



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT



RUBENS PEDROSO NOGUEIRA JÚNIOR

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: uma abordagem por meio de planilha
eletrônica

VITÓRIA DA CONQUISTA – BAHIA
DEZEMBRO - 2024



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT



RUBENS PEDROSO NOGUEIRA JÚNIOR

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: uma abordagem por meio de planilha eletrônica

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, pela Universidade estadual do Sudoeste da Bahia – UESB / Vitória da Conquista.

Orientado pela Prof^a Dr^a Galvina Maria de Souza

VITÓRIA DA CONQUISTA – BAHIA
DEZEMBRO - 2024

FICHA CATALOGRÁFICA

N712s Nogueira Júnior, Rubens Pedroso.

Semelhança de triângulos: uma abordagem por meio de planilha eletrônica. / Rubens Pedroso Nogueira Júnior, 2024.

112f.; il. color.

Orientador (a): Dr^a. Galvina Maria de Souza.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2024.

Inclui referências. 93 - 76

1. Educação matemática. 2. Planilha eletrônica. 3. Semelhança de triângulos. 4. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 5. Ensino médio. I. Souza, Galvina Maria de. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA. III. T.

CDD: 510.7

Catálogo na fonte: Karolyne Alcântara Profeta - CRB 5/2134
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

RUBENS PEDROSO NOGUEIRA JÚNIOR

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: uma abordagem por meio de planilha eletrônica

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof.^a Dr.^a Galvina Maria de Souza - UESB

Prof.^a Dr.^a Ana Paula Perovano dos Santos Silva - UESB

Prof. Dr. Jonson Ney Dias da Silva - UESB

Prof. Dr. Gilberto Januario - UFOP

Vitória da Conquista - Ba

Aprovada em 13 de dezembro de 2024



Documento assinado eletronicamente por **Galvina Maria de Souza, Professor Assistente**, em 13/12/2024, às 12:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do [Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gilberto Januário dos Santos, Usuário Externo**, em 13/12/2024, às 12:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do [Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ana Paula Perovano dos Santos Silva, Professor Adjunto**, em 13/01/2025, às 23:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do [Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jonson Ney Dias Da Silva, Professor Adjunto**, em 15/01/2025, às 09:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do [Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://seibahia.ba.gov.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **00104779881** e o código CRC **EE8715DE**.

AGRADECIMENTOS

“Portanto, se falta sabedoria a algum de vocês, que ele persista em pedi-la a Deus — pois ele dá a todos generosamente, sem censurar —, e ela lhe será dada” (Tiago 1:5 - TNM).

Agradeço primeiramente a Deus por me permitir a busca constante pelo conhecimento, pela vida e pela saúde relativa.

Agradeço à minha mãe, Sr.^a Angélica Nogueira (in memoriam), e ao meu pai, Sr. Rubens Nogueira, pelo total apoio durante o período acadêmico. Também, em especial, agradeço à minha irmã, Sr.^a Ítala Caroline, por ser sempre um amparo nos dias difíceis e por não me permitir desistir mesmo quando as situações quisessem me levar isso.

Gostaria de agradecer grandemente a minha querida orientadora, Dr.^a Galvina Maria de Souza, pela sua dedicação, tempo, conhecimento e paciência a mim direcionados durante as nossas reuniões de orientação, bem como ao programa de Mestrado Profissional em rede Nacional (PROFMAT) e também à Universidade do Sudoeste da Bahia (UESB).

Sou muito grato aos mestres que conduziram as aulas desse mestrado, os quais me fizeram enxergar horizontes antes não observados.

Agradeço aos meus colegas de turma que permitiram com que esse período fosse mais fluido e amigável, em especial à minha colega Sebastiana Borges (Ana), meus colegas Sávio Vieira, Marlon Maíke e Dário Silva.

Por fim, agradeço aos meus amigos, Fernanda Araújo, Gianne Rocha, Thalyan Oliveira e Joyce Anne, por me acompanharem e apoiarem a todo momento. A vocês, meu muito obrigado!

RESUMO

A pesquisa de abordagem qualitativa, teve como objetivo retomar conceitos básicos de triângulos e discutir o ensino de Semelhança de Triângulo, utilizando uma planilha eletrônica, a qual nomeamos de Trianguladora. Os participantes do estudo foram estudantes do 2º ano do Ensino Médio de uma escola particular, localizada em uma cidade no interior da Bahia. Para estruturar as estratégias didáticas empregadas na investigação e análise dos dados produzidos, recorremos a pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, considerando que a utilização de diferentes registros de representação semiótica no estudo de triângulos e a coordenação entre esses registros podem viabilizar a compreensão das definições, propriedades e conceitos relacionados a esse objeto matemático. A sequência didática elaborada, com base a planilha eletrônica, foi implementada, dividida em três momentos, os quais nomeamos de Estações. As análises foram realizadas com foco nas atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão. Os principais resultados mostraram que o uso da Trianguladora para o ensino de Semelhança de Triângulos pode facilitar tanto o processo de ensino quanto à aprendizagem desse objeto matemático.

Palavras-chave: Educação Matemática; Planilha Eletrônica; Semelhança de Triângulos; Teoria dos Registros de Representação Semiótica; Ensino Médio.

ABSTRACT

The qualitative research aimed to review basic concepts of triangles and discuss the teaching of Triangle Similarity, using an electronic spreadsheet, which we named Triangulator. The study participants were students in the 2nd year of high school at a private school, located in a city in the interior of Bahia. To structure the teaching strategies used in the investigation and analysis of the data produced, we used assumptions from the Theory of Semiotic Representation Registers, considering that the use of different registers of semiotic representation in the study of triangles and the coordination between these registers can enable the understanding of the definitions, properties and concepts related to this mathematical object. The didactic sequence developed, based on the electronic spreadsheet, was implemented, divided into three moments, which we named Stations. The analyses were performed focusing on the cognitive activities of formation, treatment and conversion. The main results showed that the use of the Triangulator for teaching Triangle Similarity can facilitate both the teaching process and the learning of this mathematical object.

Keywords: Mathematics Education; Electronic Spreadsheet; Similarity of Triangles; Theory of Semiotic Representation Registers; High School.

RESUMEN

La investigación de enfoque cualitativo tuvo como objetivo revisar conceptos básicos de los triángulos y discutir la enseñanza de la Similitud de Triángulos, utilizando una hoja de cálculo electrónica, a la que denominamos Triangulador. Los participantes del estudio fueron estudiantes de segundo año de secundaria de una escuela privada, ubicada en una ciudad del interior de Bahía. Para estructurar las estrategias didácticas utilizadas en la investigación y análisis de los datos producidos, utilizamos supuestos de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica, considerando que el uso de diferentes registros de representación semiótica en el estudio de los triángulos y la coordinación entre estos registros puede posibilitar la comprensión de definiciones, propiedades y conceptos relacionados con este objeto matemático. Se implementó la secuencia didáctica desarrollada, a partir de la hoja de cálculo electrónica, dividida en tres momentos, a los que denominamos Estaciones. Los análisis se llevaron a cabo centrándose en las actividades cognitivas de entrenamiento, tratamiento y conversión. Los principales resultados mostraron que el uso del Triangulador para enseñar Semejanza de Triángulos puede facilitar tanto el proceso de enseñanza como el aprendizaje de este objeto matemático.

Palabras clave: Educación Matemática; Hoja de cálculo electrónica; Similitud de Triángulos; Teoría de los Registros de Representación Semiótica; Escuela secundaria.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Fases e atividades do processo de Revisão Sistemática de Literatura	22
Figura 2 - Página inicial da Trianguladora	43
Figura 3 - Aba ao se clicar no ícone "sobre um triângulo"	44
Figura 4 – Aba quando se clica no ícone "Gerar"	44
Figura 5 – Algoritmo da condição de existência	46
Figura 6 - Algoritmo de classificação quanto a medidas dos lados	47
Figura 7 – Aba quando as medidas não formam um triângulo	47
Figura 8 - Medidas dos ângulos internos, a partir das medidas dos lados do triângulo	49
Figura 9 - Algoritmo de classificação quanto a medidas dos ângulos internos	50
Figura 10 - Aba semelhança entre triângulos	51
Figura 11 -- Aba de informações ao clicar no ícone gerar	51
Figura 12 – Aba casos de semelhança	52
Figura 13 - Texto motivador Estação 1	53
Figura 14 - metodologia, objetivos e avaliação	54
Figura 15 - Análise a priori da Atividade 3 da Estação 01	54
Figura 16 - Autoavaliação das estações.....	55
Figura 17 - Elementos de um triângulo	61
Figura 18 - Classificação quanto a medidas dos ângulos	62
Figura 19 - Classificação quanto à medida dos lados	62
Figura 20 - Demonstração do Teorema 2	63
Figura 21 - Demonstração do Teorema 4	64
Figura 22 - Definição de triângulos semelhantes	65
Figura 23 - Demonstração do TF (item 1)	66
Figura 24 - Demonstração do TF (item 2)	67
Figura 25 - Demonstração Caso de Semelhança AA	67
Figura 26 - Definição de congruência entre triângulos	68
Figura 27 - Demonstração Caso de Semelhança LAL	69
Figura 28 - Demonstração Caso de Semelhança LLL.....	70
Figura 29 - Atividade 1 da Estação 01	72
Figura 30 - Atividade 3 da Estação 01.....	74
Figura 31 - Atividade 4 da Estação 01.....	75

Figura 32 - Atividade 6 da Estação 01.....	77
Figura 33 - Item (e) da Atividade 8 da Estação 01	78
Figura 34 - Ferramenta SOBRE UM TRIÂNGULO da Trianguladora	79
Figura 35 - Atividade 7 da Estação 02.....	82
Figura 36 - Representação Figural da Atividade 8 da Estação 02.....	82
Figura 37 - Representação Figural da Atividade 9 da Estação 02.....	83
Figura 38 - Atividade 1 da Estação 03.....	84
Figura 39 - Resolução dos Itens (a) e (b) do aluno Q	84
Figura 40 - Atividade 4 da Estação 03.....	85
Figura 41 - Resolução da Atividade 8 da Estação 03.....	87

LISTAS DE QUADROS

Quadro 1 - Strings geradas para CTD-CAPES	24
Quadro 2 - Strings geradas para BD-PROFMAT	25
Quadro 3 - Critérios de Inclusão e Exclusão	25
Quadro 4 - Respostas dos estudantes A, B, C e D	73
Quadro 5 – Item (d) da Atividade 4 e a Resposta do aluno P	76
Quadro 6 - Resposta da Atividade 6, 7 e 8 da Estação 01	77
Quadro 7 - Resposta registrada pelo aluno J	79
Quadro 8 - Respostas dos estudantes M e N da Atividade 5	80
Quadro 9 - Atividade 6 da Estação 02.....	81
Quadro 10 - Resolução da Atividade 3 da Estação 03	85
Quadro 11 - Resolução da Atividade 5 da Estação 03	86
Quadro 12 - Resolução das Atividades 6 e 7	87

LISTAS DE TABELAS

Tabela 1 - Investigações analisadas na Revisão de Literatura.....	26
Tabela 2 - Participantes de Pesquisa	29
Tabela 3 - Objetivos e Pressupostos Teórico-Metodológicos	30
Tabela 4 - Principais Resultados das pesquisas analisadas	38

LISTA DE ABREVIações

BD-PROFMAT – Banco de Dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

BNCC – Base Nacional Comum curricular

CNE – Conselho Nacional de Educação

CTD-CAPEs – Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

DC-GOEM – Documento Curricular para Goiás – Etapa Ensino Médio

DCN – Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica

PROFMAT – Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional

TRRS – Teoria dos Registros de Representação Semiótica

UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

UNEB – Universidade do Estado da Bahia

AA – Ângulo-Ângulo

ALA – Ângulo-Lado-Ângulo

LAL – Lado-Ângulo-Lado

LLA_o – Lado-Ângulo-Ângulo Oposto

LLL – Lado-Lado-Lado

T1 – Teorema 1

T2 – Teorema 2

T3 – Teorema 3

T4 – Teorema 4

TF – Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos

TRP – Teorema das Retas Paralelas

TT – Teorema de Tales

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	16
2. PROBLEMÁTICA	18
2.1 Trajetória Acadêmica Profissional.....	18
2.2 Revisão de Literatura.....	22
2.2.1 O Protocolo Kitchenham e o Processo de Seleção.....	22
2.3 Relatório da Revisão de Literatura	28
2.3.1 Síntese da Revisão de Literatura	29
2.3.2 Diálogo entre as pesquisas analisadas	36
3. METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	42
3.1 Construção da Planilha Eletrônica	42
3.1.1 Ferramenta “sobre um triângulo”.....	44
3.1.2 Ferramenta “Semelhança entre triângulos”	50
3.1.3 Ferramenta “casos de semelhança”	52
3.1.4 Ferramenta “Aprenda Mais”	53
3.2 A construção da Sequência Didática	53
3.2.1 Estratégias de Implementação da Sequência Didática	55
3.2.2 Análises.....	56
4. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS.....	57
4.1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica	57
5. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DO OBJETO DE ESTUDO	61
5.1 Definição, elementos e classificação de Triângulos.....	61
5.2 Teoremas relevantes para a construção da Sequência Didática	62
5.3 Semelhança de Triângulos	64
5.4 Teorema Fundamental e os Casos de Semelhança de Triângulos	65
5.4.1 Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos (TF).	66
5.4.2 Casos de Semelhança de Triângulos	67
6. ANÁLISE DOS RESULTADOS	71
6.1 Análise Geral	71
6.2 Análise das atividades desenvolvidas na Estação 01	72
6.3 Análise das atividades desenvolvidas na Estação 02.....	78
6.4 Análise das atividades desenvolvidas na Estação 03.....	83
6.5 Conclusão Geral das Análises	88
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	90
REFÊRENCIAS.....	93

ANEXO	97
ANEXO A – Sequência Didática	98

1. INTRODUÇÃO

Nesta introdução há um cenário geral da pesquisa, cujo propósito foi o de analisar a aprendizagem de semelhança de triângulos de estudantes do 2º ano do Ensino Médio, mediante uma sequência didática elaborada e implementada a partir de uma planilha eletrônica desenvolvida no *software Microsoft Excel*.

Para estruturar as estratégias didáticas empregadas na investigação e análise dos dados produzidos, recorreremos a pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) como discutido em Duval (2009). Dessa forma, consideramos que a utilização de diferentes registros de representação semiótica no estudo de triângulos e a coordenação entre esses registros podem viabilizar a compreensão das definições, propriedades e conceitos relacionados a esse objeto matemático.

Do ponto de vista metodológico, realizamos uma pesquisa de abordagem qualitativa, conforme discutida em Creswell (2010), e tem como objetivo retomar conceitos básicos de triângulos e apresentar uma nova ferramenta para o ensino de Semelhança de Triângulo, utilizando uma planilha eletrônica, a qual nomeamos de Trianguladora.

Assim, considerando o objetivo traçado e apoiado nos referenciais teóricos e metodológicos citados, foi respondida a seguinte questão de pesquisa: **Quais as contribuições inerentes à uma sequência de didática, elaborada a partir de uma planilha eletrônica, para a aprendizagem de Semelhança de triângulos para estudantes do 2º ano do Ensino Médio?**

Para responder à questão, traçamos os seguintes objetivos específicos:

- Discutir aspectos didáticos referentes ao ensino de tópicos de Geometria por meio de planilhas eletrônicas;
- Desenvolver uma planilha eletrônica com fim na aprendizagem de Semelhança de Triângulos;
- Elaborar uma sequência de didática abordando Semelhança de Triângulos e outros elementos a partir da planilha desenvolvida e aplicar aos estudantes pesquisados.
- Verificar as contribuições dessa sequência para a aprendizagem de semelhança de triângulos pelos estudantes

Quanto à estrutura da dissertação, esta contém cinco capítulos, além desta

introdução, das considerações finais e do produto elaborado apresentado como anexo, tendo em vista que esta dissertação foi desenvolvida junto ao Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB).

Dessa forma, no capítulo 2, é apresentada a problemática da pesquisa, que contém a trajetória acadêmica e profissional do autor e descreve o seu interesse pelo tema abordado. Logo após, a revisão de literatura, com os resultados de outras pesquisas relacionadas ao tema de pesquisa aqui retratado, bem como a localização de lacunas que justificaram a pesquisa, conforme recomendado por Creswell (2010).

No capítulo 3, abordamos a metodologia de pesquisa e os procedimentos metodológicos utilizados na produção e análise dos dados.

No capítulo 4, apresentamos a TRRS, dando ênfase aos elementos dessa teoria que subsidiaram as análises realizadas.

No capítulo 5, apresentamos a Matemática que embasa o objeto de estudo utilizado tanto na elaboração da planilha eletrônica Trianguladora, quanto na elaboração da sequência didática.

No capítulo 6, evidenciamos as análises realizadas, bem como os resultados observados. Após esse capítulo, segue finalmente para as considerações finais, referências bibliográficas e o anexo do produto.

2. PROBLEMÁTICA

2.1 Trajetória Acadêmica Profissional

Nesta seção, optamos por utilizar os verbos na primeira pessoa do singular, quando o autor apresenta a trajetória acadêmica e profissional que, certamente, colaboraram para a realização desta investigação.

O interesse inicial pela pesquisa originou ao cursar a Licenciatura em Matemática no campus VI da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), em 2012, na cidade de Caetité, durante as aulas do professor de Informática I. Um dos itens da ementa dessa disciplina era a introdução à Informática e manipulação de planilhas eletrônicas voltadas para o ensino de objetos matemáticos por meio do desenvolvimento de algoritmos.

Enquanto o professor explicava os comandos para configurar uma planilha da Microsoft Excel para a condição de existência de um triângulo, lembro-me de questioná-lo se seria possível configurarmos uma planilha que além de detectar a existência de triângulos a partir da medida dos lados, também fosse possível classificá-los quanto à medida dos seus lados. Ele respondeu que não somente isso, mas também era possível configurá-la para classificar quanto às medidas dos seus ângulos internos, calcular a medida da área e do perímetro e até realizar análise de semelhança entre triângulos.

Isso me deixou intrigado, pois uma vez que tivéssemos acesso a um material digital que pudesse calcular, mesmo que aproximadamente, as medidas de área e perímetro, medidas de ângulos internos de um triângulo e classificá-lo quanto às medidas de seus lados e ângulos internos; bem como a garantir a existência dele pela desigualdade triangular a partir das medidas de seus lados, poderia servir como um recurso tecnológico para auxiliar o processo de aprendizagem dos conceitos e conteúdo desse objeto matemático.

A partir daí, percebi precisar ter um conhecimento mais avançado de *Excel*, a fim de criar algoritmos aplicados às planilhas eletrônicas desse *software* para explorar a possibilidade ou não de desenvolver um recurso a partir dessas planilhas para o estudo de triângulos. Fiz, então, alguns cursos *online* e comecei a dominar os comandos básicos do *software*, bem como alguns algoritmos que pudessem ser relacionados a objetos matemáticos.

Em 2017, comecei a lecionar em uma escola da rede pública do interior do estado da Bahia na cidade de Guanambi, na qual tive a oportunidade de ministrar aulas de Estatística a estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Durante essas aulas, comecei a usar as planilhas eletrônicas da *Microsoft Excel*. Isso me possibilitou perceber que, quando fazia uso desse recurso, os estudantes interagiam melhor nas aulas evidenciando um melhor entendimento do conteúdo abordado. Desde então, sempre que tinha a oportunidade de lecionar o conteúdo de Estatística em sala de aula, recorria ao uso dessas planilhas.

No entanto, quando ministrava aulas nas turmas onde a Semelhança de Triângulos era o foco de ensino, eu percebia uma dificuldade dos estudantes na compreensão desse conceito, o que me fazia retomar as falas do meu professor de Informática I no período da graduação, em relação ao uso de planilhas para o estudo de triângulos. Além disso, eu queria que meus alunos também tivessem bons resultados nas aulas de Semelhança de Triângulos, assim como tinha quando ministrava as aulas de Estatística. A partir daí, comecei a fomentar a possibilidade de desenvolver uma planilha com esse fim.

Em 2018, comecei a trabalhar como professor em uma escola particular na cidade de Guanambi, localizada no interior da Bahia. Nessa escola, a matriz curricular foi organizada separando a Geometria dos demais conteúdos matemáticos em duas componentes curriculares diferentes. Assim, eu assumi as disciplinas Matemática e Geometria para estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Mas, em meados de 2020 até o final de 2021, aconteceu a pandemia da covid-19¹ que inviabilizou a continuação do ensino presencial e, conseqüentemente, o desenvolvimento da planilha para o ensino de Semelhança Triângulos ficou em um segundo plano. Isso porque as aulas passaram a ser ofertadas na modalidade remota e nem sempre os estudantes estavam presentes.

Em 2022 ingressei no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) ofertado pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB). Durante as aulas de *Matemática Discreta*, o professor utilizou por diversas vezes planilhas eletrônicas para facilitar a compreensão dos conceitos e conteúdos

¹ Covid-19 é uma infecção respiratória gerada pelo vírus coronavírus SARS-CoV-2, potencialmente grave, com alto nível de transmissão. Em 11 de março de 2020, a Organização Mundial de Saúde (OMS) caracterizou a Covid-19 como pandemia. Fonte: <https://www.paho.org/pt/covid19/historico-da-pandemia-covid-19>.

abordados, o que me instigou ainda mais a pensar na possibilidade de desenvolver uma planilha para o estudo de semelhança de triângulos.

Ainda no mestrado, no segundo semestre de 2023, durante a disciplina *Tópicos de Matemática*, a professora discutiu algumas Teorias da Educação Matemática, na vertente da Didática Francesa, para fundamentar o desenvolvimento e construção de sequências didáticas para o ensino e a aprendizagem de objetos matemáticos. Como requisito para aprovação nessa disciplina, tive que elaborar uma sequência didática, para a qual escolhi utilizar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, na perspectiva de Duval (2009), para fundamentá-la.

Paralelo ao desenvolvimento dessa disciplina, passei a ministrar aulas de Matemática no 2º ano do Ensino Médio, da mesma escola da rede privada citada anteriormente. Meus atuais estudantes do 2º ano do Ensino Médio eram os mesmos do 9º ano do Ensino Fundamental para os quais ministrei aulas em 2021. Muitos desses estudantes, embora não tenham alcançado os requisitos mínimos necessários para sua aprovação, foram promovidos para os anos (séries) subsequentes por meio do parecer técnico CNE/CP n.º 6/2021 proferido no processo administrativo n.º 23001.000334/2020–21 do Conselho Nacional de Educação (CNE). Com isso, eles precisavam de uma recomposição de conteúdos gerais que deveriam ser aprendidos no 9º ano e no 1º ano do Ensino Médio, entre eles a Semelhança de Triângulos.

Diante disso, enquanto professor, decidi elaborar, por meio de algoritmos, uma planilha eletrônica para o estudo de semelhança de triângulos que também foi a base da sequência didática elaborada durante a disciplina de *Tópicos de Matemática*, deu origem a esta dissertação e ao produto requerido pelo PROFMAT.

Assim, diante da minha trajetória e anseios, considerei relevante realizar um estudo abordando a semelhança de triângulos com a utilização de uma planilha eletrônica, ou seja, elaboramos uma sequência didática para ser implementada a estudantes do Ensino Médio e analisada à luz da TRRS, a gênese desta dissertação.

No entanto, como a problemática não se limita às minhas percepções como professor da Educação Básica, ressalto que o uso das planilhas eletrônicas nos processos de ensino e de aprendizagem de objetos matemáticos é previsto na Base Nacional Comum Curricular — BNCC (Brasil, 2018), documento que prescreve um conjunto de habilidades para nortear a Educação Básica no Brasil. A BNCC é:

[...] um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem

desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN) (Brasil, 2018, p. 7).

Quanto às planilhas eletrônicas, a BNCC recomenda que, durante os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, os estudantes “utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental”, considerando que essas tecnologias “são alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações” (Brasil, 2018 p. 528).

Na BNCC, as habilidades previstas para o Ensino Médio buscam aprofundar o letramento matemático² dos estudantes, desenvolvido no Ensino Fundamental, tendo em vista que esses estudantes devem estar em um nível cognitivo superior aos estudantes do Ensino Fundamental e munidos de ferramentas para compreender a realidade e propor as ações de intervenção especificadas para essa etapa (Brasil, 2018).

Quanto ao estudo de semelhança de triângulos, objeto matemático do estudo retratado nesta dissertação, a BNCC destaca como habilidade a ser desenvolvida pelos estudantes do Ensino Médio: “(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo *triângulos* nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de *congruência* e *semelhança*” (BNCC, 2018, p. 529).

Assim, com a intenção de finalizar a problemática do estudo, justificando a sua relevância, considerando que as investigações realizadas pela comunidade científica da Educação Matemática a fim de contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática na Educação Básica estão em constante

² Na BNCC, o letramento matemático é definido como: competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. O letramento deve também assegurar que todos os estudantes reconheçam que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para compreender e atuar no mundo e para que também percebam o caráter de jogo intelectual da Matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e que pode também ser prazeroso (fruição). (Brasil, 2018, p. 522)

crescimento; considerando, ainda que investigações nessa área são produzidas na tentativa de diagnosticar e minimizar problemas relacionados ao ensino e a aprendizagem da Geometria e, conseqüentemente, de Semelhança de triângulos; e que estratégias de ensino alternativas são testadas e analisadas, sob várias perspectivas embasadas em diversas teorias, gerando contribuições importantes para a reflexão dos educadores e melhoria da aprendizagem dos estudantes, trazemos, nas próximas seções, como selecionamos os estudos analisados na revisão de literatura e o resultado dessas análises.

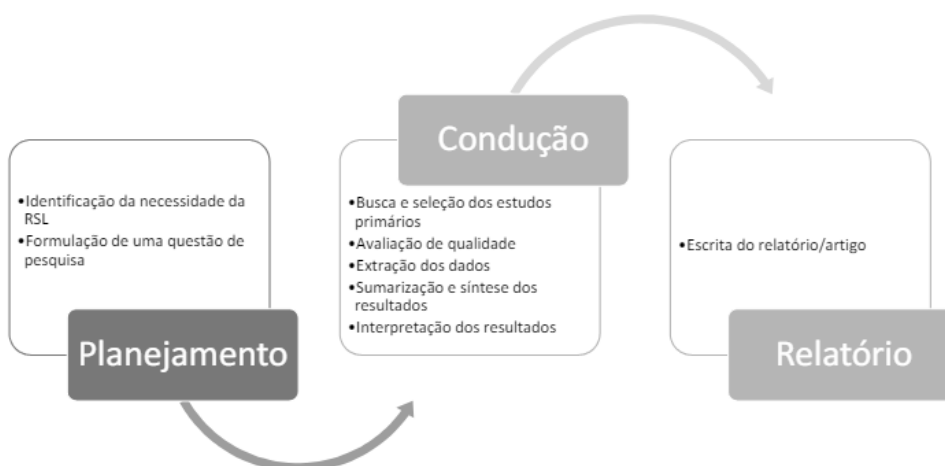
2.2 Revisão de Literatura

2.2.1 O Protocolo Kitchenham e o Processo de Seleção

Uma revisão de literatura, conforme apontado em Creswell (2010), desvenda e torna público resultados de outras pesquisas cujos autores consideram que estão relacionados ao estudo ao qual se propõe. Nesse sentido, a revisão aqui apresentada tem o fim de esclarecer o que a comunidade da Educação Matemática tem refletido sobre o tema proposto nesta dissertação e apontar as lacunas de tais reflexões que podem contribuir para a justificção deste estudo.

Assim, para esta revisão e problematização do tema de pesquisa, apoiamos no protocolo estabelecido por Kitchenham e Charters (2007) para selecionar os estudos correlatos a esse. Conforme ilustrado na Figura 1, esse protocolo apresenta as fases que devem ser seguidas com a ambição de realizar uma revisão sistemática de literatura que garanta a confiabilidade e validade dos dados coletados.

Figura 1 - Fases e atividades do processo de Revisão Sistemática de Literatura



Fonte: Kitchenham e Charters (2007, p. 04).

Dessa forma, na primeira fase, *Planejamento*, após identificada a necessidade da revisão, que nesta investigação já foi justificada na introdução desta seção, devemos definir a(s) questão que irá(ão) nortear as buscas nas bases de dados. Na pesquisa, as questões norteadoras (QN) elaboradas foram:

QN1: O que a comunidade da Educação Matemática tem refletido sobre o estudo de semelhança de triângulos na Educação Básica, com planilhas eletrônicas?

QN2: O que a comunidade da Educação Matemática tem refletido sobre o estudo de semelhança de triângulos na Educação Básica?

QN3: Como as planilhas eletrônicas são utilizadas para o estudo da Geometria na Educação Básica?

QN4: Como as sequências didáticas facilitam o ensino de semelhança de triângulo na Educação Básica?

QN5: O ensino de Semelhança de triângulos é abordado com a Teoria Registros de Representação Semiótica?

Com a elaboração dessas questões, encerramos a fase de planejamento segundo Kitchenham e Charters (2007) e passamos à fase de *Condução da Revisão Sistemática de Literatura* (2ª fase), em que, conforme o protocolo em pauta, devemos definir as estratégias de busca e seleção dos estudos a serem incluídos no *corpus* da pesquisa, conforme apontado na Figura 1. Para isso, transformamos as questões norteadoras em palavras-chave. As palavras-chave elaboradas foram: Educação Matemática; Semelhança de Triângulos, Planilhas Eletrônicas, Educação Básica, Sequência Didática e Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Segundo o protocolo, os repositórios

Digitais suportam encadeamento de termos de busca através do uso dos conectivos “AND” (E lógico) e “OR” (OU lógico). Desta forma, antes de iniciar a busca propriamente dita, os pesquisadores precisam definir uma *string* de busca com os termos a serem buscados de maneira que contemple as questões de pesquisa de interesse (Kitchenham; Charters 2007, p.9).

Vale ressaltar que uma *string* de busca nada mais é que uma sequência de caracteres na qual se insere em um repositório para obter as informações procuradas, conforme aponta Kitchenham e Charters (2007). Para a busca, foram elaboradas as *strings* de acordo com as especificidades dos repositórios nos quais as buscas foram realizadas.

O próximo passo agora, ainda conforme a segunda fase do protocolo Kitchenham, é definir as estratégias de busca, que incluem decidir onde os estudos

serão buscados, para, a partir daí, construir as *strings*. Foram utilizadas as bases de dados: Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CTD-CAPEs) e o Banco de Dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (BD-PROFMAT). Vale ressaltar que essa escolha se justifica na decisão de realizar as buscas com foco em teses e dissertações, considerando que uma parte dos artigos são construídos a partir delas e; que os artigos geralmente são muito reduzidos e podem não esclarecer os pontos requeridos para a revisão de literatura construída aqui.

Vale ressaltar ainda que, quanto à escolha BD-PROFMAT, essa se justifica pelo fato de o autor desta dissertação estar inserido neste programa que conta com o apoio do Programa de Pós-Graduação stricto sensu para a Qualificação de Professores da Rede Pública de Educação Básica; e quanto CTD-CAPEs, essa se justifica pela quantidade e qualidade de teses e dissertação publicadas nessa base e tendo em vista que engloba trabalhos diversos. As buscas foram realizadas com as *strings* em português, inglês e espanhol no CTD-CAPEs. No BD-PROFMAT, por se tratar de um programa nacional, essas buscas ocorreram em português.

Nesse sentido, as *strings* construídas para o BTD-CAPEs, bem como a quantidade de estudos primários encontrados, foram disponibilizadas no Quadro 1. Ressaltamos que estudo primário, segundo Kitchenham e Charters (2007, p. 4), é “um estudo empírico que investiga uma questão de pesquisa específica. Alguns exemplos de estudos primários são os experimentos controlados, os estudos de caso, as pesquisas-ação, entre outros”.

Quadro 1 - Strings geradas para CTD-CAPEs

Strings gerados	Quantidade de trabalhos encontrados
"SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS" AND "SEQUENCIA DIDÁTICA"	2
"SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS" AND "EDUCAÇÃO MATEMÁTICA" AND "MATEMÁTICA BÁSICA"	3
"TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA" AND "SEQUENCIA DIDÁTICA"	33
"TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA" AND "EDUCAÇÃO BÁSICA" AND "EDUCAÇÃO MATEMÁTICA"	11
"TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA" AND "PLANILHAS ELETRÔNICAS"	1
"PLANILHAS ELETRONICAS" AND "SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS"	0

Fonte: autoria própria.

Considerando que o BD-PROFMAT não suporta o encadeamento de termos de busca por meio do uso dos conectivos “AND” e “OR”, as strings foram delimitadas conforme mostrado no Quadro 2, no qual há também a quantidade de trabalhos encontrados.

Quadro 2 - Strings geradas para BD-PROFMAT

Strings gerados	Quantidade de trabalhos encontrados
SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS	17
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	32
PLANILHAS ELETRONICAS	26
TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	3

Fonte: autoria própria.

Depois de estruturadas e empregadas as *strings* de busca, segundo o Kitchenham e Charters (2007), é necessário elaborar os critérios de inclusão e exclusão dos estudos que serão analisados na dissertação, a fim de definir um estudo secundário e identificar as investigações que fornecem evidências diretas a respeito das questões de pesquisa e devem ser aplicados para cada estudo primário encontrado. Vale ressaltar que o estudo secundário

Revisa os estudos primários referentes a uma questão de pesquisa específica com o objetivo de integrar/sintetizar as evidências relacionadas à questão de pesquisa; por exemplo, uma revisão sistemática da literatura, uma meta-análise, um mapeamento sistemático da literatura e uma revisão narrativa da literatura (Kitchenham e Charters, 2007 p.4).

Assim, apresentamos no Quadro 3 os critérios de inclusão e de exclusão elaborados.

Quadro 3 - Critérios de Inclusão e Exclusão

Critérios de inclusão	Critérios de Exclusão
Teses e dissertações publicados entre 2014 e 2024	Teses e Dissertações publicados anterior a 2014
Teses e dissertações que apresentam relação com os processos de ensino e de aprendizagem de Semelhança de Triângulos	Teses e dissertações que não apresentam relação com os objetivos deste estudo.

Teses e Dissertações que apresentam relação de planilhas eletrônicas com a Educação Matemática	Teses e dissertações duplicadas.
Teses e dissertações que apresentam relação de sequências didáticas com o ensino de semelhança triângulos	Teses e Dissertações não disponibilizadas na íntegra

Fonte: Autoria própria.

Após as buscas e empregados os critérios de inclusão e exclusão elaborados, as pesquisas selecionadas foram apresentadas na Tabela 1 identificando o autor, o ano, o tipo de trabalho e o título do trabalho, enumerada em ordem decrescente ao ano de publicação.

Tabela 1 - Investigações analisadas na Revisão de Literatura

Nº	Autor (a)	Ano	Tipo de trabalho	Título do trabalho
01	COUTO, Andrey Alves do	2024	Dissertação	Educação financeira: uma proposta didática em sala de aula com o uso de planilhas eletrônicas
02	SALDANHA, Renato Flor	2023	Dissertação	CONSTRUÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA INTERDISCIPLINAR: Funções Trigonométricas aplicadas ao ensino de movimento harmônico simples – MHS – sob o enfoque da Teoria dos Registros de Representações Semióticas
03	BARBOSA, Douglas	2023	Dissertação	Estatística no Ensino Fundamental e Médio: resoluções de questões utilizando o GeoGebra e planilhas eletrônicas
04	SIQUEIRA, Lucimara	2022	Dissertação	Sequência didática para o ensino de estatística do 8º ano do Ensino Fundamental com a incorporação de planilhas eletrônicas
05	SOUSA NETO, Jose Brilhante de	2022	Dissertação	Um estudo sobre o uso de planilhas eletrônicas no ensino de estatística nas séries finais da educação básica
06	SANTOS, Ricardo Almeida dos	2021	Dissertação	Ensino de pirâmides no Ensino Médio: uma sequência didática apoiada na teoria de registro de representação semiótica
07	SILVA, Carolina Ferreira da	2021	Dissertação	Sistemas de equações lineares: contribuições de uma sequência didática à luz da teoria de registros de representações semióticas
08	FACCHINI, Camila	2021	Dissertação	Uma proposta de atividades de semelhança de triângulos para o Ensino Fundamental
09	CALIANI, Fabricio Jose Oliveira	2021	Dissertação	Um aplicativo de celular como alternativa metodológica para o ensino de semelhança de triângulos e pirâmides
10	PHILIPPI, Fernando Zill	2020	Dissertação	Sequências e Séries: uma proposta de trabalho com o uso da Engenharia Didática e a Teoria dos Registros de Representações Semióticas

11	ANGELIN, Arlindo Moacir	2020	Dissertação	Semelhança de triângulos: atividades práticas com o auxílio do GEOGEBRA
12	OLIVEIRA, Erimar Dos Santos	2020	Dissertação	O uso de softwares na educação matemática
13	MUNIZ, Rafaela dos Santos Souza	2019	Dissertação	O ensino de função pela perspectiva da teoria dos registros de representação semiótica apoiado por tecnologias digitais
14	GOMES, Midiele Dantas.	2018	Dissertação	A construção de sequências didáticas para o conteúdo de semelhança de triângulos através do software matemático GEOGEBRA
15	SANTOS, Daniel Francisco dos	2017	Dissertação	Uso de planilhas eletrônicas como ferramentas de apoio ao ensino de matemática
16	SILVA, Rogerio Mendes da	2016	Dissertação	Software MAXIMA no ensino de matemática: uma sequência didática abordando tópicos de álgebra no Ensino Médio
17	CRUZ, Josinaldo Dos Santo	2015	Dissertação	O uso de investigações matemáticas na abordagem da semelhança de triângulos e aplicações
18	CORREIA, Eraldo Goncalves	2015	Dissertação	Análise de uma sequência didática de funções quadráticas sob a influência da teoria dos registros de representações semiótica
19	OLIVEIRA, Barbara Pimenta De	2014	Dissertação	Reflexões à luz da teoria dos registros de representação semiótica acerca das práticas dos professores que ensinam matemática
20	GIMENES, Solange Sardi	2014	Dissertação	Possíveis contribuições de atividades de investigação e exploração com o computador na produção de conhecimento acerca do assunto semelhança

Fonte: Autoria própria.

Ainda na fase de condução do protocolo Kitchenham, para extração dos dados, sumarização e síntese dos dados e interpretação dos resultados, decidimos olhar em cada trabalho o objetivo proposto, os pressupostos teórico-metodológicos que os fundamentaram, o contexto em que a pesquisa foi realizada, os participantes de pesquisa e as principais dificuldades dos estudantes na implementação do estudo, além dos principais resultados observados.

Por fim, realizamos a interpretação desses resultados, relacionando-os ao estudo apresentado nesta dissertação, passada a terceira fase do protocolo, segundo Kitchenham e Charters (2007), na qual se registrou o relatório da revisão de literatura.

Com esse relatório, finalizamos também a problemática desta pesquisa, tendo em vista dialogar com os resultados encontrados nas teses e dissertações analisadas e os objetivos desta investigação, bem como levantar as lacunas que a justificaram.

2.3 Relatório da Revisão de Literatura

Conforme escrito na seção anterior, nesta traz a revisão de literatura, os resultados de outras pesquisas relacionadas à que está sendo construída aqui. Assim, a revisão aqui apresentada vem explicitar o que a comunidade da Educação Matemática tem discutido sobre os processos de ensino e de aprendizagem de semelhança de triângulos e evidenciar as lacunas que se observaram durante a análise dos trabalhos selecionados na revisão.

Ressaltamos que, na fase de condução do protocolo de Kitchenham e Charters, organizamos as análises por meio do levantamento do objetivo proposto, os pressupostos teórico-metodológicos que as fundamentaram, as pesquisas selecionadas, o contexto em que foram realizadas, os participantes de pesquisa e as principais dificuldades dos estudantes na implementação do estudo, além dos principais resultados observados e as relações dessas pesquisas com a investigação realizada. Essa organização foi escolhida conforme Souza (2024).

Nesse sentido, trazemos nesta seção o referido relatório que, de agora em diante, será tratado neste texto como revisão de literatura.

Para apresentar as sínteses das pesquisas analisadas na revisão, foi primeiramente elaborada a Tabela 2, na qual se evidenciam os sujeitos das pesquisas. Em seguida, na Tabela 3, destacamos os objetivos e os pressupostos teóricos nelas utilizados, para, a partir daí, apresentarmos um breve resumo de cada uma delas.

Para a discussão dos dados observados, construímos uma subseção em que se versa sobre o diálogo entre essas pesquisas, para, em seguida, trazermos os principais resultados inseridos na Tabela 4. Assim, explicitamos as convergências e especificidades nos resultados observados.

Em suma, expusemos as lacunas presentes nas pesquisas analisadas, que justificam a construção de um estudo sobre o uso de planilhas eletrônicas na aprendizagem de semelhança de triângulos a partir de uma sequência didática implementada, finalizando a problemática.

Isso posto, na subseção seguinte apresentamos a síntese dos resultados das análises da revisão de literatura.

2.3.1 Síntese da Revisão de Literatura

Nesta subseção, como já mencionado, trazemos os resultados encontrados nas análises observadas para esta revisão de literatura. Para isso, a Tabela 2 aponta os participantes de pesquisa dos respectivos trabalhos e o ano de publicação.

Tabela 2 - Participantes de Pesquisa			
	Autor (a)	Ano	Sujeito de Pesquisa
01	COUTO, Andrey Alves do	2024	Estudantes concluintes do Ensino Médio (da 3ª série) de um colégio da Rede Estadual de Goiás
02	SALDANHA, Renato Flor	2023	Professores de Matemática e Física, que atuam no Ensino Médio
03	BARBOSA, Douglas	2023	Estudantes do Ensino Fundamental e Médio
04	SIQUEIRA, Lucimara	2022	Professores da educação básica que lecionam turmas do 8º ano Ensino Fundamental
05	SOUSA NETO, Jose Brilhante de SANTOS,	2022	Estudantes da turma A, B e C do 9º ano da escola Clarice Moraes, localizado em Brumado-BA
06	Ricardo Almeida dos	2021	Uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de Londrina/PR
07	SILVA, Carolina Ferreira da	2021	Seis estudantes matriculados na disciplina de Álgebra Linear I, do terceiro semestre de um curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Farroupilha
08	FACCHINI, Camila	2021	Estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental nas aulas de Práticas Experimentais, com a etapa de formalização nas aulas de Matemática em uma escola do Programa de Ensino Integral do Estado São Paulo
09	CALIANI, Fabricio Jose Oliveira	2021	Estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental
10	PHILIPPI, Fernando Zill	2020	Um grupo de onze estudantes de 2º e 3º períodos do curso de Engenharia Civil na cidade de Medianeira - PR
11	ANGELIN, Arlindo Moacir	2020	Estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental
12	OLIVEIRA, Erimar Dos Santos	2020	Estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de Teresina
13	MUNIZ, Rafaela dos Santos Souza	2019	Uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública localizada na cidade de São Pedro da Aldeia/RJ
14	GOMES, Midiele Dantas.	2018	Estudantes do 5º período do curso de Licenciatura em Educação no Campo com Habilitação em Matemática e Ciências da Natureza da UFRB - Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, no Centro de Tecnologia em Energia e Sustentabilidade, em Feira de Santana-BA
15	SANTOS, Daniel Francisco dos	2017	Estudantes do terceiro ano do Ensino Médio
16	SILVA, Rogerio Mendes da	2016	Estudantes do 1º, 2º e 3º série do Ensino Médio
17	CRUZ, Josinaldo Dos Santo	2015	Uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de um colégio da rede estadual de Sergipe

18	CORREIA, Eraldo Goncalves	2015	10 estudantes regularmente matriculados no 3º ano do Ensino Médio do período diurno (manhã e tarde), de uma escola particular de Fortaleza.
19	OLIVEIRA, Barbara Pimenta De	2014	uma Escola Municipal de Ensino Fundamental de Fortaleza e dois professores que ensinam Matemática nos 4º e 5º anos
20	GIMENES, Solange Sardi	2014	Estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental

Fonte: autoria própria.

Ao analisar os participantes de pesquisa apresentados no Quadro 2, verificamos que Souza Neto (2022), Facchini (2021), Caliani (2021), Angelin (2020), Muniz (2019), Cruz (2015) e Gimenes (2014) realizaram suas investigações com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, enquanto Couto (2024), Santos (2021), Oliveira (2020), Santos (2017), Silva (2016) e Correia (2015) em uma ou em todos os anos do Ensino Médio. Silva (2021), Philippi (2020) e Gomes (2018) fizeram suas investigações voltadas para estudantes do ensino superior. Ainda assim, os autores Saldanha (2023) e Siqueira (2022) optaram por investigar professores de matemática que atuam nos segmentos dos ensinos Fundamental e Médio.

O fato de os trabalhos analisados terem participantes de pesquisa variando entre segmentos de ensino (Fundamental, Médio e Superior) permitiu que o autor desta dissertação comparasse as ações metodológicas atribuídas para o ensino e a aprendizagem de objetos matemáticos em todas as etapas da educação, mesmo que o foco principal seja a Educação Básica.

Seguindo com o direcionamento desta subseção, elaboramos uma terceira tabela (Tabela 3), na qual são apontados os objetivos e os pressupostos teóricos que fundamentaram as análises dos autores nos estudos selecionados nesta revisão de literatura para em seguida abordar um breve resumo dessas obras.

Tabela 3 - Objetivos e Pressupostos Teórico-Metodológicos		
COUTO (2024)	Objetivos	Analisar o potencial do uso de planilha eletrônica na instrução de jovens da 3ª série do Ensino Médio com respeito à educação financeira proposta nos objetivos de aprendizagem do DC-GOEM ³ e nas habilidades da BNCC (Couto, 2024, p.38)
	Pressupostos Teóricos-metodológicos	Não identificamos uma teoria ou metodologia de análise dos dados produzidos. Após aplicação das atividades foi realizada uma análise didática.
SALDANHA (2023)	Objetivos	Analisar como as funções trigonométricas aplicadas ao Ensino de Movimento Harmônico Simples (MHS), podem impactar os processos de ensino e aprendizagem desse objeto do conhecimento em âmbito escolar (Saldanha, 2023, p.39)
	Pressupostos teóricos	Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS)(Duval (1970-1995)

³ Documento Curricular para Goiás – Etapa Ensino Médio (DC-GOEM), segundo Couto (2024, p. 13).

BARBOSA (2023)	Objetivos	Apresentar uma proposta de resolução de exercícios de estatística envolvendo ferramentas tecnológicas para analisar os dados obtidos e chegar ao resultado esperado, além de ampliar a discussão dos exercícios. (Barbosa 2023, p.15)
	Pressupostos Teóricos-metodológicos	Não identificamos uma teoria ou metodologia de análise dos dados produzidos. Após aplicação das atividades foi realizada um conjunto de sequências didáticas
SIQUEIRA (2022)	Objetivos	Apresentar uma proposta de sequência didática de conteúdos estatísticos programáticos do oitavo ano do Ensino Fundamental, de maneira contextualizada à pandemia do Covid-19, utilizando as planilhas eletrônicas, em particular o Excel, como ferramenta pedagógica no processo de ensino aprendizagem desses conteúdos. (Siqueira, 2022, p.16)
	Pressupostos Teóricos-metodológicos	Não identificamos uma teoria ou metodologia de análise dos dados produzidos. A autora não aplicou a sequência produzida.
SOUSA NETO (2022)	Objetivos	Nivelar os conteúdos de estatística vigentes na turma; apresentar as planilhas eletrônicas; verificar as habilidades dos alunos em planilhas eletrônicas e apresentar uma nova metodologia de ensino de estatística utilizando as planilhas (Souza Neto, 2022, p.15)
	Pressupostos Teóricos-metodológicos	Não identificamos uma teoria ou metodologia de análise dos dados produzidos
SANTOS (2021)	Objetivos	Investigar como as dimensões inferiores de uma pirâmide são percebidas pelos estudantes, quando defrontados com situações-problema que evocam elementos não diretamente perceptíveis sem uma análise qualitativa dos elementos figurais (Santos, 2021, p.17)
	Pressupostos teóricos	Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS) Duval (2003, 2009, 2011); Engenharia Didática (Artigue (1996))
SILVA (2021)	Objetivos	Investigar as contribuições de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares, à luz da Teoria de Representação Semiótica. (Silva 2021, p. 17)
	Pressupostos Teóricos-metodológicos	Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (2009), Resolução de Problemas (Onuchic e Allevato (2009))
FACCHINI (2021)	Objetivos	Implementar da metodologia de Resolução de Problemas e a utilizar de materiais concretos, em particular os polidiamantes, para a construção do conceito de semelhança de triângulos, razão entre as áreas de figuras semelhantes e semelhança de outros polígonos (Facchini, 2021, p.73)
	Pressupostos metodológicos	Resolução de Problemas (Allevato e Onuchic (2014)) Mendes (2009),
CALIANI (2021)	Objetivos	Apresentar uma proposta de atividades com o uso da tecnologia de ponta, através de um aplicativo de celular nomeado Educação Estendida. (Caliani, 2021, p.11)
	Pressupostos teóricos	Não identificamos uma teoria ou metodologia de análise dos dados produzidos.
PHILIPPI (2020)	Objetivos	Confeccionar de uma sequência didática para investigar a convergência de sequências e séries numéricas.
	Pressupostos teóricos	Teoria de Registros de Representações Semióticas de Duval (2012), Engenharia Didática de Artigue (1995)
ANGELIN (2020)	Objetivos	tornar o estudo da Geometria mais atrativo e significativo (...) tornar o aluno protagonista do seu aprendizado (Angelin, 2020, p.11-12)
	Pressupostos metodológicos	Resolução de Problemas (Polya, 2006)

OLIVEIRA (2020)	Objetivos	Mostrar a importância de utilizar as tecnologias como ferramenta de ensino e recurso didático, abordando uma metodologia diferente da tradicional
	Pressupostos Teóricos-metodológicos	Não identificamos uma teoria ou metodologia de análise dos dados produzidos. O autor faz duas pesquisas de campo, sendo uma delas uma intervenção pedagógica e a outra uma entrevista com professores.
MUNIZ (2019)	Objetivos	Investigar se a teoria dos Registros de Representação Semiótica, utilizando as Tecnologias Digitais como recurso, pode contribuir para a construção do conceito de Função e Função afim no contexto do Ensino Fundamental II. (Muniz, 2019, p.22)
	Pressupostos teóricos	Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval; Moretti, 2012)
GOMES (2018)	Objetivos	Construir sequências didáticas e promover um ambiente de aprendizado para semelhança de triângulos (Gomes, 2018, p.18)
	Pressupostos teóricos	Engenharia Didática (Artigue (1996)) Teoria das Situações Didáticas (TSD) (Brousseau, ANO) (1996))
SANTOS (2017)	Objetivos	Apresentar uma abordagem alternativa para temas desenvolvidos na Matemática do Ensino Médio com o uso de planilhas eletrônicas.
	Pressupostos Teóricos-metodológicos	Não identificamos uma teoria ou metodologia de análise dos dados produzidos.
SILVA (2016)	Objetivos	Apresentar um modo de utilizar o software educacional Máxima, nas aulas de matemática no Ensino Médio (...) Elaborar uma proposta de atividade com base na teoria de registros de representações semióticas que possibilite explorar e compreender aspectos da álgebra. (Silva, 2016, p.14)
	Pressupostos teóricos	Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) (Duval 2012)
	Objetivos	compreender a importância das atividades investigativas no estudo da semelhança de triângulos e suas aplicações (Cruz, 2015, p.7)
CRUZ (2015)	Pressupostos metodológicos	Investigação na Sala de aula de Matemática Fiorentini e Lorenzato (2006) e Mendes (2009) , Cunha, Oliveira, Ponte (1995), Fonseca, Brunheira, Ponte (1999), Ponte et al (1998), Ponte, Brocardo, Oliveira (2013), Ponte (2003)
	Objetivos	Comparar o grau de dificuldade de aprendizagem por parte dos alunos entre problemas que necessitam de uma conversão do registro cartesiano para o algébrico e problemas que necessitam da conversão do registro algébrico para o cartesiano. (Correia, 2015, p.80)
CORREIA (2015)	Pressupostos teóricos	Teoria dos Registros de Representações Semióticas (Duval, (1995, 2000, 2003, 2006, 2009, 2011)) Engenharia Didática (Michèle Artigue (1980))
	Objetivos	Analisar contribuições de sessões reflexivas para as percepções de professores que ensinam Matemática, acerca de suas práticas docentes. (Oliveira, 2014, p.24)
OLIVEIRA (2014)	Pressupostos teóricos	Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) (Duval, 2009)
	Objetivos	Analisar contribuições para a produção do conhecimento do assunto semelhança de figuras geométricas, ao se utilizar uma proposta de ensino envolvendo atividades de exploração/investigação com o uso computador, no Ensino Fundamental. (Gimenes, 2014, p.18)
GIMENES (2014)	Pressupostos teóricos	Não identificamos uma teoria ou metodologia de análise dos dados produzidos.

Fonte: autoria própria.

Conforme se pode observar na Tabela 3, não foi identificado em Couto (2024), Barbosa (2023), Facchini (2021), Siqueira (2022), Souza Neto (2022), Oliveira (2020), Angelin (2020), Santos (2017) Cruz (2015) e Gimenes (2014) uma teoria que fundamentasse essas investigações. No entanto, a TRRS, teoria que fundamenta esta investigação, foi utilizada nos estudos de Saldanha (2023), Santos (2021), Silva (2021), Philippi (2020), Muniz (2019), Silva (2016), Correia (2015) e Oliveira (2014). Vale ressaltar que Santos (2021), Philippi (2020) e Correia (2015) articularam essa teoria à Engenharia Didática, enquanto Silva (2021), à Resolução de Problemas na perspectiva de Onuchic e Allevato (2009). A metodologia de Resolução de Problemas nessa perspectiva também foi vista em Facchini (2021), já Angelin (2020) utilizou essa metodologia segundo Polya (2006).

Entre os autores, observamos que as planilhas eletrônicas estão contempladas nos trabalhos de Couto (2024), Barbosa (2023), Siqueira (2022), Souza Neto (2022) e Santos (2017), embora quase todos os autores desenvolveram sua pesquisa com algum recurso tecnológico.

Dando prosseguimento às análises, Couto (2024) dispõe de planilhas eletrônicas para ensinar educação financeira a estudantes do Ensino Médio, por meio da análise de questionários aplicados e de tarefas realizadas.

Saldanha (2023), à luz da TRRS, implementou uma sequência didática abordando o estudo do Movimento Harmônico Simples e as aplicações das Funções Trigonométricas, a partir das representações semióticas.

Barbosa (2023), entendendo que as tecnologias assumem um papel significativo nos processos de ensino e de aprendizagem de objetos matemáticos, aborda a estatística por meio de exercícios desenvolvidos nos *softwares* GeoGebra, LibreOffice e Calc. Siqueira (2022), entendendo que no ensino da estatística o uso de planilhas eletrônicas “auxiliam na construção de gráficos, elaboração de tabelas e permitem fazer diversos cálculos” (Siqueira, 2022, p.15), propõe uma sequência didática na qual utiliza planilhas eletrônicas para a aplicação do conteúdo de estatística em turmas do 8º ano do Ensino Fundamental.

Souza Neto (2022), buscando verificar se “O ensino de estatística com o uso de planilhas eletrônicas no último ano do Ensino Fundamental II pode ser mais significativo e eficaz que o modelo de ensino tradicional, (Souza Neto, 2022, p.15),

desenvolveu atividades cujos procedimentos para resolvê-las eram realizáveis apenas por intermédio de planilhas.

Já Santos (2021) visou entender como diferentes metodologias podem contribuir para o desenvolvimento da habilidade de visualização das dimensões inferiores das pirâmides pelos estudantes. Para isso, elaborou uma sequência didática na qual os estudantes tinham a oportunidade de resolver situações-problema que evocam elementos não diretamente perceptíveis sem uma análise qualitativa dos elementos figurais. Para sua pesquisa, Silva (2021) utilizou uma sequência didática para verificar as contribuições dessa sequência, para o ensino e a aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares para estudantes do terceiro semestre de um curso de Licenciatura em Matemática. Das pesquisas analisadas, apenas duas aplicaram a estudantes do Ensino Superior.

Facchini (2021), em seu trabalho, utilizou o material concreto polidamente para analisar os conceitos de semelhança de triângulos e de outros polígonos por meio de uma sequência de atividades.

Caliani (2021) apresentou, com o uso da tecnologia, uma proposta de atividades através do aplicativo Educação Estendida, para o aprendizado de semelhanças de triângulos e pirâmides, considerando que “novas tecnologias devem ser inseridas cada vez mais em nossas escolas de uma forma a auxiliar a aprendizagem, buscando não só o interesse do aluno como um meio complementar da aprendizagem” (Caliani, 2021, p.11).

Assim como Silva (2021), Philippi (2020) também desenvolveu sua pesquisa com estudantes do Ensino Superior por meio de uma sequência de atividades com o auxílio do *software* GeoGebra. Na sequência, o autor explorou diferentes representações visuais e/ou numéricas dos termos de uma sequência para verificar como elas podem auxiliar os estudantes de Engenharia Civil a compreender o conceito de convergência de sequências numéricas ou de séries numéricas.

Angelin (2020) implementou atividades desenvolvidas com o *software* GeoGebra para o ensino de semelhanças de triângulos, no intuito de ressaltar a importância das tecnologias como ferramenta de ensino.

Oliveira (2020) desenvolveu sua dissertação buscando enfatizar a importância do uso de *computadores, tablets e celulares* no ensino de objetos geométricos. O autor desenvolveu várias atividades abordando diferentes tópicos de Geometria no Ensino Médio.

Muniz (2019), por meio de tecnologias digitais, abordou o estudo da função afim em uma sequência didática para verificar as contribuições desses recursos no aprendizado desse conteúdo pelos estudantes. A sequência teve foco nos diferentes tipos de representação semiótica.

Gomes (2018) produziu uma sequência didática para verificar como a construção de sequências didáticas promove um ambiente de aprendizado para o estudo de semelhança de triângulos, oportunizando uma forma de aprendizagem mais dinâmica para esses conteúdos matemáticos.

Santos (2017) apresentou uma abordagem alternativa para temas diversos desenvolvidos na Matemática do Ensino Médio com o uso de planilhas eletrônicas.

Silva (2016) apresentou uma proposta visando possibilitar a exploração e compreensão de aspectos importantes da álgebra, a partir da utilização do *software* MAXIMA. O autor analisou se o *software* MAXIMA é adequado ao ensino de álgebra a partir de atividades envolvendo os registros de representação semiótica.

Cruz (2015), em sua dissertação, compreendeu a importância de atividades investigativas no estudo de semelhança de triângulos.

Correia (2015) desenvolveu uma sequência didática, voltada para funções quadráticas, de modo a se fazer uma análise dos diferentes registros necessários ao aprendizado dessas funções pelos estudantes.

Oliveira (2014) foi o único estudo no qual foram identificados professores de matemática como participantes de pesquisa. A autora faz uma reflexão sobre as práticas dos professores que lecionam Matemática:

Apresentamos sessões reflexivas como uma proposta de processo formativo, uma vez que elas possibilitam aos professores momentos destinados à reflexão sobre suas práticas docentes, partindo de seus próprios contextos de sala de aula. As sessões caracterizam-se como uma tentativa de criação de novas perspectivas de encontro dos professores com sua prática docente diária, permitindo que eles adquiram elementos para refletir sobre ela (Oliveira, 2014, p.16).

Por fim, Gimenes (2014) desenvolveu atividades envolvendo a exploração de figuras geométricas a fim de verificar como o GeoGebra pode auxiliar na compreensão de semelhança dessas figuras ao se utilizar atividades de exploração/investigação.

Na próxima subseção, construímos um diálogo entre as pesquisas analisadas e esta investigação.

2.3.2 Diálogo entre as pesquisas analisadas

Esta subseção foi organizada ressaltando, em um primeiro momento o que as pesquisas analisadas trazem sobre a utilização de recursos digitais com ênfase em planilhas eletrônicas no ensino de objetos matemáticos, para posteriormente seguir com as considerações em relação a TRRS que fundamentaram essas pesquisas. Isso para finalmente abordar o que elas trazem especificamente sobre os processos de ensino e de aprendizagem de Semelhança de Triângulos.

Essa escolha se justifica no fato da necessidade de compreender como essas pesquisas abordam aspectos concomitantes a esta investigação e levantar as lacunas que justificam este trabalho.

Couto (2024), Barbosa (2023), Siqueira (2022), Sousa Neto (2022) e Santos (2017) abordaram o uso de planilhas eletrônicas voltadas para o ensino de algum objeto matemático, o que também é foco do estudo que está se desenvolvendo aqui. As ideias desses autores convergem para o fato de que a tecnologia nas aulas tem se tornado um facilitador para o ensino e para a aprendizagem de objetos matemáticos em diferentes níveis de ensino.

Couto (2024), por exemplo, em relação ao estudo da Matemática Financeira, destaca que:

a interação com as planilhas eletrônicas proporcionou aos alunos uma experiência prática “mão na massa”, permitindo-lhes experimentar diretamente as consequências de suas decisões financeiras em um ambiente simulado. Dando-lhes oportunidade de seguir adiante em uma determinada ação a partir de outras tomadas anteriormente. Isso não apenas reforçou os conceitos teóricos discutidos em sala de aula, mas também desenvolveu habilidades práticas de gestão financeira (Couto 2024, p.79).

Assim como Couto (2024), Barbosa (2023) concorda que o uso da tecnologia nas aulas de matemática contribui para o ensino e a aprendizagem da estatística pelos estudantes, considerando que “a utilização dessas ferramentas tecnológicas torna a aula mais dinâmica e facilita a visualização gráfica do comportamento dos dados observados” (Barbosa, 2023, p.123–124).

Já Siqueira (2022), abordando o uso de tecnologia na sala de aula, concorda com Barbosa (2023) e Couto (2024) ao dizer que “as tecnologias despertam o interesse dos estudantes, e podem facilitar o processo de ensino e aprendizagem já que estão cada vez mais presentes na vida das pessoas” (Siqueira, 2022, p.14).

Seu trabalho, similar ao de Barbosa (2023), apresenta uma nova proposta que norteia os professores da educação básica nas aulas de estatística para estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental, utilizando recursos digitais. Porém, diferente de Barbosa (2023) que utiliza os *softwares* GEOGEBRA e LIBREOFFICE, o autor optou pelo *software* da Microsoft Excel 2009. Siqueira (2022) gerou como produto planos de aula abordando o uso de estatística em dados reais sobre a covid-19.

Nos planos de aula elaborados, os estudantes, com o auxílio do professor, realizam comandos previamente escritos, porém, desenvolvidos em planilhas eletrônicas do Excel. A cada comando realizado, o autor traz alguns comentários que o professor pode fazer para estimular o pensamento matemático dos estudantes. Por exemplo, após dar o comando para a realização de um determinado cálculo, feito de duas maneiras distintas nas planilhas eletrônicas do Excel, o autor enfatiza a necessidade de “pedir que os alunos realizem o cálculo dos dois modos, em seguida perguntar qual das duas maneiras acharam mais fácil e o porquê” (Siqueira, 2022, p. 65).

Nesta investigação, assim como em Siqueira (2022), desenvolveram-se atividades na planilha eletrônica do Excel, na qual os estudantes tiveram a oportunidade de realizar comandos que remetessem ao estudo de triângulos culminando na semelhança.

Embora Sousa Neto (2022) não mencione explicitamente que a tecnologia facilita o ensino, assim como Couto (2024), Barbosa (2023) e Siqueira (2022), ele expressa que “a tecnologia ajuda no processo pedagógico”. Abordando o papel do professor em meio à era tecnológica, o autor diz que é preciso

repensar o processo do qual participamos dentro da escola na condição de docente, a fim de que possamos conseguir visualizar a tecnologia como uma ajuda no processo pedagógico e que possamos utilizá-la de uma forma consistente (Souza Neto, 2022, p.23).

Assim, Souza Neto (2022) aborda o uso de planilhas do Excel para o ensino de Estatística no Ensino Fundamental, capacitando os estudantes, a princípio, a utilizar *softwares* relacionados a planilhas eletrônicas, desde a realização de operações matemáticas básicas até cálculos estatísticos. Isso para, posteriormente, implementar as atividades relacionadas ao objeto matemático por meio dessas planilhas.

Com relação aos pressupostos teóricos, destacamos que a TRRS também fundamentou a construção e análise da sequência de atividades na investigação que

deu origem a esta dissertação. Assim, conforme já discutido na subseção anterior, essa teoria subsidiou os estudos de Saldanha (2023), Santos (2021), Silva (2021), Philippi (2020), Muniz (2019), Silva (2016), Correia (2015) e Oliveira (2014), sendo que Santos (2021), Philippi (2020) e Correia (2015) articularam essa teoria à Engenharia Didática, enquanto Silva (2021) à Resolução de Problemas.

Com relação ao estudo de triângulos, culminando na semelhança, foco desta dissertação, esse também foi o objeto matemático abordado nas investigações de Facchini (2021), Caliani (2021), Angelin (2020), Gomes (2018), Cruz (2015) e Gimenes (2014).

Cabe ressaltar que Facchini (2021) considera que métodos tradicionais para o ensino de Semelhança de Triângulos não promovem suficientemente uma aprendizagem significativa e propõem sequências de atividades contextualizadas como uma alternativa metodológica para o ensino desse objeto.

Caliani (2021), partindo do pressuposto que os estudantes estão imersos no mundo digital e que o uso do celular é recorrente por eles, propôs uma análise dos objetos matemáticos semelhando de triângulos e Pirâmides, por meio de realidade aumentada com o aplicativo de celular Educação Estendida. Enquanto Angelin (2020), por entender que os estudantes podem esbarrar em desafios relacionados a abstração de conceitos e a não visualização das relações entre lados homólogos e ângulos correspondentes de triângulos semelhantes propôs o estudo desse objeto matemático por meio de atividades desenvolvidas com o uso do GeoGebra.

Gomes (2018), concordando com Angelin (2020), usa o GeoGebra para o ensino de semelhança de triângulos, considerando que esse *software* permite a construção dinâmica de figuras geométricas, visualização de relações e propriedades matemáticas e exploração de conceitos abstratos.

Gimenes (2014), assim como Gomes (2018) e Angelin (2020), reconhecendo que atividades investigativas podem promover a aprendizagem de objetos matemáticos, construiu e implementou atividades para o ensino de Semelhança de Triângulos por meio do GeoGebra, numa perspectiva investigativa.

Quanto aos principais resultados observados pelos pesquisadores, eles foram destacados na Tabela 4.

Tabela 4 - Principais Resultados das pesquisas analisadas

Nº	Autor (a) / Ano	Principais Resultados
----	-----------------	-----------------------

01	Couto (2024)	(...) um aumento no conhecimento e na conscientização dos participantes da pesquisa a respeito de questões financeiras que permeiam os seus cotidianos e, (...) estimulou os estudantes a terem mais apreciação às noções de matemática, economia e finanças trabalhadas de modo a possibilitar uma educação financeira a esses discentes (Couto, 2024, p.78) (...)a interação com as planilhas eletrônicas proporcionou aos alunos uma experiência prática “mão na massa”, permitindo-lhes experimentar diretamente as consequências de suas decisões financeiras em um ambiente simulado. (Couto, 2024, p.79) (...) os resultados deste estudo sugerem que o uso de planilhas eletrônicas como parte integrante de programas de educação financeira pode ser uma estratégia eficaz para promover o aprendizado significativo e a construção de competências financeiras (Couto, 2024, p.79)
02	Saldanha (2023)	O Estudo relevou que os alunos demonstraram maior compreensão dos conceitos, habilidade para resolver problemas e capacidade de inter-relacionar os conhecimentos de física e matemática. A aplicação da sequência didática com alunos do Ensino Médio resultou em melhorias na aprendizagem dos conceitos de Movimento Harmônico Simples e funções trigonométricas.
03	Barbosa, (2023)	O estudo mostrou que a utilização do GeoGebra e planilhas eletrônicas para a resolução de problemas de estatística no Ensino Fundamental e Médio promoveu o aprendizado dos alunos e que eles desenvolveram habilidades relacionadas ao raciocínio lógico nas resoluções de problemas, além das ferramentas tecnológicas proporcionar aulas mais dinâmicas e motivadoras
04	Siqueira (2022)	O estudo mostrou que é possível estabelecer diálogos e estimular os alunos a compreenderem os conteúdos estatísticos trabalhados em sala de aula. A utilização de dados do cotidiano do aluno e com uso de planilhas eletrônicas, torna a aprendizagem mais dinâmica e efetiva, visto que são obtidos a partir de situações reais vivenciadas por eles. (Siqueira 2022, p.83)
05	Sousa neto (2022)	A pesquisa mostrou que os alunos compreenderam os conceitos estatísticos discutidos, desenvolveram habilidades na organização e análise de dados e apresentaram melhora na resolução de problemas e ainda, que os alunos se sentiram mais engajados e interessados em aprender estatística e que a utilização de planilhas eletrônicas resultou em efeitos positivos na aprendizagem.
06	Santos (2021)	O estudo mostrou que a sequência didática promoveu aulas mais motivadoras. Além disso, os alunos demonstraram maior compreensão dos conceitos estudados, habilidades na resolução de problemas, bem como capacidade de visualizar e interpretar diferentes representações semióticas relacionadas às pirâmides.
07	Silva (2021)	(...) a pesquisa alcançou o objetivo proposto, uma vez que, por meio da sequência didática, construída e desenvolvida com futuros professores de matemática, foi possível investigar as contribuições dela para o ensino e aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares, à luz da Teoria de Registros de Representações Semióticas. Entendemos, com os resultados obtidos, que esse pode ser um caminho para abordar os conceitos associados a sistemas lineares, tanto na Educação Básica, quanto no Ensino Superior, já que pode ocasionar uma melhora no processo de ensino e aprendizagem (Silva, 2021, p.89)
08	Facchini (2021)	Com a suspensão das atividades presenciais devido ao Decreto nº 64.862 e a impossibilidade da aplicação das atividades de forma remota, a sequência se formalizou em uma proposta com comentários para que o professor que a aplique possa conduzir cada atividade de modo a utilizar as dez etapas da Resolução de Problemas conforme Allevato e Onuchic (2014). (Facchini, 2021, p.73)
09	Caliani (2021)	Os resultados percorridos pelo autor mostram que ao utilizar as propostas elaboradas na sequência didática através de fatos históricos da matemática por meio do aplicativo Educação Estendida, os alunos despertaram mais

		interesse na sala de aula, intensificando mais a participação deles durante as aulas sobre semelhança de triângulos e pirâmides
10	Philippi (2020)	A pesquisa mostrou que a utilização da Engenharia Didática e da TRRS na sequência didática favoreceu a construção de conhecimento pelos alunos, relacionado a sequências e séries permitindo-lhes explorar e investigar diferentes conceitos através de atividades didáticas elaboradas.
11	Angelin (2020)	os resultados mostraram que quando a autora trabalha com atividades práticas e com a resolução de problemas mais alunos acertaram as questões e quando utilizamos recursos em que precisava que o aluno tivesse uma postura mais ativa, construção no GeoGebra de triângulos semelhantes e cálculos de distâncias inacessíveis, o envolvimento comparado com a apresentação apenas teórica do conteúdo, foi significativamente maior. (Angelin, 2020, p. 87-88)
12	Oliveira (2020)	(...) os resultados foram satisfatórios, observando um grande interesse por parte dos alunos e consequentemente uma significativa melhora no desempenho, indicando que os recursos computacionais como ferramenta didática facilitam a aprendizagem de tópicos de matemática. Dessa forma, é possível concluir que os computadores e seus softwares, assim como aplicativos para tablets e celulares podem ser grandes facilitadores no aprendizado de Matemática. (Oliveira, 2020, p.71)
13	Muniz (2019)	O estudo indicou que a aplicação da sequência didática para alunos do Ensino Médio resultou em efeitos positivos na aprendizagem dos conceitos de funções. Também que os alunos mostraram maior compreensão dos conceitos, desenvolveram habilidades na resolução de problemas e apresentaram melhora na interpretação de diferentes representações de funções.
14	Gomes (2018)	A pesquisa apontou que a utilização do GeoGebra nas sequências didáticas favoreceu a aprendizagem dos alunos em relação ao objeto matemático Semelhança de Triângulos, permitindo-lhes explorar e investigar os conceitos de forma mais interativa. Além disso, o uso do software GeoGebra possibilitou a manipulação de figuras geométricas, a realização de medidas e cálculos e a visualização de relações matemáticas
15	Santos (2017)	A aplicação em sala de aula, mostrou que as planilhas podem ser uma ferramenta útil, capaz de despertar maior interesse por parte dos alunos. A construção das planilhas no laboratório de informática permitiu aos alunos verificarem o que ocorre com o gráfico de uma função ao ter seus coeficientes alterados, um a um. Foi notória a participação de todos, empenhados em construir as planilhas e verificar se o resultado final, ao gerar o gráfico, seria o esperado. Podemos concluir, sem medo de errar, que a forma alternativa de trabalhar Matemática com o uso de planilhas eletrônicas é válida. (Santos, 2017, p.51)
16	Silva (2016)	O estudo apontou que o uso de uma sequencias de atividades favoreceu o ensino de álgebra aos alunos de todas os anos do Ensino Médio, sendo potencializado com o uso do software MAXIMA
17	Cruz (2015)	O estudo aponta que investigações matemáticas por meio de atividades investigativas é uma excelente ferramenta para o ensino de semelhança de triângulos, permitindo assim que os alunos explorem melhor as definições e propriedades desse objeto matemático. Além do mais, o uso dessa metodologia mostrou que os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental indicaram um aprendizado mais satisfatório relacionados aos conteúdos abordados.
18	Correia (2015)	O estudo mostrou que obteve resultados satisfatórios em relação as conversões dos registros algébricos para os registros cartesianos das funções polinomiais do 2º grau, fundamentada na TRRS com os alunos do 3º ano do Ensino Médio, visto que esses alunos dominaram amplamente essas conversões e não apresentaram dificuldade maior de uma conversão em relação a outra.
19	Oliveira (2014)	Esse estudo nos permitiu uma aproximação com o contexto escolar municipal, apontando para a necessidade de desenvolver formações na perspectiva reflexiva. Apesar das dificuldades metodológicas, citadas na

		literatura e no decorrer do nosso percurso metodológico, as reflexões que surgiram com os professores nos apontam para uma necessidade da ressignificação de suas práticas. Entendemos que as sessões reflexivas podem servir como estratégia de aproximação entre os conhecimentos gerados na academia e aqueles construídos no dia a dia da sala de aula, podendo ser considerado como uma estratégia no sentido de criar possibilidades da formação de grupos colaborativos (Oliveira, 2024, p. 27-128)
20	Gimenes (2014)	A pesquisa mostrou que atividades de investigação e exploração com o computador podem contribuir para a produção de conhecimento acerca de semelhança de triângulos. Também que os alunos que participaram da pesquisa apresentaram melhora na compreensão dos conceitos relacionados a esse objeto matemático, e apresentaram maior autonomia no processo de aprendizagem. Fonte: autoria própria.

Com os resultados, observamos que o uso das planilhas eletrônicas e de outras tecnologias digitais favoreceu os processos de ensino e de aprendizagem dos objetos matemáticos para os quais foram destinadas. observamos ainda que sequências de atividades, se bem planejadas, são um recurso metodológico favorável a esses processos. Em relação à TRRS, essa foi uma escolha adequada dos autores para subsidiar as análises realizadas.

No entanto, verificamos que nenhuma das pesquisas usou planilhas eletrônicas abordando triângulos e culminando no estudo de semelhança de triângulos para estudantes do Ensino Médio ou mesmo de outro nível de ensino, indicando uma lacuna relevante que justifica o desenvolvimento da pesquisa aqui apresentada.

Ademais, verificamos que a teoria escolhida para fundamentá-la é adequada para analisar estudos elaborados a partir de sequências de atividades abordando aspectos de objetos geométricos. Dessa forma, finalizamos a problemática desta pesquisa.

3. METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção, abordamos a metodologia de pesquisa e os procedimentos metodológicos, bem como o contexto escolar em que ela foi desenvolvida. Além disso, trazemos as abordagens que levaram à elaboração de uma planilha eletrônica e à construção da sequência didática para o processo de ensino de triângulos, culminando em semelhança de triângulos.

A pesquisa tem caráter qualitativo, tendo em vista que:

a utilização de amostras intencionais, a coleta de dados com perguntas abertas, as análises de texto ou imagens, a representação da informação em gráficos e tabelas, e a interpretação pessoal dos resultados das averiguações, todas constituem subsídios aos procedimentos qualitativos. (Creswell, 2010, p. 18).

E abordagem investigativa, pois esta pesquisa está se referindo a uma estratégia de investigação específica da pesquisa qualitativa, na qual se concentra na coleta, na análise e na comunicação de dados (Creswell 2010).

Creswell (2010) recomenda a escolha entre cinco possibilidades para uma investigação, dentre elas a narrativa, fenomenologia, etnografia, estudo de caso e teoria baseada na realidade:

(...) recomendo agora que os pesquisadores qualitativos escolham entre cinco possibilidades (...) pesquisadores podem estudar pessoas (narrativa, fenomenologia); explorar processos, atividades e eventos (estudo de caso, teoria baseada); ou informar-se sobre comportamento de compartilhamento de cultura de pessoas ou grupos (etnografia) (Creswell, 2010, p. 188).

Isso posto, decidimos optar pela estratégia investigativa, explorando processos e atividades a partir da construção de uma sequência didática. Essa foi dividida em três sessões, as quais são chamadas de estações, utilizando como recurso uma planilha eletrônica desenvolvida para investigar o ensino de triângulos, culminando em semelhança de triângulos, fundamentada e analisada na TRRS de Duval (2009).

A partir de agora, aqui será apresentado o processo de elaboração da planilha eletrônica e, também, da construção da Sequência Didática.

3.1 Construção da Planilha Eletrônica

Na revisão de literatura, conseguimos averiguar, entre outros, como a comunidade acadêmica aborda o estudo de Semelhança de Triângulos na Educação

Básica com uso de recursos tecnológicos. Entretanto, constatamos que as planilhas eletrônicas não foram até então usadas para esse fim, com auxílio ou não de Sequências Didáticas.

Diante disso, desenvolvemos uma planilha no Excel 360 da *Microsoft* capaz de indicar a existência de um triângulo por meio da desigualdade triangular; classificar um triângulo em relação às medidas dos seus lados e dos seus ângulos internos; calcular (e aproximar) as medidas de perímetro, de áreas e as medidas dos ângulos internos, tudo a partir das medidas dos lados de um triângulo dado; e, capaz de informar se dois triângulos são semelhantes ou não, indicando qual caso de semelhança foi utilizado e a razão de semelhança.

Para isso, utilizamos os algoritmos e *hiperlinks* próprios do Excel para tornar essa planilha facilmente manipulável, alcançando o objetivo para o qual foi desenvolvida. Além disso, todos os algoritmos da planilha foram elaborados com base na Lógica Matemática, através dos silogismos “SE”, “E” e “OU”. Também, o *layout* visual foi considerado para que a aparência da planilha pudesse se assemelhar bastante a um aplicativo ou a um *software* próprio, mesmo sendo especificamente um arquivo de planilha eletrônica. O arquivo dessa planilha foi protegido por senha e, para acessá-lo, se faz necessário digitar a senha *trianguladora23*.

Assim, nomeamos figurativamente essa planilha de *Trianguladora* e a Figura 2 mostra a página inicial dessa planilha.

Figura 2 - Página inicial da Trianguladora



Fonte: Autoria própria.

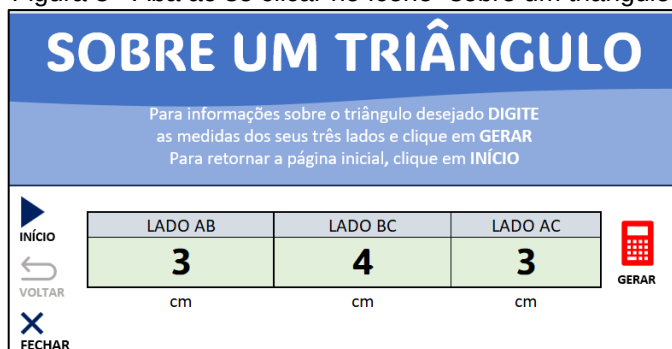
Como já mencionado, a construção dessa planilha visou assemelhar visualmente seu layout a de um aplicativo e, por isso, essa página inicial representa

um *MENU*, no qual se encontram os ícones de navegação⁴ para alterar a exibição das abas da planilha. Foi localizado no lado esquerdo da Figura 1 os ícones: INÍCIO, VOLTAR e FECHAR. Esses foram desenvolvidos respectivamente para retornar à página inicial, retornar à última aba acessada ou sair da planilha. Do lado direito, localizam-se os ícones: SOBRE UM TRIÂNGULO, SEMELHANÇA ENTRE TRIÂNGULOS, CASOS DE SEMELHANÇA e APRENDA MAIS, que serão detalhados nas subseções seguintes.

3.1.1 Ferramenta “sobre um triângulo”:

Clicando na ferramenta , somos direcionados a outra aba da planilha, que nos permitirá digitar possíveis três medidas de lados de um triângulo, conforme mostra a Figura 3.

Figura 3 - Aba ao se clicar no ícone "sobre um triângulo"



LADO AB	LADO BC	LADO AC
3	4	3
cm	cm	cm

Fonte: Autoria própria.

Ao se clicar no ícone , após digitadas as possíveis medidas de lados do triângulo, somos encaminhados para uma terceira aba, como mostra a Figura 4, a qual é possível observar se essas possíveis três medidas digitadas formam ou não um triângulo (considerando a desigualdade triangular), e se formarem, ainda observar a classificação desse triângulo, as medidas (aproximadas) dos ângulos internos; do perímetro; e da área.

Figura 4 – Aba quando se clica no ícone "Gerar"

⁴ Ícones de navegação são objetos com hiperlinks que são clicáveis, com objetivo de mudar as abas de apresentação da planilha, de maneira mais rápida e fácil.

SOBRE UM TRIÂNGULO			
OBSERVE as informações sobre o triângulo que digitou. Para uma nova pesquisa pressione o botão VOLTAR Para retornar a primeira página, pressione INÍCIO			
INÍCIO VOLTAR FECHAR	LADO AB	LADO BC	LADO AC
	3	4	3
	cm	cm	cm
	Esse triângulo Existe É classificado como Isósceles Acutângulo A medida do perímetro, em cm, é 10 e A medida da área cm ² , é 4,47 a medida dos ângulos internos, em °, são: 48,2 83,6 48,2		

Fonte: Autoria própria

Dolce (2013) define a desigualdade triangular ao dizer que “em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois” (Dolce, 2013, p. 55). Por isso, geramos um algoritmo que conduzisse à ideia de que, *se a soma de duas medidas digitadas for sempre maior que a terceira medida, então o triângulo existe, se não, o triângulo não existe*.

Para exemplificar, suponha-se que foram digitadas as possíveis medidas do triângulo nas células E2, E3 e E4. Para isso, em outra célula, digita-se o comando:

=Se(e(E2 + E3 > E4; E2 + E4 > E3; E3 + E4 > E2); “Existe”; “Não Existe”)

(algoritmo da condição de existência)

O símbolo “=” no início da célula permite que a planilha reconheça que o que se segue é um algoritmo. O silogismo “SE” possibilita separar os resultados caso o comando seja verdadeiro ou caso seja falso. O primeiro ponto e vírgula separa o comando dado no algoritmo do seu valor resposta. Já o segundo e terceiro ponto e vírgula separam o valor resposta verdadeiro do valor resposta falso. Se esses valores forem em forma de texto, precisam estar entre aspas. O Microsoft Suporte⁵ diz o seguinte:

A função SE é uma das funções mais populares do Excel e permite que você faça comparações lógicas entre um valor e aquilo que você espera. Portanto, uma instrução SE pode ter dois resultados. O primeiro resultado é se a comparação for Verdadeira, o segundo se a comparação for Falsa. Por

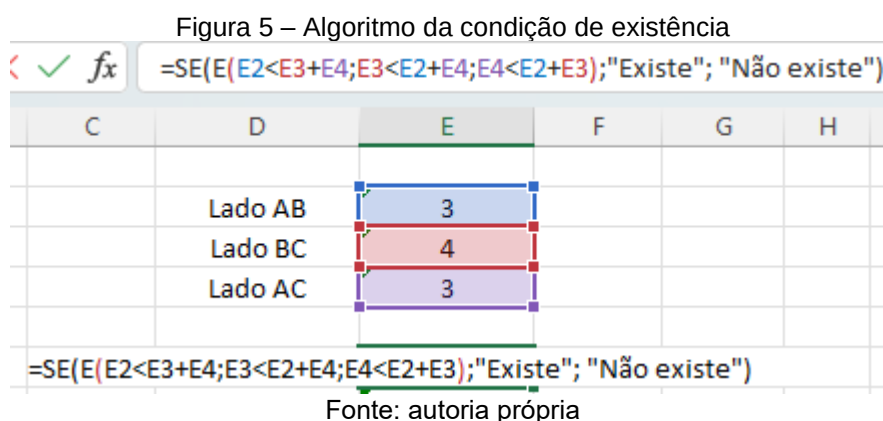
⁵ MICROSOFT SUPORTE. Utilizar as funções SE com as funções E, OU e NÃO no Excel.

Disponível em: <https://support.microsoft.com/pt-br/office/usar-as-fun%C3%A7%C3%B5es-se-com-e-ou-e-n%C3%A3o-d895f58c-b36c-419e-b1f2-5c193a236d97>.

exemplo, =SE(C2 ="Sim", 1;2) diz SE(C2 = Sim, então retorne a 1, caso contrário retorne a 2.

Já o silogismo “E” é utilizado quando o comando terá muitas hipóteses, as quais devem ser digitadas entre parênteses e separadas por ponto e vírgula. Além disso, todas as hipóteses do silogismo “E” precisam ser verdadeiras para arremeter ao valor verdadeiro do silogismo “SE”. Caso uma dessas hipóteses não seja verdadeira, o comando remete ao valor falso do silogismo “SE”. Sobre esse silogismo, o Microsoft Suporte diz o seguinte: “use a função “E”, uma das funções lógicas, para determinar se todas as condições em um teste são VERDADEIRAS”.

Na Trianguladora, foram usadas as células E2, E3 e E4 da planilha para digitar as possíveis medidas de lados do triângulo e a célula E6 para digitar o algoritmo da condição de existência. Observa-se a Figura 5:



Já para classificar o triângulo quanto à medida dos lados, precisamos que a planilha eletrônica reconheça que o triângulo existe para só então poder classificá-lo. Assim, na célula que terá o algoritmo para classificá-lo quanto às medidas dos lados, usamos, em cada hipótese, a ideia de que a célula E6 sempre contenha o texto “Existe” e, caso contrário, ele não será classificado. O comando gerado foi:

=SE(E(E6="Existe";E2=E3;E3=E4;E2=E4);"Equilátero";SE(OU(E(E6="Existe";E2=E3;E3<>E4);(E(E6="Existe";E3=E4;E2<>E4));(E(E6="Existe";E2=E4;E3<>E4)));"Isósceles";SE(E(E6="Existe";E2<>E3;E3<>E4;E2<>E4);"Escaleno";"")))

(algoritmo da classificação do triângulo quanto as medidas dos lados).

É observável a utilização de mais de uma vez do silogismo “SE”, já que a planilha precisa verificar primeiramente se os três valores digitados são iguais, e uma

vez que isso é validado, a planilha retorna o valor de resposta verdadeiro que é: “Equilátero”, caso contrário, será direcionado ao valor resposta falso. Esse valor resposta falso se arremeterá a um novo silogismo “SE” ao qual verificará se dentre os valores digitados há pelo menos dois iguais, pois se assim for, a planilha arremeterá ao segundo valor resposta verdadeiro que é: “ISÓSCELES”; e se ainda assim a planilha não encontrar o valor resposta verdadeiro, ela arremeterá ao valor resposta falso que é “ESCALENO”. Até porque, uma vez que um triângulo existe e não é classificado como equilátero nem como isósceles, então ele só poderá ser classificado como escaleno.

Quanto aos lados, os triângulos se classificam em:

- equiláteros se, e somente se, têm os três lados congruentes;
- isósceles se, e somente se, têm dois lados congruentes;
- escalenos se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes (Dolce, 2013, p. 36).

Observe a Figura 6:

Figura 6 - Algoritmo de classificação quanto a medidas dos lados

Lado AB	3
Lado BC	4
Lado AC	3
Existência	Existe

=SE(E(E6="Existe";E2=E3;E3=E4;E2=E4);"Equilátero";SE(OU(E(E6="Existe";E2=E3;E3<>E4);(E(E6="Existe";E3=E4;E2<>E4));(E(E6="Existe";E2=E4;E3<>E4)));"Isósceles";SE(E(E6="Existe";E2<>E3;E3<>E4;E2<>E4);"Escaleno";""))))

Fonte: Autoria própria.

Agora, se os possíveis valores digitados não formarem um triângulo, aparecerá na aba a mensagem de texto informando que o triângulo não existe, pela desigualdade triangular, conforme exemplificado na Figura 7.

Figura 7 – Aba quando as medidas não formam um triângulo

SOBRE UM TRIÂNGULO			
OBSERVE as informações sobre o triângulo que digitou. Para uma nova pesquisa pressione o botão VOLTAR Para retornar a primeira página, pressione INÍCIO			
INÍCIO VOLTAR FECHAR	LADO AB	LADO BC	LADO AC
	3	7	3
	cm	cm	cm
Esse triângulo		Não existe	
		0 0,00	

Fonte: Autoria própria.

No entanto, para determinar as medidas dos ângulos internos do triângulo, utilizamos a lei dos cossenos, uma vez que a função trigonométrica arco cosseno permite identificar o ângulo.

“Função ACOS - Retorna o arco cosseno ou o cosseno inverso de um número. O arco cosseno é o ângulo cujo cosseno é *núm*. O ângulo retornado é fornecido em radianos no intervalo de 0 (zero) a pi.” (Support microsoft)

Por exemplo: se o triângulo ABC tem medidas $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$ e $\overline{AC} = z$, e, além disso, os ângulos internos opostos a x, y e z são respectivamente $\hat{C}, \hat{A}$ e $\hat{B}$, então pela lei dos cossenos⁶ se tem:

$$\text{I)} \quad x^2 = y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos \hat{C}$$

$$\text{II)} \quad y^2 = z^2 + x^2 - 2 \cdot z \cdot x \cdot \cos \hat{A}$$

$$\text{III)} \quad z^2 = y^2 + x^2 - 2 \cdot y \cdot x \cdot \cos \hat{B}$$

Isolando os $\cos \hat{C}$, $\cos \hat{A}$ e $\cos \hat{B}$ em I, II e III, tem-se:

$$\cos \hat{C} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{2 \cdot y \cdot z}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{-y^2 + x^2 + z^2}{2 \cdot x \cdot z}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{-z^2 + y^2 + x^2}{2 \cdot y \cdot x}$$

Aplicando o arco cosseno em cada uma dessas equações, tem-se:

$$\hat{C} = \arccos \left(\frac{-x^2 + y^2 + z^2}{2 \cdot y \cdot z} \right)$$

$$\hat{A} = \arccos \left(\frac{-y^2 + x^2 + z^2}{2 \cdot x \cdot z} \right)$$

$$\hat{B} = \arccos \left(\frac{-z^2 + y^2 + x^2}{2 \cdot y \cdot x} \right)$$

De modo similar, podemos realizar esses comandos sempre que o triângulo existir:

$$\text{I)} \quad =\text{SE}(\text{E6}=\text{"Existe"};\text{GRAUS}(\text{ACOS}((- \text{E2}*\text{E2}+\text{E3}*\text{E3}+\text{E4}*\text{E4})/(\text{2}*\text{E3}*\text{E4})));""))$$

$$\text{II)} \quad =\text{SE}(\text{E6}=\text{"Existe"};\text{GRAUS}(\text{ACOS}((- \text{E3}*\text{E3}+\text{E2}*\text{E2}+\text{E4}*\text{E4})/(\text{2}*\text{E2}*\text{E4})));""))$$

⁶ Teorema dos cossenos: em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formado (Dolce, 2013, p. 243).

III) =SE(E6="Existe";GRAUS(ACOS((-E4*E4+E3*E3+E2*E2)/(2*E2*E3)));"")

Observe a Figura 08:

Figura 8 - Medidas dos ângulos internos, a partir das medidas dos lados do triângulo

=SE(E6="Existe";GRAUS(ACOS((-E2*E2+E3*E3+E4*E4)/(2*E3*E4)));"")										
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
Lado AB	3		ângulo A	=SE(E6="Existe";GRAUS(ACOS((-E2*E2+E3*E3+E4*E4)/(2*E3*E4)));"")						
Lado BC	4		ângulo B	SE(teste_lógico; [valor_se_verdadeiro]; [valor_se_falso])						
Lado AC	3		ângulo C	48,2						
Existência	Existe									

Fonte: Autoria própria.

Para a classificação do triângulo em relação à medida dos seus ângulos internos, foi utilizada uma função do *Microsoft Excel* chamada “MAIOR”.

Uso da função **MAIOR** no Microsoft Excel. Retorna o maior valor k-ésimo de um conjunto de dados. Você pode usar esta função para selecionar um valor de acordo com a sua posição relativa. Por exemplo, você pode usar MAIOR para obter o primeiro, o segundo e o terceiro resultados⁷.

De modo que foi utilizada a relação que, se o quadrado da maior medida do lado de um triângulo for maior que a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados desse triângulo, ele é considerado obtusângulo. Entretanto, se o quadrado da maior medida de lado desse triângulo for igual à soma dos quadrados das outras duas medidas dos lados desse triângulo, ele é classificado como retângulo. E se o quadrado da maior medida do lado de um triângulo for menor que a soma dos quadrados dessas duas outras medidas, então esse triângulo é acutângulo.

Conhecendo-se as medidas dos lados de um triângulo e chamando a maior delas de a e as outras duas de b e c, (...) reconhecemos a natureza de um triângulo, com base nas equivalências abaixo:

$$a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \text{triângulo acutângulo}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \text{triângulo retângulo}$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \text{triângulo obtusângulo (Dolce, 2013, p. 244).}$$

⁷ MICROSOFT SUPORTE. Utilizar as funções SE com as funções E, OU e NÃO no Excel. Disponível em: <https://support.microsoft.com/pt-br/office/usar-as-fun%C3%A7%C3%B5es-se-com-e-ou-e-n%C3%A3o-d895f58c-b36c-419e-b1f2-5c193a236d97>.

Vale lembrar que, antes de classificar o triângulo quanto à medida dos seus ângulos internos, a planilha precisa inicialmente reconhecer que o triângulo existe (pela desigualdade triangular). Para isso, usamos o algoritmo:

=SE(E(E6="Existe";MAIOR(E2:E4;1)^2<((MAIOR(E2:E4;2)^2)+MAIOR(E2:E4;3)^2));"Acutângulo";SE(E(E6="Existe";MAIOR(E2:E4;1)^2=((MAIOR(E2:E4;2)^2)+MAIOR(E2:E4;3)^2));"Retângulo";SE(E(E6="Existe";MAIOR(E2:E4;1)^2>((MAIOR(E2:E4;2)^2)+MAIOR(E2:E4;3)^2));"Obtusângulo";""))))

(algoritmo da classificação do triângulo quanto às medidas dos ângulos internos).

Veja a Figura 9:

Figura 9 - Algoritmo de classificação quanto a medidas dos ângulos internos

Lado AB	3	ângulo C	48,19
Lado BC	4	ângulo A	83,6
Lado AC	3	ângulo B	48,2
Existência	Existe		
Class (LADOS)	Isósceles		

=SE(E(E6="Existe";MAIOR(E2:E4;1)^2<((MAIOR(E2:E4;2)^2)+MAIOR(E2:E4;3)^2));"Acutângulo";SE(E(E6="Existe";MAIOR(E2:E4;1)^2=((MAIOR(E2:E4;2)^2)+MAIOR(E2:E4;3)^2));"Retângulo";SE(E(E6="Existe";MAIOR(E2:E4;1)^2>((MAIOR(E2:E4;2)^2)+MAIOR(E2:E4;3)^2));"Obtusângulo";""))))

Fonte: Autoria própria.

3.1.2 Ferramenta “Semelhança entre triângulos”

É possível analisar se dois triângulos são semelhantes por meio da ferramenta



, que permite digitar possíveis medidas de lados de dois triângulos e obter informações necessárias para caso exista a semelhança ou não desses triângulos, conforme a Figura 10.

Figura 10 - Aba semelhança entre triângulos

Triângulos Semelhantes

Para verificar se há semelhança entre os triângulos ABC e DEF, DIGITE as medidas de seus lados e clique em GERAR
Para retornar a primeira página, pressione INÍCIO

	Lado AB	Lado BC	Lado AC
INÍCIO	5	11	7
	cm	cm	cm

	Lado DE	Lado EF	Lado DF
VOLTAR	10	22	14
FECHAR	cm	cm	cm

GERAR

Fonte: Autoria própria.

Após digitar as medidas dos lados dos triângulos ABC e DEF e clicar em gerar, somos direcionados a outra aba que nos informam se os triângulos são semelhantes ou não e, caso sejam, qual é a razão de semelhança, conforme especificado na Figura 11.

Figura 11 -- Aba de informações ao clicar no ícone gerar

Triângulos Semelhantes

Observe se os triângulos ABC e DEF são semelhantes ou não. Para uma nova pesquisa pressione o botão Retornar
Para retornar a primeira página, pressione MENÚ INICIAL

	Lado AB	Lado BC	Lado AC
INÍCIO	5	11	7

	Lado DE	Lado EF	Lado DF
VOLTAR	10	22	14
FECHAR			

Os triângulos ABC e DEF são semelhantes pois			
as medidas dos ângulos de ABC são	19,7	132,2	28,1
as medidas dos ângulos de DEF são	19,7	132,2	28,1
e sua razão de semelhança é:	1/2		

Fonte: Autoria própria.

Segundo Dolce (2013, p.193), a razão de semelhança é uma constante gerada pela razão entre cada par de lados homólogos⁸ de dois triângulos semelhantes. O autor chama essa constante de “k” e diz que, se $k = 1$, além de semelhantes, os triângulos são congruentes.

Configuramos a planilha para sempre calcular a razão de semelhança (caso os triângulos existam), analisando a medida do menor perímetro para o de maior perímetro, independentemente das medidas dos lados dos triângulos ABC e DEF.

⁸ Dois lados homólogos (*homo* = mesmo, *logos* = lugar) são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes (Dolce, 2013. p.192).

3.1.3 Ferramenta “casos de semelhança”

Clicando na ferramenta , somos direcionados a outra aba da planilha, que permite digitar possíveis três medidas de lados de dois triângulos e verificar alguns casos de semelhança, caso os triângulos existam. Observa-se isso na Figura 12.

Figura 12 – Aba casos de semelhança

CASO DE SEMELHANÇA - LAL e LLL

Para informações sobre o triângulo desejado DIGITE as medidas dos seus três lados e clique em **GERAR**
Para retornar a página inicial, clique em **INÍCIO**

Triângulo ABC

LADOS (cm)		ÂNGULOS (°)
AB	4,0	C
BC	3,0	A
AC		B 48

GERAR

Digite dois lados e o ângulo entre eles, para **GERAR** a medida do terceiro lado e as medidas dos outros dois ângulos

Triângulo DEF

LADOS (cm)		ÂNGULOS (°)
DE		F 48
EF	8,0	D
DF	6,0	E

VERIFICAR SEMELHANÇA

Digite as três medidas dos triângulos ABC e DEF ou dois lados e o ângulo entre eles, para **VERIFICAR** se há semelhança entre

Fonte: Autoria própria.

Nessa aba, é possível digitar as três medidas dos lados dos triângulos ABC e DEF, ou também duas medidas dos lados de um triângulo e a medida do ângulo interno entre esses lados para cada um dos triângulos ABC e DEF. Fazendo isso e,

ao se clicar no ícone  **VERIFICAR SEMELHANÇA**, somos direcionados a uma aba que indicará se esses dois triângulos são semelhantes ou não e caso eles sejam semelhantes, o algoritmo tentará verificar se essa semelhança ocorre pelo caso LADO-ÂNGULO-LADO (LAL) ou pelo caso LADO-LADO-LADO (LLL).

Dolce (2013) define esses casos (ou critérios) citados acima como:

Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes. (...) Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes (Dolce, 2013. p.200).

Não tivemos a intenção de adicionar o caso ÂNGULO-ÂNGULO (AA), uma vez que o objetivo dessa planilha é gerar informações de triângulos a partir da medida de seus lados e esse caso de semelhança (AA) estabelece uma relação apenas entre as medidas dos ângulos internos. Dolce (2013, p. 198) define esse caso de semelhança

como “se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes”.

3.1.4 Ferramenta “Aprenda Mais”

Ao clicar no ícone , somos direcionados a um documento *on-line* em forma de apostila, elaborado pelo autor desta dissertação, com o objetivo de promover mais conhecimento em relação aos triângulos e em relação a Semelhança de Triângulos.

3.2 A construção da Sequência Didática

A elaboração da Sequência Didática foi inicialmente pensada com enfoque na semelhança de triângulos. No entanto, visto que teria como recurso a *Trianguladora* e que a abrangência dessa planilha permitiria perpassar por outros elementos de estudo de triângulos, decidimos abordar de uma maneira mais ampla esse objeto matemático. Para entender as definições de um triângulo, analisamos a condição de existência de um triângulo, bem como as classificações, medidas de ângulos internos, medidas de área e perímetro, bem como a construção desses triângulos com régua e compasso, além da semelhança de triângulos.

Para isso, fragmentamos essa sequência em três momentos, denominados de Estações. A cada estação, foi pensado um texto motivador a ser discutido no início da implementação desse momento, a fim de despertar o interesse dos estudantes, bem como abordar os objetos a serem estudados. A Figura 13 ilustra o texto contido na Estação 1.

Figura 13 - Texto motivador Estação 1

Texto inicial:

Nessa “Estação 01”, você terá acesso a uma ferramenta em forma de planilha eletrônica que norteará seus estudos em relação aos triângulos e consequentemente às semelhanças entre dois triângulos. Para isso, que tal abrir a planilha em seu Smartphone/tablet/notebook e navegar por ela? Ao ser solicitado o uso de uma senha, você digitará **trianguladora23** tudo junto e sem espaço, ok? Depois dessa navegação, você deverá acessar a **página inicial** da trianguladora e para isso recorra sempre ao botão .

Agora vamos pôr a mão na massa! Na página inicial clique no botão  e **prepara-se para começar.**

Fonte: Fonte: Autoria própria.

Além disso, definimos os objetivos, a metodologia e forma de avaliação para cada uma das Estações. A Figura 14 exemplifica esses itens relacionados a Estação 1.

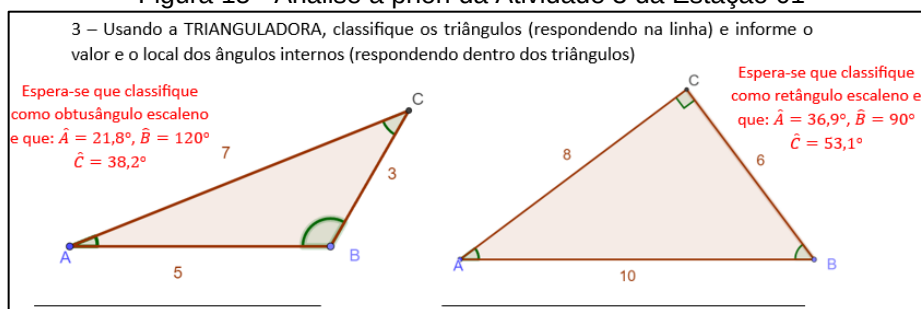
Figura 14 - metodologia, objetivos e avaliação

Estação 01 – “Conhecendo a ferramenta: Trianguladora ”	
Objetivo:	Conhecer os comandos necessários para utilizar a ferramenta “TRIANGULADORA” e revisar os conceitos significativos relacionado ao estudo de triângulos.
Metodologia:	Após o envio da ferramenta “TRIANGULADORA” e entrega do material impresso “Estação 01”, fazer a leitura oral com os alunos do texto inicial e logo após, pedir para que os alunos em fila e individualmente, usem seu celular/tablet/notebook para acessar a ferramenta. Depois, direcionar a leitura atentamente dos comandos da atividade “Estação 01” e realizar os comandos indicados para responder os itens. Após concluir todos os 9 itens, pedir para que os alunos respondam a “autoavaliação” contida no final do material impresso. (item 10)
Avaliação:	Verificar se os alunos resgataram conhecimentos prévios relacionados ao estudo de triângulos e se tiveram domínio das ferramentas da TRIANGULADORA

Fonte: Autoria própria.

Em seguida, elaboramos os comandos e as atividades propostas para cada Estação, bem como se relacionou as possíveis respostas dos estudantes para essas atividades, que foram denominadas nesta dissertação de *análise a priori*. A Figura 15 mostra a análise a priori da Atividade 3 da Estação 01.

Figura 15 - Análise a priori da Atividade 3 da Estação 01



Fonte: Autoria própria.

E, por fim, elaboramos para cada Estação uma autoavaliação daquela Estação, conforme ilustrado na Figura 16.

Figura 16 - Autoavaliação das estações

10 – Autoavaliação:

a) Você achou que a ferramenta “TRIANGULADORA” é fácil de utilizar? Por quê?
SIM () NÃO ()

b) Você acha que essa ferramenta vai ser útil para aprender mais sobre triângulos? Por quê?
SIM () NÃO ()

c) O que você achou mais interessante na atividade de hoje? Explique
SIM () NÃO ()

Fonte: Autoria própria.

3.2.1 Estratégias de Implementação da Sequência Didática

A sequência didática foi elaborada para estudantes de duas turmas do 2º ano do Ensino Médio de uma escola do interior da Bahia, no turno oposto ao horário regular das aulas.

Para a implementação, inicialmente, previmos criar um grupo eletrônico no aplicativo de mensagens instantâneas *WhatsApp*, visando agilizar a comunicação entre o professor (pesquisador) e os estudantes (participantes da pesquisa). Nesse grupo, foi disponibilizado o calendário com as datas e horários em que a sequência seria aplicada, além dos informes necessários à sua implementação.

Em seguida, previmos o envio aos estudantes do arquivo contendo a planilha eletrônica *Trianguladora* e o arquivo da apostila *Aprenda Mais*. Ressaltamos que essa apostila, está contida na *Trianguladora* para ser acessada de maneira *on-line*. No entanto, no momento da implementação da sequência haveria uma reestruturação da rede de internet da escola, o que foi avisado a todos os professores com antecedência e que poderia inviabilizar o uso *online* dessa apostila no momento da aplicação.

Logo, no primeiro momento, cada estudante recebeu o material cabível àquela aula de maneira impressa e a permissão para o uso dos aparelhos eletrônicos trazidos (celulares, *tablets* ou *notebooks*), além do kit, contendo compasso, régua e algumas folhas de papel em branco e sem pautas (A4).

Posteriormente, previmos a realização de uma recepção calorosa aos estudantes, além da leitura do texto inicial da estação 01, pelo pesquisador.

Um projetor multimídia foi providenciado para implementação dessa estação, com o fim de realizar as projeções necessárias à aula, já que o objetivo inicial era que todos os estudantes fizessem juntos cada item e só após todos terem terminado um determinado item, passariam ao proposto para o próximo.

A partir daí, os estudantes resolvem as atividades propostas individualmente, conforme determinam os comandos presentes em cada uma delas, sem a intervenção direta do professor, que assumirá uma postura investigativa.

Foi prevista uma lista de frequência a ser disponibilizada ao final da estação para registrar a presença dos estudantes.

Para a implementação das outras estações, o procedimento previsto foi o mesmo descrito para a primeira estação.

3.2.2 Análises

Quanto às análises, foram realizadas a partir da observação participante e das atividades da sequência implementada aos estudantes, tendo como foco alguns preceitos da TRRS, com ênfase nas atividades cognitivas referidas em Duval (2009): formação, tratamento e conversão.

4. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

O presente trabalho foi fundamentado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica — (TRRS) analisando o processo de ensino e de aprendizagem dos participantes de pesquisa com a elaboração e implementação de uma sequência didática em relação ao objeto matemático Semelhança de Triângulos, considerando que uma teoria é fundamental para as análises desses processos, conforme considera Souza (2022). A escolha dessa teoria foi mediante a possibilidade de verificar se os estudantes conseguem dialogar entre os diferentes tipos de registros de representação do objeto matemático citado. Assim, é abordada essa teoria em relação aos registros de representação e sistemas de representações semióticas na subseção seguinte.

4.1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Desenvolvida pelo francês Raymond Duval, a teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) analisa a aprendizagem matemática direcionada a investigação dos diversos registros de representação em um sistema de signos, de modo a explorar como essas diferentes formas de representações de registros interferem na compreensão e na construção do conhecimento matemático dos estudantes.

Para Duval (2012), “é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...)” (Duval, 2012, p.270). Sobre esses registros, o autor destaca que registros semióticos integram um sistema de comunicação (semiótico) entre suas representações diante de um mesmo objeto matemático.

Dessa forma, Flores (2016, p. 2) afirma que “um trabalho pedagógico, realizado a partir destes registros, possibilita um real funcionamento cognitivo do aluno, uma vez que o objetivo do ensino é a aquisição do conhecimento por parte do aluno”.

No entanto, Cabral (2019) considera que:

a aprendizagem em matemática não está condicionada a apenas um tipo de registro (o algébrico por exemplo), e que um mesmo objeto matemático poderá ter representações diferentes, dependendo da necessidade e do uso (Cabral, 2019, p. 52).

Assim, tanto Cabral (2019), Flores (2006) e Duval (2012) defendem que os processos de ensino e de aprendizagem não podem se restringir ao uso de um registro semiótico único para representar um objeto matemático, já que uma única representação não garante a compreensão ou a construção do saber matemático. Desse modo, Duval (2012) identifica a importância de representar o objeto matemático por registros de representação semiótica.

Para Duval (2009), “uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes”, ou seja, um registro de representação semiótico pode representar os objetos matemáticos de modo que suas representações dentro desse registro indicam “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento” (Duval, 2009, p. 21)

Esses registros de representação semiótica compõem diferentes tipos de sistemas de representação semiótica, sendo necessários para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes durante o processo de construção do saber matemático. Esse sistema de representação semiótico se compõe de *signos* pautáveis de *conversões* e regras de formação. Os signos são unidades de representação que carregam significado, sendo usadas para comunicar e manipular informações (Duval, 2009). Esses signos podem representar o objeto de estudo ou parte do objeto. Já um sistema de registros de representação é um conjunto organizado de signos e regras específicas que governam a produção, manipulação e interpretação desses signos. Cada registro possui suas próprias características e limitações e a habilidade de converter informações entre diferentes registros.

Por isso, Duval (2009) cita três atividades cognitivas importantes para a validade desses sistemas de registro, os quais são: formação, tratamento e conversão.

1ª Constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado; 2ª Transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma representação de conhecimento em comparação às representações iniciais; 3ª Converter as representações produzidas em um sistema, em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado (Duval, 2009, p. 36-37).

A primeira atividade cognitiva é a *formação*, que envolve a criação ou a construção de uma nova representação, ou conceito a partir de elementos já conhecidos. Esse processo pode incluir a criação de novos signos ou a combinação de signos existentes para formar uma nova ideia ou estrutura de conhecimento. Essa atividade cognitiva é essencial para a inovação e a criatividade no pensamento matemático.

A formação de uma representação semiótica consiste no uso de um ou vários signos, pertencentes a um sistema semiótico já existente e utilizado, para representar um objeto, seja por sua nomeação, sua reprodução icônica, seja pela esquematização de suas propriedades, constituindo as chamadas regras de conformidade que garantem o processo de formação de representação semiótica dentro do domínio definido (Lima, 2019, p.200).

Para Duval (2009), essas regras de conformidade garantem a definição de sistemas de representação bem como os tipos de unidades constitutivas para as representações de um registro. Isso proporciona um melhor entendimento sobre formação de uma representação num registro qualquer.

Por exemplo, a notação ΔABC (escrita simbólica) ou o enunciado referente a um feixe de retas paralelas, ou até mesmo a expressão $A = \frac{b.h}{2}$, constituem, delimitado por cada registro, uma representação de um registro já estabelecido, que pela regra da conformidade, permite a aceitação dessa representação citada. A partir daí, os estudantes associam essa representação formada por reconhecer que o símbolo ΔABC representa um triângulo com vértices nos pontos A, B e C, ou que a leitura do enunciado representa um feixe de retas paralelas, ou também que a expressão $A = \frac{b.h}{2}$ representa a fórmula algébrica que permite calcular a medida da área de um triângulo conhecendo a altura relativa (h) a uma de suas bases (b).

Já o *tratamento* é a atividade cognitiva que permite que o aluno faça transformações de uma representação (signo) em outra, dentro do mesmo sistema de registro.

O Tratamento é uma operação cognitiva que compreende uma transformação da representação em outra equivalente, porém permanecendo no mesmo registro abordado inicialmente, ou seja, é uma transformação interna a um registro do mesmo sistema semiótico (Pinto, 2021, p. 91).

Por exemplo: compreender que a fração $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{1}{4}$ pode ser percebida pela transformação dessas frações em frações equivalentes com denominadores iguais, nesse caso, respectivamente, como $\frac{4}{8}$ e $\frac{2}{8}$, e a partir daí,

perceber que a fração $\frac{4}{8}$ se toma mais partes de um inteiro que foi dividido em 8 partes do que a fração $\frac{2}{8}$ que se toma apenas duas desse mesmo inteiro. Houve-se um tratamento nas frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, porém esse tratamento se manteve dentro do sistema de registro.

Dentre os muitos sistemas de representação semiótica, aponta ainda que os sistemas semióticos de representação devem cumprir três atividades cognitivas inerentes a toda representação (...) **transformar** representações apenas utilizando as regras próprias do sistema, a fim **de modo a obter outras representações que possam ter vantagens, em comparação com as representações iniciais** (Cabral, 2019, p.52-53. O grifo é do autor).

Por fim, a atividade cognitiva *conversão* é a transformação da representação de um registro para outro. Duval (2009, p. 58) diz que a conversão “é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro”.

Para exemplificar, podemos retomar a ideia de frações utilizadas no modelo de tratamento. Se para relacionar que $\frac{1}{2}$ é maior que $\frac{1}{4}$ o aluno transformasse essas frações em um desenho de um círculo (pizza) e dividisse esse círculo em dois setores circulares (fatias) iguais e depois repetisse o processo com outro círculo, dessa vez dividindo-o em 4 setores circulares iguais e resolvesse compará-los, perceberia que a fatia obtida na pizza dividida em duas partes é maior que a fatia da mesma pizza quando dividida em quatro partes. Dessa maneira, observamos um processo de conversão do registro algébrico para o registro geométrico (figural).

Essas três atividades cognitivas, defendidas por Duval (2009), são necessárias para a formação de um sistema de registro semiótico e, assim, averiguar se os estudantes (sujeito de pesquisa) dominam, mesmo que de maneira relativa, a condução dos tratamentos que podem ocorrer dentro do mesmo registro bem como a conversão desse objeto matemático para uma ou mais tipos registros, garantindo um possível domínio do objeto matemático investigado.

Assim, a TRRS oferece uma base poderosa para validar como os estudantes absorvem determinados objetos matemáticos. Também enfatiza a importância das diferentes formas de representação, tratamento e a habilidade de conversão entre os tipos de registros, proporcionando uma estrutura sólida para a metodologia docente, promovendo ambientes de aprendizagem mais eficazes e uma compreensão mais rica e aprofundada dos conceitos matemáticos pelos estudantes.

5. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DO OBJETO DE ESTUDO

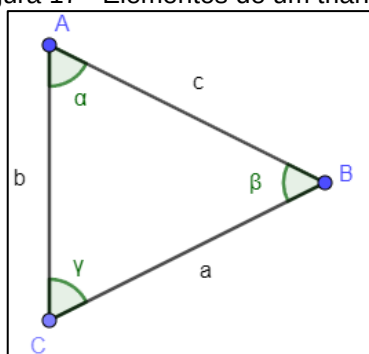
Neste capítulo são abordados os fundamentos matemáticos em relação aos triângulos e suas semelhanças.

5.1 Definição, elementos e classificação de Triângulos

Definição: Dados três pontos A, B e C não colineares, a região interna formada pela reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, e $\overline{AC}$ é denominada de triângulo (Dolce, 2013). Para isso, utilizamos a simbologia ΔABC (triângulo ABC).

Elementos: Os pontos A, B e C são denominados vértices do triângulo, e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, e $\overline{AC}$ são chamados de lados do triângulo e suas respectivas medidas são $med(\overline{AB}) = a$, $med(\overline{AC}) = b$ e $med(\overline{BC}) = c$. Os ângulos $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$, $B\hat{A}C$ são chamados de ângulos internos do triângulo, respectivamente opostos aos lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e suas medidas são $med(B\hat{A}C) = \alpha$, $med(A\hat{B}C) = \beta$ e $med(B\hat{A}C) = \gamma$, conforme exemplificado pela Figura 17.

Figura 17 - Elementos de um triângulo

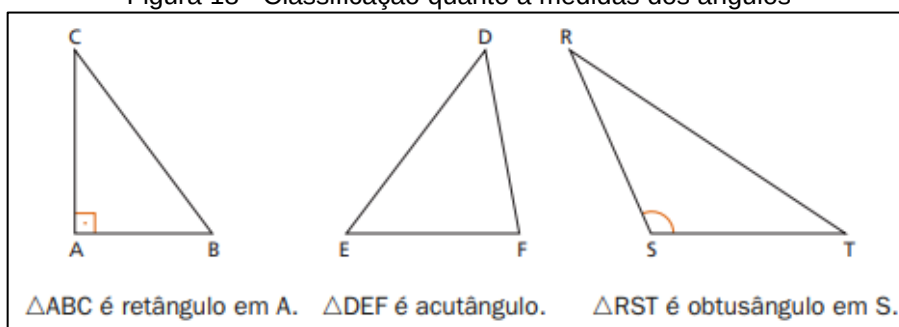


Fonte: Autoria própria.

Classificação: Os triângulos podem ser classificados mediante a natureza das medidas de seus lados ou pela natureza da medida de seus ângulos internos. Quanto à medidas dos ângulos internos, um triângulo é classificado como:

- retângulos se, e somente se, têm um ângulo reto;
- acutângulos se, e somente se, têm os três ângulos agudos;
- obtusângulos se, e somente se, têm um ângulo obtuso (Dolce, 2013, p. 37).

Figura 18 - Classificação quanto a medidas dos ângulos

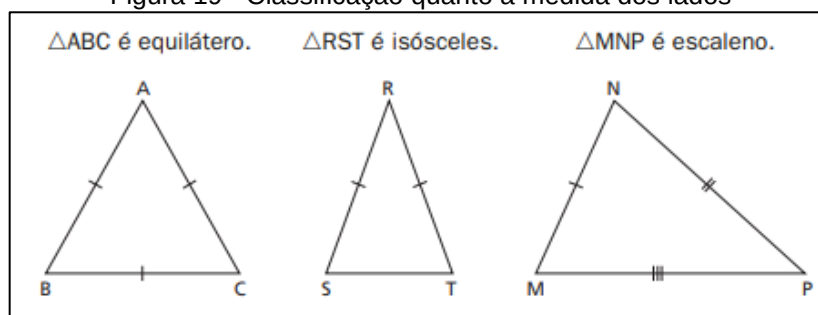


Fonte: Dolce (2013).

Quanto à medida dos lados um triângulo, é classificado como:

- equiláteros se, e somente se, têm os três lados congruentes;
- isósceles se, e somente se, têm dois lados congruentes;
- escalenos se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes (Dolce, 2013, p.36).

Figura 19 - Classificação quanto à medida dos lados



Fonte: Dolce (2013).

5.2 Teoremas relevantes para a construção da Sequência Didática

Em relação aos triângulos, foi apontado e demonstrado nesta dissertação os teoremas que garantem os resultados utilizados na construção da sequência didática elaborada e implementada.

Teorema 1 (T1): Os ângulos internos formados com a base de um triângulo isósceles são congruentes.

Hipótese: Se um triângulo é isósceles ($\triangle ABC$ e $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$).

Tese: Então, os ângulos formados com a base são congruentes ($\hat{B} \equiv \hat{C}$).

Demonstração: Considere o $\triangle ABC$ isósceles de base $\overline{BC}$ e $\triangle ACB$ isósceles de base $\overline{CB}$. Por hipótese, tem-se que:

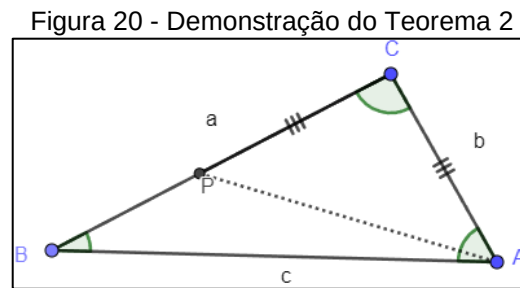
$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{AC} \text{ pois os triângulos são isosceles} \\ \hat{A} \equiv \hat{A} \text{ pois é um ângulo comum} \\ \overline{AC} \equiv \overline{AB} \text{ pois os triângulos são isosceles} \end{array} \right\} \xRightarrow{LAL} \Delta ABC \equiv \Delta ACB \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C} \blacksquare$$

Teorema 2 (T2): O maior lado de um triângulo se opõe ao maior ângulo.

Hipótese: Seja o lado $\overline{BC}$ maior que lado $\overline{AC}$ do triângulo ΔABC ($\overline{BC} > \overline{AC}$).

Tese: Então, o ângulo $\hat{BAC}$ é maior que o ângulo $\hat{ABC}$ ($\hat{BAC} > \hat{ABC}$).

Demonstração: Considere um ponto P pertencente ao segmento $\overline{BC}$ de tal modo que $\overline{CP} = \overline{CA}$, conforme a Figura 20.



Fonte: Autoria própria.

Por hipótese, tem-se que:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{BC} > \overline{AC} \Rightarrow P \text{ é interno ao } \hat{BAC} \Rightarrow \hat{CAB} > \hat{CAP} \\ \Delta ACP \text{ é isósceles de base } \overline{AP} \xRightarrow{T_1} \hat{CAP} \equiv \hat{APC} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{CAB} > \hat{CPA} \text{ (I).}$$

Observamos que o ângulo $\hat{CPA}$ é externo do triângulo ΔABP . Pelo teorema do ângulo interno⁹ $\Rightarrow \hat{CPA} > \hat{ABP} \equiv \hat{ABC}$ (II).

Logo, de I e II, tem-se que $\hat{BAC} > \hat{ABC} \blacksquare$

Teorema 3 (T3): O maior ângulo é oposto ao maior lado (recíproca do T2).

Hipótese: Se o ângulo $\hat{BAC}$ é maior que o ângulo $\hat{ABC}$ em um triângulo ΔABC ($\hat{BAC} > \hat{ABC}$).

Tese: Então, o lado $\overline{BC}$ é maior que o lado $\overline{AC}$ ($\overline{BC} > \overline{AC}$).

Demonstração: Considerando a tricotomia dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, tem-se três opções: $\overline{BC} < \overline{AC}$, $\overline{BC} = \overline{AC}$ ou $\overline{BC} > \overline{AC}$

Se $\overline{BC} < \overline{AC}$, pelo Teorema 2 anterior, $\hat{BAC} < \hat{ABC}$

⁹ Segundo Dolce (2013, p. 44), “um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.” A demonstração desse teorema é trivial.

Se $\overline{BC} = \overline{AC}$, pelo Teorema 1 do triângulo isósceles, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ABC}$ o que nega a hipótese.

Logo, pelo terceiro excluído, temos que $\widehat{BAC} > \widehat{ABC}$ ■

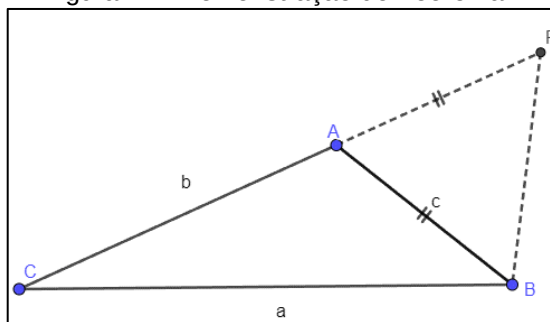
Teorema 4 (T4): Desigualdade triangular.

Hipótese: Se A, B e C são pontos não colineares ($\triangle ABC$).

Tese: Então, a medida de um dos seus lados é menor que a soma das medidas dos outros dois ($\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$).

Demonstração: Considere um ponto P no prolongamento do segmento $\overline{AC}$, de tal modo que $C \notin \overline{AP}$ e que $\overline{AP} = \overline{AB}$ (I), conforme a Figura 21.

Figura 21 - Demonstração do Teorema 4



Fonte: Autoria própria.

Como $\overline{PC} = \overline{AC} + \overline{AP} \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \overline{PC} = \overline{AC} + \overline{AB}$ (II).

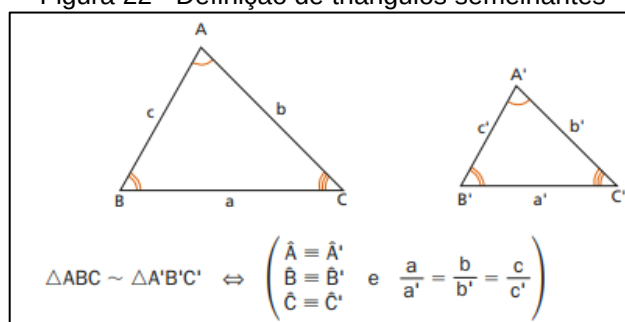
(I) $\Rightarrow \triangle ABP$ é isósceles de base $\overline{BP} \stackrel{T1}{\Rightarrow} \widehat{APB} \equiv \widehat{ABP}$ $\left. \begin{array}{l} A \text{ é interno ao } \widehat{CBP} \Rightarrow \widehat{CBP} > \widehat{ABP} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{CBP} > \widehat{APB}$ (III)

Analisando o $\triangle BCP$, por (III) e por Teorema 3, tem-se que $\overline{BC} < \overline{PC}$ e como (II), logo $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$. ■

5.3 Semelhança de Triângulos

Definição: Para Dolce (2013, p. 192), “dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais”, conforme a Figura 22.

Figura 22 - Definição de triângulos semelhantes



Fonte: Dolce (2013).

Utilizamos a simbologia $\sim$ para representar a semelhança. Os lados homólogos são pares de lados, cada um em um triângulo, opostos a ângulos congruentes de dois triângulos semelhantes. Chama-se k a razão de semelhança, ou seja, a razão entre esses lados homólogos de dois triângulos semelhantes. Quando $k = 1$, é dito que os triângulos são congruentes, um caso especial de semelhança.

Propriedades: A semelhança entre triângulos está condicionada a três propriedades, as quais são:

- I) **Reflexiva:** em que todo triângulo é semelhante a ele mesmo.

$$(\triangle ABC \sim \triangle ABC)$$
- II) **Simétrica:** em que se o triângulo ABC é semelhante à DEF , então, o triângulo DEF é semelhante a ABC .

$$(\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC)$$
- III) **Transitiva:** em que se o triângulo ABC é semelhante à DEF e se o triângulo DEF for semelhante a GHI , então o triângulo ABC é semelhante a GHI .

$$\left(\begin{matrix} \triangle ABC \sim \triangle DEF \\ \triangle DEF \sim \triangle GHI \end{matrix} \right) \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle GHI$$

5.4 Teorema Fundamental e os Casos de Semelhança de Triângulos

Nesta subseção, versamos sobre o teorema fundamental da semelhança, que servirá de base para análise dos casos ou critérios utilizados para garantir a semelhança entre triângulo, mesmo que algumas informações mínimas constituídas na definição de semelhança não sejam conhecidas. Esses casos são nomeados como: ÂNGULO-ÂNGULO (AA), LADO-ÂNGULO-LADO (LAL) e LADO-LADO-LADO

(LLL). Dito isso, segue-se com a demonstração desse teorema e dos casos de semelhança.

5.4.1 Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos (TF).

Hipótese: Se um segmento $\overline{DE}$, com $D \in \overline{AB}$ e $E \in \overline{AC}$, é paralelo ao segmento $\overline{BC}$ do triângulo $\triangle ABC$ ($\overline{DE} \parallel \overline{BC}$).

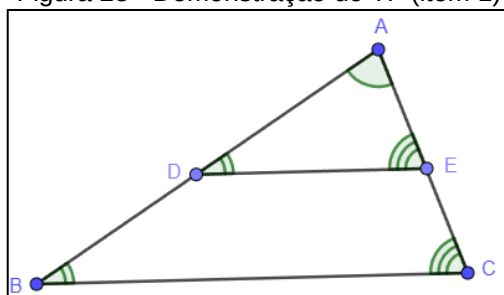
Tese: Então, o triângulo ADE é semelhante ao triângulo ABC ($\triangle ADE \sim \triangle ABC$).

Demonstração: Para essa demonstração, devido a definição de semelhança, precisamos provar dois itens:

- 1º) Os $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ possuem ângulos ordenadamente congruentes, e que
- 2º) As razões dos lados homólogos são proporcionais.

Para a primeira etapa da demonstração, tem-se, pela hipótese, que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Isso implica, pelo Teorema da existência da reta paralela¹⁰, que os ângulos $\widehat{ADE} \equiv \widehat{ABC}$ e $\widehat{AED} \equiv \widehat{ACB}$ e o ângulo $\widehat{A}$ comum nos dois triângulos (I), conforme a Figura 23

Figura 23 - Demonstração do TF (item 1)



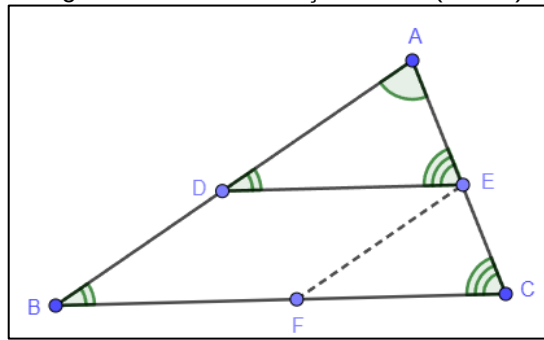
Fonte: Autoria própria.

Para a segunda etapa da demonstração, considere que pelo Teorema de Tales¹¹, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$, além disso, considere a construção do segmento $\overline{EF}$ com $F \in \overline{BC}$ de tal modo que $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$, conforme a Figura 24.

¹⁰ Para Dolce (2013, p. 61), “se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes, então essas duas retas são paralelas” Esse Teorema da existência da reta paralela (TRP) é trivialmente demonstrável.

¹¹ Para Dolce (2013, p.179), “se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra”, esse é o Teorema de Tales (TT) e sua demonstração é trivial.

Figura 24 - Demonstração do TF (item 2)



Fonte: autoria própria.

$$\left. \begin{array}{l} BDEF \text{ é um paralelogramo } \Rightarrow \overline{DE} \equiv \overline{BF} \\ \text{Pelo Teorema de Tales } \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} \text{ (II)}$$

Logo, por (I) e por (II), $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ■

5.4.2 Casos de Semelhança de Triângulos

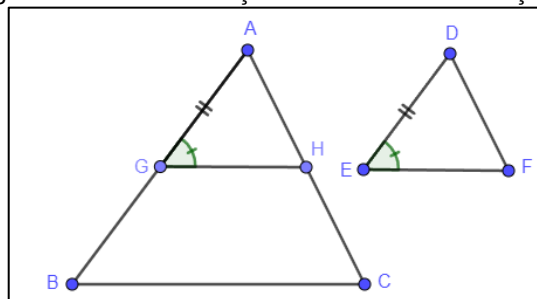
1º Caso de Semelhança de Triângulos – AA

Hipótese: Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes ($\triangle ABC$ e $\triangle DEF$; $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\hat{B} \equiv \hat{E}$).

Tese: Então, eles são semelhantes ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$).

Demonstração: Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ não congruentes e que o segmento $\overline{AB} > \overline{DE}$. Ainda, considere um ponto $G \in \overline{AB}$ e $H \in \overline{AC}$ de modo que $\overline{AG} \equiv \overline{DE}$, e ainda que, $\hat{AGH} \equiv \hat{DEF}$, conforme a Figura 25.

Figura 25 - Demonstração Caso de Semelhança AA



Fonte: Autoria própria.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Por hipótese } \hat{A} \equiv \hat{D} \text{ e como } \overline{AG} \equiv \overline{DE} \text{ e } \hat{AGH} \equiv \hat{DEF} \xRightarrow{ALA} \triangle AGH \equiv \triangle DEF \\ \text{Por hipótese também, } \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \text{e como } \hat{E} \equiv \hat{G} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{G} \xRightarrow{TRP} \overline{GH} \parallel \overline{BC} \xRightarrow{TF} \triangle AGH \sim \triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

■

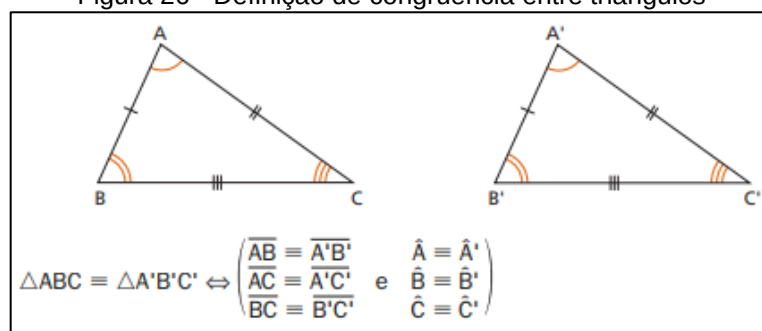
Para a demonstração desse caso, recorremos a um dos casos de congruência ÂNGULO-LADO-ÂNGULO (ALA) e, como já dito nesta seção, a congruência entre dois triângulos é um caso particular de semelhança e ocorre quando a razão de semelhança $k = 1$. Dolce (2013) define as congruências da seguinte forma:

Um triângulo é congruente (símbolo $\equiv$) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

- seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;
- seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro (Dolce, 2013, p.37-38).

A Figura 26 exemplifica essa definição.

Figura 26 - Definição de congruência entre triângulos



Fonte: Dolce (2013).

As congruências também apontam alguns casos ou critérios, bem similares aos casos de semelhança, e podem ser expressos da seguinte forma:

- I) **Lado-Ângulo-Lado (LAL):** “Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes” (Dolce, 2013, p.38).
- II) **Ângulo-Lado-Ângulo (ALA):** “Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes” (Dolce, 2013, p.39).
- III) **Lado-Lado-Lado (LLL):** “Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes” (Dolce, 2013, p.41).
- IV) **Lado-Ângulo-Ângulo Oposto (LAAo):** Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes (Dolce, 2013, p.45).

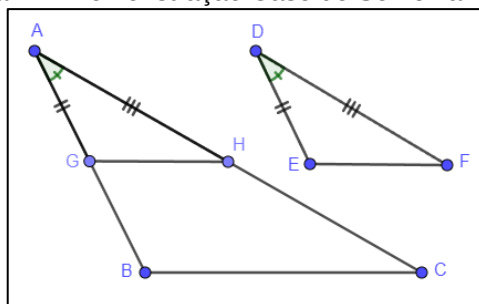
2º Caso de Semelhança de Triângulos – LAL

Hipótese: Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes ($\triangle ABC$ e $\triangle DEF$; $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ e $\hat{A} \equiv \hat{D}$).

Tese: Então, eles são semelhantes ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$).

Demonstração: Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ não congruentes e que o segmento $\overline{AB} > \overline{DE}$. Ainda, considere um ponto $G \in \overline{AB}$ e $H \in \overline{AC}$ de modo que $\overline{AH} \equiv \overline{DE}$, e ainda que $\overline{AG} \equiv \overline{DE}$, conforme a Figura 27.

Figura 27 - Demonstração Caso de Semelhança LAL



Fonte: Autoria própria.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Por hipótese } \hat{A} \equiv \hat{D} \text{ e como } \overline{AG} \equiv \overline{DE} \text{ e } \overline{AH} \equiv \overline{DF} \xrightarrow{LAL} \triangle AGH \equiv \triangle DEF \\ \text{Por hipótese, } \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \\ \text{e como } \overline{AG} \equiv \overline{DE} \text{ e } \overline{AH} \equiv \overline{DF} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} \xrightarrow{TT} \overline{GH} \parallel \overline{BC} \xrightarrow{TF} \triangle AGH \sim \triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF \blacksquare$$

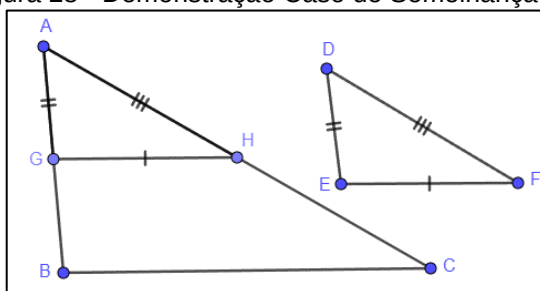
3º Caso de Semelhança de Triângulos – LLL

Hipótese: Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais ($\triangle ABC$ e $\triangle DEF$; $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$).

Tese: Então, eles são semelhantes ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$).

Demonstração: Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ não congruentes e que o segmento $\overline{AB} > \overline{DE}$. Ainda, considere um ponto $G \in \overline{AB}$ e $H \in \overline{AC}$ de modo que $\overline{AG} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AH} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{GH} \equiv \overline{EF}$, conforme a Figura 28.

Figura 28 - Demonstração Caso de Semelhança LLL



Fonte: Autoria própria.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Como } \overline{AG} \equiv \overline{DE}, \overline{AH} \equiv \overline{DF} \text{ e } \overline{GH} \equiv \overline{EF} \xRightarrow{LLL} \Delta AGH \equiv \Delta DEF. \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{GH}} \xRightarrow{TT} \overline{GH} \parallel \overline{BC} \xRightarrow{TF} \Delta AGH \sim \Delta ABC \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

■

6. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo são apresentadas as análises realizadas, tendo como fundamento a TRRS. Foi feita uma análise geral da aplicação da sequência didática, para posteriormente apresentar as análises de cada uma das Estações.

6.1 Análise Geral

Inicialmente, estipulamos o uso do projetor multimídia a fim de que todos os estudantes resolvessem a mesma questão no mesmo momento. No entanto, considerando que cada aluno tem habilidades e desenvolturas diferentes, não foi possível padronizar um tempo comum para que eles resolvessem uma mesma questão.

Alguns estudantes tiveram a dificuldade em acessar a planilha Trianguladora, pelo fato de seus dispositivos eletrônicos operarem com o sistema operacional *IOS*®¹², que normalmente limita a aplicativos próprios da marca. Mesmo assim, alguns conseguiram configurar seus aparelhos para acessá-la, e os que não conseguiram configurar o seu aparelho, formaram duplas com outros colegas que não tiveram dificuldade de acesso à planilha. Vale ressaltar que nenhum aluno com o aparelho de sistema operacional *ANDROID*®¹³, teve dificuldade ao acessar o arquivo.

Nesse sentido, a fim de resolver essa situação para as estações futuras, ao final da Estação 01, os estudantes decidiram que ou configurariam seus aparelhos para acessar a planilha e resolver as questões individualmente ou que trariam outro dispositivo eletrônico compatível, para realizar as atividades das demais estações.

Cabe ressaltar que não era a intenção realizar intervenções durante a implementação da sequência. Assim, na maioria das vezes em que os estudantes se sentiram inseguros quanto a decidir se as respostas das atividades estavam corretas ou não, foram orientados a registrar as suas próprias conclusões. Entretanto, quando 06 estudantes tiveram dificuldades em manusear o compasso, requisito para a construção de triângulos em uma atividade da Estação 02, houve a intervenção do professor pesquisador.

¹² O iOS é o sistema operacional para aparelhos móveis desenvolvido pela Apple e lançado em 2007 junto com o primeiro iPhone. Disponível em: <https://canaltech.com.br/ios/o-que-e-ios/>

¹³ O Android é um sistema operacional móvel desenvolvido pela Google, projetado principalmente para dispositivos móveis, como smartphones, tablets, smartwatches e smart TVs. Disponível em: <https://www.dio.me/articles/o-que-e-android-conheca-o-sistema-operacional-mais-usado-no-mundo>.

Durante o desenvolvimento das três estações, 8 dos 45 estudantes não conseguiram concluir inteiramente as atividades, pois, segundo eles, o tempo foi insuficiente para a conclusão. No entanto, não foi considerado que esse fato pode ser um indicativo de reorganização de aplicação da sequência em futuras implementações.

As próximas seções trazem a análise das atividades por estação.

6.2 Análise das atividades desenvolvidas na Estação 01

Esta estação teve como foco apresentar as ferramentas da *Trianguladora*, além de revisar os conceitos básicos relacionados ao estudo de triângulos, com ênfase na classificação em relação às medidas dos seus lados que os compõem e dos ângulos internos. Nesta estação, também foram introduzidas as ideias que remetem ao estudo de perímetro e área dessas figuras.

Atividade 1:

Os estudantes tiveram a oportunidade de explorar a ferramenta  localizada na página inicial da Trianguladora. Essa ferramenta permite que os estudantes insiram medidas de segmentos que possam formar ou não um triângulo e

que ao clicar em  , informa sobre a condição de existência, medidas dos lados e ângulos internos, classificação quanto às medidas dos lados e ângulos, medidas de áreas e perímetros. A Figura 29 ilustra essa atividade, bem como traz, para efeito de referência, uma possível resposta do estudante.

Figura 29 - Atividade 1 da Estação 01

1 – Nos locais destinados aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ABC, coloque medidas para esses lados e clique em “GERAR”. Depois **ANOTE ABAIXO** os dados informados sobre esse triângulo.

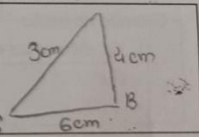
(para alterar as medidas do triângulo basta clicar no botão “VOLTAR”, digitar as novas medidas e clicar em **gerar** novamente)

Uma possibilidade é que o aluno conheça o botão “sobre um triângulo” da ferramenta e que consiga extrair informações de um triângulo a partir das medidas de seus lados, como: Classificação quanto aos lados, classificação quanto aos ângulos internos, perímetro, área (aproximada), caso esse triângulo exista.

Fonte: Autoria própria.

Nesse caso, todos os estudantes conseguiram a ferramenta  de acordo com o proposto na atividade. O Quadro 4 traz as respostas de 5 estudantes.

Quadro 4 - Respostas dos estudantes A, B, C e D

Aluno A	(para alterar as medidas do triângulo basta clicar no botão "VOLTAR", digitar as novas medidas e clicar em gerar novamente) AB - 6 Escaleno MAI = $48,5^\circ$, $38,6^\circ$, $92,9^\circ$ BC - 5 P = 19 cm Obtusângulo AC - 8 A = $14,98 \text{ cm}^2$
Aluno B	(para alterar as medidas do triângulo basta clicar no botão "VOLTAR", digitar as novas medidas e clicar em gerar novamente) AB = 4 cm • EXISTE • ÂNGULOS INTERNOS BC = 6 cm • ESCALENO E OBTUSÂNGULO $36,3^\circ$, $117,3^\circ$, $26,4^\circ$ AC = 3 cm • PERÍMETRO = 13 cm • ÁREA = $5,33 \text{ cm}^2$ 
Aluno C	(para alterar as medidas do triângulo basta clicar no botão "VOLTAR", digitar as novas medidas e clicar em gerar novamente) Dado AB = 8 cm Este triângulo existe Dado BC = 5 cm é classificado como escaleno, obtusângulo Dado AC = 6 cm a medida do perímetro, em cm, é 19 e a medida da área em cm^2 é 14,98 a medida dos ângulos internos, em $^\circ$, são $92,9/38,6/48,5$
Aluno D	pois ANOTE ABAIXO os dados informados sobre esse triângulo. AB = 15 BC = 12 AC = 22 (para alterar as medidas do triângulo basta clicar no botão "VOLTAR", digitar as novas medidas e clicar em gerar novamente) Este triângulo existe A medida da área em cm^2 é 85,28 Classificado como Escaleno Obtusângulo A medida dos ângulos internos, em $^\circ$ Medida do perímetro, em cm, é 49 são: 40,2, 31,1, 108,6
Aluno E	(para alterar as medidas do triângulo basta clicar no botão "VOLTAR", digitar as novas medidas e clicar em gerar novamente) Lado AB: 22 cm • Triângulo existente Ângulos internos: Lado BC: 35 cm • Escaleno e obtusângulo $42,8^\circ$, $42,8^\circ$ e $26,0^\circ$ Lado AC: 30 cm • Perímetro: 46 cm • Área: 69,13

Fonte: Acervo da pesquisa

O aluno A utilizou as letras P e A respectivamente, para indicar o perímetro e a área do triângulo e a sigla M.A.I para indicar as medidas dos seus ângulos internos por escolha própria, sem a intervenção do professor pesquisador, uma vez que os estudantes foram instruídos a registrarem suas respostas da maneira como julgassem corretas. Essa instrução permitiu a diversidade de representação pelos estudantes.

Somente o aluno B escolheu fazer uma representação figural do triângulo em questão. Quando instigado verbalmente sobre essa representação, o aluno afirmou precisar visualizar o triângulo para responder àquele item. Inferimos que essa afirmação se deve ao fato de o aluno sempre associar o estudo de triângulos à sua forma figural. Em relação à representação figural, verificamos que ela não condiz ao triângulo formado, uma vez que as medidas dos lados escolhidas pelo estudante resultavam em um triângulo escaleno obtusângulo e o aluno fez a representação

figural de um triângulo acutângulo com a medida do menor lado oposta ao maior ângulo do triângulo.

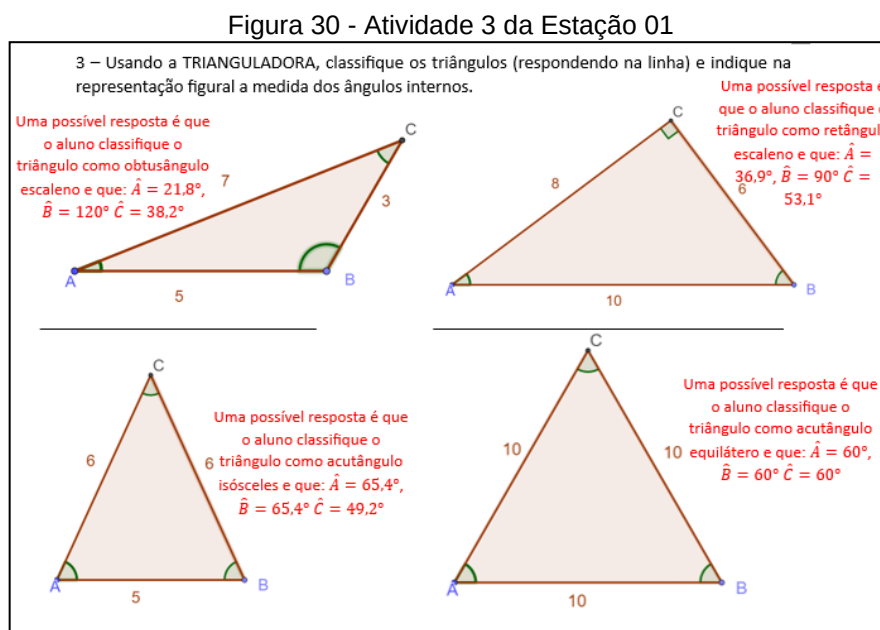
Segundo Duval (2009, p.58), é possível realizar conversões entre sistemas de registros semióticos de um determinado objeto de estudo, ou seja, “transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro”. Nesse sentido, observamos que a operação de conversão entre os registros abordados pelo aluno 2 não foi construída.

Atividade 2:

De caráter procedimental, nessa atividade os estudantes tiveram a oportunidade de classificar diferentes triângulos conforme as medidas dos lados e ângulos internos, obtendo resultados parcialmente satisfatórios, visto que alguns fizeram a classificação considerando somente as medidas dos lados, enquanto a *Trianguladora* fornece informações que permite a eles realizar ambas as classificações mencionadas.

Atividade 3:

A Figura 30 apresenta a Atividade 3 dessa estação.



Fonte: Autoria própria.

Ao resolver essa atividade, observamos que os estudantes se perguntaram *onde* inserir as medidas dos ângulos internos nas representações figurais, recebendo

do professor pesquisador a informação de que essa análise deveria ser feita a partir da observação deles com relação aos dados contidos nos triângulos. No entanto, dois estudantes deram dicas para os demais sobre onde inserir os ângulos, o que se considerou que interferiu nos resultados registrados pelos demais estudantes. O aproveitamento nessa atividade foi de 100%.

Tem um que o ângulo é *quadrado* e eu sei que quando é assim vale 90° , e esse ângulo está atrás (oposto) do lado 10 que por sinal é o maior lado, e quando digitei na Trianguladora as medidas dos lados, apareceu o ângulo de 90° e outros dois, então o menor desses ângulos só pode estar atrás (oposto) do lado 6 que é o menor lado, sobrando apenas um único lugar para o ângulo intermediário (aluno X).

Acho que tem a ver com o formato (abertura) dos ângulos. O ângulo que tiver a maior formato (abertura) você escreve o maior valor encontrado na *Trianguladora* (aluno Y).

Atividade 4:

Essa atividade foi desenvolvida para explorar o material extra com informações para pesquisa por meio da ferramenta . A Figura 31 ilustra essa atividade.

Figura 31 - Atividade 4 da Estação 01



4 – Clicando na ferramenta “ APRENDA MAIS”, contido na página inicial, responda:

a) Os elementos de um triângulo que são utilizados para sua classificação são:

Uma possibilidade é que os alunos usem o material de apoio do “aprenda mais” e consiga interpretar que os triângulos os elementos utilizados para classificar um triângulo são as medidas dos lados e as medidas dos ângulos.

b) Quando é que um triângulo é classificado como: Escaleno, isósceles ou equilátero?

Uma possibilidade é que os alunos usem o material de apoio do “aprenda mais” e consiga interpretar que:

Escaleno - possui todos seus lados **não** congruentes (iguais)

Isósceles – possui no mínimo dois lados congruentes (iguais)

Equilátero – Possui seus três lados congruentes (iguais)

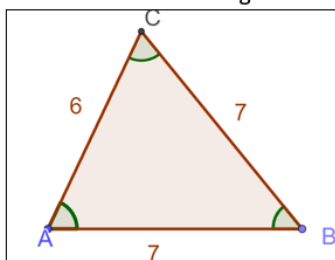
Fonte: Autoria própria.

Mesmo tendo acesso à apostila on-line *aprenda mais*, que contém a informação dos elementos do triângulo que determinam a sua classificação, 11 estudantes responderam no item (a), mostrado na Figura 31, que os vértices do triângulo também são um desses elementos, o que pode indicar um aprendizado inconsciente quanto a elementos que definem a classificação de um triângulo.

O Quadro 5 ilustra parte dessa atividade, na qual os estudantes deveriam estabelecer alguma relação entre as medidas de lados e de ângulos internos de triângulos: escaleno, isósceles e equilátero, bem como a resposta do aluno P.

Quadro 5 – Item (d) da Atividade 4 e a Resposta do aluno P

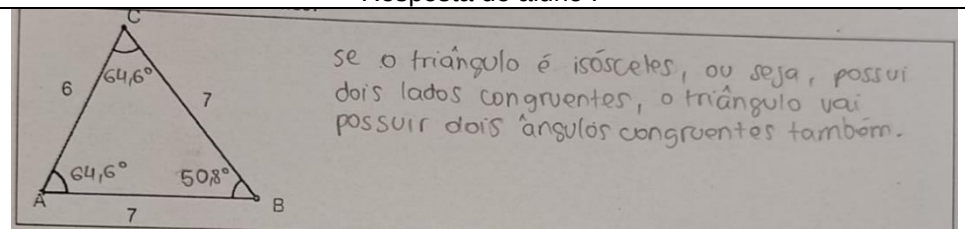
- d) Observe o triângulo Isósceles representado abaixo, usando a Trianguladora registre a medida dos ângulos internos. É possível estabelecer uma relação entre as medidas dos lados congruentes e as medidas dos ângulos internos que são formados a partir desses lados e o lado não congruente? Explícite.



Os ângulos $\hat{A} = 64,6^\circ$, $\hat{B} = 50,8^\circ$
 $\hat{C} = 64,6^\circ$

Uma possível resposta é que há
 dois lados congruentes e dois
 ângulos congruentes

Resposta do aluno P



Fonte: Autoria própria.

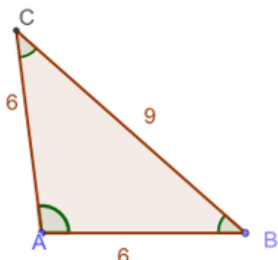
As análises mostram que, de forma geral, os estudantes realizaram a operação de tratamento quando situaram os ângulos internos na representação figural do triângulo (sistema de registro de representação semiótica figural) e realizaram a conversão da propriedade estabelecida em linguagem natural, como, por exemplo, ressaltou o aluno P: “se o triângulo é isósceles, ou seja, possui dois lados congruentes, o triângulo vai possuir dois ângulos congruentes também”. Isso pode indicar que houve aprendizagem quanto às relações estabelecidas nos três casos considerados (triângulo isósceles, escaleno e equilátero).

Atividade 5, 6 e 7:

Com as análises das Atividades 5, 6 e 7, verificamos que os estudantes com o uso da trianguladora, a partir da representação figural dos triângulos e de suas anotações registradas na Atividade 4, relacionaram o quadrado da medida do maior lado de um triângulo com soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados e, a partir dessa relação, classificaram o triângulo em retângulo, acutângulo ou obtusângulo. A Figura 32 ilustra a Atividade 5 e o Quadro 6 mostra a resolução das Atividades 5, 6 e 7 do aluno K.

Figura 32 - Atividade 6 da Estação 01

6 – Observe o triângulo abaixo e usando a TRIANGULADORA responda:



a) Dê a Classificação quanto aos seus ângulos: obtusângulo

b) Eleve todas as medidas dos seus LADOS ao quadrado e registre:
 $9^2, 6^2, 6^2 \rightarrow 81, 36, 36$

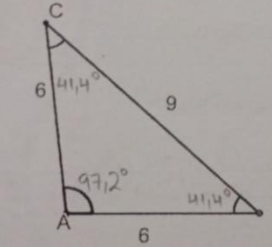
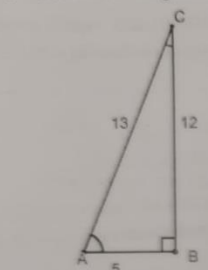
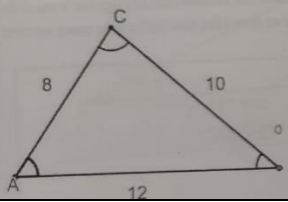
c) Some o quadrado das duas menores medidas e registre:
 $6^2 + 6^2 \rightarrow 36 + 36 = 72$

d) A maior medida ao quadrado “É MAIOR”, “MENOR” ou “IGUAL” que a soma do quadrado das outras duas medidas?
A maior medida ao quadrado (81), é maior que a soma dos quadrados das outras duas medidas (72)

e) Se a maior medida do lado desse triângulo medisse “a” e as outras duas medissem “b” e “c”, como ficaria o resultado encontrado no item (d)?
 $a^2 > b^2 + c^2$

Fonte: Autoria própria.

Quadro 6 - Resposta da Atividade 6, 7 e 8 da Estação 01

Atividade 6	6 – Observe o triângulo abaixo e usando a calculadora de triângulos responda:  a) Dê a Classificação quanto aos seus ângulos: <u>obtusângulo</u> b) Eleve todas as medidas dos seus LADOS ao quadrado e registre: $AB=6; 6^2=36 \parallel BC=9; 9^2=81 \parallel AC=6; 6^2=36$ c) Some o quadrado das duas menores medidas e registre: $6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$ d) A maior medida ao quadrado “É MAIOR”, “MENOR” ou “IGUAL” que a soma do quadrado das outras duas medidas? $9^2=81; 36+36=72; \text{maior.}$ <u>O quadrado da maior medida é maior que a soma dos quadrados das outras duas medidas.</u> e) Se a maior medida do lado desse triângulo medisse “a” e as outras duas medissem “b” e “c”, como ficaria o resultado encontrado no item (d)? $a^2 > b^2 + c^2$
Atividade 7	7 – Observe o triângulo abaixo e usando a calculadora de triângulos responda:  a) Dê a Classificação quanto aos seus ângulos: <u>retângulo</u> b) Some o quadrado das duas menores medidas e registre: $144 + 25 = 169$ d) A maior medida ao quadrado “É MAIOR”, “MENOR” ou “IGUAL” que a soma do quadrado das outras duas medidas? $13^2 = 169; 144 + 25 = 169; \text{igual}$ <u>O quadrado da maior medida é igual a soma dos quadrados das outras duas medidas.</u> d) Se a maior medida do lado desse triângulo medisse “a” e as outras duas medissem “b” e “c”, como ficaria o resultado encontrado no item (c)? $a^2 = b^2 + c^2$
Atividade 8	8 – Observe o triângulo abaixo e usando a calculadora de triângulos responda:  a) Dê a Classificação quanto aos seus ângulos: <u>acutângulo</u> b) Some o quadrado das duas menores medidas e registre: $100 + 64 = 164$ e) A maior medida ao quadrado “É MAIOR”, “MENOR” ou “IGUAL” que a soma do quadrado das outras duas medidas? $12^2 = 144; 100 + 64 = 164$ <u>O quadrado da maior medida é menor do que a soma dos quadrados das outras duas medidas.</u> d) Se a maior medida do lado desse triângulo medisse “a” e as outras duas medissem “b” e “c”, como ficaria o resultado encontrado no item (c)? $a^2 < b^2 + c^2$

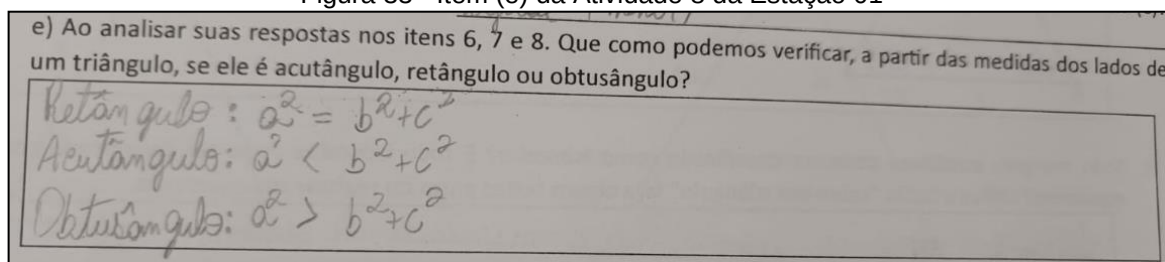
Fonte: Acervo da pesquisa.

Duval (2009, p.36) denomina de “tratamento” a atividade cognitiva que possibilita “transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma representação de conhecimento em comparação às representações iniciais”.

Quanto às operações de tratamento requeridas nessa atividade, concluímos que os estudantes, de forma geral, as realizaram com sucesso quando no sistema de representação numérica aplicaram, por exemplo, as propriedades necessárias à resolução da expressão numérica $6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$ considerando que nessa expressão se efetua, primeiramente, as operações de potenciação para depois realizar a operação de adição, propriedades intrínsecas das expressões numéricas, o que foi ilustrado no Quadro 6.

Com as atividades 5, 6 e 7, verificamos que a maior parte dos estudantes chegou à conclusão esperada quando no item (e) da atividade 8 construíram as relações existentes entre a medida dos lados dos triângulos isósceles escaleno e equilátero, conforme mostrado na Figura 33.

Figura 33 - Item (e) da Atividade 8 da Estação 01



Fonte: Acervo da pesquisa.

Diante disso, entendemos que a trianguladora facilitou o processo de compreensão dos conceitos e propriedades abordados nesta Estação, contribuindo para o ensino e a aprendizagem dos estudantes.

6.3 Análise das atividades desenvolvidas na Estação 02

Esta estação foi destinada ao estudo da condição de existência de um triângulo, bem como a construção da representação figural dos triângulos com o uso da régua e compasso. Quanto a Trianguladora, a ferramenta que auxiliou nessas construções foi , tendo em vista que ela traz informações sobre os triângulos e, nesse caso específico, a informação que relaciona o tipo de triângulo e a medida dos seus ângulos internos.

Atividade 1 a 6:

Nessas atividades, os estudantes foram convidados a verificar a condição de existência de um triângulo a partir das medidas dos lados utilizando a ferramenta



, como mostra a Figura 34.

Figura 34 - Ferramenta SOBRE UM TRIÂNGULO da Trianguladora

SOBRE UM TRIÂNGULO			
OBSERVE as informações sobre o triângulo que digitou. Para uma nova pesquisa pressione o botão VOLTAR Para retornar a primeira página, pressione INÍCIO			
INÍCIO VOLTAR FECHAR	LADO AB	LADO BC	LADO AC
	3	2	6
	cm	cm	cm
Esse triângulo		Não existe 0 0,00	

Fonte: Autoria própria.

Todos os estudantes concluíram que a soma de quaisquer medidas de dois lados do triângulo é sempre maior que a medida do outro lado. Dessa forma, concluímos que a Trianguladora possibilitou uma melhor percepção dessa propriedade pelos estudantes. Como exemplo, o Quadro 7 mostra a conclusão do aluno J.

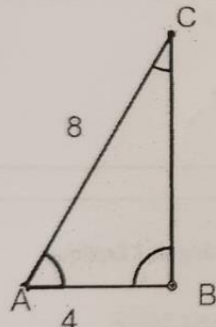
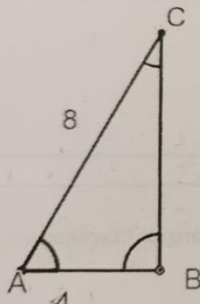
Quadro 7 - Resposta registrada pelo aluno J

A que conclusão você chegou sobre a existência de triângulos? PARA QUE EXISTA UM TRIÂNGULO, A SOMA DE DUAS MEDIDAS DEVE SER MAIOR QUE A OUTRA MEDIDA, LOGO, QUANDO APRESENTA UM VALOR MENOR OU IGUAL, NÃO EXISTE
Transcrição: “Para que exista um triângulo, a soma de duas medidas deve ser maior que a outra medida, quando apresenta(r) um valor (da soma) menor ou igual, não existe (o triângulo)”.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Na Atividade 5, verificamos que, de modo geral, os estudantes realizaram a conversão do registro da representação figural para a representação numérica, quando foi necessário verificar se em um triângulo com medidas 8 e 4 para dois de seus lados poderia ter a medida do terceiro lado igual a 15. O Quadro 8 ilustra as respostas dos estudantes N e M dessa atividade.

Quadro 8 - Respostas dos estudantes M e N da Atividade 5

Aluno M	5-Analisando a figura abaixo responda:  a) O segmento BC pode ter medida 15? Por quê? não, pois $8 + 4 = 12 < 15$ b) O segmento BC pode ter medida 3? Por quê? sim, pois $8 + 4 = 12 > 3$ c) Qual o menor número inteiro que BC pode ter como medida? é o número 5 d) Qual o maior número inteiro que BC pode ter como medida? é o número 11
Aluno N	5-Analisando a figura abaixo responda:  a) O segmento BC pode ter medida 15? Por quê? $4 + 3 = 7 < 8$ $8 + 4 = 12 < 15$ $3 + 8 = 11 > 4$ → não pode b) O segmento BC pode ter medida 3? Por quê? $4 + 3 = 7 < 8$ $4 + 3 = 7 > 3$ $3 + 8 = 11 > 4$ → não pode c) Qual o menor número inteiro que BC pode ter como medida? $4 + 5 = 9 > 8$ 5 é o menor número inteiro d) Qual o maior número inteiro que BC pode ter como medida? 11, $8 + 4 = 12 > 11$

Fonte: Acervo da pesquisa.

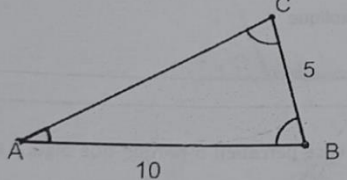
Durante as análises dessa atividade, decidimos apresentar detalhadamente as resoluções do aluno M, pois foi a única divergente das resoluções apresentadas pelos demais estudantes, destacada pela resolução do aluno N. Essas resoluções foram indicadas no Quadro 8. O aluno M realizou a operação de tratamento no registro de representação numérico, quando no item (a) usou a propriedade da desigualdade triangular ao somar as medidas dos lados (segmentos) AC e AB ($8 + 4$) e logo após comparar com a medida provável do terceiro lado do triângulo. Concluindo que $12 < 15$, pela propriedade da condição de existência, que 15 não poderia ser uma medida para o lado BC. Embora essa afirmação esteja correta, percebemos que o aluno M não apresentou os requisitos necessários para compreender a condição de existência de um triângulo, uma vez que apenas comparar a soma de duas medidas de lado é maior (ou menor) que a terceira medida, não garantem necessariamente essa condição. Ainda mais, a justificativa dessa interpretação se fundamenta na resposta desse aluno apresentada pelo item (b), quando, dessa vez, o valor investigado para o lado BC do triângulo em questão era a medida 3. Novamente, o aluno somou as medidas dos segmentos AC e AB ($4 + 8$) e concluiu ser maior que 3 ($12 > 3$), afirmando que essa medida poderia sim representar o lado BC desse triângulo, o que não é verdade.

No entanto, diferente do aluno M, o aluno N e demais estudantes da turma conseguiram realizar as operações de tratamentos corretas nos itens (a) e (b), quando verificaram se a soma de *quaisquer* duas medidas de lados do triângulo era maior que a terceira. E no item (d), para descobrir qual o maior valor inteiro que o lado BC poderia assumir, o aluno N somou os lados AB com AC ($4 + 8 = 12$) e depois comparou, a partir dessa soma, que $12 > 11$, justificando corretamente que a maior medida inteira do lado BC é 11.

Na Atividade 6, os estudantes tiveram a oportunidade de validar se as atividades 3, 4 e 5 foram suficientes para apresentarem requisitos necessários de compreensão sobre a condição de existência de um triângulo por meio da desigualdade triangular. A partir da representação figural de um triângulo isósceles com as medidas de dois lados indicadas, os estudantes apresentaram qual das alternativas alistadas indica a medida do terceiro lado desse triângulo. O Quadro 9 mostra a resposta do aluno H, que representa a conclusão que a maioria dos estudantes chegou.

Quadro 9 - Atividade 6 da Estação 02

6 – Para que o triângulo abaixo seja isósceles, qual deve ser a medida do segmento AC. Explique sua resposta



a) () somente 5
 b) (X) Somente 10
 c) () 5 ou 10
 d) () 15
 e) () nenhum valor

em um triângulo dois dos lados tem que ser iguais e como AC é visivelmente maior que BC, a única medida possível é 10.

Transcrição: “(nesse) triângulo, dois lados têm que ser iguais e como AC é visivelmente maior que BC, a única resposta possível é 10”

Fonte: Acervo da pesquisa.

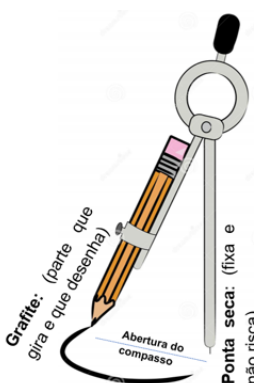
Notamos que o aluno H conseguiu realizar uma conversão do registro de representação figural para o registro de representação na língua natural, quando justificou sua resposta escrevendo que, como a figura se tratava de um triângulo isósceles, então ela possui dois lados congruentes. Além disso, o lado AC, na representação figural, é notavelmente maior que a do lado BC. Levando o aluno a responder que a única possível medida do lado AC é 10, tornando o lado BC a base desse triângulo isósceles, ou seja, um lado não congruente, conforme se observamos na transcrição da resposta desse aluno apresentada no Quadro 9.

Atividade 7, 8 e 9:

A partir de então, os estudantes tiveram a oportunidade de usar os materiais extras que receberam, conforme discorrido no capítulo 3 desta dissertação, como régua, compasso e folhas não pautáveis. Na Atividade 7, conforme ilustrado na Figura 35, há comandos direcionadores aos quais os estudantes construíram um triângulo (representação figural) por meio de compasso e régua.

Figura 35 - Atividade 7 da Estação 02

7 – (USE UMA FOLHA ANEXO ENTREGUE PELO PROFESSOR)
Usando régua e compasso vamos aprender a montar um triângulo a partir das medidas 8cm, 5cm e 4cm dos seus lados, para isso siga os passos abaixo:



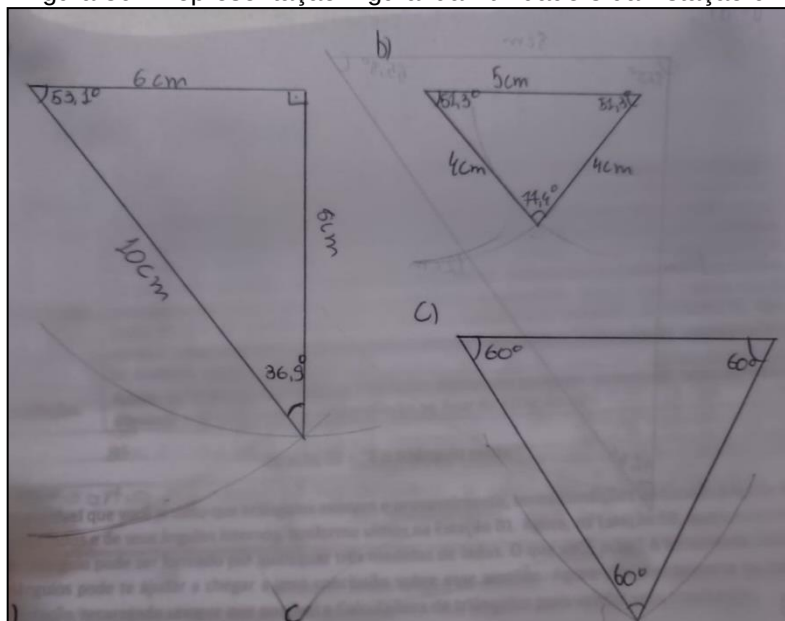
Grafite: (parte que gira e que desenha)
Ponta seca: (fixa e não riscar)
Abertura do compasso

- I - Trace um segmento de reta qualquer
- II - No segmento traçado marque um ponto A. (mais próximo de um dos extremos do segmento traçado)
- III - Faça a abertura do compasso em 8 cm. Para isso coloque a ponta seca no compasso em 0 e a outra ponta em 8 na régua.
- IV - Com essa abertura, coloque a ponta seca do compasso no ponto A, e risque o segmento criado no item I. nesse “risco” marque o ponto B. Verifique com a régua se o segmento AB mede 8 cm.
- V - Com a abertura do compasso em 5 cm, coloque a ponta seca em A e faça um arco de circunferência de tamanho significativo
- VI - Agora com a abertura em 4 cm, coloque a ponta seca do compasso em B e faça outro arco de circunferência significativo de tal modo que intercepte o primeiro arco. Nessa interseção dos arcos você deverá marcar o ponto C.
- VII - Com a régua, ligue os segmentos AC e BC e verifique se eles medem 5cm e 4 cm respectivamente.

Fonte: Autoria própria.

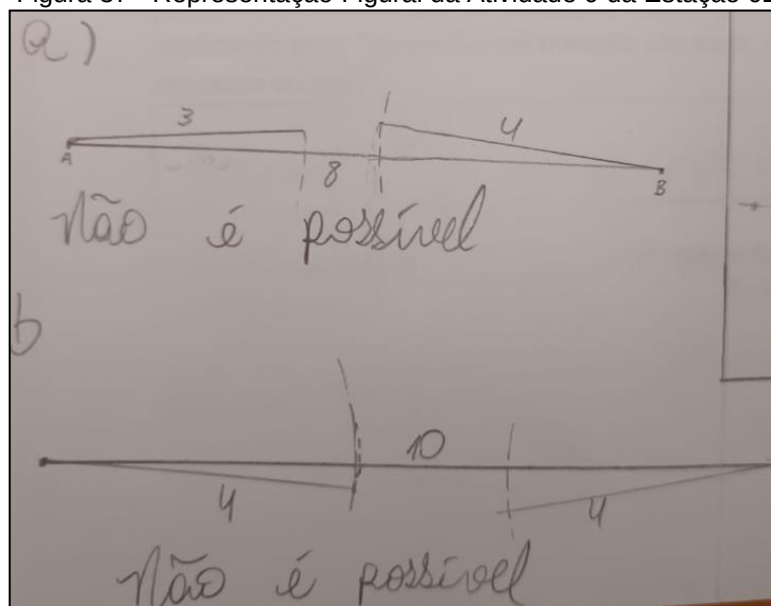
Para as Atividades 8 e 9, os estudantes usaram os comandos direcionadores elencados na Atividade 7 para construir (se o existisse) triângulos a partir das possíveis medidas dos seus lados. As Figuras 36 e 37 exemplificam as representações figurais registradas pelo aluno L da Atividade 8 e 9.

Figura 36 - Representação Figural da Atividade 8 da Estação 02



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 37 - Representação Figural da Atividade 9 da Estação 02



Fonte: Acervo da pesquisa.

Analisando a Figura 36, percebemos que o aluno conseguiu realizar a operação de conversão do registro de representação numérico para o registro de representação figural, quando, pelo uso dos materiais régua e compasso, construíram os triângulos conforme as medidas dos lados propostos. Além disso, recorreram à Trianguladora para descobrir a medida dos ângulos internos e indicá-los na representação figural do triângulo.

Já a Figura 37, como era esperado, os estudantes não conseguiram construir os triângulos, já que as medidas para esses possíveis lados não se enquadram na condição de existência do triângulo. No entanto, um exemplo dessa desigualdade triangular pode ser observado na representação figural (Figura 37) pelo fato dos arcos traçados não se interceptarem em nenhum momento.

6.4 Análise das atividades desenvolvidas na Estação 03

Nesta estação, os participantes da pesquisa tiveram a oportunidade de validar ou aprimorar seus conceitos sobre Semelhança de triângulos através da ferramenta



contida na Trianguladora.

Atividade 1:

Na Atividade 1, mostrada na Figura 38, os estudantes construiriam com régua e compasso um triângulo com as medidas 4 cm, 4 cm e 3 cm e utilizando a

Trianguladora. Com isso, indicaram na representação figural as medidas dos ângulos internos, anotando as medidas da área e do perímetro.

Figura 38 - Atividade 1 da Estação 03

1 – Sobre o triângulo ABC de medidas dos lados iguais a 5 cm, 6 cm e 5 cm, faça o que se pede:

a) Usando régua e compasso, construa esse triângulo e depois use a calculadora de triângulos para determinar os ângulos internos desse triângulo. Anote também a medida do perímetro e a medida da área.

Uma possível resposta é que o aluno use a régua e compasso e construa o triângulo com as medidas dos lados indicados, depois com o auxílio da calculadora de triângulos coloque as medidas dos seus ângulos internos ($53,1^\circ$; $51,3^\circ$; $73,7^\circ$), a medida do perímetro é 16 cm e a medida da sua área é 12 cm^2

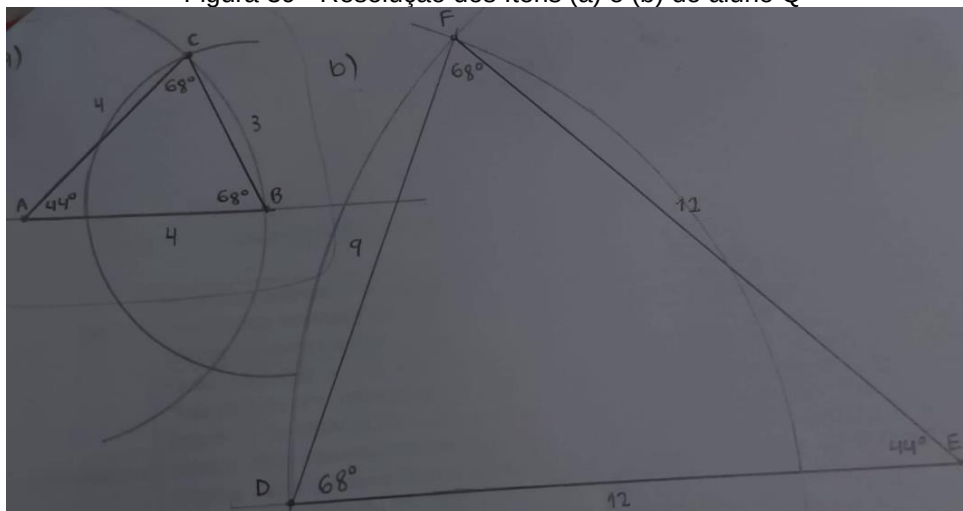
b) Construa agora o triângulo DEF, sendo suas medidas o triplo das medidas do triângulo ABC do item (a). Depois use a Trianguladora para determinar os ângulos internos desse triângulo. Anote também a medida do perímetro e a medida da área.

Uma possível resposta é que o aluno use a régua e compasso e construa o triângulo com as medidas dos lados indicados, depois com o auxílio da calculadora de triângulos

Fonte: Autoria própria.

Posteriormente, pelo comando do item (b), triplicaram as medidas desses lados e construíram outro triângulo com essas novas medidas, além de indicarem as medidas dos ângulos internos e anotarem as novas medidas de área e de perímetro. Um exemplo dessa resolução está ilustrado na Figura 39, registrado pelo aluno Q.

Figura 39 - Resolução dos Itens (a) e (b) do aluno Q



Fonte: Acervo da pesquisa.

Conforme a Figura 39, observamos que, mesmo sem acesso aos comandos apresentados na Atividade 7 da Estação 02 (Figura 35), o aluno conseguiu construir ambos os triângulos solicitados, realizando a conversão da representação numérica ao se utilizar as medidas desse triângulo para a representação figural com o uso da régua e compasso.

Logo em seguida, foram instigados a comparar nesses dois triângulos construídos a medida dos ângulos internos, a medida do perímetro e a medida da área, buscando encontrar uma relação, caso exista, uma vez que um desses triângulos foi construído a partir do triplo das medidas dos lados do outro.

De modo geral, os estudantes conseguiram converter a representação figural em linguagem natural ao registrarem em suas respostas que, ao se multiplicar as medidas dos lados de um triângulo por 3 (três), as medidas dos ângulos internos não se alteram, além de que, a medida do perímetro triplica enquanto a medida da área foi multiplicada por 9, conforme ilustra o Quadro 10.

Quadro 10 - Resolução da Atividade 3 da Estação 03

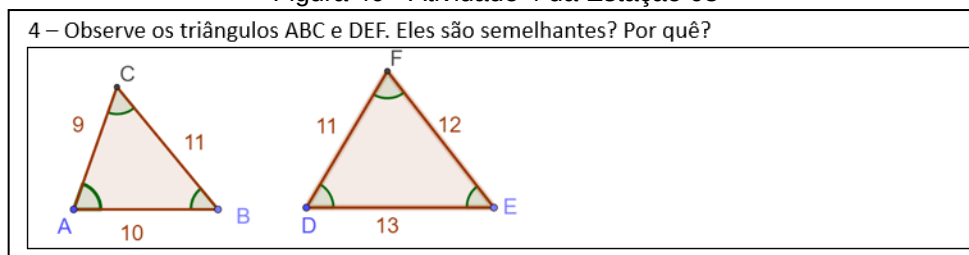
Que conclusão você chega em relação as medidas dos ângulos internos, medida do perímetro e medida da área quando geramos um triângulo multiplicando as medidas por 3? Que o medida dos ângulo internos não altera, o perímetro triplica, e a área aumenta em 9 vezes.
Transcrição: “Que a medida dos ângulos internos não altera, o perímetro triplica e a área aumenta 9 vezes”
E se multiplicarmos as medidas dos lados de um triângulo por “k”, o que aconteceria com a medida dos ângulos internos, a medida do perímetro e a medida da área? Os ângulos internos não alterariam, o perímetro seria k vezes maior, ou seja, $P \cdot k$ e a área é multiplicada por k^2.
Transcrição: “Os ângulos internos não se alterariam, o perímetro seria k vezes maior, ou seja, $P \cdot k$ e a área é multiplicada por k^2.”

Fonte: Acervo da pesquisa.

Atividade 4 e 5:

A Figura 40 ilustra o comando da Atividade 4.

Figura 40 - Atividade 4 da Estação 03



Fonte: Autoria própria.

Nesse momento, os estudantes começaram a se questionar como fariam para verificar se os triângulos são semelhantes. Um aluno disse:

– Professor, precisa dos ângulos para ver se são semelhantes e só tem os lados! Sem eles nem os lados homólogos dá pra saber. Ou então o desenho (abertura) dos ângulos é igual no tamanho. Se forem, são semelhantes, se não forem, preciso saber dos ângulos (aluno P).

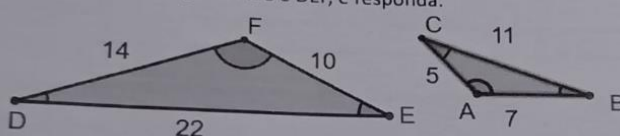
Outro aluno disse:

– Professor, pode usar a trianguladora pra descobrir os ângulos mesmo que a questão não pediu? É só digitar as medidas dos lados que lá vai dizer (aluno K).

Nesse momento, o professor precisou intervir e dizer que poderiam usar a trianguladora, desde que usassem a ferramenta  com o intuito único de determinar os ângulos internos e não a ferramenta  que eles estavam começando a explorar. Uma vez dito isso, os estudantes conseguiram perceber que os triângulos não eram semelhantes, possibilitando, assim, responder à Atividade 5, conforme ilustrado no Quadro 11.

Quadro 11 - Resolução da Atividade 5 da Estação 03

5 – Observe os triângulos ABC e DEF, e responda:



a) Os triângulos ABC e DEF são semelhantes? Por quê?

São semelhantes, pois ambos têm os mesmos pares de ângulos (28,1°; 19,7° e 132,2°)

b) Quais são seus lados homólogos?

5 e 10 ; 7 e 14 ; 11 e 22

c) Qual é sua razão de semelhança? E o que isso significa?

A razão é $\frac{1}{2}$, pois significa que qualquer lado do triângulo DEF multiplicado por essa razão resulta em seu respectivo homólogo no triângulo semelhante

Transcrição (a): “São semelhantes, pois ambos têm os mesmos pares de ângulos (28,1°; 19,7° e 132,2°.”

Transcrição (c): “A razão é $\frac{1}{2}$, pois significa que qualquer lado do triângulo DEF multiplicado por essa razão resulta em seu respectivo homólogo no triângulo semelhante”

Fonte: Acervo da pesquisa.

Atividade 6 e 7:

Nessas atividades, os estudantes foram instigados a verificar se dois triângulos equiláteros de medidas de lado, respectivamente 5 e 7, poderiam ser semelhantes, e depois foram incentivados a pensar em uma relação entre os triângulos equiláteros, conforme o Quadro 12.

Quadro 12 - Resolução das Atividades 6 e 7

6 – Usando a CALCULADORA DE TRIÂNGULOS, determine se um triângulo equilátero de medida de lado 5, pode ser semelhante a outro triângulo equilátero de medida de lado 7. EXPLIQUE. <i>Sim, pois ambos têm os ângulos com medidas de 60° 60° 60°</i>
Transcrição: “Sim, pois ambos têm os ângulos com medidas de 60°, 60° e 60°.”
7 – Que conclusão você pode chegar sobre semelhança entre triângulos equiláteros? <i>Que todos os triângulos equiláteros são semelhantes entre si, pois os ângulos de um triângulo equilátero sempre medem 60°.</i>
Transcrição: “Que todos os triângulos equiláteros são semelhantes entre si, pois os ângulos de um triângulo equilátero sempre medem 60°.”

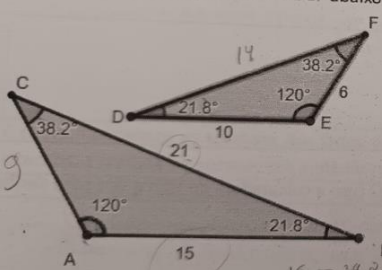
Fonte: Acervo da pesquisa.

Atividade 8:

Por fim, finalizamos a última atividade da Estação 3 com a análise de uma representação figural de dois triângulos, nos quais os estudantes puderam verificar se eles eram ou não semelhantes, e caso fossem, indicar os lados homólogos e razão de semelhança (constante de proporcionalidade). Depois, tiveram que determinar a medida de lados que estavam faltando nos dois triângulos. A Figura 41 mostra um exemplo de resolução feito pelo aluno Z.

Figura 41 - Resolução da Atividade 8 da Estação 03

8 – Observe os triângulos ABC e DEF abaixo e responda:



a) Eles são semelhantes? Por quê? *Sim, pois os ângulos correspondentes são iguais.*

b) Quais são seus lados homólogos? *$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$*

c) Qual a razão de semelhança? *$\frac{15}{10}$ ou 1,5*

d) Qual é a medida dos segmentos AC e DF? *3 e 19*

Handwritten calculations for AC and DF:

$$\frac{15}{10} = 1,5 \quad \frac{15}{10} = \frac{AC}{x} \quad \frac{15}{10} = \frac{DF}{6}$$

$$15x = 210 \quad 10AC = 90 \quad x = \frac{210}{15} = 14 \quad AC = 9$$

Fonte: Acervo da pesquisa.

Verificamos que a maior parte dos estudantes compreendeu o conceito de semelhança de triângulos quando indicaram no item (a) que os triângulos ABC e DEF

eram semelhantes devido aos “ângulos serem ordenadamente congruentes”. Quando solicitado no item (b) que indicassem os lados homólogos desses triângulos, os estudantes apresentaram domínio na conversão do registro figural para o registro algébrico, ao escrever que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF} = \frac{AC}{EF}$ corretamente. No item (c), percebemos uma operação de tratamento na representação numérica da razão de semelhança entre esses triângulos a partir das medidas do par de lados homólogos ao escrever $\frac{15}{10}$ e, em seguida, transformar essa informação na representação decimal desse registro por dividir o numerador (antecedente) pelo denominador (consequente). Além do mais, notamos que para o item (d) os estudantes apropriaram corretamente da operação de conversão ao transformar as informações contidas no registro representação figural para o registro de representação algébrico, escrevendo $\frac{15}{10} = \frac{21}{x}$. Depois, realizaram outra operação de tratamento usando a propriedade fundamental das proporções: o produto dos meios pelos extremos, indicado em suas repostas por $15x = 210$, e, logo em seguida, multiplicando ambos os lados da equação por $\frac{1}{15}$ e obtendo $x = \frac{210}{15}$, concluindo que $x = 14$, ao qual indica a medida desconhecida do segmento DF. Posteriormente, repetiram esse processo com objetivo de encontrar a medida do segmento AC.

6.5 Conclusão Geral das Análises

Assim, com as análises dessas três estações que compõem a sequência didática, produto desta dissertação, podemos concluir que a planilha eletrônica Trianguladora atrelada ao uso dessa sequência proporcionou o aprendizado referente a Semelhança de Triângulos, o que foi verificado por meio, principalmente, das operações de tratamento e conversão realizadas pelos estudantes. As operações de tratamento por eles realizadas mostraram que eles compreenderam as leis de formação em um mesmo registro de representação semiótica, enquanto as operações conversões mostraram que os estudantes transitaram entre diferentes registros de representação semiótica, o que é um dos requisitos necessários à aprendizagem de um conteúdo, conforme aponta Duval (2009).

No último capítulo, trazemos as considerações finais dessa pesquisa, perpassando pelos objetivos e procedimentos metodológicos abordados, além de uma

visão geral dos resultados obtidos. E, por fim, são indicadas ideias de continuidade para futuras pesquisas.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho foi desenvolvido com o foco no objeto de estudo Semelhança de Triângulos a partir da construção de uma planilha eletrônica denominada Trianguladora e pela elaboração e implantação de uma sequência didática que gerou o produto desta dissertação. Os participantes de pesquisa foram estudantes do 2º ano do Ensino Médio, de uma escola da rede privada de ensino no interior do estado da Bahia.

A escolha desse objeto de estudo e dos participantes de pesquisa se justifica pela necessidade de uma recomposição de aprendizagem inerente ao período de aulas remotas síncronas e assíncronas durante o período pandêmico ocorrido pela variante do vírus da covid-19. Além de entender a importância do ensino de triângulos e suas aplicações no dia a dia.

Para isso, após verificar por uma revisão de literatura o que a comunidade científica abordava sobre o tema, utilizamos o *software Microsoft Excel*. Esse uso foi para o desenvolvimento de uma planilha eletrônica que pudesse calcular informações acerca de um triângulo a partir das medidas de seus lados e, também, verificar quando há (ou não) a semelhança entre dois triângulos. A partir disso, elaborar e implementar uma sequência didática para o uso dessa planilha.

Desse modo, levantamos a seguinte pergunta norteadora: *quais as contribuições trazidas por uma sequência didática elaborada a partir de uma planilha eletrônica para a aprendizagem de Semelhança de triângulos para estudantes do segundo ano do Ensino Médio?*

Para responder a essa pergunta, elencamos como objetivo geral retomar conceitos básicos de triângulos e apresentar uma nova metodologia para o ensino de Semelhança de Triângulo, utilizando uma planilha eletrônica Trianguladora. Podemos dizer que esse objetivo geral foi alcançado à medida que foram indicadas as coerências entre os objetivos específicos e a condução dessa investigação. O primeiro objetivo específico dessa pesquisa — discutir aspectos didáticos referentes ao ensino de tópicos de geometria por meio de planilhas eletrônicas — foi alcançado quando se realizou um levantamento bibliográfico de trabalhos relacionados ao objeto desta pesquisa e, assim, foi possível perceber a relevância do uso das planilhas como recurso tecnológico no processo de ensino dos estudantes nas áreas de estatística e matemática financeira. No entanto, dentre os trabalhos filtrados analisados, nenhum

deles trouxe uma abordagem direta entre planilhas eletrônicas e a Semelhança de Triângulos, mas permitiu concluir que esse recurso tecnológico possibilita novos olhares para outros objetos de estudos diferentes.

O segundo objetivo específico — desenvolver uma planilha eletrônica com fim na aprendizagem de Semelhança de Triângulos — foi alcançado quando foi utilizado o *software* Microsoft Excel para elaborar uma planilha que visualmente se assemelhasse a um layout de um aplicativo e que fosse dinâmica e de fácil uso. Além disso, desenvolvemos algoritmos dentro dessa planilha que conseguisse calcular medidas de ângulos internos, medidas de perímetros e de áreas, bem como verificar a existência de um triângulo, sua classificação e analisar se há ou não semelhança entre dois triângulos, tudo a partir das medidas dos seus lados, conforme apresentado no capítulo 3 desta investigação.

O terceiro objetivo específico — elaborar uma sequência de atividades abordando Semelhança de Triângulos e outros elementos a partir da planilha desenvolvida e aplicar aos estudantes pesquisados — também foi alcançado quando foi elaborada uma sequência didática, dividida em três momentos, aos quais foram denominados de estações, com o foco de abordar o uso da Trianguladora, conceitos básicos sobre os triângulos e Semelhança de triângulos.

Todas essas estações que compõem a sequência didática foram aplicadas aos estudantes no turno oposto e dentro do espaço da instituição de ensino, com a utilização da versão impressa da sequência para cada aluno e a entrega dos materiais, régua, compasso e folhas não pautadas. Esses três momentos de aplicação conduziram a alcançar o quarto e último objetivo específico — verificar as contribuições dessa sequência para a aprendizagem de semelhança de triângulos pelos estudantes — uma vez que, a partir dessas aplicações, permitiram analisar como o uso dessa sequência didática atrelada ao uso da Trianguladora, possibilitou a validação dos conceitos de triângulos e da Semelhança de triângulos entre os participantes da pesquisa. Para isso, fundamentamos as análises na TRRS (Duval, 2009), que visa verificar as transformações realizadas a partir de propriedades válidas pelos estudantes num mesmo tipo de registro e, também, as transições desse objetivo em outros tipos de registro, as quais Duval (2009) denomina, respectivamente, de Tratamento e de Conversão. Essas análises foram discutidas no capítulo 8 desta dissertação.

Dito isso, direcionamos ao desenlace desta dissertação por apresentar

recomendações para a continuidade deste trabalho em futuras investigações. A primeira recomendação se baseia na possibilidade de trabalhar outros conceitos envolvendo os estudos de triângulos, como as diferentes formas de cálculo de áreas a partir das informações disponíveis para cada situação, além de incluir nas sequências aplicações diretas para o cotidiano dos estudantes, relacionadas ao objeto de estudo de caráter mais interpretativo e de raciocínio lógico. Uma segunda sugestão seria a possibilidade de abordar aspectos sobre trigonometria e as aplicações das leis dos senos e cossenos de um triângulo. E por fim, uma terceira e última sugestão seria Transformar a TRIANGULADORA em uma aplicativo inserindo a construção geométrica dos triângulos nele .

REFERÊNCIAS

ANGELIN, Arlindo Moacir. **Semelhança de triângulos: atividades práticas com o auxílio do Geogebra.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, p. 98. 2019.

BARBOSA, Douglas. **ESTATÍSTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO: Resoluções de Questões Utilizando o GeoGebra e Planilhas Eletrônicas.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, p.142. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC, 2018.

CABRAL, Clara Alice Ferreira. **Uma sequência de atividades com enfoque em representações dinâmicas para o desenvolvimento de conhecimentos de semelhança de triângulos.** Universidade Federal do Pará, 2020.

CALIANI, Fabrício José Oliveira. **Um aplicativo de celular como alternativa metodológica para o ensino de semelhança de triângulos e pirâmides.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". São José do Rio Preto, p. 61. 2021.

CORREIA, Eraldo Gonçalves. **Análise de uma sequência didática de funções quadráticas sob a influência da teoria dos registros de representações semióticas.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, p.150. 2015.

COUTO, Andrey Alves do. **EDUCAÇÃO FINANCEIRA: uma proposta didática em sala de aula com o uso de planilhas eletrônicas.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Goiás. Goiânia, p.119. 2024.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto.** Tradução Magda Lopes. 3. ed. Porto Alegre: ARTMED, 2010.

CRUZ, Josinaldo dos Santos. **O uso de investigações matemáticas na abordagem da semelhança de triângulos e aplicações.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe. Itabaiana, p. 67. 2015.

DERMEVAL, Diego; COELHO, Jorge A. P. de M.; BITTENCOURT, Ig I. Mapeamento Sistemático e Revisão Sistemática da Literatura em Informática na Educação. In: JAQUES, Patrícia Augustin; SIQUEIRA, Sean; BITTENCOURT, Ig; PIMENTEL, Mariano. (Org.) **Metodologia de Pesquisa Científica em Informática na Educação: Abordagem Quantitativa.** Porto Alegre: SBC, 2020. (Série Metodologia de Pesquisa em Informática na Educação, v. 2.). Disponível em: <https://metodologia.ceie-br.org/livro-2>.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana.** – 9. ed. - São Paulo: Atual, 2013.

DUVAL, Raymond, Trad. Méricles Thadeu Moretti. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis -SC, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (Org.). 8ª ed. - Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica- Campinas, São Paulo. Papirus, pp. 125-148. 2013.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FACCHINI, Camila. **Uma Proposta de Atividades de Semelhança de Triângulos para o Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". São José do Rio Preto, p. 80. 2021.

FLORES, C. R. **Registros de representação semiótica em matemática**: história, epistemologia, aprendizagem. Boletim de Educação Matemática, Rio Claro - SP, v. 19, n. 26, p. 1-22, 2006. Disponível em <https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221866005.pdf>.

GIMENES, Solange Sardi. **Possíveis contribuições de atividades de investigação e exploração com o computador na produção de conhecimento acerca do assunto semelhança**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória, p. 128. 2014

GOMES, Midiele Dantas. **A construção de sequências didáticas para o conteúdo de semelhança de triângulos através do software matemático Geogebra**. Dissertação (Mestrado em Gestão e Tecnologias Aplicadas a Educação) - Universidade do Estado da Bahia. Salvador, p. 95. 2018.

KITCHENHAM, Barbara; CHARTERS, Stuart. **Guidelines for performing Systematic Literature Reviews in Software Engineering**. Technical Report EBSE 2007-001, Keele University and Durham University Joint Report, 2007.

LIMA, Luís Gomes de. **A teoria dos registros de representação semiótica**: contribuições para o ensino e aprendizagem da física. Investigações em Ensino de Ciências, v. 24, n. 3, 2019.

MUNIZ, Rafaela dos Santos Souza. **O ensino de função pela perspectiva da teoria dos registros de representação semiótica apoiado por tecnologias digitais**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Campos dos Goytacazes, p. 245. 2019.

OLIVEIRA, Bárbara Pimenta de. **Reflexões à luz da teoria dos registros de representação semiótica acerca das práticas dos professores que ensinam**

matemática. Dissertação (Mestrado em Formação de Professores) - Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza, p. 142. 2014.

OLIVEIRA, Erimar dos Santos. **O Uso de Softwares na Educação Matemática.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual do Piauí. Teresina, p. 86. 2020.

PHILIPPI, Fernando Zilli. **SEQUÊNCIAS E SÉRIES:** uma proposta de trabalho com o uso da Engenharia Didática e a Teoria dos Registros de Representações Semióticas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Maringá. Maringá, p. 179. 2020.

PINTO, Rieuse Lopes. **Equações Diferenciais Ordinárias de Variáveis Separáveis na Engenharia Civil:** uma abordagem contextualizada a partir de um problema de transferência de calor - São Paulo 2021

SANTOS, Ricardo Almeida dos. **Ensino de pirâmides no ensino médio:** uma sequência didática apoiada na teoria de registro de representação semiótica. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, p. 175. 2021

SALDANHA, Renato Flor. **CONSTRUÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA INTERDISCIPLINAR:** funções Trigonométricas aplicadas ao ensino de Movimento Harmônico Simples – MHS – sob o enfoque da teoria dos registros de representações semióticas. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Acre. Rio Branco, p. 58. 2023.

SANTOS, Daniel Francisco dos. **Uso de planilhas eletrônicas como ferramentas de apoio ao ensino de matemática.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa. Florestal, p. 73. 2017.

SILVA, Carolina Ferreira da. **SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES:** Contribuições de uma sequência didática à luz da teoria de registros de representações semióticas. Dissertação (Mestre em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Franciscana. Santa Maria, p.106. 2021.

SILVA, Rogério Mendes da. **SOFTWARE MAXIMA NO ENSINO DE MATEMÁTICA:** Uma proposta abordando tópicos da álgebra do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina. Londrina, p. 108. 2016.

SIRQUEIRA, Lucimar. **Sequência didática para o ensino de estatística do 8º ano do ensino fundamental com a incorporação de planilhas eletrônicas.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, p. 85. 2022

SOUZA, Galvina Maria de Souza; LIMA, Gabriel Loureiro de Lima. **Processos de Ensino e de Aprendizagem das Integrais Duplas: uma revisão de literatura.** REMATEC, Belém, v. 19, n. 47, p. e2024031, 2024.

SOUZA, Galvina Maria de. **Integrais duplas**: um estudo à luz de uma articulação entre a teoria antropológica do didático e a teoria a matemática no contexto das ciências. 2022. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022.

SOUSA NETO, José Brilhante de. **Um estudo sobre o uso de planilhas eletrônicas no ensino de estatística nas séries finais da educação básica pública**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. Vitória da Conquista, p. 77. 2022.

ANEXO

ANEXO A – Sequência Didática



SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A Trianguladora e a
Semelhança de Triângulos





Estação 01 – “Conhecendo a ferramenta: **Trianguladora**”

Objetivo:	Conhecer os comandos necessários para utilizar a ferramenta “TRIANGULADORA” e revisar os conceitos significativos relacionado ao estudo de triângulos.
Metodologia:	Após o envio da ferramenta “TRIANGULADORA” e entrega do material impresso “Estação 01”, fazer a leitura oral com os estudantes do texto inicial e logo após, pedir para que os estudantes em fila e individualmente, usem seu celular/tablet/notebook para acessar a ferramenta. Depois, direcionar a leitura atentamente dos comandos da atividade “Estação 01” e realizar os comandos indicados para responder os itens. Após concluir todos os 9 itens, pedir para que os estudantes respondam a “autoavaliação” contida no final do material impresso. (item 10)
Avaliação:	Verificar se os estudantes resgataram conhecimentos prévios relacionados ao estudo de triângulos e se tiveram domínio das ferramentas da TRIANGULADORA

Estação 01 – “Conhecendo a ferramenta: **Trianguladora**”

Texto inicial:

Nessa “Estação 01”, você terá acesso a uma ferramenta em forma de planilha eletrônica que norteará seus estudos em relação aos triângulos e conseqüentemente às semelhanças entre dois triângulos. Para isso, que tal abrir a planilha em seu Smartphone/tablet/notebook e navegar por ela? Ao ser solicitado o uso de uma senha, você digitará **trianguladora23** tudo junto e sem espaço, ok? Depois dessa navegação, você deverá acessar a **página inicial** da trianguladora e para isso recorra sempre ao botão “ INÍCIO ”.

Agora vamos pôr a mão na massa! Na página inicial clique no botão “ SOBRE UM TRIÂNGULO ” e **prepara-se para começar**.

1 – Nos locais destinados aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ABC, coloque medidas para esses lados



e clique em “**GERAR** ”. Depois **ANOTE ABAIXO** os dados informados sobre esse triângulo.

(para alterar as medidas do triângulo basta clicar no botão “ VOLTAR ”, digitar as novas medidas e clicar em **gerar** novamente)

2 – Gere, separadamente, os triângulos com as medidas abaixo e responda:

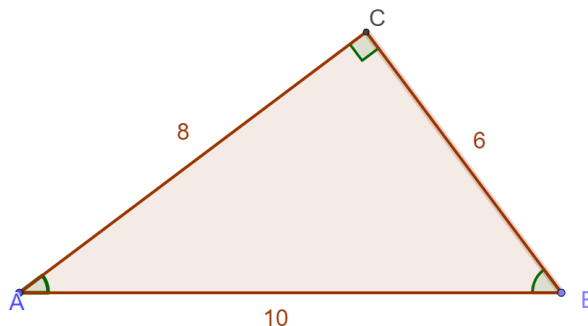
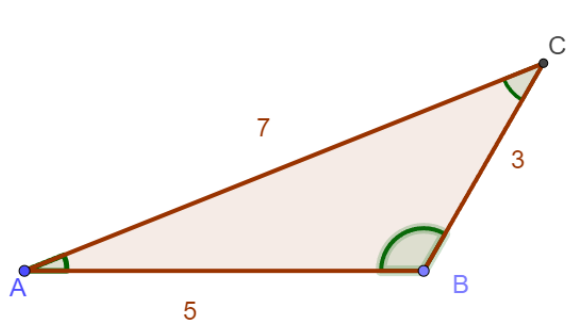
I – (3, 4, 5), II – (6, 6, 10), III – (6, 6, 6)

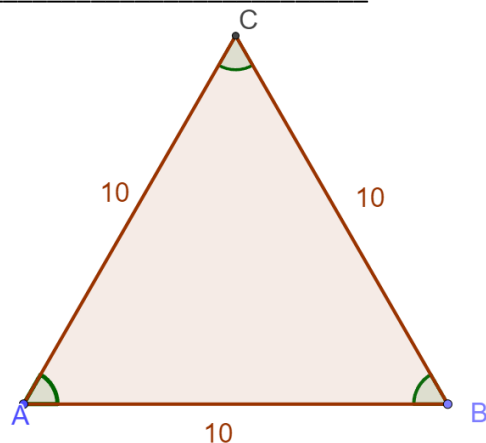
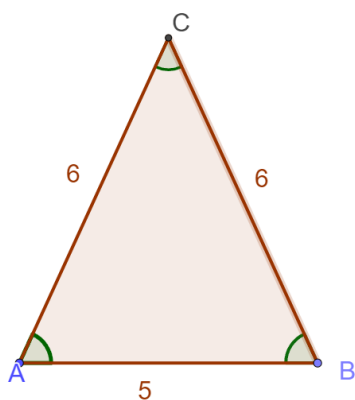
a) Qual a classificação dos três triângulos?

b) Quais as medidas dos ângulos internos dos triângulos gerados em I, II e III?

c) Quais as medidas do perímetro e da área dos triângulos gerados em I, II e III?

3 – Usando a TRIANGULADORA, classifique os triângulos (respondendo na linha) e indique na representação figural a medida dos ângulos internos.





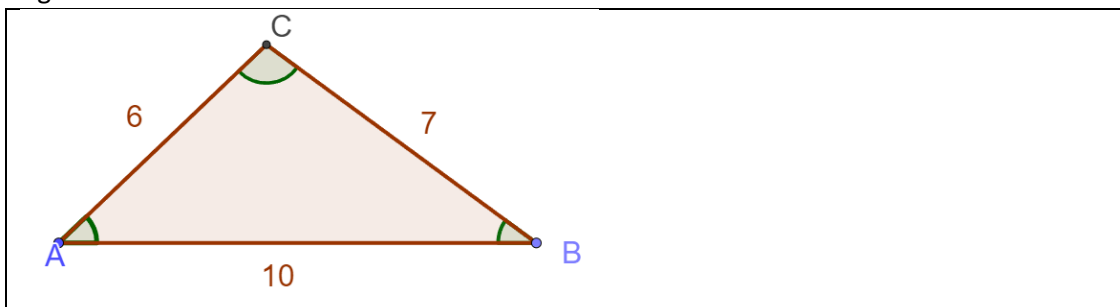


4 – Clicando na ferramenta “”, contido na página inicial, responda:

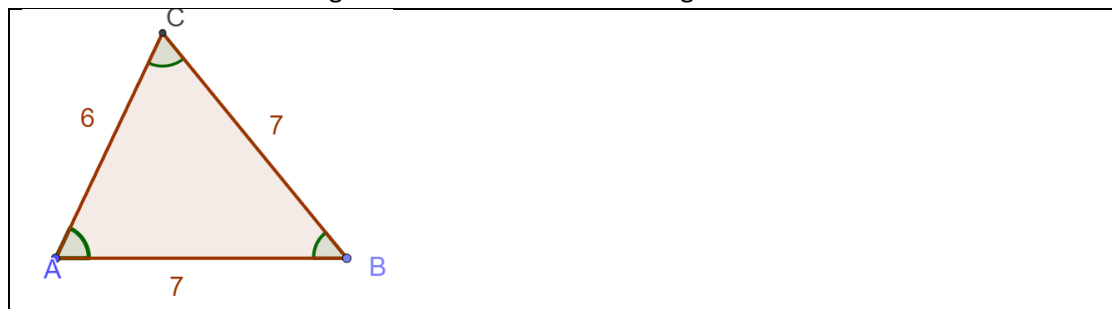
- a) Os elementos de um triângulo que são utilizados para sua classificação são:

- b) Quando é que um triângulo é classificado como: Escaleno, isósceles ou equilátero?

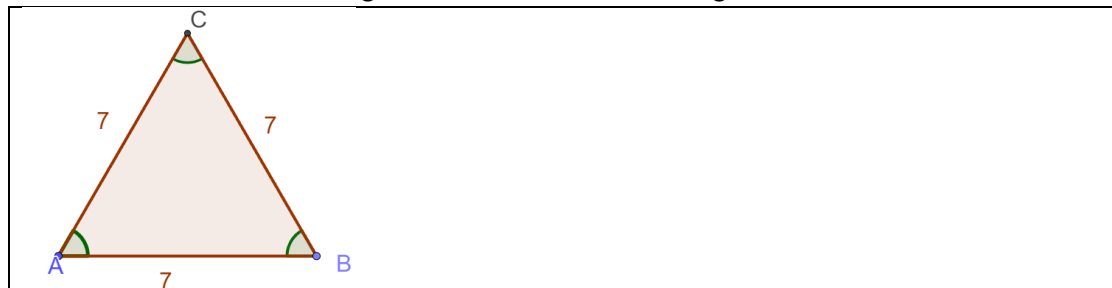
- c) Observe o triângulo escaleno representado abaixo, use a *Trianguladora* e registre na figura a medida dos ângulos internos. Que relação existe entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos internos?



- d) Observe o triângulo Isósceles representado abaixo, usando a calculadora de triângulos registre a medida dos ângulos internos nos seus respectivos lugares. Que relação existe entre as medidas dos lados não congruentes e as medidas dos ângulos internos?



- e) Observe o triângulo equilátero representado abaixo, usando a calculadora de triângulos registre a medida dos ângulos internos nos seus respectivos lugares. Que relação existe entre as medidas dos lados não congruentes e as medidas dos ângulos internos?

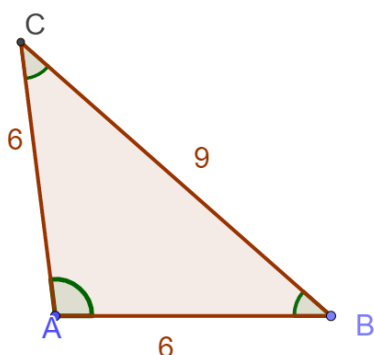


- f) Todo triângulo equilátero pode ser classificado como isósceles? E todo isósceles pode ser classificado como equilátero? Utilize o botão “sobre um triângulo” faça alguns testes antes de registrar sua conclusão.



- 5 – Ainda utilizando o botão “”, responda: Quando é que um triângulo é classificado como acutângulo, retângulo e obtusângulo?

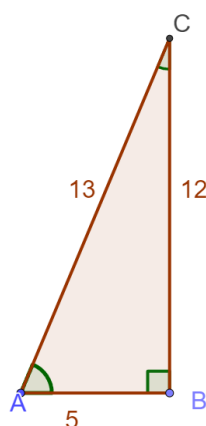
- 6 – Observe o triângulo abaixo e usando a TRIANGULADORA responda:



- a) Dê a Classificação quanto aos seus ângulos: _____
 b) Eleve todas as medidas dos seus LADOS ao quadrado e registre: _____
 c) Some o quadrado das duas menores medidas e registre: _____
 d) A maior medida ao quadrado “É MAIOR”, “MENOR” ou “IGUAL” que a soma do quadrado das outras duas medidas? _____

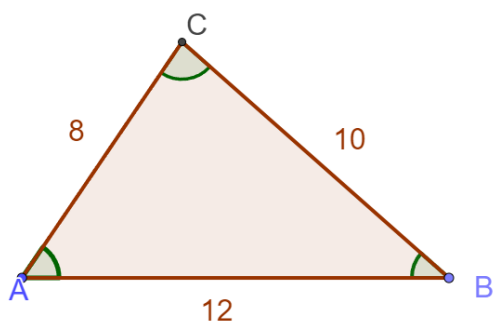
- e) Se a maior medida do lado desse triângulo medisse “a” e as outras duas medissem “b” e “c”, como ficaria o resultado encontrado no item (d)? _____

- 7 – Observe o triângulo abaixo e usando a TRIANGULADORA responda:



- a) Dê a Classificação quanto aos seus ângulos: _____
 b) Some o quadrado das duas menores medidas e registre: _____
 c) A maior medida ao quadrado “É MAIOR”, “MENOR” ou “IGUAL” que a soma do quadrado das outras duas medidas? _____
 d) Se a maior medida do lado desse triângulo medisse “a” e as outras duas medissem “b” e “c”, como ficaria o resultado encontrado no item (c)? _____

8 – Observe o triângulo abaixo e usando a TRIANGULADORA responda:



a) Dê a Classificação quanto aos seus ângulos: _____

b) Some o quadrado das duas menores medidas e registre: _____

c) A maior medida ao quadrado “É MAIOR”, “MENOR” ou “IGUAL” que a soma do quadrado das outras duas medidas? _____

d) Se a maior medida do lado desse triângulo medisse “a” e as outras duas medissem “b” e “c”, como ficaria o resultado encontrado no item (c)? _____

9 – Verifique se a frase “**todo triângulo equilátero é acutângulo**” é verdadeira, por testar alguns exemplos de triângulos equiláteros no botão “sobre um triângulo”, depois registre e justifique a sua conclusão.

10 – Autoavaliação:

a) Você achou que a ferramenta “TRIANGULADORA” é fácil de utilizar? Por quê?

SIM () NÃO ()

b) Você acha que essa ferramenta vai ser útil para aprender mais sobre triângulos? Por quê?

SIM () NÃO ()

c) O que você achou mais interessante na atividade de hoje? Explique

SIM () NÃO ()



ESTAÇÃO 02– “E o triângulo existe?”

Objetivo:	Comprovar, se quaisquer três medidas de lados formam um triângulo e através de investigação passo a passo, deduzir a desigualdade triangular. Depois relacionar a desigualdade triangular com as possibilidades de encontrar um terceiro lado de um triângulo escaleno e/ou isósceles.
Metodologia:	Após organizar a sala em filas e pedir que os estudantes estejam de posse da ferramenta “calculadora de triângulos” através dos seu celular/tablet/notebook, entregar a versão impressa da ESTAÇÃO 02 para cada um. Trazer um feedback da ESTAÇÃO 01, destacando os pontos mais importantes abordados nele, acrescido de outros comentários se necessário. Depois, Fazer a leitura oral do texto inicial e em seguida autorizar os estudantes a realizarem os comandos do ESTAÇÃO 02. Após concluir todos os 9 itens, pedir para que os estudantes respondam a “autoavaliação” contida no final do material impresso. (item 10)
Avaliação:	Avaliar se os estudantes respeitam as instruções dadas pelo professor, se realizam todos os itens da atividade e se preenchem a autoavaliação ao final do <i>ESTAÇÃO 02</i>

Estação 02 – “E o triângulo existe?”

Texto inicial:

É bem possível que você já saiba que triângulos existem e provavelmente, tenha condições de classificá-los de acordo com seus lados e de seus ângulos internos, conforme vimos na Estação 01. Agora, na Estação 02, queremos entender se um triângulo pode ser formado por quaisquer três medidas de lados. O que você acha? A ferramenta calculadora de triângulos pode te ajudar a chegar a uma conclusão sobre esse assunto. Agora siga atentamente os comandos dessa estação, recorrendo sempre que possível a Calculadora de triângulos para validar seus resultados.

Mãos a obra!

1 – Abra a **Trianguladora** em seu aparelho eletrônico e clique em “ SOBRE UM TRIÂNGULO”. Digite as medidas 3, 2 e 6 para os respectivos lados de um possível triângulo ABC.

a) Registre as informações dadas pela calculadora.

b) Se invertemos a ordem dessas medidas o resultado do item (a) muda?

c) Se dobrarmos as medidas propostas as informações sobre esse triângulo mudam? E se triplicarmos? Repita o processo na **Trianguladora** multiplicando cada lado dele por 2 e depois

por 3. Anote os resultados explicando que: “se quando um triângulo não existe, multiplicar suas medias por um mesmo número, faz com que ele exista ou não?”

2 – Gere separadamente, por meio da calculadora de triângulos, os possíveis triângulos com as medidas abaixo e responda:

I – (3, 5, 9), II – (6, 8, 10), III – (1, 2, 3)

- d) Qual dessas medidas (I, II e III) é possível formar um triângulo?

- e) **Utilizando as medidas do triângulo II**, adicione separadamente a medida do **lado AB** com a medida do **lado BC** e compare com a medida do **lado AC**. A soma das medidas do lado AB com BC é maior ou menor que a medida do lado AC?

- f) **Utilizando as medidas do triângulo II**, adicione separadamente a medida do **lado AB** com a medida do **lado AC** e compare com a medida do **lado BC**. A soma das medidas do lado AB com AC é maior ou menor que o lado BC?

- g) **Utilizando as medidas do triângulo II**, adicione separadamente a medida do **lado BC** com a medida do **lado AC** e compare com a medida do **lado AB**. A soma das medidas do lado BC com AC é maior ou menor que o lado AB?

- h) **Se REPITIRMOS o comando dos itens “b”, “c” e “d”, porém utilizando as medidas I e III.** O que irá acontecer de diferente?

- i) A que conclusão você chegou sobre a existência de triângulos?

3 – Utilizando o botão “ APRENDA MAIS”, contido na página inicial, responda:

O que é a desigualdade triangular? Que relação tem com a condição de existência de um triângulo?

4 – Sem usar a **Trianguladora**, indique quais medidas abaixo podem formar triângulos registrando sua estratégia de resposta.

- a) 18 cm, 40 cm e 24 cm

- b) 11 cm, 25 cm e 11 cm

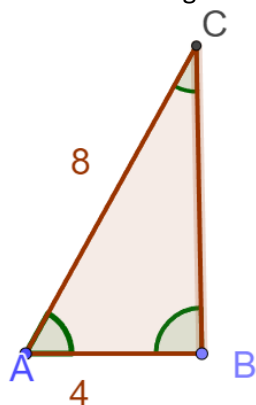
- c) 34 cm, 76cm e 42 cm

- d) 12,5cm, 12,5 cm e 12,5 cm

- e) 14cm, 20cm e 14 cm

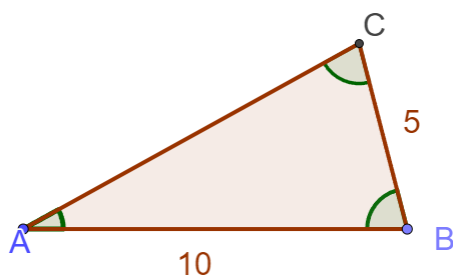
- f) Use a ferramenta calculadora de triângulos para verificar seus resultados dos itens “a”, “b”, “c”, “d” e “e”, e classifique os triângulos que existirem quanto a medida dos seus lados e ângulos.

5-Analisando a figura abaixo responda:



- O segmento BC pode ter medida 15? Por quê?
- O segmento BC pode ter medida 2? Por quê?
- Qual o menor número inteiro que BC pode ter como medida?
- Qual o maior número inteiro que BC pode ter como medida?

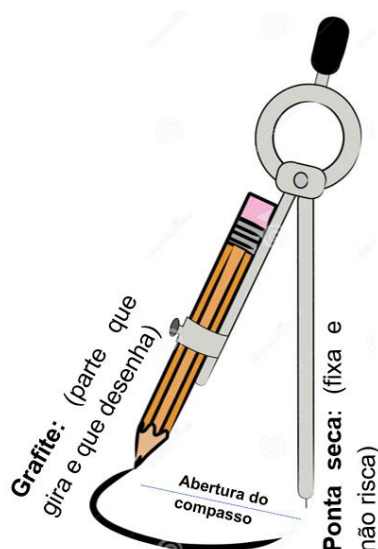
6 – Para que o triângulo abaixo seja isósceles, qual deve ser a medida do segmento AC. Explique sua resposta.



- () somente 5
- () Somente 10
- () 5 ou 10
- () 15
- () nenhum valor

7 – (USE UMA FOLHA ANEXO ENTREGUE PELO PROFESSOR)

Usando régua e compasso vamos aprender a montar um triângulo a partir das medidas 8cm, 5cm e 4cm dos seus lados, para isso siga os passos abaixo:



- Trace um segmento de reta qualquer
- No segmento traçado marque um ponto A. (mais próximo de um dos extremos do segmento traçado)
- Faça a abertura do compasso em 8 cm. Para isso coloque a ponta seca no compasso em 0 e a outra ponta em 8 na régua.
- Com essa abertura, coloque a ponta seca do compasso no ponto A, e risque o segmento criado no item I. nesse “risco” marque o ponto B. Verifique com a régua se o segmento AB mede 8 cm.
- Com a abertura do compasso em 5 cm, coloque a ponta seca em A e faça um arco de circunferência de tamanho significativo
- Agora com a abertura em 4 cm, coloque a ponta seca do compasso em B e faça outro arco de circunferência significativo de tal modo que intercepte o primeiro arco. Nessa interseção dos arcos você deverá marcar o ponto C.
- Com a régua, ligue os segmentos AC e BC e verifique se eles medem 5cm e 4 cm respectivamente.

8 – (USE UMA FOLHA ANEXO ENTREGUE PELO PROFESSOR)

Siga os passos dados no Item 7 e construa com régua e compasso os triângulos com medidas de lados abaixo e depois use a **Calculadora de triângulos** para determinar as medidas dos seus ângulos internos e registrá-las em seu desenho:

a) 6cm, 10cm e 8cm b) 5cm, 4 cm e 4 cm c) 5cm, 5cm e 5 cm

9 – (USE UMA FOLHA ANEXO ENTREGUE PELO PROFESSOR)

Siga os passos dados no Item 7 e verifique se é possível construir os triângulos de medidas de lado abaixo. Depois use a **calculadora de triângulos** para validar sua conclusão

a) 8cm, 3cm e 4 cm d) 10cm, 4cm e 4 cm

10 – Autoavaliação:

d) Você já conhecia, ou lembrava da condição de existência de um triângulo? Explique
SIM () NÃO ()

e) Você usaria a calculadora de triângulos para verificar a existência de um triângulo? Explique
SIM () NÃO ()

f) Você sabia como construir triângulos utilizando régua e compasso? Explique
SIM () NÃO ()

g) Através da construção de triângulos com régua e compasso, você percebeu o porquê que alguns triângulos não existem? Explique
SIM () NÃO ()



Estação 03 – “Conhecendo a Semelhança entre triângulos”

Objetivo:	Identificar e determinar triângulos semelhantes por meio da medida dos seus ângulos internos. Determinar medidas de lados desconhecidos a partir da razão de semelhança entre dois triângulos semelhantes.
Metodologia:	Após organizar a sala em filas e pedir que os estudantes estejam de posse da ferramenta “Trianguladora” através dos seu celular/tablet/notebook, entregar a versão impressa da ESTAÇÃO 03 para cada um. Trazer um feedback da ESTAÇÃO 02, destacando os pontos mais importantes abordados nele, acrescido de outros comentários se necessário. Depois, Fazer a leitura oral do texto inicial e em seguida autorizar os estudantes a realizarem os comandos da Estação 03. Após concluir todos os 8 itens, pedir para que os estudantes respondam a “autoavaliação” contida no final do material impresso. (item 09)
Avaliação:	Avaliar se os estudantes respeitam as instruções dadas pelo professor, se realizam todos os itens da atividade e se preenchem a autoavaliação ao final do <i>ESTAÇÃO 03</i>

Estação 03 – *Conhecendo a Semelhança entre triângulos*

Texto inicial:

Você chegou na Estação 03 dessa incrível viagem ao conhecimento. É possível que agora você já seja capaz de verificar a existência de um triângulo e classificá-lo quanto as medidas dos seus lados e ângulos. O que ainda mais podemos aprender? Nessa estação, faremos um estudo sobre Semelhança de triângulos e é claro que a Trianguladora nos auxiliará novamente. Então, abra-a na página inicial e vamos começar!

1 – Sobre o triângulo ABC de medidas dos lados iguais a 5 cm, 6 cm e 5 cm, faça o que se pede:

- a) Usando régua e compasso, construa esse triângulo e depois use a calculadora de triângulos para determinar os ângulos internos desse triângulo. Anote também a medida do perímetro e a medida da área.

- b) Construa agora o triângulo DEF, sendo suas medidas o triplo das medidas do triângulo ABC do item (a). Depois use a Trianguladora para determinar os ângulos internos desse triângulo. Anote também a medida do perímetro e a medida da área.

- c) A medida dos ângulos do triângulo DEF triplicaram em comparação aos de ABC?

- d) A medida do PERÍMETRO do triângulo DEF triplicou em comparação a ABC?

- e) A medida da ÁREA do triângulo DEF triplicou em comparação a ABC?

- f) Que conclusão você chega em relação as medidas dos ângulos internos, medida do perímetro e medida da área quando geramos um triângulo multiplicando as medidas por um número 3?

- g) E se multiplicarmos as medidas dos lados de um triângulo por “k”, o que aconteceria com a medida dos ângulos internos, a medida do perímetro e a medida da área?

2 – Usando a ferramenta , digite as medidas dos lados dos triângulos ABC e DEF, definidas no item 1).

- j) Que informação a Trianguladora fornece sobre esses dois triângulos? Registre as informações fornecidas

- k) Mantendo as medidas do lado ABC e trocando as medidas dos lados de DEF para 7cm, 7cm e 8cm, que informações a Trianguladora fornece agora sobre esses triângulos

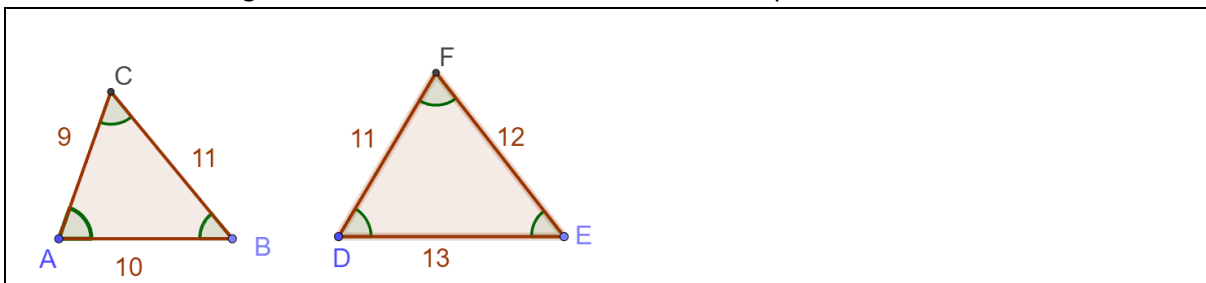
3 – Use o botão “, para obter mais informações e responda:

- a) O que é a semelhança entre triângulos?

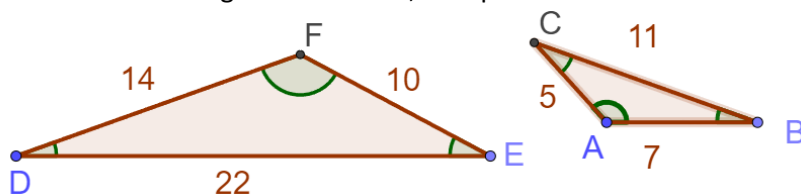
- b) O que são lados homólogos?

c) O que é a constante de proporcionalidade ou razão de semelhança?

4 – Observe os triângulos ABC e DEF. Eles são semelhantes? Por quê?



5 – Observe os triângulos ABC e DEF, e responda:



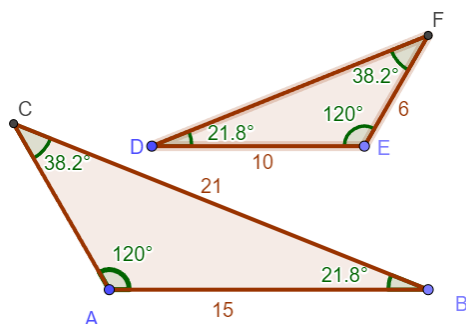
a) Os triângulos ABC e DEF são semelhantes? Por quê?

b) Quais são seus lados homólogos?

c) Qual é sua razão de semelhança? E o que isso significa?

6 – Usando a Trianguladora, determine se um triângulo equilátero de medida de lado 5, pode ser semelhante a outro triângulo equilátero de medida de lado 7. EXPLIQUE

7 – Que conclusão você pode chegar sobre semelhança entre triângulos equiláteros?



8 – Observe os triângulos ABC e DEF abaixo e responda:

- Eles são semelhantes? Por quê? _____
- Quais são seus lados homólogos? _____
- Qual a razão de semelhança? _____
- Qual é a medida dos segmentos AC e DF? _____

09 – Autoavaliação:

- h) Você já sabia que triângulos com medidas dos ângulos internos congruentes são semelhantes, mesmo que as medidas dos seus lados não sejam?

SIM () NÃO ()

- i) Você acha que a Calculadora de triângulos foi necessária para entender o conceito de triângulos semelhantes? Explique

SIM () NÃO ()

- j) Que instrumento poderia ser usado no lugar da calculadora de triângulos para identificar se triângulos são semelhantes, você sabe? Qual?

SIM () NÃO ()
