

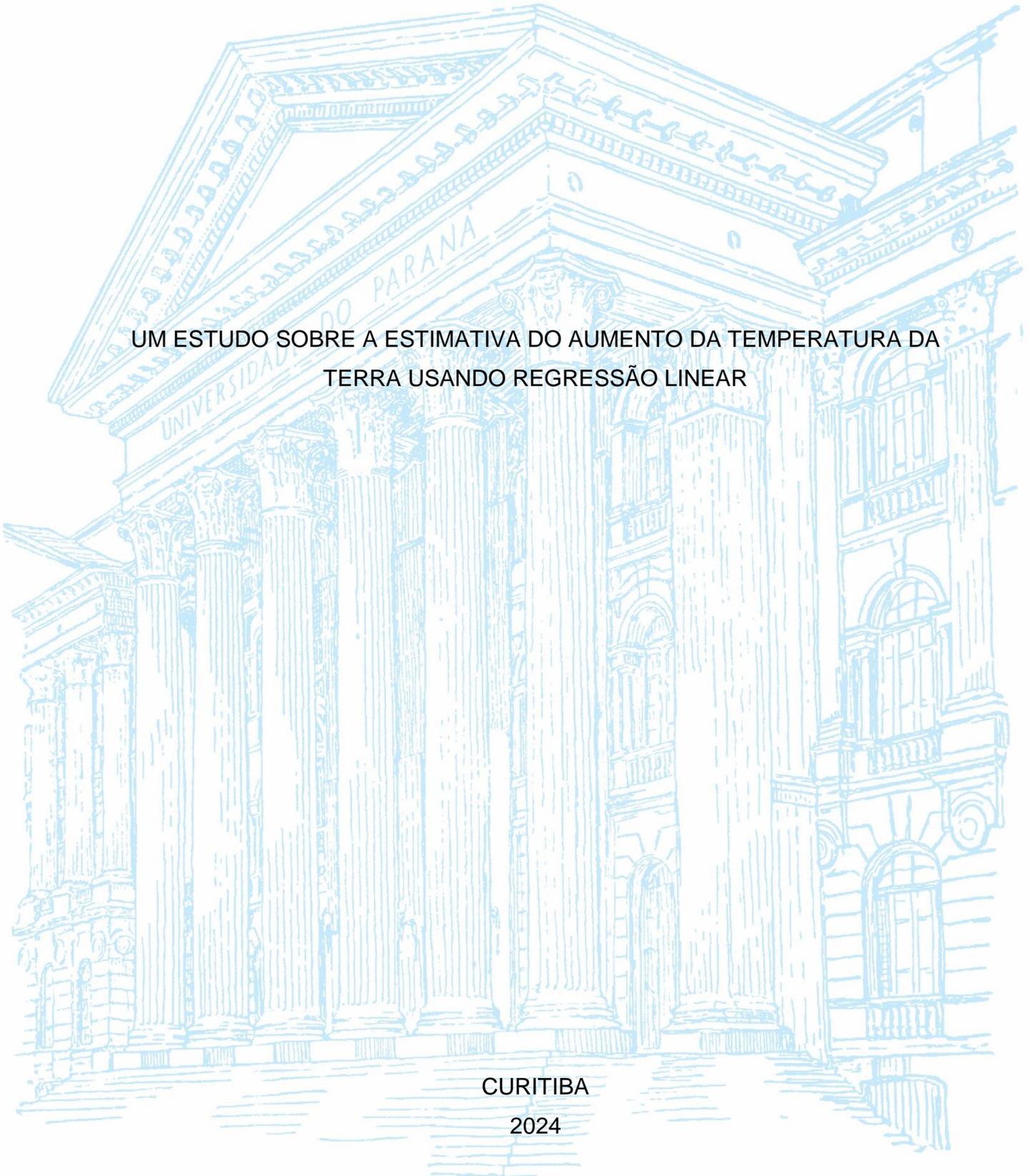
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

KETTY SPLETT

UM ESTUDO SOBRE A ESTIMATIVA DO AUMENTO DA TEMPERATURA DA
TERRA USANDO REGRESSÃO LINEAR

CURITIBA

2024



KETTY SPLETT

UM ESTUDO SOBRE A ESTIMATIVA DO AUMENTO DA TEMPERATURA DA
TERRA USANDO REGRESSÃO LINEAR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Pettres.

CURITIBA

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Splett, Ketty

Um estudo sobre a estimativa do aumento da temperatura da terra usando regressão linear / Ketty Splett. – Curitiba, 2024.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Orientador: Roberto Pettres

1. Temperatura da terra. 2. Regressão linear. 3. Mudanças climáticas. 4. Gases do efeito estufa. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. III. Pettres, Roberto. IV. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de **KETTY SPLETT** intitulada: **UM ESTUDO SOBRE A ESTIMATIVA DO AUMENTO DA TEMPERATURA DA TERRA USANDO REGRESSÃO LINEAR**, sob orientação do Prof. Dr. **ROBERTO PETTRES**, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-graduação.

Curitiba, 27 de Novembro de 2024.



ROBERTO PETTRES

Presidente da Banca Examinadora



STELA ADAMI VAYEGO

Avaliador Externo (DEST-UFPR)



JOSÉ JOÃO ROSSETTO

Avaliador Interno (DMAT-UFPR)

Dedico este trabalho aos meus pais, à minha filha e a todos os amigos do PROFMAT.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão aos meus pais, Osmar Splett e Leontina Splett. Ao meu pai, cujo esforço garantiu o sustento de nossa família e contribuiu significativamente para minha formação. Para minha mãe, que sempre me incentivou a continuar estudando e cujas palavras de encorajamento sempre me ajudaram a seguir em frente. Isso foi essencial para que eu pudesse alcançar este momento e, sem o apoio deles, não teria chegado até aqui.

Agradeço à minha filha Kamila Splett Bergmann, por sua compreensão diante da redução do tempo que eu poderia dedicar a ela durante meus estudos. Sua alegria e celebração a cada aprovação que tive nas disciplinas e no Exame Nacional de Qualificação (ENQ) foram fontes de grande motivação para mim.

Agradeço imensamente à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) pela concessão da bolsa de estudos, que foi fundamental para a realização deste trabalho. O suporte financeiro e acadêmico proporcionado por essas instituições foram essenciais para o desenvolvimento da dissertação. Gostaria de expressar minha profunda gratidão pela confiança e pela oportunidade de aprimoramento acadêmico e profissional.

Agradeço ao meu orientador, professor doutor Roberto Pettres, pela disposição, dedicação e paciência ao orientar, direcionar e corrigir minha dissertação. Sua orientação foi fundamental para o desenvolvimento e conclusão desse trabalho acadêmico.

Aos professores do PROFMAT, que ministraram as disciplinas e, ao longo do curso, dedicaram-se a nos ensinar com carinho, atenção e compreensão. Suas contribuições foram essenciais para o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal.

Aos meus colegas do PROFMAT, Edísio Alves dos Anjos e Nilton Novack, pelo companheirismo e pela rica troca de ideias, expressei minha sincera gratidão. Sem dúvida, esses momentos serão inesquecíveis.

Agradeço a Deus pela dádiva da vida, pela saúde, pela proteção constante e por ter me guiado com sabedoria até este ponto. Sou grata por suas bênçãos contínuas e por estar sempre ao meu lado, iluminando meu caminho.

*“A maravilha de um Deus que criou o universo e o mantém em ordem
é revelada pela matemática”*

Isaac Newton

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo sobre a variação da temperatura média da Terra utilizando a análise de regressão linear. Apesar de não fazer parte do currículo de matemática do ensino médio, a regressão linear pode servir como uma ferramenta educativa para aumentar a conscientização dos alunos sobre o aquecimento global e aprofundar seus conhecimentos em estatística. O trabalho aborda a dinâmica do efeito estufa e das mudanças climáticas por meio de uma análise histórica e contemporânea. Ressalta-se que a atividade humana tem desempenhado um papel crucial no aquecimento global desde a Revolução Industrial. A regressão linear é utilizada para estimar as futuras variações na temperatura média da Terra. São apresentados cenários que simulam as emissões de gases de efeito estufa e suas consequências. Além disso, sugere-se uma sequência didática para aplicação em sala de aula, demonstrando como a matemática pode ser uma ferramenta eficaz para compreender os impactos das mudanças climáticas no planeta.

Palavras-chave: Temperatura média da Terra; Regressão Linear; Mudanças Climáticas; Efeito Estufa; Emissões de Gases.

ABSTRACT

This paper presents a research on the variation of the Earth's average temperature through linear regression analysis. Although it is not part of the high school mathematics curriculum, linear regression can serve as an educational tool to raise students' awareness about global warming and deepen their knowledge of statistics. The paper discusses the dynamics of the greenhouse effect and climate change with both historical and contemporary analysis. It is emphasized that human activity has played a crucial role in global warming since the Industrial Revolution. Linear regression is used to estimate future variations in the Earth's average temperatures. Scenarios simulating greenhouse gas emissions and their consequences are presented. Additionally, a teaching sequence is proposed for classroom application, demonstrating how mathematics can be an effective tool for understanding the impacts of climate change on the planet.

Keywords: Average Earth Temperature; Linear Regression; Climate Change; Greenhouse Effect; Gas Emissions.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1- EFEITO ESTUFA	21
FIGURA 2- PRINCIPAIS PAÍSES EMISSORES DE GASES EFEITO ESTUFA.....	23
FIGURA 3- ILUSTRAÇÃO DA CURVA DE <i>KEELING</i>	27
FIGURA 4- POPULAÇÃO TOTAL.....	29
FIGURA 5- ILUSTRAÇÃO DE CONCENTRAÇÕES DE CO ₂ E METANO (CH ₄) EM AMOSTRAS DE GELO QUE DATAM DE ATÉ 800 MIL ANOS	31
FIGURA 6- ILUSTRAÇÃO DA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA (1880-2023).....	32
FIGURA 7- DADOS OBSERVADOS E RETA DE REGRESSÃO	34
FIGURA 8- ILUSTRAÇÃO DO DIAGRAMA DE DISPERSÃO REFERENTE AO PROBLEMA DESCRITO NO EXEMPLO 3.1	36
FIGURA 9- GRÁFICO DE DISPERSÃO COM RESÍDUOS	38
FIGURA 10- RESULTADO DA REGRESSÃO	47
FIGURA 11- A ILUSTRAÇÃO DA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA MÉDIA DA TERRA	53
FIGURA 12- RISCOS CLIMÁTICOS 1,5°C X 2°C NO AQUECIMENTO GLOBAL ...	58
FIGURA 13- ALTOS RISCOS CLIMÁTICOS ANTECIPADOS EM MENORES NÍVEIS DE AQUECIMENTO GLOBAL	61

LISTA DE TABELAS

TABELA 1- Dados da variação de temperatura em graus Celsius (°C) (y) e tempo (x), medido em anos.....	35
TABELA 2- Projeções de Mudanças na Temperatura da Superfície Global para Diferentes Cenários de Emissões	55

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	16
1 INTRODUÇÃO	16
1.1 GENERALIDADES.....	16
1.2 JUSTIFICATIVA	18
1.3 OBJETIVOS	18
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	19
CAPÍTULO 2	20
2 A DINÂMICA DO EFEITO ESTUFA E MUDANÇAS CLIMÁTICAS: UMA ANÁLISE HISTÓRICA E CONTEMPORÂNEA.	20
2.1 O EFEITO ESTUFA: ORIGEM E IMPACTO NO AQUECIMENTO GLOBAL	20
2.2 PRINCIPAIS PAÍSES EMISSORES DE GASES DO EFEITO ESTUFA	21
2.3 ETANOL E MUDANÇAS CLIMÁTICAS: A CONTRIBUIÇÃO DO BRASIL PARA A REDUÇÃO DAS EMISSÕES DE GASES DE EFEITO ESTUFA	24
2.4 AS MUDANÇAS CLIMÁTICAS GERADAS PELA AGROPECUÁRIA E AS OPORTUNIDADES PARA REDUÇÃO DE EMISSÕES DE GEE	25
2.5 CURVA DE KEELING: MONITORAMENTO CONTÍNUO DE CO ₂ ATMOSFÉRICO	26
2.6 IMPACTO DO CRESCIMENTO POPULACIONAL NAS MUDANÇAS CLIMÁTICAS: DADOS DAS NAÇÕES UNIDAS NO BRASIL	27
2.7 ANÁLISE DE GASES DE EFEITO ESTUFA EM NÚCLEOS DE GELO ANTÁRTICO, REVELANDO 800 MIL ANOS DE MUDANÇAS CLIMÁTICAS.....	30
2.8 IMPACTO DA REVOLUÇÃO INDUSTRIAL NAS CONCENTRAÇÕES DE CO ₂ : UM ALERTA HISTÓRICO	31
CAPÍTULO 3	34
3 REGRESSÃO LINEAR	34
3.1 COMPREENDER O CONCEITO DE REGRESSÃO LINEAR	34
3.2 EXEMPLO PRÁTICO	35
3.3 PLOTAGEM DOS DADOS EM UM DIAGRAMA DE DISPERSÃO	36
3.4 CÁLCULO DOS COEFICIENTES (β_0, β_1).....	37
3.5 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS	37
3.6 AVALIAÇÃO DO MODELO	45

3.7 ERRO PADRÃO DE ESTIMAÇÃO.....	48
3.8 INTERVALO DE CONFIANÇA.....	48
3.9 INTERVALO DE PREDIÇÃO	50
CAPÍTULO 4.....	53
4 ESTIMATIVAS FUTURAS DE AQUECIMENTO GLOBAL	53
4.1 AQUECIMENTO GLOBAL: AUMENTO DA VARIAÇÃO DA TEMPERATURA MÉDIA DA TERRA DESDE A REVOLUÇÃO INDUSTRIAL.....	53
4.2 OS CENÁRIOS QUE MODELAM AS EMISSÕES DE GEE E SUAS IMPLICAÇÕES.....	54
4.3 A PREVISÃO DE VARIAÇÃO DE TEMPERATURA PARA O ANO DE 2030	55
4.4 PREVISÃO DE QUANDO A TEMPERATURA MÉDIA DA TERRA AUMENTARÁ 1,5°C	56
4.5 A PREVISÃO DE VARIAÇÃO DE TEMPERATURA PARA O ANO DE 2100	59
4.6 IMPACTOS PROJETADOS DO AUMENTO DA TEMPERATURA GLOBAL POR FAIXA DE TEMPERATURA DE ACORDO COM O RELATÓRIO IPCC 2023	61
CAPÍTULO 5	64
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	64
REFERÊNCIAS.....	66
APÊNDICES	70

CAPÍTULO 1

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

O efeito estufa é um fenômeno natural necessário para a manutenção da temperatura terrestre em níveis que permitem a existência de vida da forma que hoje é conhecida. Esse processo ocorre quando gases na atmosfera, como dióxido de carbono (CO₂), metano (CH₄), e vapor d'água (H₂O) retêm parte da radiação infravermelha emitida pelo sol e refletida pela superfície terrestre, impedindo que parte do calor recebido escape para o espaço (MOLION, 2008).

O aquecimento global é a variação da temperatura média da Terra, com aumentos significativos ao longo do tempo, causados por fatores internos e externos. Fatores internos incluem sistemas climáticos complexos e variáveis como atividades solares e vulcanismos. Fatores externos são principalmente antropogênicos, relacionados à emissão de gases de efeito estufa pela queima de combustíveis fósseis, indústrias e queimadas (SILVA E PAULA, 2009).

Os efeitos da variação da temperatura média da Terra, incluindo seus aumentos, podem ser observados diretamente no meio ambiente. Os impactos adversos abrangem o aumento da frequência e intensidade de eventos climáticos extremos, como secas, inundações, ondas de calor, a elevação do nível do mar pelo derretimento das calotas polares, impactando diretamente algumas populações ou comunidades que vivem em regiões litorâneas, e a perda de biodiversidade, afetando inclusive a segurança alimentar, podendo levar até a extinção de espécies. Esses fatores configuram-se como riscos significativos para os sistemas naturais e humanos. (SILVA, 2007).

As atividades humanas têm contribuído de forma significativa para o aquecimento global. É altamente provável que o aumento observado na temperatura média da Terra seja resultado do crescimento das concentrações de gases de efeito estufa e outros fatores antropogênicos. O relatório do IPCC de 2023 ressalta que muitas alterações no sistema climático são irreversíveis e que a acidificação dos oceanos, a desoxigenação oceânica e a elevação do nível do mar continuarão a ocorrer no século XXI, dependendo das emissões futuras. Portanto, sem mudanças

no consumo de produtos industrializados e energia elétrica, o aquecimento global pode continuar a se agravar.

Pesquisas desenvolvidas por cientistas do Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas (IPCC, 2023) indicam que, com um aumento de 1,5°C na temperatura, espécies enfrentarão riscos de extinção. Invertebrados, polinizadores, anfíbios e plantas como flores estão entre os grupos mais vulneráveis (FOLHA DE S. PAULO, 2022). Com um aumento de 4°C, espécies marinhas tropicais, como corais e peixes de recifes, podem ser extintas localmente. À medida que as temperaturas médias do mundo aumentam, os animais marinhos também se tornam vulneráveis à extinção (NATIONAL GEOGRAPHIC BRASIL, 2019). Os recifes de corais, encontrados em mares rasos e tropicais, são ecossistemas de alta diversidade biológica e essenciais para muitas espécies. No entanto, estão em declínio devido a atividades pesqueiras irregulares e ao aquecimento global (POTENCIAL BIÓTICO, 2021).

Estes são apenas alguns eventos ou fenômenos que demonstram a gravidade da situação e a importância da necessidade de estudos sobre o tema. Emerge uma necessidade urgente de medidas e ações governamentais e educacionais, capazes de despertar uma consciência sobre a forma como o ser humano tem explorado os recursos naturais e/ou a forma de produção industrial, e seus impactos na natureza.

Neste contexto, com o objetivo de revelar os valores futuros da variação da temperatura média da Terra. Considerando a ausência de mudanças significativas no comportamento humano em relação ao tema, este trabalho apresenta um estudo que estima as variações climáticas globais e suas projeções para os próximos anos. Para isso, foi aplicado um modelo de regressão linear utilizando dados da GISTEMP (2024), realizando simulações das variações da temperatura média da Terra nas próximas décadas.

Os resultados deste estudo são importantes e podem ser apresentados e discutidos em sala de aula do ensino médio ou técnico. Além da construção dos modelos matemáticos de forma adaptada ao nível de ensino supracitado, formam também uma base sólida quanto aos aspectos matemáticos. Espera-se, ainda, despertar nos jovens estudantes uma consciência sobre o aquecimento global e sobre seu papel na sociedade em relação ao tema.

1.2 JUSTIFICATIVA

Despertar nos estudantes do ensino médio e técnico a importância dos problemas relacionados ao aquecimento global, a partir da estimação dos valores e variações das temperaturas médias da Terra nas próximas décadas, com base em dados históricos e modelos de regressão linear, constitui a principal motivação e justificativa deste estudo.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

O presente trabalho tem como objetivo geral desenvolver a compreensão das causas e consequências da intensificação do efeito estufa, com ênfase na ação humana desde a Revolução Industrial, e aplicar conceitos de regressão linear para analisar e estimar a tendência futura e a variação da temperatura média da Terra, utilizando cálculos e análise de dados históricos.

1.3.2 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo geral do presente trabalho, são definidos os seguintes objetivos específicos:

- (i) Apresentar informações sobre o efeito estufa, origem, seu efeito no aquecimento global e países que mais contribuem com a emissão de gases do efeito estufa;
- (ii) Apresentar o gráfico do acúmulo de CO₂ na atmosfera (Curva de *Keeling*) e o impacto do crescimento populacional nas mudanças climáticas;
- (iii) Expor a análise de gases de efeito estufa (GEE) em núcleos de gelo Antártico: revelando 800 mil anos de mudanças climáticas, mostrando o impacto da Revolução Industrial nas emissões de GEE;
- (iv) Apresentar o método de regressão linear e utilizar dados históricos para estimar a variação da temperatura média da Terra nos anos de 2030 e 2100, com o objetivo de analisar as tendências das variações

nas temperaturas médias nas próximas décadas, e calcular quando a variação de temperatura atingirá $1,5^{\circ}\text{C}$.

- (v) Discutir a relação entre os resultados obtidos e o aquecimento global.
- (vi) Apresentar o método de regressão linear de forma adaptada, passo a passo, em nível matemático do ensino médio ou técnico.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo 2, apresenta-se uma revisão da literatura sobre o efeito estufa, abordando sua origem e impactos no aquecimento global. Apresentam-se os principais países emissores de gases efeito estufa, a curva de *Keeling* e o monitoramento contínuo de CO_2 atmosférico. Além disso, revela-se o impacto do crescimento populacional nas mudanças climáticas, análise de gases de efeito estufa em núcleos de gelo Antártico, revelando 800 mil anos de mudanças climáticas e o impacto da Revolução Industrial nas concentrações de CO_2 .

A regressão linear é apresentada no capítulo 3, onde também se inclui um exemplo prático do cálculo dos coeficientes através do método dos mínimos quadrados. Este capítulo aborda a avaliação do modelo, erro de estimação, intervalos de confiança e de predição.

O Capítulo 4 apresenta estimativas sobre o aquecimento global futuro, incluindo cálculos que preveem as variações climáticas da Terra para os anos de 2030 e 2100. Também são realizados cálculos para estimar o momento em que o aumento atingirá $1,5^{\circ}\text{C}$, além de analisar os impactos das mudanças em diferentes níveis de aquecimento.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões do presente estudo e as sugestões para estudos futuros.

CAPÍTULO 2

2 A DINÂMICA DO EFEITO ESTUFA E MUDANÇAS CLIMÁTICAS: UMA ANÁLISE HISTÓRICA E CONTEMPORÂNEA.

2.1 O EFEITO ESTUFA: ORIGEM E IMPACTO NO AQUECIMENTO GLOBAL

De acordo com o relatório do IPCC (MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO, 2023), as atividades humanas que contribuem para o aumento da temperatura da Terra, especialmente por meio do incremento nas emissões de gases de efeito estufa (GEE), incluem:

Queima de combustíveis fósseis: A combustão de carvão, petróleo e gás natural para geração de energia, transporte e aquecimento é a principal fonte de emissão de CO₂, um dos principais gases de efeito estufa.

Desmatamento: A remoção de florestas para agricultura, urbanização e exploração madeireira reduz a capacidade da Terra de absorver CO₂, além de liberar o carbono armazenado nas árvores, contribuindo para o aquecimento global.

Agricultura intensiva: Práticas agrícolas que utilizam fertilizantes nitrogenados e criação de gado em larga escala liberando óxido nitroso (N₂O) e metano (CH₄), dois gases de efeito estufa com potencial de aquecimento muito maior que o CO₂.

Indústria: Processos industriais, incluindo a produção de cimento, aço e produtos químicos, são responsáveis pela emissão de grandes quantidades de dióxido de carbono (CO₂) e outros gases do efeito estufa (GEE). Além disso, setores específicos, como as indústrias de refrigeração e ar condicionado, aerossóis e solventes, liberam hidrofluorcarbonetos (HFCs) durante a produção e utilização de seus produtos. Esses HFCs contribuem significativamente com o aquecimento global e mudanças climáticas.

Transporte: O uso de veículos movidos a combustíveis fósseis para transporte de pessoas e mercadorias é uma fonte significativa de emissão de CO₂ e outros poluentes atmosféricos.

Descarte de resíduos: A decomposição de resíduos orgânicos em aterros sanitários gera metano, um potencial gás de efeito estufa. A gestão inadequada de resíduos sólidos pode, portanto, contribuir para o aquecimento global.

Mudanças no uso da terra: A urbanização e a conversão de terras naturais em áreas agrícolas ou urbanas alteram os ciclos de carbono e afetam a capacidade do solo e da vegetação de armazenar carbono.

Essas atividades humanas têm um impacto cumulativo significativo no clima da Terra, resultando em aquecimento global e contribuindo para as mudanças climáticas (IPCC, 2021; OUR WORLD IN DATA, 2020).

Ao observar a Figura 1, deve-se focar nos fatores humanos que intensificam o efeito estufa, como o desmatamento, a poluição gerada pelas indústrias e veículos, a busca por fontes de energia, o descarte inadequado de resíduos, as mudanças no uso da terra e a queima de combustíveis fósseis. Esses elementos mostram como as ações humanas estão diretamente ligadas ao aquecimento global e ao aumento das emissões de gases do efeito estufa.

FIGURA 1- EFEITO ESTUFA



Fonte: Mundo Educação (2024)

2.2 PRINCIPAIS PAÍSES EMISSORES DE GASES DO EFEITO ESTUFA

O satélite *Orbiting Carbon Observatory-2* (OCO-2) da NASA tem monitorado as emissões de dióxido de carbono (CO₂) em diversas regiões do mundo. A análise dos dados coletados por este satélite revela que a China e os Estados Unidos são

os dois maiores emissores de CO₂, seguidos pela Índia, Indonésia, Malásia, Brasil, México, Irã, Japão e Alemanha (WEATHER CHANNEL, NASA, 2023).

Os dez países que mais emitem gases de efeito estufa, especificamente dióxido de carbono (CO₂), de acordo com os dados do satélite OCO-2 da NASA, estão listados abaixo. Para se ter uma noção das porcentagens, pode-se consultar o site Our World in Data (2020).

China (1): Aproximadamente 30% das emissões globais. A maior parte das emissões provém da queima de carvão para geração de energia e indústrias pesadas, como a produção de aço e cimento.

Estados Unidos (2): Aproximadamente 14% das emissões globais. As emissões são principalmente decorrentes do uso de combustíveis fósseis para transporte, geração de eletricidade e indústrias.

Índia (3): Aproximadamente 7% das emissões globais. A queima de carvão para geração de energia é a principal fonte, juntamente com emissões de transporte e agricultura.

Indonésia (4): Aproximadamente 2% das emissões globais. Desmatamento e queimadas para agricultura, além de emissões de indústrias e transporte.

Malásia (5): Aproximadamente 1% das emissões globais. Desmatamento para plantações de óleo de palma e emissões industriais.

Brasil (6): Aproximadamente 1% das emissões globais. Desmatamento na Amazônia e emissões da agricultura, especialmente pecuária.

México (7): Aproximadamente 1% das emissões globais. Uso de combustíveis fósseis para transporte e geração de energia, além de emissões industriais.

Irã (8): Aproximadamente 2% das emissões globais. Produção de petróleo e gás, além de emissões industriais e de transporte.

Japão (9): Aproximadamente 3% das emissões globais. Uso de combustíveis fósseis para geração de energia e transporte, além de emissões industriais.

Alemanha (10): Aproximadamente 2% das emissões globais. Uso de carvão e gás natural para geração de energia, além de emissões industriais e de transporte.

A diferença na classificação entre Brasil e outros países, apesar das porcentagens de emissões de CO₂, pode ser explicada por vários fatores:

Tipo de Emissões: As emissões do Brasil são fortemente influenciadas pelo desmatamento e mudanças no uso da terra, especialmente na Amazônia. Essas atividades liberam grandes quantidades de CO₂, mas também outros gases de efeito estufa, como metano e óxido nitroso.

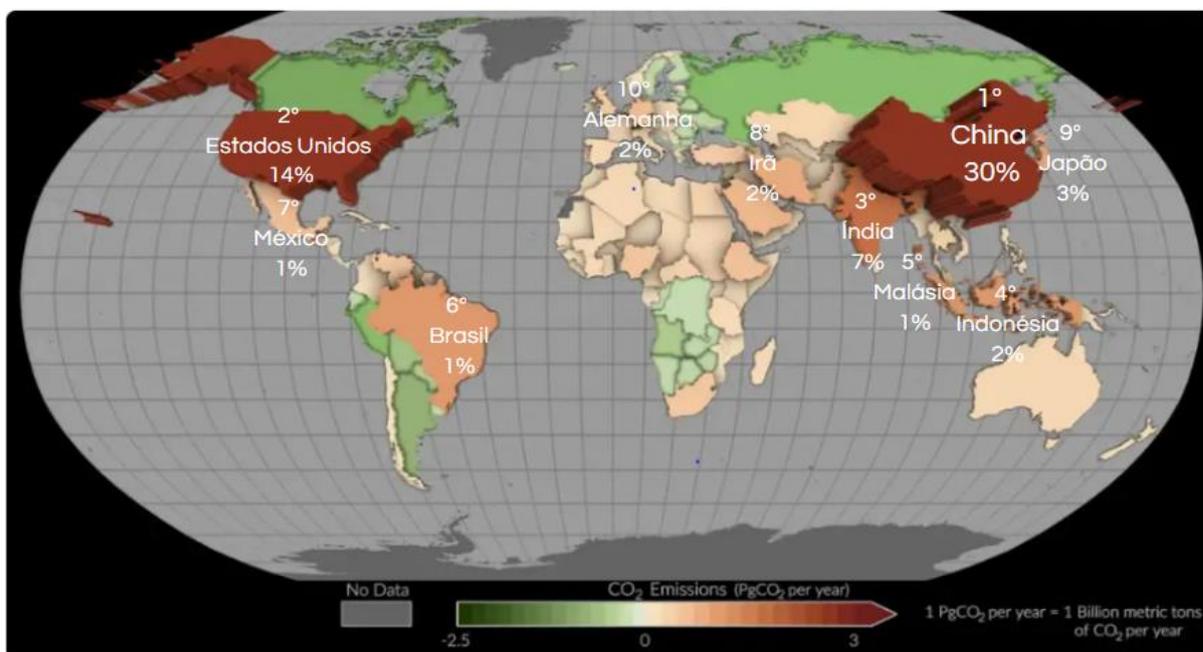
Setores Econômicos: No Brasil, a agricultura e o desmatamento são grandes contribuintes para as emissões. Já no Japão, as emissões são mais concentradas na queima de combustíveis fósseis para energia e transporte.

Metodologia de Cálculo: As metodologias para calcular as emissões podem variar, e alguns relatórios podem considerar diferentes tipos de gases de efeito estufa além do CO₂, o que pode influenciar a classificação.

Dados e Relatórios: A forma como os dados são reportados e atualizados também pode afetar a percepção das emissões. O Brasil pode ter uma maior variação anual nas emissões devido ao desmatamento, enquanto as emissões do Japão podem ser mais estáveis.

Esses fatores combinados podem levar a uma diferença na classificação, mesmo que as porcentagens de emissões de CO₂ pareçam contraditórias.

FIGURA 2-PRINCIPAIS PAÍSES EMISSORES DE GASES EFEITO ESTUFA



Este mapa mostra as emissões e remoções líquidas médias de dióxido de carbono de 2015 a 2020 usando estimativas informadas pelas medições do satélite OCO-2 da NASA. Países onde mais dióxido de carbono foi removido do que emitido aparecem como depressões verdes, enquanto países com maiores emissões são bege ou vermelhos e parecem saltar da página.

(Estúdio de Visualização Científica da NASA)

Fonte: Adaptado de Weather Channel. Nasa, (2023).

Na Figura 2 é possível identificar a localização geográfica desses países, bem como a porcentagem de emissões de gases de efeito estufa. Destaca-se a China devido à sua maior porcentagem nessas emissões. A Figura 2 também utiliza uma codificação por cores e relevo para diferenciar os países que mais emitem daqueles que menos emitem gases de efeito estufa.

Esses países emitem CO₂ por várias razões, incluindo a dependência de combustíveis fósseis, crescimento econômico, industrialização, urbanização, práticas do uso da terra e desmatamento, que contribuem para as emissões de gases do efeito estufa (IPCC, 2023). A combinação desses fatores resulta em níveis elevados de emissões, impactando significativamente o clima global. A transição para fontes de energia mais limpas e práticas sustentáveis é essencial para mitigar esses efeitos e promover um futuro sustentável.

2.3 ETANOL E MUDANÇAS CLIMÁTICAS: A CONTRIBUIÇÃO DO BRASIL PARA A REDUÇÃO DAS EMISSÕES DE GASES DE EFEITO ESTUFA

A produção de etanol a partir da cana-de-açúcar no Brasil tem um papel fundamental na redução das emissões de gases de efeito estufa. A cana captura CO₂ da atmosfera durante a fotossíntese, ajudando a compensar as emissões de carbono. Além disso, a mistura de etanol com gasolina diminui a liberação de poluentes. Em 2006, o setor de etanol brasileiro evitou 10% das emissões totais de gases de efeito estufa do país, e essa contribuição tem crescido desde então. No cenário global, a produção de etanol no Brasil ajudou a reduzir 0,1% das emissões associadas ao uso de energia em 2006, com esse impacto positivo se ampliando ao longo dos anos.

Além de contribuir para a mitigação do aquecimento global, o etanol se apresenta como uma solução estratégica para países desenvolvidos que buscam alternativas para reduzir suas emissões. A expansão do seu uso no Brasil, especialmente nos setores de transporte e energia elétrica, pode potencializar ainda mais seu impacto positivo. O etanol se configura como uma alternativa sustentável e relevante no combate às mudanças climáticas, com grande potencial tanto no Brasil quanto no cenário global, conforme destaca Macedo (2014).

2.4 AS MUDANÇAS CLIMÁTICAS GERADAS PELA AGROPECUÁRIA E AS OPORTUNIDADES PARA REDUÇÃO DE EMISSÕES DE GEE

A produção agropecuária tem se mostrado um fator importante nas discussões sobre mudanças climáticas, pois, além de ser fortemente influenciada por alterações nos fatores climáticos, como temperatura e precipitação, também contribui significativamente para o aumento das emissões de gases de efeito estufa (GEE). A agricultura, ao depender de condições climáticas específicas, como temperatura e radiação solar, sofre diretamente os impactos do aquecimento global, o que pode afetar tanto a produtividade das culturas quanto o manejo de recursos como a irrigação e o controle de pragas.

Por outro lado, a agropecuária também é responsável por uma parcela considerável das emissões de GEE, como dióxido de carbono (CO_2), metano (CH_4), óxido nitroso (N_2O) e óxidos de nitrogênio (NO_x). Esses gases são liberados principalmente por práticas como a queima de biomassa (matéria orgânica usada como energia), o tratamento de resíduos de animais e a fermentação entérica (intestino ou sistema digestivo) em ruminantes. O metano, por exemplo, é gerado em ambientes anaeróbicos (sem oxigênio presente), como na fermentação digestiva de animais de pasto, em lavouras de arroz inundadas e na decomposição de resíduos orgânicos. Já a queima de vegetação, como pastagens e resíduos agrícolas, libera grandes quantidades de CO_2 e monóxido de carbono (CO), acentuando ainda mais o efeito estufa.

A ciência tem mostrado que, se as emissões de GEE continuarem aumentando, a temperatura global pode subir entre $0,3^\circ\text{C}$ e $0,5^\circ\text{C}$ por década até o final deste século. Esse aquecimento teria grandes repercussões na agricultura mundial. Regiões tropicais e subtropicais, como a África subsaariana, estariam entre as mais afetadas, mas o Brasil também enfrentaria desafios, especialmente em áreas como o Norte e Centro-Oeste, onde a agricultura é predominante. O impacto seria a redução na produção de culturas como milho e trigo, mas também poderiam surgir oportunidades para o cultivo de outras culturas, como a soja, que poderiam se beneficiar do aumento da temperatura.

Portanto, a relação entre a agropecuária e o clima é complexa: enquanto o setor agrícola é afetado pelo aquecimento global, ele também desempenha um papel importante nas emissões de gases responsáveis pelas mudanças climáticas.

Diante disso, a adoção de práticas de mitigação, como a redução das emissões de gases de efeito estufa (GEE) e o uso de técnicas agrícolas mais sustentáveis é fundamental. Medidas como o aumento do uso de biocombustíveis (combustíveis derivados de biomassa orgânica), o armazenamento de carbono no solo e a implementação de tecnologias que minimizem as emissões de metano e óxidos de nitrogênio podem ajudar a mitigar os impactos da agropecuária no clima.

Além disso, adaptar a agricultura às mudanças climáticas, por meio de novas variedades de culturas resistentes a condições climáticas extremas, é essencial para garantir a segurança alimentar no futuro. A pesquisa e o desenvolvimento de tecnologias agrícolas sustentáveis, aliados a políticas públicas eficazes, são fundamentais para enfrentar os desafios impostos pelas mudanças climáticas e pela contribuição da agropecuária para as emissões de gases de efeito estufa.

Assim, a produção agropecuária tem um papel importante na adaptação às mudanças climáticas e, ao adotar práticas mais sustentáveis, pode contribuir para a redução dos impactos do aquecimento global, garantindo uma produção agrícola mais eficiente e com menor impacto ambiental (LIMA, 2002).

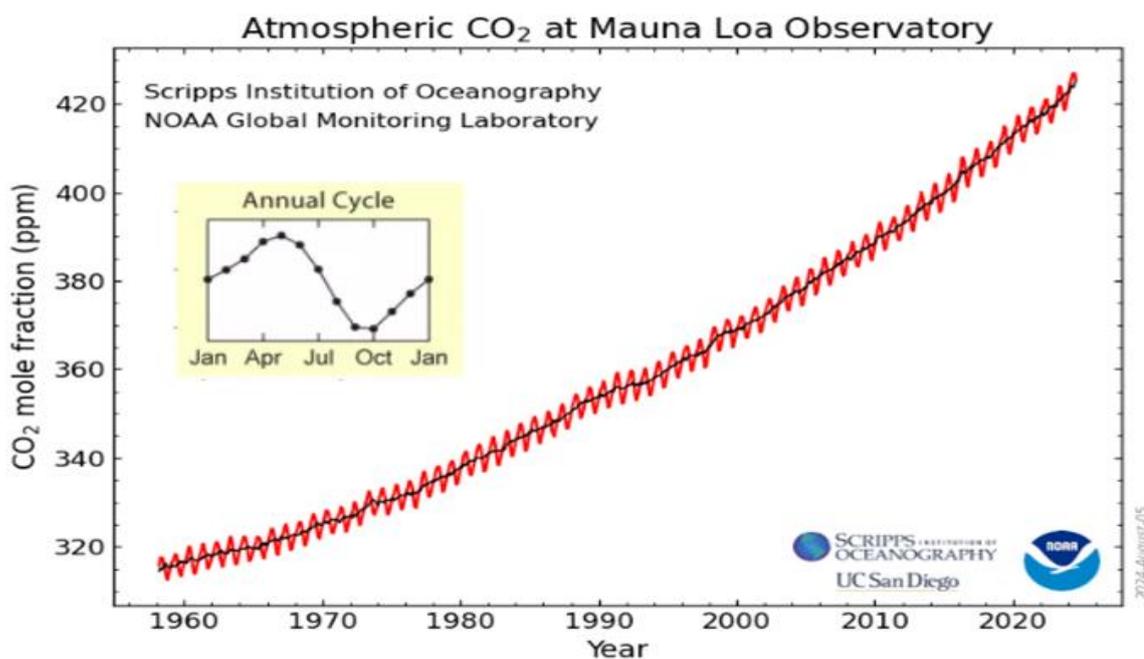
2.5 CURVA DE KEELING: MONITORAMENTO CONTÍNUO DE CO₂ ATMOSFÉRICO

Uma das mais importantes referências no estudo das mudanças climáticas e efeito estufa é a Curva de *Keeling*. Iniciadas em 1958, as medições foram feitas por *Charles David Keeling*, na Estação de Pesquisa *Mauna Loa*, no Havaí. Seus dados mostraram um aumento contínuo nas concentrações de CO₂, que se tornaram um indicador crucial das mudanças climáticas (CAMPOS, 2013).

A concentração de dióxido de carbono (CO₂), expressa em partes por milhão (ppm), refere-se à proporção de moléculas de CO₂ em relação a um milhão de moléculas do ar atmosférico. Esta medida é utilizada para a avaliação da quantidade de CO₂ presente na atmosfera e sua correlação com questões ambientais, como mudanças climáticas e qualidade do ar. O aumento das emissões de CO₂ está diretamente associado ao incremento dos níveis de concentração em partes por milhão (ppm), o que pode acarretar consequências significativas para o clima global.

A Curva de *Keeling*, representada pela Figura 3, ilustra as medições de CO₂ atmosférico no Observatório de *Mauna Loa*. O gráfico demonstra que antes de 1960, o valor era inferior a 320 ppm. Desde então, houve um crescimento contínuo, e após 2020, o valor ultrapassou 420 ppm (NOAA, 2023).

FIGURA 3-ILUSTRAÇÃO DA CURVA DE *KEELING*



Fonte: Adaptado de Noaa (2023).

Esta curva é significativa pois ilustra não apenas o aumento das emissões de CO₂ devido às atividades humanas, mas também as variações sazonais (*Annual Cycle*) nas concentrações de CO₂, influenciadas pela fotossíntese e pela respiração das plantas. A curva é considerada por muitos cientistas como uma medida confiável de CO₂ nas camadas médias da troposfera, e tem sido interpretada por muitos climatologistas como um sinal de alerta para o aquecimento global (*ECYCLE*, 2024). Ao analisar a Figura 3, deve-se notar o aumento evidente e contínuo nas concentrações de CO₂ ao longo do tempo.

2.6 IMPACTO DO CRESCIMENTO POPULACIONAL NAS MUDANÇAS CLIMÁTICAS: DADOS DAS NAÇÕES UNIDAS NO BRASIL

O aumento populacional é certamente um fator importante para as mudanças climáticas a longo prazo, de acordo com informações das Nações Unidas no Brasil (2017). Embora muitos receios sobre o crescimento populacional não sejam baseados em evidências, a relação com as mudanças climáticas é frequentemente discutida. Quando se considera as emissões de gases de efeito estufa (GEE), é comum culpar o crescimento populacional como o principal responsável pelas mudanças climáticas ou ignorá-lo completamente, devido à politização do tema.

De uma perspectiva de mudanças climáticas ou recursos naturais, há uma lógica intuitiva: mais pessoas consomem mais alimentos, água, energia e outros recursos, o que aumenta as emissões de GEE. No entanto, essas emissões não são distribuídas igualmente entre todas as populações. Os países mais ricos, com altas emissões por pessoa, geralmente têm baixas taxas de fecundidade, enquanto os países mais pobres, com menores emissões por pessoa, têm taxas de fecundidade mais altas.

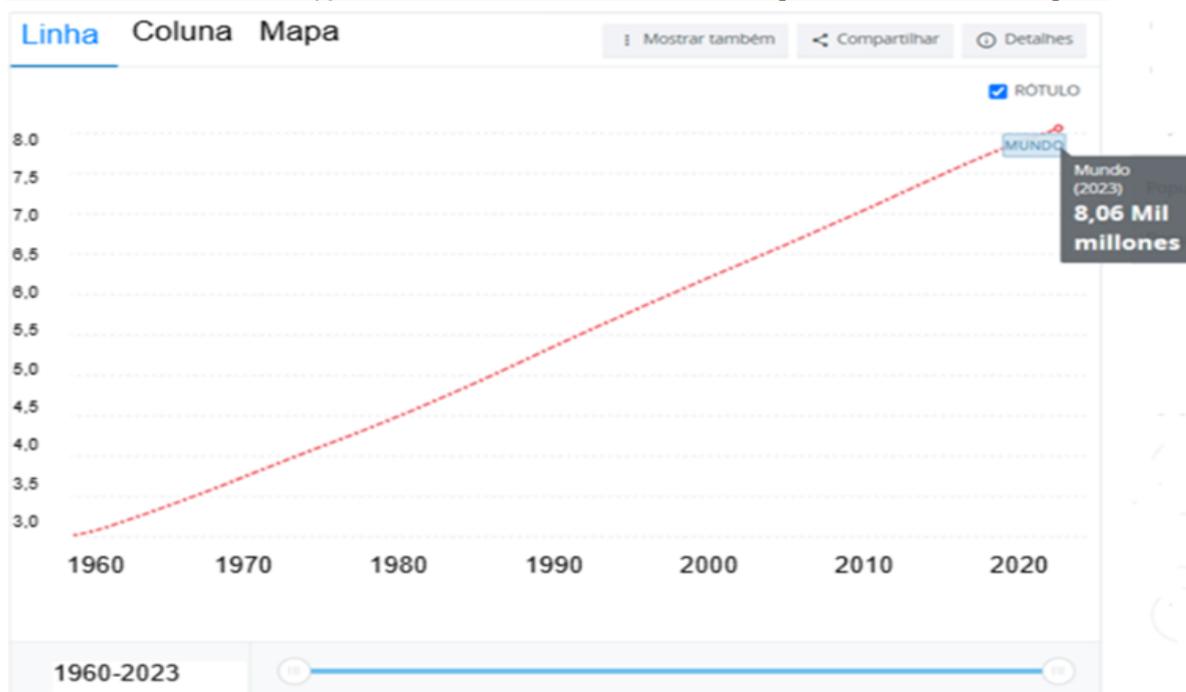
É importante notar que as populações dos países mais pobres, que menos contribuíram para as emissões, provavelmente sofrerão os impactos das mudanças climáticas de forma mais intensa. Esses impactos incluem escassez de água, insegurança alimentar e riscos à saúde, exacerbados pelo crescimento populacional e urbanização, aumentando a vulnerabilidade a eventos climáticos extremos como secas, inundações e ondas de calor.

Na Figura 4, o gráfico intitulado “População total” ilustra a evolução global da população entre 1960 e 2023. Em 1960, a população mundial era de aproximadamente 3,03 bilhões de pessoas, e em 2023 esse número alcançou 8,06 bilhões. Nota-se que a inclinação do gráfico segue uma tendência similar à Curva de *Keeling*, que representa a concentração de dióxido de carbono na atmosfera ao longo do tempo. Deve-se prestar atenção ao crescimento da população mundial e comparar essa tendência com o aumento das concentrações de CO₂, destacando uma possível correlação entre o crescimento populacional e o impacto ambiental. Isso sugere que, no longo prazo, o aumento populacional pode ser um fator importante para as mudanças climáticas.

FIGURA 4-POPULAÇÃO TOTAL

População, total

(1) Divisão de População das Nações Unidas. Perspectivas da população mundial: revisão para 2022. (2) Relatórios dos censos e outras publicações estatísticas dos institutos nacionais de estatística, (3) Eurostat: Estatísticas Demográficas, (4) Divisão de Estatística das Nações Unidas. Relatório de População e Estatísticas Vitais (Vários Anos), (5) US Census Bureau: Banco de Dados Internacional e (6) Secretariado da Comunidade do Pacífico: Programa de Estatística e Demografia.



Fonte: Adaptado de Banco Mundial (2023).

O crescimento populacional traz desafios significativos para a sustentabilidade do planeta. O consumo de recursos ultrapassa os limites naturais, a demanda por alimentos e energia cresce exponencialmente e as emissões de gases de efeito estufa atingem níveis recordes. É crucial adotar medidas urgentes para mitigar esses impactos, pois, sem ação rápida, os efeitos podem ser devastadores para o clima, os ecossistemas e as futuras gerações, conforme 123 Ecos (2024).

Desde a Revolução Industrial, o surgimento de tecnologias baseadas em combustíveis fósseis, como a máquina a vapor e o uso crescente do petróleo, combinado com o rápido crescimento populacional, a urbanização e as transformações nos padrões de consumo e nas relações econômicas, resultaram em um aumento sem precedentes dos impactos da atividade humana sobre o clima (IPEA, 2019).

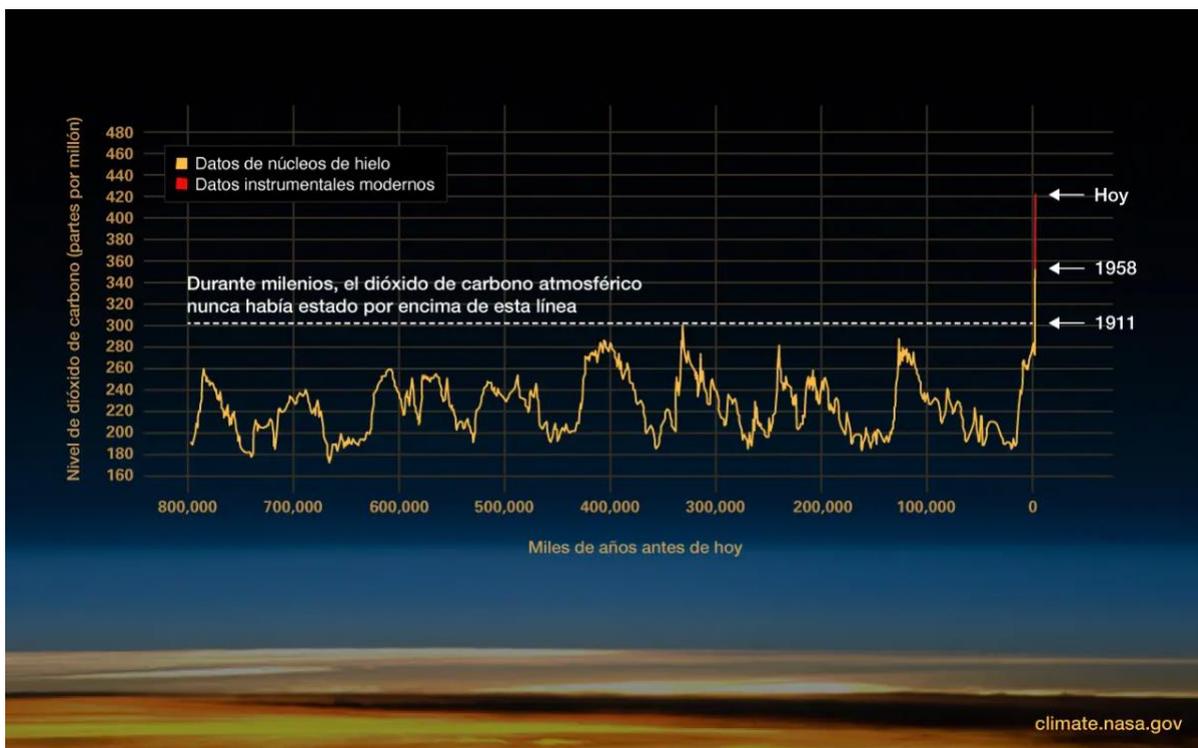
2.7 ANÁLISE DE GASES DE EFEITO ESTUFA EM NÚCLEOS DE GELO ANTÁRTICO, REVELANDO 800 MIL ANOS DE MUDANÇAS CLIMÁTICAS.

Os cientistas conseguiram medir as concentrações de dióxido de carbono (CO_2) e metano (CH_4) em amostras de gelo que datam de até 800 mil anos. Essa técnica envolve a extração de núcleos de gelo de camadas profundas da Antártica, onde pequenas bolhas de ar ficam aprisionadas. Ao analisar essas bolhas, os cientistas podem determinar as concentrações de gases de efeito estufa que estavam presentes na atmosfera em diferentes períodos históricos.

Essas medições são importantes para entender as variações naturais e antropogênicas nas concentrações de gases de efeito estufa ao longo do tempo, permitindo que os pesquisadores estabeleçam correlações entre as mudanças climáticas e as emissões de gases de efeito estufa. Os dados obtidos a partir dessas amostras de gelo ajudam a construir um quadro mais completo das condições climáticas passadas e das tendências atuais, fortalecendo evidências sobre como as atividades humanas têm impactado o clima da Terra (CARLOS, 2016).

Na Figura 5, observa-se que durante milênios a concentração de CO_2 nunca ultrapassou 300 ppm. No entanto, o gráfico mostra que esse valor foi ultrapassado a partir de 1911. Ao observar a Figura 5, deve-se prestar atenção ao ponto que marca o início de um aumento considerado significativo nas concentrações de CO_2 , relacionando-se com o início da era industrial e o aumento das emissões de gases de efeito estufa devido às atividades humanas.

FIGURA 5- ILUSTRAÇÃO DE CONCENTRAÇÕES DE CO₂ E METANO (CH₄) EM AMOSTRAS DE GELO QUE DATAM DE ATÉ 800 MIL ANOS



Fonte: National Aeronautics and Space Administration (Nasa) (2023).

2.8 IMPACTO DA REVOLUÇÃO INDUSTRIAL NAS CONCENTRAÇÕES DE CO₂: UM ALERTA HISTÓRICO

Nunca antes na história do planeta os níveis de CO₂ na atmosfera estiveram tão altos como estão hoje, principalmente devido às atividades humanas. Os níveis de CO₂ na atmosfera permaneceram relativamente estáveis durante milênios, flutuando entre cerca de 180 e 300 partes por milhão (ppm) durante os períodos glaciais e interglaciais. Antes da Revolução Industrial, as emissões de combustíveis fósseis eram muito baixas. O crescimento das emissões ainda era relativamente lento até meados do século XX (OUR WORLD IN DATA, 2020). No entanto, a partir da Revolução Industrial, quando as atividades humanas começaram a liberar grandes quantidades de CO₂ na atmosfera através da queima de combustíveis fósseis e outras atividades, os níveis de CO₂ começaram a aumentar drasticamente. Em 2023, a concentração de CO₂ atingiu cerca de 422 ppm (NASA, 2023).

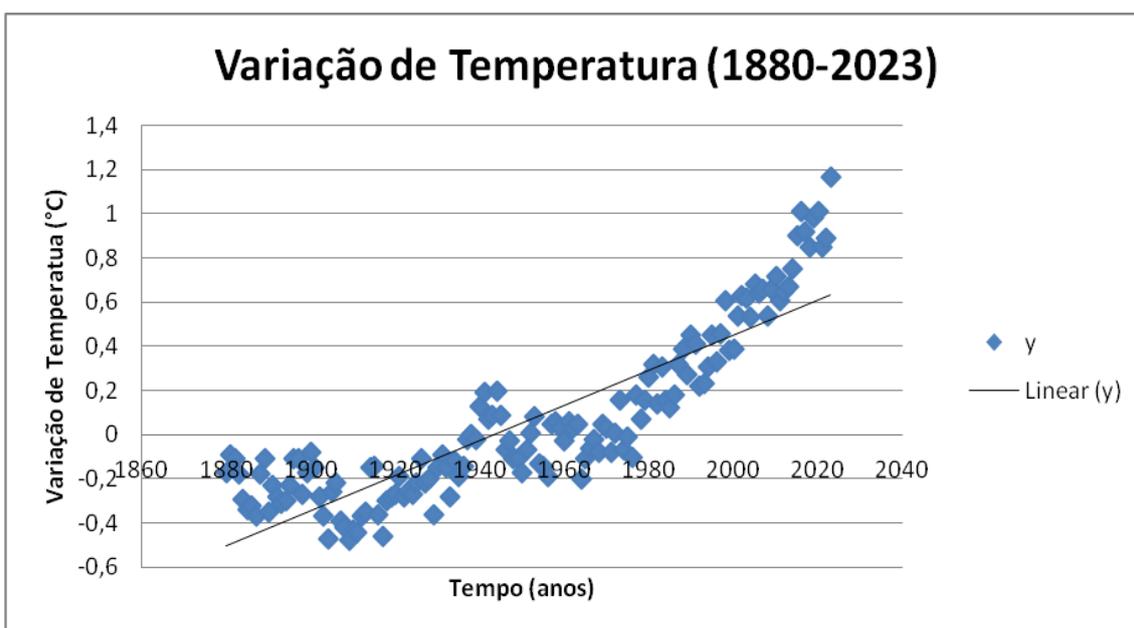
A Revolução Industrial, que começou no final do século XVIII e se intensificou no século XIX, marcou um período de transição significativa em que as economias passaram a depender fortemente de combustíveis fósseis, como carvão

e petróleo, para produção de energia e o desenvolvimento industrial (BILGILI et. al., 2024).

Esse aumento no uso de combustíveis fósseis resultou em um aumento substancial nas emissões de dióxido de carbono (CO_2) e outros gases de efeito estufa, que são os principais responsáveis pelo aquecimento global. A variação da temperatura média da Terra já registrou um aumento de aproximadamente $1,1^\circ\text{C}$, desde a era pré-industrial aproximadamente (1850-1900) (IPCC, 2023). Esse aumento está diretamente relacionado ao incremento das concentrações de gases de efeito estufa na atmosfera, impulsionado pelas atividades humanas desde a Revolução Industrial.

Ao analisar o gráfico apresentado na Figura 6, é possível observar claramente um aumento na variação da temperatura média da Terra a partir de 1880. Isso é evidenciado por uma tendência crescente contínua ao longo do período analisado, refletindo as mudanças climáticas decorrentes de fatores antropogênicos e naturais. A análise detalhada dos dados sugere uma correlação direta entre o aumento das emissões de gases de efeito estufa e o aquecimento global. Os dados para confecção do gráfico podem ser verificados no APÊNDICE B.

FIGURA 6-ILUSTRAÇÃO DA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA (1880-2023)



Fonte: Autor (2024).

As emissões cumulativas de CO₂ e outros gases de efeito estufa desde a Revolução Industrial têm um impacto significativo nas mudanças climáticas atuais e futuras, enfatizando a necessidade urgente de ações para mitigar esses efeitos e limitar o aquecimento global a níveis seguros.

CAPÍTULO 3

3 REGRESSÃO LINEAR

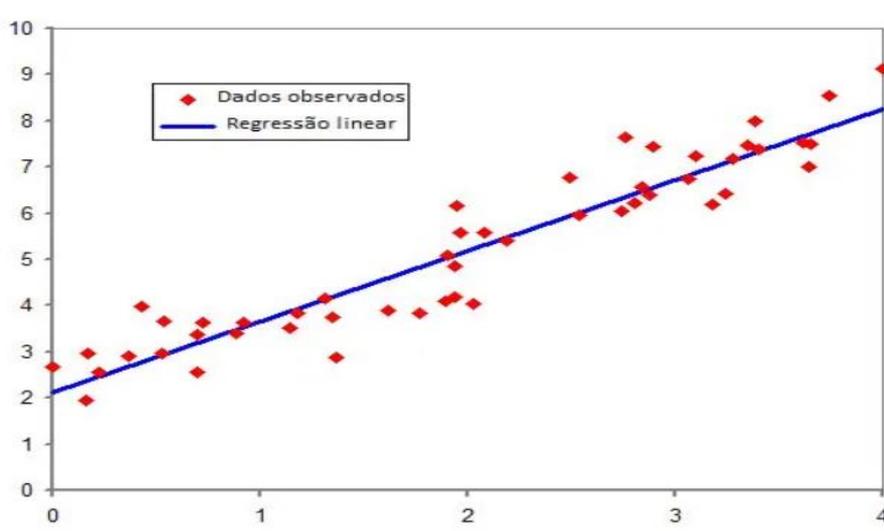
3.1 COMPREENDER O CONCEITO DE REGRESSÃO LINEAR

A regressão linear simples é um modelo estatístico que busca entender a relação entre duas variáveis numéricas: uma dependente (geralmente representada por y) e uma independente (geralmente representada por x) (CHEIN, 2019).

O objetivo da regressão é determinar a linha reta que melhor se ajusta aos dados, minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os valores previstos pela linha (BUSSAB; MORETTIN, 2017).

A Figura 7 mostra os dados observados e a linha de regressão que representa a melhor relação entre eles. Ao analisar a Figura 7, deve-se perceber como os pontos se alinham com a reta, o que ajuda a entender a relação entre as variáveis. Quanto mais próximos os pontos estiverem da reta, mais confiável é a previsão feita a partir dessa relação.

FIGURA 7-DADOS OBSERVADOS E RETA DE REGRESSÃO



Fonte: Data Geeks (2019).

3.2 EXEMPLO PRÁTICO

Para ilustrar a aplicação da abordagem de regressão linear, considera-se a análise da relação entre o tempo, expresso em anos, e a variação da temperatura média da Terra, em graus Celsius. Nesta seção, será explorado como a regressão linear pode ser utilizada para analisar e estimar as mudanças no clima ao longo do tempo. A análise envolverá a coleta de dados históricos de variação de temperatura média da Terra no período de 2011 a 2023, utilizando o método de regressão linear para avaliar esses dados. O foco da análise é o ajuste linear entre as variáveis dependente e independente.

Exemplo 3.1. Considerando (x) como o tempo em anos e (y) como a variação de temperatura. Nesse contexto, (x_i) é a variável independente e (y_i) é a variável dependente. Os dados das observações organizados em ordem crescente de anos estão apresentados na Tabela 1 e foram coletados anualmente, tratam-se da média anual das temperaturas.

Tabela 1-Dados da variação de temperatura em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$) (y) e tempo (x), medido em anos.

Observações (i)	x_i	y_i
1	2011	0,61
2	2012	0,65
3	2013	0,67
4	2014	0,75
5	2015	0,9
6	2016	1,01
7	2017	0,92
8	2018	0,85
9	2019	0,98
10	2020	1,01
11	2021	0,85
12	2022	0,89
13	2023	1,17

Fonte: Adaptado de Gistemp (2024).

A forma geral da regressão linear simples é:

$$y \approx \beta_0 + \beta_1 x \quad (3.1)$$

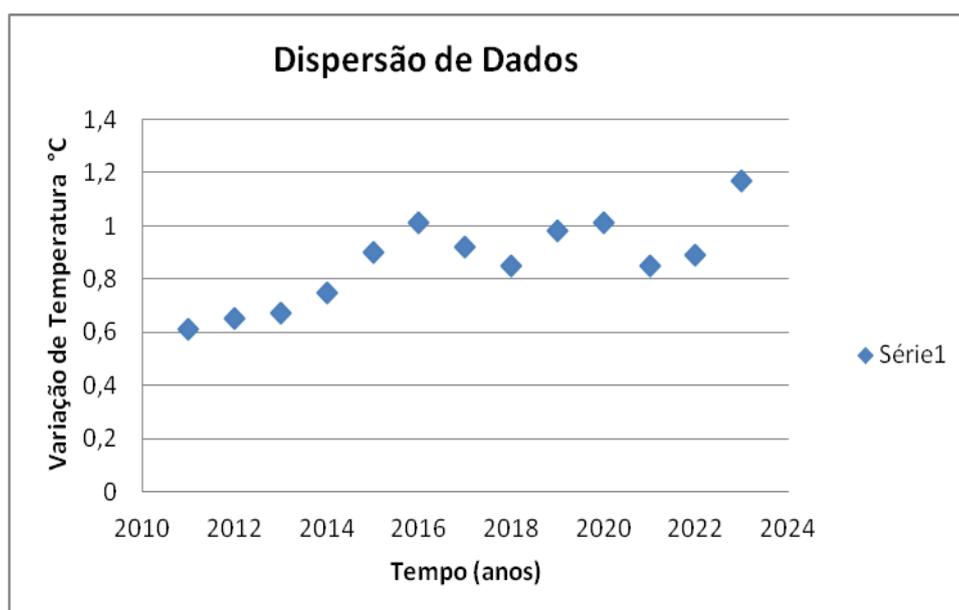
Em que (β_0) e (β_1) são denominados coeficientes do modelo ou de parâmetros do modelo.

Um diagrama de dispersão é um gráfico cartesiano onde cada eixo representa uma das variáveis em análise. A variável dependente (y) é posicionada no eixo vertical, enquanto a variável independente (x) é colocada no eixo horizontal. Para o caso do problema apresentado, o gráfico de dispersão está representado na Figura 8. Os pontos no gráfico, representando pares ordenados, formam uma distribuição que pode ser visualizada como uma nuvem de pontos (BUSSAB; MORETTIN, 2017).

3.3 PLOTAGEM DOS DADOS EM UM DIAGRAMA DE DISPERSÃO

Um diagrama de dispersão é uma ferramenta visual poderosa para analisar a relação entre duas variáveis. A Figura 8 ilustra o diagrama de dispersão referente ao problema descrito no Exemplo 3.1. O objetivo é observar como a temperatura média da Terra (em °C) varia ao longo do tempo (em anos).

FIGURA 8- ILUSTRAÇÃO DO DIAGRAMA DE DISPERSÃO REFERENTE AO PROBLEMA DESCRITO NO EXEMPLO 3.1



Fonte: Autor (2024).

3.4 CÁLCULO DOS COEFICIENTES (β_0, β_1)

Para cada par de dados (x_i, y_i) , $(i = 1, \dots, n)$, o erro do i -ésimo ponto é a diferença entre o valor observado e o valor previsto pelo modelo linear.

Como mostrado na equação (3.1), o erro do i -ésimo ponto é definido como a diferença entre o valor observado e o valor previsto pelo modelo linear.

$$e_i = y - (\beta_0 + \beta_1 x) \quad (3.2)$$

Define-se a soma dos quadrados dos erros ou desvios (SQ) para uma amostra contendo n pares da forma (x_i, y_i) como:

$$SQ(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x)]^2 \quad (3.3)$$

Onde a soma dos quadrados (SQ) depende dos parâmetros (β_0) e (β_1) . Para cada valor atribuído a esses parâmetros, haverá um resultado correspondente para essa soma.

Há diversas formas de estimar os coeficientes de um modelo de regressão linear, visando obter coeficientes com baixos desvios. Uma das abordagens para estimar esses coeficientes é minimizar os erros quadráticos entre os valores previstos e os observados. Um dos procedimentos mais usados para obter estimadores, onde se busca minimizar a soma dos quadrados dos erros, é o método conhecido como mínimos quadrados (BUSSAB; MORETTIN, 2017).

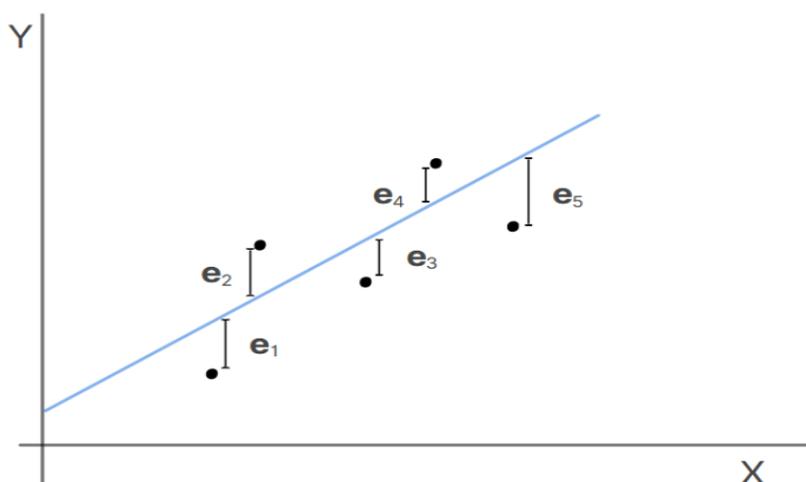
3.5 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) é uma técnica estatística empregada para determinar a reta de ajuste linear mais adequada a um conjunto de dados, fundamentando-se na minimização das distâncias entre os pontos e a reta. A seguir, são delineados os procedimentos matemáticos envolvidos no método.

Formulação do Problema:

Considerando um conjunto de (n) pontos que não são necessariamente colineares: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, o objetivo é determinar a reta $y = \beta_1 x + \beta_0$ que melhor se adapta a esses dados.

FIGURA 9-GRÁFICO DE DISPERSÃO COM RESÍDUOS



Fonte: Alura (2022).

O gráfico da Figura 9 apresenta os pontos de dados, a linha de regressão linear e os resíduos, que representam as diferenças entre os valores observados (pontos) e os valores previstos pela linha de regressão.

Função de Erro:

- A função de erro é definida como a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados y_i e os valores previstos pela reta $y_i = \beta_1 x_i + \beta_0$

$$SQ(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x)]^2 \quad (3.3)$$

Minimização da Função de Erro:

- O objetivo é encontrar os coeficientes (β_0) e (β_1) que minimizam a função de erro $e(\beta_0, \beta_1)$.
- Isso é feito calculando as derivadas parciais de $e(\beta_0, \beta_1)$ em relação à (β_0) e (β_1) , igualando-as a zero e resolvendo o sistema de equações resultante.

A função que representa a soma dos quadrados dos resíduos (SQ) é uma função de duas variáveis (β_0) e (β_1). Para encontrar os estimadores que minimizam a soma dos quadrados (SQ), primeiro precisamos encontrar os pontos críticos (β_0) e da função (β_1). Esses pontos críticos são aqueles em que as derivadas parciais de primeira ordem são iguais à zero (BUSSAB; MORETTIN, 2017).

$$\frac{\partial SQ}{\partial \beta_0} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial SQ}{\partial \beta_1} = 0$$

$$SQ(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x)]^2 \quad (3.3)$$

Para determinar os melhores valores para (β_0) e (β_1), calculam-se as derivadas parciais da soma dos quadrados dos erros em relação à (β_0) e (β_1) e iguala-se a zero. Ao calcular as derivadas parciais da soma dos quadrados (SQ) em relação à (β_0) e (β_1) e igualá-las a zero, obtêm-se as condições necessárias para a minimização dos erros. Para informações mais detalhada sobre derivadas parciais, recomenda-se consultar Stewart (2012).

Derivando a equação (3.3) em relação a (β_0) e igualando a zero:

$$SQ(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x)]^2$$

$$\frac{\partial(SQ)}{\partial \beta_0}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \sum_{i=1}^n [-2] [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)] = 0 \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)] [-2] = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_1 x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \hat{\beta}_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (3.5)$$

Além disso:

$$SQ = \sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)]^2$$

Calculando-se a derivada parcial da soma dos quadrados (SQ), da equação (3.3) em relação à (β_1) e igualando-se a zero.

$$\frac{\partial(SQ)}{\partial\beta_1}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)] [-2x_i] = 0 \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_0 x_i - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_1 x_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i - (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) (n\bar{x}) - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\sum_{i=1}^n y_i x_i - n\bar{y}\bar{x})}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \quad (3.8)$$

Sendo as médias amostrais (\bar{x}) e (\bar{y}) :

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (3.9)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.10)$$

No entanto, antes de prosseguir, é necessário substituir as equações das médias amostrais (3.9) e (3.10) nas equações (3.5) e (3.8).

Substituindo as equações (3.9) e (3.10) na equação (3.5):

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{e} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

em
$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i + \beta_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Reescrevendo a equação:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (3.11)$$

E substituindo as equações (3.9) e (3.10) na equação (3.8):

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{e} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{em}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y} \bar{x})}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \quad \text{obtem-se:}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \cdot \frac{n}{n}$$

Portanto,

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (3.12)$$

Organizando os termos do numerador e denominador ($\hat{\beta}_1$) na equação (3.7):

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y} \bar{x} &= \sum_{i=1}^n y_i x_i - \bar{y} n \bar{x} - \bar{x} n \bar{y} + n \bar{y} \bar{x} \\ &= \sum_{i=1}^n y_i x_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n \bar{y} \bar{x} \\ &= \sum_{i=1}^n [y_i x_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{y} \bar{x}] \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}n\bar{x} + n\bar{x}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2] \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2
 \end{aligned}$$

Portanto os estimadores obtidos pela minimização dos erros quadrados são:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.13)$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} \quad (3.14)$$

A demonstração apresentada pode ser verificada nas obras de CHAPRA (2008) e MOREIRA (2021).

Para mostrar que os pontos críticos encontrados são os pontos de mínimo da função quadrática observe a equação (3.3).

$$SQ(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)]^2$$

Considere a diferença entre os valores observados e os valores previstos pelo método de regressão linear. A expressão inicial é:

$$SQ = \sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)]^2$$

Reescrevendo essa diferença como:

$$SQ = \sum_{i=1}^n [y_i + (\hat{\beta}_0 - \beta_0) + (\hat{\beta}_1 x_i - \beta_1 x_i) - (\beta_0 + \beta_1 x_i)]^2$$

Agrupando os termos:

$$SQ = \sum_{i=1}^n \left[e_i + (\hat{\beta}_0 - \beta_0) + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)x_i \right]^2$$

Expandindo o quadrado:

$$SQ = \sum_{i=1}^n \left[e_i^2 + 2(\hat{\beta}_0 - \beta_0)e_i + 2(\hat{\beta}_1 - \beta_1)x_i e_i + (\hat{\beta}_0 - \beta_0)^2 + 2(\hat{\beta}_0 - \beta_0)(\hat{\beta}_1 - \beta_1)x_i + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 x_i^2 \right]$$

Simplificando tem-se:

$$SQ = \sum_{i=1}^n e_i^2 + 2(\hat{\beta}_0 - \beta_0)\sum_{i=1}^n e_i + 2(\hat{\beta}_1 - \beta_1)\sum_{i=1}^n x_i e_i + \sum_{i=1}^n [(\hat{\beta}_0 - \beta_0) + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)x_i]^2$$

Das equações (3.4) e (3.6).

$$\frac{\partial(SQ)}{\partial\beta_0}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \sum_{i=1}^n [-2] \left[y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) \right] = 0$$

$$2(\hat{\beta}_0 - \beta_0)\sum_{i=1}^n e_i = 0$$

$$\frac{\partial(SQ)}{\partial\beta_1}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \sum_{i=1}^n \left[y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) \right] [-2x_i] = 0$$

$$2(\hat{\beta}_1 - \beta_1)\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$$

Para minimizar a soma dos quadrados dos resíduos (SQ), basta minimizar a parcela:

$$\sum_{i=1}^n \left((\hat{\beta}_0 - \beta_0) + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)x_i \right)^2 \quad (3.15)$$

Por se tratar de função quadrática, o mínimo da equação (3.15) é zero.

$$(\hat{\beta}_0 - \beta_0) + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)x_i = 0$$

Para que essa equação seja verdadeira para todos os valores de i (ou seja, para $i=1,2,\dots,n$) os coeficientes devem ser nulos:

$$\hat{\beta}_0 - \beta_0 = 0 \quad \text{logo,} \quad \hat{\beta}_0 = \beta_0$$

$$\hat{\beta}_1 - \beta_1 = 0 \quad \text{logo,} \quad \hat{\beta}_1 = \beta_1$$

Portanto, os valores estimados $(\hat{\beta}_0)$ e $(\hat{\beta}_1)$ são iguais aos valores verdadeiros (β_0) e (β_1) , respectivamente. Os valores estimados $(\hat{\beta}_0)$ e $(\hat{\beta}_1)$ dados pelas equações (3.13) e (3.14) correspondem aos pontos de mínimo da função otimizada. Essa função é a soma dos quadrados dos resíduos (SQ), e os valores encontrados $(\hat{\beta}_0)$ e $(\hat{\beta}_1)$ minimizam essa soma.

O modelo de regressão ajustada é representado pela equação:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.16)$$

Nessa equação, (\hat{y}_i) é o valor predito da variável dependente para a observação i , com base nos coeficientes $(\hat{\beta}_0)$ e $(\hat{\beta}_1)$.

Solução:

- A reta de ajuste é dada por:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \quad (3.17)$$

Onde $(\hat{\beta}_1)$ e $(\hat{\beta}_0)$ são os valores estimados para os coeficientes.

Interpretação:

- O coeficiente de regressão $(\hat{\beta}_1)$ representa a inclinação da reta.
- O coeficiente de regressão $(\hat{\beta}_0)$ é o ponto de interseção da reta com o eixo (y).

O método dos mínimos quadrados (MMQ) é amplamente utilizado em análise de dados e modelagem estatística. Ele permite encontrar a linha que mais se aproxima dos dados, minimizando o erro médio dos quadrados.

Para o problema apresentado no Exemplo 3.1, os estimadores (β_0) e (β_1) serão calculados utilizando-se as equações (3.11) e (3.12). Os dados para esse cálculo estão especificados abaixo. Os valores podem ser verificados no APÊNDICE C.

n	Σx_i	Σy_i	$\Sigma (x_i)^2$	$\Sigma (y_i)^2$	$\Sigma x_i \cdot y_i$
13	26221	11,26	52887939	10,069	22717,48

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \cdot \Sigma_{i=1}^n x_i y_i - \Sigma_{i=1}^n x_i \cdot \Sigma_{i=1}^n y_i}{n \cdot \Sigma_{i=1}^n x_i^2 - (\Sigma_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{13 \cdot (22717,48) - 26221 \cdot (11,26)}{13 \cdot (52887939) - (26221)^2} = 0,033297$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\Sigma_{i=1}^n y_i - \hat{\beta}_1 \Sigma_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{11,26 - 0,033297 \cdot (26221)}{13} = -66,2933$$

A equação que representa a relação entre as variáveis dependente e independente é dada por:

$$\hat{y} = 0,033297x - 66,2933 \quad (3,18)$$

O valor (0,033297) representa a taxa de variação de (y) em relação à (x). Nesse contexto, significa que, para cada incremento de uma unidade em (x) ao longo dos anos, espera-se um aumento de 0,033297 graus Celsius na temperatura. A linearidade do ajuste é um aspecto importante para a interpretação dos resultados.

3.6 AVALIAÇÃO DO MODELO

O coeficiente de determinação, representado por R^2 , é uma métrica amplamente utilizada para avaliar o ajuste de um modelo de regressão linear. Esse coeficiente mede a proporção da variação na variável dependente que é explicada pela variação na variável independente. Pode ser calculado utilizando as somas dos quadrados.

SQres(Soma dos Quadrados dos Resíduos): Representa a variação que não é explicada pelo modelo. Calculada através da fórmula:

$$SQ_{res} = \Sigma_{i=1}^n e_i^2 = \Sigma_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (3,19)$$

SQtotal(Soma Total dos Quadrados): Representa a variação total dos dados em relação à média. Calculado através da fórmula:

$$SQ_{total} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (3.20)$$

SQreg(Soma dos Quadrados da Regressão): Representa a variação explicada pelo modelo.

$$SQ_{reg} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad \text{ou} \quad SQ_{reg} = SQ_{total} - SQ_{res}$$

(e_i) erro residual para a observação (i);

(y_i) valor observado da variável dependente para a observação (i);

(\hat{y}_i) valor estimado (calculado pelo modelo) da variável dependente para observação (i);

(\bar{y}) média dos valores observados, calculado através da equação (3.9):

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i$$

Utilizando as equações (3.19) e (3.20), a fórmula para o cálculo de R^2 é:

$$R^2 = 1 - \left(\frac{SQ_{res}}{SQ_{total}} \right) = \frac{SQ_{reg}}{SQ_{total}} \quad (3.21)$$

Essa fórmula mostra que o R^2 é a proporção da variação total que é explicada pelo modelo de regressão. Um R^2 próximo de 1 (um) indica que o modelo explica bem a variabilidade dos dados, enquanto um R^2 próximo de 0 (zero) indica que o modelo não explica bem a variabilidade (HOFFMANN, 2016). Em resumo, o coeficiente de determinação é uma ferramenta importante na análise de regressão, fornecendo uma medida quantitativa do quão bem o modelo se ajusta aos dados observados.

Para o cálculo do coeficiente de determinação para o problema apresentado no Exemplo 3.1, foram utilizadas as equações (3.9) e (3.21). Os valores podem ser verificados no APÊNDICE C.

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{13} \cdot 11,26 = 0,866154$$

\bar{y}	$\sum \hat{y}_i$	SQres	SQtot	SQreg
0,866154	11,26774	0,114334	0,316108	0,201787

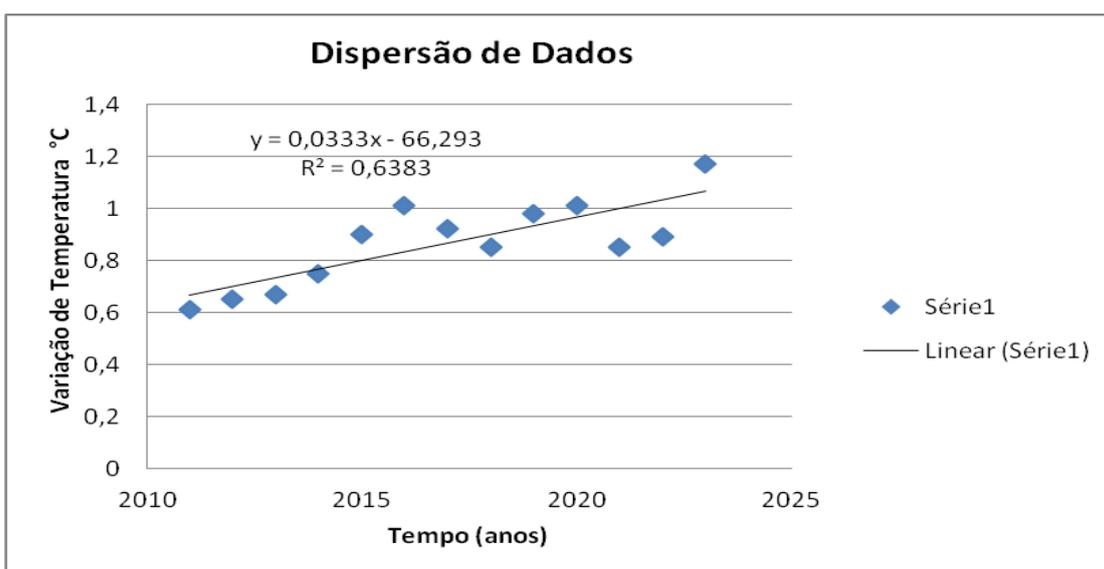
$$R^2 = 1 - \frac{SQ_{res}}{SQ_{tot}} = \frac{SQ_{reg}}{SQ_{tot}} = 1 - \frac{0,114334}{0,316108} = \frac{0,201787}{0,316108} = 0,6383$$

O valor de ($R^2 = 0,6383$) significa que aproximadamente 63,83% da variação na variável dependente podem ser explicadas pela variável independente do modelo. O valor de 0,3617 ($1-R^2$) representa a proporção da variação na variável dependente que não é explicada pelo modelo de regressão linear. Em outras palavras, 36,17% da variação na temperatura não podem ser explicadas pela variável independente incluída no modelo.

O valor de $R^2=0,6383$ será considerado aceitável, tendo em vista o objetivo deste trabalho, que é apresentar a regressão linear no contexto do ensino médio. Este estudo não pretende realizar uma análise estatística rigorosa, mas sim fornecer uma introdução acessível ao conceito de regressão linear para alunos desse nível de ensino. As limitações do modelo estão descritas no APÊNDICE E.

A Figura 10 apresenta o resultado da regressão dos dados coletados. A reta representa um ajuste linear, destacando a relação entre as variáveis. A análise da dispersão é importante para identificar padrões e tendências, proporcionando uma compreensão mais profunda das relações entre as variáveis.

FIGURA 10-RESULTADO DA REGRESSÃO



Fonte: Autor (2024).

3.7 ERRO PADRÃO DE ESTIMAÇÃO

O erro padrão de estimação (ou erro padrão da estimativa) mede a precisão das previsões feitas pelo modelo de regressão. Ele é calculado como a raiz quadrada da média dos quadrados dos resíduos (diferença entre os valores observados e os valores previstos pelo modelo). Em outras palavras, ele indica o quanto os valores previstos pelo modelo tendem a variar em relação aos valores observados. Um erro padrão de estimação menor indica um modelo mais preciso.

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}} \quad (3.22)$$

Para um detalhamento mais aprofundado, consulte Bussab e Morettin (2017).

Para o cálculo do erro padrão de estimação para o problema apresentado no Exemplo 3.1, foi utilizada a fórmula (3.22). Os valores podem ser verificados no APÊNDICE C:

N	$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$
13	0,11433

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{0,11433}{13 - 2}} = 0,101949$$

O erro padrão de estimação indica que, em média, a discrepância entre os valores observados e os valores previstos pelo modelo é, neste caso, de aproximadamente 0,101949 unidades. Isso implica que o modelo de regressão linear apresenta, em média, um erro de cerca de 0,101949 unidades na previsão dos valores da variável dependente.

3.8 INTERVALO DE CONFIANÇA

O intervalo de confiança fornece uma estimativa da precisão das previsões feitas pelo modelo. Especificamente, ele indica a faixa de valores dentro da qual o verdadeiro valor da variação da temperatura média da Terra provavelmente se encontra, com certo nível de confiança (geralmente 95%).

Quando se menciona o intervalo de confiança para a previsão da resposta, refere-se à distribuição amostral da variável resposta. O intervalo de confiança é expresso pela fórmula:

$$IC(E(Y|x); \gamma) = \hat{y}_i \pm t_{\gamma}(n-2)\hat{\sigma}_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (3,23)$$

(\hat{y}_i) valor estimado (calculado pelo modelo) da variável dependente para observação (i);

$(\hat{\sigma}_e)$ erro padrão de estimativa;

$[t_{\gamma}(n-2)]$ Valor crítico da distribuição da tabela *t* de *Student* (PROFESSOR GURU, 2024), para um nível de confiança (γ) (o valor de referência é $1-\gamma$) e $(n-2)$ graus de confiança.

A tabela *t* de *Student* é uma ferramenta estatística usada para encontrar valores críticos de uma distribuição *t*. Ela é essencial em testes de hipóteses e na construção de intervalos de confiança, especialmente quando a amostra é pequena e a variação populacional é desconhecida.

(n) número de observações;

(x_i) variável independente;

(\bar{x}) média dos valores atribuídos a variável independente calculado através da equação (3.10).

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i;$$

Para um detalhamento mais aprofundado, consulte Bussab e Morettin (2017).

Para o cálculo do intervalo de confiança para o problema apresentado no Exemplo 3.1, foram utilizadas as equações (3.10), (3,18) e (3.23). Os valores podem ser verificados no APÊNDICE C e o valor de $t_{\gamma}(n-2)$ retirado da tabela *t-Student*.

$$\hat{y}_i = 0,033297x - 66,2933 = 0,033297(2023) - 66,2933 = 1,066531$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{13} \cdot (2011 + 2012 + \dots + 2023) = \frac{26221}{13} = 2017$$

\hat{y}_i	$t_{\gamma}(n-2)$	$\hat{\sigma}_e$	n	x_i	\bar{x}	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
1,066531	2,201	0,101949	13	2023	2017	182

$$\begin{aligned}
 IC(E(Y|x); \gamma) &= \hat{y}_i \pm t_{\gamma}(n-2)\hat{\sigma}_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = 1,066531 \pm 2,201 \cdot 0,101949 \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{(2023 - 2017)^2}{182}} \\
 &= [0,9489, 1,1841]
 \end{aligned}$$

Para o problema apresentado no Exemplo 3.1, considerando o ano de 2023 ($x = 2023$), a estimativa da variação de temperatura média da Terra é 1,066531 °C, com um nível de confiança de 95% ($\gamma = 0,95$), o intervalo de confiança calculado é [0,9489, 1,1841].

A interpretação do intervalo de confiança calculado é a seguinte: para o ano de 2023, espera-se que a variação da temperatura média da Terra esteja entre 0,9489°C e 1,1841°C, com 95% de confiança. Isso significa que, se o experimento for repetido diversas vezes, em 95% das tentativas, a variação da temperatura média da Terra ficará dentro desse intervalo.

De acordo com o relatório do IPCC (2023), até o ano de 2020, a temperatura média da Terra registrou um aumento aproximado de 1,1°C no período de 2011 a 2020, em comparação com o intervalo de 1850 a 1900 (período pré-industrial). Nas primeiras décadas do século XXI (2001-2020), o aumento foi de 0,99°C em relação ao observado entre 1850 e 1900. Dessa forma, os valores apresentados pelo relatório do IPCC são consistentes com os cálculos realizados.

3.9 INTERVALO DE PREDIÇÃO

O intervalo de predição em regressão linear é uma faixa de valores que indica onde uma nova medição da variação da temperatura média da Terra pode se situar, com base no modelo de regressão, considerando a incerteza associada à previsão para um valor específico da variável independente. No contexto da previsão da variação térmica do planeta, esse intervalo oferece uma estimativa da precisão da previsão, levando em conta a variabilidade dos dados históricos e a incerteza associada às medições futuras.

O intervalo de predição para futura observação, dado por um nível x_f , é calculado por:

$$IP(y_f; \gamma) = \hat{y}_f \pm t_y(n-2)\hat{\sigma}_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_f - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (3.24)$$

(x_f) valor específico da variável independente para o qual se deseja prever a resposta;

(\hat{y}_f) valor estimado (calculado pelo modelo) da variável dependente para o qual se deseja prever a resposta.

Para um detalhamento mais aprofundado, consulte Bussab e Morettin (2017).

Esse intervalo representa a faixa na qual se espera encontrar o valor de uma resposta para um dado valor de entrada.

Para o cálculo do intervalo de predição para o problema apresentado no Exemplo 3.1, foram utilizadas as equações (3.18) e (3.24). O valor de $t_y(n-2)$ retirado da tabela *t-Student*. Os valores podem ser verificados no APÊNDICE C.

$$\hat{y}_f = 0,033297x_f - 66,2933 = 0,033297(2023) - 66,2933 = 1,066531$$

\hat{y}_f	$t_y(n-2)$	$\hat{\sigma}_e$	n	x_f	\bar{x}	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
1,066531	2,201	0,101949	13	2023	2017	182

$$IP(y_f; \gamma) = \hat{y}_f \pm t_y(n-2)\hat{\sigma}_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_f - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = 1,066531 \pm (2,201) \cdot 0,101949 \sqrt{1 + \frac{1}{13} + \frac{(2023 - 2017)^2}{182}}$$

$$=[0,8132, 1,3198]$$

Para o problema relacionado à variação de temperatura média da Terra ao longo dos anos referente ao Exemplo 3.1 e supondo que o ano seja 2023 ($x=2023$), o intervalo de predição com 95% de confiança é [0,8132, 1,3198]. Isso significa que, para o ano de 2023, a variação provável estará entre 0,8132°C e 1,3198°C.

Importante notar que o intervalo de predição é sempre maior que o intervalo de confiança para um determinado valor da variável independente. Isso ocorre porque o intervalo de confiança estima a média esperada da resposta para um dado

valor da variável independente, enquanto o intervalo de predição estima a faixa provável para uma única observação.

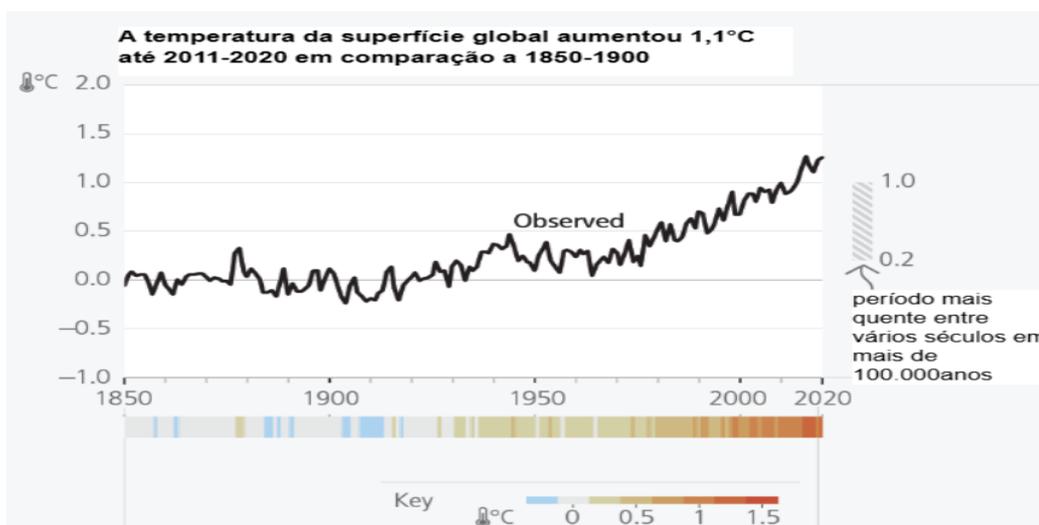
CAPÍTULO 4

4 ESTIMATIVAS FUTURAS DE AQUECIMENTO GLOBAL

4.1 AQUECIMENTO GLOBAL: AUMENTO DA VARIAÇÃO DA TEMPERATURA MÉDIA DA TERRA DESDE A REVOLUÇÃO INDUSTRIAL

Desde a Revolução Industrial, as variações na temperatura média da Terra aumentaram significativamente, em decorrência do aumento das emissões de gases de efeito estufa resultantes da queima de combustíveis fósseis, do desmatamento e de outras atividades humanas.

FIGURA 11-A ILUSTRAÇÃO DA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA MÉDIA DA TERRA



Fonte: Adaptado IPCC (2023).

A temperatura média da Terra aumentou aproximadamente 1,1°C em relação à média do período pré-industrial (1850-1900) até 2020, conforme ilustrado na Figura 11. Dados da UDOP (2023) indicam que a temperatura média global atual é em torno de 15°C sugerindo que durante o período pré-industrial (1850-1900) a temperatura média da Terra era aproximadamente 14°C. O uso insustentável e desigual de energia e da terra, juntamente com mais de um século de queima de combustíveis fósseis causaram inequivocamente o aquecimento global, resultando em impactos adversos generalizados, perdas e danos relacionados à natureza e às pessoas, conforme relatório IPCC (2023).

4.2 OS CENÁRIOS QUE MODELAM AS EMISSÕES DE GEE E SUAS IMPLICAÇÕES

O relatório (IPCC, 2023) apresenta vários cenários de desenvolvimento compartilhados, conhecidos como SSPs (Shared Socioeconomic Pathways – Caminhos Socioeconômicos Compartilhados), (ROCHA, *et. al.*, 2016) que modelam as emissões de gases de efeito estufa (GEE) e suas implicações para o aquecimento global. Os principais cenários mencionados incluem:

SSP1-1.9: Um cenário ambicioso que visa limitar o aquecimento global a 1,5°C, com emissões líquidas de CO₂ alcançando zero por volta de 2050. Este cenário é caracterizado por um forte foco em desenvolvimento sustentável e transição para uma economia de baixo carbono.

SSP1-2.6: Um cenário que também busca limitar o aquecimento a 2°C, mas com um aumento nas emissões que é menos rigoroso do que o SSP1-1.9.

SSP2-4.5: Um cenário intermediário que projeta um aumento nas emissões de GEE, resultando em um aquecimento global médio de aproximadamente 2,7°C até o final do século. Este cenário reflete um desenvolvimento que continua a depender de combustíveis fósseis, mas com algumas políticas de mitigação.

SSP3-7.0: O cenário se caracteriza por altas emissões e um desenvolvimento desigual, com dependência contínua de combustíveis fósseis. A variação da temperatura média da Terra projetada até 2100 é de aproximadamente 3,6°C. Essa estimativa apresenta uma faixa de incerteza que varia entre 2,8°C e 4,6°C, em comparação com a variação de temperatura média da Terra de 1850 a 1900.

SSP5-8.5: O cenário mais pessimista, onde as emissões de GEE continuam a crescer, levando a um aquecimento global médio de aproximadamente 4,4°C até o final do século. Este cenário é caracterizado por um crescimento econômico acelerado e uma falta de políticas climáticas eficazes.

Esses cenários ajudam a entender as diferentes trajetórias possíveis para o futuro do clima, dependendo das ações de mitigação e das políticas adotadas.

A Tabela 2 apresenta projeções de aumento de temperatura para três períodos (curto, médio e longo prazo) sob diferentes cenários de emissões. Cenários com menores emissões resultam em aumentos de temperatura mais baixos,

enquanto cenários com maiores emissões resultam em aumentos mais significativos. As temperaturas tendem a aumentar ao longo do tempo em todos os cenários.

Tabela 2-Projeções de Mudanças na Temperatura da Superfície Global para Diferentes Cenários de Emissões

Cenário	Curto prazo, 2021–2040		Médio prazo, 2041–2060		Longo prazo, 2081–2100	
	Melhor estimativa (°C)	Faixa Muito provável (°C)	Melhor estimativa (°C)	Faixa Muito provável (°C)	Melhor estimativa (°C)	Faixa Muito provável (°C)
SSP1-1.9	1,5	1,2 a 1,7	1,6	1,2 a 2,0	1,4	1,0 a 1,8
SSP1-2.6	1,5	1,2 a 1,8	1,7	1,3 a 2,2	1,8	1,3 a 2,4
SSP2-4.5	1,5	1,2 a 1,8	2,0	1,6 a 2,5	2,7	2,1 a 3,5
SSP3-7.0	1,5	1,2 a 1,8	2,1	1,7 a 2,6	3,6	2,8 a 4,6
SSP5-8.5	1,6	1,3 a 1,9	2,4	1,9 a 3,0	4,4	3,3 a 5,7

Fonte: IPCC (2021)

4.3 A PREVISÃO DE VARIAÇÃO DE TEMPERATURA PARA O ANO DE 2030

Para o problema apresentado no Exemplo 3.1, os cálculos para a previsão da variação de temperatura média da Terra para o ano de 2030 ($x = 2030$), utilizando a fórmula (3.18), são executados conforme descrito a seguir:

$$\hat{y} = 0,033297x - 66,2933 = 0,033297 \cdot (2030) - 66,2933 \cong 1,30$$

A fórmula prevê, para o ano de 2030, uma variação de temperatura média da Terra de aproximadamente de 1,3°C.

O intervalo de predição para observação do ano de 2030 é calculado utilizando a fórmula (3.10) e (3.24), e o valor de $t_y(n-2)$ retirado da tabela *t-Student*. Os dados estão apresentados abaixo:

Para esse cálculo $\hat{y} = \hat{y}_f \cong 1,3$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{20} (2011 + 2012 + \dots + 2030) = \frac{40410}{20} = 2020,5$$

\hat{y}_f	$t_y(n-2)$	$\hat{\sigma}_e$	n	x_f	\bar{x}	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
1,3	2,101	0,101949	20	2030	2020,5	665

$$IP(Y : y) = \hat{y}_f \pm t_y \cdot \sigma_e \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_f - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = 1,3 \pm 2,101 \cdot 0,101949 \sqrt{1 + \frac{1}{20} + \frac{(2030 - 2020,5)^2}{665}}$$

$$= [1,0666 ; 1,5333].$$

Para o problema relacionado à variação de temperatura média da Terra ao longo dos anos, conforme apresentado no Exemplo 3.1, e assumindo que o ano em questão seja 2030 ($x=2030$), o intervalo de predição com 95% de confiança é de $[1,0666 ; 1,5333]$. Isso implica que, para o ano de 2030, a variação provável estará entre $1,0666^\circ\text{C}$ a $1,5333^\circ\text{C}$.

Um aumento de temperatura média da Terra de $1,3^\circ\text{C}$, com uma variação prevista entre $1,06^\circ\text{C}$ e $1,53^\circ\text{C}$ para o ano de 2030, enquadra-se nos cenários *SSP2-4.5* a *SSP3-7.0*. Estes cenários são considerados de emissões intermediárias e altas, onde as projeções para 2030 mostram um aumento em comparação com a média do período antes da industrialização (1850-1900), que está de acordo com os valores mencionados.

4.4 PREVISÃO DE QUANDO A TEMPERATURA MÉDIA DA TERRA AUMENTARÁ $1,5^\circ\text{C}$

Projeta-se que a variação de temperatura média da Terra aumente em $1,5^\circ\text{C}$ na primeira metade da década de 2030. Cada incremento no aquecimento global intensifica os riscos múltiplos e simultâneos em todas as regiões do mundo (IPCC, 2023).

Utilizando-se a equação (3.10), (3,18) e (3,24) o valor de $t_y(n-2)$ retirado da tabela *t-Student*, e considerando $x = 2036$, tem-se:

$$\hat{y} = 0,033297x - 66,2933$$

$$\hat{y} = 0,033297 \cdot (2036) - 66,2933 = 1,499392 \cong 1,5$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{26} (2011 + 2012 + \dots + 2036) = 2023,5$$

\hat{y}_f	$t_y(n-2)$	$\hat{\sigma}_e$	n	x_f	\bar{x}	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
1,5	2,064	0,101949	26	2036	2023,5	1462,5

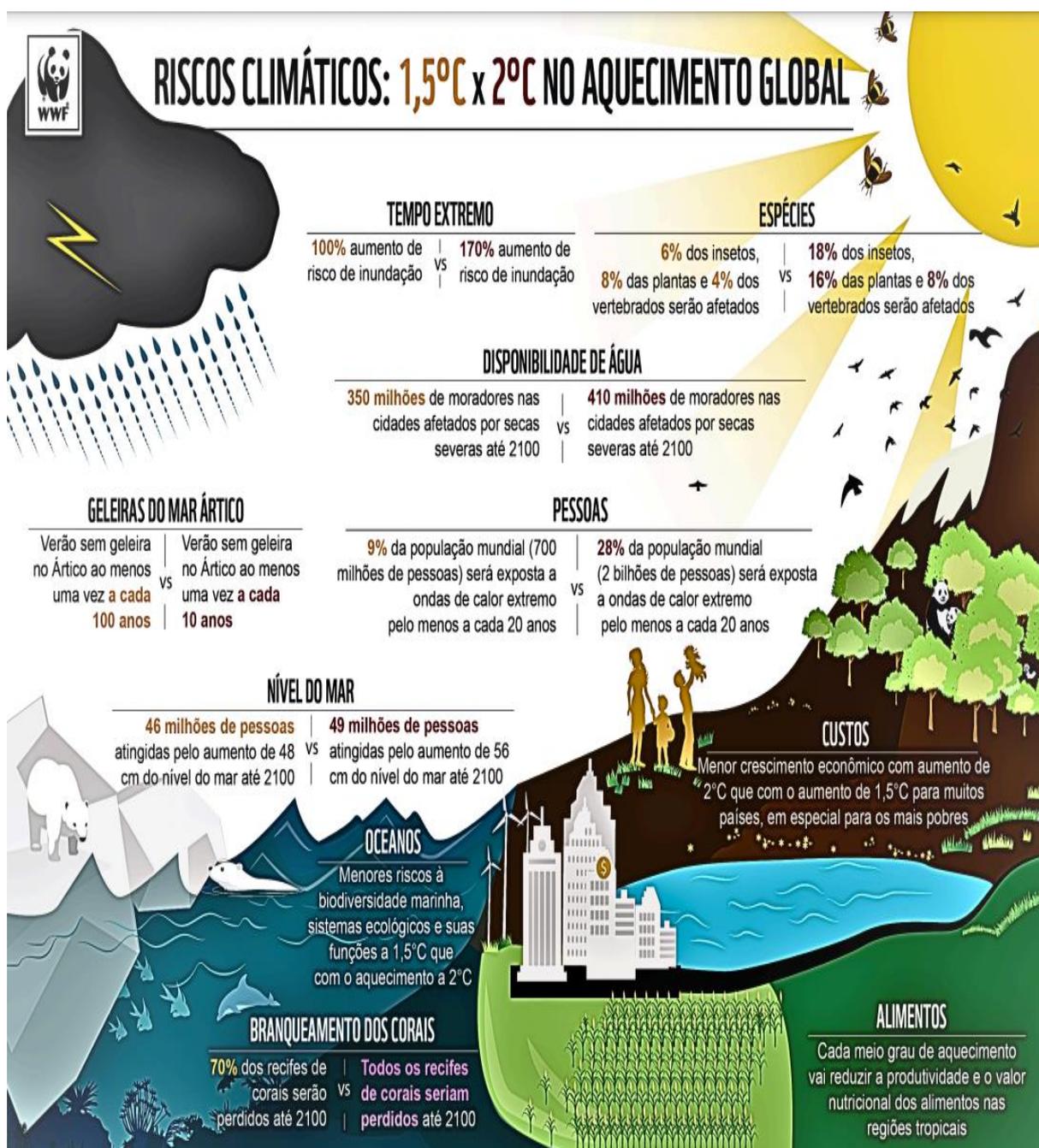
$$IP(Y : y) = \hat{y} \pm t_y \cdot \sigma_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_f - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = 1,5 \pm 2,064 \cdot 0,101949 \sqrt{1 + \frac{1}{26} + \frac{(2036 - 2023,5)^2}{1462,5}}$$

$$= [1,2749 ; 1,725].$$

Segundo o relatório do IPCC de 2023, a previsão de aumento de temperatura de 1,5°C está para a primeira metade da década de 2030. O cálculo, utilizando regressão linear, resultou em um aumento de temperatura de 1,5°C para o ano de 2036, com um intervalo de predição de 1,2749°C a 1,7251°C. Embora haja uma diferença de alguns anos entre as previsões, o cálculo está razoavelmente alinhado com relatório IPCC, considerando as diferentes abordagens metodológicas e a incerteza inerente às projeções climáticas.

A Figura 12 apresenta uma comparação dos riscos climáticos associados ao aquecimento global de 1,5°C em relação a 2°C. Essa ilustração destaca como diferentes níveis de aquecimento podem impactar o clima, mostrando os riscos aumentados que vêm com um aumento adicional de 0,5°C.

FIGURA 12-RISCOS CLIMÁTICOS 1,5°C X 2°C NO AQUECIMENTO GLOBAL



Fonte: Ecosfera21 (2018).

Ao interpretar a Figura 12, verifica-se que:

1. **Riscos climáticos:** Com 1,5°C de aquecimento, o risco de inundações aumenta 100%, mas com 2°C, esse risco aumenta 170%.
2. **Impacto nas espécies:** Com 1,5°C, cerca de 6% dos insetos, 8% das plantas e 4% dos vertebrados serão afetados. Se a temperatura chegar a 2°C, esses números sobem para 18%, 16% e 8%, respectivamente.

3. **Disponibilidade de água:** Até 350 milhões de pessoas podem sofrer com secas severas até 2100, com um aumento de 1,5°C. Com um aumento de 2°C, esse número sobe para 410 milhões de moradores em cidades afetadas por secas severas.
4. **Geleiras no Ártico:** A cada 100 anos, é possível ter verões sem geleiras no Ártico com 1,5°C de aumento. Com 2°C, isso pode acontecer uma vez a cada 10 anos.
5. **Ondas de calor:** Com 1,5°C, 700 milhões de pessoas estarão expostas a ondas de calor extremo pelo menos uma vez a cada 20 anos. Com 2°C, o número sobe para dois bilhões de pessoas.
6. **Nível do mar:** Um aumento de 1,5°C elevaria o nível do mar em 48 cm, afetando 46 milhões de pessoas até 2100. Com 2°C, o nível do mar subiria 56 cm, afetando 49 milhões de pessoas.
7. **Custo econômico:** O impacto econômico seria menor com 1,5°C, principalmente nos países mais pobres. Com 2°C, o impacto seria maior, prejudicando mais as economias em desenvolvimento.
8. **Biodiversidade marinha:** Com 1,5°C, os riscos para os ecossistemas marinhos seriam menores. Já com 2°C, a biodiversidade marinha seria muito mais ameaçada.
9. **Corais:** Com 1,5°C, 70% dos recifes de corais podem ser perdidos até 2100. Com 2°C, todos os recifes seriam perdidos.
10. **Alimentos:** A produção de alimentos nas regiões tropicais já seria afetada com 1,5°C. Com 2°C, o impacto seria ainda maior, reduzindo tanto a produtividade quanto o valor nutricional dos alimentos.

4.5 A PREVISÃO DE VARIAÇÃO DE TEMPERATURA PARA O ANO DE 2100

Para o problema apresentado no Exemplo 3.1, os cálculos para a previsão da variação de temperatura para o ano de 2100 ($x = 2100$), utilizando a fórmula (3.18), previamente desenvolvida para facilitar os cálculos necessários, são realizados conforme descrito a seguir:

$$\hat{y} = 0,033297x - 66,2933 = 0,033297(2100) - 66,2933 = 3,6304$$

A equação prevê para o ano de 2100 a variação de temperatura aproximada de 3,6°C.

O intervalo de predição para observação do ano de 2100 é calculado utilizando a fórmula (3.10) e (3,24). O valor de $t_y(n-2)$ retirado da tabela *T-Student*.

Para esse caso $\hat{y} = \hat{y}_f = 3,6304$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{90} (2011 + 2012 + \dots + 2100) = \frac{184995}{90} = 2055,5$$

\hat{y}_f	$t_y(n-2)$	$\hat{\sigma}_e$	n	x_f	\bar{x}	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
3,6304	1,987	0,101949	90	2100	2055,5	60742,5

$$IP(Y : y) = \hat{y}_f \pm t_y(n-2) \cdot \sigma_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_f - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = 3,6304 \pm 1,987 \cdot 0,101949 \sqrt{1 + \frac{1}{90} + \frac{(2100 - 2055,5)^2}{60742,5}}$$

$$= [3,4234 ; 3,8374]$$

Para o problema de variação de temperatura média da Terra ao longo dos anos, conforme apresentado no Exemplo 3.1, e assumindo que o ano em questão seja 2100 ($x = 2100$), o intervalo de predição com 95% de confiança é de [3,4234 ; 3,8374]. Isso implica que, para o ano de 2100, a variação provável está entre 3,4234°C e 3,8374°C.

Uma variação de temperatura média da Terra de 3,4°C a 3,8°C para o ano de 2100 se enquadra no cenário SSP3-7.0, caracterizado por altas emissões de gases de efeito estufa (GEE), com uma estimativa de aquecimento de 3,6°C (intervalo de 2,8°C a 4,6°C), conforme o relatório do IPCC de 2023.

Conforme o relatório do IPCC (2023), as projeções de variação de temperatura média da Terra para o ano de 2100 apresentam diferenças de acordo com os diferentes cenários de emissões de gases de efeito estufa (GEE). As estimativas mais precisas e as faixas de aquecimento consideradas muito prováveis para o período de 2081 a 2100, em comparação com o intervalo de 1850 a 1900, são as seguintes:

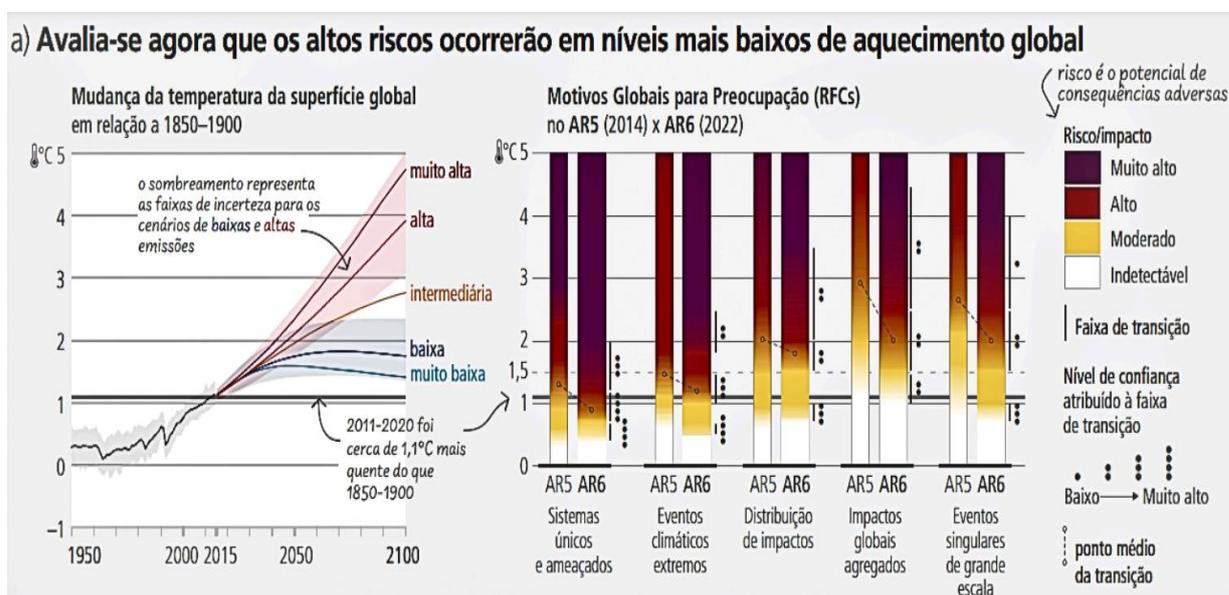
- No cenário de emissões muito baixas de GEE (*SSP1–1.9*), a temperatura poderá aumentar até 1,4°C, com uma faixa de variação de 1,0°C a 1,8°C.
- No cenário de emissões intermediárias de GEE (*SSP2–4.5*), a temperatura poderá aumentar até 2,7°C, com uma faixa de 2,1°C a 3,5°C.

- No cenário de emissões muito altas de GEE (SSP5–8.5), a temperatura poderá aumentar até 4,4°C, com uma faixa de 3,3°C a 5,7°C.

Essas projeções evidenciam que o aquecimento global continuará a se intensificar, dependendo das futuras emissões de GEE e das políticas de mitigação que forem adotadas.

A Figura 13 ilustra as mudanças nas variações da temperatura média da Terra, considerando os diferentes cenários de emissões: muito baixa, baixa, intermediária, alta e muito alta. A frase apresentada na Figura 13: "Avalia-se agora que os altos riscos ocorrerão em níveis mais baixos de aquecimento global" (IPCC, 2023), sugere que os riscos significativos associados ao aquecimento global estão sendo previstos para ocorrer mesmo em níveis menores de variação de temperatura média da Terra. Isso implica que, mesmo um aquecimento global relativamente moderado pode resultar em consequências graves.

FIGURA 13-ALTOS RISCOS CLIMÁTICOS ANTECIPADOS EM MENORES NÍVEIS DE AQUECIMENTO GLOBAL



4.6 IMPACTOS PROJETADOS DO AUMENTO DA TEMPERATURA GLOBAL POR FAIXA DE TEMPERATURA DE ACORDO COM O RELATÓRIO IPCC 2023

Os impactos da variação da temperatura média da Terra mudam de forma significativa conforme o nível de aquecimento. A seguir, são descritos os impactos previstos para diferentes níveis de variação da temperatura.

De 1,5°C a 2°C: Impactos moderados na produção agrícola e na segurança alimentar, com algumas regiões experimentando perdas significativas. Aumento na frequência e intensidade de eventos climáticos extremos, como ondas de calor e chuvas intensas. Risco aumentado de extinção, especialmente em ecossistemas sensíveis, como recifes de corais.

De 2°C a 3°C: Aumento significativo na escassez de água em várias partes do mundo, afetando milhões de pessoas. Extinção local de até 30% das espécies (como insetos, recifes de corais) em algumas regiões. Aumento da frequência de desastres naturais, como inundações e secas. Deslocamento de biomas e mudanças nos ecossistemas com impactos severos na biodiversidade.

De 3°C a 4°C: Aumento significativo na insegurança alimentar e na migração forçada devido a condições climáticas extremas. Impactos severos na saúde humana, incluindo aumento de doenças relacionadas ao calor e à umidade. Aumento de 50-70% na área queimada global e aumento de 30% na frequência de incêndios florestais. Extinção de aproximadamente 50% das espécies marinhas tropicais.

Acima de 4°C: Aumento da vulnerabilidade a desastres naturais com impactos devastadores em comunidades e economias. Impactos severos na agricultura, com possibilidade de colapso de sistemas alimentares em várias regiões. Risco de colapso de ecossistemas inteiros de biodiversidade em larga escala.

O relatório *IPCC* não especifica uma “temperatura ideal” da Terra para a vida humana, mas discute os impactos do aquecimento global e os limites de adaptação que os ecossistemas e as sociedades humanas enfrentam à medida que as variações de temperaturas aumentam. A variação de temperatura média global atual é cerca de 1,1°C acima dos níveis pré-industriais, e o aumento contínuo da variação de temperatura média da Terra está associado a riscos crescentes para a saúde humana, segurança alimentar, água e ecossistemas.

A literatura científica, como o relatório do Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas de 2019, sugere que um aumento de temperatura superior a 1,5°C pode levar a consequências severas e irreversíveis, especialmente para

populações vulneráveis, como alguns povos indígenas e comunidades locais dependentes de meios de subsistência agrícolas ou costeiros. As populações desfavorecidas e vulneráveis têm um risco desproporcionalmente maior de sofrer consequências adversas do aquecimento global de 1,5°C e além. Portanto, muitos especialistas consideram que limitar o aquecimento global a 1,5°C é crucial para evitar os piores impactos das mudanças climáticas e garantir condições de vida adequadas para as gerações futuras.

CAPÍTULO 5

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho concentrou-se em apresentar o efeito estufa, sua origem e impacto no aquecimento global. Foram evidenciados os principais países emissores de gases de efeito estufa. A curva de *Keeling* foi utilizada para ilustrar o monitoramento contínuo de CO₂ atmosférico. O impacto do crescimento populacional nas mudanças climáticas foi citado. A pesquisa de gases de efeito estufa em núcleos de gelo antártico revelou mudanças climáticas ao longo de 800 mil anos, oferecendo uma perspectiva histórica valiosa. O impacto da Revolução Industrial nas concentrações de CO₂ enfatizou a importância histórica desse período como um alerta para as consequências das atividades humanas no clima global.

Foram apresentados os conceitos e fórmulas sobre regressão linear, com ênfase no problema 'A estimativa do aumento da temperatura da Terra usando regressão linear'. Em conclusão, o objetivo deste estudo é incentivar o uso de conceitos matemáticos no entendimento das mudanças climáticas. Este trabalho estabelece uma base para compreender como, historicamente, a variação da temperatura média da Terra tem aumentado, e como o algoritmo de regressão linear pode ser uma ferramenta eficaz para analisar esse fenômeno. A partir das variações anteriores é possível estimar a tendência futura do aquecimento global.

Ao final deste trabalho, no apêndice D, foi proposta uma aplicação prática de regressão linear, que inclui conceitos e fórmulas, para ser utilizada em sala de aula com alunos do ensino médio e técnico. O objetivo desta aplicação, além de se aprofundar no uso de ferramentas matemáticas, é conscientizar os estudantes sobre a variação da temperatura média da Terra ao longo do tempo, destacando seu aumento, e estimar as mudanças climáticas futuras no planeta.

Sugestões para pesquisas futuras envolvem a aplicação de técnicas de regressão não linear ou regressão linear múltipla, incorporando outras variáveis, como os níveis de CO₂ na atmosfera, a quantidade de energia solar recebida pela Terra, a umidade relativa do ar, o percentual de cobertura de nuvens, a velocidade do vento, que pode influenciar a distribuição de calor, além da quantidade de água que evapora e da transpiração das superfícies terrestres. A inclusão de tais variáveis

pode resultar em estimativas mais precisas e contribuir para um entendimento mais aprofundado dos fatores que impactam as variações na temperatura terrestre.

Por fim, ressalta-se que todos os objetivos definidos para o estudo foram atingidos e acredita-se que a incorporação da estimativa do aumento da temperatura global por meio da regressão linear, de forma adaptada ao currículo do ensino médio, pode ser considerada uma estratégia eficaz para o desenvolvimento de competências e habilidades dos estudantes. Especialmente, essa abordagem pode promover o aprimoramento das competências matemáticas, uma vez que os alunos aprofundam seus conhecimentos em estatística e álgebra ao aplicarem a regressão linear a dados climáticos. Além disso, essa prática amplia a compreensão sobre o aquecimento global, proporcionando uma visão mais aprofundada das causas e efeitos das mudanças climáticas, o que pode, por sua vez, aumentar a conscientização ambiental e a responsabilidade dos estudantes.

REFERÊNCIAS

ALURA. Desvendando a Regressão Linear. Disponível em: <https://www.alura.com.br/artigos/desvendando-a-regressao-linear>. Acesso em: 06 ago. 2024.

GRUPO BANCO MUNDIAL. População, total. Disponível em: <https://datos.bancomundial.org/indicador/SP.POP.TOTL?end=2023&start=1960&vie=w=chart>. Acesso em: 25 ago. 2024.

BILGILI, M. ; TUMSE, S.; NAR, S. Comprehensive overview on the present state and evolution of global warming, climate change, greenhouse gases and renewable energy. **Arabian Journal for Science and Engineering**, v. 49, p. 14503–14531, 2024.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. Estatística Básica. 9ª ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

CAMPOS, J. A. La "Curva de Keeling" y el número más importante para nuestro mundo: 400 ppm. 2013.

CARLOS, F. S. **Variabilidade química e climática no registro do testemunho de gelo: Mount Johns – Antártica.** Dissertação (Mestrado em Geociências) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Geociências, Porto Alegre, 2016.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia.** 5ª ed. Tradução Técnica: Helena Castro. São Paulo: McGraw-Hill, 2008

CHEIN, Flávia. **Introdução aos Modelos de Regressão Linear.** Porto Alegre: UFGS, 2019.

DATA GEEKS. Regressão Linear Explicada: Conceito e Implementação. 2019. Disponível em: <https://www.datageeks.com.br/regressao-linear/>. Acesso em: 3 set. 2025.

ECYCLE. A Curva de Keeling e o aquecimento global. Disponível em: <https://www.ecycle.com.br/curva-de-keeling/>. Acesso em: 21 ago. 2024.

ECOSFERA21. Novo relatório do IPCC: 1,5°C – mais esforços para ação climática. 2018. Disponível em: <https://ecosfera21.wordpress.com/2018/10/22/novo-relatorio-do-ipcc-15c-mais-esforcos-para-acao-climatica/>. Acesso em: 26 out. 2024.

FOLHA DE S.PAULO. Aquecimento global de 1,5°C pode levar até 14% das espécies à extinção. 2022. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/ambiente/2022/03/aquecimento-global-de-150c-pode-levar-ate-14-das-especies-a-extincao.shtml>. Acesso em: 20 ago. 2024.

GISTEMP Team. GISS Surface Temperature Analysis (GISTEMP), version 4. NASA Goddard Institute for Space Studies, 2024. Disponível em:

https://data.giss.nasa.gov/gistemp/tabledata_v4/GLB.Ts+dSST.txt. Acesso em: 06 abr. 2024. (*Relatório da web*)

GLOBO.COM. Pinguins da Antártida podem sumir até 2100, caso ritmo do aquecimento persista. Um Só Planeta, 25 abr. 2024. Disponível em: <https://umsoplaneta.globo.com/biodiversidade/noticia/2024/04/25/pinguins-da-antartida-podem-sumir-ate-2100-caso-ritmo-do-aquecimento-persista.ghtml>. Acesso em: 12 nov. 2024.

HOFFMANN, R. **Análise de Regressão: Uma introdução à Econometria**. 1. ed. São Paulo: Hucitec, 2016.

INTERGOVERNMENTAL PANEL ON CLIMATE CHANGE (IPCC). *Climate change 2021: The physical science basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the IPCC*. Cambridge University Press, 2021.

IPCC. Mudança do Clima 2021: A Base das Ciências Físicas. Disponível em: https://www.gov.br/mcti/pt-br/acompanhe-o-mcti/sirene/publicacoes/relatorios-do-ipcc/arquivos/pdf/IPCC_mudanca2.pdf. Acesso em: 10 set. 2024

IPEA. A política de desenvolvimento e a nova economia do conhecimento. Brasília: IPEA, 2019. Disponível em: https://repositorio.ipea.gov.br/bitstream/11058/12205/1/BEPI_35_Book.pdf#page=10. Acesso em: 24 abr. 2024.

LIMA, M. A. Agropecuária brasileira e as mudanças climáticas globais: caracterização do problema, oportunidades e desafios. **Cadernos de Ciência & Tecnologia**, Brasília, v. 19, n. 3, p. 451-472, 2002.

MACEDO, Isaias. *Etanol e mudança do clima: a contribuição para o PNMC e as metas para o pós-Kyoto*. 2014. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Isaias-Macedo/publication/266178289_ETANOL_E_MUDANCA_DO_CLIMA_A_CONTRIBUICAO_PARA_O_PNMC_E_AS_METAS_PARA_O_POS-KYOTO/links/54bd52f80cf218d4a16a2602/ETANOL-E-MUDANCA-DO-CLIMA-A-CONTRIBUICAO-PARA-O-PNMC-E-AS-METAS-PARA-O-POS-KYOTO.pdf. Acesso em: 30 out. 2024.

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO. Painel Intergovernamental sobre Mudanças do Clima – IPCC, 2023 Relatório de Avaliação. Disponível: https://www.ipcc.ch/report/ar6/syr/downloads/report/IPCC_AR6_SYR_LongerReport_PO.pdf. Acesso em: 02 mai. 2024.

MOLION, L. C. B. Aquecimento Global: Uma Visão Crítica. **Revista Brasileira de Climatologia**, Universidade Federal do Paraná, 2008.

MOREIRA, Aline de Oliveira. **Um estudo sobre regressão linear e regressão logística**. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Cruz das Almas, 2021. Disponível em:

https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6388&id2=171053873. Acesso em: 14 mai. 2024.

MUNDO EDUCAÇÃO. Efeito estufa. *Mundo Educação*, 2024. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/efeito-estufa.htm>. Acesso em: 31 dez. 2024.

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION (NASA). Carbon Dioxide. 2023. Disponível em: <https://climate.nasa.gov/vital-signs/carbon-dioxide/?intent=121>. Acesso em: 20 mai. 2024.

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION (NASA). Evidence. 2023. Disponível em: <https://science.nasa.gov/climate-change/evidence/>. Acesso em: 18 mai. 2024.

NAÇÕES UNIDAS NO BRASIL. *População e mudanças climáticas*. 2017. Disponível em: <https://brasil.un.org/pt-br/77645-artigo-popula%C3%A7%C3%A3o-e-mudan%C3%A7as-clim%C3%A1ticas> . Acesso em: 10 jun. 2024.

NATIONAL GEOGRAPHIC BRASIL. Espécies marinhas estão desaparecendo mais rápido do que as terrestres. Disponível em: <https://www.nationalgeographicbrasil.com/meio-ambiente/2019/05/especies-marinhas-estao-desaparecendo-mais-rapido-do-que-as-terrestres>. Acesso em: 10 jun. 2024.

NOAA Global Monitoring Laboratory. Trends in Atmospheric Carbon Dioxide. 2023. Disponível em: <https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/>. Acesso em: 10 mai. 2024.

O GLOBO. Derretimento das camadas de gelo da Groenlândia já é irreversível, indica estudo, 2019. Disponível em: <https://oglobo.globo.com/brasil/derretimento-das-camadas-de-gelo-da-groenlandia-ja-irreversivel-indica-estudo-24587720>. Acesso em: 5 nov. 2024.

OUR WORLD IN DATA. CO2 emissions. Disponível em: <https://ourworldindata.org/co2-emissions>, 2024. Acesso em: 12 nov. 2024.

PAINEL INTERGOVERNAMENTAL SOBRE MUDANÇAS CLIMÁTICAS. Sumário para os formuladores de políticas. Versão em português. 2019. Disponível em: <https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2019/07/SPM-Portuguese-version.pdf> . Acesso em: 09 out. 2024.

POTENCIAL BIÓTICO. Herbivoria e recifes de corais: como a pesca irregular afeta a dinâmica dessa relação. 2021. Disponível em: <https://www.potencialbiotico.com/espacobiotico/meio-ambiente/herbivoria-e-recifes-de-corais-como-a-pesca-irregular-afeta-a-dinamica-dessa-relacao> . Acesso em: 10 set. 2024.

PROFESSOR GURU. Tabela t-Student. Professor Guru, 2024. Disponível em: <https://www.professorguru.com.br/estatistica/tabela-t-student.html>. Acesso em: 05 mai. 2024.

ROCHA, R. R.; SILVA, C. F.; PEREIRA, M. A. Sustainability assessment of urban mobility: A case study in Brazil. **Journal of Cleaner Production**, v. 135, p. 67-75, 2016.

SILVA, J. A. da. "Prática educacional dialógica em Física via equipamentos Geradores." **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 24, n. 2, 2007.

SILVA, R. W. da C.; PAULA, B.L. de. Causa do aquecimento global: antropogênica versus natural. **Terra e Didática**, v. 5, n. 1, 2009.

G1. Madagascar é vítima da primeira fome ligada ao aquecimento global, diz programa da ONU, 2021. Disponível em: <https://g1.globo.com/mundo/noticia/2021/11/02/madagascar-e-vitima-da-primeira-fome-ligada-ao-aquecimento-global-diz-programa-da-onu.ghtml>. Acesso em: 5 nov. 2024.

STEWART, James. **Cálculo: Volume 2**. 7. ed. 2012.

UDOP. Veja qual é a temperatura média da superfície da Terra e de outros planetas. 2023. Disponível em: <https://www.udop.com.br/noticia/2023/11/21/veja-qual-e-a-temperatura-media-da-superficie-da-terra-e-de-outros-planetas.html> . Acesso em: 11 nov. 2024.

WEATHER CHANNEL. NASA satellite measures CO2 emissions of over 100 countries. Disponível em: https://weather.com/en-IN/india/pollution/news/2023-03-13-nasa-satellite-measures-co2-emissions-of-over-100-countries-from?utm_medium=website&utm_source=archdaily.com.br. Acesso em: 10 jun. 2024.

123 ECOS. Crescimento populacional, 2024. Disponível em: <https://123ecos.com.br/docs/crescimento-populacional/> . Acesso em: 13 nov. 2024.

APÊNDICES

APÊNDICE A – LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Sigla Significado

IPCC- Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas

CO₂- Dióxido de Carbono

CH₄- Metano

H₂O- Água

NASA- Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço (National Aeronautics and Space Administration)

GEE- Gases de Efeito Estufa

HFCs- Hidrofluorocarbonetos

ppm- Partes por Milhão

°C- Graus Celsius

x- Variável Independente (geralmente representando o tempo ou outra variável)

y- Variável Dependente (geralmente representando a temperatura ou outra medida)

SQ- Soma dos Quadrados

MMQ- Método dos Mínimos Quadrados

SQres- Soma dos Quadrados dos Resíduos

Sqtot- Soma Total dos Quadrados

Sqreg- Soma dos Quadrados da Regressão

R²- Coeficiente de Determinação (R-quadrado)

IC- Intervalo de Confiança

IP- Intervalo de Previsão

SSP- Caminhos Socioeconômicos Compartilhados (Shared Socioeconomic Pathways)

σ_e - Erro Padrão de Estimação

$[t_y(n - 2)]$ - Valor Crítico da Distribuição da Tabela *t* de Student

APÊNDICE B – VARIAÇÃO DE TEMPERATURA (1880-2023)

Índice GLOBAL de Temperatura Terra-Oceano							
x	y	x	Y	x	y	X	y
1880	-0,17	1916	-0,36	1952	0,01	1988	0,39
1881	-0,09	1917	-0,46	1953	0,08	1989	0,27
1882	-0,11	1918	-0,3	1954	-0,13	1990	0,45
1883	-0,18	1919	-0,28	1955	-0,14	1991	0,41
1884	-0,29	1920	-0,27	1956	-0,19	1992	0,22
1885	-0,34	1921	-0,19	1957	0,05	1993	0,23
1886	-0,32	1922	-0,28	1958	0,06	1994	0,31
1887	-0,37	1923	-0,26	1959	0,03	1995	0,45
1888	-0,18	1924	-0,27	1960	-0,03	1996	0,33
1889	-0,11	1925	-0,22	1961	0,06	1997	0,46
1890	-0,35	1926	-0,11	1962	0,03	1998	0,61
1891	-0,23	1927	-0,22	1963	0,05	1999	0,38
1892	-0,28	1928	-0,2	1964	-0,2	2000	0,39
1893	-0,31	1929	-0,36	1965	-0,11	2001	0,54
1894	-0,3	1930	-0,15	1966	-0,06	2002	0,63
1895	-0,23	1931	-0,09	1967	-0,02	2003	0,62
1896	-0,11	1932	-0,15	1968	-0,08	2004	0,53
1897	-0,11	1933	-0,28	1969	0,05	2005	0,68
1898	-0,27	1934	-0,12	1970	0,03	2006	0,64
1899	-0,17	1935	-0,19	1971	-0,08	2007	0,66
1900	-0,08	1936	-0,14	1972	0,01	2008	0,54
1901	-0,15	1937	-0,02	1973	0,16	2009	0,66
1902	-0,28	1938	0	1974	-0,07	2010	0,72
1903	-0,37	1939	-0,02	1975	-0,01	2011	0,61
1904	-0,47	1940	0,13	1976	-0,1	2012	0,65
1905	-0,26	1941	0,19	1977	0,18	2013	0,67
1906	-0,22	1942	0,07	1978	0,07	2014	0,75
1907	-0,39	1943	0,09	1979	0,16	2015	0,9
1908	-0,42	1944	0,2	1980	0,26	2016	1,01
1909	-0,48	1945	0,09	1981	0,32	2017	0,92
1910	-0,43	1946	-0,07	1982	0,14	2018	0,85
1911	-0,44	1947	-0,03	1983	0,31	2019	0,98
1912	-0,37	1948	-0,11	1984	0,16	2020	1,01
1913	-0,35	1949	-0,11	1985	0,12	2021	0,85
1914	-0,15	1950	-0,17	1986	0,18	2022	0,89
1915	-0,14	1951	-0,07	1987	0,32	2023	1,17

Fonte: Adaptado de Gistemp (2024).

APÊNDICE C – VARIAÇÃO DE TEMPERATURA (2011-2023). CÁLCULOS COMPLEMENTARES

Observações	x_i	y_i	x^2	y^2	$x \cdot y$	\hat{y}_i	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	2011	0,61	4044121	0,3721	1226,71	0,666967	0,003245	0,065615	0,039654	36
2	2012	0,65	4048144	0,4225	1307,8	0,700264	0,002527	0,046722	0,027502	25
3	2013	0,67	4052169	0,4489	1348,71	0,733561	0,00404	0,038476	0,017567	16
4	2014	0,75	4056196	0,5625	1510,5	0,766858	0,000284	0,013492	0,009849	9
5	2015	0,9	4060225	0,81	1813,5	0,800155	0,009969	0,001146	0,004349	4
6	2016	1,01	4064256	1,0201	2036,16	0,833452	0,031169	0,020692	0,001066	1
7	2017	0,92	4068289	0,8464	1855,64	0,866749	0,002836	0,002899	4,21E-07	0
8	2018	0,85	4072324	0,7225	1715,3	0,900046	0,002505	0,000261	0,001152	1
9	2019	0,98	4076361	0,9604	1978,62	0,933343	0,002177	0,012961	0,004522	4
10	2020	1,01	4080400	1,0201	2040,2	0,96664	0,00188	0,020692	0,010108	9
11	2021	0,85	4084441	0,7225	1717,85	0,999937	0,022481	0,000261	0,017912	16
12	2022	0,89	4088484	0,7921	1799,58	1,033234	0,020516	0,000569	0,027934	25
13	2023	1,17	4092529	1,3689	2366,91	1,066531	0,010706	0,092322	0,040173	36
Σ	26221	11,26	52887939	10,069	22717,48	11,26774	0,114334	0,316108	0,201787	182

SQres SQtotal SQreg

Fonte: Autor

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{13} \cdot 11,26 = 0,866154$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{13} \cdot (2011 + 2012 + \dots + 2023) = \frac{26221}{13} = 2017$$

APÊNDICE D – APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

UM ESTUDO SOBRE A ESTIMATIVA DO AUMENTO DA TEMPERATURA DA TERRA USANDO REGRESSÃO LINEAR

Objetivo Geral:

O presente trabalho tem como objetivo geral desenvolver a compreensão das causas e consequências da intensificação do efeito estufa, com ênfase na ação humana desde a Revolução Industrial, promover a conscientização dos alunos sobre os impactos do aquecimento global, e aplicar os conceitos de regressão linear para analisar e estimar as tendências futuras das variações da temperatura média da Terra, utilizando cálculos e análise de dados históricos.

Objetivos Específicos:

- Entender as causas da intensificação do efeito estufa e a ação do homem;
- Conhecer um breve histórico da variação da temperatura média da Terra;
- Compreender que a intensificação do efeito estufa iniciou na Revolução Industrial;
- Entender o conceito de Regressão Linear;
- Realizar cálculos usando tabelas e fórmulas pelo método de Regressão Linear através da apresentação de um problema;
- Analisar a relação entre os resultados obtidos e o aquecimento global;
- Estimar as variações de temperaturas médias da Terra para 2030 e 2100 usando as fórmulas de regressão linear.

Público Alvo:

Estudantes do Ensino Médio, tendo sido previamente apresentados aos conceitos de funções afins no nono ano ou 1º ano, que possuem a base necessária para aprofundar seu entendimento em assuntos mais avançados.

Justificativa

A necessidade de compreender o aquecimento global motivou a elaboração de uma intervenção pedagógica em sala de aula, com ênfase na disseminação do

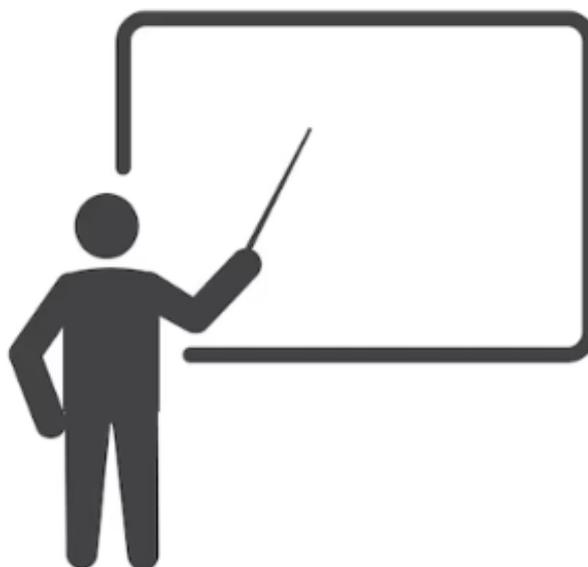
conhecimento sobre as variações da temperatura média da Terra, destacando seu aumento, utilizando a regressão linear e apresentando um problema prático. Esse plano é importante, pois o tema do aquecimento global não é amplamente abordado no ensino médio. Os benefícios incluem alertar os alunos sobre o futuro do planeta caso os níveis térmicos continuem a subir e utilizar uma ferramenta matemática para auxiliar na compreensão desse fenômeno. O estudo desse tema é essencial, visto que as mudanças no clima estão intimamente ligadas à permanência da vida, como conhecemos hoje.

Descrição metodológica

1ª Aula- A Intensificação do Efeito Estufa: Causas, Emissões e o Impacto da Revolução Industrial.

Os alunos serão apresentados aos seguintes tópicos:

1. Compreensão das causas da intensificação do Efeito Estufa: Análise de como as atividades antrópicas contribuem de forma significativa para o aumento do efeito estufa;
2. Histórico do aumento da variação da temperatura média da Terra: estudo cronológico das variações globais ao longo dos séculos;
3. Impacto da Revolução Industrial na intensificação do efeito estufa: Entender como a Revolução Industrial marcou o início de um aumento acelerado nas emissões de gases de efeito estufa, resultando na variação da temperatura média da Terra.



2ª Aula- Introdução à Regressão Linear: Conceitos, Objetivos e Fórmulas Essenciais.

Os alunos serão apresentados aos seguintes assuntos:



1. Conceitos de Regressão Linear: Introdução dos principais fundamentos da regressão linear, incluindo a relação entre variável independente e dependente;
2. Objetivo do estudo: Explicar detalhadamente o propósito da análise de regressão linear no contexto do estudo em questão;

3. Fórmulas e conceitos relevantes: Apresentação dos conceitos e fórmulas matemáticas essenciais para a realização de cálculos de regressão linear, que deverão ser anotadas para consulta posterior.

3ª Aula - Análise Colaborativa de Dados: Segmentação e Cálculos em Grupo.



Os alunos serão divididos em grupos e apresentados ao problema. Receberão uma tabela com as colunas 1, 2 e 3 já preenchidas. Com o apoio do professor, deverão trabalhar em conjunto para começar o preenchimento das colunas 4, 5 e 6 da tabela, podendo realizar os cálculos manualmente ou utilizar recursos tecnológicos, como planilha de cálculos.

Observações	x_i	y_i	x^2	y^2	$x \cdot y$	\hat{y}_i	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	2011	0,61	4044121	0,3721	1226,71	0,666967	0,003245	0,065615	0,039654	36
2	2012	0,65	4048144	0,4225	1307,8	0,700264	0,002527	0,046722	0,027502	25
3	2013	0,67	4052169	0,4489	1348,71	0,733561	0,00404	0,038476	0,017567	16
4	2014	0,75	4056196	0,5625	1510,5	0,766858	0,000284	0,013492	0,009849	9
5	2015	0,9	4060225	0,81	1813,5	0,800155	0,009969	0,001146	0,004349	4
6	2016	1,01	4064256	1,0201	2036,16	0,833452	0,031169	0,020692	0,001066	1
7	2017	0,92	4068289	0,8464	1855,64	0,866749	0,002836	0,002899	4,21E-07	0
8	2018	0,85	4072324	0,7225	1715,3	0,900046	0,002505	0,000261	0,001152	1
9	2019	0,98	4076361	0,9604	1978,62	0,933343	0,002177	0,012961	0,004522	4
10	2020	1,01	4080400	1,0201	2040,2	0,96664	0,00188	0,020692	0,010108	9
11	2021	0,85	4084441	0,7225	1717,85	0,999937	0,022481	0,000261	0,017912	16
12	2022	0,89	4088484	0,7921	1799,58	1,033234	0,020516	0,000569	0,027934	25
13	2023	1,17	4092529	1,3689	2366,91	1,066531	0,010706	0,092322	0,040173	36
Σ	26221	11,26	52887939	10,069	22717,48	11,26774	0,114334	0,316108	0,201787	182

SQres SQtotal SQreg

Para aprimorar a clareza e a organização dos cálculos, recomenda-se que os alunos segmentem os dados e os apliquem nas fórmulas correspondentes:

n	Σx_i	Σy_i	$\Sigma (x_i)^2$	$\Sigma (y_i)^2$	$\Sigma x_i \cdot y_i$
13	26221	11,26	52887939	10,069	22717,48

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \cdot \Sigma_{i=1}^n x_i y_i - \Sigma_{i=1}^n x_i \cdot \Sigma_{i=1}^n y_i}{n \cdot \Sigma_{i=1}^n x_i^2 - (\Sigma_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{13 \cdot (22717,48) - 26221 \cdot (11,26)}{13 \cdot (52887939) - (26221)^2} = 0,033297$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\Sigma_{i=1}^n y_i - \hat{\beta}_1 \Sigma_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{11,26 - 0,033297 \cdot (26221)}{13} = -66,2933$$

A equação que representa a relação entre as variáveis dependente e independente é dada por:

$$\hat{y} = 0,033297x - 66,2933$$

4ª Aula - Cálculo do Coeficiente de Determinação: Aplicação da Equação.

Com o auxílio do professor os alunos deverão calcular as colunas 7, 8, 9 e 10 da tabela e aplicar as equações para calcular o coeficiente de determinação. Este coeficiente fornece uma medida quantitativa da adequação do modelo aos dados observados:

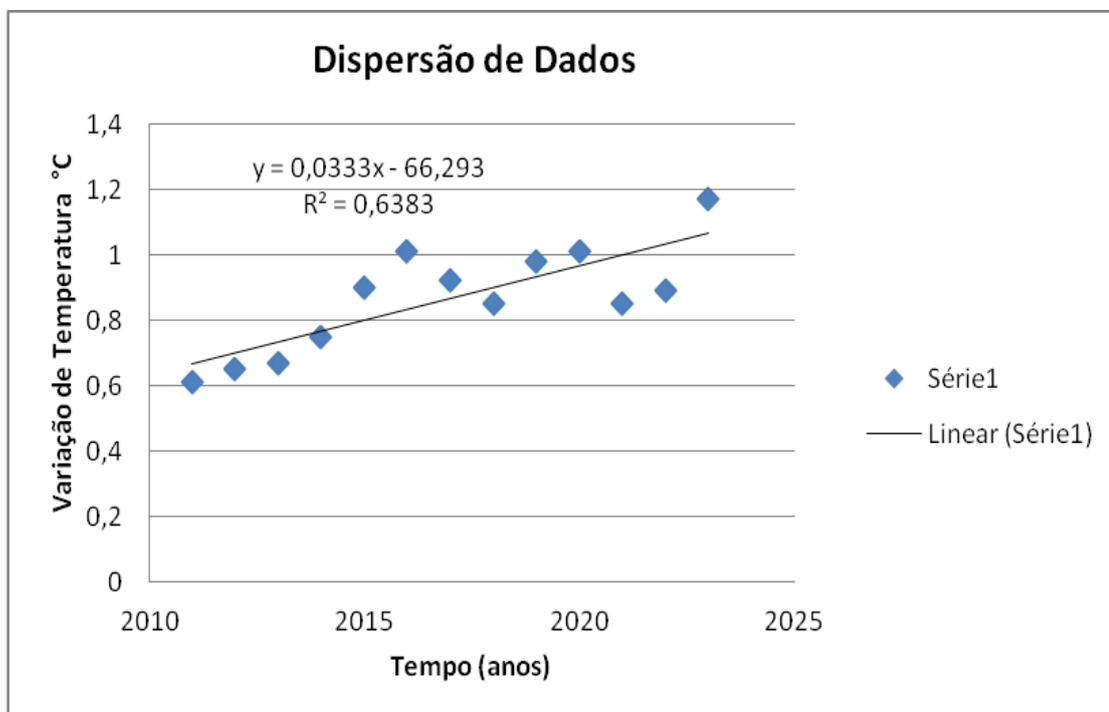
$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{13} \cdot 11,26 = 0,866154$$

\bar{y}	$\sum \hat{y}_i$	SQres	SQtot	SQreg
0,866154	11,26774	0,114334	0,316108	0,201787

$$R^2 = 1 - \frac{SQres}{SQtot} = \frac{SQreg}{SQtot} = 1 - \frac{0,114334}{0,316108} = \frac{0,201787}{0,316108} = 0,6383$$

5ª Aula - Visualização de Dados: Criando Gráficos para Verificar Cálculos.

Orientados pelo professor, em um laboratório de informática, utilizando uma planilha eletrônica, os alunos deverão criar um gráfico utilizando os dados das colunas dois e três.



Além disso, deverão calcular o erro padrão de estimação, que quantifica, em média, a discrepância entre os valores observados e os valores previstos pelo modelo:

- Erro Padrão de Estimação

$$\frac{N}{13} \quad \left| \quad \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{0,11433} \right.$$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{0,11433}{13-2}} = 0,101949$$

Aula 6 - Cálculo de Intervalos: Confiança e Predição em Regressão Linear

O propósito desta aula é calcular o intervalo de confiança e o intervalo de predição. Para isso, os alunos irão calcular a coluna 11 da tabela, sendo apresentados aos conceitos essenciais desses cálculos e, posteriormente, aplicarão as fórmulas correspondentes:

- Intervalo de Confiança

O intervalo de confiança estima a precisão das previsões de um modelo, indicando a faixa de valores onde o verdadeiro valor da variação da temperatura média provavelmente está com certo nível de confiança (geralmente 95%).

$[t_y(n-2)]$ Valor crítico da distribuição t de Student (tabela) para um nível de confiança y (o valor de referência é $1-y$) e $(n-2)$ graus de liberdade.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{13} \cdot (2011 + 2012 + \dots + 2023) = \frac{26221}{13} = 2017$$

\hat{y}_i	$t_y(n-2)$	$\hat{\sigma}_e$	n	x_i	\bar{x}	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
1,066531	2,201	0,101949	13	2023	2017	182

$$IC(E(Y|x); \gamma) = \hat{y}_i \pm t_{\gamma}(n-2) \hat{\sigma}_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = 1,066531 \pm 2,201 \cdot 0,101949 \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{(2023 - 2017)^2}{182}}$$

$$= [0,9489, 1,1841]$$

- Intervalo de Predição

O intervalo de predição em regressão linear indica onde uma nova medição de temperatura provavelmente estará, considerando a variabilidade dos dados históricos e a incerteza das novas medições.

$$\hat{y}_f = 0,033297x_f - 66,2933 = 0,033297(2023) - 66,2933 = 1,066531$$

\hat{y}_f	$t_{\gamma}(n-2)$	$\hat{\sigma}_e$	n	x_f	\bar{x}	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
1,066531	2,201	0,101949	13	2023	2017	182

$$IP(Y_f; \gamma) = \hat{y}_f \pm t_{\gamma} \hat{\sigma}_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_f - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = 1,066531 \pm 2,201 \cdot 0,101949 \sqrt{1 + \frac{1}{13} + \frac{(2023 - 2017)^2}{182}}$$

$$=[0,8132, 1,3198]$$

Analisar a relação entre os resultados obtidos e o aquecimento global

Ano	Temperatura Média Calculada em (°C)	Intervalo de Confiança (°C)	Intervalo de Predição (°C)	Projeção de Aumento de Temperatura (IPCC 2023)
2023	1,066531 (aproximadamente 1,1°C)	0,95 a 1,18	0,81 a 1,32	Aumento de 1,1°C entre 2011-2020 em relação a 1850-1900
Histórico (período pré-industrial)				1850-1900, referência de comparação com o aumento de temperatura.

A partir dos dados históricos e dos cálculos realizados, é possível entender que as atividades humanas contribuem muito para o aquecimento global. Esses dados estão alinhados com as projeções sobre o aumento da temperatura da Terra.

7ª Aula - Estimar as variações de temperaturas médias da Terra para 2030 e 2100 usando as fórmulas de regressão linear.



Nesta aula, os alunos serão incentivados a estimar as variações das temperaturas médias da Terra para os anos de 2030 e 2100, utilizando o método de regressão linear. Este exercício tem como objetivo principal apresentar a tendência das mudanças climáticas nas próximas décadas,

proporcionando uma compreensão das possíveis variações climáticas futuras.

- Previsão da Variação de Temperatura Média da Terra para o ano de 2030.

Aplicando a fórmula para $x = 2030$:

$$\hat{y} = 0,033297x - 66,2933 = 0,033297 \cdot (2030) - 66,2933 \cong 1,30$$

Cálculo do intervalo de predição:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{20} (2011 + 2012 + \dots + 2030) = \frac{40410}{20} = 2020,5$$

\hat{y}_f	$t_y(n-2)$	$\hat{\sigma}_e$	n	x_f	\bar{x}	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
1,3	2,101	0,101949	20	2030	2020,5	665

$$IP(Y : y) = \hat{y}_f \pm t_y \cdot \sigma_e \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_f - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = 1,3 \pm 2,101 \cdot 0,101949 \sqrt{1 + \frac{1}{20} + \frac{(2030 - 2020,5)^2}{665}}$$

$$= [1,0666 ; 1,5333].$$

A estimativa da variação da temperatura média da Terra para o ano de 2030 é de aproximadamente 1,30°C, com um intervalo de predição de 1,0666°C a 1,5333°C.

- Previsão da Variação de Temperatura Média da Terra para o ano de 2100.

Aplicando a fórmula para $x = 2100$:

$$\hat{y} = 0,033297x - 66,2933 = 0,033297(2100) - 66,2933 = 3,6304$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{90} (2011 + 2012 + \dots + 2100) = \frac{184995}{90} = 2055,5$$

\hat{y}_f	$t_y(n-2)$	$\hat{\sigma}_e$	n	x_f	\bar{x}	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
3,6304	1,987	0,101949	90	2100	2055,5	60742,5

$$IP(Y : y) = \hat{y}_f \pm t_y \cdot \sigma_e \sqrt{1 + \frac{1}{90} + \frac{(x_f - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = 3,6304 \pm 1,987 \cdot 0,101949 \sqrt{1 + \frac{1}{90} + \frac{(2100 - 2055,5)^2}{60742,5}}$$

$$= [3,4234 ; 3,8374]$$

A estimativa da variação da temperatura média da Terra para o ano de 2100 é de aproximadamente 3,63°C, com um intervalo de predição entre 3,4234°C e 3,8374°C.

Neste momento, a Figura 12 pode ser utilizada em sala de aula para gerar um debate sobre o aquecimento global e seus impactos. Os dados apresentados mostram como diferentes aumentos de temperatura podem afetar aspectos importantes, como o risco de inundações, a biodiversidade, a disponibilidade de água, e até mesmo a produção de alimentos. Através da Figura 12, os alunos podem compreender de forma mais clara as consequências desses cenários e refletir sobre as ações necessárias para enfrentar os desafios climáticos. Isso pode enriquecer a discussão e ajudar a entender a gravidade das mudanças climáticas.

Serão apresentadas as seguintes curiosidades aos alunos.

Espécies Podem entrar em Extinção

Pinguins da Antártida podem sumir até 2100 caso ritmo do aquecimento persista

Estudo mostra quedas na taxa de reprodução do pinguim-imperador, um efeito direto da diminuição do gelo no continente



Fonte: Adaptado, Globo.com (2024)

Derretimento das Camadas de Gelo da Groenlândia Já é Irreversível.

Derretimento das camadas de gelo da Groenlândia já é irreversível, indica estudo

Se geleiras inteiras da região forem derretidas, nível do mar irá aumentar até 6 metros, marca suficiente para deixar muitas cidades costeiras ao redor do mundo submersas



Iceberg na região da Groenlândia, território dinamarquês autônomo Foto: Magnus Kristensen / Reuters

Fonte: Novaes (2019)

Vítima da Primeira Fome Ligada ao Aquecimento Global

Madagascar é vítima da primeira fome ligada ao aquecimento global, diz programa da ONU

Diretor de entidade afirma que 30mil pessoas sofrem com a fome na metade sul da ilha e mais de 1,3 milhão sofrem da desnutrição aguda.



Fonte: Adaptado, Silva (2021)

Os Aumentos Recordes de Temperatura Global. É Possível que 2024 Seja o Ano de Destaque Nesse Contexto.

Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out
1,25°C	1,44°C	1,39°C	1,32°C	1,16°C	1,24°C	1,20°C	1,30°C	1,23°C	1,32°C

A média desses 10 meses é 1,285°C

Fonte: Adaptado de Gistemp (2024).

8ª Aula - Pesquisa e coleta de dados: preenchendo a tabela com informações relevantes

Os alunos serão incentivados a pesquisar e preencher a tabela sobre os "Impactos Projetados do Aumento da Temperatura Global por Faixa de Temperatura". O objetivo é responder às seguintes perguntas: quais são os impactos projetados para o planeta com um aumento de temperatura de 1,5°C a 2°C? E de 2°C a 3°C? E assim por diante. Abaixo, apresenta-se a tabela preenchida com os dados do relatório IPCC 2023.

IMPACTOS PROJETADOS DO AUMENTO DA TEMPERATURA GLOBAL POR FAIXA DE TEMPERATURA	
1,5°C a 2°C	Impactos moderados na agricultura e segurança alimentar Aumento de eventos climáticos extremos Riscos de extinção em ecossistemas sensíveis
2°C a 3°C	Escassez significativa de água Extinção local de até 30% de espécies Mais desastres naturais e deslocamento de biomas
3°C a 4°C	Insegurança alimentar e migrações forçadas Severos impactos na saúde Extinção de cerca de 50% de espécies marinhas tropicais
Acima de 4°C	Vulnerabilidade extrema e desastres naturais Colapso de sistemas alimentares Extinção em larga escala de ecossistemas

Resultados esperados

Este estudo é de grande relevância, especialmente considerando a variação da temperatura da Terra, com ênfase em seu aumento. A matemática, com suas definições e cálculos, desempenha um papel valioso na compreensão e análise desse fenômeno. Ao final do processo, espera-se que os estudantes não apenas aprendam conceitos matemáticos, mas também reconheçam a aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento. Isso inclui a conscientização sobre os impactos do aquecimento global, demonstrando como a matemática pode ser uma ferramenta poderosa para compreender os efeitos da variação e do aumento da temperatura média da Terra.

APÊNDICE E - CONSIDERAÇÕES SOBRE A QUALIDADE DOS DADOS E VERIFICAÇÃO DE CONDIÇÕES ESTATÍSTICAS

A regressão linear simples é uma técnica estatística amplamente utilizada para modelar a relação entre variáveis, sendo útil para estimar tendências e entender fenômenos complexos, como as variações na temperatura média da Terra. No entanto, a verificação rigorosa dos fundamentos estatísticos pode ser desafiadora, especialmente em contextos como a climatologia, onde os dados costumam ser influenciados por múltiplas variáveis interdependentes e fatores externos.

Esse estudo apresentou limitações devido a várias considerações, tais como:

1. Objetivo educacional: O propósito deste estudo não é realizar uma análise estatística aprofundada ou validar um modelo explicativo rigoroso de regressão linear tradicional. Em vez disso, busca-se desenvolver uma ferramenta para estimar as temperaturas e avaliar tendências gerais. O foco está na estimativa do aumento das temperaturas, sem a necessidade de previsões precisas ou inferências complexas. Essa simplificação foi deliberada, considerando o caráter introdutório da análise para o nível de ensino médio.

2. Complexidade dos dados climáticos: Os dados climáticos frequentemente apresentam padrões não lineares e complexos, que não se ajustam adequadamente a um modelo linear. Os dados utilizados nesse estudo foram tempo em anos e temperatura em graus Celsius, e podem gerar relações que não atendem às condições da regressão linear tradicional, uma vez que diversas outras variáveis influenciam a temperatura global. A escolha por um modelo com ajuste linear foi feita com a consciência de suas limitações. Os dados foram utilizados conforme fornecidos, sem verificações ou transformações rigorosas, buscando facilitar a compreensão dos estudantes.

3. Limitações práticas: A coleta de dados históricos sobre a temperatura média da Terra e outros fatores ambientais pode enfrentar desafios relacionados à acessibilidade e precisão. Em algumas situações, os dados podem conter valores atípicos ou inconsistências, o que torna mais difícil a verificação rigorosa das condições estatísticas. A análise foi conduzida com a melhor qualidade de dados

disponível, reconhecendo que a perfeição estatística pode não ser viável. Foram realizados testes complementares, como a verificação dos pressupostos, o teste de Wald e o Q-Q Plot, que evidenciaram a não linearidade. Isso sugere que, para uma análise mais precisa e confiável, seria necessário incluir novas variáveis ou utilizar um modelo de regressão não linear. No entanto, esses ajustes estão além do objetivo deste estudo, que visa apresentar a regressão linear no contexto do ensino médio.

4. Discussão dos Resultados: Embora a verificação rigorosa do ajuste do modelo estatístico seja importante para uma análise precisa, neste estudo, o foco esteve nas tendências gerais e na aplicação pedagógica da análise. Essas limitações podem afetar a precisão das estimativas, mas trata-se de uma abordagem adequada ao objetivo educativo da pesquisa. Em estudos mais aprofundados, a verificação da adequação seria necessária para assegurar a validade das conclusões e a robustez do modelo.

5. Sugestões para Trabalhos Futuros: O estudo também sugere que futuras pesquisas explorem métodos alternativos, como a regressão não linear ou a inclusão de variáveis adicionais, para uma análise mais abrangente e robusta nas mudanças climáticas.

O ajuste do modelo de regressão linear em contextos práticos, como a climatologia, enfrenta desafios devido à complexidade dos dados envolvidos. No entanto, isso não compromete a validade do estudo, cujo objetivo é compreender as causas e consequências da intensificação do efeito estufa e usar a regressão linear para estimar tendências futuras e a variação da temperatura média da Terra a partir de dados históricos. Além disso, essa prática amplia a compreensão sobre o aquecimento global, proporcionando uma visão das causas e efeitos das mudanças climáticas, o que pode, por sua vez, aumentar a consciência ambiental e a responsabilidade dos estudantes. Assim, a análise estatística se torna uma ferramenta essencial para enfrentar os desafios das mudanças climáticas, promovendo a sensibilização sobre o aquecimento global e destacando o papel fundamental da matemática na modelagem de fenômenos complexos como variações na temperatura média global.