UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SEBASTIANA DE SOUZA BORGES

UM ESTUDO DOS POLIEDROS REGULARES DE PLATÃO COM O USO DA REALIDADE AUMENTADA

VITÓRIA DA CONQUISTA – BA
2024

SEBASTIANA DE SOUZA BORGES

UM ESTUDO DOS POLIEDROS REGULARES DE PLATÃO COM O USO DA REALIDADE AUMENTADA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Galvina Maria de Souza.

VITÓRIA DA CONQUISTA – BA
2024

B734u Borges, Sebastiana de Souza.
Um estudo dos poliedros regulares de Platão com o uso da realidade aumentada. / Sebastiana de Souza Borges, 2024.
98f. il.
Orientador (a): Drª. Galvina Maria de Souza.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2024.
Inclui referências. 63- 65.
1.Geometria Espacial. 2. Sólidos de Platão. 3. Realidade Aumentada. 4. Teoria dos Registros de Representação semiótica. I. Souza, Galvina Maria de. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - Ba. III. T.

CDD: 516

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção - CRB 5/1890
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

Sebastiana de Souza Borges

Um estudo dos poliedros regulares de Platão com o uso da Realidade Aumentada

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof.ª Dr.ª Galvina Maria de Souza - UESB

Prof.ª Dr.ª Alexsandra Oliveira Andrade - UESB

Prof.ª Dr.ª Ana Paula Perovano dos Santos Silva - UESB

Prof. Dr. Gabriel Loureiro de Lima - PUC-SP

Vitória da Conquista - Ba

Aprovada em 28 de junho de 2024

Documento assinado eletronicamente por **Gabriel Loureiro de Lima**, **Usuário Externo**, em 28/06/2024, às 09:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014.

Documento assinado eletronicamente por **Alexsandra Oliveira Andrade**, **Professor Titular**, em 28/06/2024, às 13:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014.

Documento assinado eletronicamente por **Ana Paula Perovano dos Santos Silva**, **Professor**, em 28/06/2024, às 14:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014.

Documento assinado eletronicamente por **Galvina Maria de Souza**, **Professor Assistente**, em 18/07/2024, às 08:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela minha vida e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo do curso.

Agradeço aos meus pais, Francisco Borges e Maria Amanda, pelos ensinamentos e orações.

Agradeço ao meu esposo, Dilson, e à minha filha, Diana Luiza, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização deste trabalho.

Agradeço aos meus irmãos pela cumplicidade e apoio em todos os momentos delicados dessa jornada.

Agradeço aos meus sogros e cunhados pelo apoio e incentivo.

Agradeço ao meu colega de mestrado, Nathan Lopes, com quem convivi intensamente durante esses dois anos, pelo companheirismo e pela troca de experiências.

Agradeço à orientadora, Dra. Galvina, pela dedicação e paciência com a qual me guiou para a realização deste trabalho.

Agradeço aos colegas pela amizade, incentivo e pelo ambiente amistoso no qual convivemos e solidificamos os nossos conhecimentos.

Agradeço aos professores pelas correções e ensinamentos que me permitiram apresentar melhor desempenho no meu processo de formação profissional ao longo do curso.

Agradeço à banca examinadora pelo interesse e disponibilidade.

RESUMO

Muitas vezes o ensino da Matemática é realizado, a rigor, nas instituições escolares de maneira bem abstrata, com atenção voltada às atividades que exigem repetição e memorização. Considerando que a Geometria Espacial não se restringe às fórmulas, regras ou operações e pode ser mais bem compreendida com recursos didáticos adequados, esta dissertação teve como objetivo analisar como uma sequência didática, elaborada a luz de algumas ideias da Teoria dos Registros de representação Semiótica, com o uso da Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com ênfase na ferramenta Realidade Aumentada (RA), pode contribuir para o ensino dos Sólidos de Platão. Os sujeitos de pesquisa foram estudantes do 2º ano do Ensino Médio de um colégio da rede particular de ensino de uma cidade localizada no interior da Bahia. Os dados foram produzidos através das respostas dos estudantes às atividades da sequência, bem como, por meio da observação dos participantes. Os resultados mostraram que o uso do *software* proporcionou aulas mais dinâmicas e atrativas, principalmente pela facilidade da visualização dos sólidos proporcionada pela RA. Mostraram ainda, que as atividades propostas na sequência didática permitiram aos estudantes transitar em mais de um Sistema de Registro de Representação Semiótica, contribuindo para a aprendizagem dos estudantes dos conteúdos e conceitos relativos ao objeto de estudo. Conclui-se, então que a sequência elaborada e a forma como ela foi implementada foi um elemento facilitador da aprendizagem dos alunos em relação aos Sólidos de Platão.

Palavras-chave: Geometria Espacial; Sólidos de Platão; Realidade Aumentada; Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

Mathematics teaching is often carried out, strictly speaking, in school institutions in a very abstract way, with attention focused on activities that require repetition and memorization. Considering that Spatial Geometry is not restricted to formulas, rules or operations and can be better understood with appropriate teaching resources, this dissertation aimed to analyze it as a didactic sequence, elaborated in the light of some ideas from the Theory of Semiotic Representation Records, with the use of the GeoGebra 3D Graphing Calculator with an emphasis on the Augmented Reality (AR) tool, it can contribute to the teaching of Plato's Solids. The research subjects were 2nd year high school students at a private school in a city located in the interior of Bahia. The data was produced through students' responses to the activities in the sequence, as well as through observation of the participants. The results showed that the use of the software provided more dynamic and attractive classes, mainly due to the ease of visualizing solids provided by AR. They also showed that the activities proposed in the didactic sequence allowed students to use more than one semiotic representation registration system, contributing to students' learning of content and concepts related to the object of study. It is concluded, then, that the elaborate sequence and the way in which it was implemented was an element that facilitated students' learning in relation to Plato's Solids.

Keywords: Spatial Geometry; Plato's Solids; Augmented Reality; Theory of Semiotic Representation Registers.

RESUMEN

La enseñanza de las matemáticas a menudo se lleva a cabo, estrictamente hablando, en las instituciones escolares de una manera muy abstracta, con la atención centrada en actividades que requieren repetición y memorización. Considerando que la Geometría Espacial no se limita a fórmulas, reglas u operaciones y puede ser mejor comprendida con recursos didácticos adecuados, esta disertación tuvo como objetivo analizarla como una secuencia didáctica, elaborada a la luz de algunas ideas de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica, con el uso de la Calculadora Graficadora 3D GeoGebra con énfasis en la herramienta de Realidad Aumentada (RA), puede contribuir a la enseñanza de los Sólidos de Platón. Los sujetos de la investigación fueron estudiantes de segundo año de secundaria de una escuela privada de una ciudad ubicada en el interior de Bahía. Los datos se produjeron a través de las respuestas de los estudiantes a las actividades de la secuencia, así como a través de la observación de los participantes. Los resultados mostraron que el uso del software proporcionó clases más dinámicas y atractivas, principalmente debido a la facilidad de visualización de sólidos que brinda la RA. También demostraron que las actividades propuestas en la secuencia didáctica permitieron a los estudiantes utilizar más de un sistema de registro de representaciones semióticas, contribuyendo al aprendizaje de contenidos y conceptos relacionados con el objeto de estudio. Se concluye, entonces, que la secuencia elaborada y la forma en que fue implementada fue un elemento que facilitó el aprendizaje de los estudiantes en relación a Los Sólidos de Platón.

Palabras clave: Geometría Espacial; Los sólidos de Platón; Realidad aumentada; Teoría de los registros de representación semiótica.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

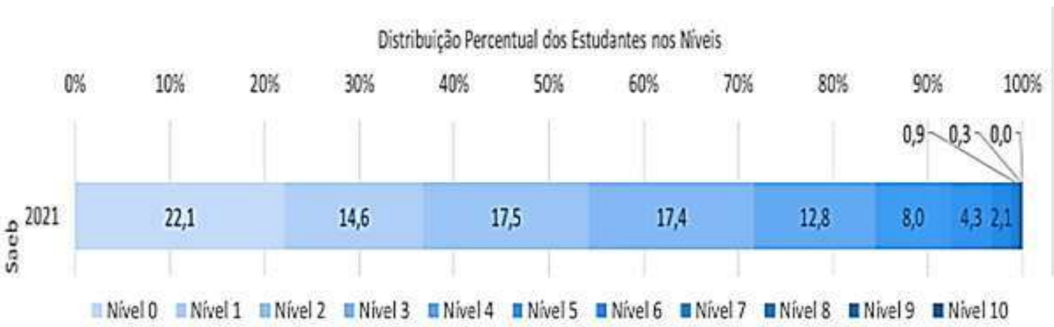
1. INTRODUÇÃO

A abordagem da Geometria Espacial nas salas de aula é desafiadora, tanto para o professor que utiliza uma superfície plana para desenhar figuras tridimensionais, seja pela falta de recurso tecnológico ou de formação para utilizá-lo, quanto para do aluno que precisa visualizar, compreender e analisar os sólidos numa perspectiva geralmente plana.

Nesse sentido, faz-se necessário lançar mão de diferentes recursos para subsidiar os processos de ensino e de aprendizagem da Geometria Espacial e, "[...] quando possível e de maneira adequada, se utilizar de meios diversos, que possam ajudar na visualização e na construção do conhecimento de maneira significativa" (Sousa; Guimarães; Amaral, 2021, p. 26 apud Amaral et al. 2022). Assim, buscar diferentes recursos metodológicos e não ficar restrito ao uso do quadro e do livro didático pode contribuir para esses processos.

Em relação aos sistemas de avaliação em grande escala que aferem o aprendizado dos estudantes da educação básica nesse país, os dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), constantes em Brasil (2021), são apresentados em uma escala de proficiência-capacidade para realizar algo, dominar certo assunto e ter aptidão em determinada área do conhecimento, organizados por níveis progressivos e cumulativos, do menor para o maior, quantificada de 0 a 10, em que zero representa a menor proficiência-capacidade e 10 a maior, conforme ilustrado no gráfico 1.

Gráfico 1 - Distribuição dos Estudantes nos Níveis de Ensino



Fonte: Brasil, 2021.

Os termos “nível” e “escala” são utilizados para descrever diferentes aspectos dos resultados obtidos pelos estudantes. Nesse sentido, “nível” se refere ao desempenho dos estudantes em uma determinada área de conhecimento, geralmente expresso em termos de proficiência. Os níveis representam diferentes graus de domínio dos conteúdos avaliados, categorizados para indicar o quão bem os alunos conseguem lidar com os desafios apresentados pela avaliação.

Por exemplo, o SAEB utiliza níveis de proficiência para classificar o desempenho dos alunos em áreas como Matemática e Língua Portuguesa, geralmente dividindo-os em categorias como “Abaixo do Básico”, “Básico”, “Intermediário” e “Avançado”.

Quanto à “escala”, refere-se à estrutura de pontuação utilizada para quantificar e comparar o desempenho dos alunos em uma determinada área. Geralmente, a escala do SAEB é padronizada e estabelecida com base nos resultados médios obtidos pelos estudantes em todo o país. Por exemplo, uma escala de proficiência em Matemática pode variar de 0 a 500 pontos, com diferentes pontos de corte para cada nível de proficiência. A escala permite uma avaliação comparativa do desempenho dos alunos ao longo do tempo e entre diferentes regiões do país.

Conforme os níveis 1 e 2, o estudante pode ser alocado no estágio crítico ou muito crítico. Em relação à Matemática, os estudantes alocados nesses estágios apresentam, entre outros, dificuldades no entendimento e/ou visualização de formas geométricas. Dados registrados em Brasil (2021) mostram que dos estudantes brasileiros da 3ª série do Ensino Médio, na disciplina de Matemática, 62,6% foram classificados no estágio crítico e outros 4,8% no estágio muito crítico. Esses resultados apontam para a necessidade de refletir sobre os processos de ensino e de aprendizagem dessa disciplina.

No SAEB, o aluno com desempenho maior ou igual a 400 e menor que 425 é alocado no nível 8. Nesse nível, em relação à Geometria Espacial, os documentos da SAEB afirmam:

> O estudante pode ser capaz de reconhecer a proporcionalidade dos elementos lineares de figuras semelhantes. Também é provável que sejam capazes de determinar: uma das medidas de uma figura tridimensional, utilizando o Teorema de Pitágoras; a equação de uma circunferência dados o centro e o raio; a quantidade de faces, vértices e arestas de um poliedro por meio da relação de Euler. É provável também que os alunos sejam capazes de resolver problema envolvendo razões trigonométricas no

> triângulo retângulo com apoio de figura. Podem também ser capazes de associar um prisma a uma planificação usual dada (Brasil, 2013, p.7).

O Gráfico 1 mostra que, conforme aumenta o nível, há uma porcentagem menor de alunos aptos a dominar os conteúdos propostos. Nos níveis 8 e 9, o percentual fica abaixo de 1% e, no nível 10, o domínio chega a 0,00%, conclui-se que a deficiência no aprendizado de Geometria Espacial é significativa.

Nesse contexto, na esperança de contribuir para o ensino de tópicos de Geometria Espacial enquanto docente do Ensino Médio e para as reflexões quanto ao ensino desse conteúdo pela comunidade da Educação Matemática, foi elaborada a seguinte questão de pesquisa: que contribuições o aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D, com o uso da RA pode trazer para o estudo de sólidos de Platão?

Em busca da resposta a essa questão, considerou-se como objetivo geral <u>analisar como uma sequência didática, elaborada à luz de algumas ideias da Teoria dos Registros de representação Semiótica, com o uso da Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com ênfase na ferramenta RA, pode contribuir para o ensino dos Sólidos de Platão</u>. E, a partir dele, traçaram-se os objetivos específicos: desenvolver uma sequência didática apoiada no aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com ênfase na ferramenta RA, explorando conceitos e propriedades relacionadas a Sólidos de Platão; aplicar e analisar a sequência didática para turmas do 2º ano do Ensino Médio à luz de ideias da Teoria dos Registros de Representação Semiótica; verificar se o uso do aplicativo de fato contribuiu para a aprendizagem do objeto matemático pelo aluno.

Além disso, foi possível constatar que, se bem planejadas, aulas com o uso do GeoGebra 3D podem contribuir para o ensino e para a aprendizagem desses objetos matemáticos.

Quanto à estrutura, esse trabalho está dividido em 9 capítulos. Além desta Introdução, apresenta: Revisão de Literatura, Referencial Teórico-Metodológico, A Geometria Espacial - Poliedros de Platão, Percurso Metodológico, Sequência Didática, Análises e Discussão dos Resultados, Síntese das Análises e Considerações Finais.

1.1. Quem eu sou e a motivação da escolha do tema

Para o leitor conhecer um pouco da autora desta investigação e das suas motivações para construí-la, escolhi usar a primeira pessoa do singular nesta seção.

Primeiramente falarei um pouco de mim. Quem eu sou? Fruto de escola pública e rural, tive um Ensino Fundamental precário, mais especificamente do 1º ano, antiga alfabetização, ao 5º ano, antiga 4ª série. Ainda hoje carrego na memória as dificuldades daquela época: a sala de aula era multisseriada, sentava em bancos sem encosto e espaldar, os espaços para se sentar não era suficiente para todos os alunos, por isso todos sentavam amontoados com os braços colados ao corpo, o que na maioria das vezes dificultava a escrita. Além disso, era feito o rodízio do livro didático, pois não tinha livros suficientes para todos os alunos.

Apesar das dificuldades, eu aprendi a ler muito cedo e de certa forma fui punida por isso, pois a professora me colocava para cuidar das crianças mais novas da sala com a justificativa de que eu já sabia ler e que os meus colegas precisavam da atenção dela para aprender. Ainda pelo fato de já saber ler e com o julgamento de que os demais também precisavam aprender, a professora me dava sempre o livro de Matemática para levar para casa, pois, na visão dela, eu não precisava mais realizar a leitura no livro de Língua Portuguesa, na época, cartilha. Como eu não conseguia entender a linguagem matemática, a leitura não me atraia, daí ficava sempre decalcando as formas geométricas contidas no livro didático. Talvez esse episódio justifique a minha paixão pela geometria, em especial pela Geometria Espacial.

De estrutura familiar humilde, sou a quinta de oito irmãos e a única a cursar o ensino superior. Conclui a Licenciatura Plena em Matemática no ano de 2010 e, tão logo, fui aprovada no concurso para o cargo de professora da rede municipal de Brumado. Atualmente, exerço a função como professora de matemática em turmas de 7º ao 9º ano do ensino fundamental. Leciono ainda na rede particular de ensino com turmas de Ensino Médio. Em ambos os níveis de ensino que leciono e lecionei, é nítida a dificuldade dos alunos na compreensão da Geometria, em específico a Geometria Espacial. Sempre foi uma inquietação minha buscar meios que pudessem contribuir para a melhoria do ensino dessa disciplina.

A escolha pelos Sólidos de Platão surgiu a partir da observação como discente, principalmente em relação às dificuldades dos alunos quanto à visualização, cálculo de medidas de áreas e características presentes nesses sólidos. Assim, em 2022, entrei no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) em busca de qualificação e reflexão sobre a Matemática e seu ensino na Educação Básica e tive a oportunidade de realizar essa investigação. Procurei um recurso tecnológico gratuito, de fácil compreensão, que pudesse ser usado no celular e que pudesse contribuir significativamente para o ensino dos Sólidos de Platão. A Calculadora Gráfica GeoGebra 3D possui o recurso RA que permitiu o desenvolvimento da sequência didática por meio desse aplicativo.

Visando justificar a relevância desta investigação, o próximo capítulo aborda a revisão de literatura.

2. REVISÃO DE LITERATURA

A revisão de literatura, segundo Boaventura (2003, p.48 apud Campos, 2010), ilumina o problema e traz no confronto de ideias, novos enfoques, dados, informações e abre novos horizontes. Para Mattos, Rosseto Jr. & Blecher (2004, p.45 apud Campos, 2010),

> A revisão de literatura é a crítica do material bibliográfico que aborda os objetos de estudo da pesquisa. Deve-se analisar e contrapor as principais ideias dos autores consultados, salientando, contradições, divergências e semelhanças de pressupostos e conceitos relativos aos objetos estudados e, assim, discordar ou reafirmar as ideias desses autores sobre o tema alvo da pesquisa.

Nesta revisão, optou-se por analisar dissertações diponibilizadas na íntegra nas bases de dados da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nivel Superior (BDTD-CAPES), o Banco de Dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (BD-PROFMAT) e no Google Acadêmico, por entender que essas dissertações podem apresentar, de uma maneira mais aprofundada, as relações com este trabalho. Como não há teses na segunda base de dados, foram excluídas também as teses integrantes da primeira e terceira base por uma questão de equidade. Vale ressaltar que os artigos foram excluidos por enterder que apresentam conteúdos mais superficiais e resumidos e ainda muitos deles são decorrentes das dissertações já selecionadas para análise nesta dissertação.

Sendo assim, esta seção se constituiu de uma pesquisa de dissertações que abordaram o uso do aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D, no ensino de Geometria Espacial.

2.1 Buscas por dissertações

Conforme já pontuado na seção anterior, as pesquisas foram efetuadas no BDTD-CAPES, BD-PROFMAT e Google Acadêmico. Na realização das buscas, foram usadas as palavras-chave: **“GeoGebra 3D**", **“Geometria Espacial”**, **“Sólidos de Platão”**, **“Realidade Aumentada”** e combinações relevantes entre elas para filtrar as buscas: Realidade Aumentada e GeoGebra 3D; Realidade Aumentada e Geometria Espacial; Realidade Aumentada e Sólidos de Platão.

Na pré-análise, foram estabelecidos quatro critérios de exclusão para eleiminar trabalhos que não correspondiam ao objetivo principal desta pesquisa.

Os critérios de exclusão definidos foram:

- **Primeiro critério —** Trabalhos realizados há mais de cinco anos, ou seja, anteriores ao ano de 2018 para o BD-PROFMAT; trabalhos realizados há mais de três anos para o BDTD-CAPES, ou seja, anteriores a 2020; e trabalhos realizados há mais de dois anos para o Banco de Dados do Google Acadêmico, ou seja, anteriores ao ano de 2021;

  Este período cronológico foi definido por entender que as investigações produzidas no âmbito do PROFMAT aparecem em menor número, sendo necessário um escopo temporal mais ambrangente em relação ao BDTD-CAPES e Google Acadêmico.
- **Segundo critério —** Trabalhos em que não tem relação com a Geometria Espacial do Ensino Médio;
- **Terceiro Critério —** Trabalhos que não têm relação com o uso dos dispositivos móveis e o GeoGebra;
- **Quarto critério —** Trabalhos de pesquisa que não contemplam elaboração, implementação ou análises de sequências didáticas.

O Quadro 1 traz o quantitativo das dissertações encontradas utilizando as palavras-chave mencionadas anteriormente .

Quadro 1 - Quantitativo de dissertações encontradas

BASE	PALAVRA CHAVE	RESULTADOS
BD-PROFMAT	Realidade Aumentada	14
BD-PROFMAT	Geogebra 3D	11
BD-PROFMAT	Geometria Espacial	87
BD-PROFMAT	Sólidos de Platão	0
BD-PROFMAT	Realidade Aumentada e GeoGebra 3D	0
BD-PROFMAT	Realidade aumentada e Geometria Espacial	0
BD-PROFMAT	Realidade aumentada e Sólidos de Platão	0
BDTD-CAPES	Realidade Aumentada	2 967
BDTD-CAPES	GeoGebra 3D	30

BDTD-CAPES	Geometria Espacial	570
BDTD-CAPES	Sólidos de Platão	3
BDTD-CAPES	Realidade e Aumentada e GeoGebra 3D	13
BDTD-CAPES	Realidade Aumentada	164 000
GOOGLE ACADÊMICO	GeoGebra 3D	14 700
GOOGLE ACADÊMICO	Geometria Espacial	242 000
GOOGLE ACADÊMICO	Sólidos de Platão	6 560
GOOGLE ACADÊMICO	Realidade e Aumentada e GeoGebra 3D	681
GOOGLE ACADÊMICO	Realidade Aumentada e Geometria Espacial	15 000
GOOGLE ACADÊMICO	Realidade Aumentada e Sólidos de Platão	2 250

Fonte: Dados da pesquisa.

Devido ao número expressivo de dissertações encontradas com as buscas, foram utilizados os critérios de exclusão que permitiram eliminar as dissertações que não correspondiam ao objetivo das buscas.

Com a aplicação dos critérios de exclusão, restaram apenas sete dissertações, especificadas no Quadro 2.

Quadro 2 - Relação de dissertações selecionadas.

Base	Autores (ano)	Título	Instituição
BD-PROFMAT	DANTAS (2018)	Uso da Realidade Aumentada no ensino da Geometria Espacial.	UEPB
	ARAUJO (2023)	Tecnologias na Educação Matemática: o uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica no ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio. São Luís – MA, 2023.	UEMA
	SILVA (2018)	Geometria Espacial: uso do aplicativo GeoGebra em *smartphones.*	UFCAT
BDTD-CAPES	MEIRELLES (2020)	Metodologias Ativas no Ensino de Geometria Espacial com Aportes do Aplicativo Geogebra 3D e ferramentas do *m-learning.*	UNICSUL
	PAULA (2020)	Geometria Espacial: a aprendizagem através de diferentes recursos didáticos.	UFRRJ
	ALENCAR (2020)	GeoGebra e Materiais Manipuláveis: Recursos mediadores na organização do ensino de áreas dos sólidos geométricos no Ensino Médio.	FUESPI

GOOGLE ACADÊMICO	COSTA (2022)	Realidade Aumentada: Uma Proposta de Sequência Didática para o Ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio.	UCS

Fonte: Dados da pesquisa.

2.2 Análises das dissertações selecionadas

As análises dos trabalhos escolhidos foram feitas de modo individualizado, com ênfase nos objetivos, desenvolvimento do trabalho e principais resultados obtidos no estudo.

Dantas (2018) apresentou em seu trabalho um estudo sobre o uso de novas tecnologias no ensino da Matemática, mais especificamente, o uso de RA como ferramenta para auxiliar no ensino da Geometria Espacial. Ela desenvolveu um projeto com um grupo de 38 alunos do 3º ano do Curso Integrado de Informática do Campus Caicó do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN). Para o desenvolvimento do projeto, a autora usou a plataforma de desenvolvimento Unity, com capacidade de criar jogos 2D e 3D, e o Vuforia, um kit de desenvolvimento *software* (SDK) de RA, e o GeoGebra 3D com RA como uma ferramenta de apoio.

A exposição do conteúdo foi desenvolvida detalhando cada sólido geométrico em RA como forma de revisão, pois, segundo Dantas (2018), o conteúdo já havia sido trabalhado pelo professor regente da disciplina. Assim, os alunos tiveram a oportunidade de estabelecer um comparativo quanto a abordagem utilizada para a aprendizagem desses sólidos com e sem o uso do GeoGebra 3D e RA. Como instrumento de avaliação, Dantas (2018) utilizou um questionário abordando medida de área e volume de cone e pirâmide e observou-se que os alunos se mostraram envolvidos e surpresos com a novidade da tecnologia na exposição do conteúdo, concluindo que o projeto se apresentou como um recurso didático atrativo e que evidenciou um bom auxílio na aprendizagem dos alunos.

Nas considerações finais, a autora enfatizou que um dos fatores que chama a atenção na ferramenta tecnológica RA é o fato de apresentar vantagens não somente para o aluno como também para o professor no que se refere ao ensino e à aprendizagem, respectivamente. Entre essas vantagens, Dantas (2018) destacou a ferramenta como uma opção de recurso didático inovador que causa interatividade e dinamicidade aos conteúdos trabalhados pelos docentes. E, para os alunos, a possibilidade de eles mesmos serem os agentes criadores de seu próprio conhecimento, interação com o recurso didático, a facilitação de visualização em 3D em uma compreensão consistente das competências das quais se apropriam.

Araújo (2023) apresentou em seu trabalho uma proposta de ensino de Geometria Espacial com a utilização do *software* GeoGebra, visando avaliar o uso do GeoGebra como uma ferramenta pedagógica no ensino de Geometria Espacial. O autor realizou uma pesquisa de campo constituída por um grupo de 100 (cem) alunos da 3ª série do Ensino Médio e 3 (três) professores de matemática, do Centro de Ensino Dorgival Pinheiro de Souza, localizado em Imperatriz (MA).

A coleta de dados foi feita por meio de dois questionários aplicados para os alunos e um questionário para os professores. A partir dos dados produzidos, Araújo (2023) construiu uma sequência didática na qual explorou conteúdos de Geometria Espacial com o auxílio do GeoGebra 3D, entretanto o autor não utilizou a ferramenta RA na sua investigação. A investigação desse autor foi organizada em cinco oficinas em que foram trabalhado conteúdos de Geometria Espacial com o auxílio do GeoGebra.

Como principal resultado o autor constatou que com o uso do aplicativo GeoGebra 3D, os alunos mostraram empenho e engajamento na resolução das atividades, apresentando um desempenho satisfatório, e que, nesse aspecto, o uso do GeoGebra se mostrou uma ferramenta eficaz para a aprendizagem da Geometria Espacial.

Silva (2018) utilizou o *software* GeoGebra nas aulas de Geometria Espacial instalados em *smartphones* de um grupo de 35 alunos da 2ª série do Ensino Médio de um colégio público na cidade de Brasília (DF), na tentativa de minimizar o pouco interesse, dispersão, bagunça e baixo rendimento dos alunos nas aulas de matemática. No entanto, a sequência didática proposta pelo autor abordou os conceitos de Geometria Espacial de Posição sem utilizar a RA.

A sequência foi implementada em 14 aulas, denominadas pelo autor de oficinas. Como avaliação, foram desenvolvidos questionários acerca das atividades desenvolvidas durante cada um dos 14 encontros, os quais foram utilizados para verificar o nível de aprendizado alcançado pelos alunos.

Após análises, Silva (2018) relatou que o uso do GeoGebra nas aulas de matemática contribuiu para o aprendizado dos alunos significativamente, pois os alunos conseguiram visualizar as propriedades e definições abordadas com maior facilidade, compartilharam seus conhecimentos matemáticos e formularam suas respostas por escrito. Diante disso, o autor concluiu que os objetivos da atividade foram alcançados.

Meireles (2020) teve como objetivo analisar as contribuições da integração de tecnologia digital no ensino de Geometria Espacial, com uso do aplicativo GeoGebra 3D e aportes de *mobile learning* e *Problem Based Learning* (PBL). A autora não utilizou a ferramenta RA.

Realizou um estudo de caso com abordagem qualitativa e quantitativa numa turma de 35 alunos do 3º ano do Ensino Técnico integrado ao Médio do curso de Secretariado em uma escola técnica localizada na cidade de São Paulo.

A coleta e produção de dados foi feita por meio da aplicação de questionário, e os dados obtidos foram analisados pela autora em consonância com a Análise de Conteúdo elaborada pelo método PBL e ampliação da compreensão do objeto de estudo proposto na investigação.

Os resultados revelaram que os estudantes reconheceram as contribuições do uso do aplicativo GeoGebra 3D no processo de aprendizagem em Geometria Espacial. Além disso, eles mostraram desenvoltura na resolução dos problemas propostos e se manifestaram favoráveis ao uso de metodologias que valorizam a construção do conhecimento em contextos problematizados e contextualizados.

Dessa forma, Meireles (2020) concluiu que a investigação com o uso do aplicativo GeoGebra 3D no aprendizado de Geometria Espacial possibilitou maior envolvimento dos alunos ao longo do percurso. E também que as atividades foram desenvolvidas em uma nítida evolução na assimilação da temática do estudo, constatando que o GeoGebra 3D contribuiu para a eficácia do processo de aprendizagem.

Paula (2020) trouxe como objetivo de seu trabalho apresentar um possível caminho para o desenvolvimento da habilidade de visualização e verificar de que forma esses recursos poderiam auxiliar no desenvolvimento do pensamento Geométrico Espacial no Ensino Médio, em uma perspectiva de aprendizagem significativa.Com a justificativa de que a habilidade de visualização é o ponto de partida para os processos de ensino e de aprendizagem de Geometria, a autora propôs apoios didáticos em materiais manipulativos concretos (sólidos geométricos) e visuais (GeoGebra 3D), porém sem utilizar a ferramenta RA.

A investigação apresentou um viés interdisciplinar envolvendo as disciplinas de Artes e História. Os sujeitos de pesquisas foram alunos de uma turma de 2º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual João Kopke, em Engenheiro Paulo de Frontin (RJ). As atividades elaboradas abordavam artes geométricas para revisar conceitos de Geometria Plana, eram baseadas na construção de maquetes inspiradas nas obras de Oscar Niemeyer. Segundo a autora, o uso de maquetes e artes geométricas trouxe significado para o estudo da Geometria, pois, a manipulação dos sólidos geométricos auxiliou no desenvolvimento da visualização, bem como o GeoGebra trouxe inovação, estimulando a aprendizagem.

Como produto dessa pesquisa, foi elaborada uma sequência didática composta de atividades diversificadas, segundo as fases metodológicas propostas pela Engenharia Didática, segundo Artigue (1988 apud Paula, 2020). A autora relatou que o principal desafio encontrado foi a dificuldade pela falta de hábito dos alunos em expor as ideias e conceitos construídos ao longo do processo; estabelecer relações entre as representações bidimensionais e tridimensionais; e em construir e manipular os sólidos geométricos nos *smartphones* devido à tela pequena. Finalizando, a autora concluiu que o uso do GeoGebra nas atividades desenvolvidas tiveram resultados eficazes no processo de aprendizagem da Geometria Espacial.

Alencar (2020) teve como propósito investigar como os recursos tecnológicos poderiam mediar a organização do ensino de medidas de área de sólidos geométricos no Ensino Médio. O autor desenvolveu uma pesquisa de campo com 21 alunos do 3º ano do Ensino Médio da rede pública na cidade de Carolina–MA. Ele realizou a pesquisa exploratória visando explicitar o problema, envolvendo levantamento bibliográfico e documental, sendo que a análise dos resultados foi obtida com os questionários dos alunos que tiveram contato com os recursos mediadores. Segundo o autor, a análise de dados mostrou a importância de utilizar recursos que permitam aos alunos a visualização tridimensional e a manipulação de materiais concretos nos processos de ensino e de aprendizagem.

Costa (2022) teve como objetivo fundamentar o Produto Educacional elaborado e criado na forma de uma sequência didática para o desenvolvimento do ensino da Geometria Espacial. O autor utilizou o GeoGebra Calculadora 3D com o recurso da RA como ferramenta tecnológica para a sequência didática proposta, a qual foi direcionada a alunos do Ensino Médio. No entanto, o produto educacional criado por Costa (2022) não passou pela fase de experimentação, inviabilizando as análises para validação do produto.

Por meio desta revisão foi constatado que a maioria dos autores abordaram tópicos de Geometria Espacial para estudantes do Ensino Médio, explorando o GeoGebra 3D, sem utilizar a ferramenta RA. Esse fato pode ser compreendido como uma lacuna a ser preenchida com novas investigações. Ainda com relação ao GeoGebra 3D, as pesquisas apontaram que o uso desse *software* pode contribuir para a construção do conhecimento relativo a objetos da Geometria Espacial.

Constatou-se também que há uma preocupação da comunidade da Educação Matemática quanto a necessidade de implementar na sala de aula do Ensino Médio, ferramentas que possibilitem aos alunos visualizar os objetos estudados na Geometria Espacial, tendo em vista que, a visualização pode permitir uma melhor compreensão dos conteúdos e conceitos desses objetos. Assim, é consenso nas pesquisas analisadas que o uso do GeoGebra pode contribuir para essa visualização e consequente, compreensão de tais conceitos e conteúdos.

Costatou-se ainda, que a sequência didática foi um recurso que apareceu em quase todas as pesquisas analisadas o que, de certa forma, indica que uma sequência didática pode ser vista como um recurso positivo para os processos de ensino e de aprendizagem de objetos matemáticos.

Por fim, foi perceptível que os Sólidos de Platão não foram investigados nas pesquisas analisadas nesta revisão de literatura, embora esses sólidos são assunto integrante da Matemática como componente curricular do Ensino Médio.

Isso posto, considerou-se que a investigação, aqui produzida, fica justificada tendo em vista que aborda os Sólidos de Platão, por meio de uma sequência didática desenvolvida com o uso do GeoGebra 3D, com ênfase na ferramenta RA, para a aprendizagem desses sólidos por estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

No próximo capítulo, há fundamentação teórica que sustentou esta investigação.

3. REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO

Este capítulo aborda o referencial teórico-metodológico desta pesquisa. Assim, traz algumas ideias da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), enfatizando o que foi utilizado nesta pesquisa; seguido de uma seção que fala sobre a utilização das tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem; outra seção sobre a RA no Ensino de Objetos Matemáticos; e, por fim, a Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com o recurso RA.

3.1. Ideias da Teoria dos Registros de Representação Semiótica utilizada nessa pesquisa

Algumas ideias da *Teoria dos Registros de Representação Semiótica* (Duval, 1993) foram utilizadas nesta pesquisa como referencial teórico. Essa teoria subsidia pesquisas e trata dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática com ênfase na forma como o estudante aprende, ou seja, no desenvolvimento cognitivo do pensamento humano em relação à aprendizagem de conteúdos matemáticos. Foi desenvolvida, principalmente, pelo filósofo e psicólogo Raymond Duval.

Conforme o minidicionário da língua portuguesa, o Mini Aurélio, semiótica é um substantivo feminino, etimológico de semiologia, que significa ciência geral dos signos dos sistemas de significação.

São os registros semióticos importantes para o aprendizado, tendo em vista que se constitui o sistema de comunicação com formas específicas de representar um objeto matemático, pois esses objetos não são passíveis de percepção imediata, ou seja:

> Os conceitos e conteúdos de matemática são abstrações desencadeadas por processo de generalização, com a necessidade de Representações semióticas para que ocorra uma verdadeira apreensão e evolução do pensamento matemático. Nesse sentido se faz necessário significar as representações semióticas de um objeto. (Lopes, 2021 p.89).

Segundo Duval (2012), um objeto matemático pode ser representado utilizando os Registros de Representação Semiótica. Antes de definir o que são esses registros, vale ressaltar que “[…] um signo, ou representação é algo que está para alguém com alguma finalidade e em relação a algum aspecto ou capacidade” (Duval, 2011, p. 160). Nesse sentido, Registros de Representação Semiótica são:

> Produções constituidas pelo emprego de signos pertencentes a um sisteam

> de representação que tem inconvenientes próprios de comunicação e fundamentos. Uma figura geométrca, um enunciado em língua natural, uma forma algébrica, um gráfico, são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. [...]. As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para a atividade cognitiva do pensamento. (Duval, 2012 p. 269).

Segundo Duval (2012), o uso de Representações Semióticas no processo de aprendizagem matemática é expresso por meios de Registros com intuito de permitir a construção do conhecimento. Nesse sentido, esses Registros são elementos da Matemática.

Os trabalhos de Duval (2012) se pautam na aprendizagem matemática, por meio de Registros de Representações Semióticas em uma abordagem cognitiva que analisa as dificuldades encontradas na aprendizagem da Matemática e o funcionamento cognitivo peculiar dessa ciência, considerando o modo de acesso aos seus objetos, a variedade de sistemas semióticos que permitem representá-los e a necessária distinção entre o objeto matemático e a sua representação. Segundo Duval (2009), para o sujeito se apropriar do objeto, ele precisa representar de alguma forma.

Duval (2012) considera que o ensino da matemática tem por fim contribuir com o desenvolvimento das habilidades de raciocínio, análise e visualização, e que essas habilidades estão relacionadas ao uso de Representações Semióticas. Dessa forma, o autor considera que, quando um aprendiz reconhece um objeto matemático por meio de Representações Semióticas distintas, ele consegue diferenciar o objeto matemático de sua representação, o que é fundamental para a compreensão dos conceitos e conteúdos ligados a esse objeto. Isso quer dizer que a aprendizagem desse objeto matemático está associada à competência do estudante em relacionar os diferentes Registros desse objeto e, ainda, que a comunicação matemática é determinada a partir dessas representações.

Duval (2009) enfatiza que um sistema semiótico, é composto de três atividades cognitivas fundamentais: as operações cognitivas de formação de uma representação identificável, que permitem a identificação do objeto matemático representado; os tratamentos, os quais são operações realizadas em um mesmo registro de um sistema semiótico; e as conversões, ou seja, operações que permitem a transição entre Registros Semióticos diferentes.

Representações Semióticas são produções formadas com o uso de regras de sinais, sinais esses diversos, a depender do sistema nos quais estão inseridas. É uma forma de exteriorizar abstrações mentais que o homem foi criando ao longo da história, de modo que os seus pares entendam, por meio do símbolo, o pensamento do interlocutor. Por exemplo: as placas de trânsito que representam movimentos permitidos ou proibidos, bem como as demais ações próprias do trânsito, que ao serem visualizadas, fazem com que os iniciados dentro desse sistema entendam as ações que devem tomar.

Registros são os sistemas propriamente ditos, no qual as representações se subdividem. Tomando o exemplo das regras do trânsito, as placas vêm do registro de figuras. A seleção de algumas dessas figuras, em detrimento de outras, cria as Representações de Placas de Trânsito. Entre os registros, têm-se o Matemático, Figural e Textual para cada idioma (Duval, 2023).

Tratamentos são as transformações de uma representação em outra representação em um mesmo registro; essas motivadas por um problema, uma questão ou uma necessidade, que em si mesmas já dispõem de um critério de parada no qual quem a realiza sabe que chegou ao resultado obtido. Por exemplo: uma expressão numérica de números inteiros, na qual o resultado será também um único número inteiro (critério de parada), e as operações realizadas são o processo de transformação. Na matemática, o termo cálculo abarca essas transformações ocorridas em um mesmo sistema. Ainda como exemplos no campo textual, tem-se a paráfrase, a qual é o equivalente a transformações textuais, e na geometria há a rotação, translação e/ou reflexão, que tem o nome de simetrias, na qual no problema original haverá de modo explícito a transformação a si realizar. (Duval, 2023)

Conversão é a transformação de uma representação em um registro em uma representação em outro registro. Sobre outros nomes para a Conversão, comuns à literatura, Duval aponta:

> As operações que designamos habitualmente pelos termos “tradução”, “ilustração”, “transposição”, “interpretação”, “codificação”, etc. são operações que a uma representação de um registro dado fazem corresponder uma outra representação num registro diferente (Duval, 2023, p. 59, grifos do autor).

Para o processo de conversão ser feito com êxito, é necessário haver compreensão sobre as diferenças entre sentido e símbolos ou signos usados para representá-lo.

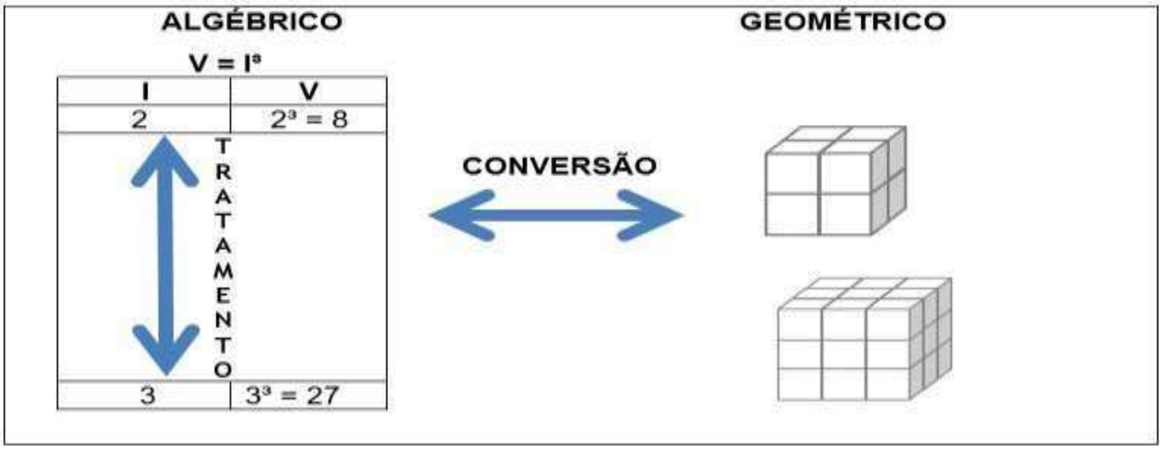
Duval (2009, p.39) afirma que: “o funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros de representações semióticas”. Isso porque, do ponto de vista cognitivo, nenhuma representação é completa em relação ao objeto que representa, ou seja, cada representação revela um determinado conceito, uma determinada propriedade, enfim, uma diferente característica.

Duval (2023) defende que o aprendizado do aluno em matemática acontece quando o aluno consegue fazer, além das operações de tratamento em um mesmo registro de representação semiótica, a conversão de uma representação nesse registro para pelo menos outra em outro registro.

No entanto, a passagem de uma representação em um registro para uma representação em outro registro ou a mobilização simultânea de vários registros de representação no decorrer do mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não são evidentes ou espontâneos para a maioria dos estudantes. Frequentemente eles não reconhecem o mesmo objeto através das representações que lhe podem ser dadas em sistemas semióticos diferentes (Duval, 2009).

Nesse sentido, é necessário entender as atividades cognitivas, formação, tratamento e conversão, para compreender como ocorre a construção de um conceito matemático por meio da mobilização e coordenação dos registros de representação semiótica. Na Figura 1 há um exemplo de um tratamento acompanhado de uma conversão.

Figura 1 - Tratamento acompanhado de uma conversão.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 1, na fórmula para o cálculo da medida de volume, é feito o processo de tratamento na fórmula substituindo l pelos valores numéricos do conjunto l = {2,3}, que designa as medidas das arestas dos cubos. Em seguida, é feita a conversão para Registro Geométrico, no qual as figuras representam cubos de arestas $l = 2$ e $l = 3$, em que $V = 8\ u.v$ (unidades de volume) e $V = 27\ u.v$.

Nessa investigação, foi elaborada e aplicada uma sequência didática, analisada segundo as ideias da TRRS aqui apontadas. Esta análise é apresentada nesta tese no capítulo 7.

Na próxima seção, é discutido como são empregadas as Tecnologias Digitais nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática.

3.2. Utilização de Tecnologias Digitais no ensino e na aprendizagem da Matemática

As Tecnologias Digitais (TD), vistas como um recurso metodológico utilizado nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, influenciam a prática docente e o modo de estudo dos alunos em todo o mundo.

Incorporar ao trabalho docente novas formas de comunicação, maneiras inovadoras de explorar conteúdos e suas aplicações através das TD podem trazer um ganho significativo no que concerne ao ensino e à aprendizagem de maneira geral. Porém, vale ressaltar que a utilização de recursos tecnológicos como *smartphones*, vídeos, televisões, computadores, dentre outros, não garantem melhoria no aprendizado e muito menos um ensino de qualidade. É preciso, além disso, que o professor faça um bom planejamento e tenha conhecimentos da tecnologia escolhida, para os recursos serem utilizados com eficácia em sua prática pedagógica, a fim de obter resultados satisfatórios.

Reforçando estes argumentos, Kenski (2007) descreve que:

> Para que as TIC possam trazer alterações no processo educativo, no entanto, elas precisam ser compreendidas e incorporadas pedagogicamente. Isso significa que é preciso respeitar as especificidades do ensino e da própria tecnologia para poder garantir que o seu uso, realmente, faça diferença. Não basta usar televisão ou o computador, é preciso saber usar de forma pedagogicamente correta a tecnologia escolhida (Kenski, 2007 p. 46).

Nesse cenário, a abordagem adotada pelo professor, bem como o ambiente em sala de aula, deve apontar para situações interativas e significativas de aprendizagem. A inserção das TD, no que diz respeito ao ensino da Matemática, pode contribuir para o entendimento dos conceitos matemáticos e sua assimilação, além disso, possibilitar o interesse dos alunos e desafiar a sua atividade mental e as capacidades intelectuais.

Isso posto, há na subseção abaixo a RA como uma aliada da aprendizagem utilizada neste estudo.

3.3. Realidade Aumentada

É necessário, primeiramente, diferenciar Realidade Aumentada e Realidade Virtual, termo com o qual o estudante está mais habituado. Essa última visa trazer o usuário para o mundo virtual, condicionando suas interações dentro desse ambiente. A RA é definida como:

> [...] inserção de objetos virtuais nos ambientes físicos que são apresentados aos usuários, em tempo real, com o apoio de um dispositivo tecnológico [...] que utiliza como interface o ambiente real. Assim, a inserção dos objetos virtuais no espaço físico pode ocorrer pela captura, com uso da câmera do dispositivo, da imagem de um marcador que é processada na aplicação instalada e, posteriormente, exibe um modelo tridimensional, vídeo ou imagem previamente associada ao marcador na tela do dispositivo ou a partir da localização geográfica do usuário, liberando informações conforme os dados de localização. (Kirner; Kirner, 2008 apud Ribeiro; Guterres; Silveira, 2020 p. 43).

A RA não transporta o usuário para o ambiente físico, mas traz o ambiente virtual para interagir com o espaço físico, mediante aparelhos eletrônicos (câmeras e telas) para mediar essa interação. (Tori; Kirner; Siscoutto, 2006).

Como detalham Tori, Kirner e Siscoutto (2006, p. 20–21), a “realidade aumentada possui um mecanismo para combinar o mundo real com o mundo virtual; mantém o senso de presença do usuário no mundo real; e enfatiza a qualidade das imagens e a interação do usuário”.

Sobre os seus benefícios, Carvalho e Liao (2020) apontam que:

> A realidade aumentada é um recurso inovador com grande potencial para sanar as dificuldades de abstração do aluno, uma vez que possibilita manipular e simular a visualização de objetos virtuais tridi-mensionais integrados à sua percepção sensorial do ambiente real. Com isso, torna possível a imersão e interação do aluno de maneira natural, ao passo que o aproxima de seus hábitos cotidianos (Carvalho; Liao, 2020, p. 04).

Assim, uma característica das atividades com RA é a manutenção do sentimento de pertença do usuário ao ambiente real, vista como um aperfeiçoamento ou suplementação do mundo físico, com suas ações acontecendo em tempo real, devendo envolver um ou mais sentidos (visão, olfato, tato, paladar, audição).

A Realidade Aumentada traz consigo definições, como aponta Azuma (2001, apud Carolei e Tori, 2014), que definem os 3 requisitos da RA:

> r1: integrar elementos virtuais, gerados por tecnologia computacional, a um ambiente real (ou integrar elementos reais a ambientes virtuais);
> r2: ser interativo e responder em tempo real;
> r3: prover registro, em três dimensões, entre elementos reais e virtuais, ou seja, as posições espaciais dos elementos virtuais devem ser bem definidas e consistentes com o ambiente real;
> (Azuma, 2011 apud Carolei; Tori, 2014. p. 26).

Não é toda a sobreposição que atende r3, uma vez que, ao estar ligada a algo, a imagem precisa estar associada a ele. Por exemplo, plataformas de jogos *Role Playing Games*[1] - *RPG*, atualizadas com aplicações de RA para simular o ambiente físico, em que jogadores usam *smartphones* para interagir com personagens virtuais situados em locais físicos próximos a si, como no jogo Pokémon Go. Assim, os personagens virtuais estão relacionados ao ambiente onde o usuário se encontra.

Realidade Virtual e RA podem interagir em diferentes nuances a depender do objetivo de uma ação e dos aparelhos envolvidos nela, pendendo ora mais para o Virtual, ora mais para a Aumentada. A essas situações é dada a nomenclatura de Realidade Misturada, na qual aspectos de ambientes físicos e virtuais se misturam com muita frequência. Como definem Tori, Kirner e Siscoutto (2006, p. 20–21): “A realidade misturada pode ser definida como a sobreposição de objetos virtuais tridimensionais gerados por computador com o ambiente físico, mostrada ao usuário, com o apoio de algum dispositivo tecnológico, em tempo real.”

O que é dito pelos autores se aplica diretamente sobre parte das atividades desenvolvidas neste trabalho na aplicação da Sequência Didática em sala de aula, pois grande parte do trabalho se deu com a inserção de objetos virtuais no ambiente físico. Todavia, neste trabalho segue a linha mais geral que trata todas essas

[1] Pode ser traduzida para Jogo de Interpretação de Papéis.

situações como RA.

A RA pode ter características imersivas, quando ao visualizar em direção às posições reais, vê o mundo misturado mediado por tela ou dispositivo óptico, em que os objetos virtuais surgem também na mesma tela juntamente com os objetos físicos. Quando as posições reais não estão alinhadas, há uma RA de visão indireta, denominada não-imersiva.

Para os processos de ensino e de aprendizagem, o uso da RA *Webcams* e telas de computadores têm sido substituídos por *smartphones* graças à sua mobilidade, unindo no único dispositivo, tela, câmera e áudio. Os aplicativos compatíveis com *smartphones* permitem oportunidades ímpares para o ensino de Geometria, por dispensarem a necessidade de recursos físicos. Entre suas vantagens, Ribeiro, Guterres e Silveira (2020) afirmam:

> O movimento com o objeto virtual, mesmo que não seja tátil, propriamente dito, existe enquanto manipulação do dispositivo móvel e do marcador do objeto virtual, manifestando uma resposta imediata às ações do usuário que podem ser visualizadas no display do dispositivo. Perceber como as formas se comportam é um elemento fundamental para a aprendizagem de geometria espacial, afinal, ver o porquê e como ocorrem os cálculos com base nas experiências reais e conhecidas [...] podem tornar a aprendizagem mais significativa (Ribeiro; Guterres; Silveira, 2020, p. 46-47).

Especificamente sobre o Ensino de Geometria e a RA, os autores supracitados afirmam que a:

> Geometria Espacial pode utilizar da RA para exemplificar ações através do uso de recursos familiares aos indivíduos, como embalagens, monumentos, elementos do cotidiano, como a rampa de acesso descrita acima, além de outros objetos que podem ser construídos tridimensionalmente e transportados para a sala de aula, auxiliando no ensino de geometria espacial, através do uso da RA (Ribeiro; Guterres; Silveira, 2020, p. 54).

Assim, o próprio espaço físico da escola, da casa do estudante, aparelhos públicos ou pontos turísticos da cidade podem ser cenários para o uso da RA, analisando a geometria presente em cada ambiente.

3.4. Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com o recurso Realidade Aumentada

"A Geometria Dinâmica (GD) (...) é a Geometria proporcionada por programas gráficos que, numa área de desenho, permitem construções geométricas a partir de objetos-base que atualizam automaticamente as construções (...)". (Cattai; Santos, 2010, p. 31).

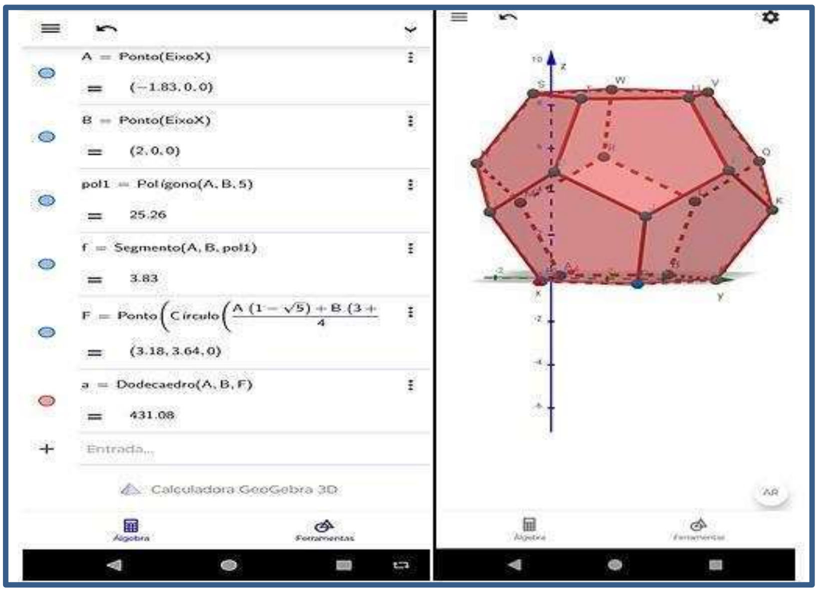
Diferentemente do que ocorre com a régua e o compasso, um *software* de GD é interativo e permite simular construções geométricas no computador, tornando o programa excelente no processo de ensino e de aprendizagem da geometria, pois:

> [...] os ambientes de geometria dinâmica são uma excelente oportunidade para que atividades investigativas sejam elaboradas, pois o modo arrastar – uma das principais características desse tipo de programa – permite ao aluno criar e também testar as próprias conjecturas (Silva, 2016, apud, Silva; Jesus 2022. p. 253).

Disponível para computador e *smartphone*, a Calculadora Gráfica GeoGebra 3D é um *software* gratuito de GD que reúne recursos de Geometria, permitindo uma maior facilidade no uso de suas ferramentas, particularmente nas construções de sólidos geométricos. Além disso, esse *software* tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas janelas de representações diferentes de um mesmo objeto matemático que interagem entre si: a janela geométrica e a janela algébrica.

Observa-se na Figura 2 que, em uma janela, há o desenho do dodecaedro e, na outra, as suas informações algébricas.

Figura 2 - As duas janelas da calculadora Gráfica GeoGebra 3D.

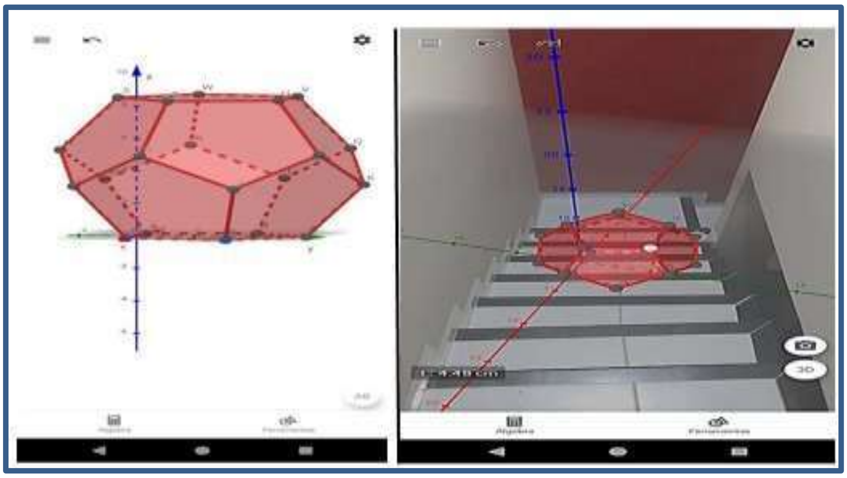


Fonte: Dados da pesquisa.

Outra vantagem didática do *software* Calculadora Gráfica GeoGebra 3D, é o recurso RA que promove aulas mais dinâmicas com a inserção de objetos virtuais no ambiente físico, permitindo sobrepor elementos virtuais à visão da realidade.

A Figura 3 mostra uma janela onde há o desenho do dodecaedro na tela do *smartphone* e, na outra, a sua representação no ambiente físico por meio da RA.

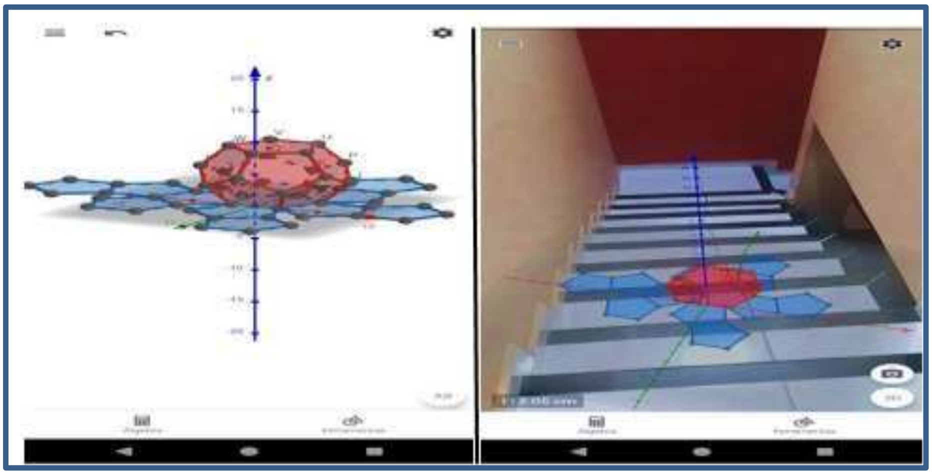
Figura 3 - As duas representações do sólido: ambiente virtual e ambiente real.



Fonte: Dados da pesquisa.

Dentre tantas outras funcionalidades, esse *software* possibilita visualizar o sólido em sua forma planificada, tanto no mundo virtual quanto no ambiente físico, como mostra a Figura 4.

Figura 4 - As duas representações da planificação do sólido: ambiente virtual e ambiente real.



Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, a Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com RA, quando usada corretamente, pode ser um recurso tecnológico importante na contribuição da melhoria do ensino e da aprendizagem de conteúdos matemáticos.

4. A GEOMETRIA ESPACIAL – POLIEDROS DE PLATÃO

Um dos primeiros registros de estudo do problema da Duplicação do Cubo vem do Período Clássico da História Grega, com ares mitológicos, e sua motivação foi originada do descontentamento do mítico rei Minos com o tamanho do túmulo do seu filho Glauco, no qual ele ordenou a duplicação. Isso fez com que o poeta grego Eurípedes orientasse Minos, incorretamente, que a duplicação poderia ser feita dobrando cada uma das dimensões do túmulo. Esse erro matemático que ele cometeu levou os geômetras a se dedicarem ao problema de como duplicar o volume de um dado sólido mantendo sua forma. (Eves, 2011).

Segundo outra versão para este mesmo problema, dizem que os delianos, povos que viviam na cidade de Delos, foram orientados por seu oráculo a dobrar o tamanho do altar cúbico de Apolo para se livrarem de uma peste que os castigava. O problema caiu nas mãos de Platão, que o submeteu aos geômetras a fim de que a solicitação fosse atendida. Essa foi a última história da qual se tem notícia e que fez com que o problema da duplicação do cubo fosse mencionado frequentemente. Verdadeira a história ou não, o fato é que o problema foi estudado na Academia de Platão, e há soluções geométricas superiores atribuídas a Eudoxo, Menaecmo e ao próprio Platão, embora talvez soluções errôneas (Eves, 2011, p. 135).

Eves (2011) fala da importância de Platão na construção de relações de uma ágora matemática:

> Platão nasceu em Atenas (ou perto) em 427 a.C., o ano da grande peste. Depois de estudar filosofia com Sócrates ali mesmo, saiu pelo mundo, em longa jornada, à procura do saber. Estudou matemática com Teodoro de Cirene nas costas da África e tornou-se amigo íntimo de Arquitas. Depois de seu retorno a Atenas por volta de 387 a.C., fundou sua famosa Academia, uma instituição orientada por propósitos sistemáticos de investigação científica e filosófica (Eves, 2011. p. 131).

A Academia, como era denominada a escola fundada por Platão, rendeu quase tanta notoriedade para o fundador quanto as suas maiores descobertas e escritos, em termos de contribuições para o desenvolvimento da Matemática. Devido às interrelações estabelecidas entre eminentes matemáticos da época na Academia, a ele é atribuída a frase: “Que aqui não adentrem os não versados em Geometria”. Entre os matemáticos relacionados a Platão estão Eudoxo, Menaecmo, Dinostrato, Teeteto; e dentre os escritos de Platão, a obra Diálogos é considerada uma de suas maiores contribuições científicas (Eves, 2011).

Segundo Eves (2011), um dos problemas que originaram a Geometria Espacial foi o problema da duplicação do cubo. No entanto, historicamente, Eves (2011) ressalta que não foi possível precisar o período no qual essa Geometria foi de fato desenvolvida. Um dos registros mais antigos surge nos Elementos de Euclides (Sec. III a.C.):

> Há um início de tratamento matemático desses sólidos no Livro XIII dos Elementos de Euclides. O primeiro escólio desse livro observa que se "irá tratar dos sólidos de Platão, assim chamados erradamente, porque três deles, o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos pitagóricos, ao passo que o octaedro e o icosaedro se devem a Teeteto". É bem possível que isso corresponda aos fatos (Eves, 2011. p. 61).

Foi atribuído a Platão o estudo primário dos sólidos, hoje conhecidos como Sólidos de Platão ou Poliedros Regulares. Um poliedro é regular se suas faces são polígonos regulares congruentes e se seus ângulos poliédricos são todos congruentes (Eves, 2011).

Euclides prova, na última proposição do livro XIII dos Elementos de Euclides, que os poliedros regulares são apenas cinco: o tetraedro, o cubo, octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

Teorema: Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

Demonstração: Seja n o número de lados de cada face, seja p o número de arestas que concorrem em cada vértice, seja *A* o número total de arestas, seja *V* o número total de vértices e seja *F* o número total de faces. Tem-se, então:

$$2A = nF = pV, \text{ ou } A = \frac{nF}{2} \text{ e } V = \frac{nF}{p}$$

Substituindo na relação de Euler, obtém-se:

$$\frac{\mathrm{nF}}{\mathrm{p}} - \frac{nF}{2} + F = 2$$

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}$$

Por condição de existência, para que a igualdade seja verdadeira, deve-se ter:

$$2p + 2n - pn > 0$$

Ou seja:

$$\frac{2n}{n-2} > p$$

Como $p \geq 3$, tem-se $n < 6$. Desse modo, têm-se as seguintes possibilidades:

$$\mathbf{n = 3} \rightarrow \mathrm{F} = \frac{4\mathrm{p}}{6-\mathrm{p}} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{p} = 3 \rightarrow \mathrm{F} = 4\ (\text{tetraedro}) \\ \mathrm{p} = 4 \rightarrow \mathrm{F} = 8\ (\text{octaedro}) \\ \mathrm{p} = 5 \rightarrow \mathrm{F} = 20(\text{icosaedro}) \end{cases}$$

$$\mathbf{n = 4} \rightarrow \mathrm{F} = \frac{2\mathrm{p}}{4-\mathrm{p}} \rightarrow \mathrm{p} = 3 \rightarrow \mathrm{F} = 6(\text{cubo})$$

$$\mathbf{n = 5} \rightarrow \mathrm{F} = \frac{4\mathrm{p}}{10-3\mathrm{p}} \rightarrow \mathrm{p} = 3 \rightarrow \mathrm{F} = 12(\text{dodecaedro})$$

(Adaptado de Muniz Neto, 2022, pp. 317-318).

Conclui-se, dessa forma, que não existem poliedros regulares para n inteiro maior que 5, no sentido da definição acima.

O Tetraedro, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro e Hexaedro são as formas encontradas com maior frequência na natureza. Aparecem em forma de cristais de elementos como sulfoantimoneto de sódio, sal comum e alúmen. Em Timeu (360 a.C.), obra de Platão, ele atribuía aos sólidos regulares, com exceção do Hexaedro, ares de misticismo envolvendo relações desses sólidos com a natureza, algo muito comum à época, como também os Pitagóricos faziam com os números inteiros. Eves (2011) afirma que, nos estudos de Platão:

> [...] Timeu misticamente associa os quatro sólidos mais fáceis de construir — o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o cubo — com os quatro —elementos primordiais empedoclianos de todos os corpos materiais — fogo, ar, água e terra. Contornava-se a dificuldade embaraçosa em explicar o quinto sólido, o dodecaedro, associando-o ao Universo que nos cerca (Eves, 2011, p.114).

Para além do misticismo, muito foi construído na primavera da matemática grega (Período Clássico) acerca do tema. Os Poliedros Regulares, embora tenham definições gerais, têm características próprias, podendo ser definidos do seguinte modo:

- Tetraedro regular — figura geométrica espacial formada por quatro triângulos equiláteros (triângulos que possuem lados com medidas iguais) com 4 vértices, 4 faces e 6 arestas;

- Octaedro regular — poliedro formado por 12 arestas, 6 vértices e 8 faces que possuem o formato de um triângulo equilátero;
- Dodecaedro regular — poliedro platônico constituído por 12 faces pentagonais regulares, 20 vértices e 30 arestas;
- Icosaedro regular — poliedro formado por 30 arestas, 12 vértices e 20 faces no formato de um triângulo equilátero;
- Hexaedro regular — poliedro formado por 12 arestas, 8 vértices e 6 faces no formato quadrangular. O hexaedro também pode ser denominado de cubo.

Na atualidade, o estudo dos poliedros tem sua importância em razão de suas propriedades serem aplicadas em vários ramos de estudos e pesquisas, como arquitetura, engenharia e artes. Na indústria das embalagens, por exemplo, as formas dos poliedros são consideradas para acondicionar seus produtos, estabelecendo uma melhor relação entre custo e benefício.

Nesse estudo, o objeto matemático escolhido foram os Sólidos de Platão e têm lugar central na sequência didática elaborada e analisada.

5. PERCURSO METODOLÓGICO

Este capítulo trata do percurso metodológico utilizado para o desenvolvimento desta pesquisa. Com esse fim, há aqui a caracterização do tipo de pesquisa, o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida, os sujeitos de pesquisa, além da forma como os dados foram produzidos.

5.1. Caracterização do tipo de pesquisa

Este trabalho com abordagem qualitativa, foi elaborado a partir da implementação de uma sequência didática construida para o estudo dos sólidos de Platão com o uso do GeoGebra 3D. Pois é caracterizado, conforme aponta Minayo, (2001, p. 22), como uma "[...] pesquisa qualitativa se preocupa com o nível de realidade que não pode ser quantificado, ou seja, ela trabalha com o universo de significados, de motivações, aspirações, crenças, valores e atitudes".

5.2. Contexto onde a pesquisa foi desenvolvida

O trabalho foi desenvolvido no âmbito de uma escola de rede privada de ensino localizada em Brumado–BA. Nessa escola atende as etapas de formação básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Todos funcionam no turno matutino, exceto, o 5º ano do Ensino Fundamental I e o Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano), que acontecem no turno vespertino.

Quanto a escolha desta escola, ela justifica-se no fato de que a implementação da sequência didática aconteceu ao final do ano letivo de 2023 e havia falta de disponibilidades dos professores de instituições públicas em ceder os horários de suas aulas em virtude do comprometimento do fechamento dos conteúdos, e ainda a autora desta dissertação é docente nessa escola.

5.3. Sujeitos de pesquisa

O trabalho foi desenvolvido com 17 alunos do 2º ano do Ensino Médio regular, com idades entre 15 e 17 anos. Todos devidamente matriculados no ano de 2023 e com boa frequência escolar.

A escolha desses sujeitos considerou o objeto de estudo deste trabalho, Sólidos de Platão que é especifico da componente curricular do ano em que estão nessa escola.

5.4. Produção de dados

Os dados foram produzidos por meio de questionários desenvolvidos durante a implementação das atividades; de capturas de telas dos *smartphone* dos discentes durante a realização das atividades; da observação e análise da professora pesquisadora em relação ao desenvolvimento das aulas e engajamento dos alunos; dos vídeos produzidos pelos alunos e, por fim, do registro de material impresso a eles distribuido.

6. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este capítulo apresenta a sequência didática utilizada para a produção deste trabalho. Aqui foram descritos o processo de elaboração da Sequência Didática e os procedimentos utilizados na sua implementação.

6.1. Sobre a Sequência Didática

Uma “Sequência Didática é um conjunto de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem [...]” (Artigue, 1988, p. 157). Nesta dissertação, foi elaborada uma sequência didática voltada para a aprendizagem dos Sólidos de Platão.

Para a elaboração da sequência, considerou-se que cabe ao professor, proporcionar ambientes de aprendizagem para os estudantes, buscando metodologias e recursos didáticos que trarão benefícios aos processos de ensino e de aprendizagem dos conteúdos e conceitos abordados em uma disciplina, bem como compreender como o estudante aprende tendo em vista que “do ponto de vista cognitivo, é necessário entender como o estudante percebe, compreende, lembra, pensa, transforma e aplica um conhecimento matemático.” (Souza, 2022, p.94)

Nesse sentido, as atividades que integram a sequência didática neste trabalho fazem parte de uma proposta didática com o uso do aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com RA para o ensino dos Sólidos de Platão.

A partir da sequência, foi proposto um ciclo de atividades que propiciam um apoio pedagógico para o ensino e a aprendizagem dos estudantes, em que visa explorar aos registros de representação geométrica a algébrica como vantagens didáticas oferecidas pelo aplicativo GeoGebra 3D, principalmente quanto a visualização. As atividades foram elaboradas e estruturadas para facilitar a aprendizagem, fomentando o ser-pesquisador do aluno para que ele se torne um agente ativo na construção do conhecimento geométrico.

Nesse sentido, buscou-se assegurar as competências e habilidades regulamentadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no que tange o ensino de Geometria para o Ensino Médio. Dentre as Competências e Habilidades da Área de Matemática e suas Tecnologias, buscou-se garantir que a sequência possibilitasse o desenvolvimento da Competência específica 3 de Matemática e suas

Tecnologias, que versa sobre o uso de Estratégias, Conceitos e Procedimentos aplicados aos campos da matemática, dentre os quais se destaca a Geometria Espacial, alvo deste estudo.

Por meio das atividades propostas, visou-se desenvolver no estudante a capacidade de interpretar, resolver problemas e construir modelos, aplicáveis a diferentes situações, com análise de resultados e argumentos coerentes em relação aos Sólidos de Platão.

Quanto às habilidades propostas na BNCC, a sequência visou contribuir para que os estudantes desenvolvessem a capacidade de:

> (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais. [...] (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados através da habilidade de interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas.[...] EM13MAT407 - Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise. (Brasil, 2018. p. 518-531).

Nesse sentido, na sequência elaborada foram acentuadas as possíveis respostas dos estudantes em cada atividade de acordo com os objetivos propostos a fim de que essas respostas pudessem servir de orientação para as análises após implementação. A sequência se encontra, na íntegra, no Anexo 1 desta dissertação.

Na próxima seção desta dissertação foram apresentados os procedimentos para a implementação da sequeência didática.

6.2. Procedimentos da aplicação da Sequência Didática

As atividades foram aplicadas em seis encontros. As seções seguintes descrevem como as atividades foram desenvolvidas em cada um desses encontros.

6.2.1. Primeiro encontro: conhecendo o GeoGebra

Mediante um grupo de *Whatsapp*, criado pela professora, foram passadas as instruções para os alunos baixarem o aplicativo GeoGebra 3D em seus *smartphones* de modo prévio.

O primeiro encontro iniciou com a apresentação do aplicativo Calculadora GeoGebra 3D com RA, abordando as funções de cada comando, ferramentas e configurações básicas. Os alunos foram organizados em grupos e cada membro do grupo possuia um *smartphone*.

Foi feita uma breve explanação sobre a história da criação do GeoGebra com RA e sua aplicação nos processos de ensino e de aprendizagem da geometria. Em seguida, foi projetado na lousa, por meio do *datashow*, um slide simulando partes da interface do aplicativo GeoGebra 3D, no qual se explicavam os comandos, os ícones, as ferramentas, as janelas e a função de cada um deles. Durante toda a explicação, os alunos puderam acompanhar o que estava sendo dito pela professora, bem como realizar os comandos ensinados em tempo real no GeoGebra em seus *smartphones*.

Com o intuito de familiarizar os alunos com o aplicativo, foram construidos alguns polígonos convexos visando explorar os seus elementos, verificar o número de lados e de vértices e o nome do polígono construído de acordo o número de lados.

Para isso, foram construidos três polígonos convexos com 3 lados, 4 lados e 5 lados de medidas quaisquer. Para essas construções, explorou-se ferramentas básicas do GeoGebra 3D. Com essa atividade, foi possível explorar as principais funcionalidades do aplicativo que seriam necessárias para as próximas atividades.

6.2.2. Segundo encontro: Revisão de polígonos regulares

Nesse encontro, foram revisadas as definições de polígonos regulares ressaltando a sua importância para a construção dos poliedros de Platão.

Oa alunos utilizaram régua e transferidor nas construções, com a intenção de verificar as condições necessárias e suficientes para que um polígono seja regular. Assim, no primeiro momento da aula foi entregue aos alunos uma atividade impressa na qual constavam três quadriláteros: **retângulo**, **quadrado** e **losango**. Estrategicamente, a escolha desses três quadriláteros se deu pelo fato do quadrado ser losango e retângulo simultaneamente e, apenas o quadrado é regular.

Em seguida, foi solicitado aos alunos que usassem a régua para medir o comprimento de cada lado dos polígonos, assim como utilizar o transferidor para medir cada ângulo interno e anotar as medidas. Feito isso, os estudantes puderam comparar o que tinham em comum e de diferente entre o quadrado e o retângulo, entre o quadrado e o losango e quais desses polígonos não eram regulares e por que não eram regulares.

6.2.3. Terceiro encontro: Revisão dos conceitos de perímetro e área dos polígonos regulares que compõem as faces dos poliedros de Platão.

Nesse encontro o objetivo foi revisar os conceitos de perímetro e área de polígonos regulares que compõem as faces dos poliedros de Platão. Primeiramente, a sala foi dividida em 5 grupos de alunos, preservando os mesmos componentes dos grupos formados nos encontros anteriores. Foi utilizada uma apresentação de slides discutindo sobre o conceito de medida de superfície, de medida de área e medida de perímetro.

Posteriormente, foram entregues aos alunos uma atividade composta por questões que exploravam o uso da calculadora GeoGebra 3D para a construção do triângulo equilátero, quadrado e o pentágono, bem como para o cálculo das medidas de seus ângulos internoos e comprimento de seus lados.

Além do uso do aplicativo, os estudantes mobilizaram fórmulas algébricas para calcular as medidas de perímetro e área de cada um dos polígonos e comparar os resultados obtidos por meio do aplicativo e dessas fórmulas.

6.2.4. Quarto encontro: Os Sólidos de Platão

O objetivo para esse encontro foi desenvolver atividades em que os estudantes pudessem identificar os poliedros regulares, reconhecer a existência de apenas cinco, conhecer a origem dos poliedros e relacioná-los com os elementos primordiais: a terra, a água, o fogo, o ar e o universo, resgatando um pouco da sua história.

Para isso, fez-se uma breve explanação sobre a importância da geometria na vida do homem e a dedicação de matemáticos no estudo da geometria, destacando Platão como um dos grandes matemáticos gregos.

Em seguida, para abordar os conceitos de poliedros regulares, bem como a existência de apenas cinco, foram entregues aos 5 grupos de alunos uma atividade impressa, que continha as informações sobre as condições necessárias para que um poliedro seja regular. Posteriormente, obedecendo às características de poliedros regulares, foi solicitado aos alunos que preenchessem tabelas pré-definidas com o número de polígonos regulares, medida de cada ângulo interno, soma dos ângulos formados pela união das faces em cada vértice e o poliedro formado.

Ao final dessa atividade, de forma escrita e visando levar os alunos a perceberem a existência de apenas 5 sólidos regulares, os discentes foram questionados sobre a quantidade possível de cada polígono regular na composição de cada sólido de Platão e a justificativa para cada resposta dada.

6.2.5 Quinto encontro: Construção dos Sólidos de Platão

Esse encontro foi dedicado à construção dos Sólidos de Platão com a utilização do *software* Calculadora GeoGebra 3D com a sua ferramenta RA. Por meio do GeoGebra 3D os estudantes explorarm a medida da área da superfície de cada sólido, o perímetro, o número de faces, o número de vértices, o número de arestas e fizeram construção dos poliedros (um poliedro por grupo de estudantes formado).

Além disso, recorreu-se à fórmula de Euler, V + F = A + 2 (o número total de vértices, mais o número total de faces é igual ao número total de arestas mais 2 unidades), dando aos estudantes a oportunidade de realizar operações de tratamento e de conversão de uma representação no registro em lingua materna para outra no registro geométrico.

Inicialmente, foram feitos alguns apanhados sobre os encontros anteriores, dando ênfase ao que foi estudado no terceiro e quarto encontro, pois neles se discutiram conceitos importantes dos Sólidos de Platão.

Em seguida, foi entregue aos alunos uma atividade escrita que constava o passo a passo para a construção de cada um dos 5 Sólidos de Platão por meio da Calculadora Gráfica GeoGebra 3D e a ferramenta RA, bem como as instruções para efetuar a planificação e o cálculo de medidas de área de superfície e de perímetro de cada sólido regular construido. Salienta-se que cada grupo construiu um sólido de Platão diferente.

Foram empregadas também as fórmulas algébricas utilizadas no terceiro encontro para calcular a medida da área de superfície total de cada sólido regular e comparar os resultados obtidos por meio do aplicativo e da formúla algébrica.

Ao final desse encontro, foi solicitado que os estudantes criassem um vídeo a partir da construção do sólido pela a sua equipe. Para isso, foi entregue um material impresso com as instruções a serem seguidas para a produção do vídeo.

6.2.6. Sexto encontro: Apresentação do vídeo explicativo

Esse encontro foi dedicado às apresentações dos vídeos produzidos pelos alunos sobre os 5 sólidos de Platão.

Os estudantes formaram um semicírculo para assistirem os vídeos.

Usando o *datashow*, foram projetados na lousa os vídeos produzidos e, ao final de cada apresentação, a professora fez os comentários pertinentes e acrescentou informações não abordadas nos vídeos sobre o sólido em discussão.

Na próxima seção, a abordagem é sobre Análise da Sequência Desenvolvida.

7. ANÁLISES E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo discorre sobre as análises e a discussão dos resultados deste estudo. Ressalta-se aqui a aplicação da sequência didática, o modo como as atividades foram desenvolvidas e o desempenho dos alunos em cada uma delas, com vistas às possíveis respostas dos estudantes em cada atividade construída, conforme os objetivos propostos, e a previsão das possíveis respostas dos estudantes elaboradas no momento da construção da sequência didática. A partir da atividade 3, analisou-se com foco em algumas ideias da TRRS.

Apresentam-se também algumas imagens das atividades realizadas pelos alunos e capturas de tela das construções desenvolvidas no GeoGebra. De modo a preservar a identificação dos alunos, eles foram identificados por grupos numerados de 1 a 5.

7.1. Primeiro encontro - Conhecendo o GeoGebra

Objetivo: Apresentar a Calculadora Gráfica GeoGebra 3D, bem como os comandos necessários para a utilização do *software*.

Atividade: Apresentação da Calculadora GeoGebra 3D e construção de polígonos convexos e identificação do número de lados, vértices e o nome do polígono construído conforme o número de lados.

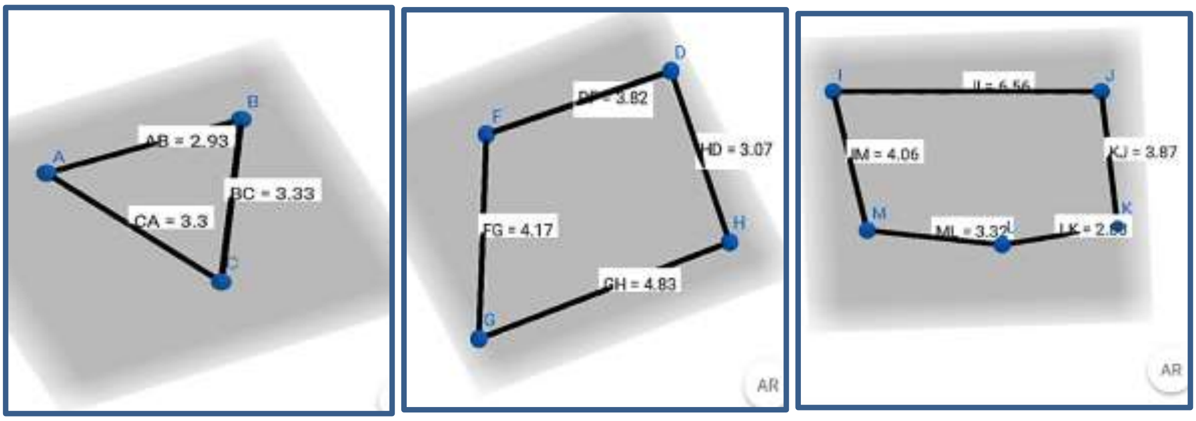
Análise dos resultados: De modo geral, observou-se que os alunos utilizaram corretamente os comandos necessários na construção das figuras geométricas solicitadas. Notou-se ainda que os estudantes demonstraram entusiasmo com o uso do aplicativo. Cada figura que eles conseguiam construir era comemorada. A Figura 5 ilustra o momento em que alguns alunos realizavam a atividade.

Figura 5 - Momento de construção dos alunos.

Fonte: Dados da pesquisa.

O desenvolvimento da atividade, com o uso do aplicativo *GeoGebra 3D*, ocorreu de forma esperada, sendo concluída pelos participantes sem dificuldades. A Figura 6 ilustra as construções feitas pelos alunos dos grupos 1, 3 e 5.

Figura 6 - Construção feita pelos componentes dos grupos 1, 3 e 5 durante a aula.



Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, com essa atividade, foi possível alcançar o objetivo e proporcionar aos alunos uma aula mais dinâmica.

7.2. Segundo encontro – Revisão de polígonos regulares

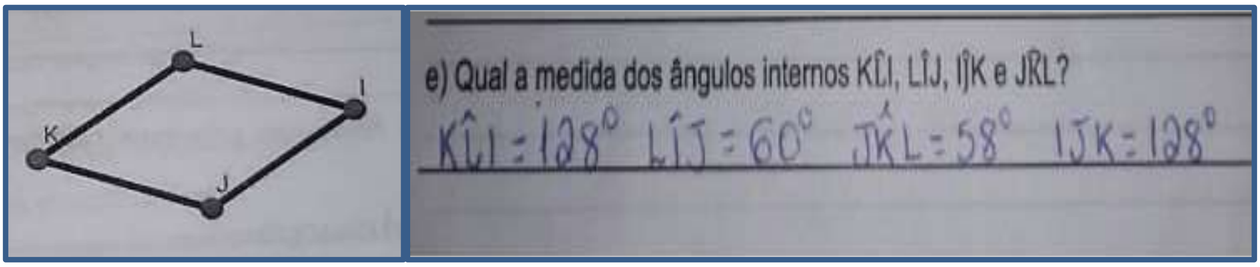
Objetivo: Revisar a definição de polígonos regulares, observando as principais características de cada um.

Atividade: Usar a régua para medir o comprimento dos lados e o transferidor para medir em graus, os ângulos internos de um quadrado, retângulo e losango e, em seguida, utilizar as medidas encontradas para analisar as principais características e diferenças desses quadriláteros e qual deles é regular.

Possíveis resultados: Através dessa atividade, pretendia-se que os alunos compreendessem que o losango não é regular pelo fato das medidas de seus ângulos internos não serem congruentes; que o retângulo, apesar de ter as medidas de seus ângulos internos congruentes, não é um polígono regular devido à diferença nas medidas dos comprimentos de seus lados; e que o quadrado tem todas as características necessárias e suficientes para ser um polígono regular: ângulos internos congruentes e medida do comprimento dos lados iguais.

Análise dos resultados: Observou-se que alguns alunos tiveram dificuldade em usar o transferidor para medir os ângulos internos do losango. Além disso, apesar da definição desse polígono não ser o foco nessa atividade, foi perceptível que esses estudantes não sabiam ou não lembravam a definição de losango, pois alguns alunos indicaram as medidas dos ângulos internos opostos do losango diferentes e, consequentemente, a soma das medidas dos ângulos internos desse quadrilátero diferiu de 360º, conforme mostra a Figura 7.

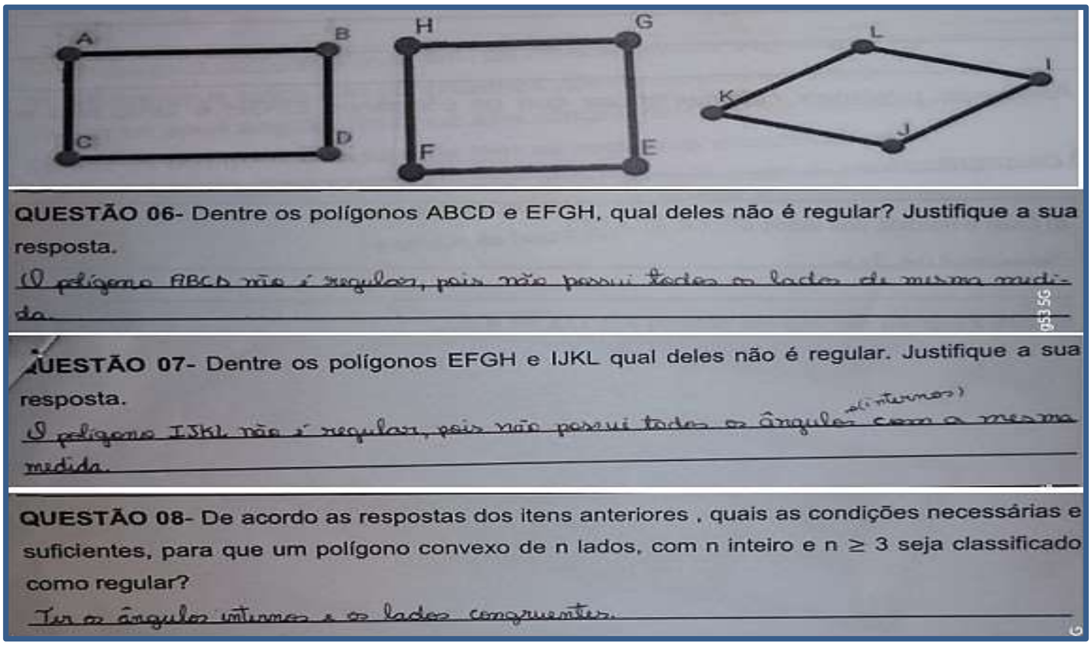
Figura 7 – Losango IJKL e a medida de seus ângulos internos realizada pelos alunos do grupo 2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar do erro quanto à medida dos ângulos internos do losango, observou-se que os estudantes reponderam corretamente que o retângulo e o losango não são polígonos regulares; bem como concluíram corretamente que os polígonos regulares possuem, concomitantemente, ângulos internos congruentes e os lados com medidas iguais. Na figura 8, têm-se as conclusões feitas pelos alunos do grupo 2.

Figura 8 – Respostas dada pelos alunos pelos alunos do grupo 2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Lê-se na questão 06 da Figura 8: “O Polígono ABCD não é regular, pois não possui todos os lados de mesma medida”.

Lê-se na questão 07 da Figura 8: “O polígono IJKL não é regular, pois não possui todos os ângulos internos com a mesma medida”.

Lê-se na questão 08 da Figura 8: “Ter os ângulos internos e os lados congruentes”.

7.3. Terceiro encontro - Revisão dos conceitos de perímetro e área dos polígonos regulares que compõem as faces dos Poliedros de Platão.

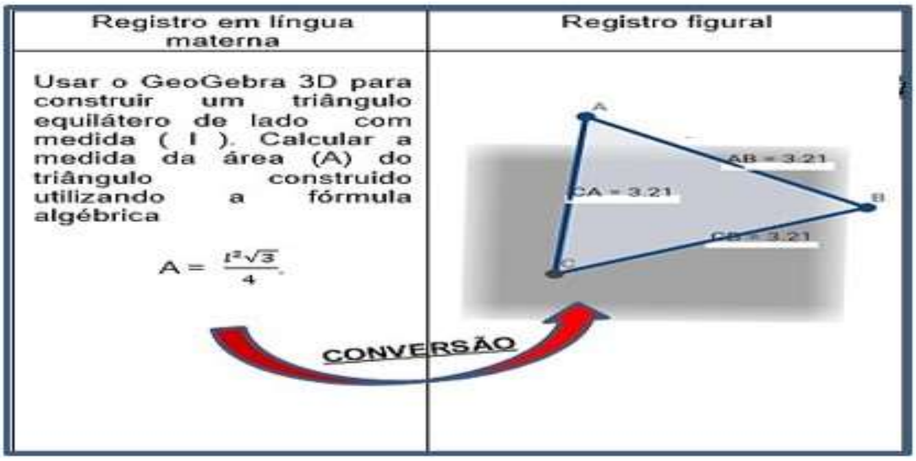
Objetivo: Revisar os conceitos de perímetro e medida de área dos polígonos regulares que compõem as faces dos Poliedros de Platão.

Atividade: Usar o *smartphone* com o aplicativo Calculadora GeoGebra 3D para responder ao questionário abordando medida de perímetro e área dos polígonos regulares que compõem as faces dos Poliedros de Platão.

Possíveis resultados: Por meio dessa atividade, buscou-se verificar se os alunos utilizaram a representação geométrica dos polígonos solicitados e, por meio do aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D e da representação algébrica, determinassem as medidas de perímetro e de área de um triângulo equilátero, um quadrado e um pentágono regular, seguindo os passos descritos no questionário.

Análises dos resultados: Observou-se que os alunos transitaram entre os registros em língua materna e figural de cada um dos objetos estudados. Conforme ilustrado na figura 9, há os fragmentos de respostas dos alunos.

Figura 9 - Registro figural e registro algébrico de um mesmo triângulo equilátero.



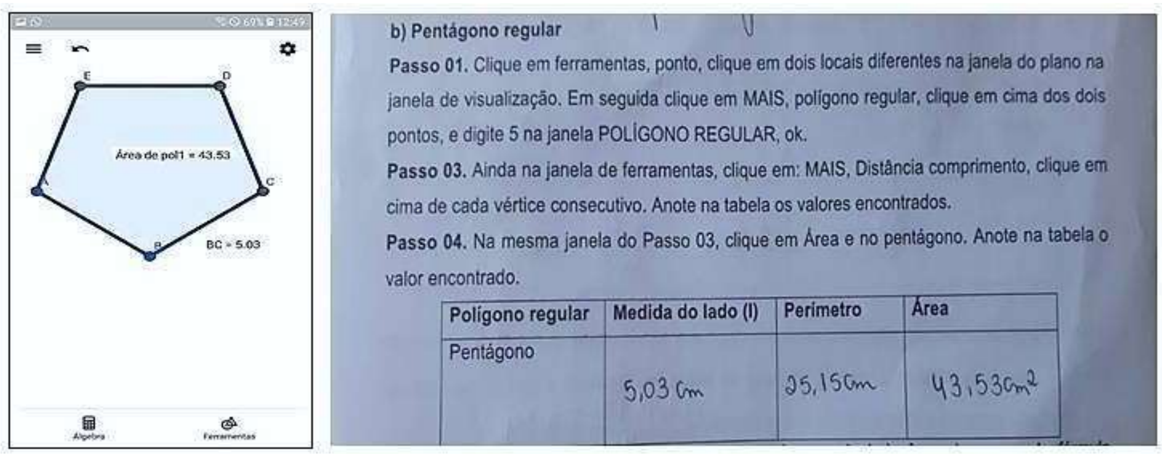
Fonte: Dados da pesquisa.

De modo análogo, os alunos realizaram os mesmos procedimentos mostrados na Figura 9 no estudo do quadrado e do pentágono regular.

Verificou-se ainda que alguns participantes encontraram resultados diferentes ao calcular as medidas de áreas de um mesmo polígono, quando usaram o aplicativo e a fórmula algébrica. Porém, essas divergências já eram previstas devido ao arredondamento de valores efetuado pelo aplicativo.

Na Figura 10, há fragmentos do questionário respondido pelos participantes do grupo 3 e é possível observar que os alunos construíram no GeoGebra um pentágono regular com lado medindo 5,03 cm e calcularam a medida de área obtendo 43,53 cm².

Figura 10 - Construção feita pelos alunos do grupo 3.



b) Pentágono regular

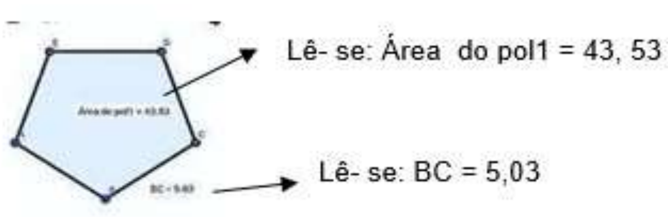
Passo 01. Clique em ferramentas, ponto, clique em dois locais diferentes na janela do plano na janela de visualização. Em seguida clique em MAIS, polígono regular, clique em cima dos dois pontos, e digite 5 na janela POLÍGONO REGULAR, ok.

Passo 03. Ainda na janela de ferramentas, clique em: MAIS, Distância comprimento, clique em cima de cada vértice consecutivo. Anote na tabela os valores encontrados.

Passo 04. Na mesma janela do Passo 03, clique em Área e no pentágono. Anote na tabela o valor encontrado.

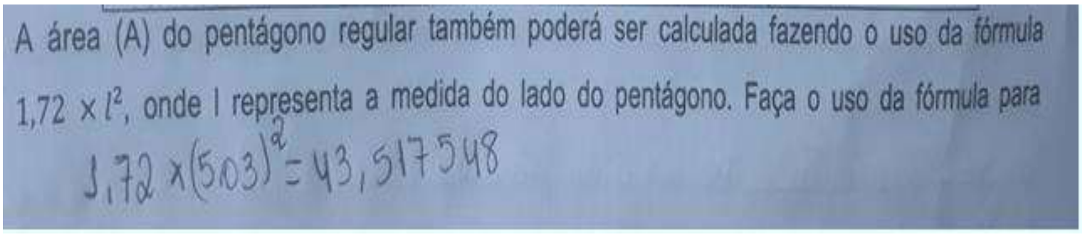
Polígono regular	Medida do lado (l)	Perímetro	Área
Pentágono	5,03 cm	25,15cm	43,53cm²

Fonte: Dados da pesquisa.



Na Figura 11, é apresentada a resposta dos estudantes quando calcularam a medida da área do mesmo pentágono regular mostrado na Figura 10, por meio da fórmula algébrica 1,72l², em que l representa a medida do lado do pentágono. Essa figura é referente ao questionário respondido pelos participantes do grupo 3. Verificou-se que a medida da área obtida difere da medida da área encontrada por meio do aplicativo devido ao arredondamento que o aplicativo faz.

Figura 11 – Área do pentágono regular calculada pelos alunos do grupo 3 durante a aula.



A área (A) do pentágono regular também poderá ser calculada fazendo o uso da fórmula $1{,}72 \times l^2$, onde l representa a medida do lado do pentágono. Faça o uso da fórmula para

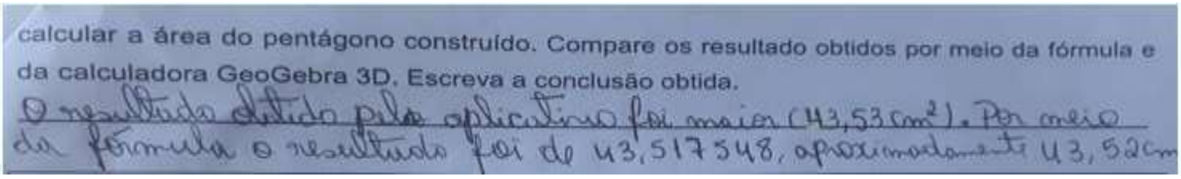
$1{,}72 \times (5{,}03)^2 = 43{,}517548$

Fonte: Dados da pesquisa.

Verificou-se ainda que os alunos usaram a aproximação para o cálculo com a fórmula algébrica e ainda assim o resultado foi menor devido aos arredondamentos efetuados pelo aplicativo.

A figura 12 traz a conclusão feita pelos alunos do grupo 3 confrontando os resultados da medida da área do pentágono regular através do aplicativo GeoGebra 3D e a fórmula algébrica $A = 1{,}72l^2$.

Figura 12 - Conclusão dos alunos do grupo 3 sobre a área do pentágono calculada algebricamente.



calcular a área do pentágono construído. Compare os resultados obtidos por meio da fórmula e da calculadora GeoGebra 3D. Escreva a conclusão obtida.

O resultado obtido pelo aplicativo foi maior (43,53 cm²). Por meio da fórmula o resultado foi de 43,517548, aproximadamente 43,52cm

Fonte: Dados da pesquisa.

Lê-se: “O resultado obtido pelo aplicativo foi maior (43,53 cm²). Por meio da fórmula, o resultado foi de 43,517548, aproximadamente 43,52 cm²”.

Conclui-se que o uso do aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D permitiu aos alunos transitarem entre os registros de representação da língua materna e figural. Além disso, ainda se conclui que o GeoGebra possibilitou dinamicidade na revisão dos conceitos de perímetro e área dos polígonos regulares que compõem as faces dos Poliedros de Platão. Duval (2011, p.272) afirma que “[…] é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc.) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro”.

7.4. Quarto encontro - Os cinco Sólidos de Platão

Objetivo: Identificar os poliedros regulares; reconhecer a existência de apenas cinco e relacionar os poliedros com os elementos primordiais: a terra, a água, o fogo, o ar e o universo.

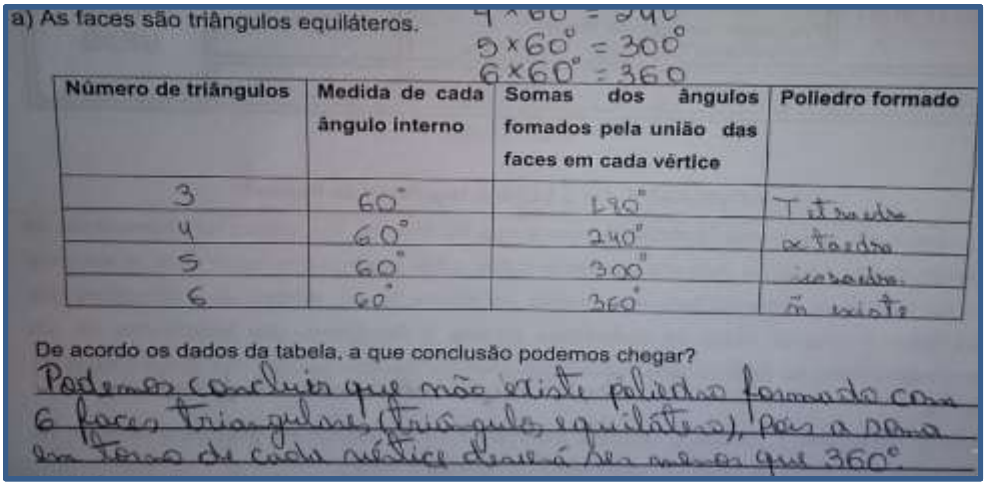
Atividade: Explanação de um texto sobre Platão e resolução de um questionário sobre o número de polígonos regulares que compõem as faces dos Poliedros de Platão.

Possíveis resultados: Com essa atividade, pretendeu-se que os alunos descobrissem qual o menor número de polígonos regulares que podem ser dispostos ao redor de um vértice sem sobreposição, e, através do resultado encontrado, entender que existem apenas cinco poliedros regulares. Além disso, por meio de análises da representação do objeto matemático do registro em língua materna, compreender o porquê de não existir poliedros regulares com faces que não sejam o triângulo equilátero, o quadrado e o pentágono regular.

Análises dos resultados: Ao falar sobre Platão, verificou-se que os alunos já o conheciam a partir das discussões realizadas durante as aulas de Filosofia e História, enriquecendo, dessa forma, a explanação do tema.

Inicialmente, os alunos analisaram quantos triângulos equiláteros seriam necessários para compor as faces de um poliedro a partir da formação de um ângulo poliédrico. Essa análise foi conduzida por tentativa e erro: tentaram com 3 triângulos equiláteros congruentes, 4 triângulos equiláteros congruentes, 5 triângulos equiláteros congruentes e 6 triângulos equiláteros congruentes. Os alunos concluíram que não seria possível construir um poliedro a partir da composição com 6 triângulos equiláteros congruentes. A Figura 13 ilustra a análise realizada pelos alunos.

Figura 13: Análise feita pelos alunos



a) As faces são triângulos equiláteros.

$5 \times 60^\circ = 300^\circ$

$6 \times 60^\circ = 360$

Número de triângulos	Medida de cada ângulo interno	Somas dos ângulos fomados pela união das faces em cada vértice	Poliedro formado
3	60°	180°	Tetraedro
4	60°	240°	octaedro
5	60°	300°	icosaedro
6	60°	360°	ñ existe

De acordo os dados da tabela, a que conclusão podemos chegar?

Podemos concluir que não existe poliedro formado com 6 faces triangulares (triângulos equiláteros), pois a soma em torno de cada vértice deverá ser menos que 360°

Fonte: Dados da pesquisa.

Verificou-se que os alunos concluíram que, ao unir os seis ângulos internos cada um de um triângulo equilátero, a soma era 360º, o que impediria a formação de um novo sólido regular.

De modo análogo, os alunos realizaram a atividade utilizando os ângulos internos do quadrado e do pentágono regular e concluíram facilmente que não seria possível construir um sólido regular a partir da união de quatro ângulos internos de quatro quadrados congruentes ou a partir da união de quatro ângulos internos de quatro pentágonos regulares congruentes.

7.5. Quinto encontro – Construção dos Sólidos de Platão

Objetivo: Construir os Sólidos de Platão e explorar os números de vértices, faces, arestas e as medidas de área de uma face e da área total do sólido.

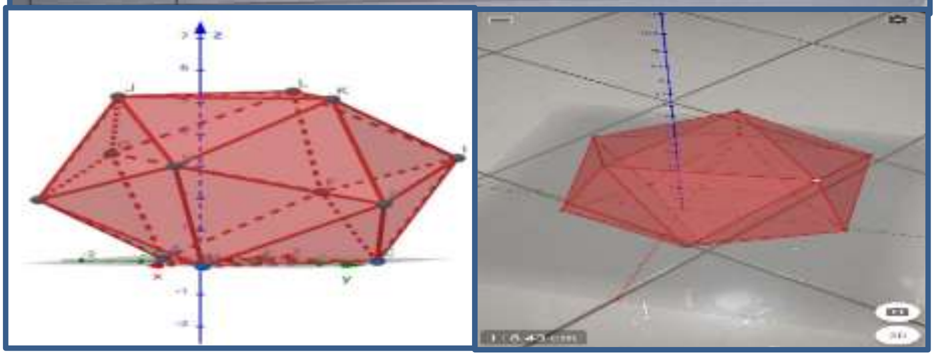
Atividade: Construir os Sólidos de Platão com a utilização do *software* Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com ênfase na ferramenta RA e explorar a medida da área total do sólido, o perímetro, número total de faces, vértices e arestas de cada sólido construído, e usar a relação de Euler para comparar os resultados encontrados.

Possíveis resultados: Por meio dessa atividade, pretendia-se que os alunos transitassem por mais de um sistema de Registro de Representação Semiótica para explorar os elementos que compõem os Sólidos de Platão, bem como fazer o uso correto da Relação de Euler para calcular o número total de faces, vértices e arestas de cada sólido construído. Além disso, analisar a planificação desses sólidos e fazer o uso da RA para explorar visualmente o sólido em 3D.

Análises dos resultados: Nesse encontro, os alunos foram mais inquietos e visivelmente se mostraram animados com as construções. Os estudantes, a partir da representação do sólido no sistema de registro em língua materna, fizeram a conversão para a representação do sólido no sistema de registro figural. Isso para cada um dos cinco sólidos regulares e, através da RA, exploraram o sólido em ambiente real, conforme ilustra a Figura 14.

Figura 14: Fragmento de resposta dos alunos do grupo 5.

Icosaerdo	**Passo 01.** Abra a calculadora GeoGebra 3D **Passo 02.** Clique em configurações, janela de visualização e desabilite exibir eixos e exibir planos. **Passo 03.** Clique em álgebra e digite: A = (0,0,0) enter, B = (3, 0, 0) enter, Icosaedro(A, B) enter. **Passo 04.** Clica em RA e projeta a figura sobre um plano, que poderá ser o chão da sala de aula.



Fonte: Dados da pesquisa.

Após a construção dos sólidos, os alunos preencheram corretamente uma tabela com informações sobre o número de vértices, faces e arestas do sólido construido e, em seguida, compararam esses valores com a relação de Euler, conforme mostrado na Figura 15.

Figura 15: Recorte da atividade respondida pelos alunos do grupo 3

Nome do sólido	Nome dos polígonos que compõem as faces do sólido	Número de vértices (V) do sólido	Número de faces (F) do sólido	Número de arestas (A) do sólido	V + F
Tetraedro	triângulo	4	4	6	8
Hexaedro	quadrado	8	6	12	14
Octaedro	triângulo	6	8	12	14
Dodecaedro	pentágono	20	12	30	32
Icosaedro	triângulo	12	20	30	32

Analisando os valores obtidos na tabela, você consegue identificar alguma relação entre número de V + F com o número de arestas? Justifique a sua resposta.

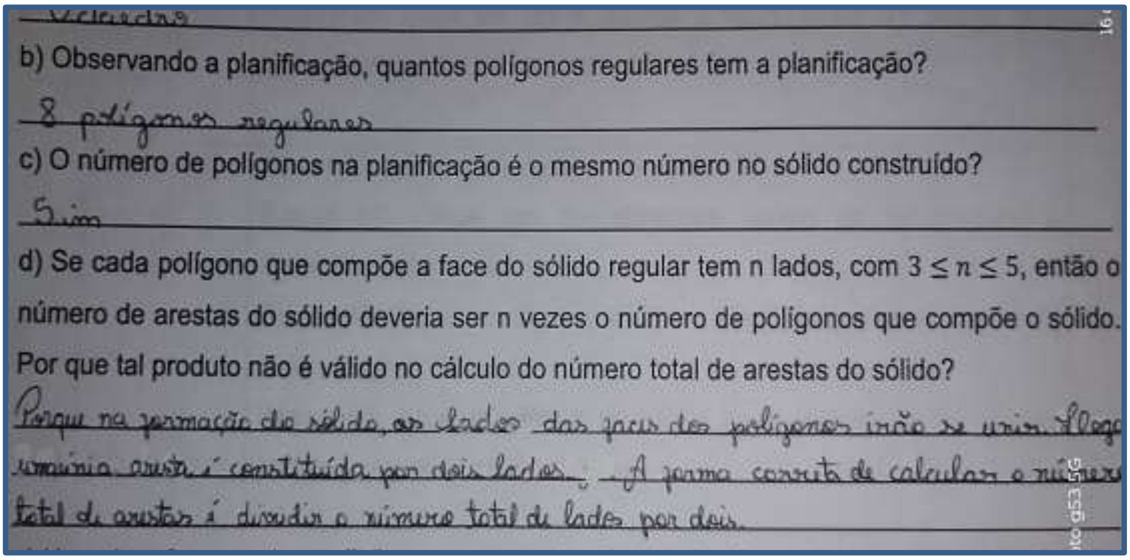
Sim, o número de V+F é igual o número de arestas + dois.

Fonte: Dados da pesquisa.

Dessa forma, os alunos concluiram corretamente que o número de vértices adicionado ao número de faces de cada sólido é igual ao número total de arestas deste sólido mais 2 unidades, que equivale a fórmula de Euler.

Além da construção do sólido e da visualização em RA, os alunos fizeram a planificação do sólido e analisaram o número de faces, vértices e arestas no sólido em 3D e planificado. A Figura 16 traz trecho de resposta dos alunos do grupo 4 referente a planificação de um Octaedro.

Figura 16: Fragmento da atividade respondida pelos alunos do grupo 4.


b) Observando a planificação, quantos polígonos regulares tem a planificação?

8 polígonos regulares

c) O número de polígonos na planificação é o mesmo número no sólido construído?

Sim

d) Se cada polígono que compõe a face do sólido regular tem n lados, com $3 \leq n \leq 5$, então o número de arestas do sólido deveria ser n vezes o número de polígonos que compõe o sólido. Por que tal produto não é válido no cálculo do número total de arestas do sólido?

Porque na formação do sólido, os lados das faces dos polígonos irão se unir. Logo uma única aresta é constituída por dois lados. A forma correta de calcular o número total de arestas é dividir o número total de lados por dois.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na letra d da figura 16, lê-se: “Porque na formação do sólido, os lados das faces dos polígonos irão se unir. Logo, uma única aresta é constituída por dois lados. A forma correta de calcular o número total de arestas é dividir o número total de lados por dois”.

Verificou-se que os alunos observaram que o número de arestas na planificação do sólido é o dobro do número de arestas do poliedro em sua forma tridimensional.

Assim, de modo mais criativo e dinâmico, conseguiu-se atingir o objetivo proposto para essa atividade. A RA facilitou a interação dos alunos com o objeto matemático a partir da visualização em 3D. Em relação às aulas tradicionais comumente realizadas, é possível inferir que a aprendizagem dos alunos com o suporte da RA foi mais efetiva e facilitada.

7.6. Sexto encontro – Apresentação do vídeo explicativo

Objetivo: Compartilhar o sólido construído e as principais características desse sólido com todos os grupos de alunos.

Atividade: Produzir um vídeo explicativo abordando as principais características dos Poliedros de Platão.

Possíveis resultados: Por meio dessa atividade, pretendia-se apresentar aos sujeitos de pesquisa as principais características dos Sólidos de Platão.

Para melhor entendimento e dinamicidade da apresentação do vídeo, buscava-se que os estudantes utilizassem a representação do sólido no sistema de registro em língua materna para explicar os elementos que compõem o sólido, bem como que utilizassem o sistema de registro figural para apresentar o sólido em 3D e planificado, com a utilização do GeoGebra com a RA.

Análises dos resultados: Todos os grupos realizaram a atividade, porém os vídeos foram mais focados na RA e não nos elementos dos poliedros construídos.

Os alunos iniciaram a apresentação do vídeo discorrendo sobre o nome do sólido, elemento da natureza que o representa, nome do polígono que compõem suas faces e algumas curiosidades a respeito do sólido, como, por exemplo, o seu uso na arquitetura. Usaram o aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com RA e fizeram a representação figural do sólido em 3D e planificado. Além disso, exploraram o recurso de RA para transportar o sólido do ambiente virtual para o ambiente real com criatividade na escolha do ambiente real. A Figura 17 traz recortes de um dos vídeos produzidos pelos alunos.

Figura 17 – Recortes do video produzido pelos alunos do grupo 1.

Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar dos vídeos não terem todas as informações pedidas, possibilitou-se aos alunos fazer o uso do aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com RA e utilizar diferentes tipos de representações para explorar os principais conceitos dos poliedros de Platão, atingindo os objetivos para essa atividade.

8. SÍNTESE DAS ANÁLISES

Como já mencionado nesta dissertação, o objetivo deste trabalho foi analisar como uma sequência didática, elaborada a luz de algumas ideias da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, com o uso da Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com ênfase na a ferramenta RA, pode contribuir para o ensino dos Sólidos de Platão. Com vistas às respostas dos estudantes para cada uma das atividades e a previsão das possíveis respostas que eles poderiam dispor, elaboradas no momento da construção da sequência didática.

Outro objetivo dessa investigação foi verificar se o uso do aplicativo Calculadora GeoGebra 3D com RA de fato contribuiu com o aprendizado do aluno quanto ao objeto de estudo abordado na sequência construida.Cabe ressaltar que os estudantes utilizaram esse aplicativo instalado nos seus *smartphones.*

Mediante análises das respostas dos estudantes, conclui-se que com a aplicação da sequência didática constatou-se o interesse dos alunos por esse tipo de atividade com o uso do s*martphone* em sala de aula. Ficou evidente assim, que o aplicativo com ênfase na RA contribuiu para a aprendizagem dos alunos.

Além disso, o aplicativo possibilitou o uso dos diferentes tipos de registros à luz da TRRS de Raymond Duval, principalmente o registro figural, o que contribuiu significamente para minimizar as dificuldades apresentadas pelos estudantes quando são abordados os Sólidos de Platão em perspectivas por meio de figuras desenhadas na lousa em uma situação de aula tradicional.

Pelo exposto, considera-se pertinente o uso do aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com RA no ensino e aprendizagem dos Sólidos de Platão por promover o estudo de forma mais interativa, contribuindo para a melhora na compreensão do conteúdo pelos alunos.

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conhecimento matemático tem sido elaborado a partir da tentativa do ser humano de compreender e atuar em seu mundo. Dessa forma, é fruto de um processo contínuo para satisfazer a necessidade da vida cotidiana.

O professor capaz de construir seu próprio conhecimento matemático está em constante papel de aprendiz e, através de sua mediação, possibilita a outrem a capacidade de autoprodução matemática, uma vez que o aprender está relacionado ao fazer. Além disso, o ser humano é movido por desejos, desafios, construções e possibilidades que favorecem o aprender e produzir matemática.

A partir dessa premissa, proporcionar ambientes de aprendizagem para os estudantes exige do docente, em especial de matemática, a busca por metodologias e recursos didáticos que trarão benefícios aos processos de ensino e de aprendizagem.

No que tange ao ensino dos Sólidos Geométricos, em especial os Sólidos de Platão, o objeto de estudo deste trabalho exige dos professores uma prática de ensino que vai além da explicação, do uso do quadro e do livro didático, pois esses são instrumentos limitados, principalmente no que se refere à representação visual.

Neste trabalho, procurou-se investigar que contribuições o uso do aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com ênfase na ferramenta RA pode trazer para o estudo de Sólidos de Platão. Em busca da resposta a essa questão, foi elaborada e analisada uma sequência didática à luz de algumas ideias da Teoria dos Registros de Representação Semiótica com o uso do referido aplicativo.

Assim, foi elaborada a sequência e essa foi analisada, buscando verificar o modo como as atividades foram desenvolvidas e o desempenho dos alunos em cada uma delas, com vistas às possíveis respostas dos estudantes em cada atividade construída conforme os objetivos propostos. Ademais, essa análise se estendeu à previsão das possíveis respostas dos estudantes elaboradas no momento da construção da sequência didática, além da verificação do trânsito dos estudantes entre os Sistemas de Registros de Representação Semiótica em língua materna e figural.

Nesse sentido, a sequência propôs uma metodologia visando facilitar o trabalho do professor e promover o aprendizado do estudante quanto aos sólidos de Platão.

Por meio das análises, foi possível constatar que, se bem planejada, aulas com o uso do GeoGebra 3D podem contribuir significativamente para a aprendizagem desse objeto matemático. Quanto ao uso do aplicativo, os resultados mostraram que a RA foi eficaz, proporcionando aulas mais dinâmicas e atrativas, ao permitir uma abordagem visual e interativa do objeto de estudo, contribuindo para uma compreensão dos conceitos abordados. Portanto, conclui-se que a utilização dessa tecnologia pode enriquecer os processos de ensino e de aprendizagem da Geometria Espacial, facultando benefícios tanto para os alunos quanto para os professores.

Os resultados também mostraram que as atividades propostas na sequência proporcionaram o aprendizado aos alunos dos Sólidos de Platão, e proporcionaram a eles transitarem em mais de um tipo de Sistema de Registros de Representação Semiótica do objeto geométrico. Além disso, despertou a motivação e interesse dos alunos, por se tratar de uma aula prática na qual puderam construir os sólidos de Platão.

Por fim, os resultados mostraram que o ensino da Matemática, em particular da Geometria Espacial, que frequentemente é conduzido de maneira abstrata, com ênfase em atividades que demandam repetição e memorização, pode ser abordado de modo a permitir que os estudantes experienciem os conceitos da Geometria Espacial e percebam que ela vai além de fórmulas e operações.

Os resultados desta pesquisa mostraram que a sequência didática, produto deste trabalho, tem uma abordagem promissora. Diante disso, sugere-se para estudos futuros a adaptação desta sequência didática para o ensino de medida de volume desses sólidos.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, M. S. **GeoGebra e Materiais Manipuláveis:** Recursos mediadores na organização do ensino de áreas dos sólidos geométricos no Ensino Médio. Teresina: Universidade Estadual do Piauí, 2020.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. da. **Engenharia didática:** evolução e diversidade. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012.

AMARAL, R. B.; MAZZI, L. C.; ANDRADE, L. V.; PEROVANO, A. P. **Livro didático de matemática:** compreensões e reflexões no âmbito da Educação Matemática. 1ª ed. – Campinas, SP: Mercado de Letras, 2022.

ARAÚJO, F.S. de.**Tecnologias na educação matemática:** o uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica no ensino da geometria espacial no Ensino Médio / Fernando Silva de Araújo. – São Luís, 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Maranhão, 2023.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Escalas de proficiência do SAEB**. Brasília, DF: INEP, 2020.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Saeb 2021:** Indicador de Nível Socioeconômico do Saeb 2021: nota técnica. 2021. Disponível em: https://download.inep.gov.br/saeb/resultados/press_kit_saeb_2021.pdf. Acesso em 30 mai. 2024.

BRASIL, Ministério da Educação. **No ensino médio, 67% dos estudantes têm desempenho crítico em Matemática**. Notícias Saeb, 22 de Novembro de 2010.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Prova Brasil SAEB:** escala proeficiência 2013. 2013. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/escala/escala_proficiencia/2013/escala_ensino_medio_2013.pdf. Acesso em 30 mai. 2024.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CAMPOS, H. J. B. C. de. **Metodologia da pesquisa científica** – Licenciatura em Educação Física. Salvador: UNEB/GEAD, 2010.

CAROLEI, P.; TORI, R. **Gamificação Aumentada Explorando a realidade aumentada em atividades lúdicas de aprendizagem**. Revista teccogs, nº9, 2014.

CARVALHO, J. M. J; LIAO,T. **Realidade Aumentada e Interdisciplinaridade:** o Uso do Aplicativo LandscapAR no Ensino de Matemática e Geografia. EaD em Foco, V10(2):e1049.2020

CATTAI, A. P.; SANTOS, G. D. **Informática aplicada à educação** – Licenciatura em matemática. Salvador: UNEB/GEAD, 2010.

COSTA, R. S. **Realidade Aumentada:** Uma Proposta de Sequência Didática para o Ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio. 2022. Número de folhas 84f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2022.

DANTAS, E. H. **Uso da realidade aumentada no ensino da geometria espacial**. [manuscrito]. 2018.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissagens Intellectuels): Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Tradução revisada: Méricles Thadeu Moretti. UFSC, 2023.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa** - 4ª ed -São Paulo: Atlas, 2002.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias:** o novo ritmo da informação/ Vani Moreira Kenski. – Campinas, SP. Papirus,2007.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. Cortez Editora. São Paulo –SP, Impresso no Brasil – Outubro de 2006.

MEIRELES, S. M. **Metodologias ativas no ensino de geometria espacial com aportes do aplicativo GeoGebra 3D e ferramentas do M-learning**. 2020. Número de folhas 127f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2020.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. (Org.). Pesquisa social: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 2001.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 2ª Edição - Coleção Profmat - SBM, 2022.

PAULA, E. A. S. **Geometria espacial:** a aprendizagem através de diferentes recursos didáticos. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2020.

PIRES, M. N. M. **Registros de representação semiótica em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais**. UEL- Londrina Paraná, 2022.

RIBEIRO, L. O. M. R.; GUTERRES, L. X.; SILVEIRA, D. N. **Plurais Revista**

Multidisciplinar. Salvador v. 5, nº2, p. 40-57, 2020.

SILVA, A. G.; JESUS, T. A. V. **Construções geométricas utilizando o software régua e compasso:** reflexões a partir de um curso de extensão. ReBECEM, 2022.

SILVA, P. **Geometria espacial:** uso do aplicativo GeoGebra em smartphones [manuscrito]. 2018. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Unidade Aacadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Catalão 2018.

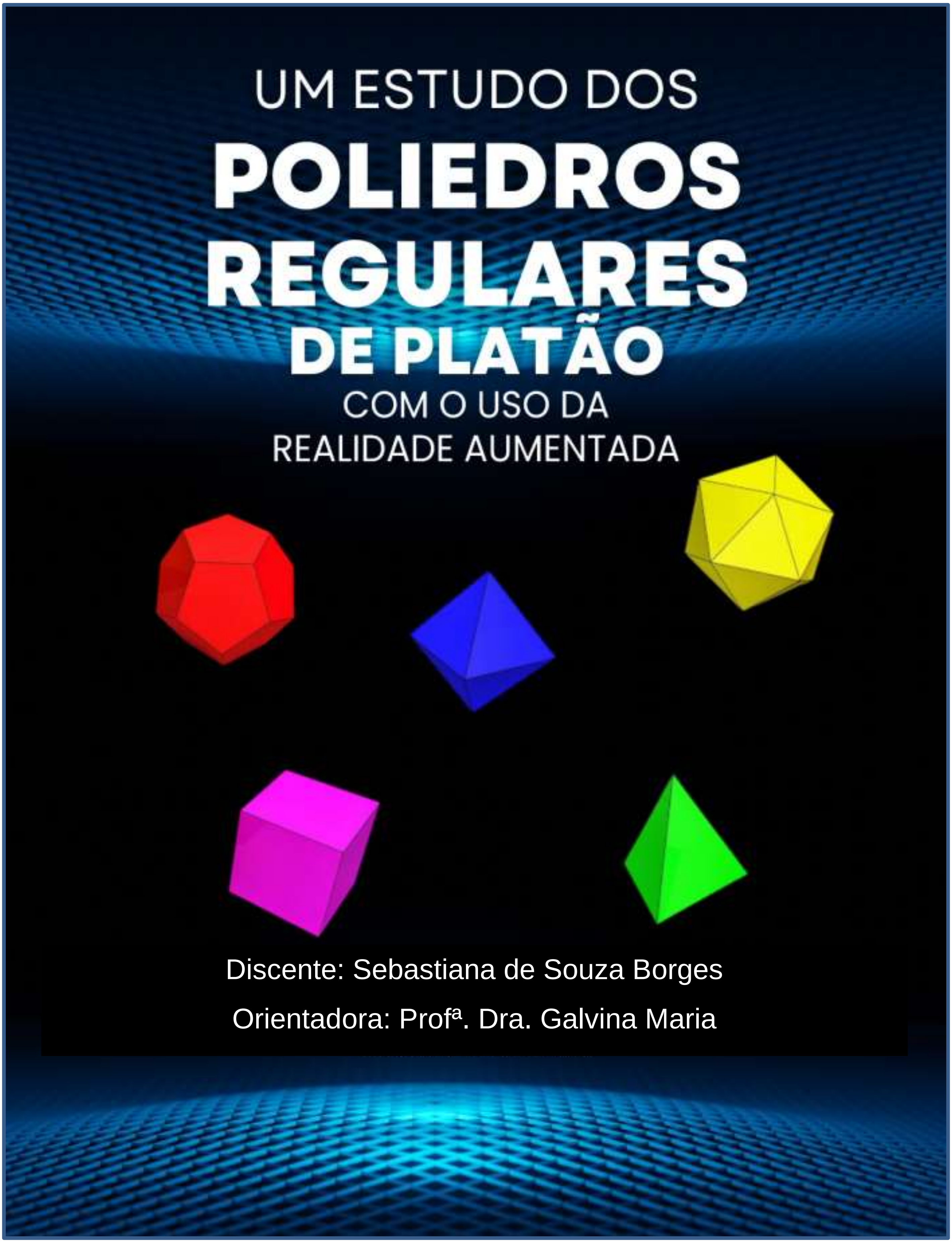
SOARES, T. A; NOBRE, F. A. S. **A contribuição da sequência de ensino Fedathi no processo de ensino aprendizagem em física**. Revista do Professor de Física. Brasília, vol. 1, n. 2. 2017.

SOUZA, G. P. **Integrais Duplas:** um estudo a luz de uma articulação entre a Teoria Antropológica do Didático e a Teoria A Matemática no Contexto das Ciências. 2022. 387 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022.

SOUSA, I. F. de. **Sequência didática para o ensino de prismas e pirâmides com o método de George Polya e software GeoGebra 3D** [recurso eletrônico]. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Sobral, 2023.

TORI, R.; KIRNER, C.; SISCOUTTO, R. **Fundamentos e tecnologia de realidade virtual e aumentada**. Editora SBC – Sociedade Brasileira de Computação. Porto Alegre, 2006.

APÊNDICE


UM ESTUDO DOS
POLIEDROS
REGULARES
DE PLATÃO
COM O USO DA
REALIDADE AUMENTADA
Discente: Sebastiana de Souza Borges
Orientadora: Profª. Dra. Galvina Maria

RESUMO

Esta sequência didática tem por objetivo aplicar conceitos da Geometria Espacial por meio da RA. O objeto de estudo será a análise dos Poliedros de Platão, seus elementos e suas características.

Certamente, diferentes recursos didáticos poderiam ter sido utilizados, porém, foi escolhida a tecnologia digital. Essa escolha se deve ao fato de a tecnologia digital fazer parte do cotidiano do estudante de ensino médio, inserido no contexto da cultura digital presente no século XXI.

Um dos grandes desafios no processo de ensino e de aprendizagem dos poliedros é a visualização em 3D (três dimensões) desses sólidos geométricos. Diante disso, fazendo o uso do celular e do aplicativo Calculadora 3D da Plataforma GeoGebra, o aluno irá explorar a visualização e planificação dos Sólidos de Platão.

As atividades elaboradas nesta sequência discorrem os conceitos, elementos, perímetro e área de polígonos regulares e dos Sólidos de Platão.

PALAVRAS CHAVES: Geometria Espacial. Tecnologia no ensino de geometria. Sólidos de Platão. Realidade aumentada.

INTRODUÇÃO

Um estudo dos Poliedros regulares de Platão com o uso da Realidade Aumentada é o título de uma dissertação de mestrado que tem como produto esta sequência didática.

O uso das tecnologias nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria Espacial é um recurso que pode contribuir para a construção do conhecimento geométrico pelo estudante. Isso se deve à rapidez e à facilidade oferecida por esses recursos que permite construir e manipular planos e sólidos geométricos entre outros elementos geométricos, que permitem ao estudante explorar esses elementos geométricos.

De modo mais específico, a tecnologia utilizada para a resolução das atividades desta sequência foi o aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com ênfase na ferramenta RA, disponível para *download* para *smartphones* operados por *android* ou *IOS* (*Iphone Operating System*). Essa escolha considerou que esse aplicativo aplicado ao ensino de matemática, pode tornar a aula mais significativa e interessante, oferecendo ao estudante percepções visuais dos elementos dos objetos geométricos estudados, além da possibilidade da interação entre meio físico e meio virtual.

A RA, como apontam Azuma (2001 apud Carolei e Tori, 2014), permite:

> r1: integrar elementos virtuais, gerados por tecnologia computacional, a um ambiente real (ou integrar elementos reais a ambientes virtuais);
> r2: ser interativo e responder em tempo real;
> r3: prover registro, em três dimensões, entre elementos reais e virtuais, ou seja, as posições espaciais dos elementos virtuais devem ser bem definidas e consistentes com o ambiente real;
> (...) (Azuma, 2011 apud Carolei; Tori, 2014. p. 26).

Assim a RA pode contribuir para uma melhor compreensão, pelos estudantes, dos conteúdos que necessitam da visualização. Conforme Leite (2008), geralmente o professor só dispõe do quadro de giz e boa vontade e isso nem sempre é suficiente para esclarecer aos alunos uma determinada relação entre elementos dos sólidos geométricos.

Considerando os componentes curriculares da BNCC do Ensino Médio, as atividades propostas nesta sequência didática são para alunos do 2º ano do Ensino Médio. Nesse sentido, o objetivo dessa sequência é contribuir para a aprendizagem dos estudantes em relação aos Poliedros de Platão.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Essa sequência foi produzida para ser implementada em seis encontros com duração 2 horas aulas. Foi organizada em seis atividades, uma para cada encontro.

A primeira atividade é uma apresentação da Calculadora Gráfica GeoGebra 3D. Deve ser solicitado aos estudantes que baixem esse aplicativo nos seus *smartphones.* Além disso, o professor precisa dispor de um *notebook* e um projetor multimídia para acompanhar e orientar os alunos durante o desenvolvimento das atividades.

A segunda e terceira atividade contém uma revisão sobre os polígonos regulares: triângulo equilátero, o quadrado e o pentágono regular, pois no estudo dos Sólidos de Platão, recorre-se aos conteúdos e conceitos desses polígonos.

A partir da quarta atividade, são exploradas a definição e a construção dos Sólidos de Platão, discutindo a visualização dos números de faces, arestas e vértices relacionados com a Fórmula de Euler.

No decorrer de todas as atividades, o professor deverá orientar os alunos, buscando sempre estimulá-los quanto à reflexão e à descoberta.

Nessa sequência serão abordados os seguintes conteúdos:

- ✓ Definição de polígonos regulares;
- ✓ Definição dos Poliedros de Platão;
- ✓ Nomenclatura dos Poliedros de Platão;
- ✓ Elementos (vértices, número de arestas e número de faces) dos poliedros de Platão;
- ✓ Fórmula de Euler.

Quanto às habilidades recomendadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), essa sequência pode contribuir para que os estudantes desenvolvam as informadas no Quadro 1.

Quadro 1 – Habilidades da BNCC

F02MA14	Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais;
EM13MAT309	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas;
EF03MA13	Associar figuras geométricas espaciais do mundo físico e nomear essas figuras;
EF04MA17	Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais;
EF05MA16	Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos.

Fonte: Brasil, 2018, pp. 537 – 539.

ATIVIDADE 1- Apresentação da Calculadora GeoGebra 3D

Objeto de aprendizagem: Sólidos de Platão.

Objetivo geral: verificar como uma sequência de atividades elaborada com o uso da RA pode contribuir para o ensino dos elementos dos Sólidos de Platão.

Objetivo específico: apresentar a Calculadora GeoGebra 3D, bem como os comandos necessários para a utilização do software nas próximas atividades.

Recursos utilizados: caneta, lápis, borracha, *smartphone* com o aplicativo Calculadora GeoGebra 3D, notebook, projetor, manual explicativo e atividade impressa.

Estratégia: organizar os alunos em duplas, baixar a calculadora GeoGebra 3D, projetar na lousa a Calculadora GeoGebra 3D instalada no *notebook* e entregar o manual explicativo para cada integrante da dupla. Pedir para os alunos abrirem a Calculadora GeoGebra 3D e acompanhar a explicação da função de cada comando (explicação será feita pelo professor). Após a explicação dos comandos, entregar a atividade impressa (Construção de polígonos convexos) e solicitar que os alunos respondam.

Avaliação: verificar se os alunos aprenderam a utilizar os comandos que servirão de base para as próximas atividades.

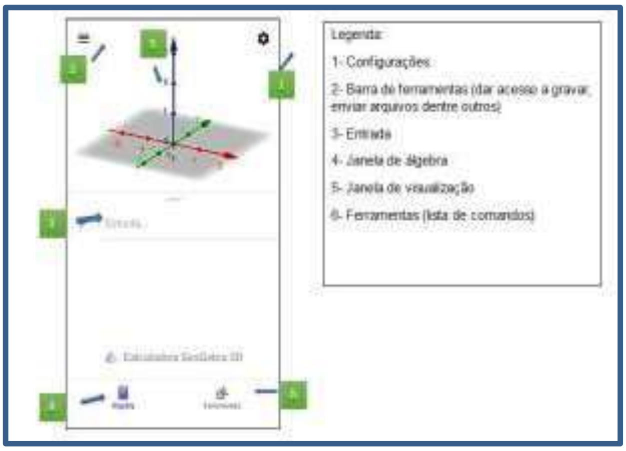
Momento 1- Apresentação da calculadora GeoGebra 3D

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica de fácil utilização que possui finalidades didáticas para ser utilizado em situações de ensino e aprendizagem de matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra possibilita aliar Geometria e Álgebra, oportunizando melhor ensinar e aprender, principalmente por ele ser um software de matemática dinâmica (DMS). Não faz muito tempo, o GeoGebra não disponibilizava visualizações 3D e eram realizadas trabalhosas construções que simulavam ambientes e objetos 3D; mas em outubro de 2014, foi disponibilizada uma versão de teste que trazia algumas novas ferramentas, como a janela de visualização 3D.

O GeoGebra é gratuito e pode ser baixado a partir do site Geogebra.org.

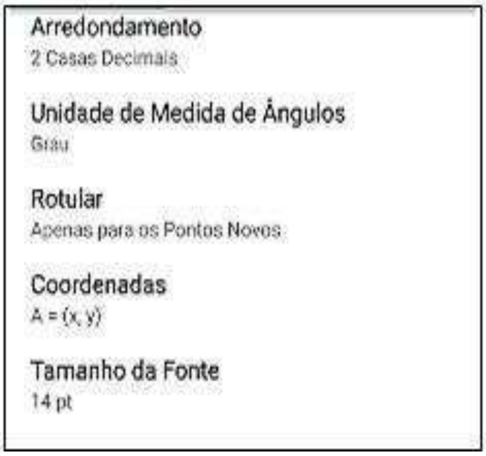
Para baixar a Calculadora GeoGebra 3D em seu smartphone, abra o Google Play Store, digite “Calculadora GeoGebra 3D” e clique em instalar.

Ao ser carregada, a Calculadora GeoGebra 3D apresenta a interface inicial que possui a seguinte configuração padrão:



Clique em Ferramentas - Nessa aba, você encontrará os seguintes comandos:

Clique na janela de Configurações - Nessa aba, você encontrará os seguintes comandos:



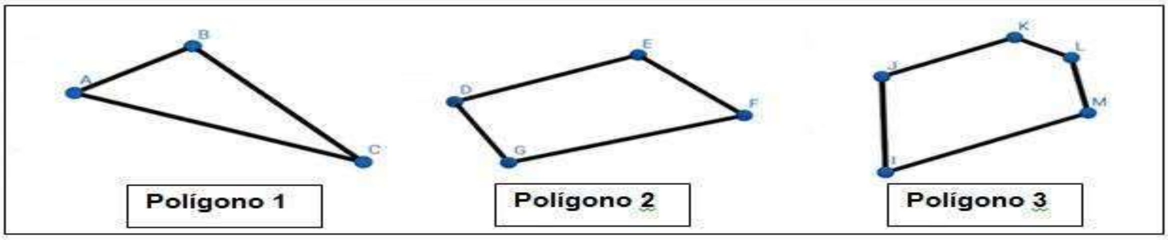
Clique em barra de ferramentas - Nessa aba, você encontrará os seguintes comandos:

Momento 2- Construção de polígonos convexos

Passo 01: Abra a Calculadora Gráfica GeoGebra 3D.

Passo 02: Clique em configurações, janela de visualização e desabilite exibir eixos e exibir planos.

Passo 03: Utilizando os comandos: Ferramentas – Mais - Segmento – janela de visualização, construa os polígonos 1, 2 e 3 de medidas quaisquer.



Passo 04: Utilizando a janela de **ferramentas do passo 3**, clique em **Mais** e habilite em medições o comando **Distância comprimento**. Em seguida clique em cima dos pontos A e B, B e C, A e C; D e E, E e F, F e G, D e G; I e J, J e K, K e L, L e M, M e I.

Preencha a tabela com as dados obtidos nos passos 3 e 4.

Figura	Número de lados (A) Número de Vértices (V) Nome do polígono de acordo o número de lados (N)	Medidas de cada lado
1	A =__________ V= __________ N = __________	$\overline{AB}$ = ___________ $\overline{BC}$ = ___________ $\overline{AC}$ = ___________
2	A = __________ V= __________ N = __________	$\overline{DE}$ = ___________ $\overline{EF}$ = ___________ $\overline{FG}$ = ___________ $\overline{DG}$ = ___________
3	A = __________ V=___________ N = __________	$\overline{IJ}$ = ___________ $\overline{JK}$ = ___________ $\overline{KL}$ = ___________ $\overline{LM}$ = ___________ $\overline{MI}$ = ___________

Ao final dessa atividade, é possível que os alunos saibam utilizar os comandos necessários para as próximas atividades e apresentem a solução correta.

Figura	Número de lados (A) Número de Vértices (V) Nome do polígono de acordo o número de lados (N)	Medidas de cada lado
1	N = 3 V= 3 M = Triângulo	$\overline{AB}$ = ___________ $\overline{BC}$ = ___________ $\overline{AC}$ = ___________
2	N = 4 V= 4 M = quadrilátero	$\overline{DE}$ = ___________ $\overline{EF}$ = ___________ $\overline{FG}$ = ___________ $\overline{DG}$ = ___________

3	N = 5 V=5 M= Pentágono	$\overline{IJ} =$ ____________ $\overline{JK} =$ ____________ $\overline{KL} =$ ____________ $\overline{LM} =$ ____________ $\overline{MI} =$ ____________

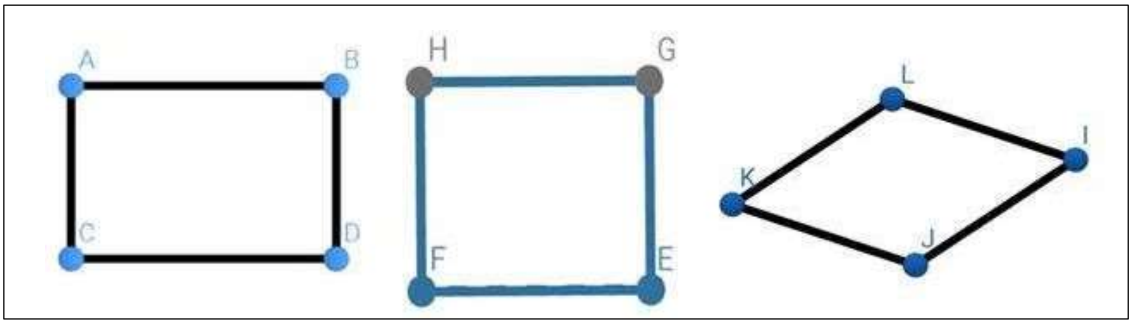
ATIVIDADE 2: Revisão de polígonos regulares

Objetivo específico: Revisar definição de polígonos regulares utilizando régua e transferidor.

Recursos utilizados: lápis, caneta, borracha, régua, transferidor e atividade impressa.

Estratégia: Organizar os alunos em grupos, entregar a atividade impressa para cada aluno e pedir para os alunos responderem à atividade impressa.

Avaliação: verificar se os alunos conseguem identificar o que é um polígono regular.



QUESTÃO 01- Usar a régua para medir os lados do retângulo ABCD, do quadrado EFGH e do losango IJKL e o transferidor para medir os ângulos $A\hat{B}D$, $B\hat{D}C$, $D\hat{C}A$, $C\hat{A}B$; $H\hat{G}E$, $G\hat{E}F$, $E\hat{F}H$, $F\hat{H}G$ e $K\hat{L}I$, $L\hat{I}J$, $I\hat{J}K$, $J\hat{K}L$.

De acordo com as informações obtidas,

a) Qual a medida dos ângulos internos $A\hat{B}D$, $B\hat{D}C$, $D\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$?

____

____

Possíveis respostas dos alunos:

$A\hat{B}D = 90^{\circ}$, $B\hat{D}C = 90°$, $D\hat{C}A = 90^{\circ}$ e $C\hat{A}B = 90°$

b) Qual a medida dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AC}$?

Possíveis respostas dos alunos:

$\overline{AB} = 4,7$ cm

$\overline{CD}$ = 4,7 cm

$\overline{BD}$ = 3,0 cm

$\overline{AC}$ = 3,0 cm

c) Qual a medida dos ângulos internos $H\hat{G}E$, $G\hat{E}F$, $E\hat{F}H$ e $F\hat{H}G$?

Possíveis respostas dos alunos:

$H\hat{G}E = 90^{\circ}$, $G\hat{E}F = 90°$, $E\hat{F}H = 90^{\circ}$ e $F\hat{H}G = 90°$

d) Qual a medida dos lados $\overline{GH}$, $\overline{GE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{HF}$?

Possíveis respostas dos alunos:

$\overline{GH} = 4,0$ cm

$\overline{GE}$ = 4,0 cm

$\overline{EF}$ = 4,0 cm

$\overline{HF}$ = 4,0 cm

e) Qual a medida dos ângulos internos $K\hat{L}I$, $L\hat{I}J$, $I\hat{J}K$ e $J\hat{K}L$?

Possíveis respostas dos alunos:

$K\hat{L}I$ = 126,9º, $L\hat{I}J$ = 53,1°, $I\hat{J}K$ = 126,9º e $J\hat{K}L$ = 53,1°

f) Qual a medida dos lados $\overline{LI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$ e $\overline{KL}$?

____

____

Possíveis respostas dos alunos:

$\overline{LI} = 2,8$ cm

$\overline{IJ}$ = 2,8 cm

$\overline{JK}$ = 2,8 cm

$\overline{KL}$ = 2,8 cm

QUESTÃO 02- Anotar as principais características que os polígonos ABCD e EFGH têm em comum.

____

____

____

____

____

Possíveis respostas dos alunos:

Tanto o retângulo ABCD quanto o quadrado EFGH, possuem 4 lados e, portanto, 4 ângulos com 90° cada. No retângulo, os lados AB e CD são congruentes, assim como os lados AD e BC. No quadrado, todos os lados são congruentes, ou seja, possuem a mesma medida.

QUESTÃO 03 - Anotar as principais diferenças entre os polígonos ABCD e EFGH.

____

____

____

____

____

Possíveis respostas dos alunos:

O retângulo ABCD não possui todos os lados congruentes e o quadrado ABCD, todos os lados são congruentes, ou seja, possuem a mesma medida.

QUESTÃO 04- Anotar as principais características que os polígonos EFGH e IJKL tem em comum.

Possíveis respostas dos alunos:

Tanto o quadrado EFGH, quanto o losango IJKL, possuem todos os lados são congruentes.

QUESTÃO 05- Anotar as principais diferenças entre os polígonos EFGH e IJKL.

Possíveis respostas dos alunos:

No losango, os ângulos $K\hat{L}I$ e $I\hat{J}K$ são congruentes, assim como os ângulos $L\hat{I}J$ e $J\hat{K}L$. No quadrado, todos os ângulos são congruentes.

QUESTÃO 06- Dentre os polígonos ABCD e EFGH, qual deles não é regular? Justifique a sua resposta.

Possíveis respostas dos alunos:

Dentre os polígonos mencionados, apenas o retângulo ABCD é não regular, pois, apesar de ter ângulos internos congruentes, não possui todas as arestas com medidas iguais.

QUESTÃO 07- Dentre os polígonos EFGH e IJKL qual deles não é regular. Justifique a sua resposta.

____

____

____

____

Possíveis respostas dos alunos:

Dentre os polígonos mencionados, apenas o losango IJKL é não regular, pois, apesar das medidas de comprimento de seus lados serem iguais, a medida angular de seus ângulos internos é diferente.

QUESTÃO 08- De acordo as respostas dos itens anteriores, quais as condições necessárias e suficientes, para que um polígono convexo de n lados, com n inteiro e $n \geq 3$ seja classificado como regular?

____

____

____

____

____

Possíveis respostas dos alunos:

Para que um polígono convexo seja regular, é necessário e suficiente que ele possua todas asmedidas de seus lados congruentes e todas as medidas de seus ângulos internos também congruentes, ou seja, os lados possuem o mesmo comprimento e os ângulos internos também possuem a mesma medida angular.

Os polígonos convexos que têm as características seguintes são regulares:

- Todos os seus lados são congruentes (têm a mesma medida de comprimento);
- Todos os seus ângulos internos são congruentes (têm a mesma amplitude);

Todo o **polígono regular** tem as seguintes propriedades:

- A amplitude de cada ângulo externo pode ser calculada dividindo 360º pelo número n de lados;
- Se o número n de lados for ímpar, então nenhuma das suas diagonais passa pelo centro do polígono;
- Se o número n de lados for par, então o número de diagonais que passam pelo centro do polígono é igual à metade do número n de lados.

ATIVIDADE 3: Revisão dos conceitos de perímetro e área dos polígonos regulares que compõem as faces dos Poliedros de Platão

Objetivo específico: revisar perímetro e área de polígonos regulares que compõem as faces dos Poliedros de Platão.

Recursos utilizados: caneta, lápis, borracha, *smartphone* com o aplicativo Calculadora GeoGebra 3D, *notebook*, projetor, manual explicativo e atividade impressa.

Estratégia: organizar os alunos em duplas, projetar na lousa a Calculadora GeoGebra 3D instalada no *notebook*, pedir que os alunos abram a Calculadora GeoGebra 3D, entregar a atividade impressa e solicitar que os alunos respondam.

Avaliação: verificar se os alunos conseguem calcular a área e o perímetro dos polígonos regulares que compõem as faces dos Poliedros de Platão.

QUESTÃO 01- Usar a calculadora GeoGebra 3D para construir os polígonos regulares a seguir de medidas quaisquer e em seguida, preencha a tabela com os dados solicitados.

a) Triângulo Equilátero:

Passo 01. Abra a Calculadora GeoGebra 3D.

Passo 02. Clique em configurações, janela de visualização e desabilite exibir eixos. **Passo 03.** Clique em ferramentas, ponto, e em dois locais diferentes no plano na janela de visualização. Em seguida clique em MAIS, polígono regular, em cima dos dois pontos. Digite 3 na janela POLÍGONO REGULAR, ok.

Passo 04. Ainda na janela de ferramentas, clique em: MAIS, Distância comprimento, A e B, B e C, A e C. Anote na tabela os valores encontrados.

Passo 05. Na mesma janela do Passo 04, clique em Área e no triângulo construído. Anote na tabela o valor encontrado.

Polígono regular	Medida do lado (l)	Perímetro	Área	Medida de cada ângulo interno
Triângulo Equilátero				

A área (A) de um triângulo equilátero pode ser calculada algebricamente por meio da fórmula $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, onde l representa a medida do lado do triângulo. Fazendo o uso dessa fórmula, calcule algebricamente a área do triângulo construído. Compare os resultado encontrados por meio da fórmula algébrica e da calculadora GeoGebra 3D.

É possível que os alunos encontrem o mesmo resultado, ou um valor aproximado (devido a aproximação do número irracional, raiz quadrada de três, na fórmula algébrica) usando a calculadora GeoGebra 3D e a fórmula algébrica.

a) Quadrado:

Passo 1. Clique em **configurações**, janela de visualização e desabilite exibir eixos.

Passo 2. Clique em ferramentas, ponto, clique em dois locais diferentes na janela do plano na janela de visualização. Em seguida clique em MAIS, polígono regular, em cima dos dois pontos e digite 4 na janela POLÍGONO REGULAR e ok.

Passo 3. Ainda na janela de ferramentas, clique em MAIS, Distância comprimento, e em cima dos pontos A e B, B e C, C e D, A e D, nesta ordem. Anote na tabela os valores encontrados.

Passo 4. Na mesma janela do Passo 03, clique em Área e no quadrado construído no passo 2 . Anote na tabela o valor encontrado.

Polígono regular	Medida do lado (l)	Perímetro	Área	Medida de cada ângulo interno
Quadrado				

A área (A) de um quadrado de lado de medida l, também poderá ser calculada algebricamente, por meio da fórmula A = l^2. Fazendo o uso da fórmula, calcule a área do quadrado construido. Compare os resultado obtidos através da fórmula e da calculadora GeoGebra 3D.

Espera-se que os alunos encontrem o mesmo resultado usando a calculadora GeoGebra 3D e utilizando a fórmula algébrica.

b) Pentágono regular:

Passo 1. Clique em ferramentas, ponto, clique em dois locais diferentes do plano na janela de visualização. Em seguida clique em MAIS, polígono regular, em cima dos dois pontos e digite 5 na janela POLÍGONO REGULAR e ok.

Passo 2. Ainda na janela de ferramentas, clique em MAIS, Distância comprimento, em cima de cada vértice consecutivo do pentágono construído no passo 1. Anote na tabela os valores encontrados.

Passo 3. Na mesma janela do Passo 2, clique em Área e no pentágono construído. Anote na tabela o valor encontrado.

Polígono regular	Medida do lado (l)	Perímetro	Área
Pentágono			

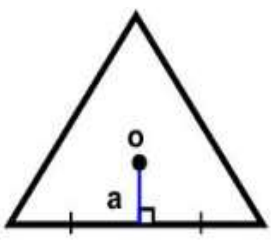
A área (A) do pentágono regular também poderá ser calculada algebricamente fazendo o uso da fórmula $1{,}72 \times l^2$, onde l representa a medida do lado do pentágono. Faça o uso da fórmula para calcular algebricamente a área do pentágono regular construído. Compare os resultado obtidos por meio da fórmula e da calculadora GeoGebra 3D.

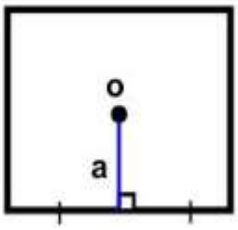
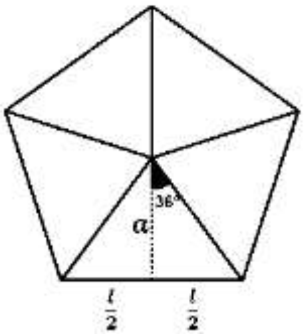
É possível que os alunos encontrem os mesmos resultados encontrados através da calculadora GeoGebra 3D e da fórmula algebrica.

O perímetro de uma figura geométrica plana é o comprimento do seu contorno. Para calcular, de forma simples, o perímetro de qualquer polígono regular, basta multiplicar o número de lados n do polígono pelo comprimento l dos lados, ou seja, perímetro de um polígono regular é igual o número de lados vezes o comprimento de um dos lados.

A área de um polígono é a medida da superfície dessa figura geométrica. Para realizar o cálculo da área dos polígonos são necessários alguns dados. No caso da área de polígonos regulares, o cálculo geral da área é o semiperímetro (metade do perímetro) multiplicado pelo apótema (**apótema é o segmento de reta que liga o centro do polígono regular até qualquer um dos seus lados, de forma perpendicular**).

As fórmulas usadas anteriormente foram obtidas utilizando o apótema desses polígonos.

Polígono regular	Apótema (a)	Semiperímetro (p)	Área = p × a
TRIÂNGULO EQUILÁTERO 	a = $\frac{1}{3}$ da altura (h) do triângulo equilátero. h = $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ (sendo l a medida do lado do triângulo equilátero). a = $\frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$	p = $\frac{3l}{2}$	A = p × a A = $\frac{3l}{2} \times \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{3}{6}\frac{l^2\sqrt{3}}{2}$ $=\frac{1}{2}\frac{l^2\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{l^2\sqrt{3}}{4}}$

 **QUADRADO**	a = $\frac{1}{2}$ da medida do lado do quadrado. a = $\frac{1}{2}\,l$	p = $\frac{4l}{2} = 2l$	A = p × a A = $2l \times \frac{1}{2}\,l = \frac{2l^2}{2} = \boldsymbol{l^2}$
PENTÁGONO REGULAR  	a = $\frac{l}{2tg36°}$ (razão tangente no triângulo retângulo), sendo tg36° = 0,7265 a = $\frac{l}{1{,}453}$	p = $\frac{5l}{2} = 2{,}5l$	A = p × a A = $2{,}5l \times \frac{l}{1{,}453}$ = $\frac{2{,}5}{1{,}453} \times l^2 =$ $\mathbf{1{,}72}\boldsymbol{l^2}$

ATIVIDADE 4: Os 5 Sólidos de Platão

Objetivo específico: Identificar os poliedros regulares, reconhecer a existência de apenas cinco, conhecer a origem dos poliedros, identificar os platônicos e relacionar os poliedros com os elementos primordiais: a terra, a água, o fogo, o ar e o universo.

Recursos utilizados: caneta, lápis, borracha, *notebook*, projetor e atividade impressa.

Estratégia: Organizar os alunos em grupos, assistir ao vídeo "Platão — Biografia de Platão — Filosofia Clássica", entregar a atividade impressa e solicitar que os alunos respondam à atividade impressa.

Avaliação: Verificar se os alunos conseguem identificar os polígonos que compõem as faces do Poliedro de Platão.

Momento 01- Assistir o vídeo Platão - Biografia de Platão - Filosofia Clássica.

Disponível em: **https://www.youtube.com/watch?v=mnpljx44Rm0**

Momento 02:

A Geometria nasceu da necessidade do homem e é de extrema importância para a sua vida. Conta a história que nos tempos remotos o homem teve que medir terra as margens do rio Nilo para demarcar terrenos durante as cheias do rio. Porém, as construções das pirâmides e templos pelas as civilizações Egípcia e Babilônica, são testemunho de um desenvolvimento de mais complexidade, indo além de medidas usadas nas demarcações de terras.

Muitos matemáticos, físicos e filósofos esforçaram-se no estudo da Geometria também na Grécia antiga. Entre os celebres matemáticos gregos está Platão.

Dentre suas descobertas, —Platão foi o primeiro a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares: o **cubo**, o **tetraedro** o **octaedro**, o **dodecaedro** e o **icosaedro**. Ele e seus seguidores estudaram esses sólidos com tal intensidade, que se tornaram conhecidos como Poliedros de Platão.

QUESTÃO 01- Os poliedros conhecidos como poliedros de Platão são todos aqueles que:

- São convexos;
- Tem o mesmo número de arestas em todas as faces;
- Em todos os vértices chega o mesmo número de arestas.
- Deve valer a relação de Euler (V + F = A + 2).

Além disso, no poliedro regular a soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada um de seus vértices será sempre menor do que 360°, ou seja, para formar um ângulo poliédrico (**ângulo poliédrico é cada bico de um poliedro formado por faces iguais**), a soma em volta de cada vértice não poderá ser maior que 360°''.

Nos Sólidos de Platão, as faces são polígonos regulares congruentes e, além disso, são necessárias pelo menos **três** faces unidas em cada vértice para formar um sólido.

Preencha as tabelas a seguir, com as possibilidades de união de faces em torno de cada vértice, lembrando que nos Sólidos de Platão, as faces são polígonos regulares congruentes e são necessárias pelo menos **três** faces unidas em cada vértice para formar um sólido.

a) As faces são triângulos equiláteros.

Número de triângulos	Medida de cada ângulo interno	Somas dos ângulos formados pela união das faces em cada vértice	Poliedro formado

Possíveis respostas dos alunos:

Número de triângulos	Medida de cada ângulo interno	Somas dos ângulos formados pela união das faces em cada vértice	Poliedro formado
3	60°	3 × 60 = 180°	Tetraedro
4	60º	4 × 60 = 240°	Octaedro
5	60°	5 × 60 = 300°	Icosaedro
6	60º	6 × 60 = 360°	Não existe

De acordo os dados da tabela, a que conclusão pode chegar?

É possível que os alunos concluam que não é possível construir um ângulo poliédrico com seis ou mais triângulos equiláteros.

b) As faces são quadrados.

Número de quadrados	Medida de cada ângulo interno	Somas dos ângulos formados pela união das faces em cada vértice	Poliedro formado

Possíveis respostas dos alunos:

Número de quadrados	Medida de cada ângulo interno	Somas dos ângulos formados pela união das faces em cada vértice	Poliedro formado
3	90°	$3 \times 90 = 270°$	Hexaedro
4	90º	$4 \times 90 = 360°$	Não existe

De acordo os dados da tabela, a que conclusão pode chegar?

____

____

É possível que os alunos concluam que não é possível construir um ângulo poliédrico com quatro ou mais quadrados.

c) As faces são pentágonos regulares.

Número de pentágonos	Medida de cada ângulo interno	Somas dos ângulos formados pela união das faces em cada vértice	Poliedro formado

Possíveis respostas dos alunos:

Número de pentágonos	Medida de cada ângulo interno	Somas dos ângulos formados pela união das faces em cada vértice	Poliedro formado
3	108°	$3 \times 108° = 324°$	Dodecaedro
4	108°	$4 \times 108° = 432°$	Não existe

De acordo os dados da tabela, a que conclusão podemos chegar?

____

____

É possível que os alunos concluam que é não é possível construir um ângulo poliédrico com quatro ou mais pentágonos.

d) É possível construir um ângulo poliédrico com 3 hexágonos regulares? Justifique a sua resposta?

____

____

É possível que os alunos concluam que não é possível construir um ângulo poliédrico com 3 ou mais hexágonos regulares, pois, a soma dos ângulos internos dos hexágonos em torno de cada vértice será maior ou igual a 360°.

Desse modo, temos apenas 5 poliedros de Platão e nenhum deles com faces hexagonais, heptagonais, etc. Vale ressaltar que todo poliedro regular é conhecido como Poliedro de Platão.

ATIVIDADE 05: Construção dos Sólidos de Platão

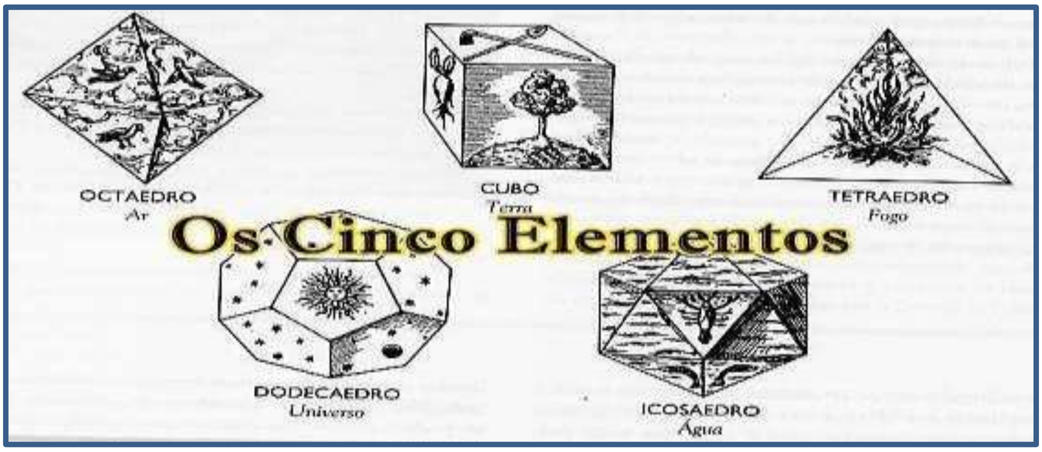
Objetivo específico: construir os Sólidos de Platão com a utilização do *software* Calculadora Gráfica GeoGebra 3D, com a sua ferramenta RA e explorar a área e o perímetro das faces dos sólidos construídos.

Recursos utilizados: caneta, lápis, borracha, *smartphone* com o aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D com RA, notebook, projetor e atividade impressa.

Estratégia: Organizar os alunos em 5 grupos e projetar na lousa a Calculadora GeoGebra 3D instalada no *notebook*. Pedir para os alunos abrirem a Calculadora GeoGebra 3D, entregar a atividade impressa e solicitar que cada grupo construa um dos 5 Sólidos de Platão e, na sequência, responder à atividade impressa.

Avaliação: verificar se os alunos construíram os sólidos solicitados e se conseguem reconhecer os polígonos regulares que compõem as faces dos Poliedros de Platão, bem como calcular a área e o perímetro do sólido montado e planificado.

QUESTÃO 01- Para Platão os sólidos estão presentes na natureza. Com isso, ele relacionou os poliedros regulares a cinco elementos da natureza: o tetraedro (**fogo**), cubo (**terra**), icosaedro (**água**), octaedro (**ar**) e Dodecaedro (**universo**).



Fonte: https://www.escolადematematicapontal.com.br/l/os-solidos-de-platao/

Sugestão: A fim de conhecer um pouco mais sobre a associação dos Poliedros de Platão com a natureza**,** assistir ao vídeo, Sólidos de Platão e sua relação com a natureza disponível no YouTube.

Use os passos seguintes para construir os 5 Sólidos de Platão.

Sólido	Passos
Tetraedro	**Passo 01.** Abra a calculadora GeoGebra 3D **Passo 02.** Clique em configurações, janela de visualização e desabilite exibir eixos e exibir planos. **Passo 03.** Clique em álgebra e digite: A = (0,0,0) enter, B = (3, 0, 0) enter, Tetraedro(A, B) enter. **Passo 04.** Clica em RA e projeta a figura sobre um plano, que poderá ser o chão da sala de aula.
Hexaedro	**Passo 01.** Abra a calculadora GeoGebra 3D **Passo 02.** Clique em configurações, janela de visualização e desabilite exibir eixos e exibir planos. **Passo 03.** Clique em álgebra e digite: A = (0,0,0) enter, B = (4, 0, 0) enter, Cubo(A, B) enter. **Passo 04.** Clica em RA e projeta a figura sobre um plano, que poderá ser o chão da sala de aula.
Octaedro	**Passo 01.** Abra a calculadora GeoGebra 3D **Passo 02.** Clique em configurações, janela de visualização e desabilite exibir eixos e exibir planos. **Passo 03.** Clique em álgebra e digite: A = (0,0,0) enter, B = (3, 0, 0) enter, Octaedro (A, B) enter. **Passo 04.** Clica em RA e projeta a figura sobre um plano, que poderá ser o chão da sala de aula.
Dodecaedro	**Passo 01.** Abra a calculadora GeoGebra 3D **Passo 02.** Clique em configurações, janela de visualização e desabilite exibir eixos e exibir planos. **Passo 03.** Clique em álgebra e digite: A = (0,0,0) enter, B = (3, 0, 0) enter, Tetraedro(A, B) enter. **Passo 04.** Clica em RA e projeta a figura sobre um plano, que poderá ser o chão da sala de aula.
Icosaerdo	**Passo 01.** Abra a calculadora GeoGebra 3D **Passo 02.** Clique em configurações, janela de visualização e desabilite exibir eixos e exibir planos. **Passo 03.** Clique em álgebra e digite: A = (0,0,0) enter, B = (3, 0, 0) enter, Icosaedro(A, B) enter. **Passo 04.** Clica em RA e projeta a figura sobre um plano, que poderá ser o chão da sala de aula.

Agora, preencha a tabela observando os sólidos construídos.

Nome do sólido	Nome dos polígonos que compõem as faces do sólido	Número de vértices (V) do sólido	Número de faces (F) do sólido	Número de arestas (A) do sólido	V + F

Possíveis respostas dos alunos:

Nome do sólido	Nome dos polígonos que compõem as faces do sólido	Número de vértices (V) do sólido	Número de faces (F) do sólido	Número de arestas (A) do sólido	V + F
Tetraedro	Triângulo	4	4	6	8
Hexaedro	Quadrado	8	6	12	14
Octaedro	Triângulo	6	8	12	14
Dodecaedro	Pentágono	20	12	30	32
Icosaedro	Triângulo	12	20	30	32

Analisando os valores obtidos na tabela, você consegue identificar alguma relação entre o número de V + F com o número de arestas? Justifique a sua resposta.

____

____

É possível que os alunos percebam que o número de vértices mais o número de faces equivale ao número de arestas mais 2 unidades.

A relação **V + F = A + 2** é um algoritmo matemático que relaciona esses três elementos dos sólidos geométricos (Vértices, Faces e Arestas) e, que pode facilitar a contagem dos mesmos. Essa relação é denominada de Relação de Euler.

O grande matemático Leonhard Euler enriqueceu de maneira insuperável a história da matemática com 886 trabalhos publicados, entre livros e artigos, sobre os mais variados ramos. Compensou sua deficiência visual, inicialmente cego de apenas um olho, com uma fantástica memória e capacidade de concentração. Posteriormente, completamente cego, continuou sua produção com a ajuda de uma pessoa que anotava e registrava as ideias que o eternizaram.

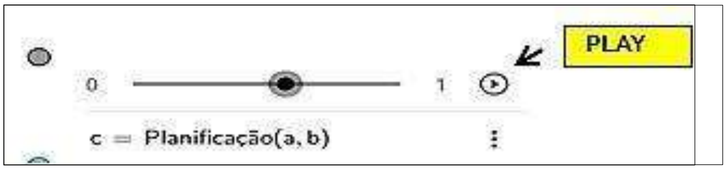
Sempre que o poliedro for convexo, podemos utilizar a relação de Euler para determinar ou confirmar valores desconhecidos de V, F ou A.

Fonte: https://www.ebiografia.com/leonhard_euler/

2º MOMENTO- Planificação dos Sólidos de Platão

Passo 01. Abra a janela de Configurações, clique em Planificação e em seguida clique em cima do sólido construído na janela de visualização.

Passo 02. Clique em álgebra e procure pela palavra planificação e clique em play.



Agora responda:

a) Qual foi o sólido construído pelo seu grupo?

____

É possível que os alunos apresentem o nome correto do sólido.

b) Observando a planificação, quantos polígonos regulares tem a planificação?

____

É possível que os alunos apresentem a solução correta de acordo o sólido construído pelo seu grupo:

Tetraedro: 4 triângulos

Hexaedro: 6 quadrados

Octaedro: 8 triângulos

Dodecaedro: 12 pentágonos

Icosaedro: 20 triângulos

c) O número de polígonos na planificação é o mesmo número no sólido construído?

____

É possível que os alunos respondam que sim.

d) Se cada polígono que compõe a face do sólido regular tem n lados, com n inteiro e $3 \leq n \leq 5$, então o número de arestas do sólido deveria ser n vezes o número de polígonos que compõe o sólido. Por esse produto não é válido no cálculo do número total de arestas do sólido?

____

____

É possível que os alunos percebam que, cada aresta, é aresta de duas faces ao mesmo tempo, por isso o resultado fica dividido por dois.

e) Usando a ferramenta medição, meça a aresta de uma das faces do poliedro na planificação. Qual foi a medida encontrada?

____

____

É possível que os alunos apresentem a solução correta: 3 cm

f) Calcule o perímetro do sólido construído.

____

____

É possível que os alunos apresentem a solução correta de acordo o sólido construído pelo seu grupo:

Tetraedro: 18 cm

Hexaedro: 36 cm

Octaedro: 36 cm

Dodecaedro: 90 cm

Icosaedro: 90 cm

g) Na janela de ferramenta, use medição, área e calcule a área do polígono que compõe a face do poliedro que você construiu.

____

____

É possível que os alunos apresentem a solução correta:

Área triângulo equilátero = 3,9 cm^2 Área quadrado = 9 cm^2

Área pentágono regular = 15,48 cm^2

h) Calcule a área total do sólido construído. Quando necessário, utilize 1,73 como aproximação para a $\sqrt{3}$.

É possível que os alunos apresentem a solução correta de acordo o sólido construído pelo seu grupo:

Área tetraedro = 3,9 Área hexaedro = 54 cm²

Área octaedro = 31,2 cm²

Área dodecaedro = 185,76 cm² Área Icosaedro = 78 cm²

ATIVIDADE 06: produzir um vídeo explicativo.

Objetivo específico: Socializar com os colegas dos demais grupos o sólido construído por cada grupo.

Recursos utilizados: *notebook*, *smartphone* e projetor.

Estratégia: ao final da aula 5, solicitar que os alunos de cada grupo produzam um vídeo explicativo sobre o sólido construído por seu grupo e apresentar para os colegas dos demais grupos na aula seguinte (aula 6).

Avaliação: verificar se os alunos conseguiram explorar corretamente as informações trabalhadas durante os 5 encontros sobre os poliedros regulares de Platão.

Instruções:

Cada grupo deverá produzir um vídeo explicativo sobre o sólido construído para socializar com os colegas dos demais grupos.

No vídeo deverão constar as seguintes informações:

- O sólido em RA bem como a sua planificação com animação, e o nome do sólido construído;
- O nome do elemento da natureza associado ao sólido e o motivo dessa associação;
- Nome do polígono que compões as faces de cada sólido;
- Número de vértices, arestas e faces do sólido;
- O cálculo algébrico do número total de arestas, faces e vértices do sólido construído.

O vídeo deverá conter todas as informações solicitadas e ter no máximo 4 minutos.

SUGESTÕES PARA A GRAVAÇÃO DO VÍDEO:

- Aplicativo de gravação de tela para *smarphone*;
- AZ Screen Recorder. O AZ Screen Recorder;
- DU Recoder;
- Vídeo explicativo - Como Gravar a tela do Celular (ANDROID OU IOS) Grátis e FÁCIL! Diponivel em: https://www.youtube.com/watch?v=NZ3ZEP99Bbc.

VIDEOS PARA INSPIRAÇÃO:

Os Poliedros de Platão e a Natureza. Diponivel em: https://www.youtube.com/watch?v=RuQc0R83gL8

Descobrindo os Poliedros de Platão. Diponivel em: https://www.youtube.com/watch?v=VO9fzrDCrAg

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino dos sólidos geométricos, em especial os Sólidos de Platão, o objeto de estudo desta sequência didática, exige dos professores uma prática de ensino que vai além da explicação e do uso do quadro e do livro didático por serem instrumentos limitados principalmente no que se refere à Representação Visual Dinâmica.

Atividades como as sugeridas nesta sequência didática tendem a despertar o interesse no aluno pelo conteúdo estudado, podendo contribuir para sua compreensão, pois:

> É bem conhecido o papel fundamental do envolvimento pessoal do aluno no processo de aprendizagem. Quanto mais ativamente uma pessoa participar da aquisição de um conhecimento, mais ela irá integrar e reter aquilo que aprender. Ora, a multimídia interativa, graças à sua dimensão reticular ou não linear, favorece uma atitude exploratória, ou mesmo lúdica, face ao material a ser assimilado. É, portanto, um instrumento bem adaptado a uma pedagogia ativa (Lévy, 1993, p. 40).

Dessa forma, pode-se concluir que a utilização da tecnologia é importante para os alunos entenderem melhor os conceitos dos Sólidos de Platão, além de ser um auxílio para os professores de matemática em suas tarefas diárias, contribuindo para o processo de ensino e de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BORTOLOSSI, Humberto. **Oficina de GeoGebra 3D e Realidade Aumentada para Celulares**. YouTube. 2019. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Y1Zy5PbfHI0. Acesso em 23 set. 2023.

DEMSKI, Thatielle Martins; GOLDONI, Viviane. Descobrindo os poliedros de Platão. Disponível em: file:///C:/Users/Windows/Downloads/descobrindoospoliedros.pdf. Acesso em 09 out. 2023.

ENSINO DE MATEMÁTICA COM O AUXÍLIO DA REALIDADE AUMENTADA. Disponível em: file:///C:/Users/Windows/Downloads/Artigo%20Realidade%20Aumentada%201%20(1).pdf. Acesso em 23 set. 2023.

JAHRING, Thaciane; SAD, Ligia Arantes. **Alguns porquês sobre os poliedros de Platão e a relação de Euler**. Vitória: Edifes Acadêmico, 2021.

LÉVY, Pierre. **As Tecnologias da Inteligência** – O futuro do pensamento na era da Informática. Rio de Janeiro: Ed. 34, 1993.

RELATÓRIO. Disponível em: https://sites.unipampa.edu.br/pibid2014/files/2015/07/relatorio-atividade-geogebra-3d.pdf. Acesso em 13 out. 2023.

RESUMO. Disponível em: http://www.dma.ufv.br/downloads/MAT%20208/2017-II/textos/POLIEDROS_Marli%20D.%20D.%20Moreira%20-%20MAT%20208%20-%202017-II.pdf . Acesso em 13 out. 2023.

ROMEIRO, Rafael Ferraz; TORI, Romero; SILVA, Bruno Harllen Pontes da. **Realidade Aumentada no Processo de Ensino-Aprendizagem dos Poliedros e suas Construções Geométricas:** Uma Proposta de design de Conteúdo Imersivo. Disponível em: https://especializacao.icmc.usp.br/documentos/tcc/rafael_romeiro.pdf. Acesso em out. 2023.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA GEOMETRIA ESPACIAL. Disponível em: file:///C:/Users/Windows/Downloads/Produto-Educacional_Ednara-Alves-da-Silva-Paula_230825_110503.pdf. Acesso em 23 set. 2023.

SILVA, Roberto Carlos Delmas da. **Realidade aumentada como interface para a aprendizagem de poliedros do tipo prismas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe. São Cristovão, 2019. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/11163/2/ROBERTO_CARLOS_DELMAS_SILVA.pdf Acesso em 23 set. 2023.

TIC NA MATEMATICA. **O GeoGebra agora é 3D, para ensinar uma Matemática ainda mais dinâmica!** Disponível em: https://www.ticsnamatematica.com/2015/03/Geogebra-3D-ensinar- Matematica-maisdinamica.html. Acesso em 13 out. 2023.