



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT



MARLON MAIKE MOREIRA DE SOUZA

UM ESTUDO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS POR MEIO DA REALIDADE
AUMENTADA

VITÓRIA DA CONQUISTA- BAHIA
DEZEMBRO/2024

MARLON MAIKE MOREIRA DE SOUZA

**UM ESTUDO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS POR MEIO DA REALIDADE
AUMENTADA**

Dissertação apresentada em cumprimento às exigências para obtenção do título de mestre junto ao Programa de Pós-Graduação Mestrado profissional em Matemática - PROFMAT.

Orientadora: Prof. Dr^a Galvina Maria de Souza

**VITÓRIA DA CONQUISTA- BAHIA
DEZEMBRO/2024**

Marlon Maike Moreira de Souza

Um estudo dos sólidos geométricos por meio da realidade aumentada

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof.^a Dr.^a Galvina Maria de Souza - UESB

Prof.^a Dr.^a Alexsandra Oliveira Andrade - UESB

Prof.^a Dr.^a Rieuse Lopes Pinto - UNIMONTES

Vitória da Conquista - Ba

Aprovada em 13 de dezembro de 2024



Documento assinado eletronicamente por **Rieuse Lopes Pinto, Usuário Externo**, em 13/12/2024, às 14:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do [Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014](#).



Documento assinado eletronicamente por **Galvina Maria de Souza, Professor Assistente**, em 13/12/2024, às 17:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do [Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alexsandra Oliveira Andrade, Professor Titular**, em 16/01/2025, às 08:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do [Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://seibahia.ba.gov.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **00104798747** e o código CRC **EBBB6A70**.

S716e Souza, Marlon Maike Moreira de.

Um estudo dos sólidos geométricos por meio da realidade
aumentada. / Marlon Maike Moreira de Souza, 2024.

123f.

Orientador (a): Dr^a. Galvina Maria de Souza.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste
da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –
PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2024.

Inclui referências. 72 - 76

1. Educação matemática. 2. Geometria espacial. 3. Realidade aumentada.
4. GeoGebra. I. Souza, Galvina Maria de. II. Universidade Estadual Sudoeste
da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –
PROFMAT, Vitória da Conquista - BA. III. T.

CDD: 510.7

AGRADECIMENTOS

Ao finalizar esse percurso do mestrado, são muitos os nomes para agradecer. Assim, agradeço primeiramente a Jeová pelo dom da minha vida e por me manter firme e confiante ao longo do curso.

À minha orientadora a Profa. Dra. Galvina Maria de Souza, pelo apoio, paciência, incentivo e por me orientar a levar esta pesquisa pelo melhor caminho.

À Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo auxílio financeiro ao longo do curso.

Aos professores do ProfMat, pelo saber compartilhado, pela paciência e por serem inspiração ao longo desse percurso de professor e pesquisador.

Agradeço imensamente meus pais, Jaime e Neide, pelo amor incondicional, cuidado, incentivo e pelas orações direcionadas a mim. Sei que sem a inspiração de vocês eu não teria chegado tão longe.

Às minhas irmãs, Milene e Kelly, pelo cuidado, carinho e apoio incondicional.

Aos meus cunhados, pela amizade e apoio de sempre.

Aos meus sobrinhos, Maria Clara e Emanuel, que na simplicidade e leveza de criança me inspira a ser um ser humano cada vez melhor.

Aos meus colegas do mestrado, pelo apoio, pelo ombro amigo nas dificuldades e por trazer leveza durante esse tempo do mestrado.

Aos meus amigos, pela torcida de sempre, pelo incentivo, carinho e amizade. Sem dúvida, desfrutar da amizade de vocês me impulsiona a ser cada vez melhor.

Aos meus alunos, que me inspiram a ser um professor humano, amigo, acolhedor e a ser cada vez mais comprometido com a prática educativa.

Sei que poderia citar muitos outros nomes para agradecer, mas finalizo deixando uma palavra mágica: OBRIGADO!!!

*A geometria existe por toda a parte. [...] É preciso,
porém, olhos para vê-la, inteligência para
compreendê-la e alma para admirá-la.*

(Malba Tahan, O homem que calculava)¹

¹ “O escritor Malba Tahan, heterônimo de Júlio César de Mello e Souza, nasceu em 6 de maio de 1895, na cidade do Rio de Janeiro. Formou-se em engenharia civil pela Escola Nacional de Engenharia, mas que nunca exerceu essa profissão. Sua grande paixão era lecionar matemática no Colégio Pedro II, onde criou uma nova metodologia para tornar a matéria mais interessante e de fácil assimilação pelos alunos.

Entretanto, não foram essas atividades e nem mesmo o seu real nome que notabilizou Júlio César de Mello e Souza. Apesar de não ser árabe e de nunca ter ido ao oriente médio, dedicou-se a estudar a língua, filosofia e cultura dessa sociedade. Assim surgiu seu mais famoso pseudônimo: **Ali lezid Izz-Eduim Ibn Salim Hank Malba Tahan**, ou simplesmente **Malba Tahan**.

Ele criou o personagem Malba Tahan por acreditar que um escritor brasileiro não chamaria atenção escrevendo contos árabes. Para dar mais verossimilhança à história criou também um tradutor para os livros, o Professor Breno Alencar Bianco.

Júlio César de Mello e Souza, com o nome de Malba Tahan, escreveu mais de 55 livros, entre eles "O homem que calculava" é o seu livro mais conhecido. No estilo de Mil e uma noites", Malba Tahan conta a história do calculista persa Beremiz Samir que em viagem até Bagdá mostra suas incríveis habilidades em solucionar problemas matemáticos".

Fonte: https://capital.sp.gov.br/web/cultura/w/bibliotecas/bibliotecas_bairro/bibliotecas_m_z/malbatahan/5255#:~:text=Ele%20criou%20o%20personagem%20Malba,o%20Professor%20Breno%20Alencar%20Bianco. Data de acesso: 17-12-2024

Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus
Aos meus pais Jaime e Neide
Às minhas irmãs Kelly e Milene
E aos meus sobrinhos Maria Clara e Emanuel!!!

RESUMO

Esta pesquisa foi desenvolvida a partir de uma sequência didática elaborada e aplicada a estudantes do segundo ano do Ensino Médio de uma escola no interior da Bahia, na disciplina de Matemática. Nesse sentido, teve como objetivo analisar o quanto a calculadora tridimensional *GeoGebra* pode contribuir nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria Espacial. Para obter os resultados e respostas acerca da problematização apresentada neste trabalho, analisou-se, como fonte e objeto de pesquisa, o uso da calculadora tridimensional *GeoGebra 3D* para o estudo dos sólidos por meio da realidade aumentada, sendo necessário observar as diferenças e fazer as necessárias mediações em sala de aula, através de ensinamentos e instrumentos de avaliação. Foi realizada uma pesquisa bibliográfica, fundamentada em ideias e pressupostos de teóricos que apresentam significativa importância na definição e construção dos conceitos discutidos. A metodologia da pesquisa foi a abordagem qualitativa. Nesse viés, apresenta-se um recurso metodológico que poderá ser utilizado como ferramenta de ensino para os professores de matemática, especialmente, na temática discutida. Ao longo da aplicação da sequência didática, foi perceptível que o uso do aplicativo de realidade aumentada teve um impacto positivo e de grande relevância para o ensino do objeto matemático; o uso dessa ferramenta permitiu aos alunos uma percepção mais palpável dos sólidos geométricos e a aprendizagem dos conceitos discutidos. Ressalta-se o potencial dessa pesquisa no campo da Educação Matemática, uma vez que ela propõe uma metodologia inovadora que permite aos alunos compreenderem conceitos matemáticos de forma mais realista. Em suma, trazer novas abordagens para o ensino de matemática é de grande relevância para a sociedade, tendo em vista que a matemática é uma disciplina que permeia nosso cotidiano. Trazer uma abordagem metodológica que valoriza a autonomia do aluno é o diferencial de nossa pesquisa, um dos nossos principais resultados reside no fato de que valorizar a capacidade que o aluno tem de elaborar seu próprio conhecimento a partir de recursos tecnológicos é de grande relevância para o campo da educação, e da sociedade de uma forma geral, uma vez que o aluno é incentivado a ser um sujeito criativo capaz de estabelecer uma ligação entre o conhecimento adquirido na escola e sua realidade. Além disso, concluímos que o uso da tecnologia é capaz de sanar deficiências e preencher lacunas referentes ao processo de ensino e da aprendizagem da Geometria Espacial. Por fim, esperamos que este estudo preencha lacunas de pesquisa no campo da matemática e aponte novos caminhos para investigações futuras.

Palavras-chave: Educação Matemática; Geometria Espacial; Realidade Aumentada; *GeoGebra*.

ABSTRACT

This research was developed from a didactic sequence elaborated and applied to students of the second year of High School of a school in the interior of Bahia, in the discipline of Mathematics. In this sense, it aimed to analyze how much the three-dimensional calculator *GeoGebra* can contribute to the teaching and learning processes of Spatial Geometry. To obtain the results and answers about the problematization presented in this work, the use of the three-dimensional *GeoGebra* 3d calculator for the study of solids through augmented reality was analyzed as a source and object of research, being necessary to observe the differences and make the necessary mediations in the classroom, through teachings and evaluation instruments. A bibliographic research was carried out, based on ideas and assumptions of theorists who have significant importance in the definition and construction of the concepts discussed. The research methodology was the qualitative approach. In this bias, it presents a methodological resource that can be used as a teaching tool for mathematics teachers, especially in the topic discussed. Throughout the application of the didactic sequence, it was noticeable that the use of the augmented reality application had a positive impact and of great relevance for the teaching of the mathematical object; the use of this tool allowed students a more palpable perception of geometric solids and the learning of the concepts discussed. The potential of this research in the field of Mathematical Education is highlighted since it proposes an innovative methodology that allows students to understand mathematical concepts in a more realistic way. In short, bringing new approaches to the teaching of mathematics is of great relevance to society, given that mathematics is a discipline that permeates our daily lives. In short, bringing a methodological approach that values the student's autonomy is the differential of our research, one of our main results lies in the fact that valuing the student's ability to elaborate his own knowledge from technological resources is of great relevance to the field of education, and society in general, since the student is encouraged to be a creative subject capable of establishing a link between the knowledge acquired in school and his reality. In addition, we conclude that the use of technology is able to remedy deficiencies and fill gaps related to the teaching and learning process of Spatial Geometry. In time, we expect this study to fill research gaps in the field of mathematics and point out new paths for future investigations.

Keywords: Mathematics teaching; Spatial Geometry; Augmented Reality; *GeoGebra*.

RESUMEN

Esta investigación se desarrolló a partir de una secuencia didáctica elaborada y aplicada a estudiantes de segundo año de secundaria de una escuela en el interior de Bahía, en la asignatura de Matemáticas. En este sentido, tuvo como objetivo analizar cuánto la calculadora tridimensional GeoGebra puede contribuir en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Espacial. Para obtener los resultados y respuestas sobre la problematización presentada en este trabajo, se analizó como fuente y objeto de investigación el uso de la calculadora tridimensional GeoGebra 3d para el estudio de los sólidos a través de la realidad aumentada, siendo necesario observar las diferencias y hacer las mediaciones necesarias en el aula, a través de enseñanzas e instrumentos de evaluación. Se realizó una investigación bibliográfica, basada en ideas y supuestos de teóricos que presentan una importancia significativa en la definición y construcción de los conceptos discutidos. La metodología de la investigación fue el enfoque cualitativo. En este sesgo, presenta un recurso metodológico que puede ser utilizado como herramienta de enseñanza para los profesores de matemáticas, especialmente en el tema discutido. A lo largo de la aplicación de la secuencia didáctica fue perceptible que el uso de la aplicación de realidad aumentada tuvo un impacto positivo y de gran relevancia para la enseñanza del objeto matemático; el uso de esta herramienta permitió a los estudiantes una percepción más palpable de los sólidos geométricos y el aprendizaje de los conceptos discutidos. Se destaca el potencial de esta investigación en el campo de la Educación Matemática, ya que propone una metodología innovadora que permite a los estudiantes comprender conceptos matemáticos de forma más realista. En resumen, traer nuevos enfoques para la enseñanza de las matemáticas es de gran relevancia para la sociedad, teniendo en cuenta que las matemáticas son una disciplina que impregna nuestra vida cotidiana. En resumen, traer un enfoque metodológico que valore la autonomía del estudiante es el diferencial de nuestra investigación, uno de nuestros principales resultados radica en el hecho de que valorar la capacidad que el estudiante tiene para elaborar su propio conocimiento a partir de recursos tecnológicos es de gran relevancia para el campo de la educación, y de la sociedad en general, ya que el estudiante es incentivado a ser un sujeto creativo capaz de establecer un vínculo entre el conocimiento adquirido en la escuela y su realidad. Además, concluimos que el uso de la tecnología es capaz de remediar deficiencias y llenar vacíos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Espacial. Con el tiempo, esperamos que este estudio llene vacíos de investigación en el campo de las matemáticas y señale nuevos caminos para futuras investigaciones.

Palabras-clave: Enseñanza de las matemáticas; Geometría espacial; Realidad aumentada; GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Versão na Play Store e App Store do aplicativo	53
Figura 2– A interface da calculadora GeoGebra 3D	54
Figura 3 – Construção e planificação do prisma em sala de aula	55
Figura 4 – Resposta da questão 5 área do prisma	55
Figura 5 – Atividade 3 resposta do aluno semana 1	56
Figura 6 – Construção e planificação da pirâmide de N lados	57
Figura 7– Respostas da segunda Questão 2	58
Figura 8 – Resposta da terceira questão	58
Figura 9 – Construção do cilindro de revolução	59
Figura 10 – Questão 1 construção do cilindro	60
Figura 11 – Área do cilindro	60
Figura 12– Elementos do cilindro	60
Figura 13– Volume do cilindro	61
Figura 14– Construção do cilindro RA.	61
Figura 15 – Cone a partir da sua definição	62
Figura 16– Resposta das alternativas 4 e 5	63
Figura 17– Medida do volume do cone em RA	63
Figura 18 - Construção da Esfera e cálculo do volume	64
Figura 19 – Respostas da atividade 12 questão 1 e 2.	65
Figura 20 – Versão na Play Store e App Store	84
Figura 21– A interface da calculadora GeoGebra 3D	84
Figura 22 - Ferramentas do GeoGebra 3D	85
Figura 23 - Elementos que compõem os prismas	86
Figura 24 - Aba Janela de Visualização	86
Figura 25– Janela de Álgebra	87
Figura 26- Resultado dos comandos no aplicativo	87
Figura 27- Para $N=3$ Prisma Reto de base triangular	88
Figura 28- Para $N=4$ Prisma Reto de base Quadrangular	88
Figura 29 - $N=5$; Prisma Reto de base Pentagonal	88
Figura 30 - Para $N=6$; Prisma Reto de base Hexagonal	89
Figura 31 - Resultado dos Prisma em Realidade Aumentada	89

Figura 32 - Visualização dos prismas 1 e 2 sem os Eixos	90
Figura 33 - Visualização dos prismas 3 e 4 sem os Eixos	90
Figura 34 - Ferramentas Básicas	91
Figura 35 - Planificação do prisma de base triangular	91
Figura 36 - Resultado da Planificação dos prismas em RA	90
Figura 37 - Elementos da Pirâmide	96
Figura 38 - Resultado dos comandos no aplicativo Pirâmide	97
Figura 39 - Para $N=3$ Pirâmide Reta de base triangular em Realidade Aumentada	97
Figura 40 - Para $N=4$ Pirâmide Reta de base Quadrangular	98
Figura 41 - $N= 6$ Pirâmide Reta de base Hexagonal	98
Figura 42 - Ferramentas Básicas	99
Figura 43 - Planificação da pirâmide de base triangular	99
Figura 44 - Planificação da pirâmide de base Quadrangular	100
Figura 45 - Planificação da pirâmide de base pentagonal	100
Figura 46 - Ferramentas de área e volume	103
Figura 47 – Elementos do cilindro	105
Figura 48 - Cilindro de revolução	106
Figura 49 - Superfície de projeção	106
Figura 50 - Cilindro de revolução em RA	107
Figura 51 - Cilindro Reto em RA com os Eixos	107
Figura 52 - Construção do cilindro reto	108
Figura 53 - Cilindro de Raio R e altura h	108
Figura 54 - Cilindro reto de raio R e altura h	109
Figura 55 - Cálculo da medida do volume do cilindro	109
Figura 56 - Cilindro reto em RA	110
Figura 57 - Elementos do Cone	111
Figura 58 - Construção do cilindro com base na sua definição	112
Figura 59 - Definição do cone em RA	112
Figura 60 - Construção do cone $R=4$ e $h=8$	113
Figura 61 - Construção do cone $R=4$ e $h=8$	113
Figura 62 - Construção de segmento da altura e raio do cone	114
Figura 63 - Cálculo da medida da área do cone	114
Figura 64 - Cálculo da medida da área do cone	115
Figura 65 - Cone em RA com os eixos	115

Figura 66 - Elementos da Esfera	116
Figura 67 - Segmento OP	116
Figura 68 - Esfera de centro O e raio r	117
Figura 69 - Mudando a cor da esfera	117
Figura 70 – Esfera no modo AR	118
Figura 71 - Resultado do Volume da Esfera	118
Figura 72 - Ferramenta da medida da área	119
Figura 73 - Ferramenta da medida do volume	120

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Lista dos trabalhos analisados	23
Quadro 2 - Dados do questionário	66
Quadro 3 - Gráfico dos dados do questionário	67
Quadro 4 - Habilidades relacionadas com a competência específica III	82
Quadro 5 - Habilidades relacionadas com a competência específica V	83

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2 PROBLEMÁTICA E O CAMINHAR METODOLÓGICO	17
2.1 Problemática	17
2.2 Metodologia e Procedimentos Metodológicos	19
3 REVISÃO DE LITERATURA	22
4 A MATEMÁTICA E O ENSINO	36
4.1 A Matemática no Contexto Escolar	36
4.2 Ensino de Matemática e Suas Metodologias	40
4.3 Tecnologias Digitais no Ensino da Matemática	42
5 GEOMETRIA ESPACIAL.....	45
5.1 Conceitos Intuitivos de Volumes de um Sólido	45
5.2 Realidade Aumentada.....	46
5.3 Calculadora Tridimensional GeoGebra	48
6 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA (TRRS)	50
7 RESULTADOS E DISCUSSÕES	53
7.1 A implementação e Análise da Sequência Didática	53
7.2 Análise das Atividades Desenvolvidas na Semana I.....	53
7.3 Análise das Atividades Desenvolvidas na Semana II.....	56
7.4 Análise das Atividades Desenvolvidas na Semana III.....	59
7.5 Análise das Atividades Desenvolvidas na Semana IV	61
7.6 Análise das Atividades Desenvolvidas na Semana V	64
7.7 Conclusão Geral das Análises	65
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
REFERÊNCIAS.....	72
APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA	77
APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO.....	123

1 INTRODUÇÃO

É sabido que a Matemática sempre foi vista por muitos como uma disciplina complexa. Tal pensamento possivelmente se relaciona com o fato dessa matéria ter muitos conceitos abstratos que requerem do aluno uma maior atenção e esforço para a compreensão. Sabe-se que muitos docentes ainda trabalham os conteúdos apenas de forma tradicional.

Este estudo se propõe a fomentar a importância do uso de *softwares* nos processos de ensino e de aprendizagem, essencialmente na disciplina de Matemática e no ensino da Geometria, buscando compreender como a Matemática pode ser estudada com o auxílio de novas tecnologias que facilitam a aprendizagem da Geometria Espacial. Para isso, fizemos uma investigação por meio de uma sequência didática construída tendo como recurso didático a calculadora tridimensional *GeoGebra*, com a intenção de estudar os sólidos por meio da realidade aumentada. A sequência foi implementada em uma turma de estudantes do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual da cidade de Guanambi - BA, levando em consideração as discussões de estudiosos do assunto sobre o uso de tecnologias no ensino da Matemática e dialogando com a realidade escolar.

Esta escolha surgiu de um interesse pessoal em abordar e verificar como a tecnologia pode ser uma aliada no ambiente escolar, usando os recursos tecnológicos digitais, como a realidade aumentada em sala de aula, a fim de permitir que o mundo real e o digital se misturem, com o intuito de contribuir para possíveis análises e comparações a pesquisa realizada.

Segundo Cruz (2005), a compreensão dos conceitos geométricos pode ser beneficiada quando esses conceitos são explorados em um ambiente dinâmico e interativo, com o uso de *software*. Dessa forma, esta pesquisa vem somar os esforços na luta por uma sala de aula lúdica, onde a matemática é vista como um conhecimento possível, propiciando ao aluno maior aproximação entre sua realidade e o conteúdo.

Ressalta-se que a principal intenção, é usar a tecnologia como uma aliada, não substituindo a teoria e o raciocínio lógico. Nesse sentido, corroboramos o pensamento de Macedo (2018, p. 85) que diz que “esse recurso deve ser integrado a fim de potencializar o ambiente de aprendizagem e não simplesmente substituir qualquer que seja de seus elementos”. Desse modo, a tecnologia deve ser um complemento para

as metodologias já utilizadas no ensino dos conteúdos de Matemática, sobretudo no conteúdo Geometria Espacial.

Para obter os resultados e respostas acerca da problematização apresentada neste trabalho, analisou-se, como fonte e objeto de pesquisa, o uso da calculadora tridimensional *GeoGebra 3D* para o estudo dos sólidos por meio da realidade aumentada em uma turma de 2º ano do Ensino Médio. Sendo necessário, no estudo em questão, observar as diferenças e fazer as necessárias mediações em sala de aula, através de ensinamentos e instrumentos de avaliação. Fez-se uma pesquisa bibliográfica, fundamentada em ideias e pressupostos de teóricos que apresentam significativa importância na definição e construção dos conceitos discutidos nesta análise: Ensino de Matemática, Realidade Aumentada, *GeoGebra*, Geometria Espacial.

Ressalta-se o potencial desta pesquisa no campo do ensino de Matemática, uma vez que ela propõe uma metodologia inovadora que permite aos alunos compreenderem conceitos matemáticos de forma mais realista. Em suma, trazer novas abordagens para o ensino de Matemática é de grande relevância para a sociedade, tendo em vista que a Matemática é uma disciplina que permeia nosso cotidiano. Por fim, esperamos que este estudo preencha lacunas de pesquisa no campo da Matemática e aponte novos caminhos para investigações futuras.

Desse modo, o presente trabalho tem como objetivo geral: Analisar o quanto a calculadora tridimensional *GeoGebra* pode contribuir de forma inovadora nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria Espacial. Para isso, delimitamos os objetivos específicos: (i) Identificar as dificuldades relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem referentes a conteúdos matemáticos, a citar, a Geometria e os cálculos com base em Realidade Aumentada; (ii) Criar estratégias visando uma transposição didática, a fim de proporcionar um ensino de Matemática dinâmico e de fácil compreensão; (iii) Buscar sanar as dificuldades dos estudantes e dar oportunidade para que eles possam desenvolver e aprimorar competências do conhecimento matemático relacionado ao objeto de estudo.

Além desta introdução, esta dissertação está dividida em 7 capítulos. No segundo, apresentamos a problemática e o caminho metodológico. No terceiro, trazemos a revisão da literatura, na qual mapeamos uma série de autores que trabalham dentro desse recorte temático e destacamos a importância desses estudos para a problematização do nosso objeto. No quarto, discutimos acerca da Matemática

no contexto escolar, as metodologias utilizadas e sobre o uso das tecnologias no ensino de Matemática. No quinto capítulo, falamos sobre a Geometria Espacial, a Realidade Aumentada e a Calculadora Tridimensional *GeoGebra*. No capítulo 6, falamos sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. No 7, constam os resultados e discussões acerca da aplicação da sequência didática, os desafios e as possibilidades através dessa metodologia de ensino e, por fim, as considerações finais, incluindo o apêndice com a sequência didática.

2 PROBLEMÁTICA E O CAMINHAR METODOLÓGICO

2.1 Problemática

Neste tópico introdutório, narro a minha vida profissional e acadêmica, dando ênfase aos caminhos e escolhas que me levaram ao mestrado, às inquietações e aos questionamentos na docência em Matemática que certamente se tornaram motivação para desenvolver o problema de pesquisa e a contínua necessidade de pesquisar sobre novas metodologias no ensino dessa disciplina. Humildemente, peço permissão ao amigo leitor para, neste capítulo, dissertar em primeira pessoa, uma vez que se trata da descrição reflexiva da minha própria trajetória pessoal na educação.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.”. A célebre frase do físico Isaac Newton foi a primeira que me veio à mente quando comecei a redigir as palavras iniciais nesta dissertação. Revisitando a memória e relembro minhas primeiras experiências acadêmicas, percebo que meu interesse em estudar, de maneira aprofundada, aspectos relacionados ao ensino e à aprendizagem da matemática, sobretudo o estudo dos sólidos geométricos, me obrigou a refletir e buscar aprender sempre mais. Nesse sentido, invoco a fala de Paulo Freire (1988, p.46), autor recorrente em minhas leituras na universidade:

(...) Assumir-se como ser social e histórico, como ser pensante, comunicante, transformador, criador, realizador de sonhos, capaz de ter raiva porque é capaz de amar. Assumir-se como sujeito porque é capaz de reconhecer-se como objeto. A assunção de nós mesmos não significa a exclusão dos outros.

Durante minha vida escolar, sempre nutri o gosto por ensinar Matemática aos meus colegas de turma e, de certo modo, almejava seguir a carreira docente. Graduei-me em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia (UNEB) no ano de 2016 e, posteriormente, iniciei a docência no Colégio Estadual Grandes Mestres Brasileiros, na cidade de Matina, no estado da Bahia, entre os anos de 2016 e 2018. Nesse contexto, inserido na Educação Básica, pude observar em minha própria sala de aula, como docente, o quanto a matemática acaba se tornando inócua e não produzindo os efeitos desejados.

Intimamente, sempre acreditei que a matemática fosse a língua universal, capaz de verdadeiramente revolucionar a humanidade; no entanto, não era o que via naquele momento, na maioria das aulas. Quero especialmente aqui citar o estudo da Geometria Espacial, ciência responsável pelo estudo dos sólidos, nesse aspecto, a

visualização de situações geométricas e a sua representação no plano têm grande relevância. Porém, se o aluno não é dotado dessas habilidades de visualização, torna-se praticamente impossível desenvolver qualquer trabalho em Geometria.

Sabe-se que a escola vai muito além das paredes que a constituem; a escola precisa estar onde os alunos estão, e, atualmente, é inegável a revolução virtual que acontece no globo terrestre. A maioria dos estudantes está munida de celulares e a todo instante conectada. Por que não utilizar essas conexões a favor do ensino e da aprendizagem? Essa foi uma das minhas seguidas indagações, pensando como motivar e despertar as habilidades necessárias em meus alunos para trabalhar com a parte da matemática que é considerada uma ferramenta para interagir e ilustrar o espaço no qual estamos inseridos, usada também em aplicações conservadoras tanto quanto inovadoras e, possivelmente, o ramo da Matemática que mais usamos nossa intuição, sendo ao mesmo tempo concreta e ligada à realidade: a Geometria Espacial. Ensinar essa disciplina e obter eficácia se tornou um dilema que necessitava da minha atenção. Na tentativa de encontrar respostas para essas indagações e aprofundar meus conhecimentos sobre o tema, comecei a estudar, me debruçando no entendimento de alguns estudiosos do assunto.

Em 2022, comecei a ministrar aulas no Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães, bem como a assistir às aulas do mestrado na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) e elaborar um estudo mais profundo de como aplicar o ensino dos sólidos de modo eficiente, pois é comum ensinar aos educandos a resolver extensos problemas matemáticos de uma maneira enfadonha, fazendo-se exercícios com repetição de conteúdos recém-estudados, com a finalidade de fixá-los. Isso perpetua um baixo rendimento escolar e acaba por desmotivar a maioria dos alunos. Assim, buscando novos conhecimentos e alternativas, me veio a possibilidade de utilizar a calculadora *GeoGebra* 3D ao desenvolver o conteúdo com as turmas e verificar sua eficácia. Nesse novo contexto, em princípio, foi uma experiência bastante gratificante e um novo aprendizado, pois, a partir daquele momento, eu precisava direcionar o foco do meu trabalho para as fragilidades vislumbradas nas turmas e, assim, poder usar como objeto de estudo para o mestrado.

Em consonância com os preciosos ensinamentos da minha orientadora, a Profa. Dra. Galvina Maria de Souza, optei por elaborar uma sequência didática no processo de ensino em uma das minhas turmas do segundo ano do Ensino Médio do Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães. A aplicação das atividades, utilizando a

Realidade Aumentada no estudo dos sólidos, tendo como aporte tecnológico a calculadora *GeoGebra*, aconteceram na disciplina "A Arte de Morar". Nesse sentido, considerando que a matemática pode ser estudada com o auxílio de tecnologias digitais que facilitam a aprendizagem, a questão norteadora do nosso estudo é: Como a Calculadora Tridimensional *GeoGebra* pode contribuir para o ensino e a aprendizagem de elementos da Geometria Espacial?

É importante destacar que este trabalho dialoga com as necessidades da Educação Básica e as demandas dos professores de matemática em sala de aula e o trabalho com tecnologias. Nesse ponto, nosso produto se apresenta como um recurso metodológico de grande relevância para o uso dos professores em sala de aula. Além disso, esta pesquisa tem um impacto direto sobre a minha vida como professor/pesquisador, pois me permitiu uma maior aproximação entre os campos pesquisa-ensino. Nesse sentido, esta pesquisa contribui sobremaneira para a formação da minha identidade docente. Reiteramos o potencial da nossa pesquisa em dialogar com a literatura existente, contribuindo para o avanço do campo de estudos e inserindo-se em um mosaico de pesquisas que abordam temáticas semelhantes.

2.2 Metodologia e Procedimentos Metodológicos

Parte-se da premissa de que a metodologia é um componente fundamental de qualquer pesquisa, pois fornece a estrutura que orienta a coleta e a análise de dados. Nesse sentido, este capítulo tem como objetivo apresentar os métodos e as abordagens adotadas para investigar o estudo dos sólidos por meio da Realidade Aumentada com a calculadora tridimensional *GeoGebra*. Desse modo, este capítulo delineará as estratégias metodológicas utilizadas, incluindo as técnicas de coleta de dados e análise, visando garantir a validade e a confiabilidade dos resultados obtidos.

A metodologia desta pesquisa é a abordagem qualitativa, pois, como pontuamos, o problema de pesquisa nasceu a partir de observações da prática em sala de aula. Nesse sentido, nos guiamos à luz do entendimento de Minayo (2002, p. 15), que, em sua obra "Pesquisa Qualitativa: Teoria, Método e Criatividade", traz a seguinte observação sobre o tema: "Para compreender a complexidade dos fenômenos sociais, a pesquisa qualitativa oferece um espaço privilegiado de escuta e interpretação das vozes dos sujeitos" (p. 15). Essa perspectiva enfatiza a importância

de ouvir e interpretar as experiências e significados atribuídos pelos participantes, assim, permitindo uma análise profunda e contextualizada das realidades sociais.

Minayo (2002) pontua, ainda, que, muitas vezes, os problemas de pesquisa surgem de lacunas relacionadas à prática. Nesse viés, a autora destaca:

É a pesquisa que alimenta a atividade de ensino e a atualiza frente à realidade do mundo. Portanto, embora seja uma prática teórica, a pesquisa vincula pensamento e ação. Ou seja, nada pode ser intelectualmente um problema, se não tiver sido, em primeiro lugar, um problema da vida prática. As questões da investigação estão, portanto, relacionadas a interesses e circunstâncias socialmente condicionadas (p.17).

Em suma, optamos por adotar uma abordagem qualitativa, que se justifica pela necessidade de captar a riqueza e a subjetividade das experiências vividas pelos educandos envolvidos no fenômeno em questão. A pesquisa foi conduzida por meio de uma sequência didática com a calculadora tridimensional *GeoGebra* para o estudo dos sólidos por meio da Realidade Aumentada em uma turma de 2º ano do Ensino Médio do Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães, localizado em Guanambi, o que possibilitou um diálogo aberto e flexível, permitindo que os alunos utilizassem a Realidade Aumentada durante as aulas.

Um dos pontos importantes durante a aplicação da sequência didática foi a observação participante, em que o professor e os alunos estavam juntos ao longo de todo o processo. Nesse sentido:

A técnica de observação participante se realiza através do contato direto do pesquisador com o fenômeno observado para obter informações sobre a realidade dos atores sociais em seus próprios contextos. A observação, enquanto parte do contexto de observação, estabelece uma relação face a face com os observados. Nesse processo, ele, ao mesmo tempo, pode modificar e ser modificado pelo contexto. A importância dessa técnica reside no fato de podermos captar uma variedade de situações ou fenômenos que não são obtidos por meio de perguntas, uma vez que, observados diretamente na própria realidade, transmitem o que há de mais imponderável e evasivo na vida real (Minayo, 2002, p. 60).

Após o desenvolvimento da sequência didática, optamos por aplicar um questionário fechado. Tal procedimento metodológico fez-se necessário para saber se os alunos acharam essa metodologia de ensino inovadora e capaz de sanar as dificuldades na aprendizagem da Geometria. A sequência didática aplicada encontra-

se nos apêndices desta dissertação, e lá explicamos detalhadamente como se deu a aplicação desse produto educacional.

Através dessa metodologia, foi possível compreender não apenas as experiências individuais dos alunos, mas também as dinâmicas em grupos na sala de aula durante a aplicação das atividades e questionários. Assim, a pesquisa qualitativa se revela uma ferramenta poderosa para explorar e compreender a complexidade das relações humanas, sociais e interações na sala de aula. Com isso, avançamos para a realização das análises e o registro desta pesquisa por meio deste estudo.

Nossa pesquisa foi focada em uma turma de 36 alunos com faixa etária entre 15 e 17 anos. Foi observado que todos esses alunos tinham contato direto com a tecnologia, e isso facilitou a aplicação de nossa sequência didática. Apesar de o público-alvo ter acesso à tecnologia, foi observado que os mesmos não tinham conhecimento sobre o aplicativo *GeoGebra*. Entretanto, isso não gerou estranhamento por parte dos alunos, pelo contrário, gerou mais expectativa e empolgação diante do novo.

Nossos procedimentos metodológicos constam de algumas etapas, tais como levantamento de uma literatura que abordava a temática estudada, aplicação da sequência didática, observação participante do professor, coleta de dados através das atividades propostas na sequência didática, aplicação dos questionários e coleta de dados nos mesmos e, por fim, problematização dos dados e escrita final do texto da dissertação.

As temáticas relacionadas à Geometria Espacial e o uso da calculadora Tridimensional *GeoGebra* são frequentes nos estudos no campo da Matemática. Dessa forma, o capítulo a seguir foca em explanar um pouco desses trabalhos, a fim de contribuir na problematização do nosso tema.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Essa revisão de literatura traz, inicialmente, autores que analisam e discutem questões sobre o estudo dos sólidos por meio da Realidade Aumentada, bem como o uso da calculadora tridimensional *GeoGebra* 3D. Assim, fizemos uma pesquisa bibliográfica, fundamentada em ideias e pressupostos de teóricos que apresentam significativa importância na definição e construção dos conceitos discutidos nesta análise: Realidade Aumentada, *GeoGebra*, Geometria Espacial.

Especificamos um total de 14 trabalhos, entre dissertações (D) e teses (T), que tratam do ensino ou da aprendizagem utilizando os temas que encabeçam esse trabalho. Em busca realizada no Banco de Teses e Dissertações da PROFMAT, localizamos 14 pesquisas, entre dissertações e teses, findadas entre os anos de 2014 e 2024, com as seguintes palavras-chave: "Realidade Aumentada, *GeoGebra*, Geometria Espacial". Desse total, refinamos nossa busca e mapeamos quinze trabalhos realizados na área de Ensino da Matemática em que o uso da calculadora *GeoGebra* foi o foco de investigação. No entanto, peneirar os trabalhos a serem avaliados foi uma tarefa árdua, pois, entre diversas produções, elencar as que mais se adequassem à nossa pesquisa requereu momentos importantes de filtragem. A esse respeito, Ramos et al. (2014) afirmam ser de extrema importância "[...] procurar definir critérios, métodos precisos e sistemáticos, por forma a identificar e selecionar as fontes bibliográficas com o máximo rigor, grau de eficiência e confiança no trabalho desenvolvido" (Ramos et al., 2014, p. 20).

À luz desse entendimento, localizamos e escolhemos alguns trabalhos pelo título, ou seja, separamos aqueles que tratavam das palavras-chave supracitadas, ou da Matemática no Ensino Médio, pois, mesmo refinando essa busca no banco de teses, eventualmente apareceram trabalhos que não contemplavam o foco de interesse deste estudo. Portanto, acessamos os resumos desses textos para identificar os que mais se aproximavam de nossos interesses: que abordam o ensino ou a aprendizagem. Assim, apresentamos no Quadro 1 o nome do autor, o título e a classificação de 15 trabalhos (dissertação ou tese) oriundos desse mapeamento, ou seja, que se aproximaram de nossos interesses. Referem-se às pesquisas de: Barros (2024), Souza (2023), Mendes (2020), Oliveira (2021), Souza (2017), Souza (2014), Lima (2021) e Souza (2020).

Quadro 1 - Lista dos trabalhos analisados

Ano	Autor	Título	Tipo
2024	FRANCISCO MIRANDA BARROS	O USO DO <i>GEOGEBRA</i> COMO PROPOSTA DE INTERVENÇÃO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO	D
2023	IVANILDO FERNANDES DE SOUSA	SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PRISMAS E PIRÂMIDES COM O MÉTODO DE GEORGE POLYA E SOFTWARE <i>GEOGEBRA</i> 3D	D
2020	CLÁUDIO JOSÉ MENDES	O USO DO <i>GEOGEBRA</i> 3D NO ENSINO DE GEOMETRIA	D
2021	ODAILSON GONÇALVES DE OLIVEIRA	O USO DO <i>GEOGEBRA</i> 3D COM REALIDADE AUMENTADA NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL	D
2017	GABRIEL MORENO FERREIRA DE SOUZA	USO DO <i>GEOGEBRA</i> 3D NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL	D
2014	LOANA ARAUJO SOUZA	UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL USANDO O <i>GEOGEBRA</i> 3D	D
2021	RODRIGO MALAN LOUREIRO LIMA	O USO DA REALIDADE AUMENTADA NO ENSINO DE PRISMAS: UM REFERENCIAL DIDÁTICO PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO	D

2020	JAIME BATISTA DE SOUZA	SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS COM REALIDADE AUMENTADA COMO AUXÍLIO PARA DESENVOLVER A HABILIDADE DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL	D
2018	ELANIA HORTINS DANTAS	USO DA REALIDADE AUMENTADA NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL	D
2021	GLEDSON NILTON EMILIANO	PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO “SOFTWARE” GEOGEBRA NO ENSINO MÉDIO COM A CONSTRUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE SECCÕES EM SÓLIDOS GEOMÉTRICOS PARA A DETERMINAÇÃO DE VOLUMES PARCIAIS	D
2021	FERNANDO NASCIMENTO MARTINS	UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DA PLANIFICAÇÃO DE POLIEDROS NO ENSINO BÁSICO UTILIZANDO O RECURSO DE REALIDADE AUMENTADA DO GEOGEBRA	D
2023	SILVIO LUIZ GOMES DE AMORIM	A UTILIZAÇÃO INTEGRADA DA REALIDADE AUMENTADA COM O SOFTWARE GEOGEBRA NA PERSPECTIVA DA APRENDIZAGEM MÓVEL DE GEOMETRIA ESPACIAL	D
2015	JEFFERSON SILVA FRANÇA	UMA PROPOSTA DIDÁTICA DA REALIDADE AUMENTADA NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL	D
2012	LILIANE ROSE REFATTI	UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	D

Fonte: Dados da Pesquisa

Através das produções elencadas no Quadro 1, descreveremos os aspectos relacionados às questões de pesquisa, aos objetivos, aos referenciais teóricos, às metodologias, aos sujeitos da pesquisa e às considerações feitas pelos autores a respeito dos resultados obtidos.

Identificamos, nos 14 trabalhos selecionados, que algumas pesquisas se fundamentam nos diversos pontos explorados nesse trabalho. Barros (2024) expõe que, no ensino atual da Matemática, uma das maiores preocupações nas escolas

públicas, que já apresentam inúmeros problemas, é com a aprendizagem atrelada às avaliações externas, e quanto mais os alunos apresentam dificuldades e não as externam, maiores serão os resultados negativos, sugerindo a necessidade de repensar o ensino. Portanto, defende que, para que haja melhorias, faz-se necessário um maior envolvimento de professores e alunos com o desenvolvimento de atividades lúdicas na área da matemática, dando ênfase na utilização do lúdico, sendo a calculadora *GeoGebra* uma alternativa possível nesse sentido.

"Os procedimentos desenvolvidos, por meio da implementação das atividades, em que houve a aplicação do lúdico, permitiram que os alunos avançassem em seus níveis de evolução de aprendizagem" (Barros, 2024, p. 44). O pesquisador ressalta que o uso da tecnologia com seus educandos foi favorável, uma vez que observou pontos positivos na percepção dos alunos para uma metodologia nova e abrangente entre conceitos e a geração de ideias. "Com a análise dos dados encontrados, foi possível salientar que o uso da tecnologia é positivo e motiva o aprendizado" (Barros, 2024, p. 44). Em suas considerações finais, Barros (2024) afirma que a interação entre os estudantes e o software escolhido proporcionou infinitas possibilidades para a abordagem do conteúdo estudado. Em sua pesquisa, conclui-se que a calculadora *GeoGebra* tornou-se uma aliada na aprendizagem, e nesse sentido facilitou a interação entre conteúdo e prerrogativas do ensino matemático.

Em consonância com o tema, trazemos também o trabalho de Souza (2023), que propõe uma sequência didática como forma de intervenção no estudo de dois tópicos da geometria espacial: prismas e pirâmides. O pesquisador utiliza o método de resolução de problemas, segundo Polya (2006), para resolução de problemas envolvendo cálculos de área e volume de prismas e pirâmides com auxílio do aplicativo Calculadora *GeoGebra* 3D e sua função Realidade Aumentada.

Souza (2023) defende que a resolução de problemas é benéfica ao aluno, pois permite desenvolver o raciocínio lógico, "pois, diferente das questões que se resolvem apenas aplicando fórmulas pré-definidas, requer interpretação e entendimento da situação para se criar uma estratégia de solução" (Souza, 2023, p. 65). Em suas considerações finais, exalta a importância de se apropriar das novas tecnologias nas aulas de matemática, sendo a metodologia aplicada uma forte ferramenta que trabalha o gerenciamento das informações, instigando e despertando o interesse dos estudantes no desenvolvimento da inteligência e trazendo conexões significativas no âmbito da sala de aula. "O uso de novas tecnologias no ensino de matemática deve

ser utilizado sempre que possível, pois poderá instigar a participação e o interesse dos estudantes durante as aulas" (Souza, 2023, p. 71).

Mendes (2020) apresentou sua dissertação envolvendo também o uso da calculadora *GeoGebra*. Sua pesquisa, intitulada "O uso do *GeoGebra* 3D no ensino da geometria", foi fundamentada no uso do *software* citado como facilitador do ensino. Estabeleceu-se como objetivo utilizar o recurso tecnológico na idealização de uma proposta para o ensino da Geometria, sob a perspectiva de ampliar ideias e oferecer mais um subsídio para as aulas. Nesse sentido, construiu uma proposta metodológica com sugestão de aula, com a pretensão de contribuir e acrescentar aprendizagem para a sala de aula mais conectada. Nas palavras do autor: "O professor mediador (devidamente preparado) fará a exposição corriqueira do seu conteúdo, lembrando que agora terá a tecnologia para auxiliá-lo e complementar a sua prática" (Mendes, 2020, p. 85).

Oliveira (2024) corrobora com este estudo, uma vez que o objetivo principal do autor em sua pesquisa é investigar quais são as contribuições do uso do aplicativo Calculadora Gráfica *GeoGebra* 3D, com RA (Realidade Aumentada), para o estudo de sólidos geométricos. Nesse viés, construiu uma proposta metodológica, aplicando-a aos acadêmicos do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa. Sobre a aplicação das atividades, encontrou alguns percalços, como, por exemplo, o fato de que, entre os sete participantes, apenas quatro poderiam realizar as tarefas munidos do aplicativo com RA em seus próprios aparelhos, os outros três participantes utilizaram apenas a versão 3D do mesmo, uma vez que seus aparelhos não suportavam a RA. Explica que "A incompatibilidade dos aparelhos com a RA está diretamente ligada com o aparato de hardware de cada dispositivo" (Oliveira, 2024, p. 67). Isso acaba encarecendo a tecnologia e, desse modo, cerceia o acesso de alunos menos afortunados economicamente.

No entanto, logrou êxito referente ao aplicativo Calculadora Gráfica *GeoGebra* 3D, relatando que foi bem aceito pelos participantes, que o qualificaram positivamente nas atividades desenvolvidas.

(...) pode-se observar que, após a realização da oficina, a maioria dos participantes manifestou uma compreensão mais efetiva dos conteúdos abordados. A começar pelo estudo do volume de um sólido geométrico, que se observou um enriquecimento do significado desse conceito para eles, o qual passou a envolver elementos visuais e algébricos de forma mais

equilibrada. Após a realização das experiências em RA, observou-se também que os participantes demonstraram ter compreendido a ideia de volume de um sólido como sendo o espaço ocupado por ele. Constatou-se, nas respostas dos questionários, que eles passaram a perceber que o valor obtido no processo algébrico representa o número de unidades de volume que preenchem o espaço ocupado por este sólido, não sendo apenas o resultado de uma operação matemática entre suas medidas. Observou-se também, que eles passaram a compreender melhor o Princípio de Cavalieri, e a perceber sua aplicabilidade no cálculo do volume de prismas (Oliveira, 2024, p.105).

O autor ainda apresenta outros pontos positivos, como versa no trecho a seguir:

Observou-se também, que o uso do aplicativo permitiu que os alunos agissem com mais autonomia na abordagem dos conteúdos. Durante a aplicação da proposta didática, se observou que eles exploraram as construções geométricas, interagindo com elas em RA, e conseguiram obter, por meio de sua própria ação, inúmeras representações visuais das construções que lhes permitiram observar de diferentes formas as propriedades aplicadas. Com isso, se percebeu ainda que o aplicativo contribuiu para que os alunos melhorassem suas habilidades de compreensão das construções geométricas tridimensionais (Oliveira, 2024, p.105).

Nesse sentido, Oliveira (2024) concluiu, destacando que o uso do aplicativo proporcionou momentos de aprendizagem bastante atrativos para os participantes de sua pesquisa. Ele expressa também o seu desejo de continuar seu trabalho, fazendo as adaptações necessárias, e considera aplicá-lo em uma turma de ensino médio: "(...) elaborar e aplicar uma nova proposta didática envolvendo conteúdos relacionados a noções primitivas de geometria espacial e de posição, que também são abordados no segundo ano do ensino médio" (Oliveira, 2024, p. 107).

Ainda em nossas pesquisas no PROFMAT, mapeamos o expressivo trabalho de Fontes (2018), intitulado "Utilização Lúdica do *Software GeoGebra 3D* Como Ferramenta Facilitadora no Ensino e Aprendizagem de Geometria Espacial". Tal pesquisa revela o propósito de ressaltar a importância do uso de *softwares* e recursos de materiais alternativos no processo de ensino-aprendizagem, essencialmente na disciplina de matemática, no ensino da Geometria Espacial. Fontes (2028) relata, em seus escritos, que o principal objetivo de seu estudo foi desenvolver competências necessárias aos alunos, fazendo a aplicação de cinco atividades com utilização direta do *software GeoGebra 3D* como base metodológica principal. Nas palavras do autor: "Nessas atividades, o uso do programa foi explorado em uma perspectiva de aperfeiçoamento e superação das dificuldades de aprendizagem encontradas nos estudos das figuras geométricas tridimensionais" (Fontes, 2028, p. 125).

Através da realização de uma pesquisa de campo com a turma 3001 do Terceiro ano do Ensino Médio do Instituto Federal Fluminense – IFF do campus

Centro, localizado em Campos dos Goytacazes, no Estado do Rio de Janeiro, o pesquisador analisou a utilização do *software GeoGebra 3D* no processo investigativo da resolução de problemas e concluiu que a realização das quatro atividades aplicadas contribuiu para uma aprendizagem significativa.

Assim na Atividade 1, foram abordados conceitos relacionados às características dos sólidos geométricos, além de conceitos relacionados às dimensões. Na Atividade 2, foram abordadas algumas planificações visuais de sólidos tridimensionais, incluindo os cinco sólidos platônicos. Na atividade 3, foram trabalhados conceitos relacionados às superfícies cilíndricas e cônicas a partir de uma geratriz, e cilindros e cones de revolução. Na atividade 4, primeiramente foram transmitidos os conceitos sobre polígonos regulares, e em seguida, analiticamente foram trabalhados relações e deduções lúdicas de fórmulas de áreas e volumes de prisma, pirâmide, cilindro e cone. E por fim, na Atividade 5, foi proposto de forma lúdica um passo a passo para obtenção da fórmula do volume da esfera utilizando o Princípio de Cavalieri (Fontes, 2018, p. 126).

Ao final, Fontes (2028) expressa seu contentamento com os resultados obtidos e vê com bons olhos o envolvimento entre a tecnologia, a aprendizagem matemática e, em especial, da Geometria Espacial: "(...) um despertar no interesse por parte dos discentes, aguçando suas curiosidades e desenvolvendo habilidades muitas vezes não exploradas quando os conteúdos são abordados sem uso destes recursos" (Fontes, 2018, p. 126).

Ainda sobre o uso do *software GeoGebra 3D*, com a finalidade de maior compreensão, debruçamo-nos sobre o trabalho de Souza (2014), intitulado "Uma proposta para o ensino da geometria espacial usando o *GeoGebra 3D*". Datado no ano de 2014, trata-se de um estudo mais antigo. No entanto, os esclarecimentos da pesquisadora são de grande valia, pois antecedem e confirmam alguns argumentos já apresentados nos trabalhos citados anteriormente. Sua escrita sugere o uso do *software GeoGebra 5.0*, versão beta, como recurso facilitador para o estudo da geometria espacial. Argumenta que o *software* em questão aparece como uma nova estratégia para diminuir as dificuldades de visualização geométrica, assim como as propriedades especificamente do cubo, da pirâmide, do cilindro e da esfera.

É possível perceber através das respostas dos alunos e nas conversas com a professora, que os alunos da turma onde o *software* foi utilizado nas aulas de geometria espacial, sentiram-se satisfeitos, bem a vontade no ambiente do laboratório de informática, além de ter sido despertada a curiosidade de experimentar e buscar novas construções e visualizações. Nota-se ainda, diante dos relatos e observação, que os objetivos do trabalho tiveram êxito não só na turma escolhida para aplicação do *software*, mas também nas outras turmas de segundo ano e também nas de terceiro, uma vez que os comentários em relação a experiência vivenciada pelos alunos do segundo

ano C se espalharam pelos corredores da escola, fazendo com que os educandos passassem a pedir aos seus professores que o programa também fosse apresentado e trabalhado em suas respectivas turmas. Portanto, é perceptível que quando bem planejado e elaborado, inserir as tecnologias nas aulas de geometria espacial, especificamente o uso de GeoGebra 5.0 versão beta, surge como uma solução a mais no ambiente escolar com o intuito de aumentar o interesse por parte dos alunos e suprir lacunas algumas vezes deixadas dependendo da forma de como o conteúdo foi exposto, de uma maneira atrativa, dinâmica e fazendo uso de um ambiente tão presente em nosso cotidiano e que pode levar os alunos a serem protagonistas do seu próprio conhecimento (Souza, 2014, p.60).

Neste trabalho, optamos por utilizar o *GeoGebra 3D*, que é um *software* mais sofisticado comparado aos anteriores. No entanto, o trabalho de Souza (2014), ainda que pertença ao ano de 2014 e faça menção a uma tecnologia que já superamos, merece ser exaltado. Aferimos que a vontade de unir o ensino da matemática com a tecnologia é algo que muitos professores partilham há alguns anos. Eis o motivo de unir esforços e somar forças através de pesquisas como estas, que trazem à tona resultados materiais para a sociedade. Pois, quando a classe estudantil ganha, toda a sociedade vence.

Dito isso, falaremos também sobre a sequência didática e a realidade aumentada, de Souza (2020), na pesquisa "Sequências didáticas com realidade aumentada como auxílio para desenvolver a habilidade de visualização espacial". O trabalho apresentou uma pesquisa bibliográfica e qualitativa referente ao uso do recurso de Realidade Aumentada (RA), aplicado no ensino de matemática, tendo como principal objetivo a busca pelo desenvolvimento das habilidades de visualização espacial dos alunos dos cursos de Ciência e Tecnologia (BC&T), Licenciatura em Matemática e Engenharia Civil da UFVJM, Campus do Mucuri.

Os resultados desse estudo mostraram que existe uma forte tendência de aumento da utilização de Realidade Aumentada, seja para fins educacionais, comerciais ou de entretenimento. O autor cita como exemplo a plataforma *Google*, que oferece o recurso de realidade aumentada combinado com navegação através do aplicativo *Maps*. Sobre as sequências didáticas, recomenda que:

Quanto à aplicação das sequências didáticas, vale ressaltar a possibilidade de surgirem alguns problemas como, por exemplo, incompatibilidade dos softwares e apps com as plataformas dos dispositivos utilizados. Antes de aplicar as sequências é recomendado que o docente se certifique quais requisitos os recursos computacionais exigem para o bom funcionamento, bem como, se os estudantes possuem dispositivos compatíveis. Por isso, a estratégia de realizar as atividades em grupo pode minimizar estes problemas. Além disso, é fundamental que o docente se aproprie de ferramentas pedagógicas e provoque o aluno a ser protagonista do seu

próprio aprendizado. As propostas de sequência didática apresentadas neste trabalho servirão de base para elaboração de outras atividades de ensino, utilizando os recursos computacionais apresentados aqui, e coletando dados para avaliar a eficiência destes recursos no processo de ensino e aprendizagem (Souza, 2020, p.61).

O autor concluiu ressaltando a esperança de que professores abracem as ideias apresentadas e as usem como base para outros trabalhos que possuam a mesma problemática.

Assim como Souza (2020), Lima (2021) utilizou a realidade aumentada e a proposta de um referencial didático no desenvolvimento de seu estudo. Sua dissertação "O uso da realidade aumentada no ensino de prismas: um referencial didático para professores do ensino médio" teve como principal objetivo apresentar um referencial didático para o ensino de Geometria no Ensino Médio, por meio da utilização da RA como recurso do *software GeoGebra*. Cabe dizer que uma das dificuldades encontradas por ele em sua pesquisa foi o referencial teórico-prático escasso, o que demonstra a relevância de tal estudo para a área da matemática. Assim, o intuito do trabalho foi colocar à disposição um referencial didático para professores do Ensino Médio que queiram implementar a utilização da Realidade Aumentada para o ensino de prismas nas aulas de Geometria. O autor fez uma busca na literatura a fim de compreender o papel da Geometria na formação do jovem e sua inserção no mundo do trabalho. Finaliza ressaltando a importância do uso da tecnologia no ensino: "a tecnologia não é apenas objeto de estudo, mas instrumento que serve para a compreensão e transformação do mundo" (LIMA, 2021, p. 45).

O trabalho "Uso da realidade aumentada no ensino da geometria espacial" de Dantas (2018) apresenta um significativo estudo sobre o uso de novas tecnologias no ensino da Matemática, em especial, o uso de Realidade Aumentada como ferramenta para auxiliar no ensino da Geometria Espacial. Sua pesquisa foi realizada e aplicada no Instituto Federal do Rio Grande do Norte – Campus Caicó, com uma turma do 3º ano do curso Integrado de Informática, explorando uma aula sobre os Sólidos Geométricos através da Realidade Simulada. No trecho adiante, a autora ilustra a reação da turma com a tecnologia utilizada na exposição dos sólidos geométricos em 3D.

Percebeu-se a partir da aplicação do projeto, que os alunos se mostraram envolvidos e surpresos com a novidade desta tecnologia na exposição do conteúdo. O projeto apresentou-se como um recurso didático atrativo, demonstrando um bom auxílio na aprendizagem dos alunos (DANTAS, 2018, p.69).

A autora evidencia o uso da realidade aumentada como ferramenta eficiente para o uso da tecnologia no âmbito escolar e na construção de saberes, sendo um recurso didático inovador que auxilia tanto o aluno quanto o professor. Sob esse aspecto, ela explana:

(...) ela se mostra como uma opção de recurso didático inovador e que causa interatividade e dinamicidade aos conteúdos trabalhados, que é um problema enfrentado por grande parte dos docentes, tendo em vista que o material didático que dispõem nem sempre supre essa necessidade, tampouco a construção das aprendizagens esperadas. Para os alunos, as vantagens vão desde a possibilidade de eles mesmos serem o agente criador de seu próprio conhecimento, até a interação com o recurso didático, a facilitação de visualização em 3D, numa compreensão consistente das competências das quais se apropriam (DANTAS, 2018, p.75).

Como resultado de pesquisa, de acordo com a autora, a Realidade Aumentada se torna um importante recurso pedagógico, "assumindo um papel inovador e dinâmico no ensino da Matemática e de outras disciplinas, favorecendo o processo ensino e aprendizagem, construído pelo aluno ativo nesse processo" (DANTAS, 2018, p.75).

Em nossas buscas, sob o termo "Estudo dos Sólidos", encontramos a dissertação "Proposta de utilização do *software GeoGebra* no ensino médio com a construção e exploração de seções em sólidos geométricos para a determinação de volumes parciais", do pesquisador Emiliano (2021). Ele começa seus escritos explanando sobre um problema comum em muitas salas de aula, segundo o autor, o professor utiliza-se de uma superfície plana para apresentar os elementos geométricos em figuras tridimensionais, sendo forçado a desenhar tais elementos, que, por ser em uma superfície plana, ficam deformados para se ter uma visão/noção de profundidade.

Com essa problemática, o autor tem como objetivo apresentar uma proposta metodológica que facilite a didática que envolva tanto a visualização como a interpretação de figuras tridimensionais em aula, valendo-se do *software GeoGebra*. O pesquisador, em seu estudo, apresenta "uma proposta com sequência didática propícia ao ensino de sólidos geométricos e seções planas que podem ser aplicados para alunos do Ensino Médio" (Emiliano, 2021, p.27). Sendo favorável ao uso do *GeoGebra*, tece em seu texto final vários benefícios de se usar o *software* no ensino do Estudo dos Sólidos.

Usando o GeoGebra é possível criar segmentos relacionados ao sólido e à secção, de forma a termos figuras geométricas conhecidas, as quais podem ser exploradas para gerar problemas matemáticos para determinação de distâncias, áreas e até mesmo volumes parciais. Cabe ao professor, saber explorar a construção, aplicar as propriedades dos triângulos semelhantes, teorema de Pitágoras e/ou trigonometria no triângulo retângulo para que possa iniciar e aguçar o interesse dos alunos sobre o uso e conhecimento que podem obter ao usar o GeoGebra (Emiliano, 2021, p.84).

Ao final, o autor demonstra satisfação com os resultados encontrados e faz um discurso categórico sobre a importância de se usar ferramentas tecnológicas nas aulas de matemática.

Não me resta dúvidas, após mais de vinte anos em sala, o quanto é importante que tenhamos um conhecimento muito além daquilo que é apresentado aos nossos alunos, para que possamos conceber, formar e construir o conhecimento matemática com nossos alunos, tendo nós, os professores, maior motivação, mais confiança, mais humildade e mais atenção à formalidade dos conceitos matemáticos, mostrando como essa ciência é construída e como a sua realidade está atualizada com ferramentas tecnológicas (Emiliano, 2021, p.86).

O trabalho "Uma proposta de abordagem da planificação de poliedros no ensino básico utilizando o recurso de realidade aumentada do *GeoGebra*", de Martins (2021), discute a importância da capacidade de resolver problemas não apenas na aprendizagem escolar, mas também para solucionar adversidades do cotidiano. O estudo propõe apresentar atividades utilizando o *software* Calculadora Gráfica *GeoGebra* 3D de Realidade Aumentada para suprir as dificuldades dos alunos na resolução de problemas relacionados à visualização de poliedros e suas planificações. As propostas são direcionadas aos educadores que lecionam Geometria por meio de tecnologias digitais, utilizando a Geometria Espacial como recurso facilitador no aprendizado dos estudantes.

Acredita-se que a beleza estética dos poliedros e suas planificações despertam interesse dos professores para seu trabalho em sala de aula e, em relação aos alunos, a motivação para estudar Matemática. De uma forma geral, as aulas de Matemática ocorrem em um espaço onde o aluno deve apenas reproduzir aquilo que o professor está fazendo ou falando. A proposta aqui apresentada prioriza a criatividade, a argumentação, a descoberta, o questionamento e o raciocínio (Martins, 2021, p. 44).

Dessa maneira, o autor afirma, em suas conclusões, que o estudo pode contribuir de forma significativa para a formação do professor, tanto no processo metodológico quanto no teórico, bem como para o aluno, no aperfeiçoamento de suas habilidades e competências em Matemática.

Nesse sentido, inclui-se o entendimento de Amorim (2019): “A utilização integrada da realidade aumentada com o *software* GeoGebra na perspectiva da aprendizagem móvel de geometria espacial”. O autor relata:

(...) a partir de nossa pesquisa acadêmica realizada, percebemos que há a necessidade de pesquisas futuras que tragam mais subsídios e benefícios para a aplicação em nosso contexto escolar e tecnológico, para que possamos debater, utilizar e aprender, juntamente com nossos alunos, as formas de dinamizar os conhecimentos matemáticos e dar suporte àqueles que, por ventura, apresentem mais dificuldades de adaptação à realidade presente nas tecnologias educacionais disponíveis (Amorim, 2023, p. 109).

Corroborando com esse pensamento o estudo de França (2015), intitulado “Uma proposta didática da realidade aumentada no ensino da geometria espacial”. Aliado à temática difundida nesse estudo, o trabalho apresenta uma proposta para tentar driblar as dificuldades que muitos alunos enfrentam para visualizar objetos tridimensionais, geralmente abordados em aulas de geometria espacial. Direcionada tanto para professores quanto para alunos, tal proposta versa sobre Realidade Aumentada e Realidade Virtual.

O autor leva em consideração que a maioria dos usuários possui pouco ou quase nenhum conhecimento de programação de computadores e cita os aplicativos *ARToolKit* e *FLARAS* como ferramentas para a criação de aulas sobre sólidos geométricos. Alguns exemplos são apresentados, sugerindo ao professor a criação, animação e projeção de figuras tridimensionais desenvolvidas pelo próprio docente para suas aulas. No fechamento de sua linha de raciocínio, o autor afirma que a “Realidade Aumentada pode e deve ser usada em sala de aula e que ela é uma ferramenta potente e bastante viável, capaz de mudar a visão das pessoas sobre a geometria, em especial a geometria espacial.” (França, 2015, p. 51).

Ainda nesse panorama, tem-se a escrita de Santos (2015), com o seguinte título: “Realidade aumentada aplicada ao ensino de geometria espacial: um desafio para a educação matemática”. Em suas observações, o autor pondera sobre a existência de certa dificuldade, por parte dos alunos, na compreensão de figuras geométricas espaciais. Verifica-se, também, essa dificuldade entre professores no sentido de tornar esse entendimento plausível, principalmente quando tais representações ocorrem em um cenário bidimensional. No entanto, faz a seguinte ressalva:

Por outro lado verifica-se que a realidade aumentada, quando bem utilizada, seguindo as indicações demonstradas nesse trabalho e contando com a criatividade do professor em aproveitar o máximo de recursos disponíveis pela biblioteca ARToolKit e pela ferramenta FLARAS2, torna-se uma ferramenta poderosa para amenizar o impasse em visualizar objetos 3D, onde através da visualização é possível percorrer todos as perspectivas possíveis, explorando vértices, arestas e faces em poliedros, bem como as lacunas resultantes da intersecção de dois ou mais objetos, sendo pelo menos um deles tridimensional (Santos, 2015, p. 67).

Assim como nas citações anteriores, o autor considera que a utilização da realidade aumentada no âmbito escolar torna-se uma ferramenta viável para propiciar um aprendizado eficiente no ensino de Geometria Espacial.

Para finalizarmos nossas buscas, encontramos, na Biblioteca de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), o trabalho de Refatti (2012), intitulado “Uma Sequência Didática para o Estudo de Transformações Geométricas”. Compreendemos que, por meio de seu estudo, a autora investigou as contribuições da metodologia de conceitos matemáticos em conjunto com os *softwares* GeoGebra e Cabri 3D para a compreensão do conceito de transformação geométrica, em uma turma do curso de Licenciatura em Matemática.

A autora indagou se os ambientes de Geometria Dinâmica promovem o desenvolvimento das competências geométricas dos alunos, se a interação propiciada pelos *softwares* auxilia no processo de construção do conhecimento relativo às transformações geométricas e como os alunos se apropriam das ferramentas e/ou recursos do GeoGebra e do Cabri 3D na aprendizagem do conteúdo de transformações geométricas. Ainda que o estudo tenha sido realizado com uma turma de licenciatura, sua leitura nos permitiu traçar comparativos e perceber semelhanças, uma vez que o intuito de ambos é verificar o uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica.

Coloca-se em evidência que os trabalhos citados permitiram uma maior problematização do objeto de estudo. Dessa forma, além de fornecer base teórica para a pesquisa em questão, tornou-se evidente o quanto as questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática geram preocupação entre os estudiosos do campo da Educação Matemática. Para além dessas questões, os estudos mostraram o quanto os docentes estão cada vez mais receptivos ao uso das tecnologias em suas aulas.

A maior parte dos estudos citados trouxe à tona o impacto positivo do uso das tecnologias de Realidade Aumentada e de como elas contribuem para uma melhor compreensão de temas do campo da Matemática. Além disso, evidenciaram que a sequência didática é um recurso metodológico que vem sendo adotado por outros professores em suas práticas cotidianas de sala de aula. Nesse sentido, esses estudos reforçaram a importância de nos debruçarmos sobre tais temáticas e de compreender como os campos da pesquisa e do ensino estão interligados.

Quando nos deparamos com essa vasta literatura sobre a temática, percebemos que a preocupação em sanar dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática por meio da tecnologia vem ganhando cada vez mais adeptos no campo da Educação Matemática. Além disso, o uso desses recursos tecnológicos permite uma melhor transposição didática dos temas propostos em sala de aula, resultando em alunos mais críticos e capazes de perceber o quanto os conceitos matemáticos permeiam sua própria realidade.

Em resumo, as reflexões propostas por esses estudos mostram que essa temática se mantém atual e que o professor-pesquisador deve estar atento às mudanças do tempo presente, buscando sempre atualizar suas metodologias de ensino. Dessa forma, reiteramos nosso desejo de trazer os resultados da pesquisa para nossa prática em sala de aula e de não restringi-los apenas ao campo acadêmico, pois acreditamos que teoria e prática devem caminhar juntas sempre.

Assim, passamos ao próximo capítulo, no qual apresentamos algumas reflexões em relação ao ensino da Matemática.

4 A MATEMÁTICA E O ENSINO

4.1 A Matemática no Contexto Escolar

Primeiramente, faz-se necessário compreender como a Matemática é vista atualmente. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), o documento normativo que rege a Educação Básica no Brasil, a Matemática atua como mediadora em diversas áreas do conhecimento, propondo que os educandos desenvolvam uma série de competências ao longo da vida escolar, denominadas habilidades. À medida que os alunos vão adquirindo tais habilidades, espera-se que compreendam os processos matemáticos.

A Matemática possui papel de destaque na construção dos alicerces que moldarão o indivíduo a se tornar um ser pensante, por meio do raciocínio matemático, com suas conjecturas e abstrações. Cabe ressaltar o quão significativa e bela é a Matemática em sua essência. Parafraseando a frase atribuída ao pai da ciência moderna, Galileu Galilei: “A Matemática é a linguagem com a qual Deus escreveu o universo”. A Matemática capacita os alunos, desde o ensino fundamental até o ensino médio, e ao longo de suas vidas, a compreender os desafios da humanidade na contemporaneidade.

Encontramos na BNCC o seguinte entendimento:

(...) Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 265).

A importância da Matemática se expressa em várias situações do dia a dia, além de facilitar a vida em sociedade. A partir dessa premissa, é primordial fazer com que os alunos entendam a relação entre a Matemática aplicada em sala de aula e seu cotidiano, visto que é essencial, para os processos de ensino e aprendizagem, estabelecer essa associação.

Nesse raciocínio, Bicudo (1999) destaca que as novas propostas pedagógicas têm mostrado sensibilidade diante das questões que envolvem o ensino de Matemática. Dentre essas questões, destaca-se a necessidade de superar o ensino tradicional, uma vez que este deixa de lado vários princípios das diversas concepções

de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, Bicudo (1999, p. 154) ainda complementa que:

Educar é a principal função da escola, as variações do modo de ensinar determinam diferenças nos resultados obtidos. Até a pouco tempo, ensinar era sinônimo de transmitir informações, mas as ideias pedagógicas mudaram. Apesar disso, muitos profissionais da educação ainda veem com bons olhos o ensino tradicional. Eles elogiam o bom nível do trabalho escolar feito no passado e rejeitam as mudanças; duvidam da validade da atuação escolar e consideram os professores pouco exigentes.

Dessa forma, a necessidade de superar o ensino tradicional nas aulas de Matemática busca agregar novas experiências para os envolvidos em sala de aula. Uma excelente abordagem sobre as diversas concepções do ensino foi discutida por Santos (2005). Nesse estudo, o autor evidenciou que o processo de ensino/aprendizagem deve estar integrado à sociedade e à cultura. Assim, as diferentes concepções apresentadas são: Abordagem Tradicional, Abordagem Comportamentalista, Abordagem Humanista, Abordagem Cognitivista e Abordagem Sociocultural.

Na **Abordagem Tradicional**, a escola é considerada o lugar ideal para a realização da educação. Apresenta funções definidas com normas rígidas e prepara o indivíduo para a sociedade. O aluno é visto como um ser passivo, que deve assimilar os conteúdos transmitidos pelo professor, e deve dominar o conteúdo cultural e universal transmitido pela escola. O professor é uma autoridade e o transmissor do conteúdo para os alunos. No processo de ensino/aprendizagem, os objetivos educacionais obedecem à lógica dos conteúdos, com predomínio de aulas expositivas, leitura e cópias (Santos, 2005).

Na **Abordagem Comportamentalista**, a escola é vista como uma agência educacional, incluindo o ensino a distância. O aluno é o elemento para quem o material é preparado. O professor é o educador que seleciona, organiza e aplica um conjunto de meios que garantam a eficiência e eficácia do ensino. No processo de ensino/aprendizagem, os objetivos educacionais são operacionalizados e categorizados em classificações gerais e específicas (Santos, 2005).

Na **Abordagem Humanista**, a escola é proclamada para todos, com um caráter democrático e regras pouco disciplinadas. O aluno é um ser ativo, criativo e participativo. O professor é o facilitador da aprendizagem. No processo de

ensino/aprendizagem, os objetivos educacionais devem obedecer ao desenvolvimento psicológico do aluno, promovendo a autoavaliação (Santos, 2005).

Na **Abordagem Cognitivista**, a escola deve oferecer condições para que o aluno possa aprender por si próprio, proporcionando liberdade de ação real e material, e dando prioridade ao desenvolvimento psicológico da inteligência sobre a aprendizagem. O aluno tem um papel ativo de observar, experimentar, relacionar e argumentar. O professor deve criar situações desafiadoras e estabelecer a reciprocidade. O ensino/aprendizagem enfatiza os trabalhos em equipe (Santos, 2005).

Na **Abordagem Sociocultural**, a escola deve ser organizada e estar funcionando bem para proporcionar os meios necessários para que a educação ocorra em seus múltiplos aspectos. O aluno é visto como uma pessoa objetiva e concreta, que determina e é determinada pelo social e político, sendo capaz de operar mudanças na realidade. O professor é o educador que direciona e conduz o processo de ensino e aprendizagem, com predomínio de uma relação horizontal entre professor e aluno. O ensino/aprendizagem tem como objetivos educacionais buscar uma consciência crítica, sendo o diálogo e os grupos de discussão fundamentais para o aprendizado (Santos, 2005).

Sob esse prisma, as diversas concepções acerca da relação ensino e aprendizagem visam nortear a problemática ligada ao desempenho escolar em determinadas disciplinas. Em Matemática, por exemplo, nem sempre o professor leva em conta o conhecimento prévio dos alunos sobre algumas questões. Dessa forma, isso pode contribuir para o baixo aproveitamento de determinados alunos. Situações dessa natureza geram alunos frustrados com a área de exatas. Para corroborar essa ideia, segue um trecho do documento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico (BRASIL, 2018, p. 263).

A crítica ao ensino tradicional deve-se à necessidade de buscar novas formas de transmitir o conhecimento. Diferentemente das disciplinas ligadas às ciências

humanas, o conhecimento final nas matérias exatas é construído por intermédio de fórmulas e padrões pré-estabelecidos pela comunidade científica.

Questões dessa natureza não levam em conta o conhecimento sociocultural adquirido fora da sala de aula. Mesmo que o aluno chegue à resolução de um determinado problema por meio de outra fórmula, nem sempre seu raciocínio é considerado válido pelo professor. É nesse contexto que atua a transposição didática.

Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O 'trabalho' que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática (Chevallard, 1991, p.39).

Chevallard (1991) evidencia que, a partir da transposição didática, o professor deve adaptar o conhecimento de forma que o aluno consiga compreendê-lo. Dessa forma, o princípio da transposição didática visa valorizar o conhecimento prévio dos alunos, ou seja, reconhecer os diversos saberes adquiridos fora da sala de aula. O conhecimento obtido no convívio social e em espaços não formais pode contribuir para uma melhoria na compreensão do conteúdo transmitido pelo professor em sala de aula.

A transposição didática está alinhada com as exigências dispostas na BNCC (2018, p.265), como podemos observar no seguinte excerto:

Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

A BNCC (2018) destaca que, para o aluno compreender a Matemática, é necessário perceber sua relação com situações vivenciadas em seu cotidiano. Além disso, estudar a trajetória dos conceitos pode facilitar esse entendimento. Nota-se que o baixo aproveitamento dos discentes em relação à Matemática está relacionado à visão de que os conceitos trabalhados em aula não apresentam aplicação prática.

Nesse mesmo viés, Bicudo (1999, p. 157) enfatiza que:

As dificuldades ou os fracassos, em geral, são vistos como decorrentes de empecilhos, de algum modo, vinculado ao aluno – “falta de base” ou de condições para aprender, problemas familiares, deficiência mental ou cultural etc. Segundo VinhBang (199, p. 12), há ideias, quase crenças, difíceis de desfazer: o fracasso não provém do professor, quem transmite o

conhecimento, e teria ensinado mal, ideias como estas justificam e ajudam a manter o ensino tradicional.

Bicudo (1999) enfatiza que, muitas vezes, as dificuldades de aprendizagem são discutidas a partir do aluno, ou seja, muitos não consideram que os empecilhos para a apreensão do conhecimento podem estar associados à metodologia de ensino utilizada pelo professor. Dessa forma, o baixo desempenho pode estar ligado aos métodos da escola tradicional.

Evidentemente, a escola precisa adequar-se às novas metodologias, cujas propostas pedagógicas priorizam mais a interação do aluno com o objeto de estudo, a pesquisa e a construção do conhecimento. Ou seja, as aulas devem ser encaradas como situações que possibilitam a mediação e apreensão do conhecimento, e não unicamente o decoro de fórmulas (Bicudo, 1999).

Além disso, percebe-se que, em muitos casos, o baixo rendimento também pode estar relacionado à postura autoritária do professor, que não aceita que os alunos atuem como sujeitos ativos. Muitos professores, ao agir dessa forma, desenvolvem nos alunos um sentimento de passividade, no qual o docente ensina e o aluno deve apenas captar o conhecimento (Bicudo, 1999).

Esse tipo de postura não valoriza a abordagem sociocultural, cuja premissa básica é priorizar um saber produzido em caráter horizontal, onde professor e aluno aprendem juntos. Ou seja, encarar o aluno como sujeito crítico de sua realidade social, capaz de produzir e mediar o conhecimento (Freire, 1996).

A abordagem de ensino e aprendizagem que mais se aproxima do nosso objeto é a cognitivista, pois, ao longo da aplicação da sequência didática, priorizamos a autonomia do aluno. Para isso, oferecemos os recursos necessários para a aprendizagem, e o professor estava ali para mediar essa construção do conhecimento matemático.

4.2 Ensino de Matemática e Suas Metodologias

Atualmente, o ensino da Matemática é evidenciado pela comunidade escolar como um desafio a ser vencido, pois, em sua maioria, ainda ocorre no formato tradicional de aula expositiva, desvinculando-se da matemática utilizada no cotidiano. Há uma grande divergência entre o que é ensinado e a real aprendizagem dos educandos, o que torna o ensino da referida disciplina pouco atrativo. Dessa forma, o

processo de ensino e aprendizagem não logra êxito, resultando na elevação dos índices de rejeição e reprovação em algumas escolas.

Sabe-se que a típica aula de Matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julgar importante. O aluno, por sua vez, cópia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender Matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas se reduz a procedimentos determinados pelo professor (D'Ambrósio, 1989, p.74).

Diante da situação supracitada, nota-se que o ensino da Matemática realizado nos dias atuais frequentemente sustenta-se na memorização e repetição de exercícios expostos na lousa. Por conseguinte, nesse contexto, deve ser uma preocupação do docente pensar em novas formas metodológicas de ensinar e aprender os conceitos matemáticos. Ainda de acordo com D'Ambrósio, estamos entrando na “era do conhecimento”. Portanto, faz-se necessário que o atual modelo escolar se modifique através de: “estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores da sociedade. Isso será impossível de atingir sem a ampla utilização de tecnologia e educação” (D'Ambrósio, 2012, p. 74).

Nesse viés, inegavelmente sabe-se que, na contemporaneidade, os alunos estão rodeados e inseridos em uma infinda diversidade de tecnologias. No âmbito escolar, cabe ao professor organizar essas informações e usá-las a seu favor dentro desse contexto tecnológico.

Assim, como afirma Nóvoa apud Machado Junior (2005, p. 11), “Nos dias de hoje, não basta ao professor abrir a porta, entrar na sala de aula e dar sua aula, ele tem que criar condições para que a educação possa acontecer”. As dificuldades no ensino/aprendizagem de Matemática podem ser impactadas por vários motivos. Marques e Caldeira (2018) apontam que, dentre esses motivos, estão as metodologias adotadas por alguns professores, que os alunos consideram desinteressantes e, por vezes, ultrapassadas. Eles ainda ressaltam a dificuldade do conteúdo matemático, comprometendo assim o aprendizado.

Dessarte, diversificar a metodologia de ensino é uma medida interessante, uma vez que pode estimular o aluno e facilitar o entendimento do ensino da Matemática e de outras disciplinas. Afinal, os obstáculos nesse processo de ensino são reais e podem ter outras origens.

4.3 Tecnologias Digitais no Ensino da Matemática

As tecnologias digitais se relacionam com a evolução da humanidade. Diariamente, surgem novos aparelhos tecnológicos que possibilitam muitas comodidades, sendo comum realizar atividades rotineiras com mais agilidade, facilidade de comunicação, economia e eficácia. É indiscutível que as inovações tecnológicas proporcionaram ao mundo inúmeros benefícios.

Em face desses avanços tecnológicos, os conteúdos no ensino da matemática se tornaram mais elaborados e, conseqüentemente, mais complexos. Sabe-se que as calculadoras, computadores e diversos recursos tecnológicos são ferramentas úteis que podem executar com êxito as atividades propostas, podendo ser um precioso instrumento para pesquisa, avaliação, verificação de resultados e correção de equívocos. Ressalta-se que o uso da tecnologia para fins educacionais já é uma realidade em muitos lugares e vem ganhando novos adeptos a cada ano.

Ademais, pode-se presumir que os estudantes, munidos desses aparatos, realizarão a execução dos cálculos matemáticos em tempo hábil, colaborando para a dinâmica do tempo em aula e desenvolvendo novas estratégias de obtenção de resultados, os quais permitam buscar novas formas de aprendizagem. Portanto, espera-se que o professor possua outras competências que permitam a formação de alunos autônomos, aptos a lerem inúmeras formas de representação e com capacidade de elaborar ideias para novos problemas, além das tarefas concebidas em sala de aula.

Como um exercício de compreensão desses processos de avanços, trazemos a explanação teórica de Cecília Parra e Irma Saiz que contribuem para essa noção:

O mundo atual é rapidamente mutável, a escola como os educadores devem estar em contínuo estado de alerta para adaptar-se ao ensino, seja em conteúdo como a metodologia, a evolução dessas mudanças que afetam tantas condições materiais de vida como do espírito com que os indivíduos se adaptam a tais mudanças. Em caso contrário, se a escola e os educadores descuidarem e se manterem estáticos ou com movimento vagaroso em comparação com a velocidade externa, origina-se um afastamento entre a escola e a realidade ambiental, que faz com que os alunos se sintam pouco atraída pelas atividades de aula e busquem adquirir por meio de uma educação informal os conhecimentos que consideram necessários para compreender a sua maneira no mundo externo. (Parra; Saiz, 1993, p. 11).

Com efeito, sabemos que o ensino está em constante transformação, e algumas ideias antes estabelecidas como verdades absolutas poderão ser

reavaliadas. Visto que, cruelmente, nem sempre o docente será o detentor do saber, mas sim, o condutor entre o conhecimento e o aluno.

Os professores precisam saber como usar os novos equipamentos e softwares e também qual é seu potencial, quais são seus pontos fortes e seus pontos fracos. Essas tecnologias, mudando o ambiente em que os professores trabalham e o modo como se relacionam com outros professores, têm um impacto importante na natureza do trabalho do professor e, desse modo, na sua identidade profissional (Valente, 2008, p. 76).

Desse modo, cabe ao professor estar ciente de que a sociedade caminha em uma constante evolução, e assim, ele precisa acompanhar esse processo, como mediador, instigando e criando situações que promovam a aprendizagem, utilizando como auxílio os recursos disponíveis atualmente. Deve procurar se adaptar e estar preparado para os aspectos da cosmovisão de uma sociedade, sabendo os papéis dos indivíduos e o seu próprio como operador da educação. Como observa Sadovsky (2007, p. 8):

[...] a Matemática, não só no Brasil, é apresentada sem vínculos com os problemas que fazem sentido na vida das crianças e dos adolescentes. Os aspectos mais interessantes da disciplina, como resolver problemas, discutir ideias, checar informações e ser desafiado, são pouco explorados na escola. O ensino se resume a regras mecânicas que ninguém sabe, nem o professor, para que servem.

Sendo o foco deste capítulo as novas tecnologias, é cabível dizer que o ensino da Matemática almeja transformar o estudo em um saber lógico por meio do exercício do raciocínio, e precisa estar atrelado a uma prática mais próxima possível da vivência do discente, sendo de extrema importância para a aprendizagem a interação entre teoria e prática.

É relevante pensar na Matemática como uma linguagem universal, para que, propositalmente, todos os indivíduos adquiram a sabedoria e o conhecimento matemático necessários para a vida ao saírem do âmbito escolar e possam viver plenamente nesta sociedade que se encontra em incessantes avanços. Nessa perspectiva, as reflexões de estudiosos sobre o assunto elucidam essa questão:

No mundo atual, em que é preciso educar numa sociedade em que os dispositivos tecnológicos e midiáticos produzem outras sensibilidades, deslocalizam o saber, inauguram novas formas de expressão, Comunicação e Educação caminham juntas. (Sartori; Soares, 2013, p. 12).

Compreendemos, a partir dos trechos citados, que inserir novas tecnologias no ensino da matemática consiste em uma proposta que possui a finalidade de contribuir nesse processo de mudanças que se fazem necessárias. Se usadas de forma consciente, tendem a ampliar a construção de saberes e promover a aprendizagem significativa. É de extrema importância refletir acerca de qual metodologia utilizar no estudo da geometria espacial, pois, nos dias atuais, em que muitos estudantes estão cada vez mais imersos em ambientes virtuais e munidos de tecnologia, desde calculadoras a celulares e computadores, torna-se essencial abordar a Geometria utilizando alguns desses recursos.

Cabe destacar uma ferramenta que pode contribuir para o ensino-aprendizagem da Matemática, tal qual a calculadora *GeoGebra*, foco e objeto desse estudo, que será tratado mais adiante.

5 GEOMETRIA ESPACIAL

Neste capítulo, faremos uma abordagem dos principais sólidos geométricos estudados no ensino médio. A Geometria deve ser assimilada como uma eficiente ferramenta para descrever a interação do homem com o espaço que habita. Com efeito, é o ramo da matemática mais intuitivo, concreto e fortemente relacionado à realidade, pois ajuda a analisar, organizar e sistematizar o conhecimento do indivíduo com aquilo que está ao seu redor.

Na perspectiva da Educação Matemática, temos que a Geometria espacial possui a função de estudar as figuras geométricas espaciais, também definidas como sólidos geométricos, que ocupam lugar no espaço, caracterizada pela tridimensionalidade: pirâmide, prisma, cubo, esfera, cilindro etc. É possível verificar que cada figura mencionada possui semelhanças aos objetos ao nosso redor (Miranda, 2014).

Assim, a geometria é uma área que exige do estudante uma boa percepção visual de determinados conteúdos, sendo essencial trabalhar e estimular essa visualização espacial. Segundo Prieto e Velasco (2008), a visualização espacial é a aptidão de manipular, rodar, torcer e inverter imagens dos objetos, sendo este um dos fatores mais importantes das habilidades espaciais. O conhecimento geométrico possibilita essa visualização espacial, bem como "várias capacidades cognitivas superiores: localizar-se no tempo e no espaço, raciocinar logicamente, abstrair e generalizar" (Ferner et al, 2016, p. 1).

5.1 Conceitos Intuitivos de Volumes de um Sólido

Cabe dizer que os sólidos geométricos são objetos tridimensionais definidos no espaço, divididos em: sólidos quaisquer, poliedros e corpos redondos. Sólidos geométricos são os objetos tridimensionais definidos no espaço, podemos citar como exemplo: cubos, pirâmides, prismas, cilindros e esferas.

Volume é a medida do espaço tridimensional que um objeto ocupa. Pode ser visualizado como a quantidade de "matéria" ou "espaço" dentro de um sólido. Assim, sólidos simples, como cubos, cilindros e esferas, podem ter seu volume calculado por fórmulas específicas: Cubo: $V = a^3$, onde "a" é o comprimento da aresta; Cilindro: $V = \pi r^2 h$, onde "r" é o raio da base e "h" é a altura; Esfera: $V = (4/3)\pi r^3$, onde "r" é o raio.

Intuitivamente, pode-se dizer que o volume de um sólido geométrico é uma grandeza que representa o espaço que esse sólido ocupa, ou seja, é a "quantidade de espaço" por ele ocupado. Portanto, a ideia de calcular o volume equivale a questionar: quantos cubos unitários eu posso colocar dentro do sólido? Isto é, a soma desses cubos, ou a fração dele, seria o volume do sólido.

A visualização permite imaginar o volume e pode ser facilitada por meio de representações visuais, como gráficos e modelos 3D, que ajudam a compreender a forma e a ocupação de espaço do sólido. Com o aporte da calculadora GeoGebra 3D, é possível deduzir as fórmulas utilizadas para o cálculo de áreas e volumes.

5.2 Realidade Aumentada

O conceito de Realidade Aumentada (RA) surgiu aproximadamente em meados da década de 1990, mas algumas fontes apontam que os estudos dessa tecnologia remontam aos anos 60, como a reportagem da CNN (2023), no excerto abaixo:

O início do que levaria a criação da RA começou nos anos 60, com o investigador Ivan Sutherland. Ele elaborou um capacete de visão ótica direta para visualizar objetos 3D no ambiente real. Mas, oficialmente, o termo só foi idealizado em 1992 por Thomas P. Caudell, cientista e pesquisador (CNN, 2023).

Possuindo vários sistemas que compõem a sua tecnologia, eles são elencados pelo tipo de dispositivo que se utiliza. "Podemos afirmar que a Realidade Aumentada trata do mundo real como ponto de partida para uma experiência que leva o utilizador a experimentar o mundo virtual" (Kirner, 2009, p.22). Ademais, a realidade aumentada permite sobrepor elementos, assim, oferecendo uma interação com o mundo real de maneira capaz de criar uma camada virtual em cima de qualquer imagem, ampliando-a em um aparelho celular, notebook, tablet etc.

Em relação às contribuições da RA para a aprendizagem de Geometria Espacial, em específico, Macedo, Silva e Buriol (2016, p. 2-3) explicam que:

Ao "misturar" o mundo virtual com o real é possível criar formas de interação com objetos que só estão limitados à nossa imaginação. A possibilidade de visualizar, explorar livremente vários pontos de vista e interagir com objetos virtuais tridimensionais pode sugerir inúmeros benefícios potenciais para o ensino de sólidos geométricos. O uso dessas tecnologias oferece aos alunos a possibilidade de explorar tópicos da disciplina de Matemática de forma mais intensa, desenvolvendo sua intuição e sua consciência de conteúdo.

Para Macedo e Buriol (2016, p. 3), a forma de interação mais adequada em RA é aquela na qual o usuário passeia livremente em torno de um objeto, olhando-o sob várias perspectivas. Paralelamente a isso, Lopes, Vidotto, Pozzebon e Ferenhof (2019, p. 5):

Neste sentido, a RA enquanto elemento complementar do mundo real é uma forma de adicionar elementos virtuais que contribuirão para a aprendizagem e compreensão de elementos da realidade, podendo trazer benefícios às mais diversas áreas do conhecimento, dentre elas, a educação, por sua amplitude de possibilidades de aplicação.

Desse modo, atualmente, uma das utilizações da RA no contexto educacional, especialmente na Educação Matemática, pode ser atrelada ao ensino de Geometria Espacial. Pois, na Realidade Aumentada (RA), se "enriquece o ambiente físico com objetos sintetizados computacionalmente, permitindo a coexistência de objetos reais e virtuais" (Hounsell; Tori; Kirner, 2019, p. 32).

Assim, a implementação de RA no ensino da matemática não só enriquece a experiência de aprendizado, mas também ajuda a desenvolver habilidades críticas e de resolução de problemas, tendo um enorme potencial nesse sentido, tornando conceitos abstratos mais tangíveis e acessíveis. E aqui, cabe citar Piaget e sua Teoria do Desenvolvimento Cognitivo. Piaget enfatizou a importância da construção do conhecimento através da experiência. A RA pode facilitar essa construção, permitindo que os alunos explorem conceitos matemáticos de forma prática e visual, promovendo a assimilação e acomodação de novas informações. Nessa perspectiva, Piaget (2011) esclarece:

Levando em conta, então, esta interação fundamental entre fatores internos e externos, toda conduta é uma assimilação do dado a esquemas anteriores (assimilação a esquemas hereditários em graus diversos de profundidade) e toda conduta é, ao mesmo tempo, acomodação destes esquemas a situação atual. Daí resulta que a teoria do desenvolvimento apela, necessariamente, para a noção de equilíbrio entre os fatores internos e externos ou, mais em geral, entre a assimilação e a acomodação (Piaget, 2011, p.89).

Piaget (2011) defende que o aprendizado é mais eficaz quando os alunos estão ativamente envolvidos no processo. Paralelamente a isso, pressupomos que a Realidade Aumentada proporciona experiências práticas e interativas que permitem a exploração de conceitos matemáticos de forma dinâmica.

Para encerrarmos essa linha de raciocínio, enfatizamos que a abordagem construtivista de Piaget sugere que os estudantes devam construir seu próprio

entendimento. Com a RA, os alunos poderão experienciar e explorar conceitos matemáticos, facilitando a construção de conhecimento através da interação e imersão. Utilizamos a palavra "imersão" aqui de acordo com o conceito dado por Cadoz (1994):

Técnica de interface entre o homem e o computador na qual, graças ao recurso a um dispositivo de visualização especial, se dá ao operador a sensação de se encontrar no interior de um espaço tridimensional constituído por objetos visíveis com volume (p. 129)

Desse modo, compreendemos que a imersão em realidade aumentada (RA) focada em sólidos geométricos poderá ser uma maneira envolvente e eficaz de ensinar matemática. Para Azuma (1997), "a realidade aumentada é um sistema que combina elementos do mundo real e virtual, permitindo que usuários interajam com ambos em tempo real." Dessa maneira, evidencia-se a realidade aumentada como uma interface que mescla realidades, criando novas experiências.

5.3 Calculadora Tridimensional GeoGebra

Com o universo de infinitas possibilidades de ensino que estão surgindo, especialmente para o ensino da Matemática, diversos programas computacionais estão modificando e ressignificando a construção do conhecimento.

Para o ensino e aprendizagem de geometria espacial, propostas metodológicas a partir do uso de softwares educacionais têm se apresentado como métodos potenciais e eficazes no que concerne ao trabalho com os conteúdos da matemática, tais como: Geometria, Álgebra, Tabelas, Gráficos e Cálculo, podendo ser utilizados tanto na Educação Básica como no Ensino Superior.

Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si (Nascimento, 2012, p. 113).

Tal recurso tecnológico é um programa de geometria, de acessível aquisição, sendo possível encontrá-lo em sites de buscas ou no endereço: www.geogebra.org/download. De forma dinâmica, o GeoGebra permite que seja feita

a construção com pontos, vetores, segmentos e retas, por meio de uma operacionalização de fácil entendimento.

Do ponto de vista pedagógico, o *GeoGebra* é uma ferramenta didática no sentido em que pode apresentar, simultaneamente, representações diferentes de um único objeto com interações entre si.

6 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA (TRRS)

Esta pesquisa está fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) do filósofo e psicólogo francês Raymond Duval. Sua teoria apresenta conceitos importantes que nos permitiram problematizar nosso objeto de pesquisa. Conforme Duval (2012), "As representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática" (p. 04).

Antes de mostrar como a TRRS contribui no campo das pesquisas envolvendo os processos de ensino e de aprendizagem de matemática, faz-se necessário trazer à tona alguns conceitos importantes dessa teoria. O primeiro conceito é o de representação semiótica. Conforme Henriques e Almouloud (2016, p. 467):

Representação semiótica é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua forma no sistema semiótica e de outro lado, pela referência do objeto representado.

Além desse conceito, o conceito de signos também é primordial.

Um signo é um sinal mobilizado por alguém (sujeito) capaz de permitir-lhe identificar um sistema ou registro de representação semiótico, como as regras linguísticas ou gramaticais na língua materna, as propriedades ou escritas algébricas para o registro algébrico, as figuras geométricas (pontos, segmentos/ retas/curvas, planos e superfícies) para o registro gráfico, os números, as operações aritméticas, para o registro numérico e, de um modo geral as regras de conformidade (Henriques; Almouloud 2016, p. 468).

Nesse sentido, os objetos podem ser representados através de signos diversos, tais como: língua materna, registro algébrico, registro gráfico e registro numérico. De modo que cada um desses signos apresenta regras particulares que não se aplicam a outro signo. Em resumo, "uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representação que uma figura ou um diagrama" (Duval, 2012, p. 15).

Para Duval (2012), as representações semióticas são muito importantes no campo da matemática, pois elas permitem representar objetos que estão no domínio mental. Trazer para a realidade, isto é, representá-los de forma mais palpável é importante e possibilita uma maior compreensão por parte dos alunos. Nesse viés, o autor pontua:

as representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes

a um sistema de representações que têm inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. Consideram-se, geralmente, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, quer dizer para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem. Ora, este ponto de vista é ardiloso: as representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento. De fato, elas desempenham um papel primordial (Duval, 2012, p. 04 e 05).

A TRRS apresenta alguns pontos que devem ser observados pelo professor-pesquisador que busca investigar problemas relacionados ao ensino e aprendizagem a partir desta perspectiva teórica. Nesse sentido, Duval destaca que três atividades cognitivas são de grande relevância nesse processo, são elas: a formação, o tratamento e a conversão:

A formação de uma representação semiótica é baseada na aplicação de regras de conformidade e na seleção de certas características do conteúdo envolvido. Por exemplo, a composição de um texto, construir uma figura geométrica, elaborar um esquema, escrever uma fórmula, descrever o domínio de uma função, etc;

O tratamento de uma representação é a transformação desta em outra representação no mesmo registro no qual foi formada. O tratamento é, portanto, uma transformação interna num registro. Por exemplo, o cálculo é uma forma de tratamento próprio das escritas simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo de limite de uma função, cálculo integral de uma função, cálculo proposicional;

A conversão de uma representação é a transformação desta representação em uma representação de outro registro. A conversão é, portanto, uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento. A escolha de um registro de representação adequado para externar os conceitos de um objeto de saber pode favorecer o tratamento (Duval, 2013, apud Henriques; Almouloud, 2016, p.469).

Em suma, esses três pontos são importantes para representarmos objetos matemáticos. Dessa forma, a TRRS apresenta um caminho teórico que traz grandes contribuições para o campo da matemática. Pois, segundo Duval, "só por meio de representações semióticas é que uma atividade sobre objetos matemáticos é possível" (Henriques; Almouloud, 2016, p.467).

Nesse mesmo viés, Duval (2013b) apud Denardi (2017) destaca que:

a principal dificuldade na aprendizagem da Matemática decorre do fato que os objetos matemáticos não possuem existência física e, sendo assim, o acesso a esses objetos só é possível com a utilização de um sistema semiótico. Desta forma, na Matemática, muito mais do que em qualquer outra área do conhecimento, a diversidade dos sistemas semióticos é fundamental para a aprendizagem e para a construção de novos conceitos (p. 06).

Nesse sentido, a TRRS evidencia que existe uma diversidade de signos para representar um objeto, e por conta disso, a capacidade de apreensão dos sujeitos é ampliada. Lembrando que nenhuma representação é capaz de mostrar um objeto em sua totalidade. Dessa forma, a representação semiótica é um meio que os sujeitos têm de acessar conceitos e objetos que não estão no domínio físico.

Esses conceitos das representações semióticas são facilmente observados em nossa metodologia de pesquisa, uma vez que o uso da calculadora *GeoGebra* permitiu que os educandos pudessem representar os sólidos geométricos. Pegar uma imagem pronta de um sólido geométrico e levar para a aula é diferente de disponibilizar para os alunos essa possibilidade de, através de um recurso tecnológico, aprender a representar essas figuras geométricas. Nesse sentido, as contribuições da TRRS foram de grande relevância para nosso estudo, visto que os alunos tiraram do domínio mental a representação que eles tinham dos sólidos geométricos e a trouxeram para a tela de um aplicativo de realidade aumentada.

Em suma, o uso da tecnologia de realidade aumentada aliado à TRRS foi indispensável para a aprendizagem dos alunos com a geometria. Ao longo do desenvolvimento da sequência didática, os alunos foram orientados sobre essas diversas possibilidades de visualização para os objetos matemáticos.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

7.1 A implementação e Análise da Sequência Didática

A fase de implementação da Sequência Didática foi desenvolvida em cinco semanas (15 aulas), durante o período regular de aulas da disciplina de matemática. Dessa forma, dividimos esse processo em etapas, e cada uma delas estava dedicada ao estudo de um sólido geométrico. Todas estas etapas citadas a seguir estão detalhadas na sequência didática. Vejamos como foi feita essa divisão:

7.2 Análise das Atividades Desenvolvidas na Semana I

No início da primeira semana, foi apresentada aos alunos a proposta de trabalho, juntamente com a explicação do aplicativo e seu funcionamento, para que pudessem descrever o raciocínio em relação à compreensão adquirida, dado que a maioria das questões é de natureza discursiva. O *GeoGebra* é uma ferramenta de matemática interativa que oferece uma calculadora 3D para explorar conceitos matemáticos em três dimensões. O aplicativo é de fácil acesso, sendo mostrado como baixar a versão tanto na Play Store como na App Store, como mostra a figura 1.

Figura 1 – Versão na Play Store e App Store do aplicativo

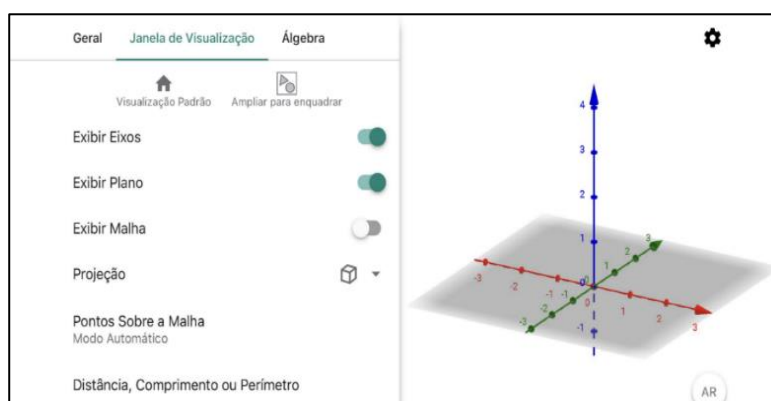


Fonte: De autoria própria (2023).

Durante o primeiro encontro, foi apresentado o software *GeoGebra*, com ênfase nas ferramentas que seriam utilizadas no desenvolvimento das atividades da

sequência. Solicitou-se ainda que os alunos baixassem o aplicativo *GeoGebra 3D* Calculadora Gráfica em seus celulares. Após a instalação, foi feita uma apresentação da interface do programa, destacando as ferramentas que seriam mais utilizadas. Percebeu-se que alguns alunos não dispunham da tecnologia de Realidade Aumentada (RA) em seus celulares. Diante disso, foi orientado que realizassem as atividades em dupla ou até mesmo em trio, de modo a garantir que todos tivessem a oportunidade de vivenciar a experiência de utilizar a realidade aumentada na resolução das atividades. A figura 2 mostra a interface do aplicativo onde toda a construção seria realizada.

Figura 2– A interface da calculadora *GeoGebra 3D*



Fonte: De autoria própria (2023).

Atividade 1 e 2:

Em resumo, na primeira semana, foi feita uma orientação geral sobre o aplicativo de RA, seguida da explicação sobre o Prisma. Apesar de algumas dificuldades iniciais enfrentadas por alguns alunos na utilização do aplicativo, foram fornecidas orientações detalhadas e realizado um acompanhamento próximo para superar essas questões. Com muita calma e paciência, todos os alunos conseguiram compreender o funcionamento do aplicativo, permitindo que desfrutassem da experiência e realizassem as construções propostas com sucesso.

Os alunos aprenderam a calcular a medida da área e a medida do volume desse sólido geométrico, além disso, foi feita a construção no aplicativo do prisma de N lados, logo em seguida foi feita a sua planificação, conforme os comandos da atividade 1 e 2 da primeira semana. A Figura 3 ilustra essa atividade de construção,

bem como traz, para efeito de referência, a resposta do estudante da atividade 1 e 2 da sequência didática.

Figura 3 – Construção e planificação do prisma em sala de aula



Fonte: De autoria própria (2023).

A planificação do prisma regular também foi realizada a partir da RA, conforme mostra a Figura 3. Esse recurso permitiu aos estudantes visualizar as faces do prisma reto de base triangular, que compõem esse sólido. Após análise, verificou-se que os estudantes, a partir da construção feita e manipulação do sólido, conseguiram encontrar uma expressão algébrica para calcular a medida da área do prisma regular. Além disso, escreveram em linguagem materna como obter a medida da área deste sólido, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Resposta da questão 5 área do prisma

5) Determine a medida da área total e do volume do Prisma onde o $N=4$, $R=2$ e $h=10$.

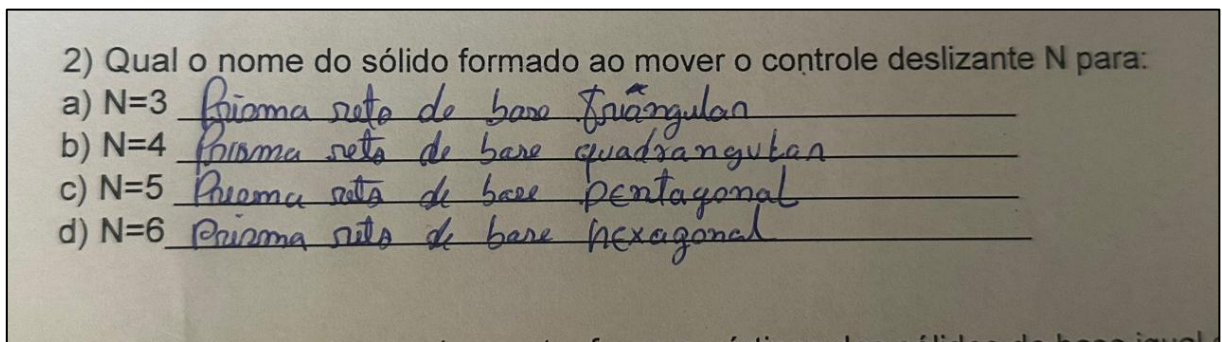
$$\begin{array}{l}
 d = a\sqrt{2} \\
 4 = a\sqrt{2} \\
 a = \frac{4}{\sqrt{2}} \\
 a = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\
 a = \frac{4\sqrt{2}}{2} \\
 a = 2\sqrt{2}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 AT = 2(2\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot 10 \cdot 4 \\
 2 \cdot 4 \cdot 2 + 80\sqrt{2} \\
 AT = 16 + 80\sqrt{2}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (2\sqrt{2})^2 \cdot 10 \\
 4 \cdot 2 \cdot 10 \\
 80
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Área total: } 16 + 80\sqrt{2} \text{ u.a} \\
 \text{Volume: } 80 \text{ u.v.}
 \end{array}$$

Fonte: De autoria própria (2023).

Atividade 3:

Na terceira atividade, todos os alunos conseguiram utilizar as ferramentas de construção do sólido geométrico de N lados para resolver as questões da atividade 3. Nesta questão, foi possível observar que, ao mover os controles deslizantes no aplicativo, a base do prisma se modificava, assumindo diferentes formatos e originando um novo prisma. A Figura 5 traz a resposta do aluno.

Figura 5 – Atividade 3 resposta do aluno semana 1



Fonte: De autoria própria (2023).

As análises mostram que, de forma geral, os estudantes realizaram a operação de tratamento ao situarem a quantidade de lados da base do prisma na representação figural do prisma de N lados no aplicativo (sistema de registro de representação semiótica figural) e realizaram a conversão da propriedade estabelecida em linguagem natural. Por exemplo, os alunos associaram a base do prisma $N=3$ com o prisma reto de base triangular. Isso pode indicar que houve aprendizagem quanto às relações estabelecidas na questão 2 e nas alternativas consideradas.

Conforme Duval (2009, p. 58), é viável efetuar transformações entre diferentes sistemas de registros semióticos relacionados a um determinado objeto de estudo. Isso significa “traduzir a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação expressa em um registro para uma representação correspondente no âmbito de outro registro”. Nesse contexto, percebe-se que os alunos conseguiram realizar a operação de conversão entre os registros mencionados.

7.3 Análise das atividades desenvolvidas na semana II

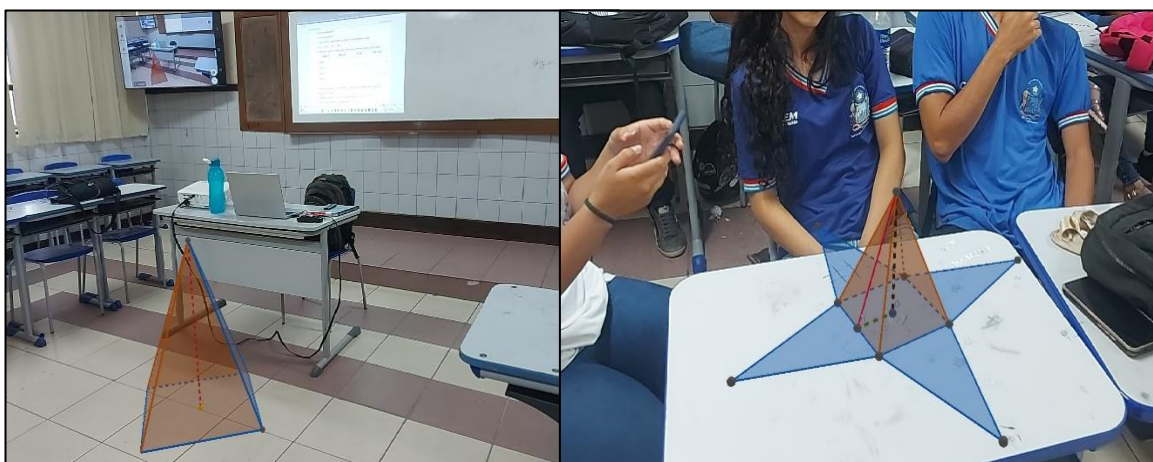
Durante a segunda semana, discutimos sobre a pirâmide regular reta, seguida de uma explicação de como calcular a medida da área e a medida do volume desse sólido geométrico. Foram realizadas as construções no aplicativo e a resolução das atividades 4, 5 e 6. Durante a explicação dos elementos que compõem a pirâmide, foi possível perceber que muitos alunos apresentavam dúvidas relacionadas ao apótema da base, ao apótema da face lateral e à altura da pirâmide. Contudo, com a visualização e a manipulação dos modelos no aplicativo, eles conseguiram compreender melhor as diferenças entre esses elementos, o que facilitou a realização dos cálculos das medidas de área e volume da pirâmide.

Atividade 4 e 5:

Nessas atividades, foram realizadas a construção e a planificação da pirâmide regular de N lados. Utilizando os comandos no aplicativo *GeoGebra 3D*, os alunos construíram a pirâmide de N lados e, em seguida, utilizando a ferramenta de planificação, fizeram a planificação do sólido mencionado.

A exploração dos elementos que constituíam as pirâmides formadas foi enriquecida tanto pela construção na Janela 3D do software quanto pela projeção da figura no mundo real, por meio da realidade aumentada (RA). Essas abordagens foram essenciais para o sucesso da atividade. Os estudantes demonstraram entusiasmo, o que resultou em maior engajamento e, consequentemente, em resultados positivos. A Figura 6 apresenta a construção realizada pelos alunos.

Figura 6 – Construção e planificação da pirâmide de N lados

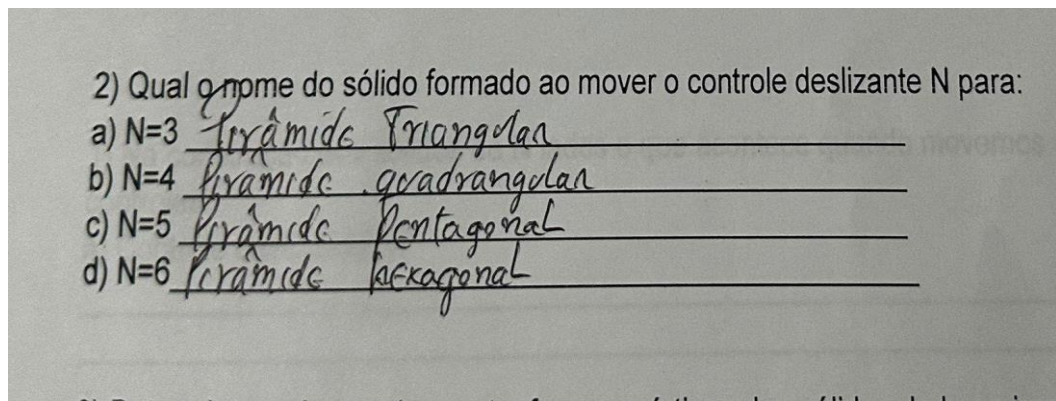


Fonte: De autoria própria (2023).

Atividade 6:

Com um enfoque procedimental, nesta atividade, os estudantes tiveram a oportunidade de classificar diferentes tipos de pirâmides conforme o número de faces, arestas e vértices. Os resultados foram satisfatórios, pois todos os alunos realizaram a classificação das pirâmides considerando apenas a quantidade de lados da base, embora a construção no aplicativo *GeoGebra* 3D disponibilize as informações que permitem realizar as classificações mencionadas. As Figuras 7 e 8 mostram algumas respostas dos alunos.

Figura 7– Respostas da segunda Questão 2



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 8 – Resposta da terceira questão

3) Determine o número de aresta, faces e vértices dos sólidos de base igual a N lados:

BASE	ARESTAS	FACES	VÉRTICES
Base N= 3	6	4	4
Base N= 4	8	5	5
Base N= 5	10	6	6
Base N= 6	12	7	7

Fonte: De autoria própria (2023).

Concluimos que a atividade atingiu seu objetivo, permitindo o progresso na implementação da sequência. Além disso, constatamos que o uso do software

GeoGebra foi útil para os alunos, pois facilitou a visualização das representações geométricas dos objetos estudados, promovendo a transição entre a representação visual e a linguagem verbal.

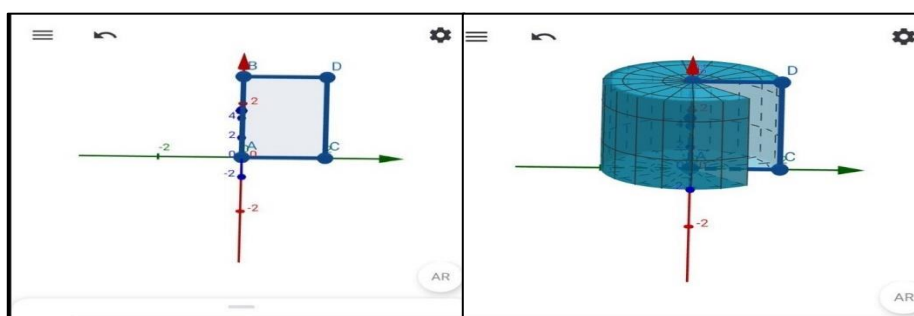
7.4 Análise das atividades desenvolvidas na semana III

Foi feita uma explicação sobre o cilindro reto, seguida da realização de construções do cilindro no celular e de uma atividade sobre o tema. Neste encontro, foram trabalhados a definição e o cálculo do volume e da área do cilindro. Para introduzir e formalizar os conteúdos, foram utilizadas apresentações de slides, complementadas por construções geométricas no aplicativo. Essas construções, fundamentadas na definição de cada sólido, destacaram os elementos da geometria espacial envolvidos. Além disso, os alunos tiveram a oportunidade de explorar as construções em realidade aumentada (RA), ajustando diferentes elementos e, assim, visualizando diversas variações de cilindros.

Atividade 7:

Nesta atividade, foram explorados os cilindros de revolução. Para isso, foi desenvolvida uma construção dinâmica que possibilitou aos participantes gerar diferentes tipos de cilindros ao girar um retângulo em torno de um eixo que passa por um de seus lados. Durante as construções dos sólidos de revolução, nenhum dos participantes apresentou dificuldades, pois se tratava de construções bastante simples, exigindo apenas alguns comandos para serem finalizadas. A finalização dessa atividade por alguns participantes pode ser vista na Figura 9 a seguir.

Figura 9 – Construção do cilindro de revolução

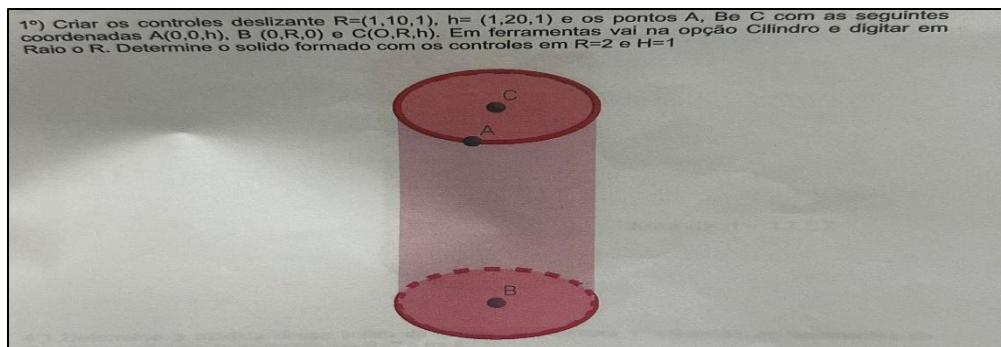


Fonte: De autoria própria (2023).

Atividade 8:

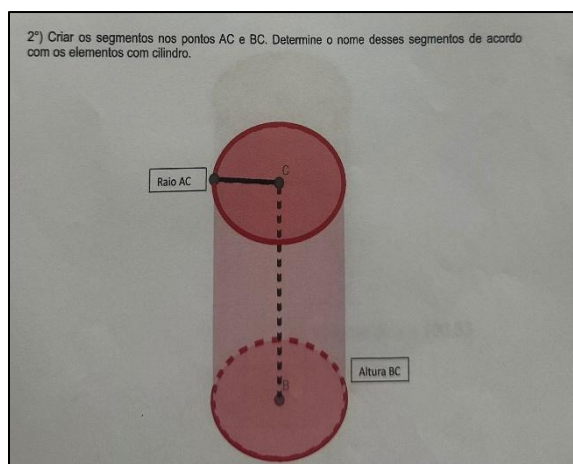
Na atividade 8, os alunos foram orientados a resolver cinco questões. A primeira consistiu na construção de um cilindro reto. Na segunda, solicitou-se a identificação dos elementos que o compõem, como a altura e o raio. As questões três e quatro requeriam o cálculo das medidas da área e do volume do cilindro, utilizando as ferramentas disponíveis no *GeoGebra 3D*. Por fim, na quinta questão, os alunos deveriam projetar o sólido em realidade aumentada. As Figuras 10, 11, 12, 13 e 14 a seguir mostram as respostas de alguns alunos.

Figura 10 – Questão 1 construção do cilindro



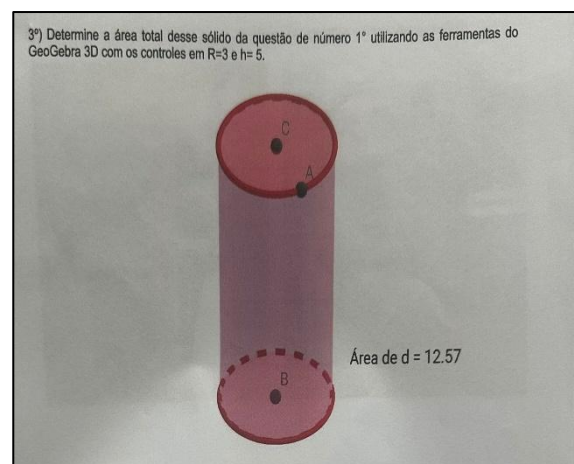
Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 11 – Elementos do cilindro



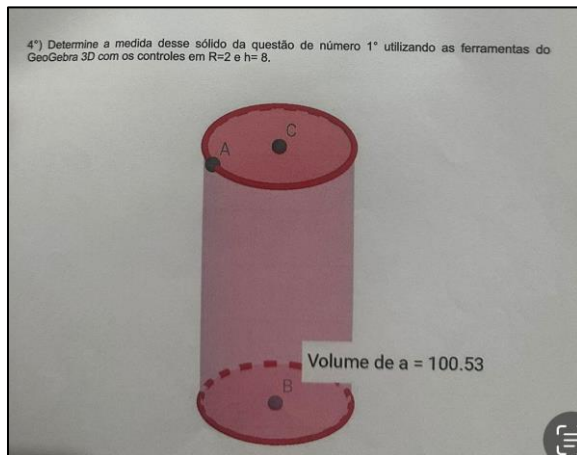
Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 12 – Área do cilindro



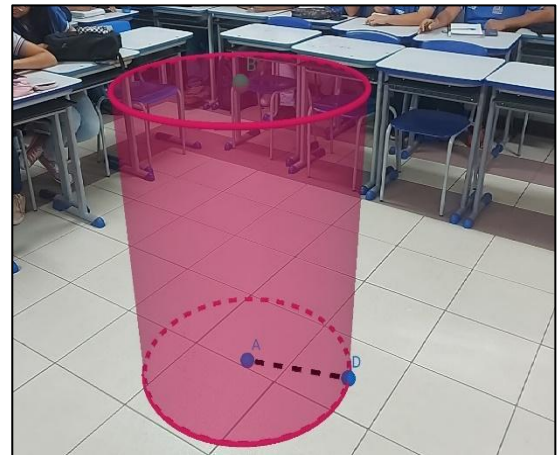
Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 13 – Volume do cilindro.



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 14 – Construção do cilindro RA



Fonte: De autoria própria (2023).

Diante dessa circunstância, foi incentivado que os demais participantes utilizassem ferramentas geométricas em substituição aos comandos. Isso pode ser observado nas Figuras 12 e 13, que apresentam capturas de tela enviadas pelos alunos. Eles alternaram entre o uso de ferramentas geométricas e comandos ao longo da construção, o que resultou na atribuição de rótulos diferenciados a alguns objetos.

Concluimos que a atividade desempenhou um papel significativo na aprendizagem dos estudantes, especialmente no que diz respeito à comparação das estruturas dos sólidos formados. Os comandos da atividade foram apresentados no sistema de registros de representação semiótica em língua materna, o que permitiu aos estudantes, com base nessa representação, desenvolver a representação figural dos sólidos. Em outras palavras, eles realizaram a transição do sistema de registros semióticos em língua materna para o sistema de registros semióticos figurais.

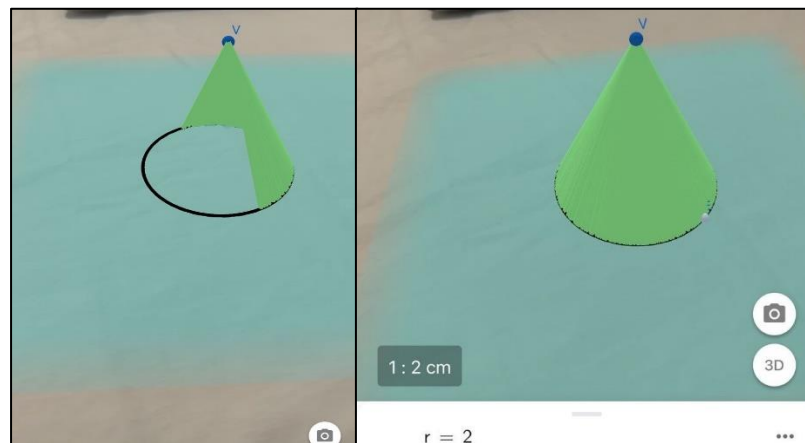
7.5 Análise das Atividades Desenvolvidas na Semana IV

Foi feita uma explanação sobre o sólido de revolução, especificamente o cone. Também foram abordadas as medidas de área e volume do cone. Os alunos realizaram construções no aplicativo de Realidade Aumentada (RA) e participaram das atividades propostas na sequência didática.

Atividade 9:

Nesta atividade, foi utilizada uma apresentação sobre o sólido de revolução, o cone, com o objetivo de destacar os elementos da geometria espacial que compõem sua definição. Posteriormente, recorreu-se ao aplicativo *GeoGebra 3D* para construir cada um desses elementos, possibilitando aos alunos visualizá-los em Realidade Aumentada (RA). Além disso, os alunos puderam interagir com alguns desses elementos, o que lhes permitiu explorar diferentes tipos de cones. Na Figura 15, a seguir, são apresentadas algumas capturas de tela referentes ao desenvolvimento dessa construção.

Figura 15 – Cone a partir da sua definição



Fonte: De autoria própria (2023).

De modo geral, os alunos conseguiram converter a representação natural em linguagem figural ao registrarem suas respostas, conforme mostrado na Figura 15.

Atividade 10:

Na atividade 10, os alunos foram orientados a resolver uma questão com cinco alternativas. A primeira consistiu na construção de um cone reto com base nos comandos apresentados na questão. Na segunda alternativa, foi solicitado aos alunos a identificação dos elementos que compõem o cone, com altura $h = 6$ e o raio $R = 3$. A terceira alternativa determinava os segmentos do raio e da altura desse cone. Já a quarta alternativa requeria o cálculo da medida da área total do cone, utilizando as ferramentas disponíveis no *GeoGebra 3D*. Por fim, na última alternativa, os alunos deveriam projetar o sólido em Realidade Aumentada (RA). A Figura 16, a seguir, mostra as respostas de alguns alunos.

Figura 16– Resposta das alternativas 4 e 5

D) Calcule a medida da área total do cone usando a ferramenta de área, quando o $R=3$ e $h= 10$.

$$A_B = \pi R^2 \quad \hookrightarrow \quad A_B = 3,14 \cdot 3^2 \quad g^2 = 3^2 + 10^2 \quad A_T = A_B + A_L$$

$$A_L = \pi \cdot R \cdot g \quad A_B \approx 88,26 \quad g = \sqrt{109} \quad A_T = 28,26 + 98,34$$

$$g^2 = R^2 + h^2 \quad A_L = 3,14 \cdot 3 \cdot 10,44 \quad g \approx 10,44 \quad A_T = 126,60 \text{ u.a.}$$

E) Qual a medida do Volume do cone usando a ferramenta do Volume, quando o $R=4$ e $h= 9$.

$$V = \frac{h \pi R^2}{3}$$

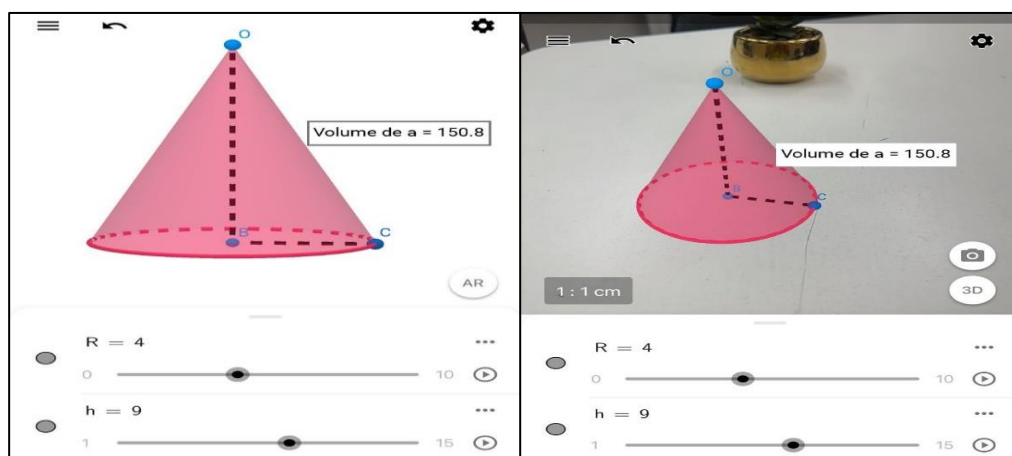
$$V = \frac{9 \cdot 3,14 \cdot 4^2}{3} = 3,14 \cdot 16 = 50,72 \text{ u.v.}$$

$$V = 3 \cdot 3,14 \cdot 16 = 150,72 \text{ u.v.}$$

Fonte: De autoria própria (2023).

Após a análise dessa atividade, constatamos que os estudantes realizaram a conversão do sistema de registros de representação semiótica figural para o sistema de registros de representação semiótica algébrico. Esse processo contribuiu significativamente para a compreensão dos conceitos, definições e propriedades discutidos. A utilização da Realidade Aumentada (RA) desempenhou um papel crucial, permitindo que os estudantes visualisassem as construções e estabelecessem conexões entre os objetos representados visualmente e as expressões algébricas correspondentes ao cálculo do volume do cone, conforme mostrado na Figura 17.

Figura 17 – Medida do volume do cone em RA



Fonte: De autoria própria (2023).

Portanto, concluímos que o objetivo da atividade foi alcançado, uma vez que os alunos conseguiram identificar e comparar as expressões algébricas que determinam as medidas da área e do volume do cone.

7.6 Análise das Atividades Desenvolvidas na Semana V

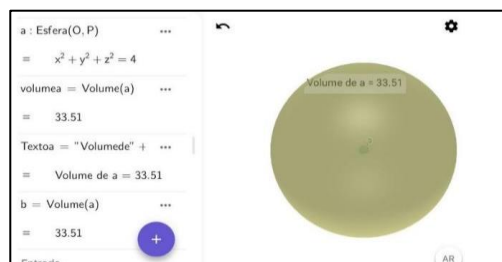
Foi feita uma explicação sobre a esfera, um sólido geométrico de revolução. Os alunos aprenderam a calcular as medidas da área e do volume dessa figura. Em seguida, foi proposta aos alunos a construção da esfera no aplicativo *GeoGebra 3D*, e eles realizaram as atividades conforme orientado.

Durante a atividade, alguns alunos relataram que esta foi uma das construções mais simples, considerando que o próprio aplicativo já proporcionava a base necessária para a construção. Dessa forma, eles não enfrentaram dificuldades significativas, tanto no cálculo da área quanto no cálculo do volume da esfera, uma vez que as ferramentas do aplicativo forneciam os resultados com precisão. Assim, essa atividade se destacou como uma das mais fáceis de serem realizadas pelos alunos.

Atividade 11:

A construção da esfera, seguindo os passos da décima primeira atividade descrita na questão número 1, que abordava o cálculo das medidas do volume e da área da esfera, ocorreu de maneira bastante ágil, pois os alunos já estavam familiarizados com diversas funcionalidades do aplicativo. Isso possibilitou que todos completassem a construção com facilidade e tivessem a oportunidade de explorá-la com calma. A Figura 18, apresentada a seguir, ilustra as respostas fornecidas em Realidade Aumentada (RA) por um dos alunos.

Figura 18 - Construção da Esfera e cálculo do volume

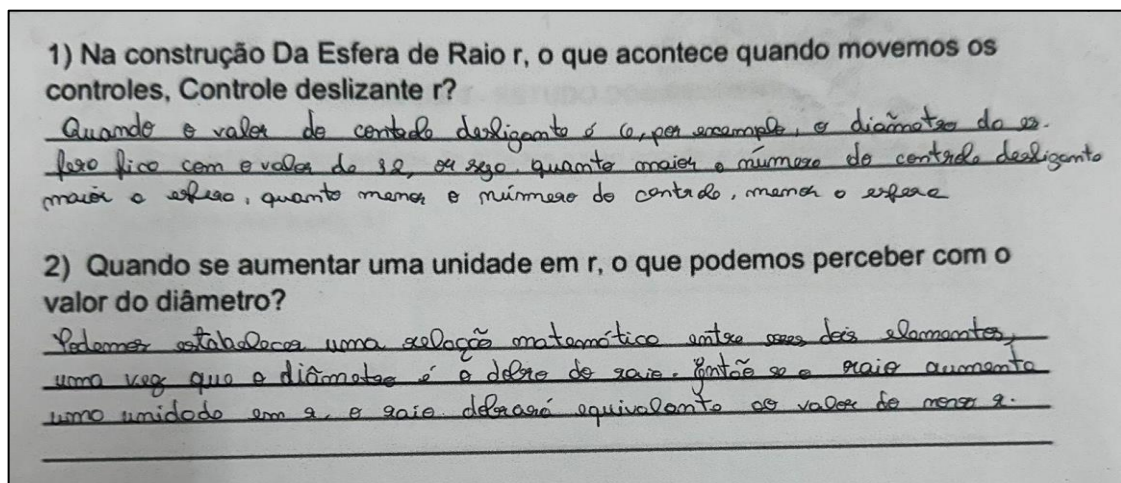


Fonte: De autoria própria (2023).

Atividade 12:

Nesta atividade, os alunos foram desafiados a identificar determinados elementos da esfera com base na construção realizada no GeoGebra 3D. Além disso, deveriam responder a uma questão relacionada ao controle deslizante que ajusta o raio da esfera. Na segunda questão, esperava-se que os estudantes analisassem e descrevessem a relação entre o raio e o diâmetro, observando o comportamento do diâmetro à medida que o raio da esfera era aumentado. A Figura 18, apresentada a seguir, ilustra as respostas fornecidas por um dos alunos.

Figura 19 – Respostas da atividade 12 questão 1 e 2.



Fonte: De autoria própria (2023).

Com base nas análises realizadas, concluímos que a utilização da realidade aumentada (RA) foi essencial para que os estudantes realizassem a conversão entre os sistemas de registros de representação semiótica, algébrica e em língua materna. Em outras palavras, os estudantes transitaram de maneira eficaz entre esses registros ao longo da implementação da sequência didática como um todo. Esse processo, conforme os pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), contribuiu significativamente para que os alunos calculassem o volume da esfera utilizando a ferramenta de cálculo de volume disponível.

7.7 Conclusão Geral das Análises

As atividades iniciais tiveram como objetivo apresentar, a partir da revisão de conceitos relacionados à Geometria Plana, os conteúdos de Geometria de forma gradual, culminando na construção dos sólidos regulares, com foco no cálculo de suas áreas e volumes. Cada atividade foi realizada sob a orientação do professor, que incentivou os alunos a serem participativos e autônomos no processo de descoberta, desenvolvendo o pensamento crítico, a criatividade e, conseqüentemente, a aprendizagem.

A avaliação da aprendizagem foi contínua, ocorrendo por meio da observação de evidências de aprendizado e, principalmente, da análise das produções escritas dos alunos. Também foram consideradas as discussões em grupo e as construções geométricas tridimensionais. Durante o processo avaliativo, foi observado como os alunos trabalharam as propriedades, utilizaram os materiais de apoio (figuras planas, materiais manipuláveis e recursos tecnológicos) e identificaram os elementos necessários para resolver problemas que não estavam diretamente acessíveis à percepção, ou seja, a necessidade de observar as dimensões menores da figura.

Ao final da aplicação da sequência didática aplicamos um questionário para os alunos avaliarem essa metodologia. Utilizamos uma amostra de 36 alunos e os dados coletados nos questionários estão representados na tabela a seguir.²

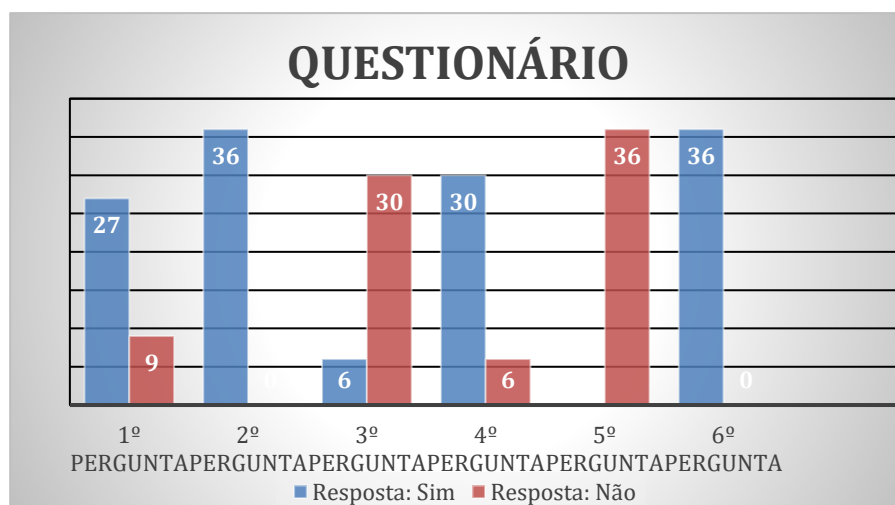
Quadro 2 - Dados do questionário

PERGUNTAS DO QUESTIONÁRIO	Resposta dos alunos	
	Sim	Não
1 - Você sente dificuldades na disciplina de matemática?	27	9
2- Você considera que a tecnologia pode ser útil no ensino de matemática?	36	0
3 - Você lembra de ter estudado geometria espacial no fundamental 2?	6	30
4 - Você considera que a Geometria Espacial é útil no dia-a-dia?	30	6
5 - Você já conhecia a calculadora GeoGebra?	0	36
6 - Você gostou da abordagem metodológica utilizada pelo professor para estudar a Geometria Espacial?	36	0

Fonte: De autoria própria (2024).

² O questionário aplicado para turma se encontra no apêndice B.

Quadro 3 - Gráfico dos dados do questionário



Fonte: De autoria própria (2024).

Quando foi feita a primeira pergunta ("Você sente dificuldades na disciplina de Matemática?"), 27 alunos responderam "sim" e apenas 9 responderam "não". Esses dados revelam a necessidade de o professor sempre se preocupar em buscar metodologias que possam facilitar a aprendizagem de Matemática. É sabido o quanto a aprendizagem nessa área pode ser difícil para alguns alunos, e muitas vezes, essas dificuldades vêm desde a base escolar. Resolver esses problemas apenas quando o aluno chega ao Ensino Médio é um grande desafio para o professor.

Também questionamos se o aluno considerava que a tecnologia poderia ser útil no ensino de Matemática. Todos os alunos responderam "sim". O fato de algumas escolas ainda se mostrarem reticentes quanto ao uso de tecnologias como recursos metodológicos, que podem dinamizar a aprendizagem em disciplinas como Matemática, evidencia que o uso da tecnologia ainda enfrenta barreiras, até mesmo por parte dos próprios educandos. Isso ocorre porque, muitas vezes, a presença de objetos eletrônicos em sala de aula é vista como algo negativo e serve apenas para dispersar a atenção do aluno. Com o desenvolvimento da nossa sequência didática, notamos que esses obstáculos podem ser superados por meio de um bom planejamento por parte do professor.

Nesse sentido, ao decidir fazer uso desses recursos tecnológicos em sala de aula, o professor precisa estar ciente de que o resultado pode não ser o desejado. Entretanto, ao dinamizarmos o ensino da geometria espacial, acreditamos que esse caminho metodológico poderá ser aplicado por outros professores em diferentes contextos. Dessa forma, reiteramos o impacto positivo do uso do aplicativo *GeoGebra*.

Na questão 3, foi questionado se o educando lembrava de ter estudado geometria espacial no Ensino Fundamental II. Trinta alunos marcaram a alternativa "não". Isso revela que a abordagem da geometria espacial fica restrita ao Ensino Médio. Espera-se que os alunos já tenham contato com a geometria espacial ainda no Ensino Fundamental II, mesmo que de forma superficial. No entanto, no caso da escola estudada, a maioria dos alunos só teve contato com essa temática no Ensino Médio. Não acreditamos que seja um caso isolado, pois o currículo e os livros didáticos adotados variam de escola para escola. Em suma, essa realidade pode ser mais comum do que imaginamos.

Quando questionamos se o aluno considerava a Geometria Espacial útil no dia a dia, 30 alunos responderam "sim" e 6 responderam "não". Essa pequena parcela que respondeu "não" pode indicar que esses alunos tiveram professores que utilizavam metodologias mais tradicionais e que não faziam essa ligação entre o saber matemático aprendido em sala de aula e a realidade. Dessa forma, é preciso sempre pautar nossa prática educativa aliada à realidade dos alunos. Refletir sobre o contexto social dos educandos nos oferece novas perspectivas de abordagens metodológicas para nossas aulas.

Como o aluno vai se interessar pelo campo da geometria espacial se o professor não o incentiva a ter autonomia? Dessa forma, ao trazer uma metodologia em que, em alguns momentos, os alunos teriam a oportunidade de desenhar os sólidos geométricos, nosso objetivo era mostrar para o aluno o quanto estudar a geometria espacial poderia ser algo prazeroso.

Nesse sentido, acreditamos que nossa abordagem serviu para os alunos pensarem em outras formas de aprendizagem. O "aprender fazendo" desperta o interesse e a curiosidade. Partindo do estudo da transposição didática, mostramos para nossos educandos que é possível trazer os saberes científicos para a nossa realidade. Afinal de contas, não existe teoria sem prática. É preciso visualizar esses saberes no nosso dia a dia.

Foi perceptível que os alunos ficaram mais receptivos quando apresentei essa metodologia, na qual eles eram vistos como protagonistas da construção do conhecimento. Ao longo de todo o processo, assumi meu lugar de professor, mas não como uma figura distante do aluno; foquei em ser um mediador entre o educando e o uso dessa tecnologia. Acreditamos muito na construção de saberes pautada na abordagem horizontal, onde professor e alunos aprendem juntos.

Quando questionamos se os educandos conheciam o aplicativo de RA, o *GeoGebra*, a resposta foi unânime: todos os alunos disseram que não o conheciam. Confesso que foi uma surpresa essa resposta, pois estamos inseridos em um mundo rodeado por recursos tecnológicos, e os educandos disseram não conhecer um aplicativo que já está circulando há quase 10 anos — claro que ele vem sempre recebendo atualizações. Reafirmamos o quanto acreditamos que a RA torna o tema da geometria espacial mais palpável ao educando.

Dessa forma, a aplicação dessa sequência didática mostrou aos educandos que, apesar de a matemática ser uma ciência exata, é possível encontrar mais de um caminho para aprender um determinado tema. O aluno aprendeu que a tecnologia pode nos ajudar a superar obstáculos no ensino-aprendizagem da matemática.

Para finalizar nosso questionário, fizemos a seguinte questão: "Você gostou da abordagem metodológica utilizada pelo professor para estudar a Geometria Espacial?" Todos os 36 alunos que responderam ao questionário disseram que gostaram da metodologia. Como professores, sempre buscamos acertar a metodologia utilizada em nossas aulas, e receber um *feedback* tão positivo sobre uma metodologia aplicada renova meu desejo de fazer a diferença em sala de aula.

Retomo o que pontuei na introdução e parto da premissa de que a matemática é indispensável em nosso dia a dia, e o professor precisa estar sempre buscando formas de atualizar sua formação. Refletir sobre o quanto o uso das tecnologias pode ser útil na sala de aula é um campo que merece grande atenção de nós, professores. Em resumo, acreditamos que proporcionamos a esses educandos uma oportunidade de ressignificar o estudo da geometria espacial.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando vislumbrei a possibilidade de construir um problema de pesquisa dentro do campo da Geometria Espacial, me questionei sobre como transformaria esse problema em um caminho metodológico capaz de superar obstáculos relacionados ao estudo dessa área da matemática. Dessa forma, desde o início, acreditei que a tecnologia seria uma ponte para resolver esse problema na prática. Assim, adotei o aplicativo *GeoGebra* como instrumento metodológico a ser utilizado em sala de aula, e pude notar o quanto ele dinamiza a construção dos sólidos geométricos.

Em nossa pesquisa, refletimos que o ensino de Matemática, de modo geral, enfrenta alguns desafios, e muitas vezes os professores questionam como sanar essas dificuldades em sala de aula. Chegamos à conclusão de que o professor é um eterno aprendiz. É necessário estar sempre estudando para preencher lacunas referentes ao ensino-aprendizagem de nossos alunos. Além disso, refletimos sobre a Geometria Espacial e o quanto ela pode se beneficiar das tecnologias de RA.

Com o desenvolvimento da pesquisa, conseguimos responder aos nossos objetivos, uma vez que identificamos as dificuldades relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem, especialmente no campo da Geometria Espacial. Dessa forma, o uso do aplicativo de RA permitiu que os alunos quebrassem a barreira que dificultava uma maior apreensão desse conteúdo.

Ao longo da aplicação da sequência didática, criamos estratégias que visavam a transposição didática, a fim de proporcionar um ensino da Geometria Espacial dinâmico e de fácil compreensão. Através da TRRS, foi possível mostrar para os educandos que a representação dos sólidos geométricos pode ser visualizada por meio de várias linguagens, como apontam os teóricos que embasaram esta pesquisa. Além disso, por meio de uma mediação constante entre professor-aluno-tecnologia, buscamos sanar as dificuldades dos estudantes e oferecer oportunidades para que eles possam desenvolver e aprimorar competências relacionadas ao conhecimento matemático do objeto de estudo.

Após a aplicação de nossa sequência didática, vimos resultados satisfatórios na prática. Dessa forma, por meio da metodologia utilizada, auxiliei os educandos a construir caminhos para a aprendizagem da Geometria Espacial. Portanto, além de resolver uma lacuna muito comum no ensino da geometria espacial, elaboramos um

percurso metodológico que pode ser aplicado por outros professores de Matemática. Nesse sentido, reiteramos que nosso maior desejo é contribuir para a autonomia de nossos educandos, e, para isso, podemos lançar mão de muitos recursos tecnológicos, pois acreditamos que a tecnologia não é uma vilã; ela permite abrir portas e explorar novos horizontes em sala de aula.

Esta pesquisa, além de contribuir para o campo da Educação Matemática, me permitiu uma maior aproximação entre minha prática docente e minha vida como pesquisador. Em suma, isso evidencia que o professor está em constante formação. A pesquisa me proporcionou novas reflexões acerca das metodologias no ensino de Matemática, evidenciando o quanto o campo do ensino pode ser beneficiado pela pesquisa. Em resumo, este trabalho representa um salto tanto na minha vida como docente quanto como pesquisador. Reiteramos que a pesquisa preencheu lacunas no campo da Educação Matemática e apontou caminhos que outros professores poderão seguir para superar dificuldades no ensino da Geometria Espacial.

REFERÊNCIAS

AMORIM, Silvio Luiz Gomes De. **A Utilização Integrada Da Realidade Aumentada Com O Software GeoGebra Na Perspectiva Da Aprendizagem Móvel De Geometria Espacial**. Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO, Ouro Preto -- MG, 2023.

ÁVILA, Geraldo. **Introdução à Análise Matemática**. Editora Edgard Blücher 1999.
Azuma, R. T. (1997). "A Survey of Augmented Reality." Presence: Teleoperators and Virtual Environments, 6(4), 355-385.

BARROS, Francisco Miranda. **O Uso Do GeoGebra Como Proposta De Intervenção No Ensino E Aprendizagem Da Trigonometria No Ensino Médio**. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Campus Poeta Torquato Neto, Teresina - PI, 2024.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 2º ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CADOZ, Claude. **A realidade virtual**. Lisboa: Ed. Piaget. 1994. 142 p.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do Ensino da Matemática**. 2. ed. rev. – São Paulo: Cortez, 1992.

CHEVALLARD, Y.: **La Transposition Didactique**. Paris: La Pensée Sauvage, 1991.
D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática** – São Paulo: Summus; Campinas: Ed. da Universidade do Estado de Campinas, 1986.

CRUZ, D. G. da. **A utilização de Ambiente Dinâmico e Interativo na construção do conhecimento produzido**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Setor de Ciência Humanas e Sociais, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005.

DANTAS, Elania Hortins. **Uso Da Realidade Aumentada No Ensino Da Geometria Espacial**. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA – UEPB, Campina Grande, 2018.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: Da teoria à prática**. Campinas, SP: Papirus, 1996.

DENARDI, Vânia Bolzan. **Teoria dos Registros de Representação Semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática**. XXI Ebrapem. Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pelotas. Rio Grande do Sul. 2017.

DUVAL, Raymond, Trad. Méricles Thadeu Moretti. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis -SC, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>.

EMILIANO, Gledson Nilton. **Proposta De Utilização Do “Software” GeoGebra No Ensino Médio Com A Construção E Exploração De Secções Em Sólidos Geométricos Para A Determinação De Volumes Parciais.** Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO CARLOS ALBERTO REYES MALDONADO, Sinop – MT, 2021.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática.** Tradução hygino H. Domingues. 5ª ed – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERNER, D. L. et al. Geometria Espacial: Análise de uma coleção de livros didáticos no ensino médio In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2016, São Paulo Anais... São Paulo, 2016, p. 1-12. Disponível em: . Acesso em: 09/06/2024.

FORTE, Cleberson e KIRNER, Cláudio (2009). **Usando Realidade Aumentada no Desenvolvimento de Ferramenta para Aprendizagem de Física e Matemática**

FRANCA, Jefferson Silva. **Uma Proposta Didática Da Realidade Aumentada No Ensino Da Geometria Espacial.** Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined, Belém, 2015.

FRANCHI, Ana. **Educação Matemática: uma (nova) introdução** / et al; org. Silvia Alcântara Machado - ed. Revista. – São Paulo: EDUC, 2008.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.** 13. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

HENRIQUES, A.; ALMOULOU, S. A. **Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior:** uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. Ciência. Educ., Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016

HOUNSELL, M. S.; TORI, R.; KIRNER, C. Realidade Aumentada. In: TORI, R.; HOUNSELL, M. S. (Org.). **Introdução a Realidade Virtual e Aumentada.** Porto Alegre: SBC, 2018.

LIMA, Rodrigo Malan Loureiro. **O Uso Da Realidade Aumentada No Ensino De Prismas: Um Referencial Didático Para Professores Do Ensino Médio.** Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade

Da Integração Internacional Da Lusofonia Afro-Brasileira - Campus Redenção, Rio de Janeiro, 2021.

LOPES, L. M. D.; VIDOTTO, K. N. S.; POZZEBON, E.; FERENHOF, H. A. **Inovações Educacionais com o uso da Realidade Aumentada: uma revisão sistemática.** Educação em Revista, v. 35, n. 1, p. 1-33, 2019.

MACHADO JÚNIOR, A. G. **Modelagem matemática no ensino-aprendizagem: ação e resultados.** Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas – Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

MACEDO, A. C; SILVA, J. A; BURIOL, T. M. **Usando smartphone e Realidade Aumentada para estudar Geometria Espacial.** Revista Novas Tecnologias na Educação, v. 14, n. 2, p. 1-10, 2016.

MARQUES, V. D.; CALDEIRA, C. da C. **Dificuldades e carências na aprendizagem da Matemática do Ensino Fundamental e suas implicações no conhecimento da Geometria.** Revista Thema, v. 15, n. 2, p. 403-413, 2018.

MARTINS, Fernando Nascimento. **Uma Proposta De Abordagem Da Planificação De Poliedros No Ensino Básico Utilizando O Recurso De Realidade Aumentada Do GeoGebra.** Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal Do Estado Do Rio De Janeiro – UNIRIO, Rio de Janeiro, 2021.

MENDES, Cláudio José. **O uso do GeoGebra 3D no ensino de Geometria.** Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2020.

MINAYO, Maria de Sant'Anna. **Pesquisa qualitativa: teoria, método e criatividade.** São Paulo: Editora Hucitec, 2010.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (Org). **Pesquisa social: teoria, método e criatividade.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

NASCIMENTO, Eimard GA do. **Avaliação Do Uso Do Software GeoGebra No Ensino De Geometria: Reflexão Da Prática Na Escola.** XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, ISSN, v. 8457, p. 2012, 1808

OLIVEIRA, Odailson Gonçalves De. **O Uso do GeoGebra 3D com Realidade Aumentada no Ensino de Geometria Espacial.** Mestrado Profissional em Matemática na Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Estadual De Ponta Grossa, Rio de Janeiro, Biblioteca Depositária: UEPG, 2021.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma Análise da Influência Francesa.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. Coleção Tendências em Educação Matemática.

PARRA, C. SAIZ, I. **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas.** Porto Alegre, Artmed (Artes Médicas). 1996. 258p.

PIAGET, Jean. **Seis estudos de Piaget**. Tradução: Maria Alice Magalhães D'Amorim e Paulo Sérgio Lima Silva. 25ª ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2011.

RAMOS, Altina; FARIA, Paulo M. e FARIA, Ádila. **Revisão sistemática de literatura: contributo para a inovação na investigação em ciências da educação**. *Rev. Diálogo Educ. Psicol.* 2014.

REFATTI, Liliane Rose. **Uma Sequência Didática Para O Estudo De Transformações Geométricas**. Profissionalizante em Ensino De Física E De Matemática Instituição de Ensino: Universidade Franciscana, Santa Maria Biblioteca Depositária: Centro Universitário Franciscano – UNIFRA, Santa Maria, 2012.

SADOVSKY, Patrícia. **Falta fundamentação didática no ensino de matemática**. Revista Novaescola, Editora Abril, São Paulo. Ed. Especial 14. p.08- 10.jul. 2007. Paulo.Editora Saraiva 2010.

SANCHEZ, Jesús Nicasio Garcia. **Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SARTORI, Ademilde Silveira; SOARES, Maria Salete **Prado. Concepção dialógica e as NTIC: A educomunicação e os ecossistemas comunicativos**. Núcleo de Comunicação e Educação da Universidade de São Paulo, 2013. Disponível em: <http://www.usp.br/nce/wcp/arq/textos/86.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2021.

SOUSA, Ivanildo Fernandes De. **Sequência Didática Para o Ensino de Prismas e Pirâmides Com o Método de George Polya e Software Geogebra 3D**. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Estadual Do Ceará, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca Central Prof. Antonio Martins Filho, 2023.

SOUZA, Gabriel Moreno Ferreira de. **Uso do GeoGebra 3D no Ensino de Geometria Espacial**. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Juiz de Fora, 2017.

SOUZA, Jaime Batista De. **Sequências Didáticas Com Realidade Aumentada Como Auxílio Para Desenvolver A Habilidade De Visualização Espacial**. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal Dos Vales Do Jequitinhonha E Mucuri, Rio de Janeiro, 2020.

SOUZA, Loana Araújo. **Uma Proposta Para O Ensino Da Geometria Espacial Usando O Geogebra 3D**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2014.

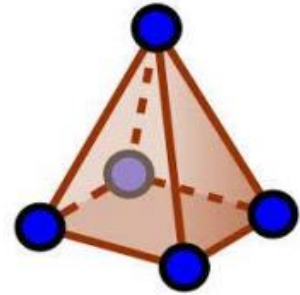
VALENTE, J. A. **As tecnologias digitais e os diferentes letramentos**. Revista Pátio. Porto Alegre, RS, v. 11, n. 44, 2008.

O que é Realidade Aumentada, como funciona e exemplos de aplicativos. **CNN**, 2023. Disponível em: < <https://www.cnnbrasil.com.br/tecnologia/realidade-aumentada/>>. Acesso em: 20 de set. de 2024.

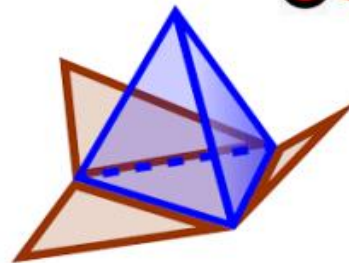
APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA



SEQUÊNCIA DIDÁTICA



Estudo dos Sólidos Geométricos com Calculadora
Tridimensional GeoGebra



VITÓRIA DA CONQUISTA - BA
DEZEMBRO - 2024

RESUMO

O objetivo desta Sequência Didática é aplicar conceitos de Geometria Espacial, por meio da Realidade Aumentada (RA), utilizando a calculadora gráfica GeoGebra 3D, visando contribuir para o cálculo da área e do volume dos sólidos geométricos regulares. Os sólidos geométricos em estudo incluirão: prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Os participantes do estudo foram alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual situada em uma cidade do interior da Bahia. O uso dos recursos das tecnologias digitais no ensino da Matemática oferece diversas vantagens, enriquecendo o processo educacional e preparando os alunos para um futuro cada vez mais digital. Este software possibilita ao estudante criar e manipular figuras geométricas virtuais, atualizadas em tempo real. Com a calculadora tridimensional do *GeoGebra*, os alunos terão a oportunidade de visualizar e aplicar na prática os conceitos teóricos de Geometria Espacial abordados em sala de aula. A Sequência Didática está organizada de maneira sequencial, explorando recursos didáticos que permitem a investigação de objetos em duas e três dimensões, tornando o uso da tecnologia indispensável como ferramenta facilitadora da aprendizagem. Outrossim, ao utilizar uma abordagem prática e dinâmica, essa sequência não só atrai o interesse dos alunos pela Matemática, mas também fortalece habilidades essenciais, como o raciocínio crítico e a capacidade de resolver problemas. Assim sendo, espera-se que a interação com a Realidade Aumentada não só amplie a compreensão dos conceitos geométricos, mas também inspire os alunos a se tornarem estudantes autônomos e criativos em sua jornada escolar. Ressalta-se que este produto educacional poderá ser aplicado por outros professores de Matemática em oportunidades futuras, pois oferece um caminho metodológico para a abordagem da Geometria Espacial.

Palavras-chave: Ensino de matemática; Geometria Espacial.; *GeoGebra* 3D; Realidade Aumentada.

INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

Esta sequência didática tem origem na pesquisa de mestrado intitulada **"Estudo dos sólidos geométricos por meio da Realidade Aumentada com a calculadora tridimensional GeoGebra"**. Nesse sentido, este produto educacional foi elaborado e aplicado numa turma do segundo ano do Ensino Médio do Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães, na disciplina de Matemática. O objetivo geral da pesquisa girou em torno da seguinte questão: **Como a Calculadora Tridimensional GeoGebra pode contribuir para o ensino e a aprendizagem da geometria espacial?** A metodologia de pesquisa adotada foi qualitativa, devido à sua capacidade de oferecer diversas possibilidades de análise.

A partir da minha prática em sala de aula como professor de Matemática, pude observar que os alunos apresentam dificuldades relacionadas à apreensão de conteúdos de geometria espacial. Boa parte dessas dificuldades está ligada a metodologias de ensino mais tradicionais, como as aulas expositivas.

Tendo em vista essa deficiência dos alunos, vislumbrei a possibilidade de criar uma forma mais dinâmica de trabalhar essa temática em sala de aula. Como professor, sei da necessidade de sempre atualizarmos nossa prática, pois a educação acompanha as mudanças do tempo presente, e a sala de aula pode se beneficiar consideravelmente dessas inovações.

Dessa forma, vi na tecnologia um grande potencial para sanar essas dificuldades. Esta sequência didática foi elaborada como um recurso metodológico para ensinar como utilizar a calculadora tridimensional GeoGebra no estudo da geometria espacial. Em suma, esse produto educacional aponta um caminho metodológico para abordar essa temática de forma mais dinâmica, permitindo que os alunos estabeleçam a relação entre o saber adquirido em sala de aula e a realidade.

O conteúdo **"Geometria Espacial por meio da Realidade Aumentada"** proporciona ao aluno uma melhor compreensão da análise de figuras no espaço. A aprendizagem da geometria espacial permite ao aluno descobrir e determinar, por meio de cálculos matemáticos, as propriedades dos sólidos geométricos, além de calcular o volume e a área dos objetos, ou seja, o espaço que esses objetos ocupam.

Mediante o estudo da geometria espacial, os alunos poderão aprender sobre todas as medidas e propriedades das figuras geométricas de forma interativa e dinâmica. A Realidade Aumentada (RA) é uma tecnologia que mistura imagens do

mundo virtual com o mundo real. Assim, ao introduzir essa ferramenta no processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial, os estudantes conseguirão observar e calcular imagens virtuais por meio de um dispositivo tecnológico, aprendendo de forma interativa.

O uso da RA como recurso tecnológico pode contribuir positivamente para o processo de interação e compreensão da teoria, além de desenvolver competências e habilidades de visualização dos estudantes. A calculadora tridimensional *GeoGebra* surge como uma ferramenta tecnológica de ensino dinâmico na Matemática. Esse software permite ao aluno a construção e manipulação de figuras geométricas virtuais atualizadas em tempo real.

A partir da calculadora tridimensional *GeoGebra*, os alunos poderão visualizar e aplicar na prática os conceitos teóricos sobre a Geometria Espacial estudados em sala de aula. Dessa forma, serão estimulados no processo de criatividade e raciocínio lógico envolvendo essas figuras geométricas, além de desenvolverem maior facilidade na resolução das atividades propostas.

OBJETIVO GERAL

- Analisar o quanto a calculadora tridimensional *GeoGebra* pode contribuir de forma inovadora no processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial;

OBJETIVOS

- Analisar figuras geométricas espaciais a partir da realidade aumentada e determinar através de cálculos matemáticos, propriedades dos sólidos geométricos.
- Relacionar as figuras do mundo virtual com as formas geométricas do mundo real.
- Identificar novas possibilidades de construção das figuras geométricas através da realidade aumentada.
- Desenvolver raciocínio lógico com auxílio da calculadora 3D no *GeoGebra*.
- Aprender a calcular as figuras geométricas através da calculadora 3D no *GeoGebra*.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A finalidade desta Sequência Didática é proporcionar uma abordagem eficiente para tornar o ensino de Geometria Espacial mais interativo e atraente, resultando em um aprendizado mais relevante. Em harmonia com a perspectiva elaborada pelo francês Raymond Duval, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) examina o aprendizado em Matemática com foco na investigação de diferentes registros de representação em um sistema de signos. Seu objetivo é explorar como essas variadas formas de representação influenciam a compreensão e a construção do conhecimento matemático por parte dos alunos.

As atividades foram concebidas para alunos do 2º ano do Ensino Médio e visam utilizar a Realidade Aumentada (RA), facilitando o cálculo do volume dos sólidos geométricos.

A realização dessa sequência didática foi feita em etapas, a saber:

- Explicação da metodologia utilizada no desenvolvimento da atividade.
- Apresentação do aplicativo *GeoGebra*.
- Orientações de como fazer download do aplicativo para o celular.
- Orientações de como manipular o aplicativo.
- Explicação sobre a Geometria Espacial enfatizando os sólidos geométricos que seriam trabalhados na sequência didática (Prisma, Pirâmide, Esfera, Cone e Cilindro).
- Os alunos foram avaliados ao longo da aplicação da sequência.
- Aplicação de um questionário para avaliarmos se a metodologia foi inovadora e se contribuiu para os alunos aprenderem a Geometria Espacial.

TEMPO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

- Serão necessárias 15 aulas de 50 minutos, dividida da seguinte maneira:
- 1º Semana 23/10 - 3 aulas
- 2º Semana 30/10 – 3 aulas
- 3º Semana 06/11 – 3 aulas
- 4º Semana 13/11 – 3 aulas
- 5º semanas 20/11 – 3 aulas

MATERIAIS NECESSÁRIOS PARA A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

- Caderno para anotações
- Smartphone/Aparelho de Celular
- Notebook/TV
- Projetor/Datashow

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

- Os alunos serão organizados em duplas, na sala de aula, dessa forma quem não tiver o recurso no Smartphone, pode sentar perto de alguém que tenha.

COMPETÊNCIAS GERAIS (BNCC)

- Compreender como a matemática pode ser estudada com o auxílio de novas tecnologias que facilitam a aprendizagem da geometria espacial.
- Interpretar as figuras geométricas e relacionar com a teoria sobre conceito de volume, sendo a medida de capacidade dos sólidos geométricos.
- Resolver questões através do desenvolvimento do raciocínio lógico a partir das figuras geométricas tridimensionais e determinar largura, comprimento e altura.
- Solucionar problemas matemáticos de forma rápida por meio do uso da calculadora *GeoGebra 3D*.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA III

No Quadro 4, são apresentadas as habilidades que se espera que os alunos desenvolvam, e essas habilidades estão vinculadas à competência específica V.

Quadro 4 - Habilidades relacionadas com a competência específica III

EM13MAT308	“Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos” (Brasil, 2018).
EM13MAT309	“Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos

	formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais” (Brasil, 2018).
EM13MAT307	“Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais” (Brasil, 2018).

Fonte: Pesquisador (2023) inspirado na BNCC (2018).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA V:

No Quadro 5, são apresentadas as habilidades que se espera que os alunos desenvolvam, e essas habilidades estão vinculadas à competência específica V.

Quadro 5 - Habilidades relacionadas com a competência específica V

EM13MAT504	“Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras” (Brasil, 2018).
EM13MAT50	“Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados” (Brasil, 2018).
EM13MAT506	“Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas” (Brasil, 2018).

Fonte: Pesquisador (2023) inspirado na BNCC (2018).

SEMANA I - AULA 1. APRESENTAÇÃO DA CALCULADORA GEOGEBRA

O GeoGebra é uma ferramenta de matemática interativa que oferece uma calculadora 3D para explorar conceitos matemáticos em três dimensões. O aplicativo é de fácil acesso, encontrasse a versão tanto na Play Store como na App Store:

Figura 20 – Versão na Play Store e App Store

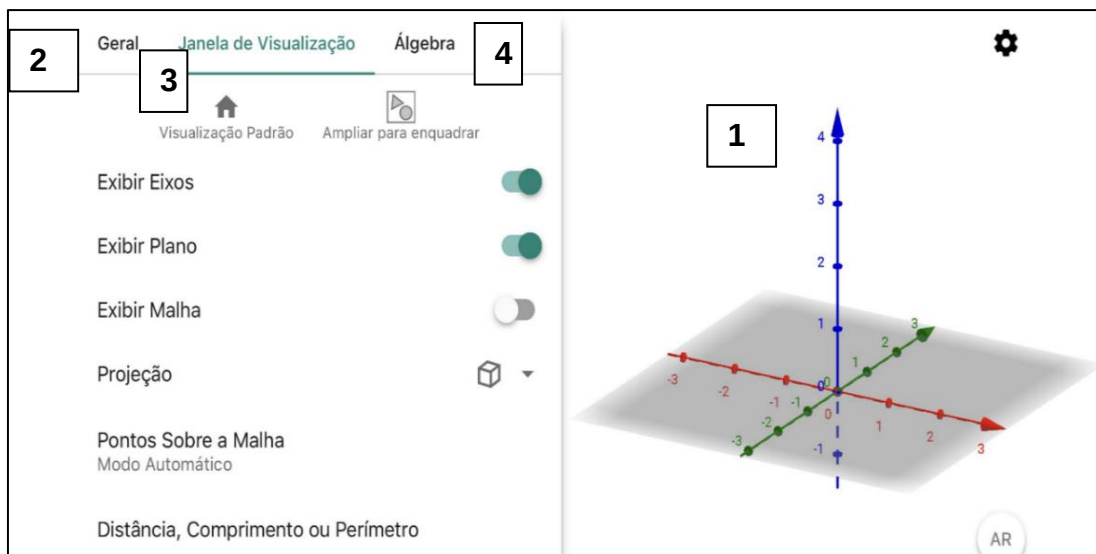


Fonte: De autoria própria (2023).

Mostrando a interface da calculadora GeoGebra 3D, e suas principais áreas.

1- Tela de Desenho 3D, 2- Geral, 3- Janela de Visualização e 4- Álgebra.

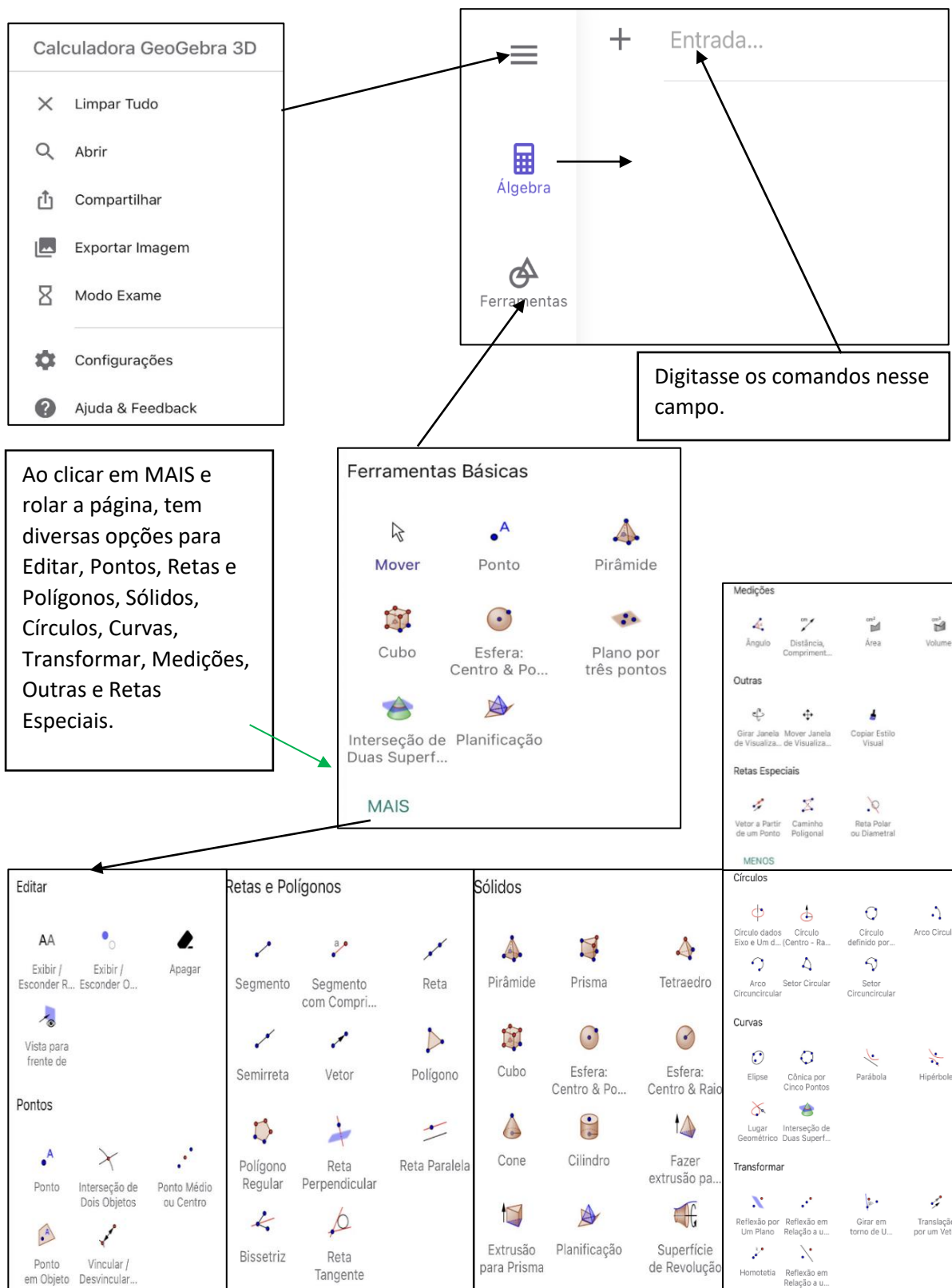
Figura 21 – A interface da calculadora GeoGebra 3D



Fonte: De autoria própria (2023)

No botão de Álgebra  abre a janela de Entrada, nela são inseridos os comandos. Na opção de Ferramentas temos várias opções.

Figura 22 - Ferramentas do GeoGebra 3D



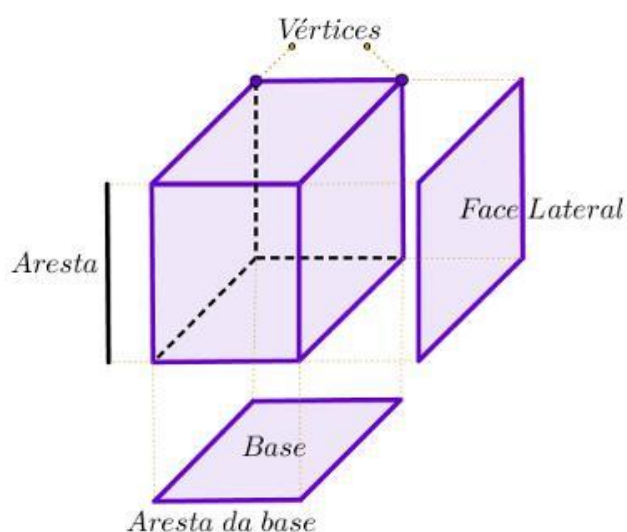
Fonte: De autoria própria (2023)

SEMANA I - AULA 2. GEOMETRIA ESPACIAL ESTUDO DO PRISMA

Atividade 01- Apresentação e Construção dos Prismas.

Um prisma é um sólido geométrico tridimensional com duas bases paralelas que são polígonos idênticos e uma série de faces retangulares ou paralelogramos que conectam as arestas correspondentes das bases. As faces laterais de um prisma reto são sempre perpendiculares às bases, e a altura do prisma é a distância entre as duas bases.

Figura 23 - Elementos que compõe os prismas

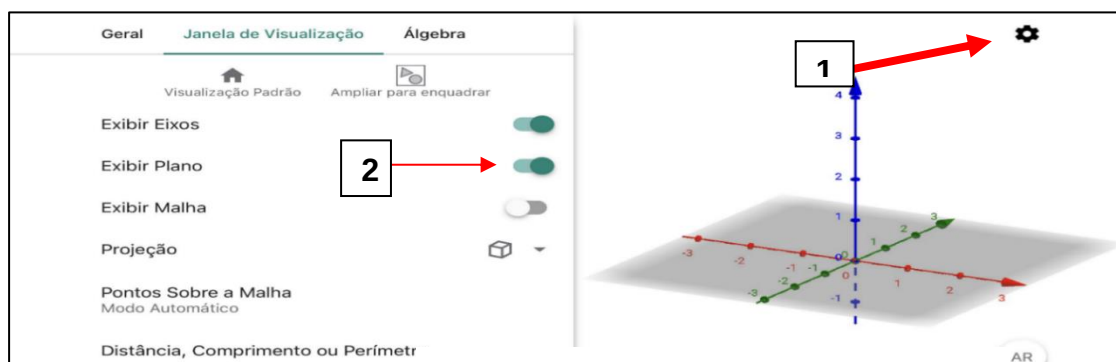


Fonte: site (brasilecola.uol.com.br)

Construção de um prisma reto cuja base é um polígono regular com N lados.

1.0- Acesse as configurações, tocando no ícone 1- configurações"  Na aba nela de Visualização, desmarque as opções 2- Exibir Plano:

Figura 24 - Aba Janela de Visualização



Fonte: De autoria própria (2023).

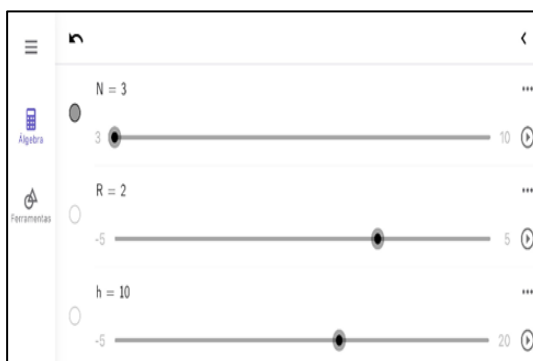
2.0 - Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial. Ir para janela de álgebra, digitar na barra de entrada os comandos:

2.1 $N = \text{Controle Deslizante}(3, 10, 1)$

2.2 $R = 2$

2.3 $h = 10$

Figura 25– Janela de Álgebra



Fonte: De autoria própria (2023).

3.0 Logo em seguida utilize o campo Entrada, para inserir os seguintes comandos:

3.1 $\text{base} = \text{Polígono}(\text{Sequência}(\text{Girar}((R,0,0), 2\pi i/N, \text{EixoZ}), i, 0, N-1))$

3.2 $\text{base} = \text{Polígono}(\text{Lista de pontos})$

3.3 Sequência (Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)

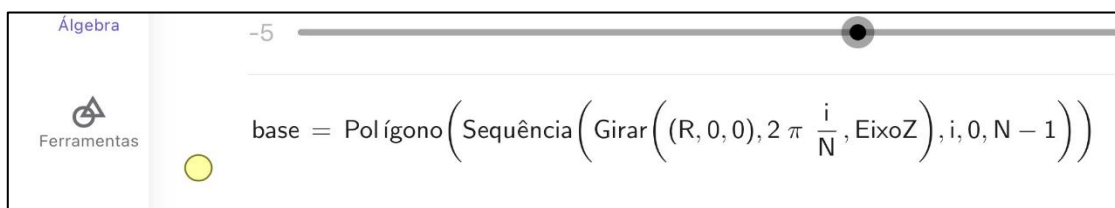
3.4 Girar (Objeto, Ângulo, Eixo de Rotação)

3.5 Abrir Parêntese e digitar $(R,0,0)$

3.6 Digitar: $2\pi i/N, \text{EixoZ}$

3.7 Digitar: $i,0,N-1$ logo em seguida da Enter.

Figura 26- Resultado dos comandos no aplicativo



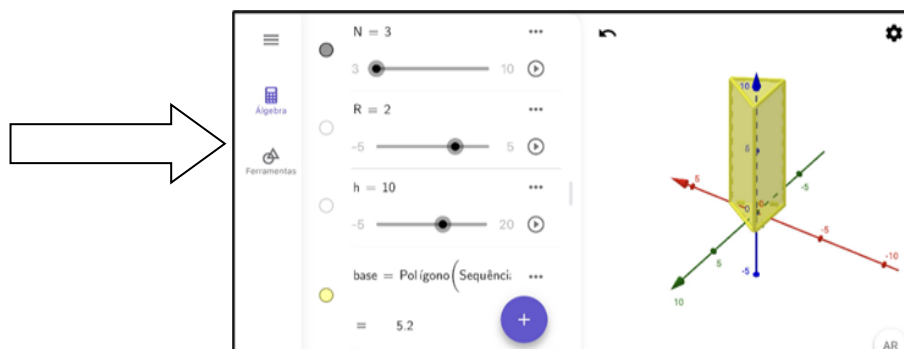
Fonte: De autoria própria (2023).

4.1 Execute os seguintes comandos na caixa de entrada:

4.2 Prisma (base, h)

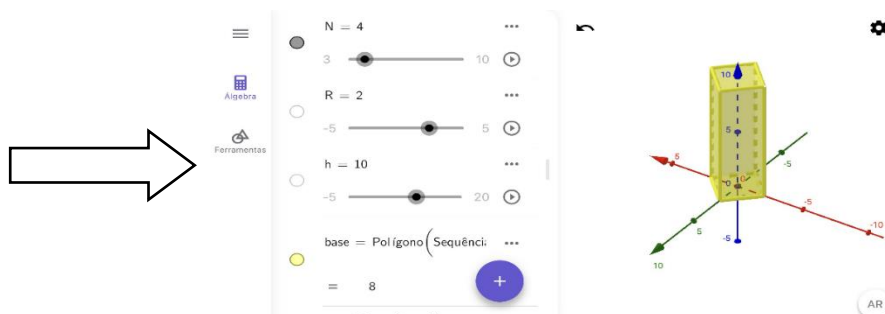
No controle deslizante **N** movimente a barra para $N=3$, $N=4$, $N=5$ e $N=6$ e teremos esses resultados:

Figura 27- Para $N=3$ Prisma Reto de base triangular



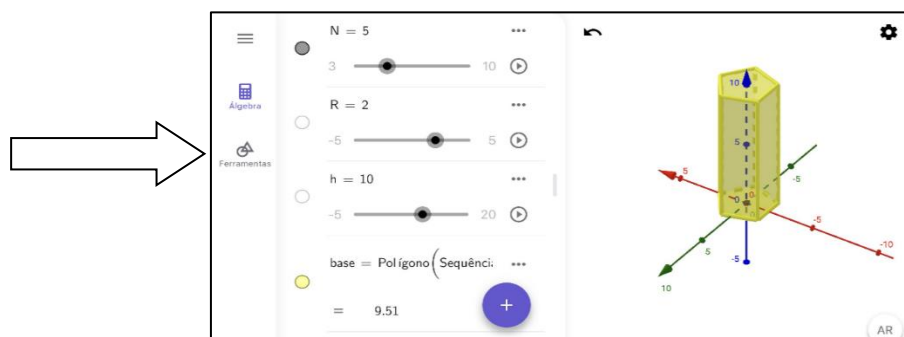
Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 28- Para $N=4$ Prisma Reto de base Quadrangular



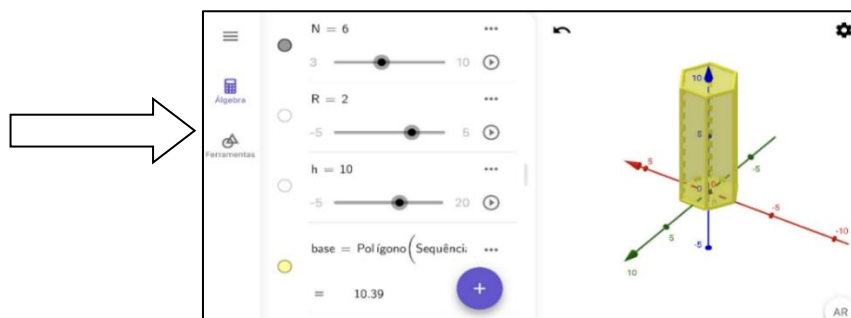
Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 29 - $N=5$; Prisma Reto de base Pentagonal



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 30 - Para $N=6$; Prisma Reto de base Hexagonal

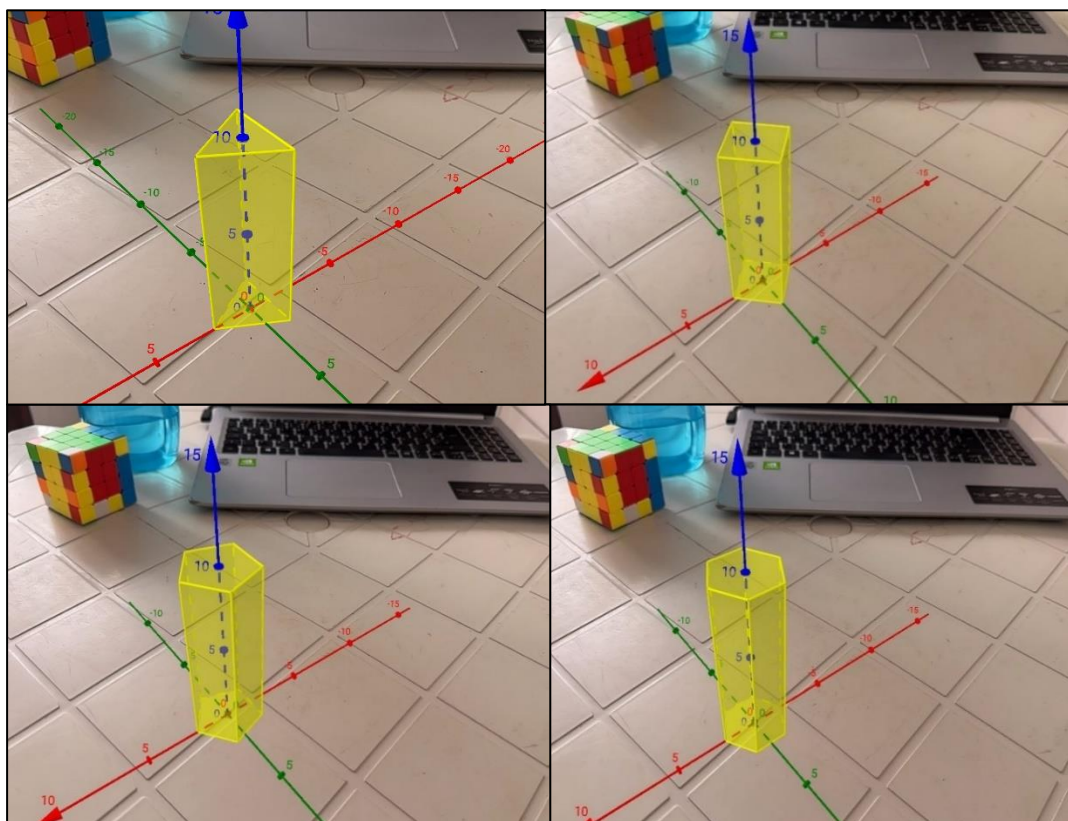


Fonte: De autoria própria (2023).

5.0 Ative o modo de visualização em AR, tocando sobre o botão,  que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica. Localize por meio da câmera uma superfície plana para projetar a o sólido formado.

5.1 Movimente os controles deslizantes N para aumentar o número de lados:

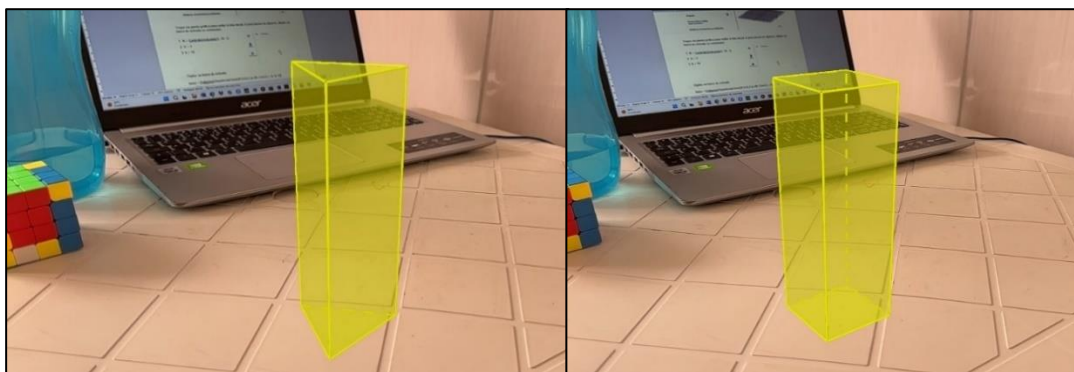
Figura 31 - Resultado dos Prisma em Realidade Aumentada



Fonte: De autoria própria (2023).

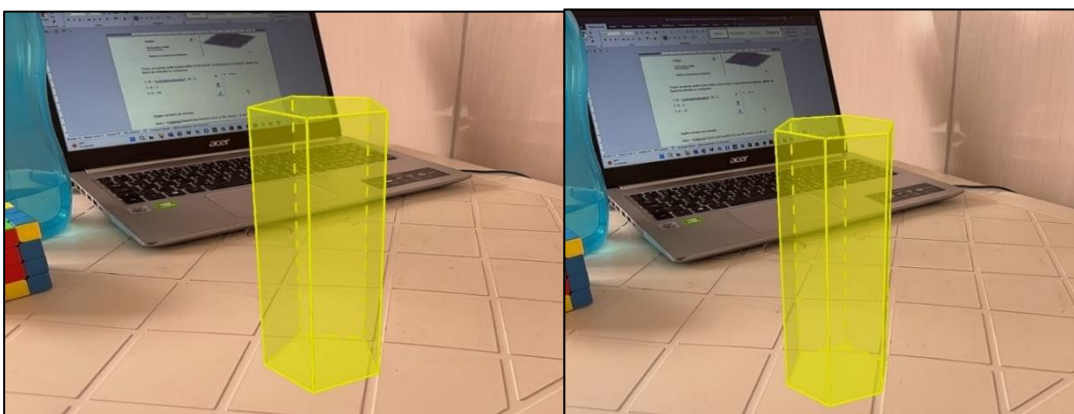
5.2 Acesse as configurações, tocando no ícone “configurações” 
Na aba Janela de Visualização, desmarque as opções Exibir Eixos.

Figura 32 - Visualização dos prismas 1 e 2 sem os Eixos



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 33 - Visualização dos prismas 3 e 4 sem os Eixos



Fonte: De autoria própria (2023).

ATIVIDADE 2 - A PLANIFICAÇÃO DOS SÓLIDOS

A planificação dos sólidos, também conhecida como "desdobramento de sólidos", é o processo de representar um sólido tridimensional como uma figura plana. Isso é útil, pois permite analisar as superfícies e as formas de um sólido em um formato bidimensional. Cada tipo de sólido tem seu próprio método de planificação. Aqui estão exemplos de planificações para alguns sólidos comuns utilizando a calculadora 3D.

Atividade 2- Construção no GeoGebra Planificação dos sólidos

Acesse as ferramentas, tocando no ícone



Na aba ferramentas Básicas clica em “mais” para obter acesso as outras ferramentas, vamos clicar no ícone



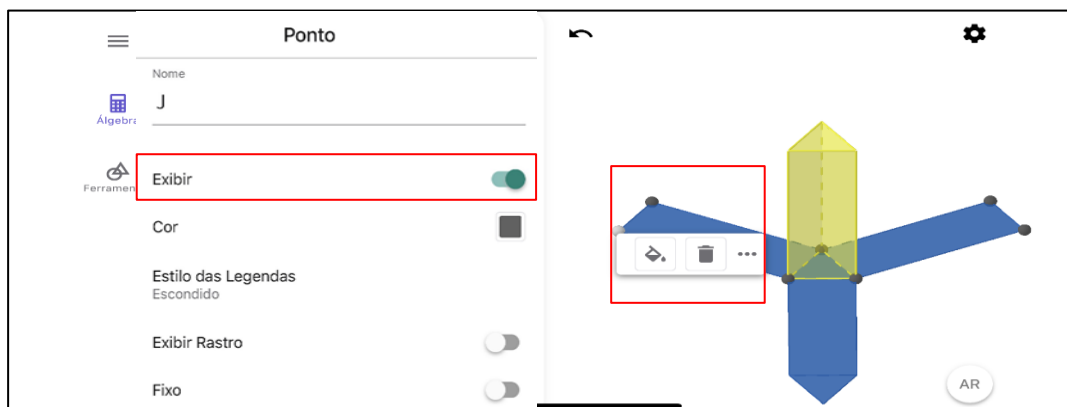
Figura 34 - Ferramentas Básicas



Fonte: De autoria própria (2023).

Selecionar o sólido a ser planificado. Clicar em cima do ponto, na janela do ponto desmarcar opção exibir:

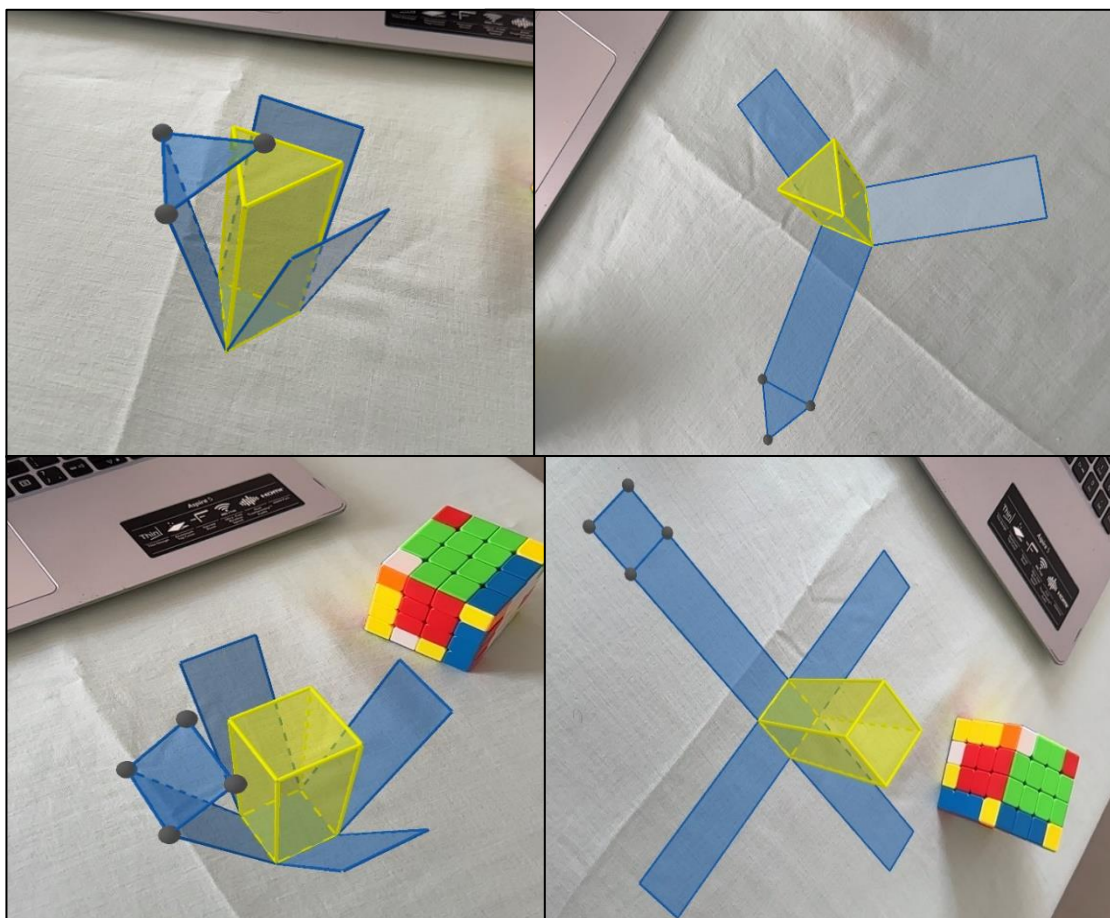
Figura 35 - Planificação do prisma de base triangular



Fonte: De autoria própria (2023).

Ative o modo de visualização em AR, tocando sobre o botão,  que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica.

Figura 36 - Resultado da Planificação dos prismas em RA



Fonte: De autoria própria (2023).

ATIVIDADE 3 - ESTUDO DOS PRISMAS

1) Na construção dos sólidos de N lados o que acontece quando movemos os controles:

a) Controle deslizante N ?

Possível resposta dos alunos:

Números das arestas das bases do prisma de n lados aumentam

b) Controle deslizante R?

Possível resposta dos alunos:

Aumenta a medida das arestas das bases do prisma de n lados

c) Controle deslizante h?

Possível resposta dos alunos:

Altera a medida da altura do prisma de n base.

2) Qual o nome do sólido formado ao mover o controle deslizante N para:

a) $N=3$ _____

b) $N=4$ _____

c) $N=5$ _____

d) $N=6$ _____

Possível resposta dos alunos:

- a) Prisma de base Triangular
- b) Prisma de base Quadrangular
- c) Prisma de base Pentagonal
- d) Prisma de base Hexagonal

3) Determine o número de aresta, faces e vértices dos sólidos de base igual a N lados:

BASE	ARESTAS	FACES	VÉRTICES
Base N= 3			
Base N= 4			
Base N= 5			
Base N= 6			

Possível resposta dos alunos:

BASE	ARESTAS	FACES	VÉRTICES
Base N= 3	9	5	6
Base N= 4	12	6	8
Base N= 5	15	7	10
Base N= 6	18	8	12

4) Quando se aumenta uma unidade em N, o que podemos perceber com o número de arestas, faces e vértices?

Possível resposta dos alunos:

Quando se altera o valor de N o número de arestas aumenta em $3N$ vezes, o número de faces aumenta em $N+2$ e o Número de vértices em $2N$.

5) Determine a medida da área total e do volume do Prisma onde o $N = 4$, $R = 2$ e $h = 10$.

Possível resposta dos alunos:

Área total = $16 + 80$ unidades de área
Volume = 80 unidades de volume

6) Qual a medida da área total e volume do Prisma onde $N = 3$, $R = 1$ e $h = 15$.

Possível resposta dos alunos:

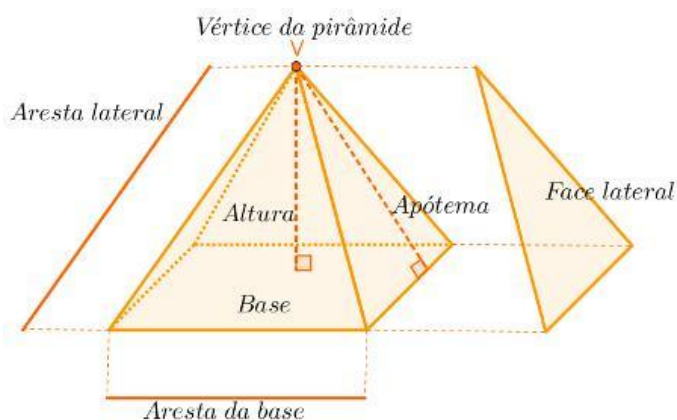
Área total = $80,54$ unidades de área.

Volume = $19,49$ unidades de volume.

SEMANA II- AULA 4: ESTUDO DA PIRÂMIDE

Uma pirâmide é um sólido geométrico caracterizado por uma base plana que pode ser de diversas formas tais como, triangular, quadrangular, pentagonal, etc. e suas faces triangulares que se encontram em um único ponto chamado vértice. A altura da pirâmide é a distância entre a base e o vértice.

Figura 37 - Elementos da Pirâmide



Fonte: Site (brasilecola.uol.com.br)

ATIVIDADE 1- CONSTRUÇÃO DE UMA PIRÂMIDE RETA CUJA BASE É UM POLÍGONO REGULAR COM N LADOS.

1.0 - Ir para janela de álgebra, digitar na barra de entrada os comandos:

2.1 $N = \text{ControleDeslizante}(3, 10, 1)$

2.2 $R = 2$

2.3 $h = 10$

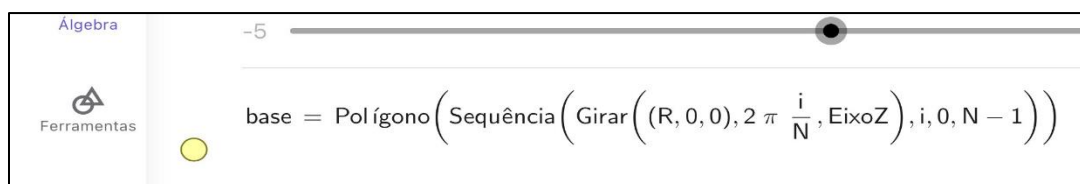
Logo em seguida utilize o campo Entrada, para inserir os seguintes comandos:

3.1 $\text{base} = \text{Polígono}(\text{Sequência}(\text{Girar}((R,0,0), 2\pi i/N, \text{EixoZ}), i, 0, N-1))$

3.2 $\text{base} = \text{Polígono}(\text{Lista de pontos})$

- 3.3 Sequência (Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)
- 3.4 Girar (Objeto, Ângulo, Eixo de Rotação)
- 3.5 Abrir Parêntese e digitar (R,0,0)
- 3.6 Digitar: $2\pi \frac{i}{N}$, EixoZ
- 3.7 Digitar: $i, 0, N-1$ logo em seguida da Enter.

Figura 38 - Resultado dos comandos no aplicativo Pirâmide



Fonte: De autoria própria (2023)

- 4.1 Execute os seguintes comandos na caixa de entrada:
- 4.2 Pirâmide(base, h)
- 4.3 Clicar em enter.

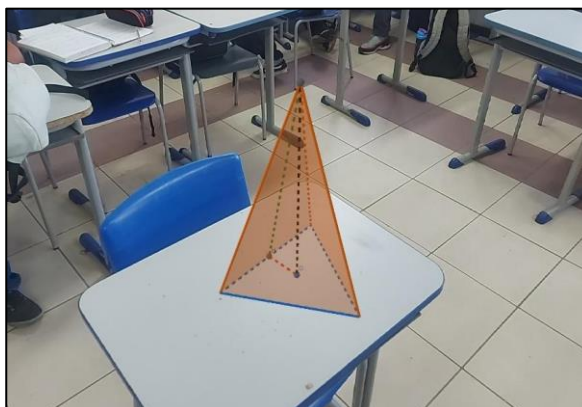
No controle deslizante N movimente a barra para $N=3$, $N=4$ e $N=6$

5.0 Ative o modo de visualização em AR, tocando sobre o botão,  que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica. Localize por meio da câmera uma superfície plana para projetar a o sólido formado.

5.1 Movimente os controles deslizantes N para aumentar o número de lados:

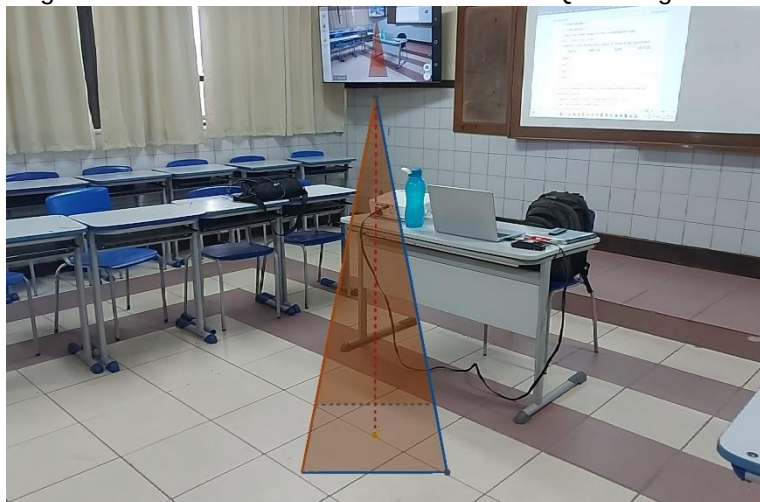
Resultado em Realidade aumentada para cada valor de N

Figura 39 - Para $N=3$ Pirâmide Reta de base triangular em Realidade Aumentada



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 40 - Para $N=4$ Pirâmide Reta de base Quadrangular



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 41 - $N=6$ Pirâmide Reta de base Hexagonal



Fonte: De autoria própria (2023).

ATIVIDADE 2 - A PLANIFICAÇÃO DA PIRÂMIDE

A planificação de pirâmide, refere-se ao processo de representar o sólido tridimensional como uma figura plana. A seguir, são apresentados exemplos de planificações para pirâmide de base triangular e quadrangular, utilizando a calculadora 3D.

Atividade 2 - Construção no GeoGebra Planificação dos sólidos

Acesse as ferramentas, tocando no ícone



Na aba ferramentas Básicas clica em “mais” para obter acesso as outras ferramentas, vamos clicar no ícone



Figura 42 - Ferramentas Básicas



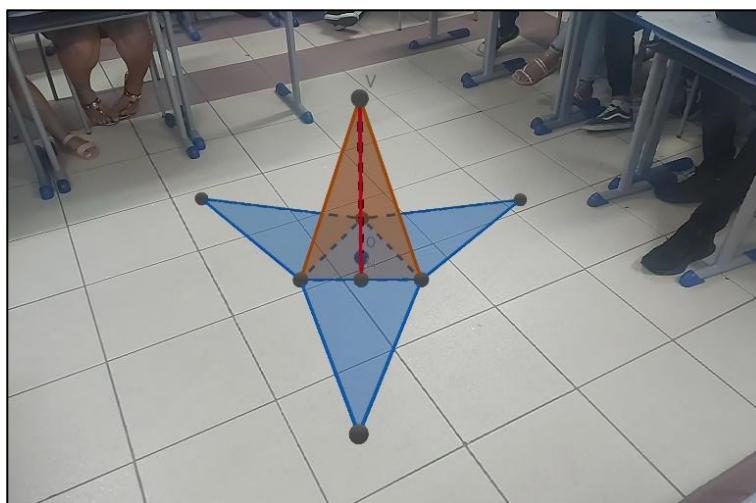
Fonte: De autoria própria (2023).

Depois selecionar o sólido a ser planificado clicando no ícone:



Resultados da planificação em RA para $N = 3$.

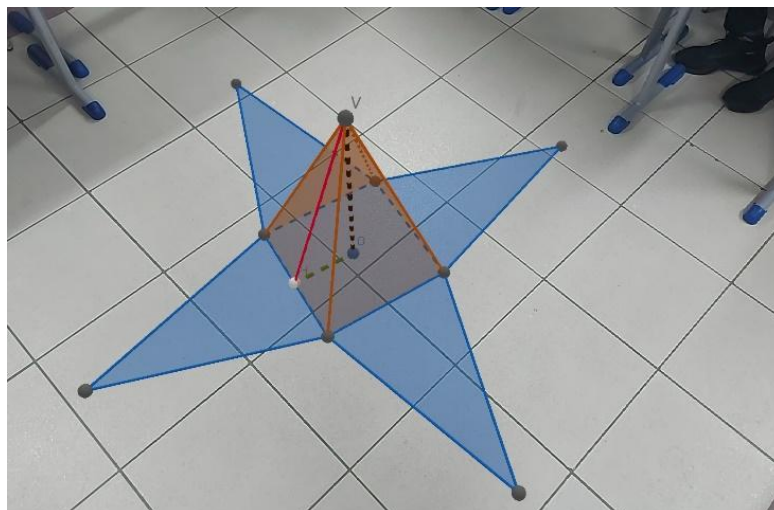
Figura 43 - Planificação da pirâmide de base triangular



Fonte: De autoria própria (2023)

Resultados da planificação em RA para $N = 4$:

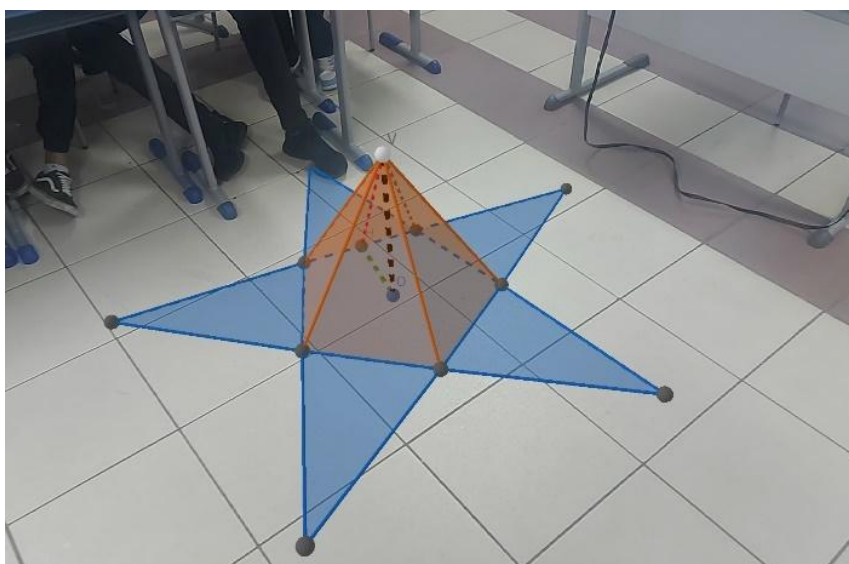
Figura 44 - Planificação da pirâmide de base Quadrangular



Fonte: De autoria própria (2023)

Resultados da planificação em RA para $N = 5$:

Figura 45 - Planificação da pirâmide de base pentagonal



Fonte: De autoria própria (2023)

ATIVIDADE 3 - ESTUDO DAS PIRÂMIDES

1) Na construção dos sólidos de N lados o que acontece quando movemos os controles:

a) Controle deslizante N ?

Possível resposta dos alunos:

Números das arestas da base da pirâmide de n lados aumentam

b) Controle deslizante R ?

Possível resposta dos alunos:

Aumenta a medida das arestas da base da pirâmide de n lados

c) Controle deslizante h ?

Possível resposta dos alunos:

Altera a medida da altura da pirâmide.

2) Qual o nome do sólido formado ao mover o controle deslizante N para:

- a) N=3 _____
 b) N=4 _____
 c) N=5 _____
 d) N=6 _____

Possível resposta dos alunos:

- a) Pirâmide de base Triangular
 b) Pirâmide de base Quadrangular
 c) Pirâmide de base Pentagonal
 d) Pirâmide de base Hexagonal

3) Determine o número de aresta, faces e vértices dos sólidos de base igual a N lados:

BASE	ARESTAS	FACES	VÉRTICES
Base N= 3			
Base N= 4			
Base N= 5			
Base N= 6			

Possível resposta dos alunos:

BASE	ARESTAS	FACES	VÉRTICES
Base N= 3	6	4	4
Base N= 4	8	5	5
Base N= 5	10	6	6
Base N= 6	12	7	7

4) Quando se aumenta uma unidade em N , o que podemos perceber com o número de arestas, faces e vértices?

Possível resposta dos alunos:

Quando se altera o valor de N o número de arestas aumenta em $2N$ vezes, o número de faces aumenta em $N+1$ e o Número de vértices em $N+1$.

5) Determine a medida da área total e do volume da pirâmide onde o $N=4$, $R=6$ e $h=8$. Utilizando as ferramentas Área e Volume do aplicativo:

Figura 46 - Ferramentas de área e volume



Fonte: De autoria própria (2023)

Possível resposta dos alunos:

Área total = 288 unidades de área

Volume = 576 unidades de volume

6) Qual a medida do volume da pirâmide onde $N=3$, $R=1$ e $h=12$.

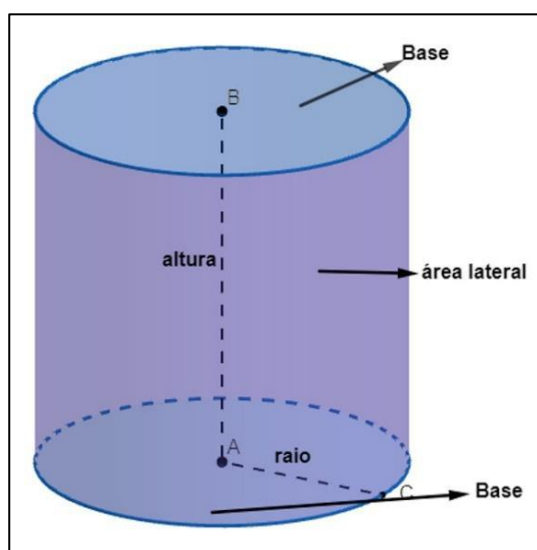
Possível resposta dos alunos:

Volume = 6 unidades de volume

SEMANA III- AULA 7: ESTUDO DO CILINDRO

A construção desenvolvida e explorada nesta atividade tem como objetivo estudar a definição de cilindro. Durante o processo, foi explicado a definição e destacou cada um dos elementos da geometria espacial envolvidos. Em seguida, esses elementos foram construídos no aplicativo *GeoGebra*. Ao final, os alunos podem interagir com todos os elementos da definição em Realidade Aumentada (RA).

Figura 47– Elementos do cilindro



Fonte: Site (escolakids.uol.com.br)

ATIVIDADE 1- CONSTRUÇÃO DO CILINDRO DE REVOLUÇÃO NO GEOGEBRA

Na aba Janela de Visualização, desmarque a opção Exibir Eixos. Na aba Álgebra, ajuste o parâmetro Descrições, Algébricas para Definição. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial:

Digitar os seguintes comandos:

i- Construa o eixo de rotação:

$\text{Reta}((0,0), \text{EixoZ});$

ii- Crie o controle deslizante:

$r = \text{ControleDeslizante}(0.1, 5, 0.1);$

$h = \text{ControleDeslizante}(0.1, 5, 0.1);$

iii- Crie os vértices A e B, do retângulo de rotação, executando os seguintes comandos:

$A = (0,0)$ e $B = (0,0,h);$

iv- Crie os vértices C e D:

$C = (r, 0)$ e $D = (r, 0, h)$;

v- Construa o retângulo de rotação a partir dos pontos A, B, C e D.

$\text{pol1} = \text{Polígono}(A, B, D, C)$;

vi- Crie o controle deslizante:

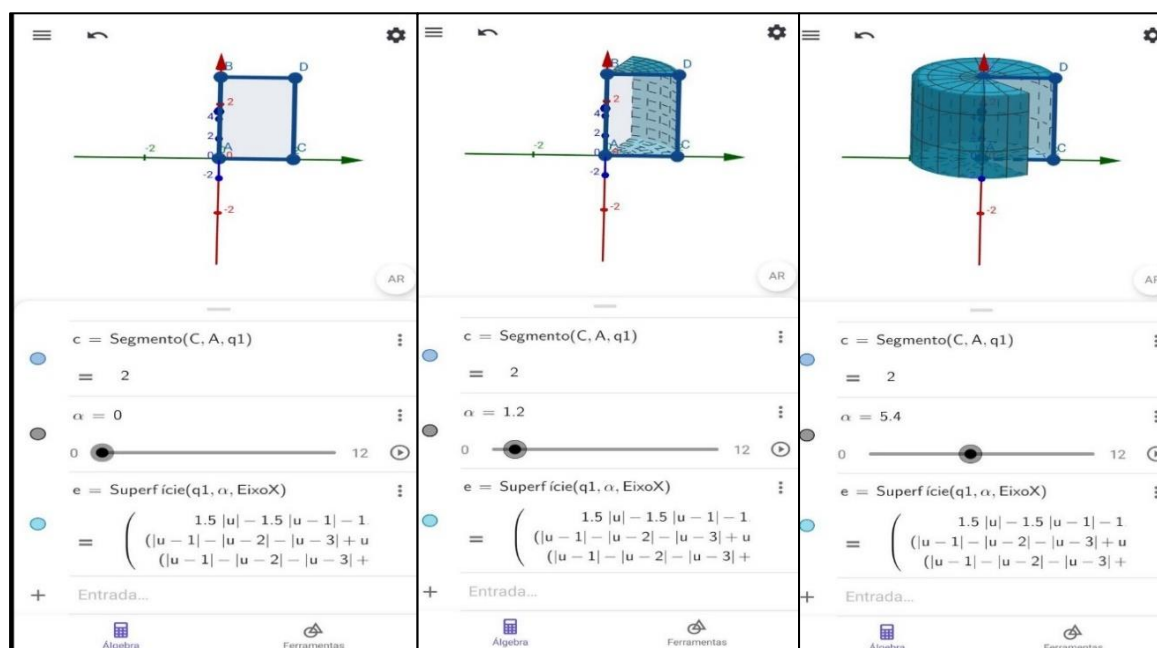
$n = \text{ControleDeslizante}(0, 50, 1)$;

vii- Crie uma sequência:

$\text{Sequência}(\text{Girar}(\text{pol1}, i \cdot 2\pi / n), i, 1, n)$;

Movendo o controle temos essa transição em torno do eixo:

Figura 48 - Cilindro de revolução

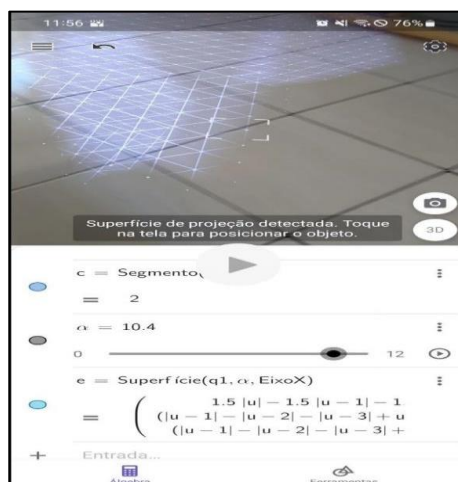


Fonte: De autoria própria (2023).

viii- Ative o modo de visualização em RA no ícone:

Procurando uma superfície:

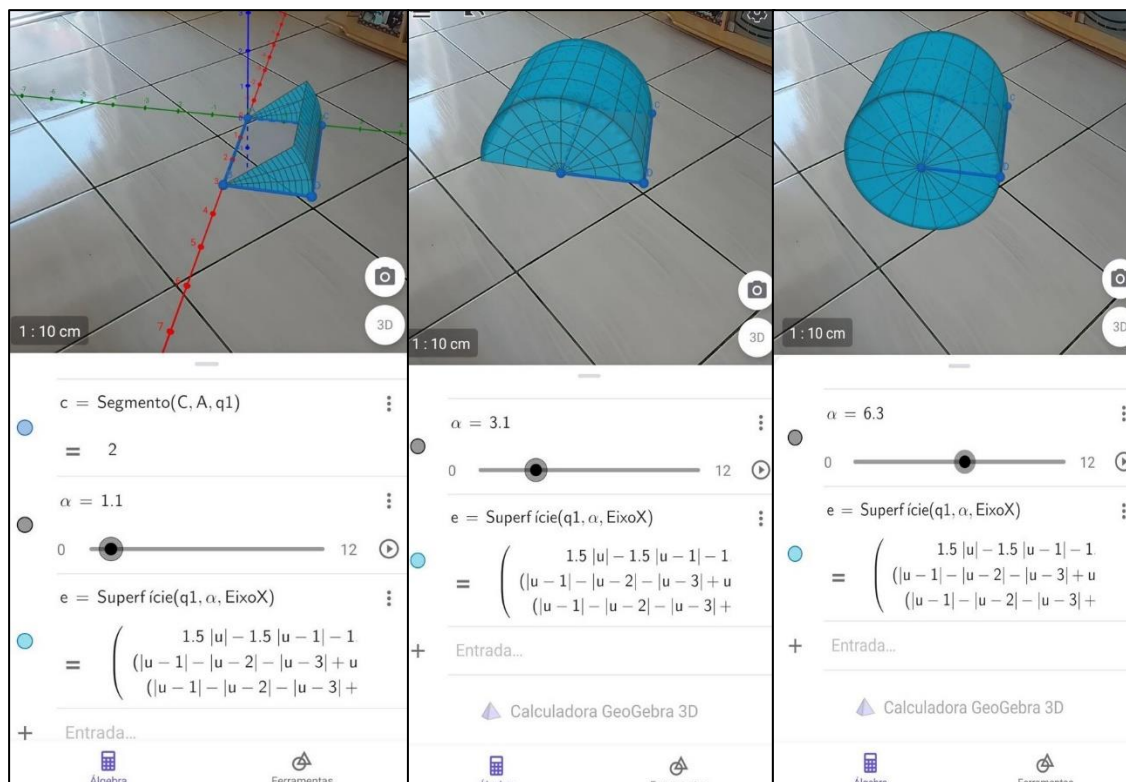
Figura 49 - Superfície de projeção



Fonte: De autoria própria (2023).

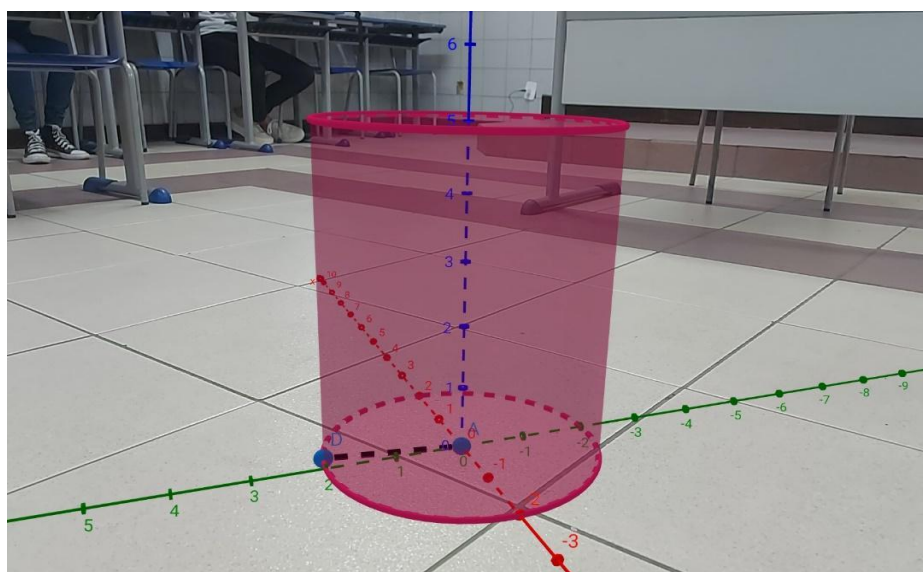
iv. Agora, basta dimensionar o retângulo pol1, manipulando os controles deslizantes r e h , e formarão o cilindro de revolução.

Figura 50 - Cilindro de revolução em RA



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 51 - Cilindro Reto em RA com os Eixos



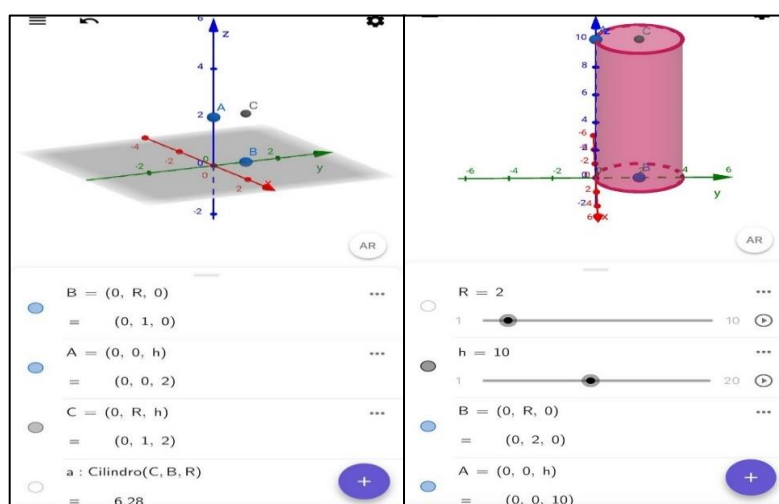
Fonte: De autoria própria (2023).

ATIVIDADE 2 – Construção do cilindro e medida da área e volume

1º) Criar os controles deslizante $R=(1,10,1)$, $h=(1,20,1)$ e os pontos A, B e C com as seguintes coordenadas A(0,0,h), B (0,R,0) e C(0,R,h). Em ferramentas vai na opção Cilindro e digitar em Raio o R. Determine o sólido formado com os controles em $R=2$ e $H=10$.

Possível resposta dos alunos:

Figura 52 - Construção do cilindro reto

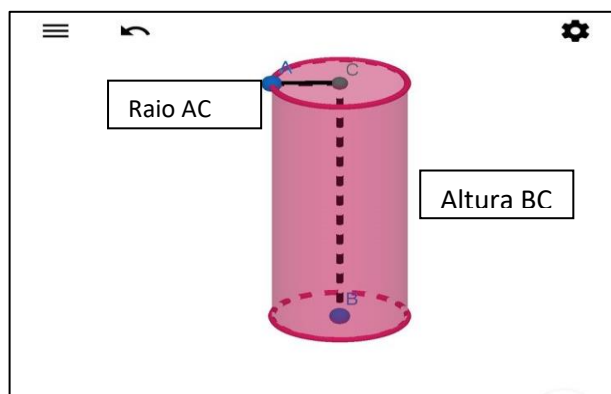


Fonte: De autoria própria (2023).

2º) Criar os segmentos nos pontos AC e BC. Determine o nome desses segmentos de acordo com os elementos com cilindro.

Possível resposta dos alunos:

Figura 53 - Cilindro de Raio R e altura h

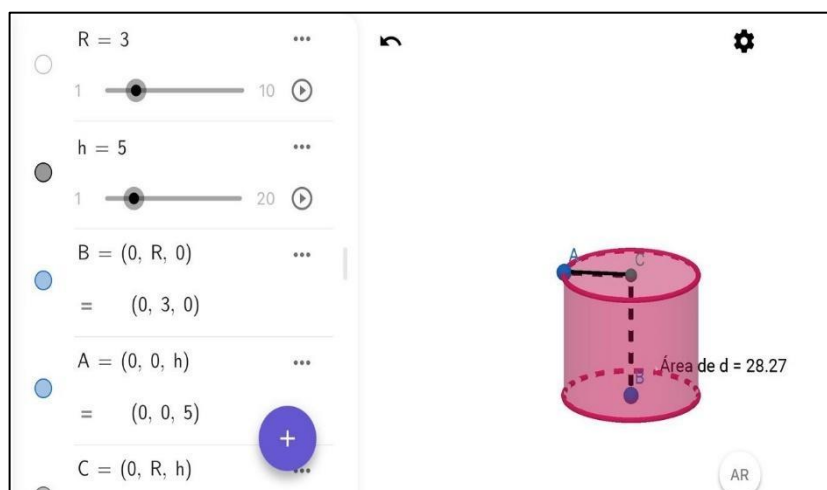


Fonte: De autoria própria (2023).

3º) Determine a área total desse sólido da questão de número 1º utilizando as ferramentas do GeoGebra 3D com os controles em $R=3$ e $h=5$:

Possível resposta dos alunos:

Figura 54 - Cilindro reto de raio R e altura h

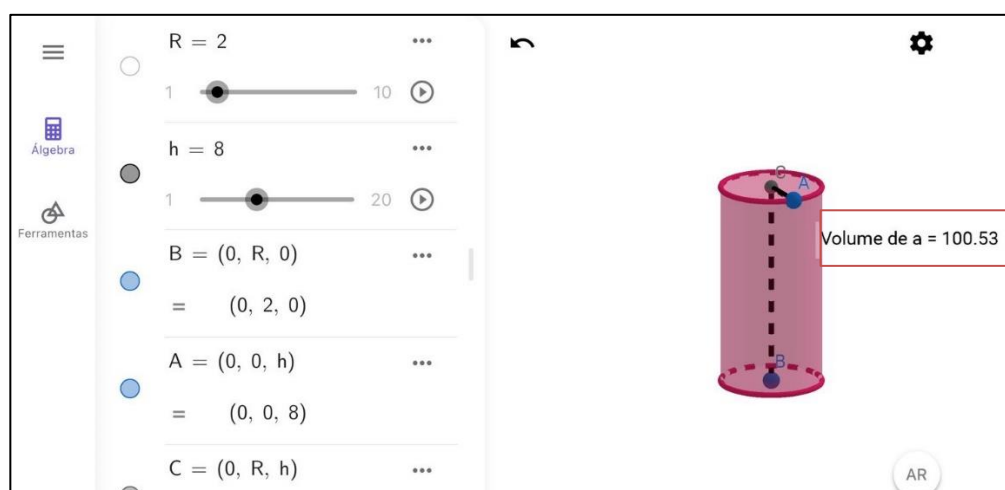


Fonte: De autoria própria (2023).

4º) Determine a medida desse sólido da questão de número 1º utilizando as ferramentas do *GeoGebra* 3D com os controles em $R=2$ e $h=8$:

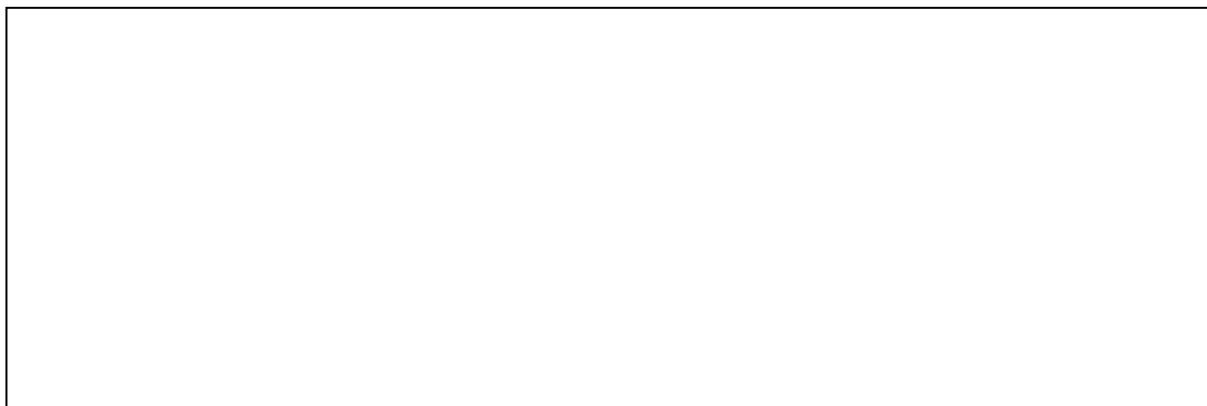
Possível resposta dos alunos:

Figura 55 - Cálculo da medida do volume do cilindro

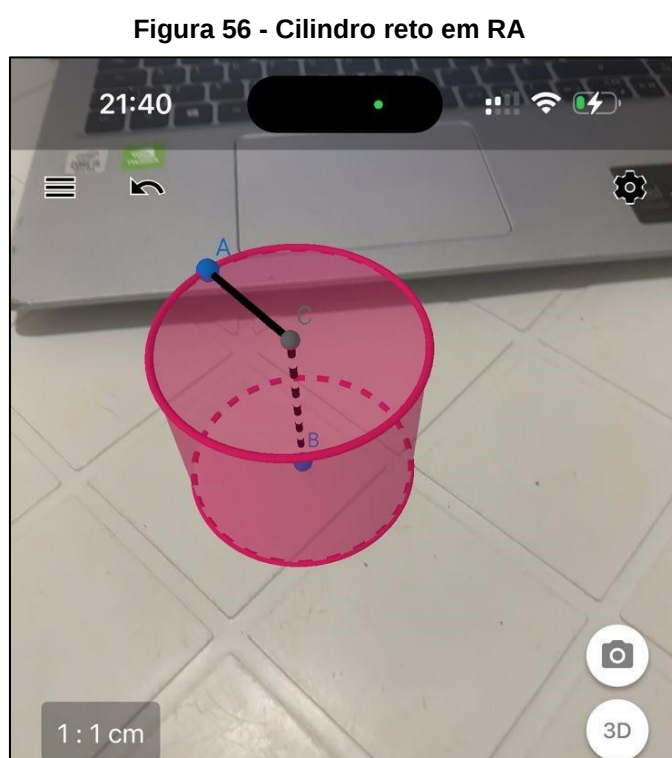


Fonte: De autoria própria (2023).

5º) Usando o recurso RA da calculadora *GeoGebra* 3D, projeta o sólido numa superfície:



Possível resposta dos alunos:

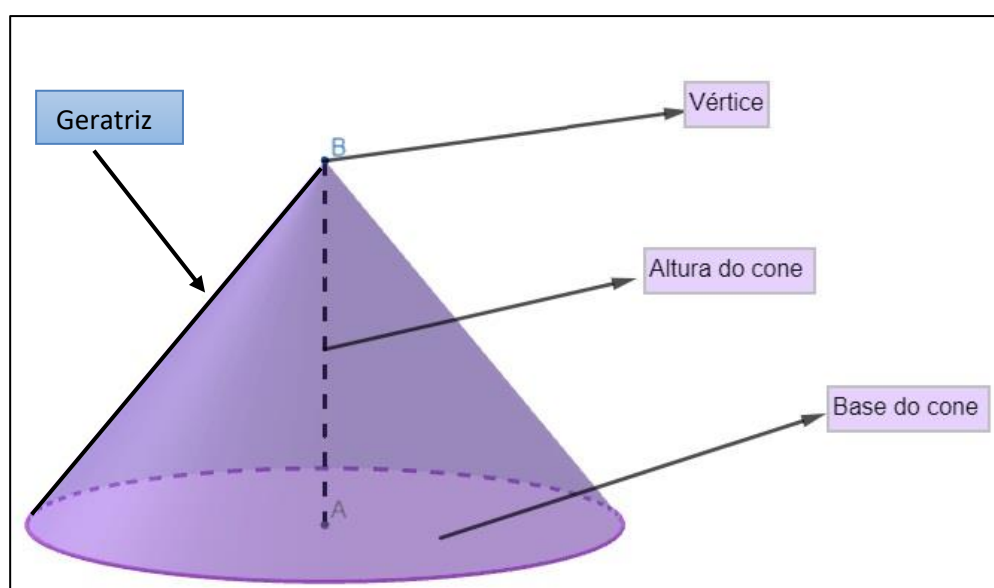


Fonte: De autoria própria (2023).

SEMANA IV- AULA 9. ESTUDO DO CONE

Dada a definição que o cone é um sólido geométrico tridimensional caracterizado por uma base circular e uma superfície lateral curvada que se encontra em um único ponto, denominado vértice. A reta que liga o centro da base ao vértice é chamada de altura do cone, enquanto a linha que une o vértice a qualquer ponto da circunferência da base é conhecida como geratriz.

Figura 57 - Elementos do Cone



Fonte: Site (escolakids.uol.com.br)

ATIVIDADE 1- CONSTRUÇÃO DO CONE

1.0 - Primeiro Crie o plano α :

No campo Entrada digitar o comando: $a : z = 0$;

1.1 - Crie um controle deslizante de nome r:

$r = \text{ControleDeslizante}(0.1, 2, 0.1)$;

1.2 - Crie o círculo c:

$c : \text{Círculo}((0,0), r, \text{EixoZ})$

1.3 - Crie o ponto E

$E = \text{PontoEm}(c)$

1.4 - Crie um ponto com nome V:

$V = (0,0, 4)$

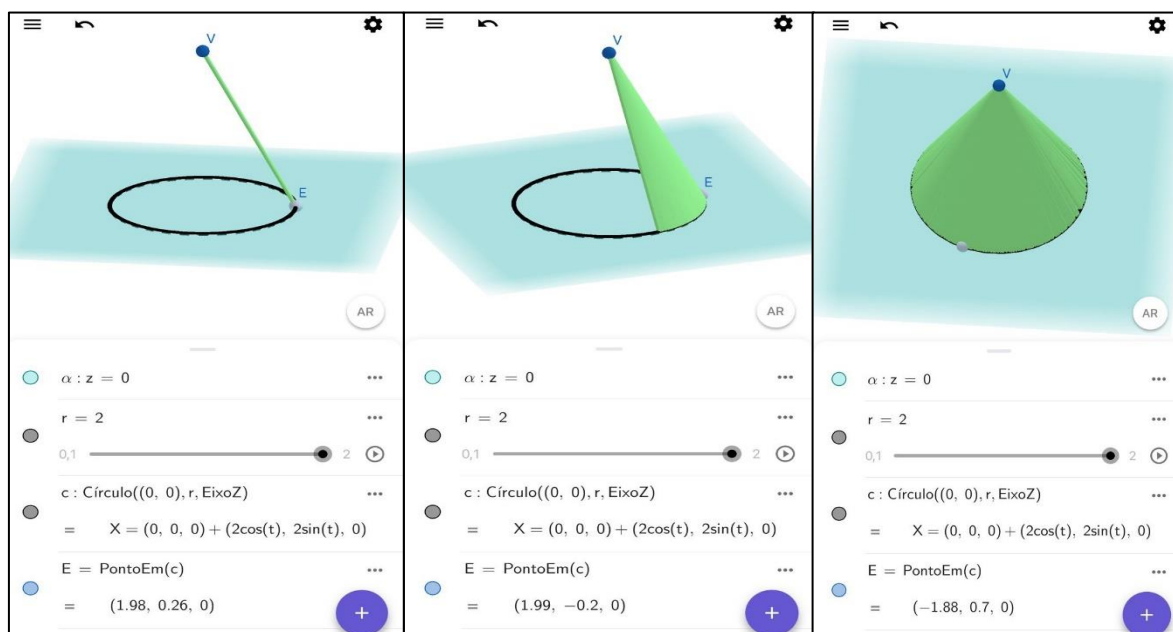
1.5 - Fazer um segmento que liga o ponto V ao ponto E.

Selecione a ferramenta Segmento, e toque no ponto V e depois no ponto E;

1.6 - Selecione a ferramenta Mover, toque no segmento criado, selecione o ícone de configurações e habilite o parâmetro Rastro

1.7 - Movimentar o ponto E teremos esses resultados:

Figura 58 - Construção do cilindro com base na sua definição

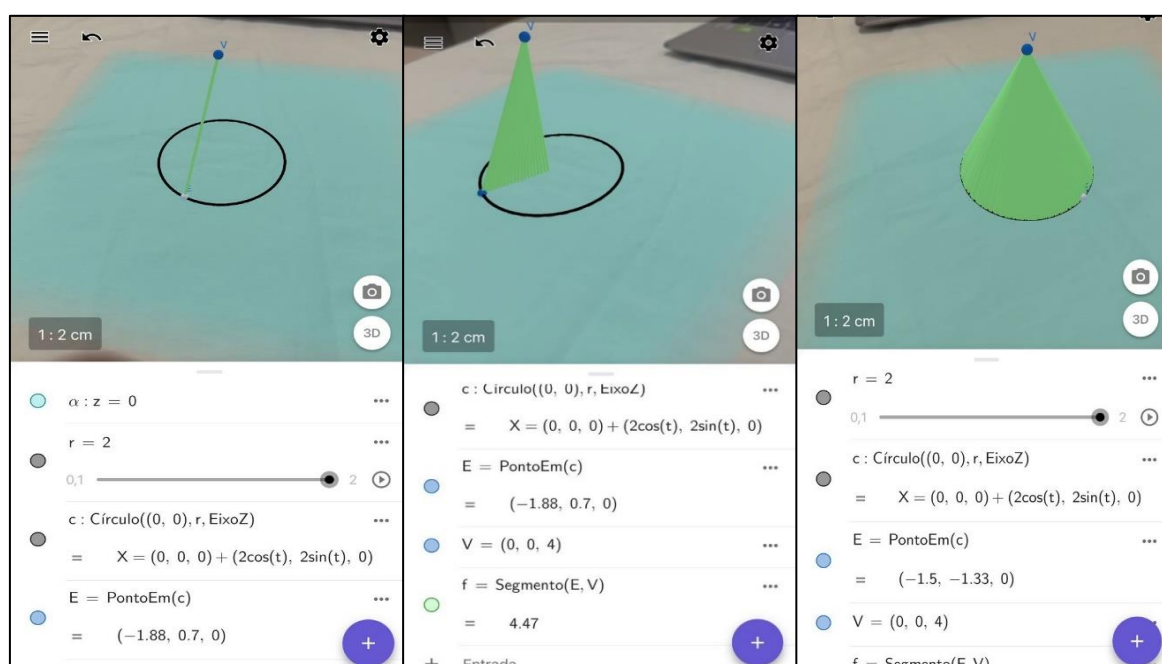


Fonte: De autoria própria (2023).

1.8 - Ative o modo de visualização em RA,  tocando sobre o botão, que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;

1.9 - Movimente várias vezes o ponto E sobre o círculo c, de modo que os segmentos formados pelos rastros formem um cone:

Figura 59 - Definição do cone em RA



Fonte: De autoria própria (2023).

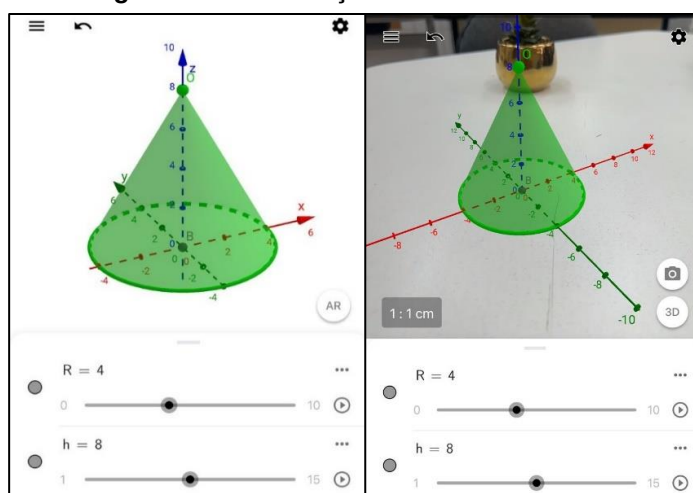
ATIVIDADE 2 – CONSTRUÇÃO DO CONE E MEDIDA DA ÁREA E VOLUME

1º) Criar os controles deslizante $R = (1,10,1)$, $h = (1,15,1)$ e os pontos O e B com as seguintes coordenadas O(0,0,h) e B (0,0,0) . Em ferramentas vai na opção Cone e digitar em Raio o R.

A) Determine o sólido formado com os controles em $R=4$ e $h=8$.

Possível resposta dos alunos:

Figura 60 - Construção do cone $R=4$ e $h=8$



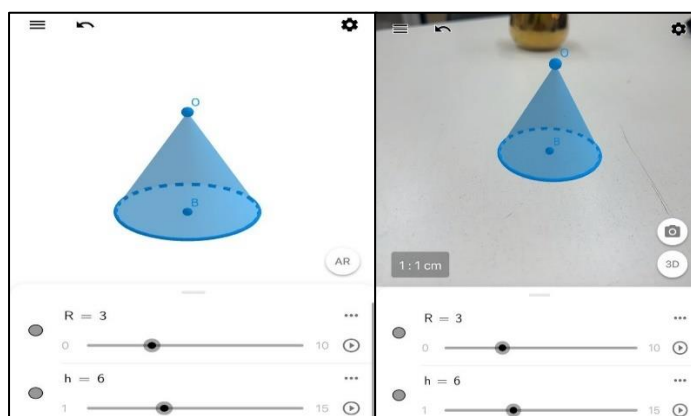
Fonte: De autoria própria (2023).

B) Determine o sólido formado com os controles em $R=3$ e $h=6$ na cor azul e em RA. Qual o formato desse cone?

Possível resposta dos alunos:

Cone equilátero

Figura 61 - Construção do cone $R=3$ e $h=6$

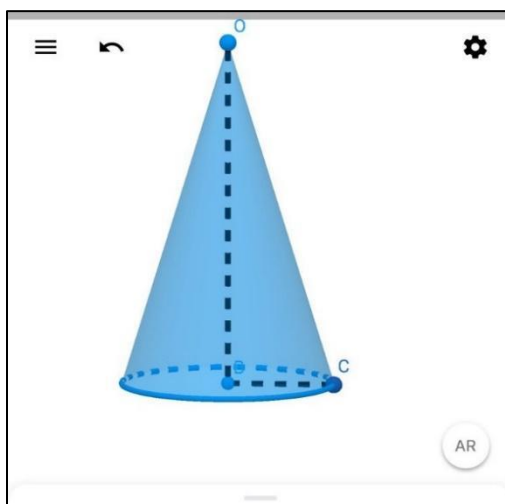


Fonte: De autoria própria (2023).

C) Determine um segmento que representa a altura e o raio desse cone, criando um ponto C (0, R, 0).

Possível resposta dos alunos:

Figura 62 - Construção de segmento da altura e raio do cone

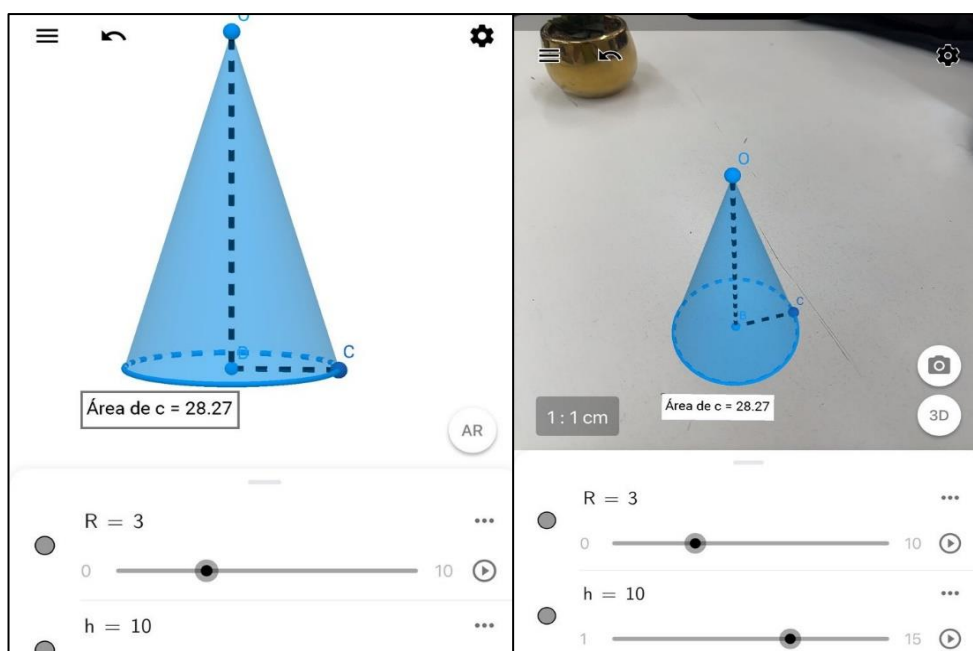


Fonte: De autoria própria (2023).

D) Calcule a medida da área total do cone usando a ferramenta de área, quando o $R=3$ e $h=10$.

Possível resposta dos alunos:

Figura 63 - Cálculo da medida da área do cone

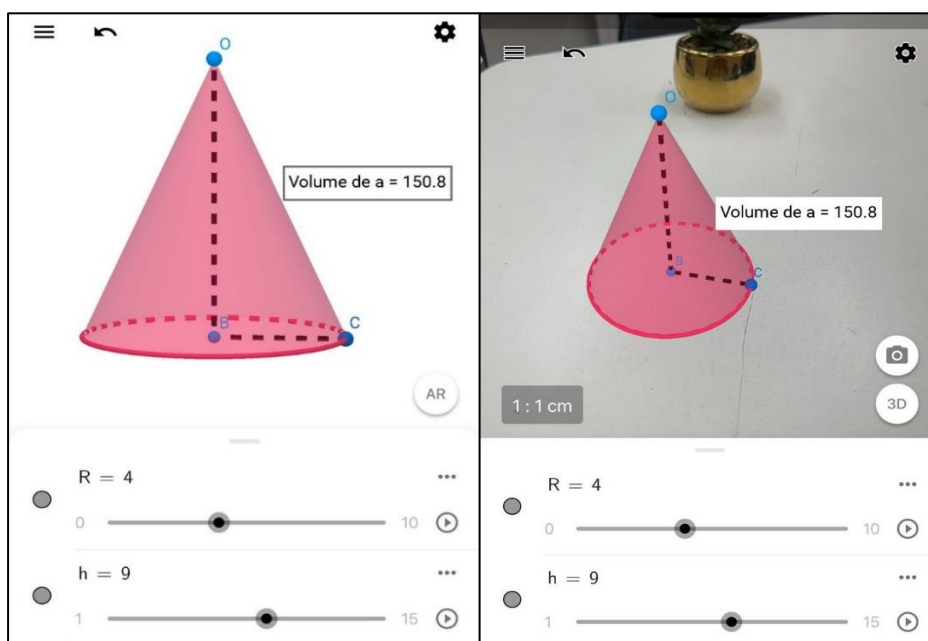


Fonte: De autoria própria (2023).

E) Qual a medida do Volume do cone usando a ferramenta do Volume, quando o $R=4$ e $h=9$.

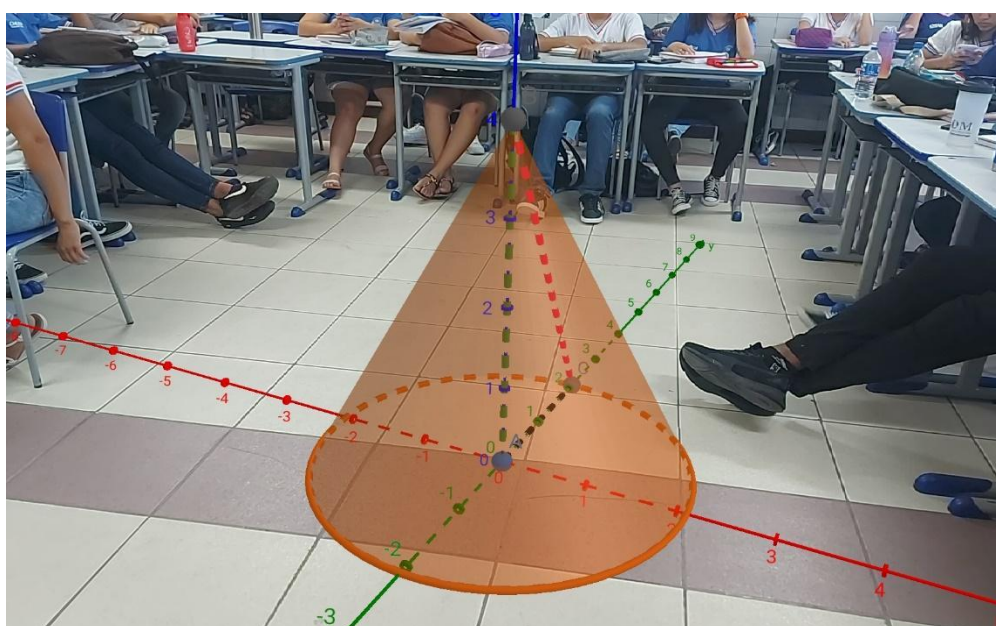
Possível resposta dos alunos:

Figura 64 - Cálculo da medida da área do cone



Fonte: De autoria própria (2023).

Figura 65 - Cone em RA com os eixos

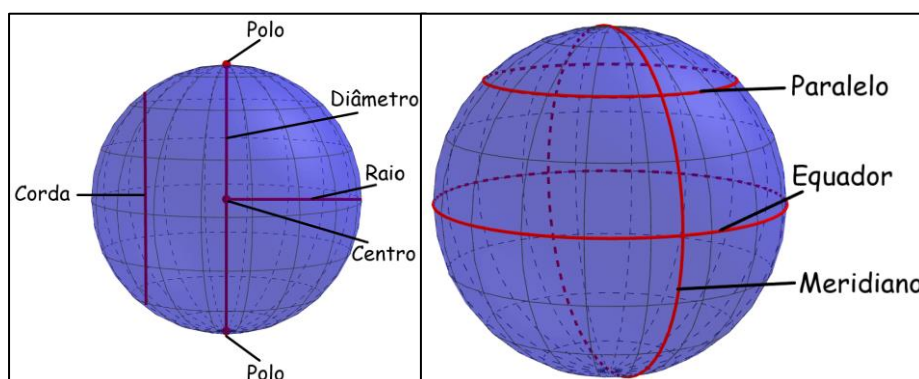


Fonte: De autoria própria (2023)

SEMANA V- AULA 12. ESTUDO DA ESFERA

A esfera é um sólido tridimensional com simetria perfeita, em que todos os pontos de sua superfície se encontram a uma mesma distância de um ponto fixo denominado centro. Essa distância constante entre o centro e qualquer ponto da superfície é chamada de raio. Esses são alguns elementos da esfera.

Figura 66 - Elementos da Esfera



Fonte: Sites (www.br.neurochispas.com)

ATIVIDADE 1- CONSTRUÇÃO DO ESFERA NO GEOGEBRA 3D

Acesse as configurações. Na aba Janela de Visualização, desmarque a opção Exibir Eixos. Na aba Álgebra, ajuste o parâmetro Descrições Algébricas para Definição. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;

1.1- Crie o controle deslizante r , que definirá o raio da Esfera, por meio do comando:

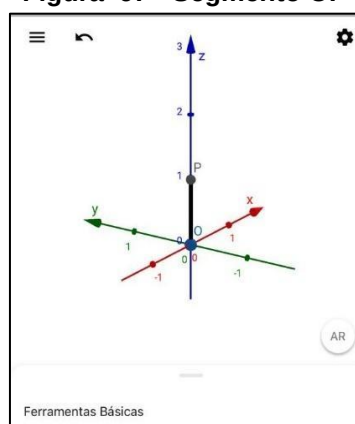
$r = \text{ControleDeslizante}(1,10,1);$

1.2- Crie um ponto O , será o centro da esfera por meio do comando: $O = (0,0,0);$

1.3- Crie um ponto P , por meio do comando: $P = (0,0,r);$

1.4 – Construa um segmento OP , utilizando a ferramenta  Segmento

Figura 67 - Segmento OP



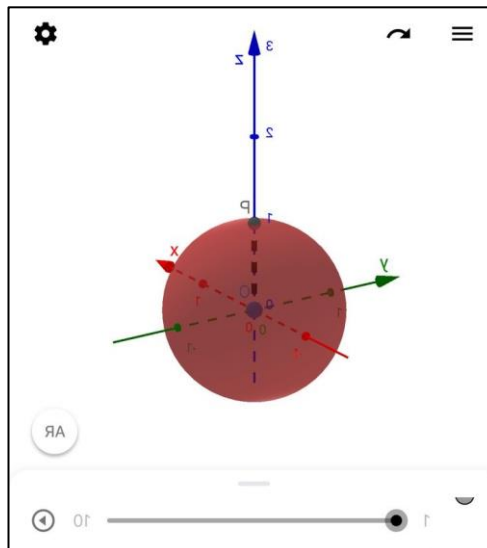
Fonte: De autoria própria (2023)

1.5– Construa uma esfera de raio r , selecionando a ferramenta



1.6 - Temos esse resultado:

Figura 68- Esfera de centro O e raio r



Fonte: De autoria própria (2023)

1.7 – Ao clicar sobre a esfera selecionar clicar no ícone



1.8– Selecionar a cor desejada

1.9– Esse é o resultado:

Figura 69 - Mudando a cor da esfera



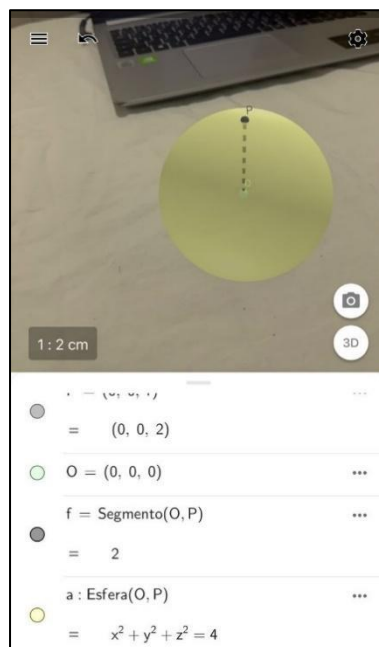
Fonte: De própria autoria (2023)

2.0 - Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão,  que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica; Ajuste os controles deslizantes r .

2.1 - Aumente gradualmente o valor do controle deslizante;

2.2 – Esse é o resultado:

Figura 70 – Esfera no modo AR



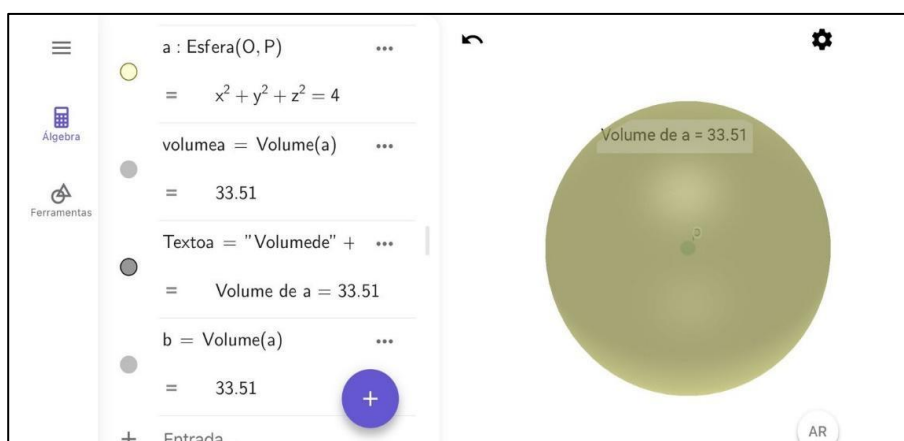
Fonte: De autoria própria (2023)

2.3 – Determinar o volume da esfera usando a ferramenta:



2.4 – Clicar na ferramenta e no sólido geométrico.

Figura 71 - Resultado do Volume da Esfera



Fonte: De autoria própria (2023)

ATIVIDADE 2 – ESTUDO DA ESFERA

1) Na construção Da Esfera de Raio r , o que acontece quando movemos os controles, Controle deslizante r ?

Possível resposta dos alunos:

Altera o valor do raio da esfera.

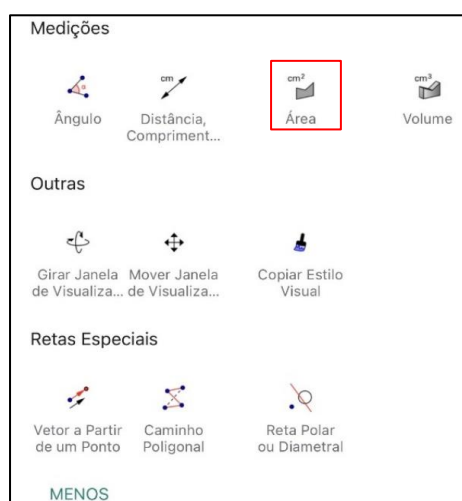
2) Quando se aumenta uma unidade em r , o que podemos perceber com o valor do diâmetro?

Possível resposta dos alunos:

Quando se altera o valor de r aumenta em $2r$ o valor do diâmetro.

3) Determine a medida da área total da Esfera onde $r = 4$ Utilizando as ferramentas Área do aplicativo GeoGebra 3D:

Figura 72 - Ferramenta da medida da área



Fonte: De autoria própria (2023)

Possível resposta dos alunos:

Área total = 200,96 unidades de área

4) Determine a medida do volume da Esfera onde $r = 4$ Utilizando as ferramentas Volume do aplicativo GeoGebra 3D:

Figura 73 - Ferramenta da medida do volume



Fonte: De autoria própria (2023)

Possível resposta dos alunos:

Volume = 113,04 unidades de volume

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao chegarmos a este ponto, reconhecemos que, através do desenvolvimento desta sequência didática, foi possível verificar a eficácia e as importantes contribuições que o aplicativo Calculadora Gráfica *GeoGebra* 3D, com Realidade Aumentada (RA), pode proporcionar ao estudo dos sólidos geométricos, como prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas, no ensino da matemática. Verificou-se que a adoção dessa tecnologia digital no ambiente educacional apresenta um grande potencial para tornar as atividades pedagógicas mais envolventes e relevantes para os alunos, além de promover a autonomia no processo de ensino e aprendizagem.

A experiência da Realidade Aumentada possibilitou aos alunos observar e interagir com os sólidos de maneira tridimensional, facilitando a compreensão de conceitos elaborados que, frequentemente, são difíceis em uma abordagem convencional. A imersão e interação direta com os modelos tridimensionais não apenas despertou o interesse dos estudantes, mas também promoveu um ambiente coletivo de colaboração, onde os estudantes discutiram, exploraram e resolveram problemas em conjunto.

Ademais, o uso do *GeoGebra* 3D demonstrou ser uma ferramenta eficiente para atender as diferentes demandas de aprendizagem, permitindo que alunos com variadas habilidades e necessidades se beneficiassem de um ensino mais lúdico e personalizado. A prerrogativa de manipular e visualizar os sólidos em tempo real promoveu uma maior retenção do conhecimento e propiciou o desenvolvimento de habilidades críticas de pensamento espacial.

Portanto, torna-se claro que a inclusão de tecnologias como a Realidade Aumentada no ensino de matemática não é apenas revolucionária, mas também indispensável para preparar os indivíduos para os desafios da contemporaneidade. O caminho a ser trilhado deve priorizar a formação incessante dos educadores, capacitando-os a aproveitar totalmente essas ferramentas e a maximizar suas contribuições no processo de ensino.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_sit e.pdf. Acesso em: 15 de jan. de 2024.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental II terceiro e quarto ciclos: matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília : Ministério da Educação e Cultura – Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau, **Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Espacial - Posição e Métrica**, Volume 10 - 6ª Ed., São Paulo: Editora Atual, 2005.

NASCIMENTO, Eimard GA do. **AVALIAÇÃO DO USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE GEOMETRIA: REFLEXÃO DA PRÁTICA NA ESCOLA**. XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, ISSN, v. 8457, p. 2012, 1808

REFATTI, Liliane Rose. **Uma Sequência Didática para o Estudo de Transformações Geométricas**. 30/11/2012 217 f. Profissionalizante em ENSINO DE FÍSICA E DE MATEMÁTICA Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FRANCISCANA, Santa Maria Biblioteca Depositária: Centro Universitário Franciscano – UNIFRA

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT



Mestrando: Marlon Maike Moreira de Souza

Orientadora: Prof. Dr^a Galvina Maria de Souza

Tema: Um Estudo dos sólidos geométricos por meio da realidade aumentada

QUESTIONÁRIO

1. Você sente dificuldades na disciplina de matemática?
() sim () não
2. Você considera que a tecnologia pode ser útil no ensino de matemática?
() sim () não
3. Você lembra de ter estudado geometria espacial no fundamental 2?
() sim () não
4. Você considera que a Geometria Espacial é útil no dia-a-dia?
() sim () não
5. Você já conhecia a calculadora GeoGebra?
() sim () não
6. Você gostou da abordagem metodológica utilizada pelo professor para estudar a Geometria Espacial?
() sim () não