018) analisa o processo de Gênese Instrumental da medida do volume do octaedro regular, mediado pelo Cabri 3D, em estudantes que correspondem ao nível de estudantes do Ensino Médio brasileiro. Devido ao enfoque nos processos de instrumentalização e instrumentação, a pesquisa responde à pergunta: como ocorre a gênese instrumental da medida do volume do octaedro regular em estudantes do quarto ano do Ensino Médio ao trabalharem com uma sequência de atividades usando o Cabri 3D? O referencial teórico adotado é o Enfoque Instrumental (Rabardel,1995, 2011) e a metodologia utilizada é a Engenharia Didática (Artigue, 1995). O estudo se concentra nas duas direções da gênese instrumental: o processo de instrumentalização e o de instrumentação. A noção de esquema de Vergnaud[8] é empregada para identificar os possíveis esquemas de utilização mobilizados pelos estudantes ao desenvolverem as atividades propostas. Como resultado, os estudantes utilizam esquemas de uso e de ação instrumentada, alcançando a gênese instrumental da medida do volume do octaedro regular com a mediação do Cabri 3D, além de conseguirem uma instrumentação local de algumas ferramentas do Cabri 3D.

O trabalho de Santos (2021) investigou como os estudantes percebem as dimensões inferiores de uma pirâmide em uma turma do segundo ano do Ensino Médio. Utilizando a TRRS (Duval, 1995, 2003) e a Engenharia Didática (Artigue, 1996) como metodologia, uma Sequência Didática foi elaborada e aplicada, confrontando os alunos com situações-problema que demandam análise qualitativa dos elementos figurais. O uso de materiais manipuláveis e do *software* GeoGebra facilitou a visualização de elementos não aparentes na representação bidimensional ou tridimensional, estimulando a atenção às dimensões inferiores do sólido. A metodologia proporcionou ao professor-pesquisador identificar dificuldades dos alunos e ajustar sua prática docente, melhorando os processos de ensino e aprendizagem. Tarefas que exploraram o uso de material concreto, representações bidimensionais e tridimensionais favoreceram a compreensão das dimensões inferiores da pirâmide e a resolução de problemas métricos e de volume. A pesquisa revelou um avanço na percepção dos estudantes e destacou a importância de torná-los protagonistas de sua própria aprendizagem.

A pesquisa de Siqueira (2021) identifica as contribuições do estudo das três dimensões do problema didático para a construção de um Modelo Didático de Referência[9] voltado ao ensino das cônicas na escola básica. Utilizando como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1991, 1999, 2019), a pesquisa adotou a metodologia de Pesquisa Documental (Gil, 2008). Foi realizado um estudo das três dimensões - epistemológica[10], econômico-institucional[11] e ecológica[12] das cônicas para desenvolver um Modelo

[8] "A organização invariante do comportamento para uma dada classe de situações. Nos esquemas devem ser investigados os conhecimentos em ato do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito seja operável" (Vergnaud,1990, p.2).
[9] Modelo Didático de Referência segundo Siqueira (2021) é uma estrutura teórica e prática que serve como guia para o desenvolvimento e implementação de atividades.
[10] Situa aquilo que é matemático no coração do problema.
[11] Despersonaliza a problemática didática e delimita a unidade mínima de análise dos processos de estudo.

Epistemológico de Referência[13], identificar o Modelo Dominante[14] para o ensino das cônicas e construir uma cadeia alimentar no contexto da Teoria Antropológica do Didático. Os resultados sugerem alterações no currículo escolar, distribuindo o ensino das cônicas ao longo da Educação Básica, e não apenas o concentrando no terceiro ano do Ensino Médio. Além disso, foram elaboradas atividades de estudo e investigação para diferentes anos do Ensino Fundamental e Médio, explorando diversas propriedades matemáticas das cônicas e relacionando-as a contextos do cotidiano e da história da ciência. A pesquisa também identificou relações entre as geometrias sintética, analítica, linear, táxi e projetiva no estudo das cônicas, mostrando como diferentes abordagens podem ser articuladas para o ensino desses objetos matemáticos.

A pesquisa de Duarte (2021) foi realizada com o objetivo de investigar o uso da Realidade Aumentada (RA) no ensino e aprendizagem dos sólidos geométricos por estudantes de Licenciatura em Matemática. O estudo, de caráter qualitativo e experimental, foi conduzido com alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática oferecidos pela Universidade Federal de Pelotas em modalidades presencial, noturna e a distância. O texto aborda o ensino e aprendizagem de Geometria, a partir de Tecnologia Imersível, o qual emula um mundo físico por meio de um mundo digital ou simulado, e está fundamentada na TRRS (Duval, 1993, 2003, 2009). Um curso a distância foi oferecido aos participantes, que seguiram uma Sequência Didática sobre sólidos geométricos utilizando a Realidade Aumentada. Os dados foram coletados por meio de formulários de inscrição e avaliação, tarefas e atividades, observações de aulas síncronas e notas de campo do pesquisador. A análise de conteúdo revelou categorias como infraestrutura e acesso às tecnologias, formação em Geometria e percepção dos alunos sobre a RA. Os resultados indicaram que os estudantes perceberam a Realidade Aumentada como uma ferramenta que potencializa o ensino e a aprendizagem dos sólidos geométricos, especialmente da visualização proporcionada. Além disso, os alunos demonstraram

[12] Destaca as condições necessárias para que o estudo institucionalizado de matemática seja possível e apresenta de maneira manifesta as restrições de todo tipo que incide nesse estudo.

[13] De acordo com Barquero, Bosch e Gascón (2013, p. 5), é o instrumento com que o didata pode desconstruir e reconstruir as praxeologias cuja difusão intrainstitucional e interinstitucional pretende analisar.

[14] É a forma de interpretar e descrever um objeto matemático predominante em uma instituição escolar (Chevallard, 1999; Farras; Bosch; Gascón, 2013).

apropriação da Calculadora 3D, evidenciando o desenvolvimento do processo de mediação semiótica.

Ávila (2022) propõe um experimento didático-formativo para estudantes do segundo ano do Ensino Médio, com foco no ensino do conceito de cálculo de volume. A proposta de experimento segue os princípios da Teoria do Ensino Desenvolvimental (Davydov, 1982, 1988, 199). O objetivo principal é analisar como esses princípios podem contribuir para a formação do conceito científico de cálculo de medida de volume entre os estudantes do Ensino Médio. A pesquisa fundamenta-se na Teoria Histórico-Cultural, especialmente nas obras de Vygotsky (1984, 1991, 2007) e Davydov (1982), e analisa as contribuições desses pressupostos, à luz do Materialismo Histórico-Dialético, para ampliar o debate sobre a compreensão e organização da atividade de estudo na perspectiva desenvolvimental. O estudo foca no processo de ensino-aprendizagem para a formação do conceito de cálculo de medida de volume e identifica os elementos intervenientes, como a transformação dos dados da tarefa, a modelagem e o uso do conceito como ferramenta mental. Conclui-se que os princípios da teoria do ensino desenvolvimental de Davydov oferecem uma alternativa viável para o ensino do cálculo de volume no Ensino Médio, contribuindo para a formação do pensamento teórico dos alunos e fornecendo um caminho alternativo para a organização do ensino de Geometria e Matemática.

2.3.2 Síntese das análises e concomitâncias com esta investigação

Com a análise realizada, verificamos que boa parte dos trabalhos foram desenvolvidos a partir da construção, implementação e análise de Sequências Didáticas, demonstrando relativa eficácia dos resultados buscados.

Este fato potencializou a nossa decisão de utilizar uma Sequência Didática nesta investigação, quanto aos sujeitos pesquisados, observamos que quase todas as pesquisas foram desenvolvidas com estudantes do Ensino Médio.

Quanto às fundamentações teóricas, foram observados trabalhos utilizando a Engenharia Didática, TRRS, Teoria das Situações Didáticas, Abordagem Instrumental, Teoria de Van Hiele, Teoria do Ensino Desenvolvimental, Teoria Histórico–Cultural, Teoria Antropológica do Didático. Assim, verificamos que houve predominância das teorias da didática francesa e dessas, a teoria mais utilizada foi a

TRRS. Então, consideramos que as ideias da TRRS, foi uma escolha acertada para analisar os dados construídos nesta pesquisa. Vale ressaltar que, em vários trabalhos analisados, observamos a articulação de diferentes abordagens teóricas, a fim de reforçar os processos de ensino de aprendizagem dos objetos matemáticos envolvidos nesses trabalhos.

Quanto às ferramentas utilizadas, de modo geral, as análises mostraram que há uma necessidade do uso de ferramentas que possam facilitar a visualização de objetos da Geometria Espacial pelos estudantes. Nesse sentido, constatamos que o uso do *software* Cabri 3D apareceu em 8 das pesquisas analisadas enquanto o GeoGebra 3D, com Realidade Aumentada, foi utilizado em apenas uma investigação. Nestas investigações ficou evidente a potencialidade positiva desses *softwares* nos processos de ensino e de aprendizagem de objetos geométricos.

Quanto às dificuldades apontadas pelos autores, destacamos as geradas a partir da manipulação do *software* Cabri 3D, o que nos remete ao uso, nesta investigação, do *software* GeoGebra, por considerar que ele é de fácil acesso e melhor compreendido pelos estudantes. No entanto, cabe ressaltar que a simples utilização de um *software* não garante o aprendizado dos estudantes, conforme apontado pelos autores analisados.

Ainda com relação às dificuldades apresentadas, os autores destacaram os desafios na elaboração da Sequência Didática, na compreensão e diferenciação dos objetos matemáticos discutidos e no acesso às tecnologias digitais, pelos estudantes, nos momentos necessários em sala de aula.

Quanto aos resultados observados, o uso do *software* possibilitou, conforme as análises realizadas, o desenvolvimento do pensamento geométrico; a passagem do empírico para o dedutível; a facilidade na apreensão de perspectivas de figuras, permitindo a dinamização, modificação posicional e auxílio na visualização; exploração das relações e medidas para a dedução de fórmulas para o cálculo de medidas de área e volume e determinação das condições para a composição e decomposição dos poliedros; avanço na percepção dos estudantes em relação aos elementos dos sólidos tridimensionais; além da contribuição para a apropriação, pelos estudantes, dos conteúdos, conceito e propriedades dos objetos matemáticos discutidos e consequente aprendizagem.

Ainda em relação aos resultados observados cabe ressaltar que, na pesquisa de Andrade (2011), foi pontuada a necessidade de discutir no Ensino Médio, conteúdos que não fazem parte do componente curricular regular deste nível de ensino, desde que este esteja relacionado com outro que faça parte do componente curricular. Este resultado, de certa forma, é concernente com a nossa decisão de trabalhar a medida do volume do dodecaedro por meio da composição e decomposição por pirâmides.

De acordo com esses resultados, consideramos pertinente a nossa decisão em conduzir um estudo sobre o processo de aprendizagem do dodecaedro regular por meio da composição e decomposição de pirâmides, para estudantes do 2º ano do Ensino Médio, com o uso do GeoGebra 3D e da ferramenta Realidade Aumentada.

Finalizando essa problemática, apresentamos a justificativa deste estudo.

2.4 JUSTIFICATIVA

Esse trabalho baseou-se na abordagem de novas possibilidades de ensino de conteúdos matemáticos no Ensino Médio, tratando o volume de sólidos sobre uma perspectiva diferente, com a Realidade Aumentada auxiliando na capacidade de visualização e representação dos objetos matemáticos. Nesse sentido, o trabalho visou contribuir para o desenvolvimento cognitivo e abstrato dos alunos no que se refere, principalmente, à construção do conhecimento desse objeto matemático.

Além do que foi observado durante a Revisão da Literatura, consideramos que a proposição desta pesquisa pôde desempenhar um papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio lógico, capacidade visual, de localização e de abstração, indispensáveis em diversas áreas da vida cotidiana, além da possibilidade da exploração de objetos tridimensionais em sala de aula.

De acordo com Brasil (2018), o ensino escolar deve ir além da simples memorização de figuras e fórmulas, abrangendo a capacidade dos alunos de interpretar e intervir no espaço ao seu redor. Isso inclui habilidades como o desenvolvimento da visualização, representação, manipulação e criação de novos objetos geométricos, bem como a resolução de problemas práticos que integram a Geometria com outras áreas do conhecimento. Entretanto, apesar do crescente interesse no desenvolvimento de estratégias de ensino e aprendizagem da Matemática, as práticas em sala de aula ainda enfrentam desafios. Nesse contexto, a Geometria oferece uma oportunidade para representar conceitos matemáticos e estabelecer conexões entre diferentes formas de pensamento.

Em consoante, o foco do ensino da Geometria também deve estar no desenvolvimento de habilidades de raciocínio e da capacidade de resolver problemas, transcendendo objetos geométricos específicos. Contudo, segundo Sanchez (2004), esse ensino enfrenta desafios próprios, relacionados à capacidade de visualização dos objetos matemáticos pelos alunos e à falta de recursos materiais adequados.

Isso posto, e considerando as inquietações do mestrando e os resultados da Revisão de Literatura, optamos por realizar essa investigação com o objetivo de implementar e analisar uma Sequência Didática abordando a composição e decomposição em pirâmides com o uso do GeoGebra 3D com ênfase na Realidade Aumentada para desenvolver o estudo do volume do dodecaedro regular em uma turma de estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

Na próxima seção, apresentamos a metodologia desta pesquisa e os procedimentos metodológicos realizados, a fim de alcançar o objetivo proposto.

3 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, detalhamos a metodologia de pesquisa e os procedimentos metodológicos adotados para a construção e implementação da Sequência Didática, bem como as circunstâncias em que este estudo foi realizado. Descrevemos o contexto, os sujeitos de pesquisa, o desenvolvimento da Sequência Didática e o cronograma para sua implementação, a maneira como os dados foram produzidos e, por fim, os instrumentos e critérios utilizados na análise dos dados.

Do ponto de vista metodológico, esta pesquisa foi caracterizada como qualitativa, uma vez que, conforme Creswell (2010), as situações e modos aqui analisados surgiram a partir do contexto em que esta investigação foi construída; a produção dos dados foi realizada no ambiente dos sujeitos pesquisados e a análise dos dados foi construída a partir dos temas produzidos e da interpretação dos resultados.

Assim, convidamos vinte e seis alunos de uma turma do 2º ano do Ensino Médio do turno vespertino, de uma escola pública no interior da Bahia. Os alunos eram adolescentes, com idades entre 16 e 17 anos, com quantidade equivalente entre homens e mulheres. A maioria morava longe da escola, necessitando de ônibus para locomoção; alguns iam para a escola a pé, por isso muitas vezes chegavam atrasados para as aulas dos primeiros horários.

Quanto aos procedimentos metodológicos para a construção e implementação da Sequência Didática, eles incluíram o planejamento das atividades de ensino, a seleção de materiais educacionais apropriados e a implementação das atividades planejadas, seguida de uma análise reflexiva dos resultados obtidos.

Isso posto, a metodologia neste estudo tem como propósito realizar uma análise das disposições apresentadas na Sequência Didática elaborada nesta pesquisa, com o intuito de contribuir para o progresso do entendimento na área da Educação Matemática, especialmente no fomento da visualização de objetos geométricos.

Nesse sentido, a produção de dados foi construída a partir dos registros escritos das atividades desenvolvidas pelos sujeitos participantes, das observações realizadas pelo pesquisador e das fotografias dos documentos produzidos, respeitando a forma como foram registrados.

Inicialmente, realizamos algumas leituras preliminares que nos levaram à escolha do objeto matemático. Posteriormente, fizemos a Revisão de Literatura conduzida conforme proposto em Creswell (2010). Como já explicitamos na seção 1.2, as obras definidas para esta revisão seguiram o Protocolo Kitchenham para as buscas. Em seguida, foi feito o registro dessa revisão, evidenciando os objetivos, os sujeitos de pesquisa, os principais teóricos que sustentaram esses trabalhos, as metodologias utilizadas e os resultados principais. Por fim, fizemos uma síntese dessas análises destacando as concomitâncias entre os estudos analisados e esta pesquisa.

Calácia (2017) define uma Sequência Didática como um conjunto de atividades interligadas para aprimorar o processo de ensino, desta maneira, para a construção da Sequência Didática, partimos de um objeto matemático simples (uma unidade de medida de área), que possibilitou a composição dos demais objetos até a construção do dodecaedro regular. Essa etapa foi produzida com o auxílio do *software* GeoGebra 3D, com ênfase na Realidade Aumentada.

A estruturação da Sequência Didática foi organizada em conteúdos sequenciais, utilizando as ferramentas do GeoGebra que permitiram a exploração bidimensional e tridimensional dos objetos matemáticos construídos. As atividades elaboradas foram apresentadas na sequência, visando inclusive à competência dos alunos em reconhecer os objetos discutidos e transitar entre os diferentes tipos de registros de representação semiótica, pois “do ponto de vista cognitivo, é necessário entender como o estudante percebe, compreende, lembra, pensa, transforma e aplica um conhecimento matemático” (Souza, 2022, p.94).

Para isso, utilizamos como fundamentação teórica algumas ideias da TRRS (Duval, 2009); estudos que refletiam sobre o emprego das tecnologias digitais nos processos de aprendizagem de objetos matemáticos; além de estudos que discorriam sobre a utilização da Realidade Aumentada como uma ferramenta digital para o ensino de objetos geométricos.

Para a implementação da Sequência Didática, elaboramos um cronograma considerando a organização dos dias e horários de aula da professora regente da turma que continha os sujeitos de pesquisa. Assim, a sequência foi aplicada em quatro momentos, sendo dois no horário da aula da professora regente e outros dois no contraturno. Cada encontro teve a duração de uma hora e meia.

Cabe ressaltar que os dois últimos momentos não contaram com a presença de todos os alunos, pois alguns não puderam comparecer no contraturno.

Durante a implementação da sequência, os alunos foram organizados em oito grupos com três ou quatro integrantes. Porém, nos momentos realizados no contraturno, faltaram alunos; somente o Grupo 5 estava completo, e os demais foram realocados no Grupo 8. Dessa forma, os dois últimos momentos contaram com a participação apenas do Grupo 5 e do Grupo 8.

Cabe ressaltar que os alunos já haviam visto grande parte dos objetos geométricos abordados na sequência, pois os conteúdos sobre área e perímetro de figuras planas e cálculo da medida do volume dos sólidos de Platão já haviam sido discutidos.

Todos os momentos foram subdivididos em duas partes: uma em que os alunos trocaram experiências e exploraram os objetos matemáticos estudados, preferencialmente utilizando o *software* GeoGebra 3D, e outra em que socializaram as atividades desenvolvidas. Para isso, receberam no início do encontro o material impresso, contendo as atividades a serem desenvolvidas. Durante realização das atividades, o pesquisador assumiu uma postura de mediador do conhecimento a ser desenvolvido, e a aula decorreu com características de aula investigativa.

Visando as análises, cabe ressaltar que a sequência foi construída contendo os objetivos, as atividades propostas e as possíveis respostas que poderiam ser elaboradas pelos sujeitos de pesquisa para essas atividades, no sentido de comparar, durante as análises, essas respostas e as respostas efetivas desses sujeitos e as possíveis respostas construídas previamente.

Ainda em relação às análises, observamos, além da análise didática, se os alunos conseguiram transitar entre os diferentes tipos de registros de representação semiótica, conforme assumido na TRRS.

Isso posto, passamos à realização das análises e ao registro desta pesquisa por meio desta dissertação.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, apresentamos uma síntese das ideias presentes nas teorias que fundamentaram esta pesquisa.

Dentre os objetivos específicos desta investigação, destacamos: analisar como os diferentes registros de representações semióticas são empregados pelos sujeitos de pesquisa durante o processo de aprendizagem do volume do dodecaedro regular, investigando os registros de representação utilizados e sua evolução ao longo das atividades. Para embasar e obter técnicas para alcançar esse objetivo, foi necessário buscar teorias que possibilitassem estratégias para verificar o processo de aprendizagem dos estudantes a partir da sequência implementada. Há diversas teorias desenvolvidas com foco na aprendizagem; no entanto, dentre essas possibilidades, optamos pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval,1993) para fundamentar essas análises, no que diz respeito à competência dos alunos em transitar entre os diferentes tipos de registros de representação dos objetos geométricos abordados. Assim, na próxima seção, trazemos essas ideias.

4.1 IDEIAS DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA UTILIZADAS NESTA INVESTIGAÇÃO.

A TRRS, segundo Duval (2012), discute a aprendizagem de objetos matemáticos baseada também na exploração de diferentes registros de representação em um sistema semiótico.

Nesse sentido, os registros semióticos compõem um sistema de comunicação (sistema semiótico), com formas particulares de representar um objeto matemático; considerando que os conteúdos e conceitos inerentes a esse objeto são “abstrações desencadeadas por processos de generalização com a necessidade das representações semióticas para que ocorra uma verdadeira apreensão e evolução do pensamento matemático” (Lopes, 2021, p. 89).

No entanto, para que ocorra a aprendizagem desses conteúdos e conceitos pelos estudantes, Duval (2012) explica que há a necessidade de representar o objeto matemático por meio de registros de representação semiótica. Portanto, um registro de representação semiótica pode representar um objeto matemático, e as representações semióticas nesse registro são: “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento” (Duval, 2012, p. 269).

Assim, uma representação semiótica é “uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico [...]” (Duval, 2012, p. 269). Essas representações fazem parte de diferentes sistemas de representação semiótica e são inerentes à linguagem de comunicação matemática, sendo fundamentais para que atividades cognitivas sejam desenvolvidas nos estudantes, permitindo-lhes construir o conhecimento.

Dessa forma, são essas representações que contribuem para que um sujeito em fase de aprendizagem desenvolva habilidades de raciocínio, análise e visualização, conforme objetiva a Matemática. Portanto, compreensão em Matemática está ligada à competência do estudante em transitar entre registros e toda comunicação em Matemática é efetivada ancorada nessas representações, ou seja, o acesso aos objetos matemáticos passa, necessariamente, por representações semióticas (Duval, 2009).

De acordo com Duval (2009), um sistema semiótico compõe-se de três atividades cognitivas fundamentais, relacionadas à semiose: operações de formação de uma representação que identifica o objeto matemático, operações de tratamento inerentes a registros de um mesmo sistema semiótico e operações de conversão efetuadas quando lidamos com registros de sistemas semióticos diferentes.

Nesse sentido, a operação de formação “é o recurso a um (ou a muitos) signo(s) para atualizar a atenção voltada para um objeto ou para se substituir essa atenção” (Duval, 2009, pp. 54-55).

Uma operação de tratamento, ou simplesmente um tratamento, é “a transformação de uma representação obtida como dado inicial em uma representação considerada como terminal em relação a uma questão, uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema” (Duval, 2009, pp. 56-57).

A operação de conversão é o ato de “transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada em um registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação em um outro registro” (Duval, 2009, p. 58), ou seja, a conversão é definida como “uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida” (Duval, 2009, p. 59).

As ideias da TRRS aqui descritas, conforme apontamos na introdução deste capítulo, subsidiaram as análises realizadas nesta pesquisa, principalmente ao verificarmos se os sujeitos pesquisados conseguiram transitar entre os registros: figura geométrica, enunciado em língua natural e fórmulas algébricas; considerando que esse trânsito pode contribuir para a compreensão do volume do dodecaedro regular.

Na próxima seção, discorremos sobre o uso das Tecnologias Digitais no ensino de Geometria.

4.2 O USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE GEOMETRIA

O uso das Tecnologias Digitais (TD) no ensino de Geometria representa uma abordagem eficaz, na medida em que pode contribuir para a aprendizagem dos conteúdos e conceitos discutidos nessa disciplina. As TD incluem ferramentas como *softwares* de geometria dinâmica, aplicativos interativos, recursos *online* e realidade virtual e aumentada. Essas tecnologias proporcionam ambientes virtuais que permitem aos alunos explorarem os objetos matemáticos de maneira visual e interativa. O uso de *softwares* específicos, como o GeoGebra, possibilita a criação de construções geométricas, visualização de transformações e experimentação com diferentes configurações.

Além disso, o acesso a recursos *online* e aplicativos interativos oferece aos alunos a oportunidade de participar de atividades práticas e exploratórias. A integração de TD no ensino de Geometria não apenas torna o ensino e a aprendizagem mais envolventes, mas também pode contribuir para o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas, raciocínio espacial e compreensão conceitual.

Essa abordagem alinha-se à necessidade de preparar os alunos para um mundo digital, fornecendo-lhes as ferramentas necessárias para enfrentar desafios geométricos de forma mais dinâmica e significativa. Visto que,

> “A escola não pode ignorar o que se passa no mundo. Ora, as novas tecnologias da informação e da comunicação transformam espetacularmente não só nossas maneiras de comunicar, mas também de trabalhar, de decidir, de pensar” (Oliveira, 2001, p. 7).

4.2.1 A Realidade Aumentada no ensino de Geometria Espacial

O ensino da Geometria Espacial tem se beneficiado significativamente do uso de *softwares*, pois essas tecnologias oferecem perspectivas adicionais que complementam os métodos tradicionais de ensino, uma vez que a compreensão desse campo da Matemática está intrinsecamente ligada às representações visuais detalhadas.

A Geometria Espacial estuda formas tridimensionais e suas propriedades. A compreensão dessas formas, suas medidas e relações é fundamental para diversas aplicações práticas e teóricas. No ensino tradicional, a visualização dessas formas muitas vezes é limitada a desenhos bidimensionais e modelos físicos, que nem sempre capturam a complexidade das figuras tridimensionais. A RA supera essas limitações ao permitir a visualização e a interação com modelos virtuais tridimensionais em tempo real (Costa, 2023).

A RA teve seu início nos anos 60, com o investigador Ivan Sutherland, que elaborou um capacete de visão óptica direta para visualizar objetos 3D no ambiente real, porém, o termo só foi idealizado na década de 1990. Atualmente, a RA permite sobrepor elementos virtuais à nossa visão da realidade, de modo a possibilitar a simulação e projeção de situações-problema que podem ser difíceis de analisar e discutir nas limitações de uma sala de aula tradicional, que muitas vezes não dispõe de recursos suficientes para uma representação significativa de suas estruturas (Ribeiro, 2013).

No campo da educação, a RA tem se destacado como uma ferramenta para o ensino de diversos conteúdos, especialmente nas áreas que requerem visualização espacial, como a Geometria, pois permite que os alunos interajam diretamente com modelos virtuais, oferecendo uma compreensão mais intuitiva dos conceitos geométricos. As principais vantagens da RA no ensino incluem a visualização interativa, devido à possibilidade de visualizar objetos tridimensionais, que podem ser rotacionados.

O dodecaedro regular é um sólido platônico composto por doze faces pentagonais congruentes. O cálculo do volume dessa figura geométrica pode ser bastante desafiador para os alunos devido à sua complexidade. Nesta pesquisa, consideramos que uma abordagem eficaz para ensinar esse conceito é a decomposição do dodecaedro em pirâmides, facilitando o entendimento e o cálculo do volume total. A RA pode ser utilizada para visualizar e manipular essas decomposições de forma interativa.

Diversas ferramentas e aplicativos de RA estão disponíveis para auxiliar no ensino de Geometria Espacial. Entre elas, destaca-se o GeoGebra 3D, uma extensão do *software* de geometria dinâmica GeoGebra, que permite a visualização de construções geométricas em Realidade Aumentada. Com o GeoGebra, os alunos podem criar e manipular modelos tridimensionais diretamente no ambiente físico ao seu redor, facilitando a compreensão de conceitos complexos como o volume do dodecaedro.

Entendemos, nesta pesquisa, que o ensino de Geometria Espacial, por meio de recursos visuais, pode permitir uma melhor compreensão do objeto de estudo aqui considerado; especialmente para alunos com dificuldades em visualizar figuras tridimensionais, que muitas vezes são apresentadas de forma plana nos livros didáticos e na exposição realizada pelo professor em situações de ensino em sala de aula. Isso posto, nesta pesquisa, utilizamos o GeoGebra 3D com a RA, na sequência elaborada, a fim de cumprir com os objetivos propostos.

A seguir, apresentamos as estruturas matemáticas que fundamentaram o estudo da representação algébrica, da representação visual, da representação na língua materna e da representação numérica dos objetos matemáticos envolvidos no cálculo da medida do volume do dodecaedro por meio da composição e decomposição por pirâmides.

5 O ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO

Nesta seção, abordamos a presença da Geometria no Ensino Médio, de acordo com os direcionamentos previstos pela BNCC, quanto às orientações curriculares para o ensino da Geometria, estabelecendo algumas relações com o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb)[15]. Além disso, apresentamos os objetos matemáticos envolvidos na Sequência Didática destacando conceitos, formas e expressões que representam suas características, partindo desde um elemento plano simples da Geometria Plana até o objeto de estudo neste trabalho, o dodecaedro regular, a fim de calcular a medida do seu volume.

5.1 A GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

A Geometria, parte essencial da Matemática, requer um ensino dinâmico desde o início da Educação Básica. O ensino tradicional de matemática é muitas vezes monótono e baseado em exposições de fórmulas e cálculos, o que pode resultar em uma compreensão superficial dos objetos matemáticos discutidos nessa ciência.

A BNCC, no que diz respeito ao ensino de Geometria para o Ensino Médio, enfatiza a importância de conectar essa ciência com outros segmentos da Matemática, nesse sentido, as orientações curriculares, nela presentes, recomendam que os professores estabeleçam conexões entre conceitos geométricos e algébricos (Brasil, 2018).

Além disso, conforme Machado (2010), o ensino da Geometria Espacial apresenta desafios específicos, na medida em que requer a compreensão prévia de conceitos de Geometria Plana, para o perímetro e área, além da habilidade de visualização de objetos tridimensionais. Para o mesmo autor, é fundamental enfatizar que o ensino da Geometria Espacial deve ser uma extensão natural do estudo da Geometria Plana, garantindo a continuidade e a integração desses conhecimentos.

[15] É formado por um conjunto de avaliações externas em larga escala, realizadas periodicamente por meio da aplicação de testes cognitivos e questionários para etapas específicas da educação básica. Tem a finalidade de avaliar a qualidade da educação básica do País e contribuir para sua melhoria, oferecendo subsídios concretos para a formulação, a reformulação e o monitoramento das políticas públicas (Brasil, 2023).

Os descritores para a elaboração de questões de provas do Saeb requerem o domínio de tópicos relacionados a relações métricas, poliedros, áreas e volumes de sólidos geométricos no Ensino Médio (Saeb, 2022).

Para despertar o interesse do aluno é essencial adotar abordagens dinâmicas, incorporando tecnologias como *softwares* educacionais, aplicativos móveis e jogos eletrônicos. Essas ferramentas podem auxiliar os alunos na capacidade de representar objetos tridimensionais, na compreensão de conceitos e na aplicação prática (Brasil, 2018). Cabe ressaltar, que as avaliações do Saeb são elaboradas a partir de matrizes de referência que descrevem as competências e habilidades previstas na BNCC. Essa matriz é dividida em temas, que por sua vez, são subdivididos por elementos que descrevem as habilidades trabalhadas nessas avaliações.

Por exemplo, na seção Grandezas e Medidas, o descritor de número 11, destaca que para a Geometria Plana, o aluno deve "Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas" (Brasil, 2022, p. 8), já para o descritor de número 12, "Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas" (Brasil, 2022, p. 8). Em relação à Geometria Espacial, o descritor 13 informa que o estudante deve: "resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera)" (Brasil, 2022, p. 8).

Isso posto, entendemos que o ensino da Geometria, especialmente a Geometria Espacial, pode requerer uma abordagem que vai além do simples domínio dos conceitos matemáticos, e envolve estratégias que estimulem a percepção espacial e a compreensão das relações entre os objetos planos e tridimensionais.

Na seção seguinte, apresentamos do ponto de vista da Matemática a construção do dodecaedro regular.

5.2 A CONSTRUÇÃO DO OBJETO MATEMÁTICO

Neste capítulo apresentamos a construção do dodecaedro regular, desde a discussão de medidas de áreas de superfícies planas até a construção do dodecaedro propriamente dito. Essa construção guiou o desenvolvimento da discussão matemática feita na Sequência Didática.

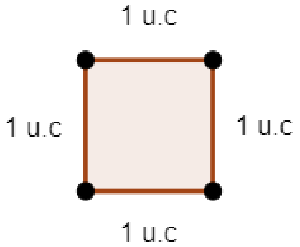
5.2.1 Medida de área de superfície

Segundo Dolce e Pompeo (2005), a medida da área de uma superfície limitada é o número real positivo associado à superfície de tal forma que:

i. As superfícies equivalentes estão associadas às medidas de áreas iguais e reciprocamente.
ii. A uma soma de superfícies está associada uma medida de área que é a soma das medidas de áreas das superfícies parcelas.
iii. Se uma superfície está contida em outra, então sua medida de área área é menor (ou igual) do que a medida de área da outra.

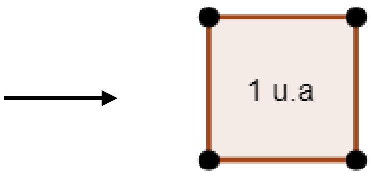
A partir dessas ideias, apresentamos modos de determinar as áreas de algumas figuras planas envolvidas na construção do dodecaedro. Para tanto, assumimos como unidade de medida um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento (u.c.), conforme a Figura 1, que será chamado de quadrado unitário. Assim, a medida de área desse quadrado unitário será igual a uma unidade de área (u.a.), conforme a Figura 2.

Figura 2 – Quadrado de medida de lado unitária



Fonte: De autoria própria (2023)

Figura 1 – Quadrado de medida de área unitária



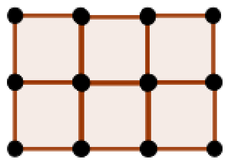
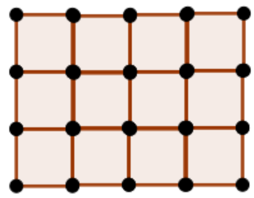
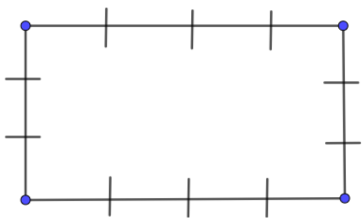
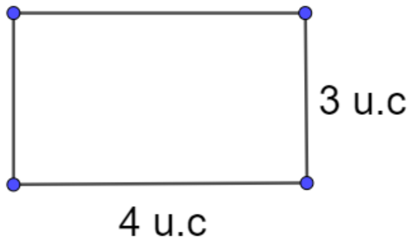
Fonte: De autoria própria (2023)

5.2.2 Medida de área do retângulo

Segundo Dolce e Pompeo (2005), o retângulo é o quadrilátero que possui quatro ângulos congruentes.

A partir das representações de um quadrado de medida de área unitária, podemos construir regiões maiores, como os retângulos do Quadro 15.

Quadro 15 – Representação de retângulos com alterações no registro geométrico e registro numérico

Fonte: De autoria própria (2023).

A partir do exposto no Quadro 15, podemos verificar a quantidade de quadrados de medida unitária utilizada para medir as dimensões do retângulo. Considere que a base do retângulo mede um valor qualquer, digamos que ‘b’ u.c, a altura também tenha uma medida qualquer, digamos que ‘h’ u.c. Assim, segundo Dolce e Pompeo (2005), dado um retângulo de lados adjacentes, sua medida de área, definida por A, é dada pelo produto da base pela altura.

A expressão algébrica que corresponde à medida da área do retângulo é dada por:

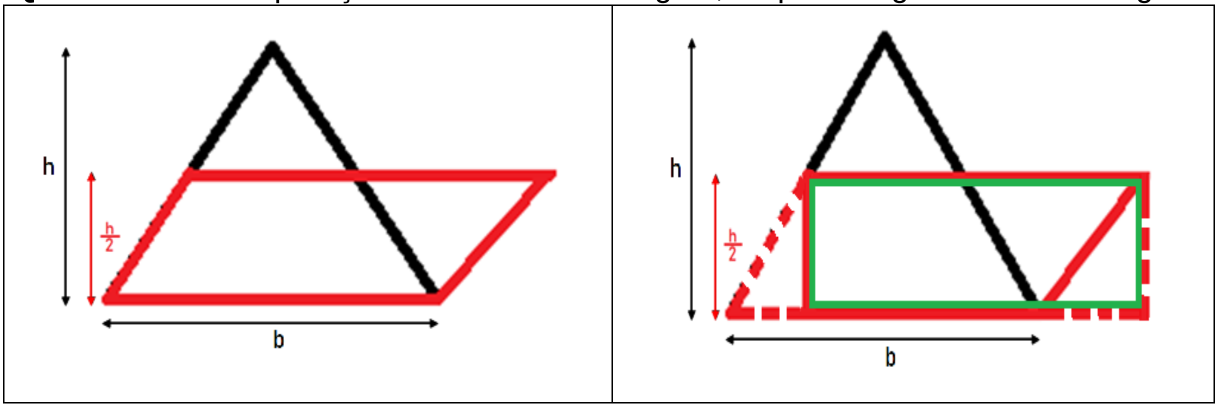
$$A = b \cdot h$$

5.2.3 Medida de área do triângulo

Segundo Dolce e Pompeo (2005), dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se triângulo. Assim, dado o triângulo de base ‘b’ e altura ‘h’, ele é equivalente a um paralelogramo cuja base mede b e altura mede $\frac{h}{2}$.

O paralelogramo também tem a medida de área equivalente à medida de área do retângulo, de mesma medida da base e mesma medida da altura, conforme o Quadro 16.

Quadro 16 – Comparação das áreas do triângulo, do paralelogramo e do retângulo.



Fonte: De autoria própria (2023).

Assim, a medida da área do triângulo corresponde a:

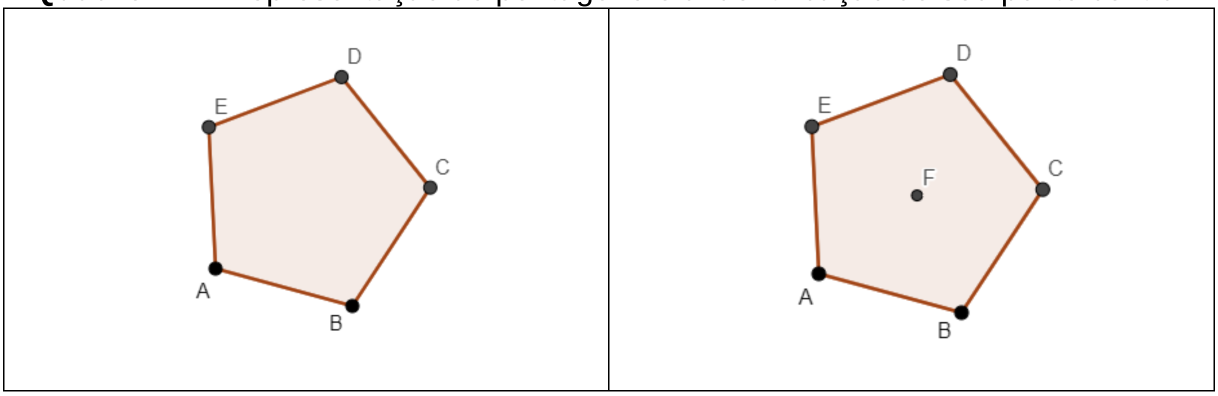
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

5.2.4 Medida de área do pentágono regular

Com base em Dolce e Pompeo (2005), o pentágono regular pode ser definido pela reunião de segmentos, formado por cinco pontos distintos, consecutivos e não colineares três a três. Além disso, possui lados congruentes (equilátero) e possui os ângulos congruentes (equiângulo).

Partimos da representação do pentágono regular, a fim de encontrar à medida que representa a sua área, por meio da medida de área de figuras já conhecidas, as quais são triângulos. Assim, o pentágono pode ser formado por cinco triângulos, a partir da identificação do ponto central, identificado no Quadro 17.

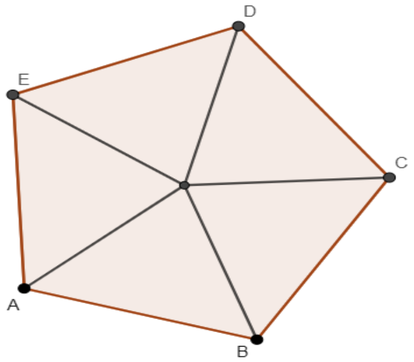
Quadro 17 – Representação do pentágono e a identificação do seu ponto central



Fonte: De autoria própria (2023).

Após identificar o ponto central é possível estabelecer segmentos partindo de cada vértice do pentágono até o seu ponto central, decompondo o pentágono em triângulos, conforme a Figura 3.

Figura 3 – Formação de triângulos semelhantes no pentágono regular

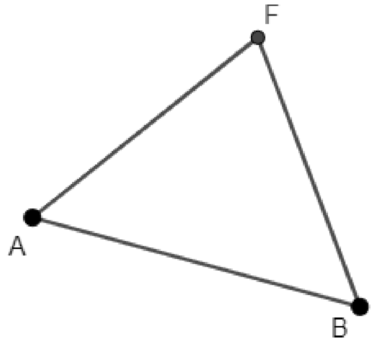


Fonte: De autoria própria (2023).

Assim, precisamos identificar a expressão que representa a medida de área de cada triângulo, para isso encontramos a medida da altura do triângulo, relativa à medida do lado do pentágono.

Tomando como base um dos triângulos do pentágono representado na Figura 3, encontramos a expressão que corresponde à medida da sua área. Assim, traçamos os segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{BF}$, e destacar o triângulo ABF do pentágono ABCDE, representado na Figura 4.

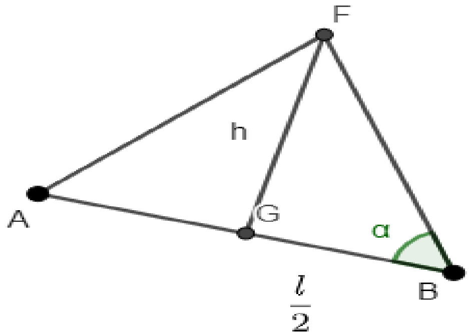
Figura 4 – Triângulo formado pelos segmentos $\overline{\boldsymbol{AF}}$, $\overline{\boldsymbol{BF}}$ e $\overline{\boldsymbol{AB}}$



Fonte: De autoria própria (2023).

Para isso, utilizamos a relação trigonométrica sobre a tangente do ângulo de medida $\propto$, formado pelos segmentos GB, que é metade do lado "l" do segmento $\overline{AB}$, e pelo segmento $\overline{BF}$, conforme ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Triângulo ABF com identificação da altura, do lado e do ângulo



Fonte: De autoria própria (2023)

Então,

$$\text{tg}(\propto) = \frac{h}{\frac{l}{2}} \Rightarrow h = \frac{l}{2}\text{tg}(\propto)$$

Para determinar o valor do ângulo $\propto$, tomamos o pentágono regular ABCDE, logo todos os ângulos centrais possuem a mesma medida, e como existem 5 triângulos congruentes no pentágono, cada ângulo tem medida de $\frac{360°}{5}$, ou seja, $72°$. Portanto, como esses triângulos também são isósceles, devido a regularidade do pentágono, cada ângulo da base do triângulo é igual e mede 54°, considerando que a soma dos ângulos internos mede 180°.

Assim, podemos determinar a medida da área do triângulo. Representado a base de cada triângulo por l, e considerando que o valor da altura mede $\frac{l}{2}\text{tg}(54°)$, a medida da área de cada triângulo é dada por:

$$\text{Área} = \frac{(l)(\frac{l}{2}\text{tg}(54))}{2} \Rightarrow \text{Área} = \frac{l^2\,\text{tg}(54°)}{4}$$

Como o pentágono é formado por 5 triângulos, logo a expressão que corresponde a medida da sua área é dada por:

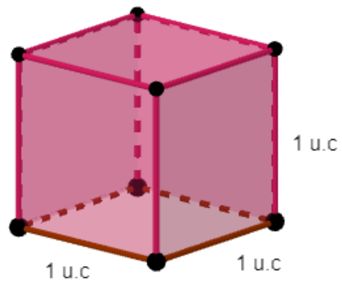
$$\text{Área} = \frac{5l^2\,\text{tg}(54°)}{4}$$

5.2.5 Medida de volume do prisma

Dolce e Pompeo (2005) consideram o prisma como à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a um segmento de reta, que intercepta um polígono convexo e um plano paralelo ao polígono.

Tomando como referencial uma unidade padrão de medida de volume, representada por um bloco de lados medindo 1 unidade de comprimento (u.c), conforme mostra a Figura 6, é possível formar um prisma.

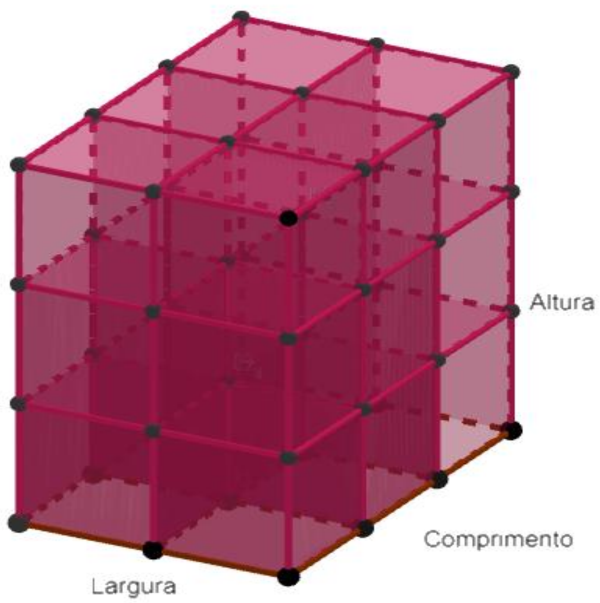
Figura 6 – Bloco com medida de volume unitário



Fonte: De autoria própria (2023).

Assim, para contabilizar a medida do volume do prisma, representado na Figura 7, basta contar a quantidade de blocos unitários nela contidos.

Figura 7 – Prisma formado por blocos de medida de volume unitário



Fonte: De autoria própria (2023).

Denominamos os segmentos que referenciam a dimensão lateral do prisma mostrado na Figura 7 como base(b), comprimento(c) e altura(h). Assim, efetuando o produto da Largura pelo Comprimento, encontramos a medida da área da superfície que representa a base do prisma. Indicamos esse produto por Ab.

Então, para encontrar o volume, basta efetuar o produto entre a medida da área da base (Ab) pela medida da altura (h):

$$V = Ab \cdot h$$

5.2.6 Medida de volume da pirâmide

Para Dolce e Pompeo (2005) a pirâmide pode ser estabelecida ao considerarmos um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$ situado num plano α e um ponto P fora de α. Assim, ela será obtida por meio da reunião dos segmentos com uma extremidade em P e a outra nos pontos do polígono. O ponto P é chamado de vértice e o polígono $A_1A_2A_3...A_n$, a base da pirâmide

Ainda segundo Dolce e Pompeo (2005), a medida do volume de qualquer pirâmide é um terço do produto da medida da área de sua base pela medida de sua altura.

Logo, se a medida da área da base da pirâmide é Ab e a medida da altura é H, então a medida do volume, V da pirâmide, é dado por:

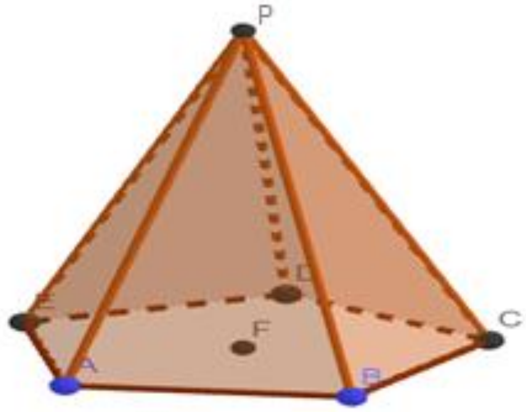
$$\mathrm{V} = \frac{Ab\ .\ H}{3}$$

Para a proposta da presente pesquisa, a expressão anterior, que corresponde ao volume da pirâmide não é suficiente, pois as faces de um dodecaedro são polígonos regulares pentagonais. Foi necessário buscar a expressão que representa o volume de uma pirâmide de base pentagonal.

5.2.7 Medida de volume da pirâmide de base pentagonal e regular

Dada uma pirâmide de base pentagonal ABCDE, conforme a Figura 8, sendo F o ponto central do pentágono e G um vértice fora desse pentágono, de tal forma que $\overline{FP}$ é perpendicular ao pentágono, assim $\overline{FP}$ é a altura da pirâmide pentagonal, que chamamos de H.

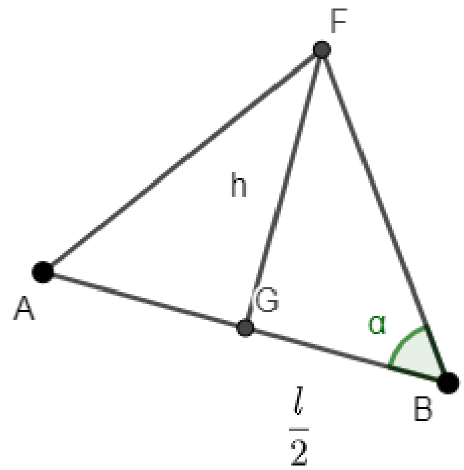
Figura 8 – Pirâmide de base pentagonal



Fonte: De autoria própria (2023).

Traçamos o segmento que vai de F até o ponto médio de um dos lados do pentágono, que representa a altura do triângulo da base da pirâmide, conforme a Figura 9, a qual é a altura do triângulo ABF, representada por h.

Figura 9 – Triângulo ABF com identificação da altura, do lado e do ângulo



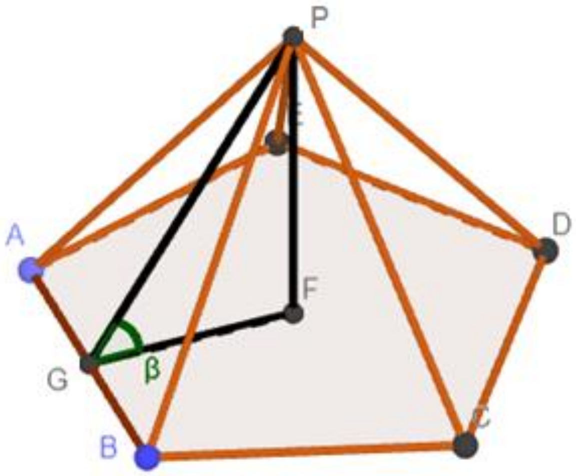
Fonte: De autoria própria (2023).

Como já vimos, sua altura é dada por:

$$h = \frac{l}{2}\text{tg}(54°).$$

Para encontrar a medida da altura do pirâmide, que chamamos de H, utilizamos a relação trigonométrica da tangente, mas agora no triângulo PFG, mostrado na Figura 10.

Figura 10 – Ângulo entre a base e a face lateral da pirâmide pentagonal



Fonte: De autoria própria (2023).

Assim, temos a tangente, relativa o ângulo de medida β, dada por:

$$\mathrm{tg}(\beta) = \frac{\mathrm{H}}{\frac{l}{2}\mathrm{tg}(54°)}$$

Então, H corresponde à:

$$\mathrm{H} = \frac{l}{2}\mathrm{tg}(54°)\mathrm{tg}(\beta)$$

Para determinar a medida do volume da pirâmide de base pentagonal, consideramos que a medida do volume de uma pirâmide qualquer é dada por:

$$\mathrm{V} = \frac{Ab\ .\ H}{3}$$

Substituindo $Ab = \frac{5l^2\mathrm{tg}(54°)}{4}$ e $H\ = \frac{l}{2}\mathrm{tg}(54°)\mathrm{tg}(\beta)$ em V, temos:

$$\mathrm{V} = \frac{\frac{5l^2 \mathrm{tg}(54°)}{4} \ . \ \frac{l}{2}\mathrm{tg}(54°)\mathrm{tg}(\beta)}{3}$$

Simplificando a expressão acima, obtemos:

$$\mathrm{V} = \frac{5l^3 \mathrm{tg}(54°)^2 \ \mathrm{tg}(\beta)}{24}$$

5.2.8 Medida de volume do dodecaedro

À medida Vd, que corresponde ao volume do dodecaedro regular será 12 vezes o volume da pirâmide de base pentagonal, ou seja:

$$Vd = 12(\frac{5l^3 \mathrm{tg}(54°)^2 \mathrm{tg}(\beta)}{24})$$

Simplificando, obtemos, finalmente, uma expressão que corresponde ao volume do dodecaedro:

$$Vd = \frac{5l^3 \mathrm{tg}(54°)^2 \ \mathrm{tg}(\beta)}{2}$$

Como o ângulo β é uma constante, cuja medida pode ser aproximada com algumas casas decimais, para não haver muito erro por truncamento, consideramos na Sequência Didática construída nesta pesquisa, β = 58,28253º. Então, a medida do volume do dodecaedro, considerado nesta pesquisa, é dado por:

$$Vd = \frac{5l^3 \mathrm{tg}(54°)^2 \ \mathrm{tg}(58{,}28253)}{2}$$

Assim, concluímos este capítulo que apresentou um estudo detalhado sobre as construções, representações geométricas e algébricas, fundamentais para o cálculo da medida de áreas de superfícies planas e volume de sólidos que serão essenciais para o cálculo da medida do volume do dodecaedro.

6 A IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Conforme já acentuamos no Capítulo 3, a fase da aplicação da Sequência Didática foi desenvolvida em quatro momentos, sendo dois no período regular de aulas e dois no contraturno.

O propósito das atividades iniciais foi, partindo da revisão dos conceitos relacionados à Geometria Plana, apresentar sequencialmente os conteúdos de Geometria até a construção do dodecaedro regular, com ênfase no cálculo da medida do seu volume.

Cada atividade foi realizada com a supervisão do professor, incentivando os alunos a serem ativos e independentes para desenvolver e se envolver em todo o processo de descoberta, desenvolver pensamento crítico e explorar a criatividade e, consequentemente, desenvolver a aprendizagem.

A avaliação da aprendizagem foi formativa, ocorrendo por meio da verificação dos indícios de aprendizagem e, principalmente, da análise das produções escritas dos estudantes. Também foram levadas em conta as discussões em Grupo e as construções geométricas (em 2D e 3D). Durante a avaliação, foi verificado como os alunos abordaram as propriedades, a utilização do material de apoio (figuras planas, materiais manipuláveis e artefatos tecnológicos), a identificação de elementos necessários à resolução de problemas que não estão diretamente acessíveis à percepção (apreensão perceptiva), ou seja, a necessidade de olhar as dimensões inferiores da figura dada (apreensão operatória).

A seguir, apresentamos o desenvolvimento da aplicação da Sequência Didática e as produções feitas pelos sujeitos de pesquisa, juntamente com as análises do que foi produzido sob a perspectiva das ideias da TRRS, conforme já pontuamos anteriormente. Assim, descrevemos as atividades realizadas, separando os dias de aplicação em momentos, apresentando os resultados, além de expor eventuais adaptações.

Para as análises, em cada atividade, foram retiradas amostras das produções.

6.1 PRIMEIRO MOMENTO

No início do primeiro momento, foi apresentada a proposta de trabalho para os alunos, bem como explicado seu funcionamento, para que descrevessem o raciocínio em relação à compreensão que obtiveram, visto que a maioria das questões é discursiva.

Cabe esclarecer que, devido ao formato de mestrado, não tivemos tempo hábil para aplicar a sequência a um grupo piloto, a fim de verificar as suas fragilidades e corrigi-las antes de aplicar aos sujeitos de pesquisa. Por isso, durante a aplicação da Sequência Didática, foram percebidos alguns erros na sua elaboração, os quais foram expostos, explicados e corrigidos, a fim de não atrapalhar o entendimento e o andamento da sequência. Os erros identificados foram relacionados à clareza do enunciado e à identificação adequada da questão.

Partindo do que está exposto na Sequência Didática, foi realizada a apresentação de um objeto simples, usado como ponto de partida para as demais figuras, que é o quadrado de medida de área unitária. Nesse primeiro momento, alguns alunos, por já terem estudado Geometria Plana e Espacial no decorrer do ano, demonstraram saber e diferenciar o conceito de área do conceito de perímetro. Prontamente, ao identificar as dimensões do polígono, eles informaram qual era a medida de valor correspondente à área.

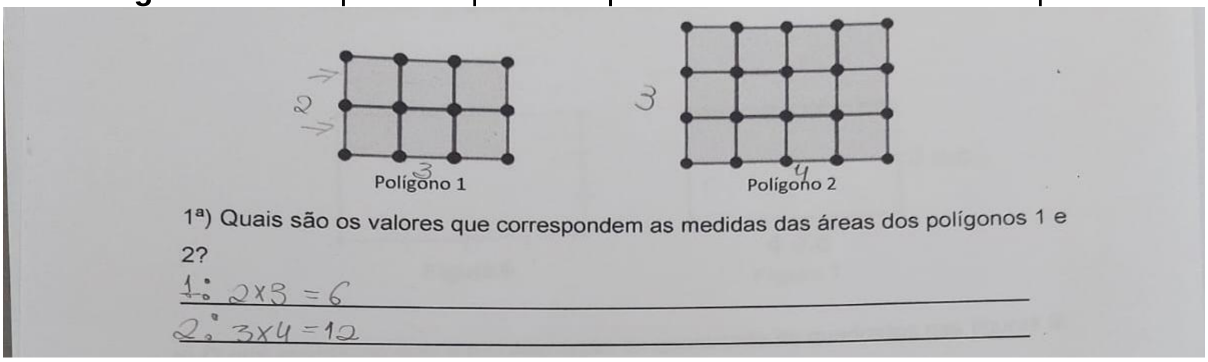
O *software* GeoGebra foi apresentado ao final do primeiro encontro, com ênfase na exposição das ferramentas que seriam utilizadas no desenvolvimento das atividades da sequência. Também foi solicitado que os alunos baixassem o GeoGebra 3D Calculadora Gráfica no celular. Após obterem o *software*, foi apresentada a interface do programa, bem como as ferramentas que seriam mais utilizadas.

6.1.1 Primeira atividade

Em relação à primeira atividade, os alunos foram convidados a identificar as representações geométricas presentes na construção de retângulos, por meio da composição por quadrados de medida de área unitária. Além disso, eles deveriam efetuar a contagem desses quadrados, a fim de registrar numericamente as dimensões dos lados do quadrilátero em questão e as medidas das áreas, para estabelecer uma fórmula algébrica correspondente à expressão que permite medir as áreas dos retângulos.

Para esta atividade, a maioria dos alunos utilizou a representação numérica, referente à multiplicação dos valores que correspondem às dimensões dos lados dos polígonos, conforme ilustrado na Figura 11. O procedimento para a primeira questão foi além do idealizado para a atividade, visto que o produto das dimensões dos lados dos polígonos, prevista para ser realizada ao final da atividade, foi feita de imediato pelos estudantes. Assim, os estudantes conseguiram estabelecer uma fórmula algébrica para calcular a medida da área dos polígonos.

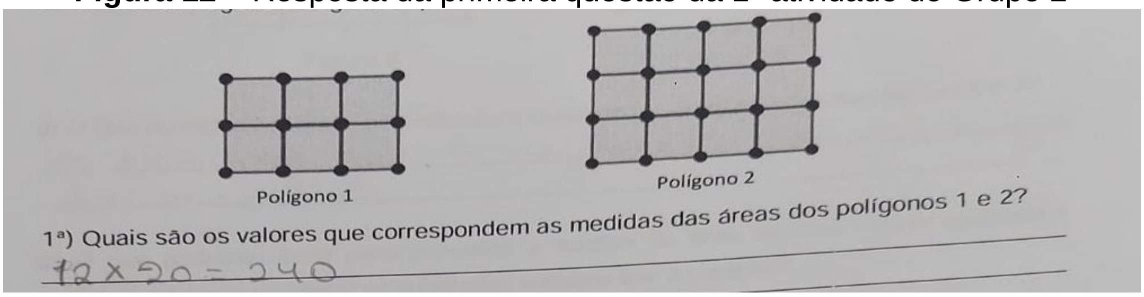
Figura 11 – Resposta da primeira questão da 1ª atividade do Grupo 1



Fonte: De autoria própria (2023).

Porém, conforme mostrado na Figura 12, os alunos do Grupo 2 não compreenderam o enunciado da questão, visto que contaram a quantidade de *pontinhos* constantes na representação figural dos dois polígonos e fizeram o produto dos resultados, ou seja, 12 *pontinhos* vezes 20 *pontinhos*. Além disso, os alunos não identificaram que os elementos de um retângulo que devem ser multiplicados para se calcular a medida da área são a base e a altura.

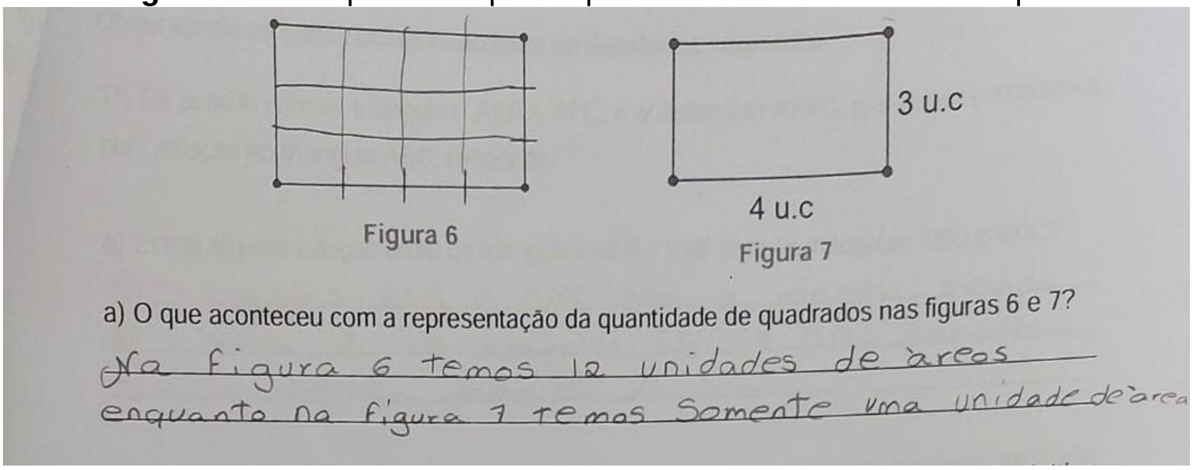
Figura 12 – Resposta da primeira questão da 1ª atividade do Grupo 2



Fonte: De autoria própria (2023).

Conforme mostra a Figura 13, verificamos que os alunos recorreram à representação figural semelhante à ilustrada na Figura 12 ao completar a região com os quadrados unitários para calcular a medida da área do retângulo. No entanto, conforme mostra a resposta dos alunos, eles não conseguiram calcular a medida da área do segundo retângulo, identificado na Figura 13 como Figura 7, pois entenderam que este seria um quadrado com uma unidade de medida de área.

Figura 13 – Resposta da quinta questão da 1ª atividade do Grupo 1



Fonte: De autoria própria (2023).

De maneira geral, concluímos que o objetivo desta atividade – verificar como a composição de quadrados de medida de área unitária podem formar outras áreas de quadriláteros; formalizar o conceito de área; e encontrar uma expressão que represente a medida de área do quadrilátero – foi alcançado pela maioria dos estudantes; no entanto, alguns não conseguiram identificar a medida dos segmentos dos lados que compõem os retângulos abordados a partir dos lados do quadrado unitário.

6.1.2 Segunda atividade

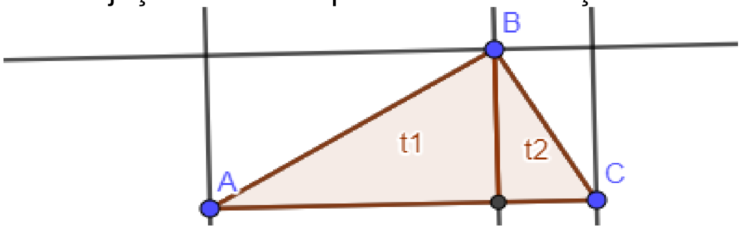
A segunda atividade visava a identificação, pelos estudantes, dos elementos que compõem os triângulos. Os resultados obtidos estavam de acordo com os objetivos propostos.

6.2 SEGUNDO MOMENTO

6.2.1 Terceira atividade

A terceira atividade foi pensada para estabelecer uma relação entre a dedução da expressão que corresponde à medida de área do triângulo e a expressão que corresponde à medida de área do retângulo, visto que o retângulo é composto de dois triângulos, vide Figura 14.

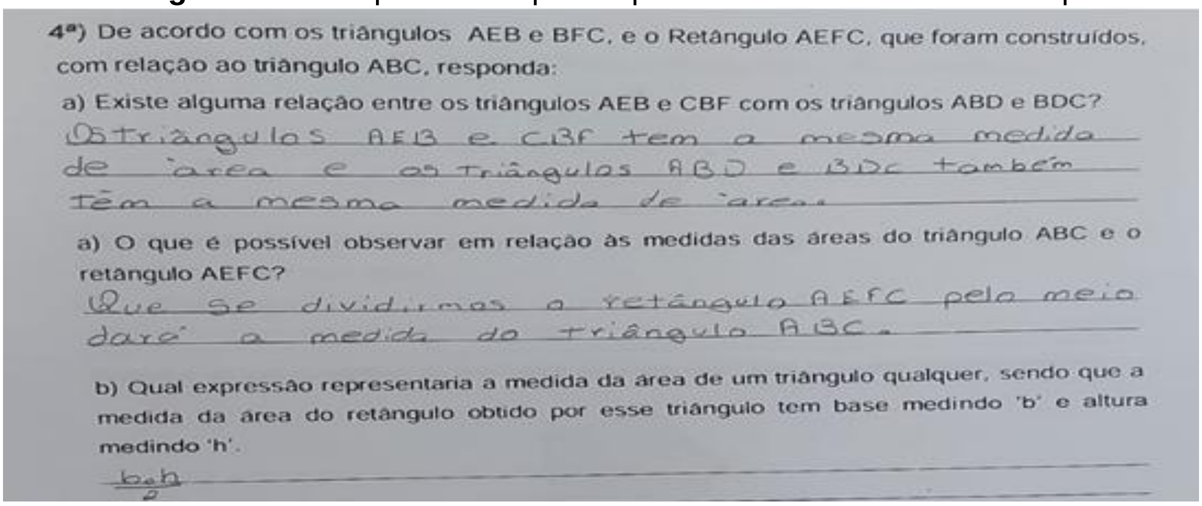
Figura 14 – Projeção de linhas paralelas em relação à base e à altura



Fonte: De autoria própria (2023).

Para a resolução da atividade, os alunos analisaram as construções e manipulações do triângulo no GeoGebra, conforme ilustra a Figura 14. Os resultados mostraram que os alunos conseguiram encontrar a fórmula algébrica para calcular a medida da área do triângulo a partir da construção do triângulo. Isso significa que, de acordo com a TRRS, os estudantes realizaram a conversão do sistema de registros de representação semiótica figural para o algébrico, conforme ilustrado na Figura 15.

Figura 15 – Respostas da quarta questão da 3ª atividade do Grupo 5



4ª) De acordo com os triângulos AEB e BFC, e o Retângulo AEFC, que foram construídos, com relação ao triângulo ABC, responda:

a) Existe alguma relação entre os triângulos AEB e CBF com os triângulos ABD e BDC?

Os triângulos AEB e CBF tem a mesma medida de área e os Triângulos ABD e BDC também têm a mesma medida de área.

a) O que é possível observar em relação às medidas das áreas do triângulo ABC e o retângulo AEFC?

Que se dividirmos o retângulo AEFC pelo meio daré a medida do triângulo ABC.

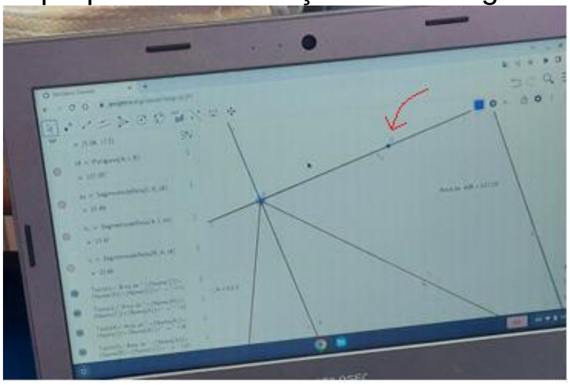
b) Qual expressão representaria a medida da área de um triângulo qualquer, sendo que a medida da área do retângulo obtido por esse triângulo tem base medindo 'b' e altura medindo 'h'.

$\frac{b.h}{2}$

Fonte: De autoria própria (2023).

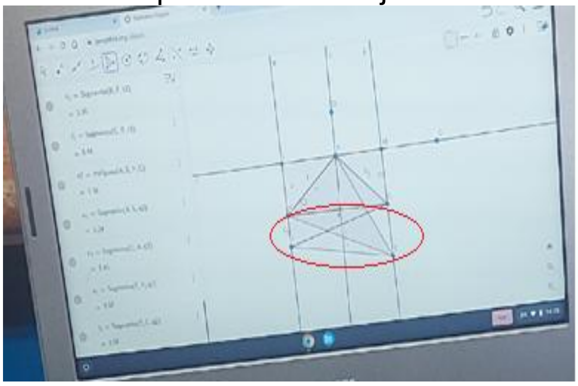
No entanto, um grupo teve dificuldade relacionada à construção dos triângulos que compõem o retângulo no GeoGebra, bem como às manipulações dessas figuras geométricas, conforme ilustram as Figuras 16 e 17 para a resolução do exercício.

Figura 16 – Identificação do ponto impróprio na construção dos triângulos



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 17 – Manipulação com superfícies indesejadas



Fonte: De autoria própria (2023).

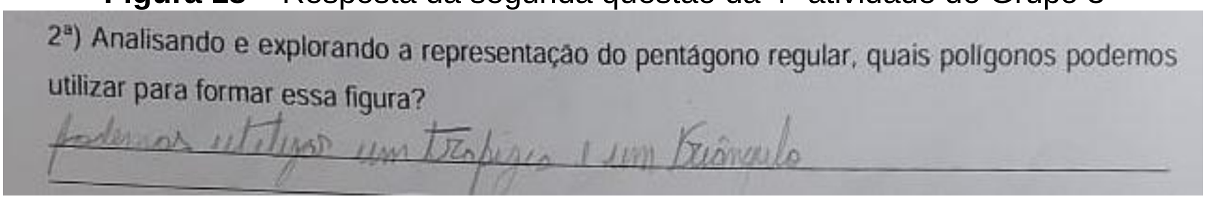
Concluímos que a atividade cumpriu o seu objetivo, possibilitando-nos avançar com a implementação da sequência. Concluímos ainda, que a utilização do *software* GeoGebra auxiliou os alunos na visualização das representações figurais dos objetos abordados, possibilitando o trânsito da representação figural para a língua materna.

6.2.2 Quarta atividade

Esta atividade visava fazer com que os estudantes percebessem que o pentágono regular é composto por cinco triângulos isósceles e congruentes, e a partir dessa composição determinar uma expressão algébrica que possibilitasse o cálculo da medida da área do pentágono regular em questão. Contribuindo, desta forma, para a aprendizagem em relação a este conteúdo, por meio do trânsito entre os sistemas de representação figural e algébrico.

A resposta de alguns grupos, conforme ilustrado na Figura 18, sugere que utilizaram um trapézio e um triângulo para formar o pentágono, o que é possível, mas não era o esperado pelo pesquisador.

Figura 18 – Resposta da segunda questão da 4ª atividade do Grupo 3



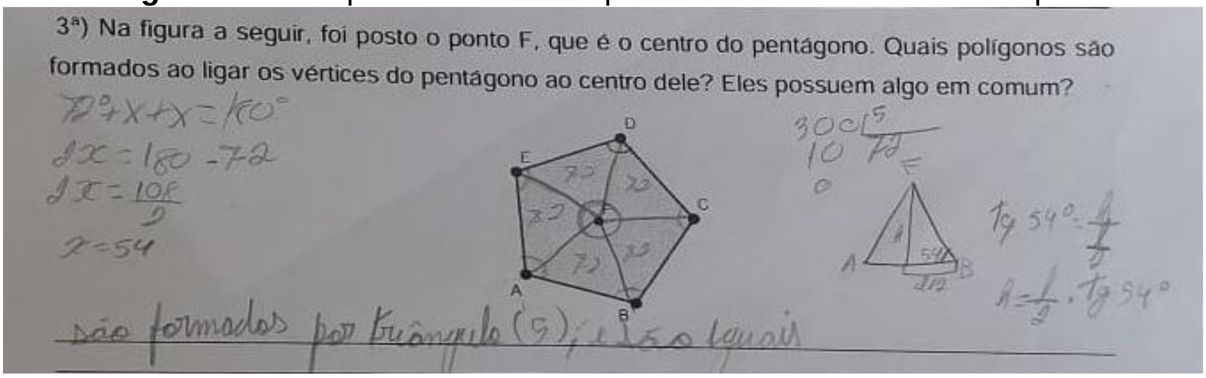
2ª) Analisando e explorando a representação do pentágono regular, quais polígonos podemos utilizar para formar essa figura?

Podemos utilizar um trapézio e um triângulo

Fonte: De autoria própria (2023).

Em relação à terceira questão, ilustrada na Figura 19, todos os estudantes conseguiram realizá-la com facilidade, ligando o ponto central a cada um dos vértices do pentágono.

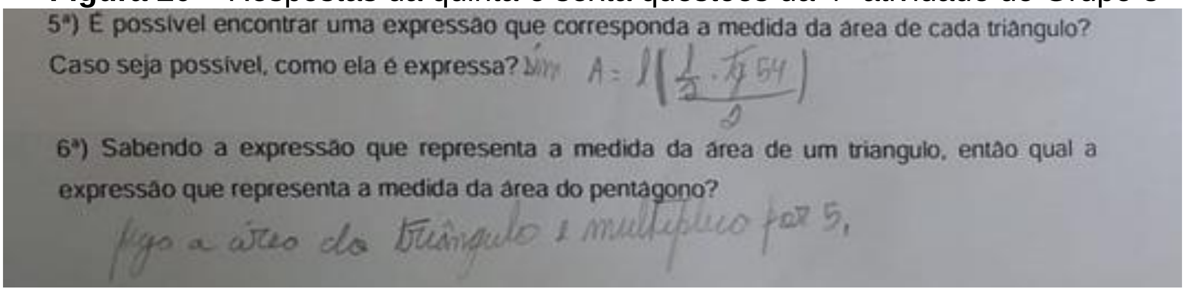
Figura 19 – Resposta da terceira questão da 4ª atividade do Grupo 3



Fonte: De autoria própria (2023).

Conforme ilustrado na Figura 20, a maioria dos alunos conseguiu encontrar uma fórmula algébrica para o cálculo da medida da área do pentágono a partir da soma das expressões que representavam as medidas das áreas dos triângulos que compõem a superfície do pentágono regular. Isso evidencia que foi possível aos estudantes a realização da conversão entre os sistemas de registros de representação semiótica figural e algébrico.

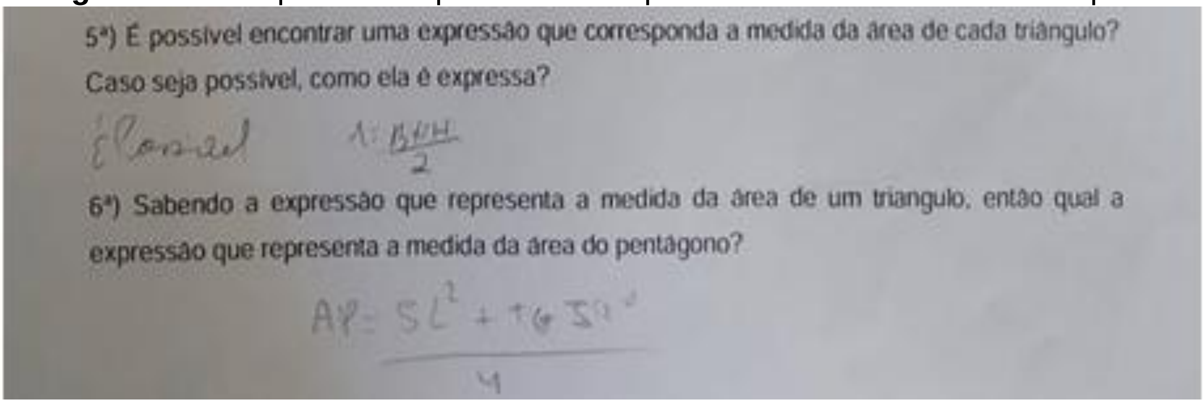
Figura 20 – Respostas da quinta e sexta questões da 4ª atividade do Grupo 3



Fonte: De autoria própria (2023).

Porém, o Grupo 6, apesar de conseguir encontrar uma expressão algébrica para calcular a medida da área dos triângulos, foi o único que não conseguiu encontrar uma fórmula correta para a medida da área do pentágono, conforme pode-se verificar na Figura 21.

Figura 21 – Respostas da quinta e sexta questões da 4ª atividade do Grupo 6


5ª) É possível encontrar uma expressão que corresponda a medida da área de cada triângulo? Caso seja possível, como ela é expressa?

É possível $A: \frac{B \cdot H}{2}$

6ª) Sabendo a expressão que representa a medida da área de um triangulo, então qual a expressão que representa a medida da área do pentágono?

$AP = \frac{5L^2 + tg\, 36°}{4}$

Fonte: De autoria própria (2023).

Cabe ressaltar, que o enunciado da segunda questão, como posto na sequência implementada aos estudantes neste estudo, pode vir a permitir que os alunos sobreponham figuras para *cobrir* a superfície que representa a medida da área do pentágono. Assim, sugerimos que, em estudos futuros, o enunciado “Analisando e explorando a representação do pentágono regular, quais polígonos podemos utilizar para formar essa figura?” seja substituído pelo enunciado “Analisando e explorando a representação do pentágono regular, quais os polígonos que podem ser utilizados para formar essa figura, supondo que não haja sobreposição de figuras planas para a formação do pentágono?”

6.3 TERCEIRO MOMENTO

No terceiro momento, a Sequência Didática foi aplicada no contraturno, conforme já pontuamos anteriormente, com a utilização do *software* GeoGebra com ênfase na ferramenta RA. Para isso, os estudantes utilizaram o aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D por meio dos seus *smartphones*.

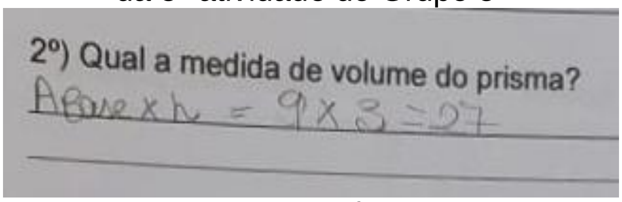
6.3.1 Quinta atividade

A exploração dos elementos do prisma e da pirâmide pelos alunos foi realizada por meio do aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D, com a intenção de facilitar a visualização desses elementos e melhor compreensão dos conceitos e definições a eles relacionados; nesse sentido, a ferramenta RA foi fundamental.

Quanto à dedução das expressões que representam a medida do volume do prisma e da pirâmide, o uso do *software* também foi muito importante. Vale ressaltar que o prisma de base retangular foi explorado na questão como um suporte para que os alunos pudessem compreender como calculamos a medida do volume de uma pirâmide triangular.

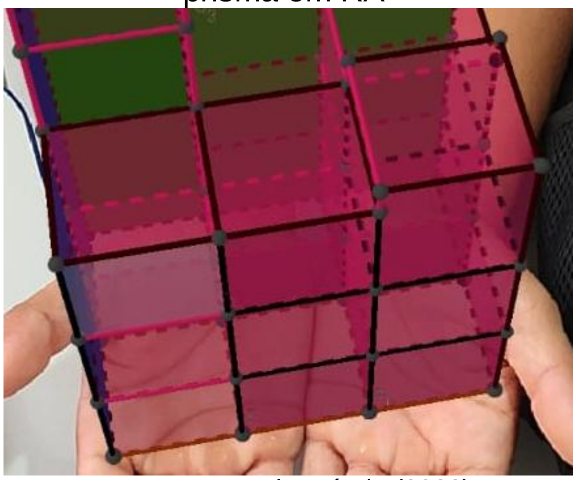
Assim, a Figura 22 ilustra o momento em que os estudantes, a partir do que visualizaram no GeoGebra, encontraram a expressão para calcular o volume do prisma, bem como realizaram o cálculo a partir das medidas constantes na construção no GeoGebra. Nesse sentido, entendemos que os estudantes conseguiram transitar entre os sistemas de registros de representação semiótica figural e algébrico.

Figura 22 – Resposta da segunda questão da 5ª atividade do Grupo 5



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 23 – Projeção da construção do prisma em RA



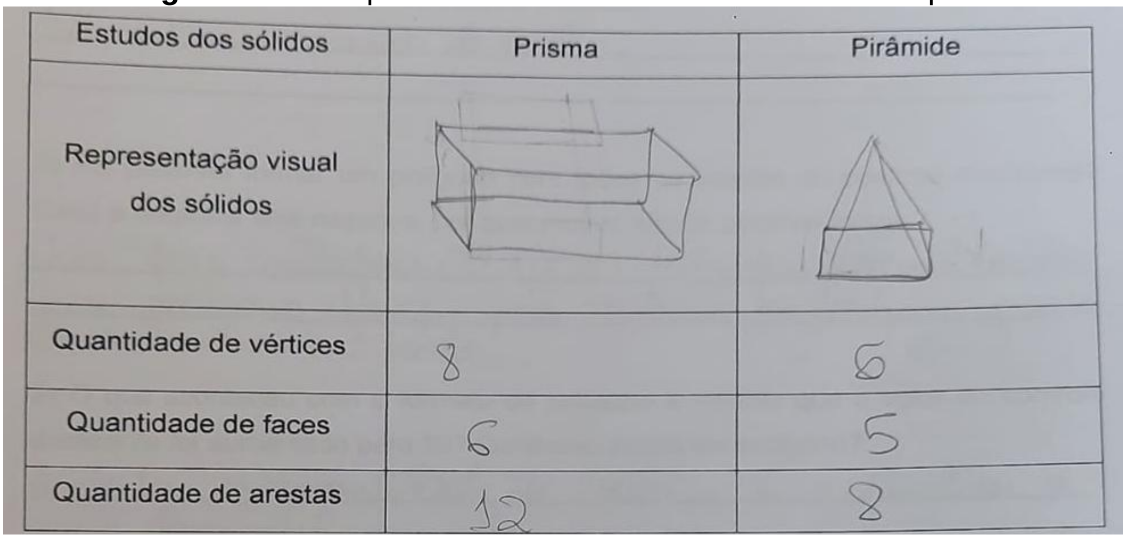
Fonte: De autoria própria (2023).

Concluímos que, com a atividade realizada, os objetivos propostos para esta questão foram alcançados.

6.3.2 Sexta atividade

Essa atividade solicitava que os estudantes construíssem a representação figural de um prisma e de uma pirâmide de base qualquer e, a partir dessas figuras, identificassem os elementos que as compõem. De forma geral, todos os estudantes conseguiram realizar a atividade de forma satisfatória, conforme a Figura 24.

Figura 24 – Respostas da tabela da 6ª atividade do Grupo 5

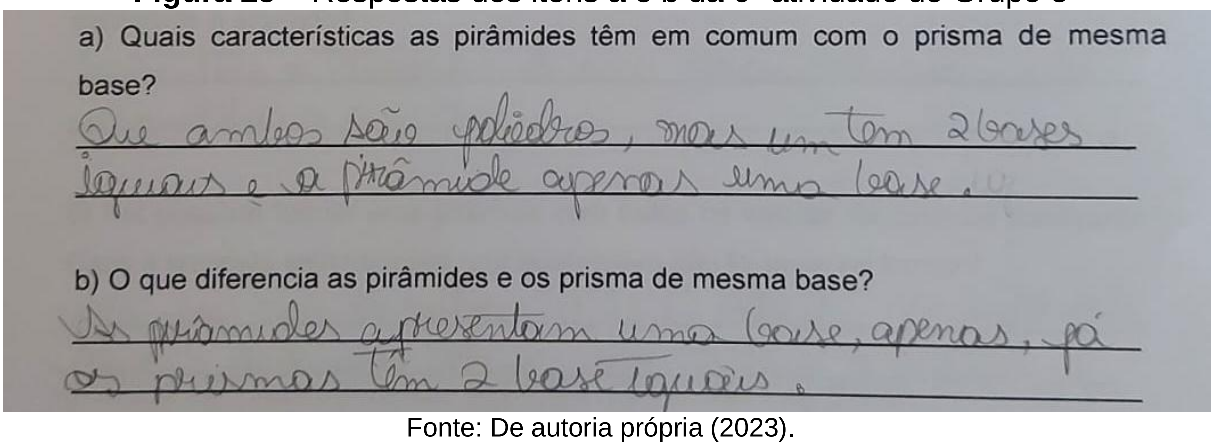


Estudos dos sólidos	Prisma	Pirâmide
Representação visual dos sólidos		
Quantidade de vértices	8	6
Quantidade de faces	6	5
Quantidade de arestas	12	8

Fonte: De autoria própria (2023).

Na análise das informações obtidas, conforme ilustrado na Figura 25, referente à tabela comparativa entre elementos dos sólidos, foram apresentadas pelos estudantes poucas informações, predominando o elemento base. A maioria dos estudantes diferenciou o prisma da pirâmide, citando que o prisma tem duas bases paralelas e a pirâmide uma base. Isso pode indicar que a representação figural causa maior impacto na aprendizagem em relação aos sólidos estudados do que, por exemplo, a quantidade numérica dos elementos dos sólidos, tais como quantidade de vértices e arestas.

Figura 25 – Respostas dos itens a e b da 6ª atividade do Grupo 5



a) Quais características as pirâmides têm em comum com o prisma de mesma base?

Que ambos são poliedros, mas um tem 2 bases iguais e a pirâmide apenas uma base.

b) O que diferencia as pirâmides e os prisma de mesma base?

As pirâmides apresentam uma base, apenas, já os prismas têm 2 base iguais.

Fonte: De autoria própria (2023).

Por fim, as análises mostraram que o objetivo proposto para esta atividade foi satisfatório.

6.3.3 Sétima atividade

Esta atividade visava comparar as diferentes pirâmides que podem ser construídas alterando a quantidade de arestas das bases que as compõem. Nesse sentido, a construção iniciou com a condição de existência de um polígono convexo que formou a base de uma pirâmide, ou seja, permitiu que os alunos percebessem que um polígono convexo só pode ser formado a partir de três pontos não colineares.

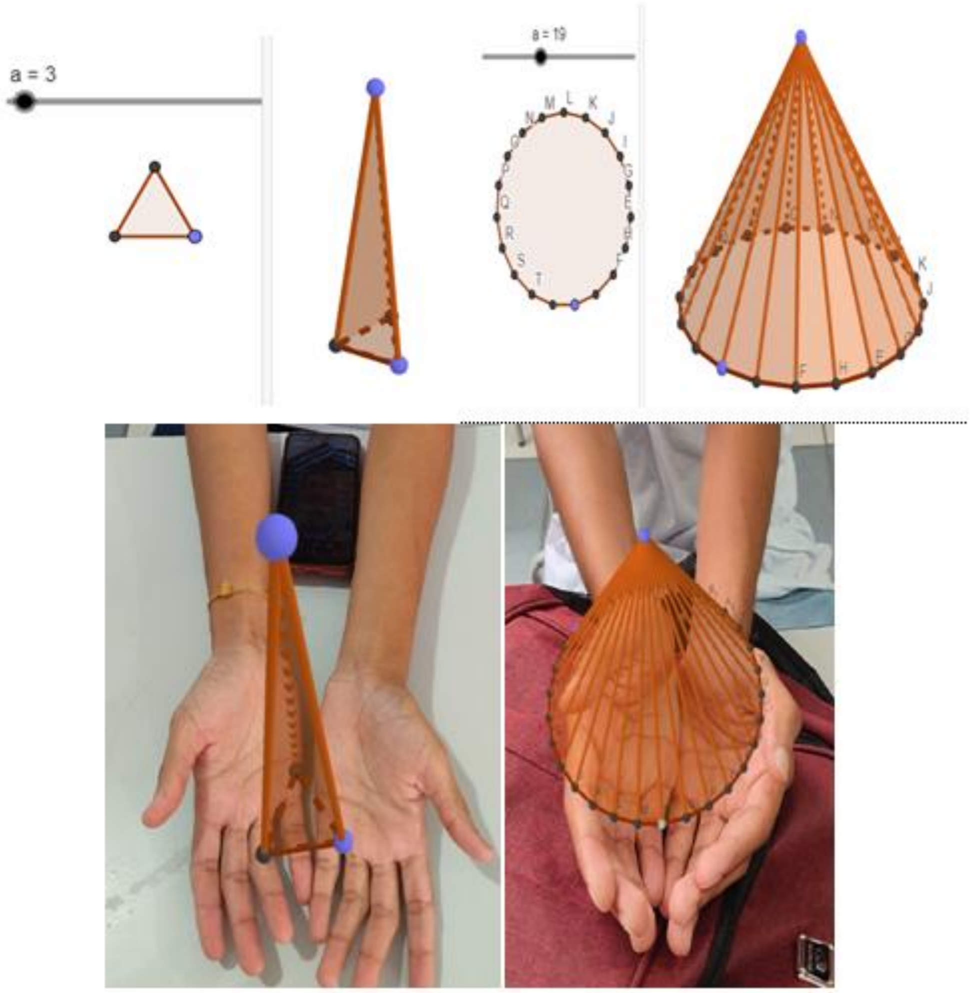
Posteriormente, a atividade solicitava que os alunos construíssem um polígono regular convexo contendo três lados e, a partir dele, fossem aumentando a quantidade de lados até que a figura formada no GeoGebra apresentasse semelhança com uma circunferência; a fim de verificar que, como a figura foi formada por arestas, não poderia ser uma circunferência, mas um polígono com n lados.

No segundo momento, a construção solicitava que os alunos localizassem o centro do polígono e, a partir dele, traçassem uma altura ligada a um ponto p, que seria o vértice de uma pirâmide. O polígono inicial da base da pirâmide era um triângulo equilátero, mas poderiam ser construídas outras pirâmides, de bases diferentes, movimentando-se o controle deslizante no GeoGebra. Essas pirâmides foram exploradas também em RA. Para isto, a atividade requisitou o uso intensivo do *software* GeoGebra pelos estudantes.

O *software*, e principalmente a RA, foram fundamentais para que os estudantes pudessem compreender que a base de uma pirâmide deve ter no mínimo três arestas. Ademais, mesmo quando aumentaram o número da base, de forma que ela se assemelhasse a uma circunferência, eles entenderam que a figura formada era uma ilusão do *software*, pois era formada por segmentos e não poderia, de maneira alguma, ser uma circunferência.

Quanto à exploração dos elementos que compunham as pirâmides formadas, tanto a construção na Janela 3D do *software* quanto a projeção da figura para o mundo real, por meio da RA, foram fundamentais. Os estudantes ficaram empolgados com a atividade, apresentando maior interesse e, consequentemente, resultados positivos. A Figura 25 ilustra a construção feita pelo Grupo 5.

Figura 26 – Construções de pirâmides realizadas pelo Grupo 5



Fonte: De autoria própria (2023).

Concluímos que a atividade contribuiu para a aprendizagem dos estudantes quanto à comparação das estruturas dos sólidos formados, visto que os comandos da atividade eram dados no sistema de registros de representação semiótica em língua materna, e os estudantes conseguiram, a partir dessa representação, elaborar a representação figural dos sólidos. Em outras palavras, passaram do sistema de registros de representação semiótica em língua materna para o sistema de registros de representação semiótica figural.

6.4 QUARTO MOMENTO

O último momento de implementação das atividades também requisitou a utilização do GeoGebra, com ênfase no recurso RA.

6.4.1 Oitava atividade

A atividade solicitava que os alunos construíssem um prisma de base pentagonal e, por meio dele, identificassem as nove pirâmides de base triangular nele contidas. Pretendia-se que os estudantes verificassem que a união de três pirâmides de base triangular compõe um prisma de base triangular. Juntando três desses prismas, encontramos um novo prisma de base pentagonal. Cabe ressaltar que esse prisma tem a mesma altura que as pirâmides de base triangular. A atividade também permitia que a junção de três pirâmides de base triangular formasse uma pirâmide de base pentagonal, conforme ilustrado na Figura 27.

Os alunos deveriam verificar que as pirâmides de base triangular tinham as medidas de volume correspondentes a um terço da medida de volume do prisma de base triangular e que a pirâmide de base pentagonal tinha a medida de volume correspondente a um terço da medida de volume do prisma de base pentagonal, formado a partir das nove pirâmides.

Assim, depois dessa construção, os alunos deveriam obter uma expressão algébrica correspondente à medida de volume da pirâmide de base pentagonal.

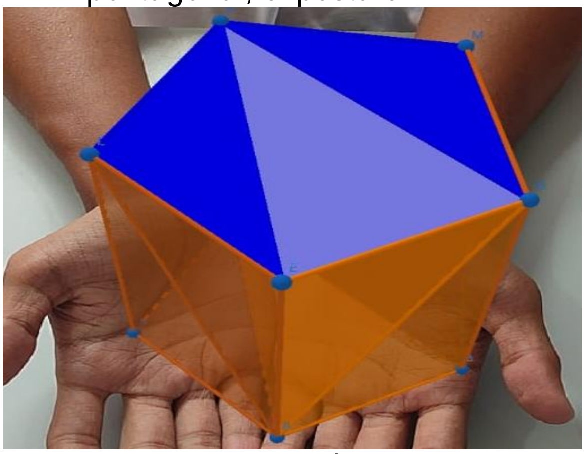
Figura 27 – Composição e decomposição do prisma pentagonal em prismas triangulares.

Fonte: De autoria própria (2023).

Durante a implementação da atividade, percebemos que os alunos sentiram dificuldade em identificar cada pirâmide devido à ocultação dos comandos disponibilizados na Janela de Álgebra do GeoGebra, ocasionada pela estrutura desse *software* na versão disponível para s*martphone.* Além disso, as exposições das identificações numéricas e de objetos ficaram sobrepostas, o que tornou confusa a exibição na Janela Gráfica.

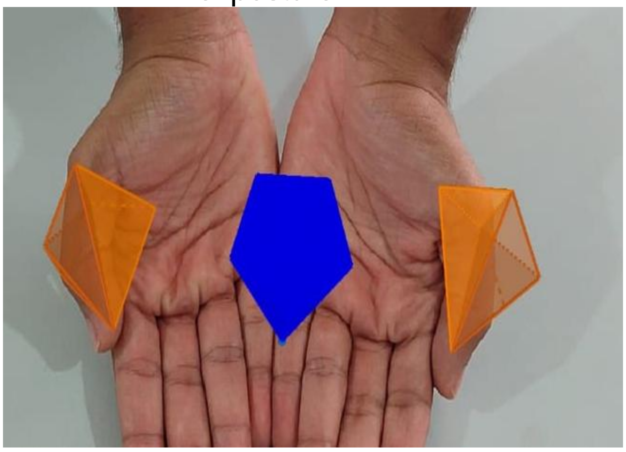
De maneira geral, os alunos não apresentaram dificuldade em relacionar as pirâmides de base triangular por meio da composição e decomposição para formar a pirâmide de base pentagonal. O mesmo ocorreu em relação à composição dos prismas envolvidos na atividade. A representação visual auxiliou na comparação da medida de volume do prisma de base pentagonal com a medida de volume da pirâmide de base pentagonal. As Figuras 28 e 29 ilustram as construções realizadas pelos alunos e expostas em RA.

Figura 28 – Pirâmide de base pentagonal, exposta em RA



Fonte: De autoria própria (2023).

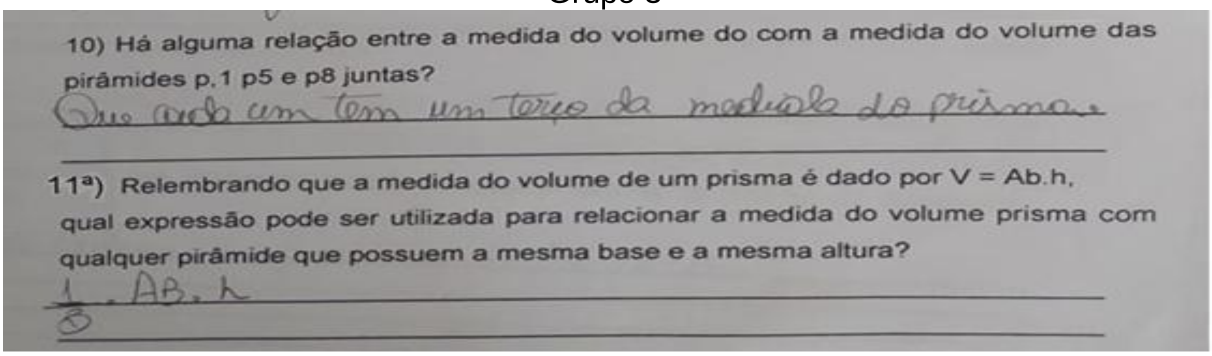
Figura 29 – Pirâmide de base triangular, exposta em RA



Fonte: De autoria própria (2023).

Os alunos concluíram que o volume da pirâmide de base pentagonal corresponde a um terço da medida de volume do prisma pentagonal; também conseguiram deduzir essa relação por meio de uma expressão algébrica, conforme ilustrado na Figura 30.

Figura 30 – Respostas da décima e décima primeira questões da 8ª atividade pelo Grupo 3



10) Há alguma relação entre a medida do volume do com a medida do volume das pirâmides p.1 p5 e p8 juntas?

Que ela um tem um terço da medida do prisma.

11ª) Relembrando que a medida do volume de um prisma é dado por V = Ab.h, qual expressão pode ser utilizada para relacionar a medida do volume prisma com qualquer pirâmide que possuem a mesma base e a mesma altura?

$\frac{1}{3}$. AB. h

Fonte: De autoria própria (2023).

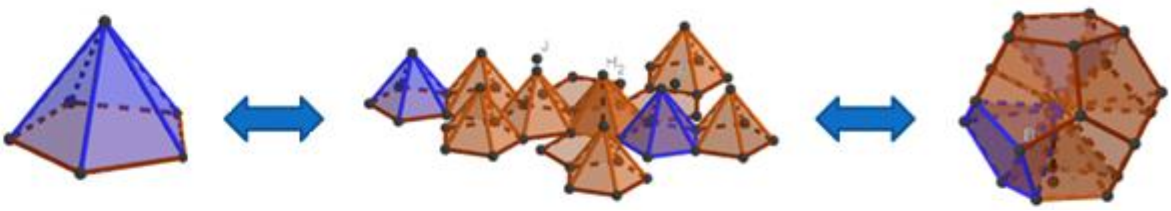
Assim, após análise dessa atividade, compreendemos que os estudantes realizaram a conversão do sistema de registros de representação semiótica figural para o sistema de registros de representação semiótica algébrico, o que contribuiu para a aprendizagem dos conceitos, definições e propriedades discutidas. A RA foi fundamental neste processo, pois permitiu que os estudantes visualizassem as construções e estabelecessem a relação entre os objetos visualizados e a expressão algébrica correspondente à medida de volume solicitada.

Desta forma, concluímos que o objetivo para a atividade foi alcançado, pois foram identificadas e comparadas as expressões algébricas da medida de volume do prisma e da pirâmide de base pentagonal.

6.4.2 Nona atividade

Essa atividade visava construir o dodecaedro regular, objeto de aprendizagem desta dissertação, explorando os seus elementos e calculando a medida do seu volume por meio da composição e decomposição por pirâmides, embora as pirâmides que compõe o dodecaedro regular também sejam compostas por outras pirâmides de base triangular. Essa atividade, bem como as duas anteriores, foi desenvolvida com o uso intenso da Calculadora Gráfica GeoGebra 3D, com ênfase na RA. O objetivo era que os estudantes calculassem a medida do volume do dodecaedro a partir da composição desse sólido por doze pirâmides de base pentagonal, conforme ilustrado na Figura 31.

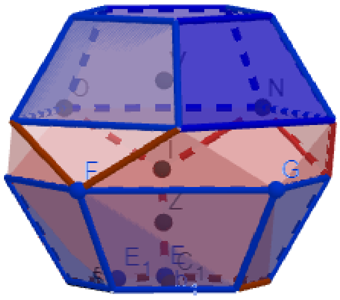
Figura 31 – Composição do dodecaedro por 12 pirâmides



Fonte: De autoria própria (2023).

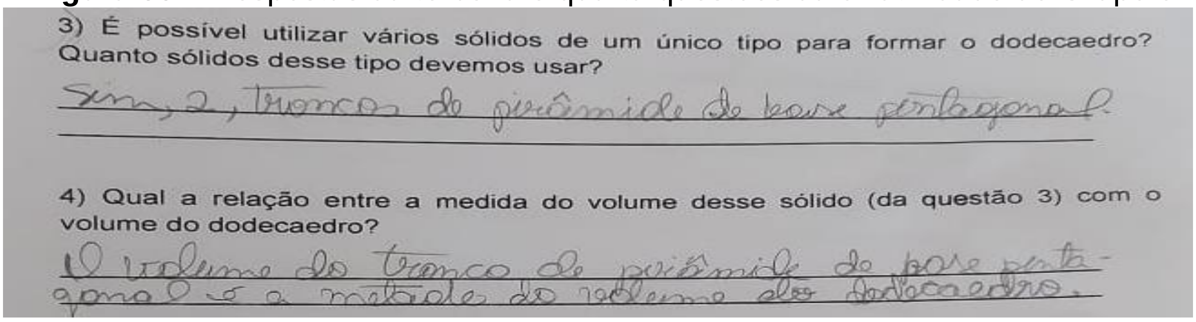
Durante a implementação da atividade, um dos grupos de alunos entendeu que o dodecaedro poderia ser composto por dois troncos de pirâmides, mas não perceberam que ao realizar a construção do dodecaedro no GeoGebra ainda existiria uma região do dodecaedro que não seria ocupada, conforme mostrado nas Figuras 32 e 33.

Figura 32 – Identificação de dois troncos de pirâmides no dodecaedro



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 33 – Respostas da terceira e quarta questões da 9ª atividade do Grupo 3



3) É possível utilizar vários sólidos de um único tipo para formar o dodecaedro? Quanto sólidos desse tipo devemos usar?

Sim, 2, troncos de pirâmide de base pentagonal.

4) Qual a relação entre a medida do volume desse sólido (da questão 3) com o volume do dodecaedro?

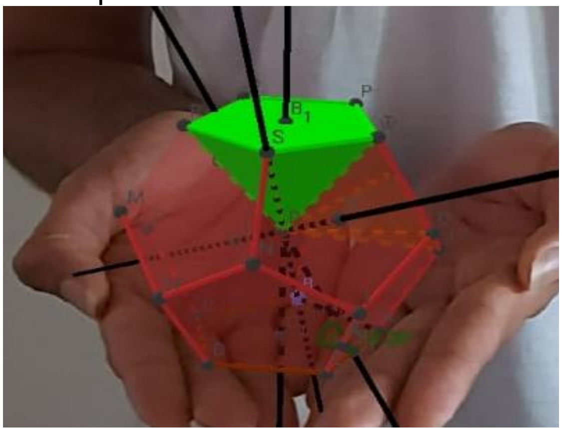
O volume do tronco de pirâmide de base penta-gonal é a metade do volume do dodecaedro.

Fonte: De autoria própria (2023).

No entanto, ao resolver as atividades posteriores, esses estudantes perceberam o equívoco, identificando que não era possível compor ou decompor o dodecaedro por tronco de pirâmides, em decorrência das construções realizadas anteriormente.

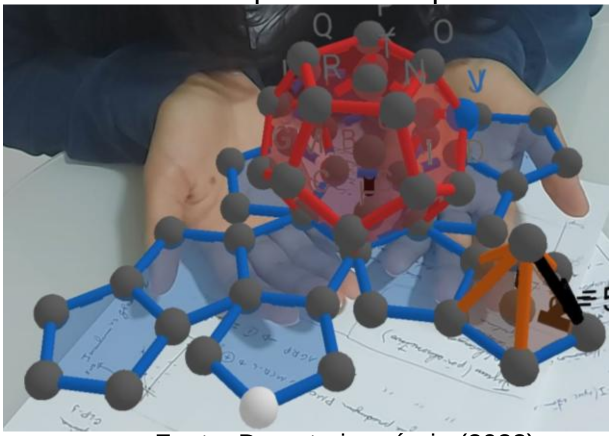
Depois de explorar o dodecaedro com a RA, os alunos decidiram utilizar as faces do dodecaedro para formar uma pirâmide de base pentagonal. Deste modo, identificaram a existência do centro do dodecaedro. Ao utilizar o ponto central e a face do dodecaedro, os alunos puderam compor e decompor o dodecaedro por meio de pirâmides, conforme ilustram as Figuras 34 e 35.

Figura 34 – Identificação de uma pirâmide no dodecaedro



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 35 – Composição e decomposição do dodecaedro por meio de pirâmides

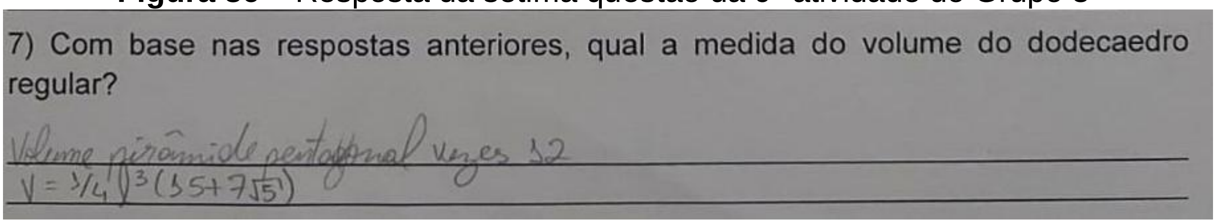


Fonte: De autoria própria (2023).

A planificação do dodecaedro regular também foi realizada a partir da RA, conforme mostra a Figura 35. Esse recurso permitiu aos estudantes visualizar as faces do dodecaedro, bem como visualizar as pirâmides que compõem o volume desse sólido.

Após análise, verificamos que os estudantes, a partir da construção feita e manipulação do sólido, conseguiram encontrar uma expressão algébrica, conforme mostra a Figura 36, para calcular a medida do volume do dodecaedro regular. Além disso, escreveram em linguagem materna como obter a medida deste dodecaedro regular a partir da medida do volume da pirâmide de base pentagonal.

Figura 36 – Resposta da sétima questão da 9ª atividade do Grupo 3



7) Com base nas respostas anteriores, qual a medida do volume do dodecaedro regular?

Volume pirâmide pentagonal vezes 12

$V = 1/4\, l^3 (15+7\sqrt{5})$

Fonte: De autoria própria (2023).

Com as análises realizadas, concluímos que o recurso RA foi fundamental para que os estudantes conseguissem realizar a conversão do sistema de registros de representação semiótica figural para a algébrica e para a língua materna. Ou seja, os estudantes transitaram entre esses registros durante a implementação da Sequência Didática como um todo e isto, conforme a TRRS, pôde contribuir para que calculassem a medida do volume do dodecaedro regular por meio da composição e decomposição desse sólido em pirâmides de base pentagonal, que por sua vez eram compostas por pirâmides de base triangular.

Na seção seguinte, apresentamos as considerações finais, nas quais retomamos os objetivos desta investigação. E, por fim, sugerimos caminhos para pesquisas futuras que possam complementar os achados deste estudo e avançar no conhecimento da medida da área.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos o processo de investigação que culminou na redação desta dissertação com o olhar voltado para o estudo da medida do volume do dodecaedro regular, quando os sujeitos de pesquisa eram estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Deste modo, fomos movidos, pela intenção de contribuir para as reflexões acerca deste conteúdo pela comunidade da Educação Matemática, a promover a aprendizagem a esses estudantes incorporando múltiplos sistemas semióticos e recursos metodológicos e tecnológicos, com ênfase na RA.

Para a escolha desse objeto matemático, consideramos que o conhecimento em Geometria é fundamental para o ser humano, tanto para compreender situações do dia a dia quanto para fortalecer o pensamento lógico e habilidades dedutivas. Consideramos ainda que muitos dos objetos dessa ciência, quando abordados em sala de aula, são de difícil representação e visualização pelos estudantes, principalmente se os processos de ensino e aprendizagem são encarados de maneira tradicional, com o uso apenas da lousa ou impresso em papel.

O principal recurso didático utilizado neste estudo foi uma sequência de atividades subsidiada pela Calculadora Gráfica GeoGebra 3D, considerando as potencialidades deste *software,* principalmente quanto a visualização em 3D e RA.

A partir daí, propusemos a questão de pesquisa: *de que maneira uma Sequência Didática elaborada a partir da composição e decomposição em pirâmides, com o uso do GeoGebra 3D, com ênfase na ferramenta Realidade Aumentada, pode contribuir para a compreensão do volume do dodecaedro regular pelos estudantes do 2º ano do Ensino Médio?*

No intuito de obter subsídios que nos possibilitassem responder a essa questão, estabelecemos como objetivo geral implementar e analisar uma Sequência Didática abordando a composição e decomposição em pirâmides, por meio do uso do GeoGebra 3D com ênfase na Realidade Aumentada, para desenvolver o estudo do volume do dodecaedro regular em uma turma de estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

O primeiro objetivo específico visado foi aplicar e analisar a Sequência Didática construída. Este objetivo foi alcançado, pois primeiramente foi criado um plano detalhado para a construção da Sequência Didática, incluindo os objetivos de aprendizagem, os conteúdos a serem abordados, os recursos tecnológicos a serem utilizados, como aplicativos de Realidade Aumentada, e a metodologia a ser aplicada. Em seguida, foi construída a Sequência Didática. Houve a seleção da turma de alunos adequada para a aplicação dessa sequência, supondo que eles possuíssem os conhecimentos prévios suficientes para compreender os conceitos abordados. Além disso, obtivemos o consentimento dos alunos, e dos responsáveis, para participação no estudo.

A sequência foi implementada para estudantes do 2º ano do Ensino Médio, organizada em quatro momentos, realizados na escola escolhida. A produção dos dados aconteceu por meio do registro escrito dos alunos no momento de implementação da sequência, observando as interações deles com a RA. Por fim, foram analisados os registros escritos dos alunos, e com essas análises entendemos que o segundo objetivo – verificar as contribuições da Sequência Didática para a aprendizagem dos conceitos e propriedades do objeto matemático estudado, principalmente por meio do trânsito entre os sistemas de registros de representação semiótica – proposto para essa investigação foi alcançado, pois a partir delas concluímos que o recurso Realidade Aumentada foi fundamental para que os estudantes conseguissem realizar a conversão do sistema de registros de representação semiótica figural para o sistema algébrico e da língua materna, ou seja, os estudantes transitaram entre esses sistemas durante a implementação da Sequência Didática como um todo.

Isto, conforme a teoria adotada, pôde contribuir para que esses estudantes compreendessem que é possível calcular a medida do volume do dodecaedro regular por meio da composição e decomposição desse sólido em pirâmides de base pentagonal que, por sua vez, eram compostas por pirâmides de base triangular. Além disso, a integração de ferramentas de Realidade Aumentada permitiu que os alunos visualizassem e manipulassem as figuras geométricas em um ambiente virtual.

Após a análise, fez-se uma revisão da Sequência Didática, com base nos resultados obtidos, verificando os pontos que precisaram ser ajustados, alterados ou excluídos, permitindo melhorar as atividades para melhor compreensão dos alunos em relação aos objetos estudados. Essa sequência constitui-se no produto do mestrado profissional do autor dessa pesquisa e encontra-se na íntegra no Apêndice A.

Por fim, encerramos a redação desta dissertação apresentando algumas sugestões para futuras investigações, a fim de cumprir o terceiro objetivo específico elaborado para esta dissertação, que se constituiu em propor recomendações e sugestões para o aprimoramento de práticas pedagógicas no ensino da Geometria Espacial, considerando os resultados obtidos na pesquisa e as reflexões desenvolvidas.

A primeira recomendação é que sejam elaboradas mais perguntas com uso de *softwares* de Geometria Dinâmica, para o ensino de Geometria Espacial, apoiado no recurso de Realidade Aumentada, desde a posição relativa de planos até o estudo de sólidos geométricos, pois a visualização e movimentação das figuras proporcionadas por esses *software*s pode ser um determinante da aprendizagem.

A segunda e última recomendação que trazemos é a implementação da sequência construída nesta investigação em outros contextos de ensino, avaliada sob a perspectiva de outras teorias da Educação Matemática, como, por exemplo, a Teoria Antropológica do Didático.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, T. C. S. de. **Sólidos arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento.** 2010. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

ALMOULOUD, S. A. A. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ANDRADE, M. L. T. D. **Geometria Esférica: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico.** 2011. 120f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

AUSUBEL, D. P; NOVAK, J. D; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericano, 1980.

ÁVILA, E. A. da S. **A formação do conceito de cálculo de volume em uma proposta de atividade na perspectiva do ensino desenvolvimental de Davydov.** 2022. 196 f. Tese (Doutorado em Educação) -- Escola de Formação de Professores e Humanidades, Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2022.

BARQUERO, B. F.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **As três dimensões do problema didático da modelagem matemática**. Educação Matemática Pesquisa**.** São Paulo, v. 15, n. 1, p. 1-28, 2013.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Matrizes de referência de linguagens Língua Portuguesa do Saeb – BNCC.** Brasília, 2022. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/matriz-de-referencia-de-matematica_2001.pdf. Acesso em: 16 de jan. de 2024.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep): **Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb),** 26/09/2023. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb. Acesso em: 18 de jan. de 2024

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 15 de jan. de 2024.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias / Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 15 de jan. de 2024.

CALÁCIA, D. **O que é uma Sequência Didática**. 2017. Disponível em: https://pt.linkedin.com/pulse/o-que-é-uma-sequência-didática-deborah-calacia Acesso em: 20 de jan. de 2024.

CHEVALLARD, Y. **L' Analyse des pratiques enseignantes théorie anthropologique du didactique**. In: Recherches en Didactique des Mathématiques. v. 19, n. 2, p. 221-265, 1999.

COSTA, J. de S.**Estratégias inovadoras para o ensino de geometria espacial na educação básica : comparação com a metodologia tradicional de aula expositiva.** 2023. 101f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Floriano, 2023.

CRESWELL, J. W. Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução Magda Lopes. 3. ed. Porto Alegre: ARTMED, 2010.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau, **Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana**, Volume 9, 8ª Ed., São Paulo: Editora Atual, 2005.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau, **Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Espacial - Posição e Métrica**, Volume 10 - 6ª Ed., São Paulo: Editora Atual, 2005.

DUARTE, C. **Realidade aumentada no ensino e aprendizagem dos sólidos geométricos.** 2021.154 f. Mestrado (Educação Matemática Instituição de Ensino), Programa de Pós - Graduação em Educação Matemática Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2021.

DUVAL, R. **Les conditions conitives de l´apprentissage de la Geometrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leus fonctionnements**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, n.10, p. 5-53, 2005.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In: Machado, S. D. A. (Org.) Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus, 2003.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Revemat, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Semiosis y Pensamiento Humano.** Peter Lang, 2004.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. São Paulo: PROEM, 2011.

FARRAS, B. B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **As três dimensões do problema didático da modelagem matemática.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 15, n. 1, p. 1-28, 2013.

FERRAZ, M. C. **Prisma e pirâmide: um estudo didático de uma abordagem computacional.** 2010. 176 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

FERREIRA, F. A. **DEMONSTRAÇÕES EM GEOMETRIA EUCLIDIANA: O USO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COMO RECURSO METODOLÓGICO EM UM CURSO DE LICENCIATURA DE MATEMÁTICA.** 2007. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.

KITCHENHAM, B. A.; CHARTERS, S. **Guidelines for performing systematic literature reviews in *software* engineering.**Tech. Rep. EBSE-2007-01, KeeleUniversity, 2007.

LOPES, R. **Equações Diferenciais Ordinárias de Variáveis Separáveis na Engenharia Civil: uma abordagem contextualizada a partir de um problema de Transferência de Calor**. 2021. 315f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2021.

MACIEL, A. C. O **conceito de semelhança: uma proposta de ensino.** 2004. 261 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

MACHADO, R. A. **O ensino de geometria espacial em ambientes educacionais informatizados: um projeto de ensino de prismas e cilindros para o 2º ano do ensino médio**. 2010. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

MARQUETTI, C. **O uso de tecnologias digitais para a compreensão da construção de sólidos a partir de suas propriedades**. 2015. 94 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

MARTINS, F. L. F. **Instrumentos virtuais de desenhos e a argumentação em Geometria.** Porto Alegre, 2012. 123 f. Tese (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

MENEGUZZI, T. **Os perspectógrafos de Dürer na Educação Matemática: História, Geometria e Visualização.** 2009. 202 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Centro de Ciências da Educação, UFSC, Florianópolis, 2009.

MIRANDA, G. M. H.. **Um sistema baseado em conhecimento com interface em língua natural para o ensino de transformações geométricas**. 2009. 289 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

MONZÓN, J. R. B. **Génesis Instrumental De La Medida Del Volumen Del Octaedro Regular Mediada Con Cabri 3D En Estudiantes Del Cuarto Grado De Secundaria.** 2018. 115f. Tesis (Magíster en Enseñanza de las Matemáticas) - Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, 2018.

OLIVEIRA, C. C. **Ambientes informatizados de aprendizagem: produção e avaliação de *software* educativo**. Campinas: Papirus, 2001.

PAULO, G. P. **Uma proposta para o Ensino e Aprendizagem dos Conceitos de Área de Círculo e Perímetro de Circunferência.** 2012. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

POSSANI, J. F. **Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular**. 2012. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains.** Paris: Armand Colin, 1995.

RIBEIRO, M. A. F. B. F. **A Realidade Aumentada Como Meio De Comunicação: Relações Entre Publicidade Interactiva, Cinema e Realidade Aumentada**. 2013. 98f. Mestrado em Ciências da Comunicação - Novas Tecnologias da Comunicação,Universidade Fernando Pessoa Porto, 2013.

SALAZAR, J. V. F. **Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço**. 2009. 316 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SANCHEZ, J. N. G. **Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SANTOS, A, A. dos. **Construção e medida de volume dos poliedros regulares convexos com o Cabri 3D: uma possível transposição didática.** 2016. 167 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SANTOS, R. A. **Ensino de pirâmides no Ensino Médio: uma Sequência Didática apoiada na teoria de registro de representação semiótica.** 2021.175f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021.

SANTOS, R. A. **Poliedros de Platão: Uma Abordagem Segundo o Modelo de Van Hiele de Desenvolvimento de Pensamento Geométrico.** 2014. 99 f.

Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2014.

SANTOS, V. L. B. dos. **Promovendo o desenvolvimento do faz-de-conta na Educação Infantil**. In: CRAIDY, C. M.; KAERCHER, E. P. da S. **Educação Infantil:Pra que te quero?** Porto Alegre: Artmed, 2001.

SIQUEIRA, C. A. F. de. **Um modelo didático de referência baseado em atividades de estudo e investigação para o ensino de cônicas na escola básica.** 2021. 355 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

SOUZA, G. M. **Integrais Duplas: um estudo a luz de uma articulação entre a Teoria Antropológica do Didático e a Teoria A Matemática no Contexto das Ciências**. 2022. 387 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022.

TOJO, B. N. **Concepção de uma Sequência Didática para o ensino/aprendizagem da congruência.** 2006. 215 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels**. Récherches em Didactique des Mathématiques, 10 (23), 1990.

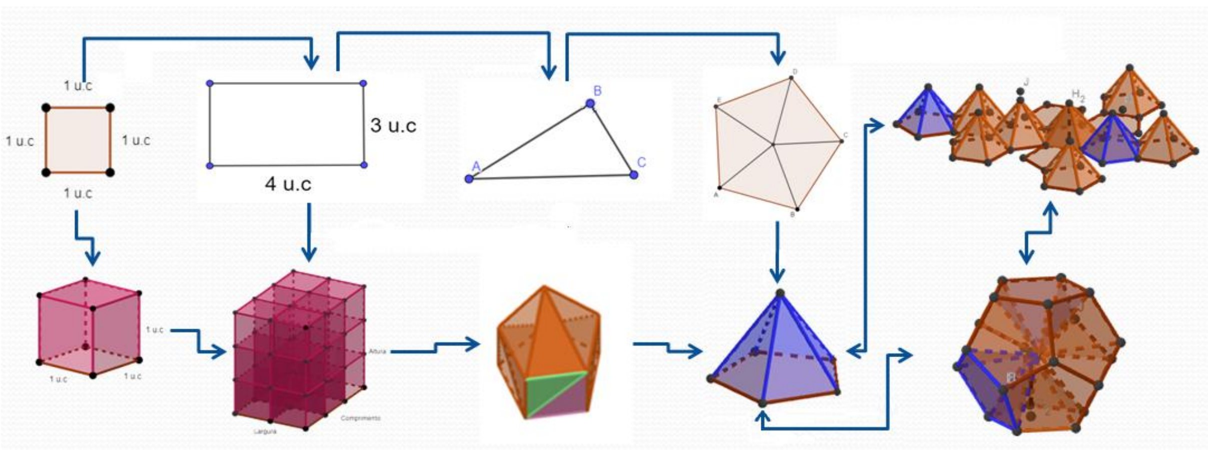
ZABALA, A. **A Prática Educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

GUSTAVO PRATES DE OLIVEIRA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DA MEDIDA DO VOLUME DO DODECAEDRO REGULAR POR MEIO DE COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO EM PIRÂMIDES



VITÓRIA DA CONQUISTA – BA
2024

RESUMO

Esta Sequência Didática tem por objetivo aplicar conceitos da Geometria Plana e Espacial, compondo e decompondo objetos matemáticos, com o auxílio da Realidade Aumentada (RA), a fim de contribuir para o cálculo da medida do volume do dodecaedro. Os objetos de estudo serão: figuras quadriláteras, triângulos, pentágono regular, prismas, pirâmides e o dodecaedro.A utilização de recursos didáticos tecnológicos no ensino oferece inúmeras vantagens que podem enriquecer o processo educacional, adaptando-o às necessidades contemporâneas e preparando os alunos para um futuro cada vez mais digital. Além disso, essas ferramentas facilitam a representação, manipulação e compreensão dos objetos matemáticos. Nesse contexto, o uso do *software* GeoGebra contribuirá para o desenvolvimento das atividades e para a construção do conhecimento dos alunos, permitindo a exploração e visualização dos objetos de maneira planificada, espacial e em Realidade Aumentada.A estruturação da Sequência Didática está organizada em conteúdos sequenciais, explorando os recursos didáticos que permitiam a exploração bidimensional e tridimensional, fazendo necessário o uso da tecnologia como facilitador. As atividades elaboradas nesta sequência discorrem os conceitos de área e de volume dos objetos matemáticos explorados.

Palavras-chave: Geometria Espacial; Geometria Plana; Dodecaedro; Realidade Aumentada.

INTRODUÇÃO

Uma Sequência Didática para o estudo da medida do volume do dodecaedro regular por meio de composição e decomposição em pirâmides é o título de uma dissertação de mestrado que tem como produto essa Sequência Didática.

A presente Sequência Didática é voltada, preferencialmente para o 2º ano do Ensino Médio, devido à necessidade de pré-requisitos e tem com objetivo estabelecer a relação entre a medida do volume de pirâmides com a medida do volume do dodecaedro, tendo como fundamento Teórico Metodológico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, em que se espera dos alunos a realização dos registro de representação, através do desenho manual e digital, desenvolvimento de estruturas algébricas e respostas escritas nas atividades.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O objetivo desta Sequência Didática é oferecer um caminho potencial para tornar o ensino de Geometria Espacial mais interativo e agradável, resultando em um aprendizado mais significativo no sentido de Ausubel (1980). As atividades foram planejadas para alunos do 2º ano do Ensino Médio e tem como finalidade a composição e decomposição do dodecaedro por meio de pirâmides, a fim de possibilitar o cálculo da medida do seu volume. Para essa finalidade, a Sequência Didática está distribuída da seguinte forma:

- O primeiro momento é voltado para o estudo da representação da medida de área, tendo como foco a medida da área do retângulo e estudo do conceito de triângulo e análise de sua estrutura.
- O segundo momento analisa a representação da medida de área, tendo como foco a medida da área do triângulo, que é fundamental para a composição de outras representações planas, como o pentágono, que também foi objeto de estudo, por meio de sua medida de área.
- O terceiro momento estudou a representação da medida do volume, tendo como foco a pirâmide de base triangular, o prisma de base triangular, a pirâmide de base pentagonal e o prisma de base pentagonal. Foi observada a construção de pirâmides pentagonais e prismas pentagonais como composição de pirâmides de base triangular. Também realizamos a comparação entre as estruturas que formam a pirâmide, com o cone e o prisma de mesma base.
- O quarto momento verifica a representação da medida do volume da pirâmide relacionada com a medida do volume do dodecaedro, por meio de composições e decomposições por pirâmides.

Durante todas as atividades, o professor deve guiar os alunos, incentivando-os continuamente a refletir e a fazer descobertas.

Nessa sequência serão abordados os seguintes conteúdos:

✔ Nomenclatura;
✔ Definição de polígonos;
✔ Elementos (vértices, número de arestas, número de faces) das pirâmides e prismas;
✔ Medida de área do quadrado, retângulo, triângulo e pentágono;

- ✔ Relações métricas e trigonométricas no triângulo.
- ✔ Medida de volume do prisma, pirâmide e dodecaedro.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) tem como finalidade estabelecer os direitos e objetivos da aprendizagem e desenvolvimento que devem ser assegurados a todos os estudantes da Educação Básica no Brasil. Ela visa garantir a equidade e a qualidade na educação, servindo como referência obrigatória para a elaboração dos currículos das redes de ensino e das instituições escolares. Assim, a BNCC propõe que todos os estudantes do país tenham acesso a um conjunto comum de conhecimentos e habilidades essenciais para seu desenvolvimento integral e para a construção de uma sociedade mais justa e inclusiva (Brasil, 2018).

As competências específicas da BNCC referem-se às habilidades, conhecimentos, atitudes e valores que os alunos devem desenvolver em cada área de conhecimento ao longo de sua trajetória escolar. Essas competências estão detalhadas para cada componente curricular e são desdobradas em habilidades que devem ser trabalhadas e adquiridas em cada etapa da Educação Básica. As competências específicas têm como objetivo orientar o desenvolvimento integral dos estudantes, preparando-os para os desafios do século XXI (Brasil, 2018).

A seguir estão dispostas as competências específicas e habilidades que devem ser abordadas no Ensino Médio, que estão relacionadas com esta Sequência Didática.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3:

> “Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente” (Brasil, 2018).

No Quadro 18, estão dispostas as habilidades desejadas que os alunos desenvolvam e tais habilidades estão relacionadas com a competência especifica 3.

Quadro 18 – Habilidades relacionadas com a competência especifica 3

EM13MAT308	“Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos” (Brasil, 2018).
EM13MAT309	“Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais” (Brasil, 2018).

(conclusão)

EM13MAT307	“Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais” (Brasil, 2018).

Fonte: Pesquisador (2023) inspirado na BNCC (2018).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5:

> “Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas” (Brasil, 2018).

No Quadro 19, estão dispostas as habilidades desejadas que os alunos desenvolvam e tais habilidades estão relacionadas com a competência especifica 5.

Quadro 19 – Habilidades relacionadas com a competência especifica 5

EM13MAT504	“Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras” (Brasil, 2018).
EM13MAT505	“Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados” (Brasil, 2018).
EM13MAT506	“Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas” (Brasil, 2018).

Fonte: Pesquisador (2023) inspirado na BNCC (2018).

Momento 1: Conceito de área e elementos que formam polígonos

ATIVIDADE 1 - Medida de área de retângulos

Objetos matemáticos: quadrado e retângulo.

Objetivos: verificar como a composição de quadrados de medida de área unitária podem formar outras áreas de quadriláteros; formalizar o conceito de área; e encontrar uma expressão que represente a medida de área do quadrilátero.

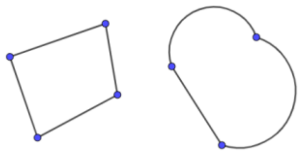
Recursos utilizados: caneta, lápis, borracha, *notebook* e material impresso.

Estratégia: organizar os alunos em Grupos, entregar material impresso constando a atividade e solicitar que os alunos a respondam.

Avaliação: formativa, monitorando o progresso dos alunos ao longo do processo, por meio de questionamentos, participação e realização das atividades.

A medida de área está relacionada à superfície de uma região delimitada, como por exemplo, as regiões internas da Figura 37.

Figura 37 – Representação de figuras planas

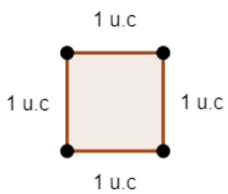


Fonte: De autoria própria (2023).

Tome, como referencial, uma unidade padrão de medida de área, representada por um bloco de lados medindo uma unidade de medida de comprimento (u.c), então sua região interna terá uma unidade de medida de área (u.a). Chamamos as figuras, a seguir, de quadrados de medida de área unitária, conforme as Figuras 38 e 39.

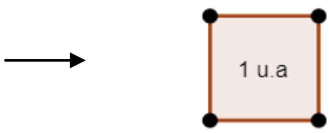
Figura 38 – Representação do quadrado com lados de 1 u.c.

.



Fonte: De autoria própria (2023).

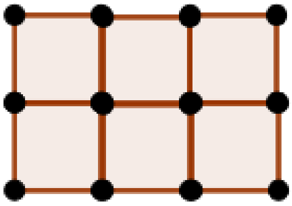
Figura 39 – Representação do quadrado de área unitária



Fonte: De autoria própria (2023).

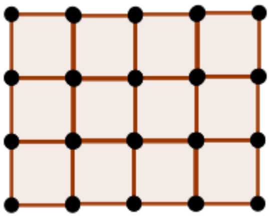
A partir das representações de um quadrado de medida de área unitária, podemos construir regiões maiores, como os retângulos das Figuras 40 e 41. Então, a partir das combinações obtidas, responda os itens:

Figura 40 – Quadrilátero formado por 6 quadrados de medida unitária



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 41 – Quadrilátero formado por 12 quadrados de medida unitária



Fonte: De autoria própria (2023).

1ª) Quais são os valores que correspondem às medidas das áreas dos polígonos 1 e 2?

____

____

Possíveis respostas dos alunos:

Para o polígono 1:

1º Caminho – O estudante deve realizar a conversão do registro figural para o registro numérico ao somar todos os quadrados obtendo o valor 6 u.a.

2º Caminho – O estudante deve realizar a conversão do registro figural para o registro numérico ao fazer o produto entre a quantidade de quadrados por linhas e a quantidade de quadrados por colunas: 2x3 = 6 u.a ou 3x2 = 6 u.a.

Para o polígono 2:

1º Caminho - O estudante deve realizar a conversão do registro figural para o registro numérico ao somar todos os quadrados obtendo o valor 12 u.a.

2º Caminho - O estudante deve realizar a conversão do registro figural para o registro numérico ao fazer o produto entre a quantidade de quadrados por linhas

e a quantidade de quadrados por colunas: 4x3 = 6 u.a ou 3x4 = 12 u.a.

2ª) Existe alguma relação entre a quantidade de quadrados em cada conjunto horizontal de quadrados unitários?

____

____

Possível resposta dos alunos: Cada grupo tem a mesma quantidade de quadrados unitários, visto que há a mesma quantidade de quadrados em cada linha horizontal.

3ª) Existe alguma relação entre a quantidade de quadrados em cada conjunto vertical de quadrados unitários?

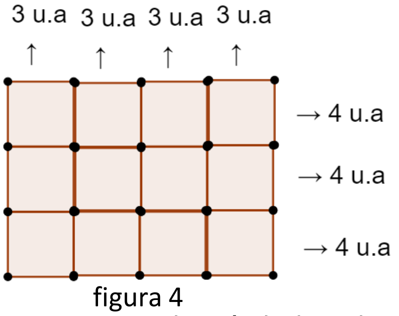
____

____

Possível resposta dos alunos: Cada grupo tem a mesma quantidade de quadrados unitários, visto que há a mesma quantidade de quadrados em cada linha vertical.

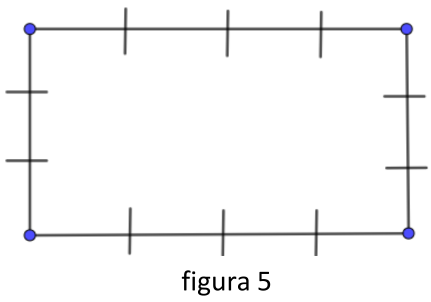
4ª) Observando as figuras 42 e 43, responda às questões a seguir.

Figura 42 – Quadrilátero com medidas de área por conjuntos horizontais e verticais de quadrados unitários



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 43 – Quadrilátero com referência de medidas por segmentos em seus lados



Fonte: De autoria própria (2023).

a) O que aconteceu entre a figura 4 para a figura 5?

____

____

Possível resposta dos alunos:
As delimitações dos quadrados, da figura 4, estão sendo demarcadas com uma representação nos lados da figura 5.

b) Ainda é possível encontrar o valor da medida da área na figura 5?

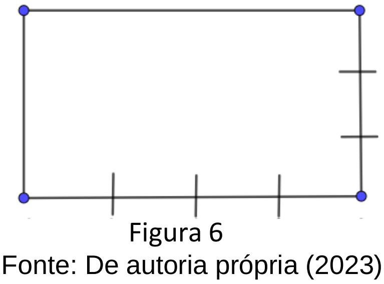
____

____

Possível resposta dos alunos:
Sim, pois não é preciso mais contar os quadrados, mas multiplicar a quantidade de marcações ou é possível prolongar as marcações e criar os quadrados e contar um por um.

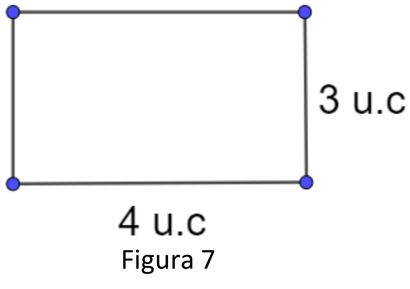
5ª Questão: Observando as figuras 44 e 45, responda.

Figura 44 – Quadrilátero com referência de dimensão em dois lados adjacentes



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 45 – Quadrilátero com referência das dimensões por valores numéricos



Fonte: De autoria própria (2023).

a) O que aconteceu com a representação da quantidade de quadrados nas figuras 6 e 7?

____

____

Possível resposta dos alunos:
A quantidade de traços, nos lados da figura, foram representadas por valores.

b) O que podemos fazer para encontrar a medida da área de um quadrilátero, ao invés de contar os quadrados unitários que a compõem?

____

____

Possível resposta dos alunos:
Podemos multiplicar os valores que representam as medidas dos lados que têm um vértice em comum

6ª) Na figura 7, identificamos o segmento do lado inferior com a nomenclatura de base e o segmento da lateral com a nomenclatura de altura. Com base nessas nomenclaturas, responda:

a) Qual o valor da medida da área que corresponde a um quadrilátero com base medindo 2 u.c e a altura medindo 3 u.c?

____

Possível resposta dos alunos:
A medida da área é igual a 2 x 3 = 6 u.a

b) Qual o valor da medida da área que corresponde a um quadrilátero com base medindo 12 u.c e a altura medindo 7 u.c?

____

Possível resposta dos alunos:
A medida da área é igual a 12 x 7 = 84 u.a

c) Considerando que a sua base mede um valor qualquer, digamos que ‘b’ u.c, e sua altura também tenha uma medida qualquer, digamos que ‘h’ u.c. Como seria a representação algébrica da medida da área, que será representada pela letra A, de um quadrilátero?

____

____

Possível resposta dos alunos: A expressão algébrica que corresponde à medida da área do retângulo é dada por: $A = b \cdot h$

Observe que representamos os valores por letras, por isso trocamos o símbolo que representa o produto por um ponto, para não criar confusões de entendimento.

ATIVIDADE 2 - Elementos que compõem um triângulo

Objeto matemáticos: triângulos.

Objetivos: explorar os triângulos, a fim de que ele compreenda as características desse polígono.

Recursos utilizados: caneta, lápis, borracha, *notebook* com o *software* GeoGebra e material impresso.

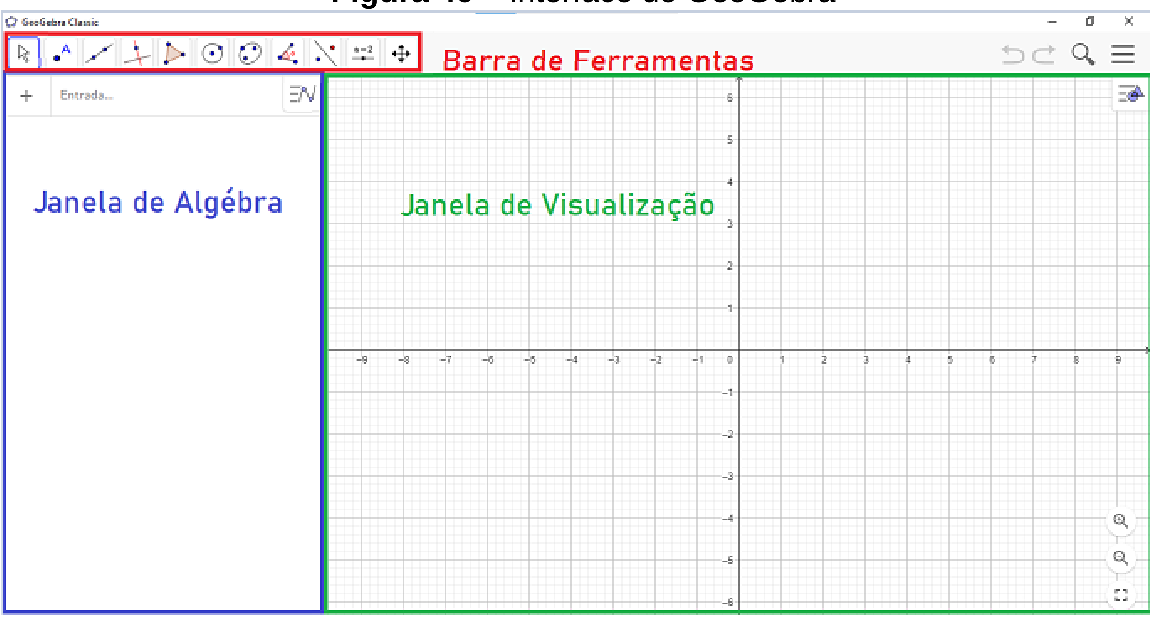
Estratégia: organizar os alunos em Grupos, entregar material impresso constando a atividade, solicitando que os alunos a respondam.

Avaliação: formativa, monitorando o progresso dos alunos ao longo do processo, por meio de questionamentos, participação e realização das atividades.

CONSIDERAÇÕES PARA O PROFESSOR: Nessa etapa, o GeoGebra poderá ser apresentado pela Figura 46, ou da exibição do próprio *software*. O professor deve informar como ele é organizado.

IDENTIFICAÇÃO DOS RECURSOS DO GEOGEBRA:

Figura 46 – Interface do GeoGebra



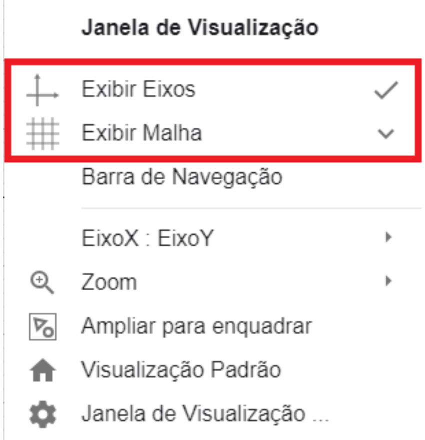
Fonte: De autoria própria (2023).

Na barra de ferramentas, há recursos para representar, operar, movimentar e alterar as representações figurais. Associamos cada recurso como um item numerado da esquerda para a direita, com a numeração que vai de 1 até 11. Não será necessário utilizar todos os recursos, conhecemos à medida que os recursos forem requisitados.

Na janela algébrica, temos as representações algébricas dos objetos matemáticos, enquanto na janela gráfica foram expostas às representações visuais.

_Na Janela de Visualização, clique com o botão direito do mouse e desabilite ‘Exibir Eixos’ e desabilite ‘Exibir Malha’, conforme mostra a Figura 47.

Figura 47 – Configuração da Janela de Visualização do GeoGebra

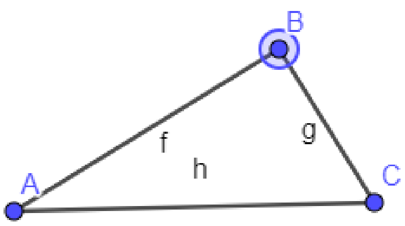


Fonte: De autoria própria (2023).

CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA:

Construa um triângulo ABC qualquer, utilizando a ferramenta ‘Segmento’ , que está localizado no item 3 da barra de ferramentas, na parte superior esquerda, exemplificado pela Figura 48.

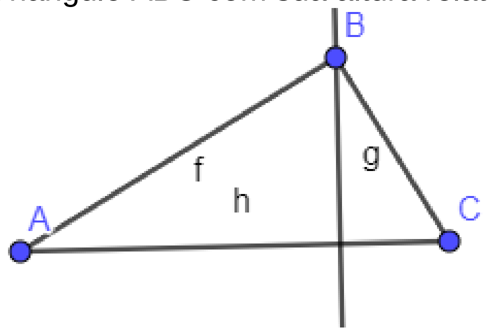
Figura 48 – Triângulo ABC construído no GeoGebra



Fonte: De autoria própria (2023).

Utilizando a ferramenta ‘Reta Perpendicular’ , que está localizado no item 4 trace uma perpendicular ao em relação ao segmento AC e que passe no vértice B, oposto a esse segmento, assim como exemplificado na Figura 49.

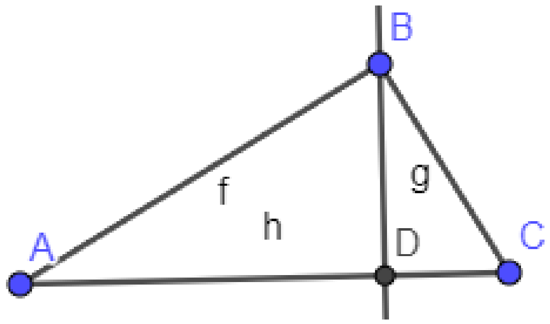
Figura 49 – Triângulo ABC com sua altura relativa ao vértice B



Fonte: De autoria própria (2023).

Utilize a ferramenta ‘Interseção de Objetos’ , localizada no item 2, e selecione as retas perpendiculares para formar o ponto D, como exposto na Figura 50.

Figura 50 – Triângulo ABC com sua altura relativa ao vértice B e o ponto D na base



Fonte: De autoria própria (2023).

1ª) Quais características possuem um triângulo qualquer?

Possível resposta dos alunos: Figura poligonal constituída de três segmentos de retas que possui também três vértices e três ângulos internos.

2ª) Quantas e quais figuras foram formadas, no triângulo ABC, ao traçar a perpendicular?

____

____

Possível resposta dos alunos:

Dois triângulos, ABD e BDC.

3ª) Qual a característica desses triângulos, quanto aos ângulos?

____

____

Possível resposta dos alunos:

Eles foram formados por uma reta perpendicular no triângulo ABC, assim, seus ângulos no ponto D tem o valor de 90º graus.

4ª) Qual a nomenclatura desses triângulos?

____

Possível resposta dos alunos:

Triângulos Retângulos.

Momento 2: Área de triângulos e do pentágono regular

ATIVIDADE 3 - Relação entre a medida de área de triângulos e de quadriláteros

Objetos matemáticos: triângulos e quadriláteros

Objetivo: explorar as formas geométricas; Identificar a relação entre a medida de área de triângulos e retângulos, de mesma base e altura.

Recursos utilizados: caneta, lápis, borracha, *notebook* com o *software* GeoGebra e material impresso.

Estratégia: organizar os alunos em Grupos, entregar material impresso constando a atividade, solicitando que os alunos a respondam.

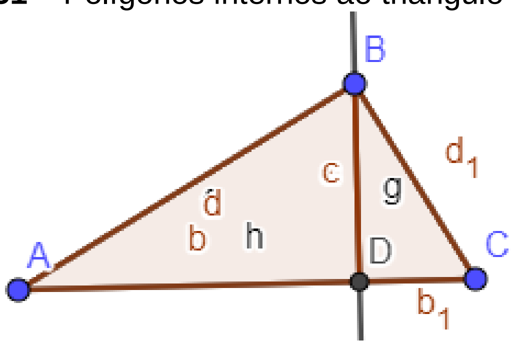
Avaliação: formativa, monitorando o progresso dos alunos ao longo do processo, por meio de questionamentos, participação e realização das atividades.

<u>CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA:</u>

Utilize a ferramenta 'Ângulo'  no item 8, para confirmar ou auxiliar em sua resposta. Para utilizar essa ferramenta é necessário selecionar 3 vértices consecutivos, sendo que o segundo vértice é aquele ao qual deseja fazer a medição. Além disso, os vértices dever sem clicados no sentido horário.

Utilizando a ferramenta 'Polígono' , localizada no item 5, selecione os pontos A, B, D, A e depois selecione os pontos C,B,D,C, para formar os polígonos t1 e t2, como exemplificado na Figura 51.

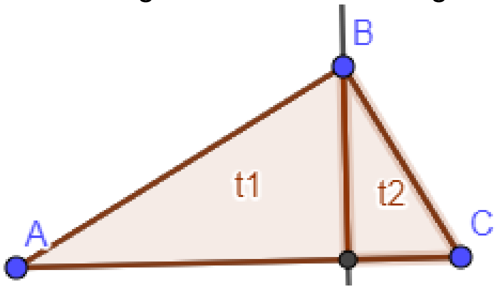
Figura 51 – Polígonos internos ao triângulo ABC



Fonte: De autoria própria (2023).

Para remover as identificações dos objetos e deixar a figura mais 'limpa', utiliza a ferramenta 'Exibir/Esconder Rótulo' , localizado no item 11 da barra de ferramentas. Agora basta clicar em cada objeto ou na sua identificação. Para exibir a identificação t1 e t2 dos triângulos, basta clicar com a mesma ferramenta na região triangular, conforme ilustrado na Figura 52.

Figura 52 – Polígono t1 e t2 e o triângulo ABC



Fonte: De autoria própria (2023).

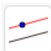
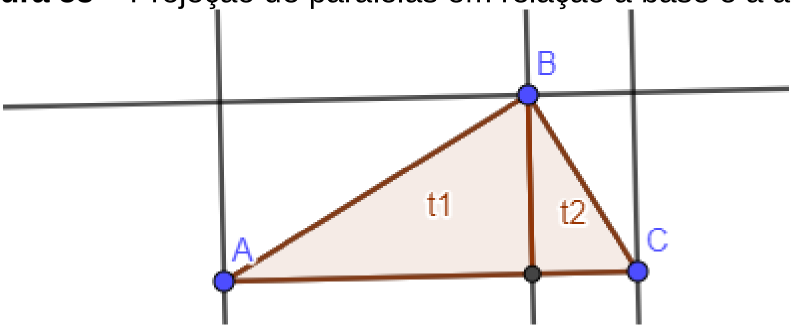
Utilizando a ferramenta 'Reta Paralela' , no item 4, selecione o segmento DB e depois clique no vértice C, para criar uma reta paralela a DB. Novamente, utilizando a ferramenta Reta Paralela, selecione o segmento DB e depois clique no vértice A. Por fim, utilizando a ferramenta Reta Paralela, selecione o segmento AC e clique no vértice B, conforme mostra a Figura 53.

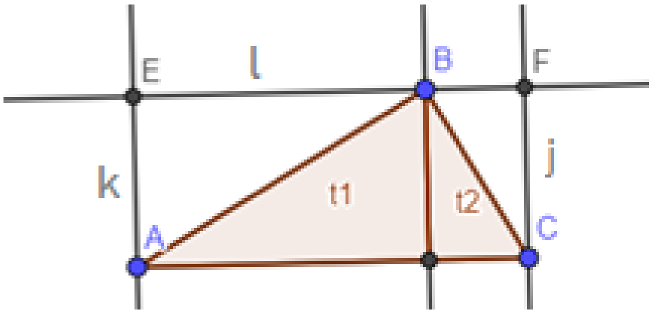
Figura 53 – Projeção de paralelas em relação à base e à altura



Fonte: De autoria própria (2023).

Utilizando a ferramenta 'Interseção de Dois Objetos' , selecione a reta paralela I, que passa no vértice B e selecione a reta paralela K, que passa no vértice A, formando o ponto E, conforme exemplificado na Figura 54.

Figura 54 – Demarcação dos vértices referentes aos encontros das perpendiculares



Fonte: De autoria própria (2023).

Novamente, utilizando a ferramenta ‘Interseção de Dois Objetos’ , selecione a reta paralela l, que passa no vértice B e selecione a reta paralela j, que passa no vértice C, formando o ponto F.

<u>PERGUNTAS:</u>

1ª) Foram formadas figuras com o encontro das paralelas e os lados do triângulo ABC? Quais são essas figuras?

____

____

Possível resposta dos alunos: Sim, foram formados dois triângulos.

2ª) Observando a construção realizada, responda:

a) Sabendo que BD é perpendicular a AC e que AE é paralelo a DB, qual o ângulo entre AE e AC?

____

Possível resposta dos alunos: Ângulo de 90 graus.

b) sabendo que BD é perpendicular a AC e que FC é paralelo a DB, qual o ângulo entre FC e AC?

Possível resposta dos alunos:
Ângulo de 90 graus.

c) Qual o ângulo entre AE e EF?

Possível resposta dos alunos:
Ângulo de 90 graus.

d) Qual o ângulo entre CF e EF?

Possível resposta dos alunos:
Ângulo de 90 graus.

e) Existe alguma relação entre o lado EB e o lado AD?

Possível resposta dos alunos:
Possuem a mesma medida

f) Existe alguma relação entre o lado BF e o lado DC?

Possível resposta dos alunos:

Possuem a mesma medida

g) Existe alguma relação entre o lado AE e o lado BD?

____

Possível resposta dos alunos:

Possuem a mesma medida

h) Existe alguma relação entre o lado CF e o lado DB?

____

Possível resposta dos alunos:

Possuem a mesma medida

i) Existe alguma relação entre o lado AE e o lado CF?

____

Possível resposta dos alunos:

Possuem a mesma medida

j) Existe alguma relação entre o lado AC e o lado EF?

____

Possível resposta dos alunos:

Possuem a mesma medida

3ª) De acordo com suas observações na questão 2, o que se pode afirmar sobre o polígono ACFE?

____

Possível resposta dos alunos: É um retângulo.

CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA:

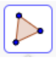
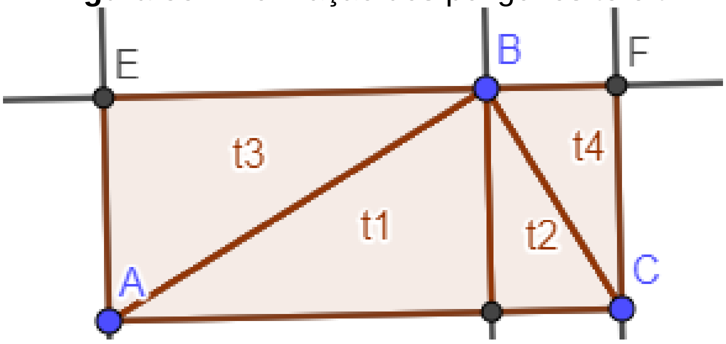
Utilize a função ‘Polígono’ , localizada no item 5, para formar o polígono t3 ao selecionar os pontos A, E, B e A. Utilize novamente a função ‘Polígono’ , localizada no item 5, para formar o polígono t4 ao selecionar os pontos F, B, C e F, conforme ilustrado na Figura 55.

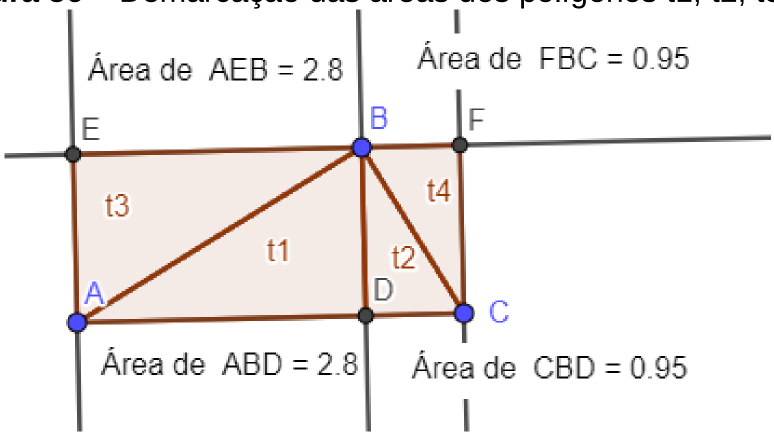
Figura 55 – Formação dos polígonos t3 e t4



Fonte: De autoria própria (2023).

Utilize a função ‘Área’ , localizada no item 8 para encontrar o valor da medida da área dos polígonos t1, t2,t3 e t4, para isso basta clicar dentro dos polígonos com a função ativada, conforme exemplificado na Figura 56.

Figura 56 – Demarcação das áreas dos polígonos t1, t2, t3 e t4



Fonte: De autoria própria (2023).

É possível mover as informações descritivas na Janela Gráfica, basta clicar e arrastar com o mouse.

4ª) Conforme os triângulos AEB e BFC que foram construídos, o triângulo ABC e o Retângulo AEFC, responda:

a) Existe alguma relação entre os triângulos AEB e CBF com os triângulos ABD e BDC?

Possível resposta dos alunos:

O triângulo AEB e o triângulo ABD possuem o mesmo valor de área, assim como o triângulo CBF e o triângulo BDC possuem o mesmo valor de área. Além disso, possuem as mesmas medidas de lados e as mesmas medidas de ângulos. Portanto, são equivalentes.

b) O que é possível observar em relação às medidas das áreas do triângulo ABC e o retângulo AEFC?

Possível resposta dos alunos:

Como o quadrado possui a medida da área de triângulos e esses, por sua vez, aparecem duplicados, então a medida da área do triângulo ABC corresponde à metade da medida da área do retângulo.

c) Qual expressão representa a medida da área de um triângulo qualquer, sendo que a medida da área do retângulo obtido por esse triângulo tem base medido ‘b’ e altura medindo ‘h’.

Possível resposta dos alunos: A medida da área do retângulo é representada por ‘b.h’, e como a medida da área do triângulo vale metade da medida da área do retângulo, assim a medida da área do triângulo corresponde a $\frac{b\times h}{2}$**.**

Por fim, verificamos no GeoGebra, que a medida da área do triângulo representa metade da medida da área de um retângulo.

ATIVIDADE 4 - Medida de área do pentágono

Objeto matemático: pentágono

Objetivo: construir a expressão que representa a medida de área do pentágono regular.

Recursos utilizados: caneta, lápis, borracha, *notebook* com o *software* GeoGebra e material impresso.

Estratégia: organizar os alunos em Grupos, entregar material impresso constando a atividade, solicitando que os alunos a respondam.

Avaliação: formativa, monitorando o progresso dos alunos ao longo do processo, por meio de questionamentos, participação e realização das atividades.

Agora, partimos da representação do pentágono regular, a fim de encontrar à medida que representa a sua área e a medida de área de figuras já conhecidas, as quais são o retângulo e/ou triângulo. Assim, no primeiro momento devemos explorar o pentágono regular, a fim de encontrar outras representações figurais contidas nele.

1) Quais são as características da representação de um polígono regular, assim como a representada na figura a seguir?

____

____

Possível resposta dos alunos: É o polígono convexo que possui todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

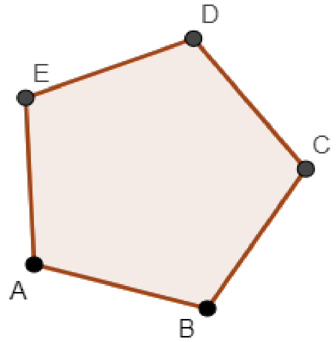
2) Analisando e explorando a representação do pentágono regular, exposta na Figura 57, quais polígonos podemos utilizar para formar essa figura?

____

____

____

Figura 57 – Pentágono regular

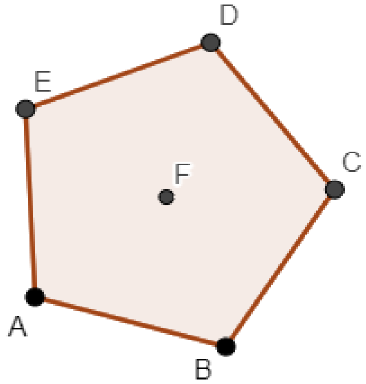


Fonte: De autoria própria (2023).

Possível resposta dos alunos:
O pentágono pode ser formado por um trapézio e um triângulo ou ele pode ser formado por cinco triângulos.

3) Na Figura 58, foi posto o ponto F, identificando o centro do pentágono. Quais polígonos são formados ao ligar os vértices do pentágono ao centro dele? Eles possuem algo em comum?

Figura 58 – Pentágono regular com vértice no centro.



Fonte: De autoria própria (2023).

____

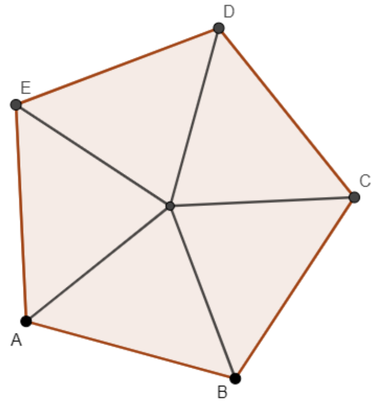
____

____

Possível resposta dos alunos:
Triângulos. Todos são iguais e são isósceles.

4) Com base nas relações trigonometria no triângulo, é possível encontrar a medida que representa o valor da altura de cada triângulo?

Figura 59 – Formação de triângulos semelhantes no pentágono regular



Fonte: De autoria própria (2023).

____

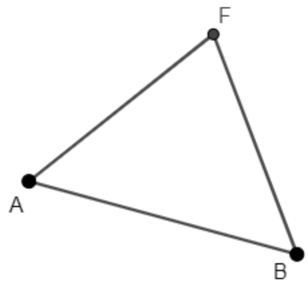
____

Possível resposta dos alunos:

Sim, basta realizar as operações a seguir:

1º Passo: Traçar os segmentos AF e BF, e destacar o triângulo ABF do pentágono ABCDE, representado na Figura 60.

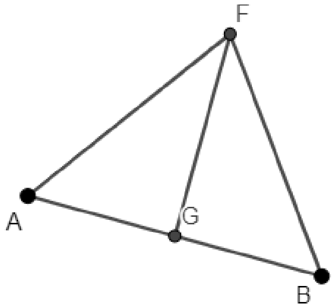
Figura 60 – Triângulo ABF



Fonte: De autoria própria (2023).

2º Passo: Traçar a altura, que corresponde ao segmento que vai do ponto F até o ponto médio de AB, conforme a Figura 63. Esse segmento é a altura devido ao fato do triângulo ABF ser isósceles, em que os lados AF e BF são congruentes. Denominamos a altura por ‘h’.

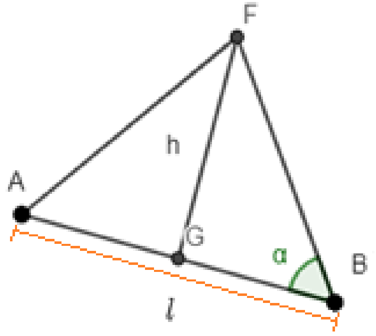
Figura 61 – Triângulo ABF com altura FG



Fonte: De autoria própria (2023).

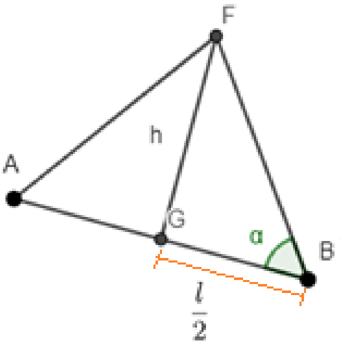
<u>3º Passo:</u> Encontrar a medida que representa o valor da altura. Para isso, utilizamos a relação trigonométrica sobre a tangente do ângulo alfa, formado por GB, metade do lado “l” do segmento AB, e BF no triângulo GBF, conforme as Figuras 62 e 63. Assim:

Figura 62 – Triângulo ABF com demarcação de ângulo



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 63 – Triângulo ABF com demarcação de altura, lado e ângulo



Fonte: De autoria própria (2023).

Então,

$$\mathrm{tg}(\propto) = \frac{h}{\frac{l}{2}} \Rightarrow h = \frac{l}{2}\mathrm{tg}(\propto)$$

<u>4º Passo:</u> Determinar o valor de ∝. Como o pentágono ABCDE é regular, todos os ângulos centrais possuem a mesma medida, e como existem 5 triângulos, logo cada ângulo tem medida $\frac{360°}{5}$, ou seja, $72°$. Portanto, como os triângulos são isósceles, cada ângulo da base vale 54°, para que a soma dos seus ângulos internos dê 180°.

Assim, para encontrar a altura, fazemos:

$$h = \frac{l}{2}\mathrm{tg}(54°)$$

A medida da altura dependerá da medida do lado do pentágono.

5) É possível encontrar uma expressão que corresponda à medida da área de cada triângulo?

___

___

Possível resposta dos alunos:

Sim, basta realizar as operações a seguir:

Sabemos que a base de cada triângulo é l, e que o valor da altura é $\frac{l}{2}\mathrm{tg}(54°)$, assim a medida da área de cada triângulo é dada por:

$$\text{Área} = \frac{(l)(\frac{l}{2}\mathrm{tg}(54))}{2} \Rightarrow \text{Área} = \frac{l^2\,\mathrm{tg}(54°)}{4}$$

6) Sabendo a expressão que representa a medida da área de um triângulo, então qual a expressão que representa a medida da área do pentágono?

___

___

Possível resposta dos alunos:

Sim, o pentágono é formado por 5 triângulos, então a expressão que corresponde a medida da área é dada por:

$$\text{Área} = \frac{5l^2\,\mathrm{tg}(54°)}{4}$$

Momento 3: Comparação e medida do volume do prisma e da pirâmide

ATIVIDADE 5 - Estudo da medida do Volume do prisma e da pirâmide

Objeto matemático: prisma e da pirâmide

Objetivo: desenvolver a noção da medida do volume; comparar a medida de volume do prisma e da pirâmide e os elementos que compõem o prisma e a pirâmide.

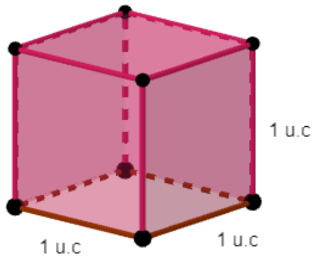
Recursos utilizados: caneta, lápis, borracha, *notebook* com o *software* GeoGebra e material impresso.

Estratégia: organizar os alunos em Grupos, entregar material impresso contendo a atividade e solicitar que os alunos respondam com o auxílio do GeoGebra e da Realidade Aumentada.

Avaliação: formativa, monitorando o progresso dos alunos ao longo do processo, por meio de questionamentos, participação e realização das atividades.

Desenvolvemos a noção da medida do volume, o qual é a quantidade de espaço ocupada por esse corpo. Tomamos como referencial uma unidade padrão de medida de volume, representada por um bloco de lados medindo 1 unidade de comprimento (u.c), então sua região interna terá medida de 1 unidade de volume (u.v). Sua representação segue como a seguir. Chamamos essa figura de cubo de volume unitário, conforme exposto nas Figuras 64 e 65.

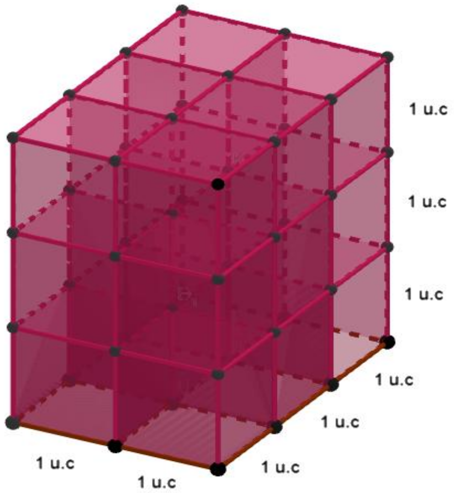
Figura 64 – Cubo com medida de volume unitário



Sólido 1

Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 65 – Prisma formado por cubos de medida de volume unitário



Sólido 2

Fonte: De autoria própria (2023).

Assim, é possível construir prismas, poliedros convexos que possuem pelo menos duas faces opostas paralelas e congruentes formadas por polígonos.

CONSIDERAÇÕES PARA O PROFESSOR: As imagens anteriores podem ser repassadas para os alunos no formato do arquivo específico para o GeoGebra, para que eles possam utilizar o recurso de Realidade Aumentada, a fim de explorá-la e responder às perguntas da atividade 5.

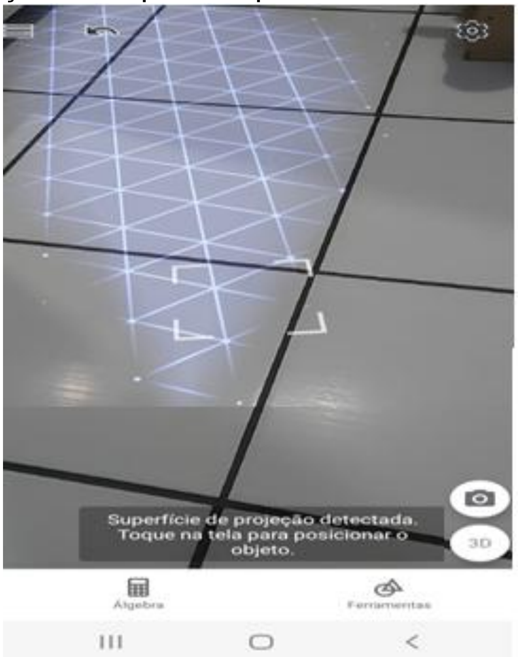
CONSIDERAÇÕES PARA O PROFESSOR: É necessário apresentarmos a Janela de Realidade Aumentada, em que os estudantes exploraram o sólido. A função de Realidade Aumentada, até o momento de produção desse trabalho, está disponível apenas para celular *Android*, essa função está localizada no canto inferior direito e está indicado por AR, identificada na Figura 66.

Figura 66 – Identificação da função de Realidade Aumentada no *Smartphone*

Fonte: De autoria própria (2023).

Ao clicar na função AR, é preciso dar permissão de acesso à câmera para o GeoGebra, e movimentar lentamente o celular apontado para a superfície onde quer expor o objeto matemático, a superfície detectada será demarcada por uma região, conforme a Figura 67.

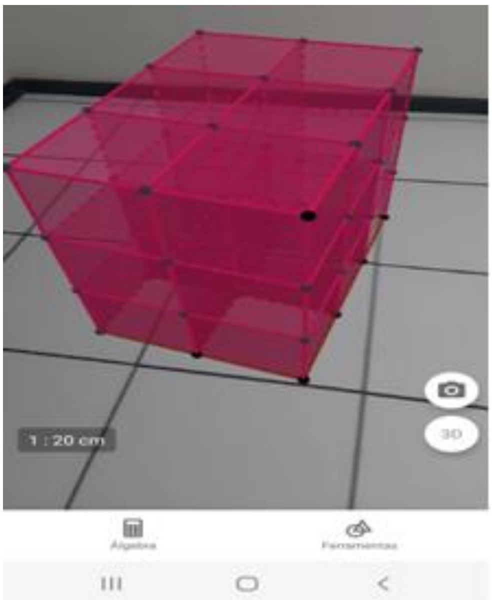
Figura 67 – Identificação de superfície pela Realidade Aumentada do GeoGebra



Fonte: De autoria própria (2023).

Para o objeto construído aparecer, basta clicar nessa superfície detectada. Agora, você está livre para explorar a imagem, movimentando, ampliando, reduzindo e você pode se mover deixando o objeto parado. É possível entrar no objeto para observá-lo por dentro, conforme as Figuras 68 e 69.

Figura 68 – Posicionamento do prisma em uma superfície



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 69 – Projeção do prisma na Realidade Aumentada

Fonte: De autoria própria (2023).

Finalizada a apresentação da função de Realidade, é hora de explorá-la nas atividades seguintes.

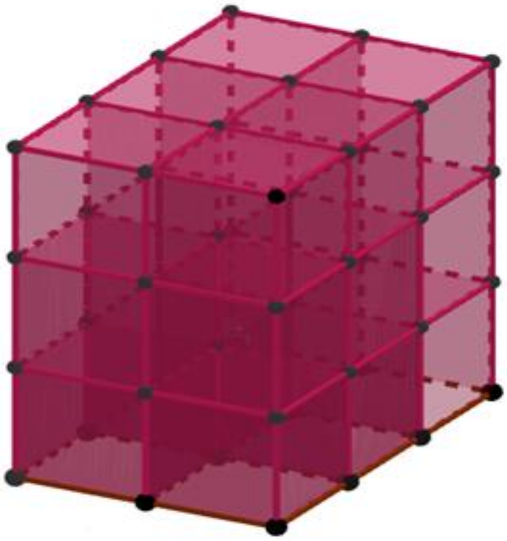
EM UMA FOLHA IMPRESSA, SERÁ ENTREGUE A ATIVIDADE 5:

1º) Quantos cubos de medida de volume unitário foram utilizados para construir o prisma da Figura 70?

____

____

Figura 70 – Prisma formado por cubos de medida de volume unitário



Fonte: De autoria própria (2023).

Possível resposta dos alunos: 18 cubos

2º) Qual a medida de volume do prisma?

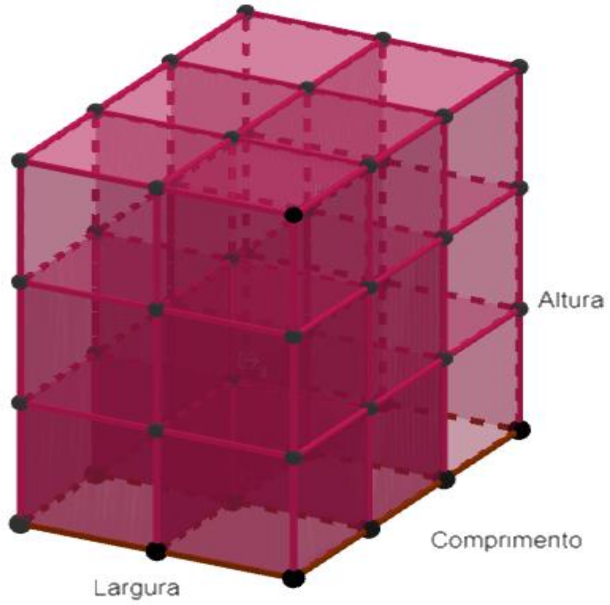
____

____

Possível resposta dos alunos: 18 u.v.

A medida do volume corresponde à quantidade de cubos de medida de volume unitário utilizados para construir o sólido. Denominamos os segmentos, de referência lateral, como base(b), comprimento(c) e altura(h), conforme a Figura 71.

Figura 71 – Prisma com referencia de nomenclatura para seus lados



Fonte: De autoria própria (2023).

3º) A base do prisma é formada pela quantidade de cubos existentes no Comprimento e na Largura. Observando o prisma, cuja medida da altura seja igual a 1 u.c, quantos cubos há na base do prisma?

____

____

Possível resposta dos alunos: 6 cubos de medida de volume unitário.

4º) Qual a relação entre a quantidade de segmentos referentes à Largura e ao Comprimento do prisma com a quantidade de cubos.

____

____

Possível resposta dos alunos:
A quantidade de segmentos está relacionada com a quantidade de cubos para cada lado do sólido. Assim a quantidade de segmentos identifica a medida do tamanho do sólido.

5º) Qual a relação entre a quantidade de cubos na base do sólido com a medida da Largura e do Comprimento?

____

____

Possível resposta dos alunos:
Para encontrar a quantidade de cubos na base, basta multiplicar a quantidade de cubos na Largura pela quantidade de cubos no Comprimento.

Assim, observando apenas o produto da Largura com o Comprimento, é equivalente ao cálculo da medida área da superfície, logo chamamos esse produto de ‘Área da Base’ identificado por Ab.

6º) Quantos cubos existem ao contabilizar a quantidade existente em uma altura de medida 1 u.c?

____

Possível resposta dos alunos:
6 cubos.

7º) Quantos cubos existem ao contabilizar a quantidade existente em uma altura de medida 2 u.c?

____

____

Possível resposta dos alunos: 12 cubos.

Assim, para encontrar a medida do volume do prisma, basta fazer o produto entre a medida da área da base (Ab) com a medida da altura (h). Algebricamente temos a expressão $V = Ab \cdot h$.

ATIVIDADE 6 - Comparação entre os elementos que compõem o prisma e a pirâmide

Objetos matemáticos: prisma e pirâmide.

Objetivo: desenvolver a habilidade manual de desenho, além da capacidade abstrata de identificar e reproduzir os sólidos.

Recursos utilizados: caneta, lápis, borracha, *notebook* e material impresso.

Estratégia: organizar os alunos em Grupos, entregar material impresso contendo a atividade e solicitar que os alunos respondam.

Avaliação: formativa, monitorando o progresso dos alunos ao longo do processo, através de questionamentos, participação e realização das atividades.

1) Preencha o Quadro 20 com as figuras construídas e informações sobre elas.

Quadro 20 – Comparação entre prisma e pirâmide

Estudos dos sólidos	Prisma	Pirâmide
Representação visual dos sólidos	(Espaço para o registro realizado pelo aluno)	(Espaço para o registro realizado pelo aluno)
Quantidade de vértices	(Espaço para o registro realizado pelo aluno)	(Espaço para o registro realizado pelo aluno)
Quantidade de faces	(Espaço para o registro realizado pelo aluno)	(Espaço para o registro realizado pelo aluno)
Quantidade de arestas	(Espaço para o registro realizado pelo aluno)	(Espaço para o registro realizado pelo aluno)

Fonte: De autoria própria (2023).

Possível resposta dos alunos:

Os alunos podem apresentar variados desenhos como resposta para a atividade e cada desenho ter características distintas. Assim, não há como estabelecer uma resposta para a questão, mas as construções devem seguir:

Construção de prismas:

Para construir os sólidos, primeiro devemos desenhar a representação da sua base. O professor deve ressaltar que o desenho deve obedecer às características que definem cada figura plana. Neste momento, não é necessário que o pentágono seja regular.

O próximo passo é traçar segmentos de retas de mesmo tamanho, que sejam paralelas umas às outras e que passam pelos vértices da base. Esses segmentos não necessariamente precisam ser perpendiculares à base. Por fim, devem-se ligar as extremidades obtidas na altura, de modo que seja formada uma figura semelhante à base na outra extremidade das alturas.

Construção de pirâmides:

Para construir os sólidos, primeiro devemos desenhar a sua base. O próximo passo é estabelecer a altura do sólido. Diferente do prisma, não há necessidade de haver duas bases. Logo, deve-se criar apenas um ponto fora da base, ao qual traçamos segmentos que ligam esse ponto aos vértices da base.

Com base nos desenhos e nas informações da tabela, responda:

a) Quais características as pirâmides têm em comum com o prisma de mesma base?

____

____

Possível resposta dos alunos:

A quantidade de arestas laterais e faces laterais são iguais.

b) O que diferencia as pirâmides e os prismas de mesma base?

Possível resposta dos alunos: O prisma possui uma base a mais, contribuindo para o mesmo ter uma medida da área lateral superior ao da pirâmide, maior quantidade de aresta e de vértices.

ATIVIDADE 7 - Comparações entre pirâmides distintas e entre a pirâmide e o cone

Objetos matemáticos: pirâmide e cone

Objetivo: verificar, com base nas manipulações dos sólidos, a composição estrutural e suas (in)variações, a fim de compreender as relações e características entre as pirâmides e entre a pirâmide e o cone.

Recursos utilizados: caneta, lápis, borracha, *notebook* com o *software* GeoGebra e material impresso.

Estratégia: organizar os alunos em Grupos, entregar material impresso contendo a atividade e solicitar que os alunos respondam com o auxílio do GeoGebra e da Realidade Aumentada.

Avaliação: formativa, monitorando o progresso dos alunos ao longo do processo, através de questionamentos, participação e realização das atividades.

Realizar a construção dos sólidos no GeoGebra, em cada dispositivo pessoal ou no computador. As construções seguirão os mesmos métodos da construção manual, mas agora com a possibilidade de incrementar o *controle deslizante,* permitindo a verificação das consequências da manipulação dos elementos que compõem os sólidos, de modo mais otimizado.

<u>CONSTRUÇÃO COM O GEOGEBRA:</u>

Assim, é possível explorar diferentes tipos de pirâmides, criando e modificando suas estruturas no *software*, de modo que seja possível verificar a representação visual de inúmeras figuras.

Utilizar a função ‘Controle Deslizante’ 

, localizado no item 10. Para ativar, basta clicar na Janela de Visualização Gráfica. Altere o valor mínimo do intervalo para o valor 0, o valor máximo para o valor 40 e o incremento para o valor 1. Então, será criado o controle deslizante nomeado como a letra ‘a’.

Construa um segmento AB utilizando a ferramenta ‘Segmento’ , que está localizado no item 3 da barra de ferramentas para formar o polígono, clique na entrada de comandos, localizado na Janela Algébrica, e digite: pol1=Polígono(A,B,a)

Mova o controle deslizante para o valor ‘a = 3’, conforme ilustrado na Figura 72.

Figura 72 – Polígono com controle deslizante no GeoGebra

Fonte: De autoria própria (2023).

Na Janela de Visualização em duas dimensões, utilize a função ‘Ponto Médio ou Centro’ , para criar um ponto que está no centro do polígono.

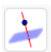
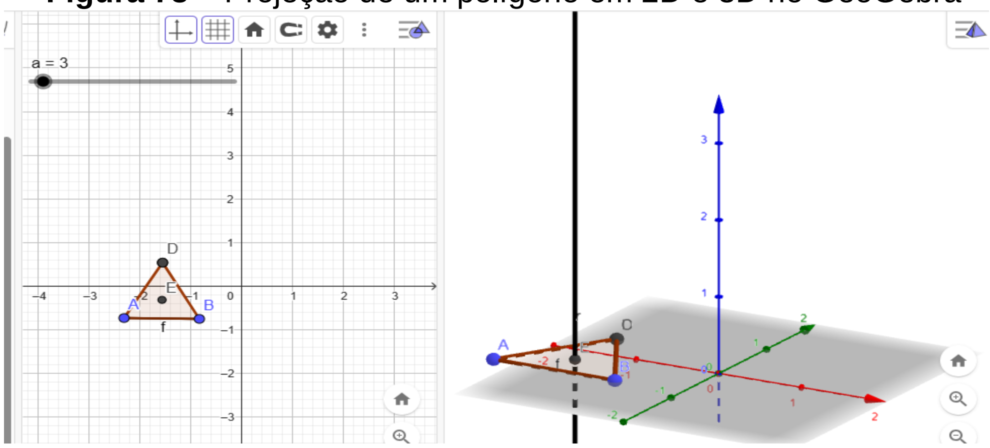
Na Janela de Visualização em três dimensões, utilize a função ‘Reta Perpendicular’ , depois clique no plano ao qual o polígono está situado e clique no ponto que está no meio do polígono. Assim, será criada uma reta, que será identificada por ‘r’, que é perpendicular ao polígono que passa pelo seu centro, conforme ilustra a Figura 73.

Figura 73 – Projeção de um polígono em 2D e 3D no GeoGebra



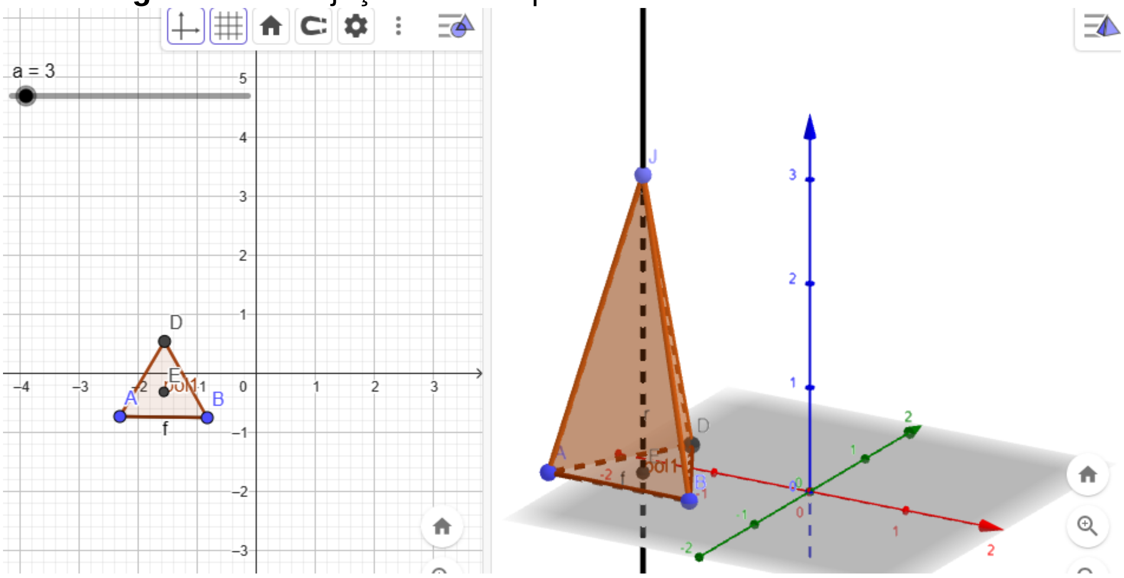
Fonte: De autoria própria (2023).

Utilize a função ‘Ponto’ , para criar um ponto, representado por ‘J’ sobre a reta ‘r. Caso sinta necessidade, o ponto J pode ser movido na reta r.

Na entrada de comandos, localizado na Janela Algébrica, digite b=Pirâmide(pol1,J), para criar a pirâmide.

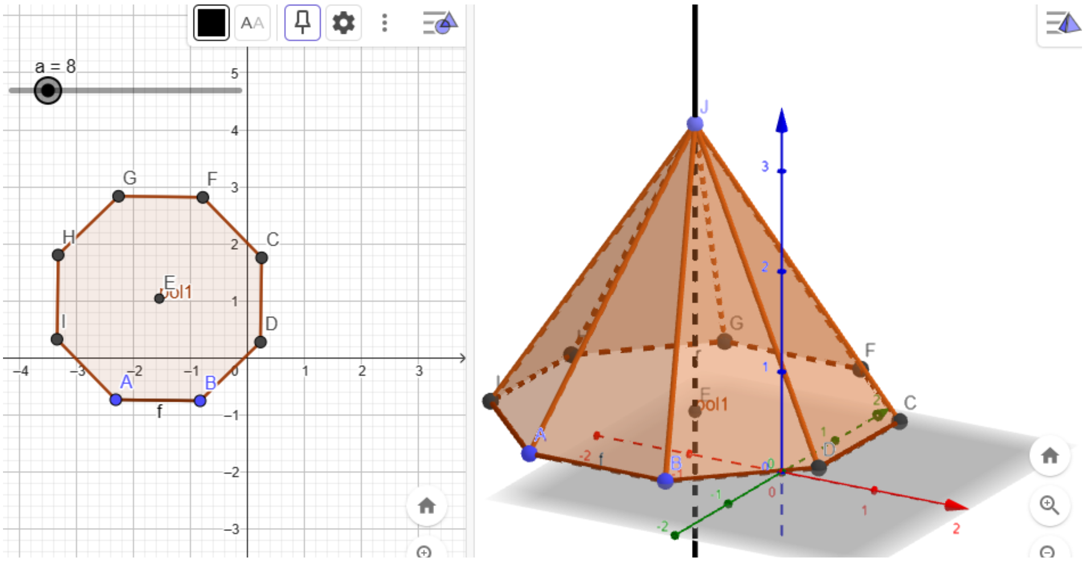
Mover o controle deslizante para verificar o que acontece com os objetos matemáticos, como ilustrado nas Figuras 74, 75 e 76.

Figura 74 – Projeção de uma pirâmide em 2D e 3D no GeoGebra



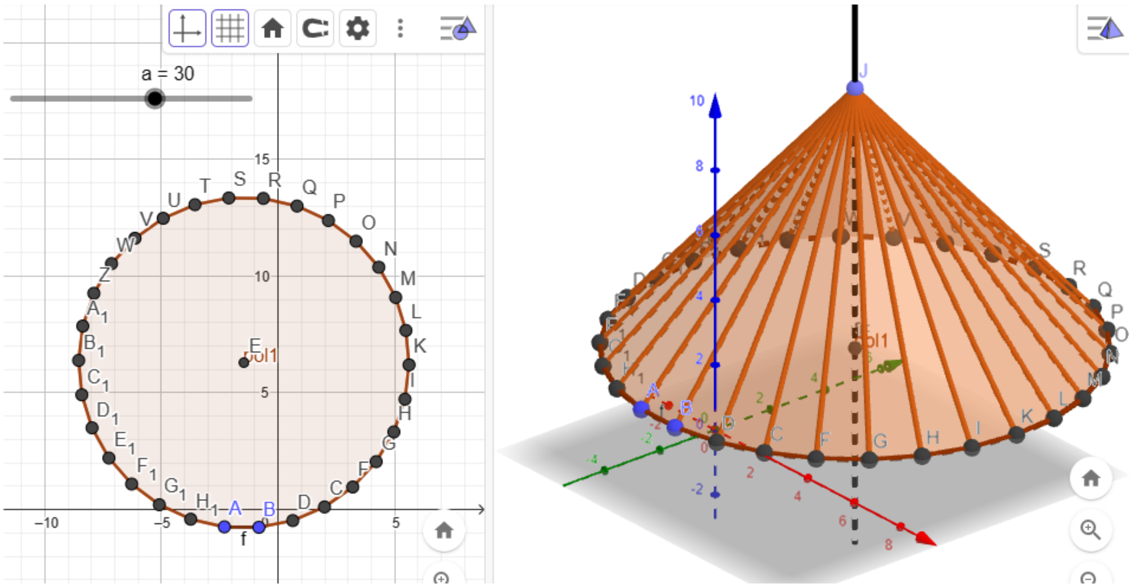
Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 75 – Alteração da base da pirâmide, para um polígono com oito lados, em 2D e 3D no GeoGebra



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 76 – Alteração da base da pirâmide, para um polígono com trinta lados, em 2D e 3D no GeoGebra



Fonte: De autoria própria (2023).

<u>EM UMA FOLHA IMPRESSA SERÁ ENTREGUE A ATIVIDADE 7:</u>

1) O que ocorre com a representação do polígono que forma a base da pirâmide quando o valor do controle deslizante é alterado?

____

____

Possível resposta dos alunos: Há alterações no número de lados do polígono, possuindo a mesma quantidade informada no controle deslizante.

2) Foi possível formar um polígono com todos os valores do controle deslizante? Caso a resposta seja negativa, por qual motivo não foi possível formar?

____

____

Possível resposta dos alunos: Os valores em que o controle deslizante é 0, 1 e 2 não foram formados polígonos,

visto que a condição de existência de um polígono é que ele possua ao menos 3 lados.

3) O que aconteceu com o formato do polígono à medida que o valor do controle deslizante foi aumentado para 30? Continuou sendo um polígono?

____

____

Possível resposta dos alunos: O polígono vai se assemelhando a uma circunferência, mas ele continua sendo um polígono, pois sua formação é dada por segmentos de retas.

4) O que ocorre com a representação da pirâmide quando o valor do controle deslizante é alterado?

____

____

Possível resposta dos alunos: A pirâmide tem sua base alterada e, como consequência, a quantidade de faces laterais também é alterada, assim para cada valor do controle deslizante, temos uma pirâmide diferente.

5) Foi possível formar uma pirâmide com todos os valores do controle deslizante? Caso a resposta seja negativa, por qual motivo não foi possível formar?

____

____

Possível resposta dos alunos: Para os valores da base sendo 0, 1 e 2 não foi possível formar a base, logo a pirâmide também não existe.

6) Quando o valor do controle deslizante chegou em 30, o sólido continuou sendo uma pirâmide? Explique.

____

____

Possível resposta dos alunos:

A pirâmide foi se assemelhando a um cone à medida que o controle deslizante foi aumentando, mas como a sua base é formada por um polígono é regular e não uma circunferência, então o sólido permanece sendo uma pirâmide.

Momento 4: Medida do volume de pirâmides e do dodecaedro

ATIVIDADE 8 - Obtenção da medida do volume da pirâmide por meio de prismas

Objetos matemáticos: pirâmide e prismas.
Objetivo: comparar o volume das pirâmides e dos prismas de mesma base.
Recursos utilizados: caneta, lápis, borracha, *notebook* com o *software* GeoGebra e material impresso.
Estratégia: organizar os alunos em Grupos, entregar material impresso contendo a atividade e solicitar que os alunos respondam com o auxílio do GeoGebra e da Realidade Aumentada.
Avaliação: formativa, monitorando o progresso dos alunos ao longo do processo, através de questionamentos, participação e realização das atividades.

<u>CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA.</u>

1. Acesse as configurações, tocando no ícone “configurações”. Na aba Janela de Visualização, desmarque as opções Exibir Eixos. Na aba Álgebra, ajuste o parâmetro Descrições Algébricas para Definição. Toque na Janela Gráfica para voltar à tela inicial;

2. Utilize o campo Entrada, para inserir os seguintes pontos:
A = (0,0), B = (0,2), C = (2,1), D = (0,0,4), E = (0,2,4), F = (2,1,4), J=(3.08,1,4), K=(1.9,-0.62,0), L=(1.9,2.62,4), M=(1.9,-0.62,4) e N=(1.9,2.62,0)

3. Construa nove pirâmides a partir dos pontos inseridos no passo anterior. Para isso, utilize os seguintes comandos:

p1=Pirâmide(D,E,F,C);
p2=Pirâmide(A,B,D,C);
p3=Pirâmide(B,D,E,C);
p4=Pirâmide(A,K,C,M);
p5=Pirâmide(D,F,M,C);
p6=Pirâmide(M,D,A,C);

p7=Pirâmide(B,C,N,L);
p8_{1}=Pirâmide(E,F,L,C);
p9_{1}=Pirâmide(B,E,L,C).

4. Localize, na Janela Algébrica, as pirâmides e os pontos criados nos passos anteriores, e oculte-os, tocando sobre o ícone correspondente a cada um deles. Após esse procedimento, a janela gráfica deve ficar vazia;

5. Crie três controles deslizantes, que serão responsáveis pelo deslocamento de cada uma das pirâmides. Para isso, utilize os comandos a seguir:

d1=ControleDeslizante(0,5,0.1);
d2=ControleDeslizante(0,3,0.1);
d3=ControleDeslizante(0,3,0.1);
d4=ControleDeslizante(0,5,0.1);
d5=ControleDeslizante(0,5,0.1);
d6=ControleDeslizante(0,4,0.1);
d7=ControleDeslizante(0,5,0.1);
p8=ControleDeslizante(0,5,0.1);
p9=ControleDeslizante(0,4,0.1)

6. Execute os seguintes comandos para realizar as transladações:

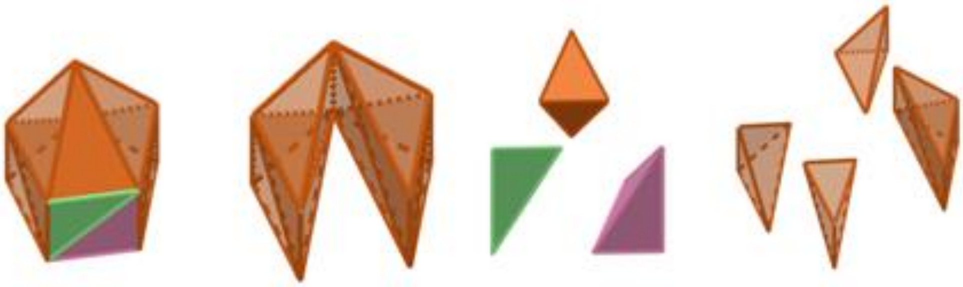
p1'=Transladar(p1,Vetor((-d1,0,0)));
p2'=Transladar(p2,Vetor((0,-d2,0)));
p3'=Transladar(p3,Vetor((0,d3,0)));
p4'=Transladar(p4,Vetor((0,-d4,0)));
p5'=Transladar(p5,Vetor((d5,-d5,0)));
p6'=Transladar(p6,Vetor((0,-d6,0)));
p7'=Transladar(p7,Vetor((0,d7,0)));
p8'=Transladar(p8_{1},Vetor((p8,p8,0)));
p9'=Transladar(p9_{1},Vetor((0,p9,0))).

Modifique a cor de cada uma das pirâmides que surgiram na tela, tocando sobre elas com o lado direito do *mouse* e selecionando a opção de ‘Configurações’, em seguida, ir à opção ‘Cor’.

7. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão AR, presente no canto inferior direito da Janela Gráfica;

8. Movimente os controles deslizantes para fazer o deslocamento de cada uma das pirâmides que compõem o prisma, como ilustrado na Figura 77.

Figura 77 – Decomposição do prisma pentagonal em prismas triangulares



Fonte: De autoria própria (2023).

EM UMA FOLHA IMPRESSA, SERÁ ENTREGUE A ATIVIDADE 8:

1ª) Quantos prismas é possível identificar na figura, tanto na figura como um todo, quanto em subconjuntos.

____

____

Possível resposta dos alunos: De acordo com as características e definições de um prisma, há 6 prismas, os quais são: três prismas cujas bases são triângulos, dois prismas cujas bases são quadriláteros e um prisma cuja base é um pentágono.

2ª) Qual a nomenclatura dos prismas encontrados?

____

____

Possível resposta dos alunos: Um prisma de base pentagonal e três prismas de base triangular que formam o prisma pentagonal.

3ª) Quantas pirâmides formam cada prisma triangular?

____

Possível resposta dos alunos: Para os prismas de base triangular, é possível observar que eles são compostos por três pirâmides de base triangular.

4ª) Quais pirâmides possuem a mesma medida de volume?

____

____

Possível resposta dos alunos: Nas pirâmides triangulares há semelhança existente em suas bases e alturas, de modo que as medidas dos seus volumes são os mesmos e, como no prisma pentagonal há dois prismas triangulares, então há seis pirâmides com a mesma medida de volume.

5ª) Existe alguma relação entre a medida do volume das pirâmides com os prismas que elas formam?

____

____

Possível resposta dos alunos: Sim. Em todos os casos são necessárias três pirâmides para formar um prisma.

6ª) Qual a relação você pode observar comparando o volume do prisma com o volume de cada pirâmide que as forma?

____

____

Possível resposta dos alunos: A medida do volume do prisma equivale ao triplo da medida do volume das pirâmides.

7ª) De acordo com suas observações feitas nas questões (1), (4) e (5), qual a expressão que irá representar o volume de cada pirâmide em relação a cada prisma?

____

____

Possível resposta dos alunos: Sendo ‘Ab’ a medida de área da base e ‘h’ a medida da altura, temos a medida do volume ‘V’, dado por: $V = \frac{Ab \cdot h}{3}$

8ª) As pirâmides p1, p5 e p8 formam algum outro sólido? Qual a nomenclatura?

____

____

Possível resposta dos alunos: Os sólidos p1, p5 e p8 formam uma pirâmide pentagonal, cuja medida da altura e medida da base são as mesmas que a do prisma ao qual está inserido.

9ª) Identifique de quais prismas as pirâmides triangulares p1, p5 e p8, que formam a pirâmide pentagonal, vieram.

Possível resposta dos alunos: O prisma de base pentagonal é formado por uma pirâmide de cada prisma triangular.

10ª) Há alguma relação entre a medida do volume do com a medida do volume das pirâmides p1, p5 e p8 juntas?

Possível resposta dos alunos: Como cada pirâmide corresponde a um terço de cada prisma da qual ele formou, então a pirâmide é formada por sólidos que correspondem a um terço do prisma de base pentagonal, ou seja, a pirâmide de base pentagonal também corresponde a um terço do prisma de base pentagonal.

11ª) Relembrando que a medida do volume de um prisma é dado por V = Ab·h, qual expressão pode ser utilizada para relacionar a medida do volume prisma com qualquer pirâmide que possuem a mesma base e a mesma altura?

Possível resposta dos alunos: Sendo ‘Ab’ a medida da área da base e ‘h’ a medida da altura, temos a medida do volume ‘V’, dado por: $V = \frac{Ab \cdot h}{3}$

ATIVIDADE 9 - Medida de volume do dodecaedro por meio da composição e decomposição por pirâmides

Objetos matemáticos: pirâmides e dodecaedro.

Objetivo: estabelecer a relação entre a pirâmide e o dodecaedro e calcular a medida do volume do dodecaedro.

Recursos utilizados: caneta, lápis, borracha, *notebook* com o *software* GeoGebra e material impresso.

Estratégia: organizar os alunos em Grupos, entregar material impresso contendo a atividade e solicitar que os alunos respondam com o auxílio do GeoGebra e da Realidade Aumentada.

Avaliação: formativa, monitorando o progresso dos alunos ao longo do processo, através de questionamentos, participação e realização das atividades.

Agora que sabemos calcular a medida do volume de pirâmide de base pentagonal, com base nos ângulos ou nas medidas dos seus lados. Vamos construir um dodecaedro, cujas características são: ser um polígono regular e ter faces que são pentágonos regulares. Posteriormente, encontrar a medida do volume do dodecaedro.

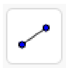
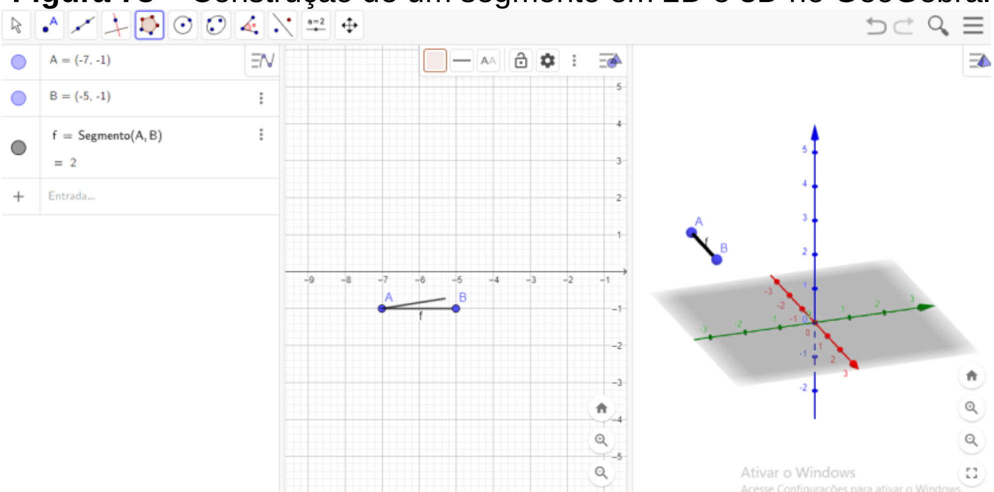
Construa um segmento AB utilizando a ferramenta 'Segmento' , que está localizado no item 3 da barra de ferramentas, conforme ilustra a Figura 78.

Figura 78 – Construção de um segmento em 2D e 3D no GeoGebra.



Fonte: De autoria própria (2023).

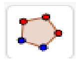
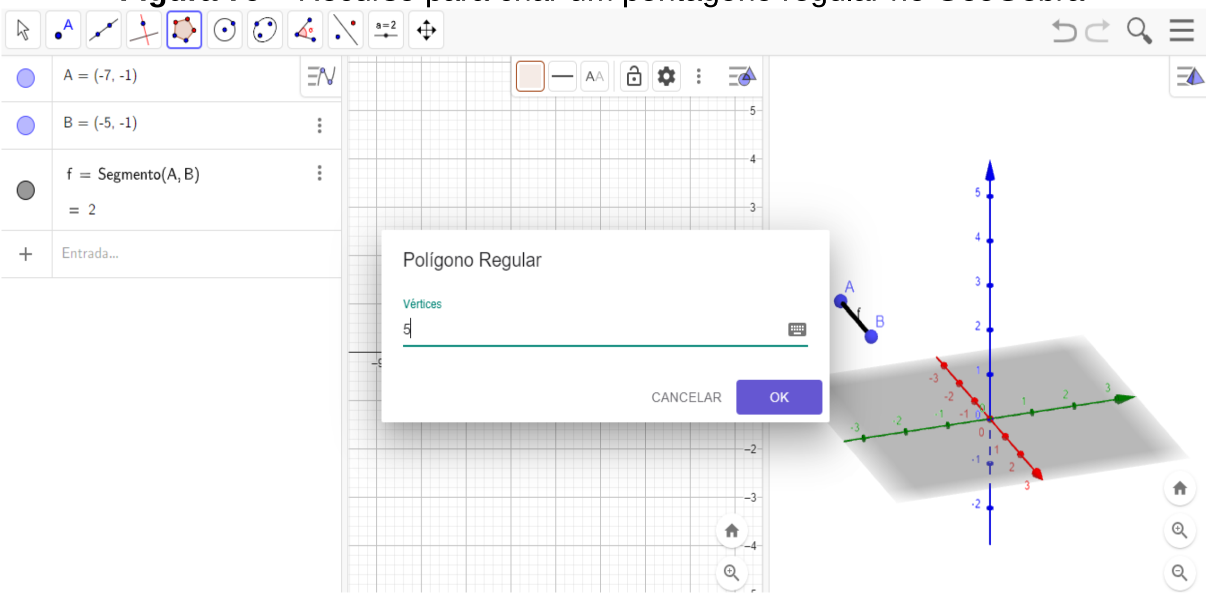
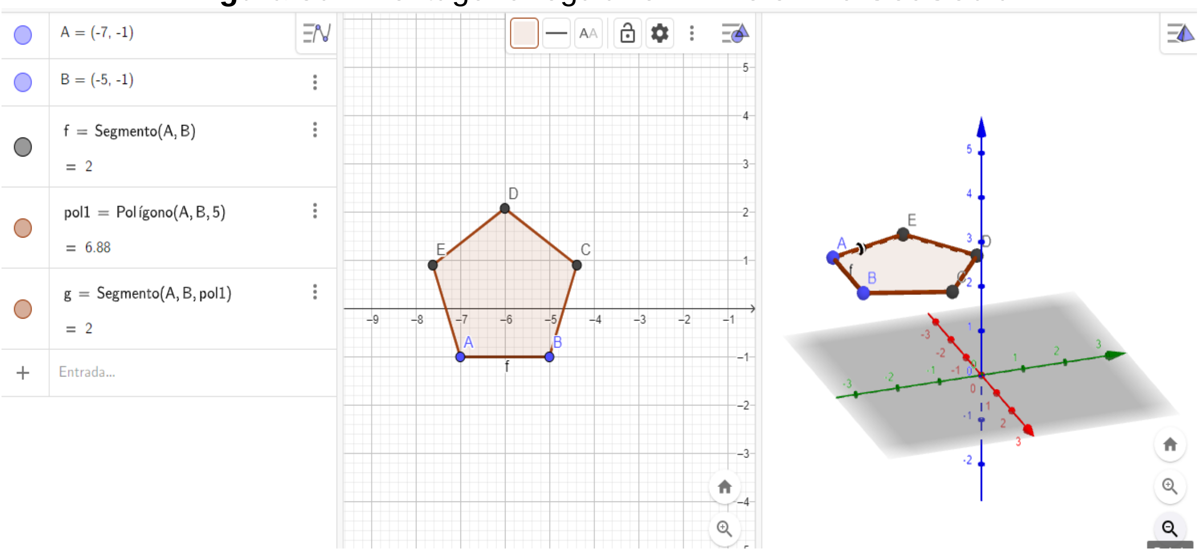
Utilizando a ferramenta ‘Polígono Regular’ , que está localizado no item 5, clique nos Pontos A e B do segmento AB. Será pedido a quantidade de vértices, que deverá ser cinco para formar um pentágono, conforme ilustram as Figuras 79 e 80.

Figura 79 – Recurso para criar um pentágono regular no GeoGebra



Fonte: De autoria própria (2023).

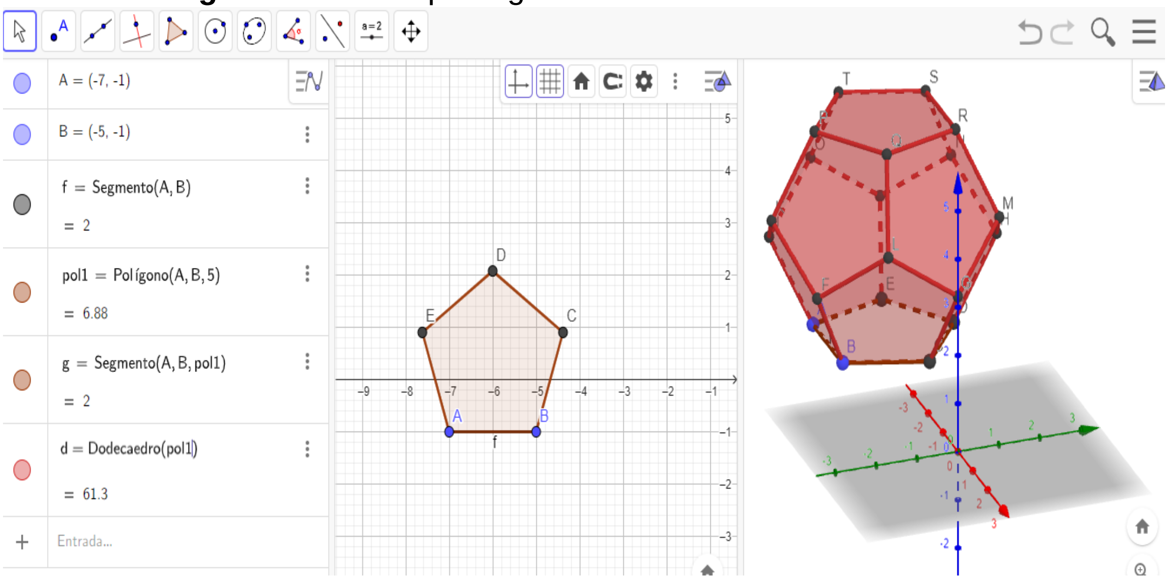
Figura 80 – Pentágono regular em 2D e 3D no GeoGebra



Fonte: De autoria própria (2023).

Por fim, na entrada de comandos digite d=Dodecaedro(pol1) para formar o dodecaedro na Janela de Visualização 3D, como exposto na Figura 81.

Figura 81 – Face pentagonal e dodecaedro no GeoGebra



Fonte: De autoria própria (2023).

Construções de sólidos, que antes do desenvolvimento de *softwares* geométricos, eram complexos e de difícil abstração, agora são facilmente representados, contribuindo para sua exploração.

<u>EM UMA FOLHA IMPRESSA SERÁ ENTREGUE A ATIVIDADE 9</u>:

Para o exercício, utilize as ferramentas do GeoGebra, que já foram aplicadas por você anteriormente, e portanto, já conhecidas, para construir o dodecaedro e responder os itens a seguir. Explore o dodecaedro, cujos segmentos da base do pentágono regular tenham a medida de 2 unidades de comprimento. Aproveite para explorar os sólidos com a função da Realidade Aumentada.

1) É possível construir sólidos dentro do dodecaedro?

____

____

Possível resposta dos alunos:
Sim. O dodecaedro possui faces que são polígonos, os quais seriam as bases dos sólidos que poderiam compor o dodecaedro.

2) Quais sólidos podemos utilizar para formar o dodecaedro?

____

____

Possível resposta dos alunos: As faces do dodecaedro são pentágonos, que podem ser bases de pirâmides de base pentagonal.

3) É possível utilizar vários sólidos de um único tipo para formar o dodecaedro? Quanto sólidos desse tipo devemos usar?

____

Possível resposta dos alunos: Sim. É possível utilizar 12 pirâmides de base triangular.

4) Qual a relação entre a medida do volume desse sólido (da questão 3) com a medida de volume do dodecaedro?

____

____

Possível resposta dos alunos: Como o dodecaedro é formado por doze pirâmides, então o volume do dodecaedro é 12 vezes maior que o de cada pirâmide.

5) Como podemos encontrar esses sólidos? Qual(is) procedimentos realizar para encontrar esses sólidos? Utilize o GeoGebra para auxiliar.

____

____

____

____

____

Possíveis respostas dos alunos:

Resposta 1:

Ao traçar segmentos internos, passando pelos vértices do dodecaedro, encontramos um ponto central no sólido, de modo que esse ponto seja o vértice das pirâmides pentagonais, cujas bases são os lados do dodecaedro. Assim, é garantido que as pirâmides obtidas sejam semelhantes, pois as bases já possuem a mesma medida de área e com o ponto é central, garantimos que as medidas, que correspondem às alturas, também sejam equivalentes.

Resposta 2:

Traçar um segmento que vai do ponto central de cada face pentagonal até a face oposta do dodecaedro, o encontro desses segmentos delimita o centro do dodecaedro. Então basta traçar os segmentos que vão das arestas de cada pentágono até o centro do dodecaedro, formando as pirâmides.

6) Como podemos encontrar o volume de cada pirâmide pentagonal? E qual à medida que corresponde ao seu volume?

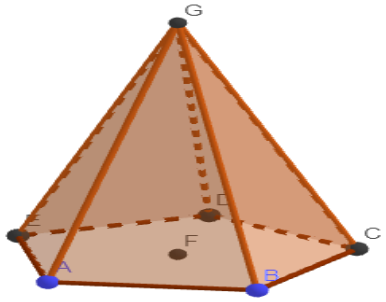
____

____

Possível resposta dos alunos:

<u>1º Passo:</u> Dada uma pirâmide de base pentagonal ABCDE, sendo F o ponto central do pentágono e G um vértice fora desse pentágono, de tal forma que FG é perpendicular ao pentágono, assim FG é a altura da pirâmide pentagonal, que chamamos de ‘H’, conforme a Figura 81.

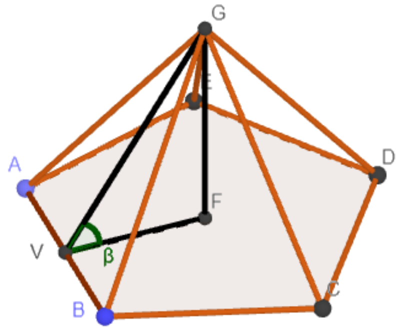
Figura 82 – Pirâmide de base pentagonal



Fonte: De autoria própria (2023).

<u>2º Passo:</u> Traçar o segmento que vai de F até o ponto médio de um dos lados do pentágono. Esse segmento já é conhecido, ele é ‘h’, ou seja, é altura do triângulo ABF da base pentagonal, que vale $\frac{l}{2}\mathrm{tg}(54°)$, como ilustrado na Figura 83.

Figura 83 – Ângulo entre a base e a face lateral da pirâmide pentagonal



Fonte: De autoria própria (2023).

<u>3° Passo:</u> Encontrar a medida da altura do pentágono, que chamamos de ‘H’. Novamente utilizamos a relação trigonométrica da tangente, mas agora no triângulo VFG. O ângulo está situado no vértice V, chamamos esse ângulo de β. Assim, a tangente nesse ângulo corresponde à:

$$\mathrm{tg}(\beta) = \frac{\mathrm{H}}{\frac{l}{2}\mathrm{tg}(54°)}$$

Assim, H corresponde à:

$$\mathrm{H} = \frac{l}{2}\mathrm{tg}(54°)\mathrm{tg}(\beta)$$

<u>4° Passo:</u> Determinar o volume da pirâmide de base pentagonal. Sabemos que a medida do volume de uma pirâmide é dada por:

$$V = \frac{Ab \, . \, H}{3}$$

Como, $Ab = \frac{5l^2 \mathrm{tg}(54°)}{4}$ e $H = \frac{l}{2}\mathrm{tg}(54°)\mathrm{tg}(\beta)$, então a medida do volume da pirâmide de base pentagonal é dada por:

$$V = \frac{\frac{5l^2 \mathrm{tg}(54°)}{4} \; . \; \frac{l}{2}\mathrm{tg}(54°)\mathrm{tg}(\beta)}{3}$$

Simplificando, obtemos:

$$V = \frac{5l^3 \mathrm{tg}(54°)^2 \, \mathrm{tg}(\beta)}{24}$$

7) Com base nas respostas anteriores, qual a medida do volume do dodecaedro regular?

____

____

____

Possível resposta dos alunos:

À medida que corresponde ao volume do dodecaedro regular será 12 vezes o volume da pirâmide de base pentagonal, ou seja:

$$12\left(\frac{5l^3 \mathrm{tg}(54°)^2 \mathrm{tg}(\beta)}{24}\right)$$

ou seja:

$$\frac{5l^3 \mathrm{tg}(54°)^2 \,\mathrm{tg}(\beta)}{2}$$

Como β é um ângulo constante e igual para qualquer dodecaedro, cuja medida do ângulo pode ser aproximada com algumas casas decimais para não haver muito erro por truncamento e sua medida vale 58,28253º. Então, o volume de qualquer dodecaedro é dado por:

$$\frac{5l^3 \mathrm{tg}(54°)^2 \,\mathrm{tg}(58{,}28253)}{2}$$

Como, no nosso caso, o lado tem medida 2 u.c., então o valor da medida do volume do dodecaedro é aproximadamente 61,305 u.v.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de sólidos geométricos, como as pirâmides e o dodecaedro, pode ser significativamente aprimorado com a utilização de tecnologias que facilitem a visualização e manipulação desses objetos matemáticos. Ferramentas digitais, como *software*s de geometria dinâmica e Realidade Aumentada, podem permitir aos alunos explorar as propriedades e relações espaciais de forma interativa e envolvente.

As tecnologias podem promover a visualização de um objeto matemático e contribuir para a percepção dos elementos que o compõem, contribuindo para a compreensão dos conceitos geométricos.

Ao proporcionar uma experiência de aprendizagem visual e prática, essas ferramentas não apenas despertam o interesse dos alunos, mas também podem facilitar a retenção e aplicação dos conhecimentos adquiridos, preparando-os melhor para desafios futuros.

> A utilização de recursos como o computador e a calculadora pode contribuir para que o processo de ensino e aprendizagem de Matemática se torne uma atividade experimental mais rica, sem riscos de impedir o desenvolvimento do pensamento, desde que os alunos sejam encorajados a desenvolver seus processos metacognitivos e sua capacidade crítica e o professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e aperfeiçoamento das situações de aprendizagem (BRASIL, 1998, p. 45).

Portanto, as atividades que compõem a Sequência Didática facilitam a visualização e manipulação desses objetos, por meio de *software*s de geometria dinâmica e Realidade Aumentada.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 15 de jan. de 2024.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental II terceiro e quarto ciclos: matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília : Ministério da Educação e Cultura – Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau, **Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana**, Volume 9, 8ª Ed., São Paulo: Editora Atual, 2005.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau, **Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Espacial - Posição e Métrica**, Volume 10 - 6ª Ed., São Paulo: Editora Atual, 2005.