



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

CAMPUS ARAPIRACA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)

CARLOS BORGES DO NASCIMENTO

DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Arapiraca

2025

CARLOS BORGES DO NASCIMENTO

DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Dissertação apresentada por Carlos Borges do Nascimento como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Pela Universidade Federal de Alagoas, Campus Arapiraca.

Orientador: Dr. Prof. Wagner O. Costa Filho

Arapiraca

2025



Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus Arapiraca
Unidade Educacional Palmeira dos Índios
Biblioteca Setorial Palmeira dos Índios - BSPI

N244d Nascimento, Carlos Borges do
Demonstrações do teorema de Pitágoras / Carlos Borges do Nascimento. – Arapiraca, 2025.

72 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Wagner Oliveira Costa Filho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Alagoas, Campus Arapiraca, Arapiraca, 2025.
Disponível em: Universidade Digital (UD) – UFAL (Campus Arapiraca).
Referências: f. 71 - 72.

1. Matemática. 2. Pitágoras, Teorema de. 3. Educação - matemática. 4. Base Nacional Comum Curricular. I. Título.

CDU 51

Bibliotecária responsável: Kassandra Kallyna Nunes de Souza

CRB - 4 / 1844

CARLOS BORGES DO NASCIMENTO

DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática do *Campus* Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas, aprovada em 28 de fevereiro de 2025.

BANCA EXAMINADORA



Documento assinado digitalmente
WAGNER OLIVEIRA COSTA FILHO
Data: 10/03/2025 17:54:23-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Wagner Oliveira Costa Filho
Orientador (PROFMAT-Arapiraca/UFAL)



Documento assinado digitalmente
MORENO PEREIRA BONUTTI
Data: 12/03/2025 10:20:39-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti
Membro interno (PROFMAT-Arapiraca/UFAL)



Documento assinado digitalmente
WAGNER XAVIER RIBEIRO
Data: 15/03/2025 19:04:58-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Wagner Xavier Ribeiro
Membro externo (UFAL)

Dedico esta Dissertação aos meus pais Ulisses e Maria, a minha sogra Graciete (in- memoriam), aos meus irmãos, esposa, filho e filhas e a dedicação e ao empenho dos amigos e professores que me apoiaram na caminhada.

AGRADECIMENTOS

A meu Deus e Senhor!

Por ter me concedido a cada dia a oportunidade de realizar mais um trabalho. Agradeço a Ele por ter dado paciência aos meus Mestres do PROFMAT, pela empatia, incentivo e por serem verdadeiras referências de sabedoria.

Por minha esposa Maria da Glória, meu filho Carlos Gabryel, minhas filhas Glória Sthéfanny e Gláucia Gabryelle, por suas compreensões e palavras de incentivo e de apoio.

Por meu concunhado Joás e minha cunhada e irmã Gláucia pelo incentivo e algumas vezes se dispondo a me levar à universidade.

Pela Gestora da 3ª Gere, Ana Paula pela empatia e incentivo na jornada.

Pela Gestora da Escola Graciliano Ramos em Palmeira dos Índios - AL, Marta Glícia por sua sensibilidade e apoio nos estudos.

Pela Gestão e Coordenação da Escola Luiz Duarte, Prof. Jadielson, Profª. Rita, Profª. Mirlene, Profª. Drª Janaice, Profª. Sueli e Profª. Irª Nadja pela compreensão e apoio nas atividades desenvolvidas.

Pela Gestão da Escola Estadual Mestra Beatriz em Bom Conselho- PE, Professora Jeane Curvelo e a Profa. Elenilda, por sua disponibilidade em ajudar e incentivar.

Pelo apoio e atendimento do pessoal da Secretaria do PROFMAT – Arapiraca em especial Everaldo Bezerra e Renílson Pereira.

Pelos colegas do PROFMAT (turma 2022) pela convivência e experiência de vida.

Por meus amigos e irmãos Almir Ferreira, Tales Tomé e Paulo Souza, sem os quais essa jornada não teria o sucesso, pelos trabalhos realizados, pelas horas de estudos, materiais e experiências compartilhados, palavras de apoio e de incentivo, tudo para a honra e glória do nosso Bom e Misericordioso Deus.

Pelos Professores da Banca Examinadora, meu Orientador e Presidente Dr. Wagner, Dr. Moreno e Dr. Xavier, pela paciência compreensão e pela empatia no trabalho desenvolvido, que Deus os abençoe.

Por todos que contribuíram de forma direta e indiretamente para a superação de mais uma etapa na busca do aprimoramento e eficiência na arte de ensinar e aprender. Muito obrigado!

“A Evolução é a Lei da Vida, o
Número é a Lei do Universo, a
Unidade é a Lei de Deus”

Pitágoras

RESUMO

O objetivo deste trabalho é realçar a importância de uma abordagem investigativa na demonstração e aplicação do Teorema de Pitágoras, para enriquecer o processo de ensino e aprendizagem. Busca-se através da abordagem das competências gerais e das habilidades da BNCC, Base Nacional Comum Curricular, compreender as etapas e os níveis de desenvolvimento do estudante, principalmente da Matemática, demonstrar como a compreensão da origem e desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos pode ampliar a teoria e prática dos conteúdos ministrados em sala de aula, além de contribuir para o desenvolvimento de habilidades analíticas e críticas nos alunos. A pesquisa emprega uma metodologia de revisão bibliográfica da BNCC, sites e alguns livros didáticos, analisando textos, estudos e registros históricos relacionados ao Teorema de Pitágoras e à sua evolução ao longo do tempo. Além disso, propõe a criação de um produto educacional - um conjunto de materiais didáticos que inclui demonstrações variadas do teorema, destinado a facilitar o ensino deste conceito fundamental. O intuito é que a incorporação da história na matemática e das origens dos conceitos na educação matemática oferece uma compreensão mais rica e aprofundada dos tópicos abordados. Através do produto educacional ora sugerido, busca-se um aumento no interesse e na compreensão dos alunos sobre o Teorema de Pitágoras, assim como uma melhoria nas suas habilidades de raciocínio lógico e análise crítica. Este estudo destaca a relevância da abrangência da matemática e do conhecimento dos educadores das competências e habilidades destacadas pela BNCC, Base Nacional Comum Curricular, como uma ferramenta valiosa no processo educativo.

Palavras-chave: teorema de Pitágoras; BNCC; prova; educação; matemática.

ABSTRACT

This study highlights the importance of an investigative approach in demonstrating and applying the Pythagorean Theorem to enhance the teaching and learning process. By addressing the general competencies and skills outlined in the BNCC (Base Nacional Comum Curricular), the research seeks to understand students' developmental stages in Mathematics and demonstrate how knowledge of the theorem's origins and evolution can enrich both theoretical and practical aspects of classroom instruction. Additionally, it emphasizes the role of historical context in fostering students' analytical and critical thinking skills. The methodology consists of a bibliographic review of the BNCC, websites, and textbooks, analyzing texts, studies, and historical records related to the Pythagorean Theorem and its development over time. Furthermore, the study proposes the creation of an educational product—a set of didactic materials containing various demonstrations of the theorem—to facilitate the teaching of this fundamental concept. The integration of historical perspectives in mathematics education is expected to provide a deeper and more meaningful understanding of the subject. Through this proposed educational resource, the study aims to increase students' interest in and comprehension of the Pythagorean Theorem while enhancing their logical reasoning and critical analysis skills. Ultimately, the research underscores the relevance of mathematical history and educators' knowledge of BNCC competencies and skills as valuable tools in the educational process.

Keywords: pythagorean theorem; BNCC; proof. education; mathematics.

LISTAS DE FIGURAS

Figura 1 –	Área de um Quadrado.....	26
Figura 2 -	Área de um Retângulo.....	27
Figura 3 -	Área de um Trapézio.....	27
Figura 4 -	Área de um Triângulo.....	27
Figura 5 -	Triângulo (Heron).....	28
Figura 6 -	Reta externa à circunferência.....	29
Figura 7 -	Reta secante à circunferência.....	29
Figura 8 -	Reta tangente à circunferência.....	29
Figura 9 -	Teoremas das cordas.....	30
Figura 10 -	Bissetriz interna de um triângulo.....	30
Figura 11 -	Demonstração clássica do Teorema de Pitágoras.....	32
Figura 12 -	Demonstração clássica do Teorema de Pitágoras.....	32
Figura 13 -	Relações métricas no triângulo retângulo.....	35
Figura 14 -	Semelhança de triângulos.....	35
Figura 15 -	Relações métricas no triângulo.....	36
Figura 16 -	Relações métricas no triângulo.....	36
Figura 17 -	Demonstração feita por Bháskara 1.....	37
Figura 18 -	Demonstração feita por Bháskara 2.....	37
Figura 19 -	Demonstração feita por Bháskara 3.....	37
Figura 20 -	Demonstração feita por J. Garfield.....	39
Figura 21 -	Trapézio retângulo 1.....	39
Figura 22 -	Trapézio retângulo 2.....	40
Figura 23 -	Trapézio retângulo 3.....	42
Figura 24 -	Triângulo retângulo (Euclides) 1.....	43
Figura 25 -	Triângulo retângulo (Euclides) 2.....	45
Figura 26 -	Demonstração feita por Euclides.....	46
Figura 27 -	Circunferência e o triângulo retângulo.....	47
Figura 28 -	Teorema de Pitágoras via a bissetriz interna.....	49
Figura 29 -	Triângulos semelhantes.....	49
Figura 30 -	Teorema de Pitágoras por Heron.....	50
Figura 31 -	Retas tangentes à circunferência.....	51

Figura 32 - Área de um triângulo circunscrito.....	52
Figura 33 - Inraio do círculo inscrito num triângulo.....	53
Figura 34 - Triângulo acutângulo.....	54
Figura 35 - Recíproca de Pitágoras.....	55
Figura 36 - Recíproca de Pitágora.....	56
Figura 37 - Lei dos cossenos 1.....	57
Figura 38 - Lei dos cossenos 2.....	58
Figura 39 - Triângulo retângulo (lei dos cossenos)	59
Figura 40 - Figuras semelhantes e o triângulo retângulo.....	60
Figura 41 - Figuras semelhantes nos lados de um triângulo.....	60
Figura 42 - Malha de pontos.....	63
Figura 43 - Malha quadriculada.....	64
Figura 44 - Tabela para registros.....	65
Figura 45 - Quadrados de Pitágoras.....	66
Figura 46 - O Tangram.....	68
Figura 47 - Quebra cabeça pitagórico.....	69
Figura 48 - Aplicações do Teorema 1.....	70
Figura 49 - Aplicações do Teorema 2.....	70
Figura 50 - Aplicações do Teorema 3.....	71
Figura 51 - Questão do ENEM.....	71
Figura 52 - Ilustração da atividade.....	71
Figura 53 - Quebra cabeça com o Geogebra.....	73
Figura 54 - Página inicial do Geogebra.....	73

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNE	Conselho Nacional de Educação
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
MEC	Ministério de Educação e Cultura
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática

LISTA DE SÍMBOLOS

Pontos e vértices dos polígonos	$A, B, C, D, E, \dots$
Ângulos	$\wedge$ ou $\angle$, Exemplo $\widehat{AOB}$ ou $\angle AOB$, $\alpha, \beta, \theta, \dots$
Segmento ou lado	$\overline{AB}$
Reta	$r, s, t \dots$
Triângulo	Δ
Congruentes	$\cong$
Semelhantes	$\sim$
Desigualdades	$<; >$
Perpendiculares	$\perp$
Paralelas	$\parallel$
Equivalência	$\Leftrightarrow$
Implica	$\Rightarrow$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	<u>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</u>	17
2	A PROPOSTA DE EDUCAÇÃO DA BNCC	20
2.1	<u>A MATEMÁTICA E A BNCC</u>	23
2.1.1	<i>COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL</i>	23
2.1.2	<i>UNIDADES TEMÁTICAS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA</i>	24
2.2	<u>CONHECIMENTO BÁSICO DE MATEMÁTICA PARA O ESTUDO DO TEOREMA DE PITÁGORAS</u>	25
2.3	<u>CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS</u>	25
2.4	<u>ÁREAS DE FIGURAS PLANAS</u>	26
2.5	<u>POSIÇÃO RELATIVA DE UMA RETA E UMA CIRCUNFERÊNCIA</u>	28
2.6	<u>TEOREMA DAS CORDAS</u>	30
2.7	<u>O TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA DE UM ÂNGULO DE UM TRIÂNGULO</u>	30
3	O TEOREMA DE PITÁGORAS	31
3.1	<u>DEMONSTRAÇÃO CLÁSSICA DO TEOREMA DE PITÁGORAS</u>	31
3.2	<u>TEOREMA DE PITÁGORAS POR SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS</u>	33
3.3	<u>DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS FEITA POR BHASKARA</u>	36
3.4	<u>TEOREMA DE PITÁGORAS FEITA PELO EX-PRESIDENTE EUA J. GARFIELD</u>	38
3.5	<u>DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS FEITA POR EUCLIDES</u>	41
3.6	<u>DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS VIA TEOREMA DAS CORDAS</u>	47
3.7	<u>TEOREMA DE PITÁGORAS USANDO A BISSETRIZ INTERNA</u>	48
3.8	<u>DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS FEITA POR HERON</u>	50
3.9	<u>DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS VIA INRAIO</u>	51
3.10	<u>DEMONSTRAÇÃO DA RECÍPROCA DO TEOREMA DE PITÁGORAS</u>	54
3.11	<u>A LEI DOS COSSENOS</u>	57

3.12	<u>A VALIDADE DO TEOREMA DE PITÁGORAS E AS FIGURAS SEMELHANTES.....</u>	59
4	APLICAÇÃO PRÁTICA – SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	61
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	75
	REFERÊNCIAS	76

1 INTRODUÇÃO

Este estudo tem como finalidade explorar algumas abordagens pedagógicas para facilitar o entendimento do Teorema de Pitágoras. Reconhecendo as dificuldades enfrentadas por muitos estudantes ao aprender conceitos matemáticos, principalmente aqueles relacionados às medidas de figuras, torna-se essencial incorporar a história do Teorema de Pitágoras no processo educacional, bem como compreender as competências gerais e as habilidades e específicas da Matemática sugeridas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O Teorema de Pitágoras, notoriamente é um dos teoremas mais cruciais na Matemática, é valorizado pela sua aplicabilidade prática nas diversas áreas do conhecimento.

A matemática é uma disciplina fundamental para o desenvolvimento cognitivo e crítico dos estudantes, e sua aprendizagem é essencial para a formação de cidadãos capazes de lidar com os desafios do século XXI. Como afirma o Ministério da Educação (Brasil, 2018), "[...] a matemática é uma ferramenta essencial para a resolução de problemas e a compreensão do mundo" (p. 12). Além disso, abordar o Teorema de Pitágoras através de uma perspectiva experimental e demonstrativa, permite que os estudantes vejam a matemática como uma disciplina viva e em evolução, não apenas um conjunto de regras e fórmulas a serem memorizadas. Isso incentiva uma abordagem mais investigativa e exploratória na aprendizagem, onde os alunos podem descobrir como os conceitos matemáticos são aplicados no mundo real e como eles evoluíram ao longo do tempo.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece diretrizes para a educação básica no Brasil, enfatizando a importância da matemática como uma ferramenta para a resolução de problemas e a compreensão do mundo. Segundo a BNCC (2018), "[...] a matemática deve ser ensinada de forma a permitir que os estudantes desenvolvam uma compreensão profunda dos conceitos e das relações matemáticas" (p. 15).

O Teorema de Pitágoras, um dos mais famosos teoremas da matemática, é um exemplo clássico de como a matemática pode ser usada para resolver problemas e entender a sua aplicabilidade no cotidiano. No entanto, a aprendizagem desse teorema muitas vezes é reduzida a uma simples fórmula, sem que os estudantes tenham a oportunidade de explorar suas implicações e aplicações.

Esta dissertação tem como objetivo, através das habilidades da matemática mostrar como a BNCC pode ser usada para promover uma aprendizagem mais profunda e significativa

do Teorema de Pitágoras, enfatizando sua relevância para a resolução de problemas e a compreensão do mundo. Além disso, esta pesquisa busca identificar estratégias pedagógicas que possam ser usadas para ajudar os estudantes a desenvolver uma compreensão mais profunda do Teorema de Pitágoras e sua aplicação em contextos reais.

Este trabalho será desenvolvido em 4 capítulos:

No primeiro capítulo será apresentado a importância do Teorema de Pitágoras, as contribuições de Pitágoras e um enfoque da BNCC na escolha do tema.

No segundo capítulo será abordado a BNCC as Competências e Habilidades da Matemática na Educação Básica.

No terceiro capítulo teremos uma apresentação de demonstrações do Teorema de Pitágoras, com foco nas competências e habilidades da BNCC.

No quarto capítulo faremos uma sugestão de proposta didática sobre o Teorema de Pitágoras em conformidade com a BNCC, as conclusões finais e a bibliografia.

1.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, será apresentada a fundamentação teórica que embasa a pesquisa, abordando a importância histórica da matemática e a importância de se observar as competências e habilidades da Matemática de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a relevância do Teorema de Pitágoras no contexto educacional.

Conforme definido na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), a Base deve nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas, como também as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que estabelece diretrizes para a educação básica no Brasil, incluindo a educação matemática.

Historicamente, a Matemática tem sido fundamental para entender uma variedade de fenômenos complexos. A história da Matemática, especialmente no campo da Geometria, tem sido crucial para resolver diversos problemas práticos. A Geometria Elementar, que abrange o

estudo de figuras planas e conceitos primitivos como pontos, linhas e planos, desempenha um papel significativo no ensino da Matemática.

Segundo a Matriz do Pisa 2012, o

[...] letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias. (download.inep.gov.br/acoes internacionais/pisa/2013. (Brasil, 2018, p. 266)

A trajetória histórica da Matemática, e em particular da Geometria, revela como o entendimento humano sobre o mundo físico se desenvolveu através dos tempos. Desde os primeiros estudos sobre o movimento dos astros até as complexas aplicações geométricas na vida cotidiana, a Matemática tem desempenhado um papel fundamental. A Geometria, como um dos ramos mais antigos da Matemática, é um exemplo claro dessa evolução, com suas raízes profundas na observação do mundo natural e na necessidade prática de mensurar e organizar o espaço.

É, nesse contexto que embora a contribuição exata de Pitágoras à Matemática seja parcialmente velada pela história, a influência do seu nome e de suas ideias é inegável. O Teorema de Pitágoras, em particular, destaca-se como um marco na história da Matemática. A relação entre os lados de um triângulo retângulo, tão elegantemente expressa neste teorema, é um testemunho do poder da abstração matemática e da busca humana por compreensão e ordem.

As escassas informações sobre Pitágoras que sobreviveram até hoje, principalmente através de relatos de outros matemáticos e filósofos, não diminuem o impacto de suas ideias. Pelo contrário, elas nos lembram da importância de olhar além dos números e fórmulas, para entender a Matemática como uma narrativa contínua de descoberta, inovação e aplicação prática.

Acredita-se que Pitágoras em suas viagens pelo Egito, Babilônia, Itália e Europa fundou a Irmandade Pitagórica ou Escola Pitagórica, que tinha como um dos princípios fundamentais “o segredo”, levantando muitas suspeitas e trazendo alguns problemas para os seus seguidores. Vale salientar, que essa irmandade aceitava homens e mulheres amantes da matemática, filosofia e política.

Nesta irmandade, Pitágoras e seus seguidores mantinham alguns princípios:

- Todas as coisas são números;
- A filosofia é um caminho à purificação espiritual;
- A alma humana pode entrar em fusão com o Divino;
- Os membros devem manter segredo sobre suas crenças e práticas;
- Alguns símbolos místicos são considerados sagrados.

As contribuições de Pitágoras são inúmeras, no entanto os seus registros foram destruídos pela perseguição à sua escola, mas vale a pena destacar:

- Na Filosofia – Pitágoras foi o primeiro pensador grego a apresentar uma explicação não mística ou religiosa da origem de tudo o que é.
- Na Música – É atribuído a Pitágoras o cálculo do tamanho das cordas, que posteriormente ficou definida como as notas musicais.
- Na Astronomia – Pitágoras percebeu que o Planeta Vênus é também a Estrela D'alva ou Estrela Vespertina, segundo: *Pliny the Elder (1991). Natural History II:págs. 15–16*
- Na Matemática – Contribuiu com a construção de alguns sólidos geométricos (o cubo, o tetraedro e o dodecaedro), identificou os números perfeitos e amigos, números pares, ímpares e primos, bem como o grande teorema que leva o seu nome o Teorema de Pitágoras.

Podemos assim conjecturar que os seguidores de Pitágoras, conhecidos como Pitagóricos, foram fundamentais para elevar a matemática ao status de uma ciência livre, dedutiva, criativa, separando-a das necessidades práticas e a estabelecendo como uma disciplina intelectual.

2 A PROPOSTA DE EDUCAÇÃO DA BNCC

A BNCC estabelece 10 competências gerais que todos os estudantes tenham direito para se desenvolverem durante a Educação Básica. Essas competências envolvem a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Essas competências nortearão as áreas de conhecimento e os seus componentes curriculares. São elas:

CONHECIMENTO

Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

PENSAMENTO CIENTÍFICO, CRÍTICO E CRIATIVO

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

ACERVO OU REPERTÓRIO CULTURAL

Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

COMUNICAÇÃO

Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

CULTURA DIGITAL

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva

TRABALHO E PROJETO DE VIDA

Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

ARGUMENTAÇÃO

Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

AUTOCONHECIMENTO E AUTOCUIDADO

Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

EMPATIA E COOPERAÇÃO

Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

RESPONSABILIDADE E CIDADANIA

Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

A Base Nacional Comum Curricular, a BNCC, e o currículo não são a mesma coisa, mas juntos formam o direito de aprendizagem dos estudantes. A BNCC indica as aprendizagens essenciais, suas habilidades e competências, enquanto o currículo são documentos que trazem para a rede de ensino as aprendizagens estabelecidas pela BNCC observando o que vai ser ensinado em cada região com as suas especificidades.

A base Nacional Comum Curricular (BNCC) no Ensino Fundamental está organizado em cinco **áreas do conhecimento**. Essas áreas, como bem aponta o Parecer CNE/CEB nº 11/2010²⁴, “[...] favorecem a comunicação entre os conhecimentos e saberes dos diferentes **componentes curriculares**” (Brasil, 2010 *apud* Brasil, 2018, p. 27, grifo do autor). O Ensino Fundamental é dividido em dois ciclos: anos iniciais (do 1º ao 5º ano) e anos finais (do 6º ao 9º ano). Para essa etapa, a BNCC define as áreas de conhecimento e os componentes curriculares são agrupadas assim:

- Linguagens - Componentes Curriculares: Língua Portuguesa, Arte, Educação Física e Língua Inglesa
- Matemática – Componente Curricular: Matemática
- Ciências da Natureza – Componentes Curriculares: Ciências
- Ciências Humanas – Componentes Curriculares: História e Geografia
- Ensino Religioso – Componente Curricular: Ensino Religioso.

Cada área de conhecimento possui competências específicas que os alunos devem desenvolver, articuladas de forma progressiva ao longo dos anos escolares. A BNCC estabelece habilidades e conteúdos essenciais para cada ano do ensino fundamental, garantindo uma construção contínua e integrada do conhecimento.

Ensino Médio

O ensino médio, que vai do 1º ao 3º ano, segue uma organização mais flexível, permitindo uma maior personalização do percurso formativo dos estudantes. A BNCC define uma base comum que deve ser cumprida por todos os alunos, contemplando as seguintes áreas de conhecimento:

1. **Linguagens e suas Tecnologias** (Língua Portuguesa, Língua Inglesa, Artes, Educação Física)
2. **Matemática e suas Tecnologias** (Conteúdos gerais de Matemática)
3. **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** (Biologia, Física, Química)
4. **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas** (História, Geografia, Filosofia, Sociologia).

2.1 A MATEMÁTICA E A BNCC

A Matemática na BNCC tem como pressuposto pedagógico a ideia de que todos podem aprender Matemática. Assim, a Matemática na BNCC propõe o desenvolvimento de competências e habilidades que permitem ao aluno perceber a importância dessa área na vida pessoal e social, bem como ampliar as formas de pensar matematicamente para muito além dos cálculos numéricos.

2.1.1 *COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL*

O ensino por meio de habilidades e competências proposto pela base, oferece às professoras e professores de Matemática a oportunidade de trabalhar seus planejamentos de forma mais próxima dos alunos ou porque não dizer mais personalizada.

Na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018, p. 267), temos:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
1. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
2. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
3. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
4. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
5. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-

utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

6. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
7. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

2.1.2 UNIDADES TEMÁTICAS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Nessa direção, de uma matemática acessível e auxiliadora para uma formação crítica e construtiva, a BNCC propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização.

Números – A expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos

Álgebra - Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas.

A Geometria - O ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo.

Grandezas e medidas - A expectativa é a de que os alunos reconheçam comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas envolvendo essas grandezas com o uso de unidades de medida padronizadas mais usuais.

Probabilidade e estatística – A expectativa é que os alunos saibam planejar e construir relatórios de pesquisas estatísticas descritivas, incluindo medidas de tendência central e construção de tabelas e diversos tipos de gráfico.

2.2 CONHECIMENTOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA PARA O ESTUDO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Neste capítulo, faremos uma sugestão básica de alguns conteúdos matemáticos, que servirão como suporte às demonstrações do Teorema de Pitágoras, bem como, algumas notações e símbolos utilizados.

Como suporte bibliográfico usaremos o Livro de geometria da Coleção Profmat de autoria Antonio caminha Muniz Neto (Muniz Neto, 2013); Matemática do 2º grau de José Guilherme Tizziotti (Tizziotti, 1980); Praticando matemática, Álvaro Andrini (Adriani, 1989); Fundamentos da Matemática Elementar (Iezzi; Murakami, 1977), Matemática do Ensino Médio (Bonjorno; Giovanni Júnior; Sousa, 2020).

2.3 CONGRUÊNCIAS DE TRIÂNGULOS E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Esta explanação sobre congruência de triângulos teve embasamento teórico nos livros de Antonio Caminha da coleção Profmat - Geometria págs. 22 a 26 ano 2013, bem como, o livro de Álvaro Andrinni, Praticando Matemática, 1º grau, págs. 180 a 182, ano 1989, Editora Brasil. Para um aprofundamento sobre semelhança de triângulos sugiro o livro matemática Geometria e Trigonometria dos autores Bonjorno, Giovanni Jr. e Paulo (Bonjorno; Giovanni Júnior; Sousa, 2020).

Este conteúdo contempla as habilidades propostas pela BNCC, Ensino Fundamental:

- (EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
- (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. (Bonjorno; Giovanni Júnior; Sousa, 2020, p. 38)

2.4 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Para um aprofundamento consultar Caminha, no seu livro geometria capítulo 5, pág. 180, ele destaca: “[...] intuitivamente a área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado” (Muniz Neto, 2013, p. 85).

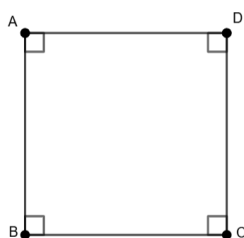
A Base Nacional Comum Curricular tem como sugestão de habilidade a ser desenvolvida:

- (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
- (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas. (Brasil, 2018, p. 289).

Área de um quadrado

Dado um quadrado de lado “a”, a sua área é obtida multiplicando-se a base pela altura. Em símbolos temos:

Figura 1 – Área de um Quadrado



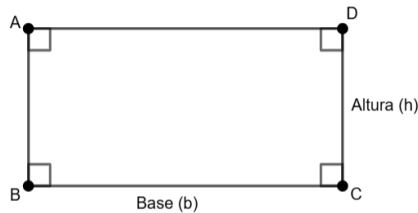
$$A = a^2$$

Fonte: elaborado pelo autor

Área de um retângulo

Dado um retângulo ABCD, a sua área é dada pelo produto da medida da base pela medida da altura.

Figura 2 - Área de um Retângulo



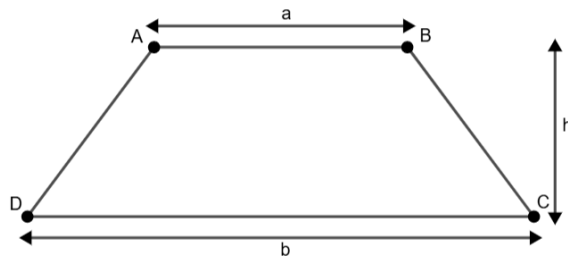
$$A = \text{base} \times \text{altura} \Rightarrow A = \mathbf{b.h}$$

Fonte: elaborado pelo autor

Área do Trapézio

A área de um trapézio é numericamente igual ao produto da medida da base média pela medida de sua altura.

Figura 3 - Área de um Trapézio



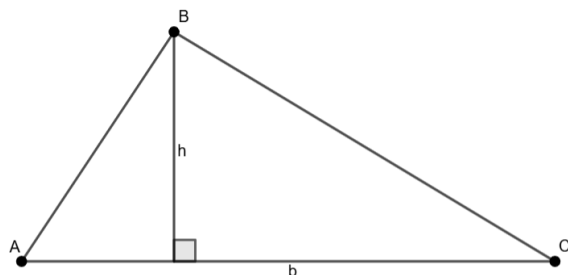
$$A = \text{base média} \times \text{altura} \Rightarrow A = \frac{(\text{base menor} + \text{base maior}) \cdot \text{altura}}{2} \Rightarrow A = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

Fonte: elaborado pelo autor

Área do triângulo

A área do triângulo é igual ao semiproduto da medida da base pela medida da altura.

Figura 4 - Área de um Triângulo



$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \Rightarrow A = \frac{b \cdot h}{2}$$

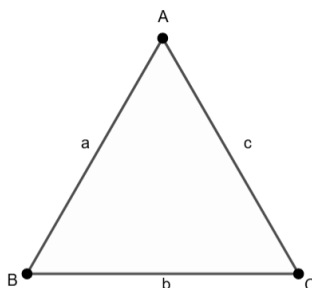
Fonte: elaborado pelo autor

Fórmula de Heron

Heron de Alexandria, ou ainda Hero ou Herão foi um matemático e mecânico grego. Acredita-se que Heron viveu no século IdC entre os anos 10 a 70 dC.. Geômetra e engenheiro grego, Heron esteve ativo em torno do ano 62, é especialmente conhecido pela fórmula que leva seu nome e se aplica ao cálculo da área do triângulo.

Para um melhor aprofundamento consultar o Livro de Caminha, Coleção do Profmat, pág 235. Em um triângulo de lados medindo a, b e c podemos calcular a sua área utilizando a fórmula de Heron:

Figura 5 - Triângulo (Heron)



Fonte: elaborado pelo autor

Dado o triângulo de lados a, b, c e altura h, seu perímetro será $2p = a + b + c$ e sua área é dada por:

$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

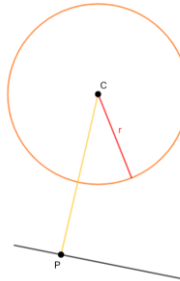
2.5 POSIÇÃO RELATIVA DE UMA RETA E UMA CIRCUNFERÊNCIA

Segundo Álvaro Andrini, uma reta e uma circunferência representadas em um mesmo plano podem ter as posições: externas, secantes ou tangentes. (Livro Praticando matemática, E. Brasil págs. 213 e 214).

Dada uma circunferência de centro C e raio r e uma reta, a posição relativa dessa reta a circunferência pode ser:

- **Externa:** A distância do centro C ao ponto P é maior que o raio r: $CP > r$.

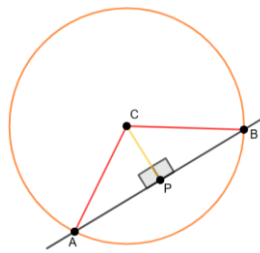
Figura 6 - Reta externa à circunferência



Fonte: elaborado pelo autor

- **Secante:** A distância do centro C ao ponto P é menor que o raio r: $CP < r$.

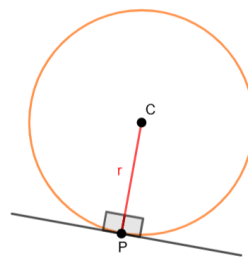
Figura 7 - Reta secante à circunferência



Fonte: elaborado pelo autor

- **Tangente:** A distância do centro C ao ponto P é igual a medida do raio r: $CP = r$.

Figura 8 - Reta tangente à circunferência



Fonte: elaborado pelo autor

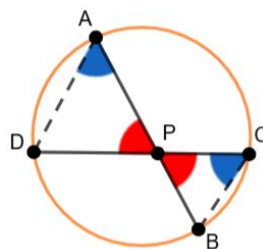
Quando uma reta tangencia uma circunferência destacamos:

- A reta e o raio da circunferência são perpendiculares no ponto de tangência.
- A reta tangente e o raio que contém o ponto de tangência formam um ângulo de 90° .

2.6 TEOREMA DAS CORDAS

Segundo Caminha, livro de Geometria Profmat, págs. 164 a 166 temos: “Se duas cordas se interceptam em um ponto no interior de uma circunferência, então o produto das medidas dos segmentos determinados numa delas é igual ao produto das medidas dos segmentos da outra”.

Figura 9 - Teoremas das cordas



$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

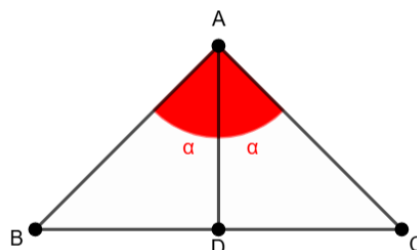
Fonte: elaborado pelo autor

2.7 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA DE UM ÂNGULO DE UM TRIÂNGULO

Por Caminha, Geometria do Profmat, págs. 125 e 126 “dado o triângulo $\triangle ABC$ e uma de suas bissetrizes internas. A bissetriz interna de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto a esse ângulo, em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes ao ângulo”.

Figura 10 - Bissetriz interna de um triângulo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$$



Fonte: elaborado pelo autor

3 O TEOREMA DE PITÁGORAS

Há evidências que sugerem que a civilização babilônica já estava ciente do Teorema de Pitágoras, como demonstram os tablets de argila datados entre 1800 e 1600 a.C.. Devido à natureza comunitária da escola pitagórica, não se pode afirmar com certeza se foi Pitágoras quem descobriu o teorema que leva seu nome, já que era comum na época atribuir grandes descobertas ao líder do grupo.

O Teorema de Pitágoras é de fundamental importância na Matemática e ocupa um lugar de destaque na sua história. O teorema afirma que, em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado formado pela medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados formados pelas medidas dos catetos.

Existem inúmeras demonstrações deste teorema, com novas sendo descobertas ao longo do tempo. E. S. Loomis, um matemático alemão, chegou a compilar 370 demonstrações diferentes para o Teorema de Pitágoras como salienta Elon Lages no seu livro “Meu Professor de Matemática” pág 53.

Neste contexto, este trabalho terá algumas das demonstrações mais comuns que são frequentemente utilizadas em contextos educacionais.

3.1 DEMONSTRAÇÃO CLÁSSICA DO TEOREMA DE PITÁGORAS

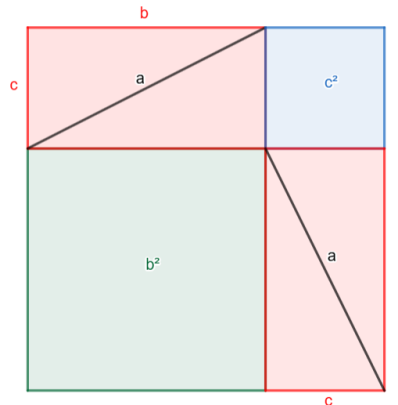
Embora o método exato utilizado por Pitágoras para provar seu teorema seja desconhecido, é geralmente aceito que ele pode ter utilizado um método de comparação, analisando duas figuras geométricas planas com áreas equivalentes.

Pela Base Nacional Comum Curricular nesta demonstração trabalhamos as habilidades:

- (EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.
- (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas. (Brasil, 2018, p. 309)

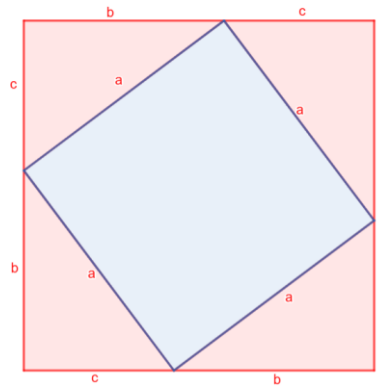
Considera-se que os quatro triângulos retângulos são congruentes pelo caso ACH (Ângulo de 90° , hipotenusa e cateto).

Figura 11 - Demonstração clássica do Teorema de Pitágoras



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 12 - Demonstração clássica do Teorema de Pitágoras



Fonte: elaborado pelo autor

Considerando dois quadrados, ambos com lados medindo $(b + c)$, observamos que a estrutura do primeiro quadrado, ilustrado na figura 11, consiste em um quadrado menor de lado “c”, outro quadrado de lado “b”, e quatro triângulos retângulos com catetos “b” e “c”. Cada um desses triângulos possui a mesma área, designada como A. Com isso, concluímos que a área total deste quadrado é igual a $(b + c)^2$.

Continuando a explicação, a área do primeiro quadrado, que é $(b + c)^2$, pode ser detalhada da seguinte maneira: ela é composta pela soma das áreas dos dois quadrados menores, um com lado “b” e outro com lado “c”, e também pela área total dos quatro triângulos retângulos $4A$.

Assim, a área total deste quadrado é expressa por:

$$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 4A \text{ (I)}$$

O segundo quadrado, representado na Figura 12, é formado também por quatro triângulos retângulos de catetos “b” e “c”, idênticos aos do primeiro quadrado, e um quadrado central cujo lado é “a”, correspondendo à hipotenusa dos triângulos. A área total deste quadrado é, portanto:

$$(b + c)^2 = a^2 + 4A \text{ (II)}$$

Como as áreas dos dois quadrados são iguais, igualamos as expressões das Equações (I) e (II), resultando em:

$$b^2 + c^2 + 4A = a^2 + 4A \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Observa-se que nessa demonstração o Educador poderá focar a demonstração geométrica, de acordo com a posição das figuras, ou fazer a demonstração do Teorema de Pitágoras usando a representação algébrica através das expressões que representam as áreas de cada figura.

Esta é a expressão do Teorema de Pitágoras, que afirma que o quadrado da medida da hipotenusa (a^2) é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos ($b^2 + c^2$), ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

3.2 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS USANDO SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Uma outra abordagem para demonstrar o Teorema de Pitágoras envolve o uso de Relações Métricas em triângulos retângulos. Esta abordagem, no entanto, requer a introdução de conceitos como semelhança de triângulos, proporcionalidade e a identificação de relações específicas dentro do triângulo retângulo é o que destaca Álvaro Andrinni no seu livro *Praticando Matemática* págs. 182 e 183.

As Habilidades de acordo com a BNCC que podem ser trabalhadas:

- (EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
- (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
- (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (Brasil, 2018, p. 315).

A demonstração do Teorema de Pitágoras usando semelhança de triângulos é uma abordagem elegante que se baseia na ideia de que os triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes iguais e os comprimentos dos lados são proporcionais. Aqui está como essa demonstração pode ser feita:

A semelhança de triângulos é um conceito-chave na geometria que diz que dois triângulos são semelhantes se seus ângulos correspondentes são iguais e os lados correspondentes são proporcionais. Isso significa que toda a forma geométrica de um triângulo pode ser escalada para cima ou para baixo para criar outro triângulo onde todos os ângulos são os mesmos, e os lados são um múltiplo comum um do outro.

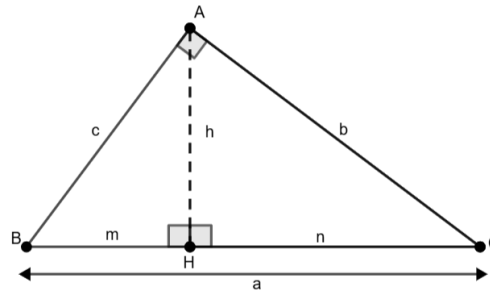
A abordagem usando semelhança de triângulos para demonstrar o Teorema de Pitágoras é notável por várias razões:

- Intuitiva: A ideia de que triângulos semelhantes mantêm as mesmas proporções torna a demonstração bastante visual e intuitiva. Essa abordagem permite visualizar a relação entre os lados de diferentes triângulos retângulos sem depender diretamente de fórmulas de área ou construções algébricas complexas.
- Universalidade: A demonstração não depende de propriedades específicas de certos tipos de triângulos retângulos (como o triângulo isósceles (45-45-90)). Ela se aplica a qualquer triângulo retângulo, independentemente das medidas de seus lados.
- Elegância: A abordagem destaca a beleza e a simplicidade da geometria euclidiana. Ao utilizar apenas a semelhança de triângulos, a demonstração une conceitos fundamentais da geometria de forma clara e concisa.
- Educacional: Ao explorar esta demonstração, os estudantes podem aprofundar seu entendimento não apenas do Teorema de Pitágoras, mas também de conceitos importantes como razões, proporções, semelhança de triângulos, e a natureza das demonstrações matemáticas em si.

Esta contextualização mostra como a demonstração do Teorema de Pitágoras usando semelhança de triângulos não é apenas um exercício matemático, mas também uma janela para a compreensão mais profunda da natureza da geometria e da matemática como um todo.

Dado o triângulo retângulo ABC:

Figura 13 - Relações métricas no triângulo retângulo



Fonte: elaborado pelo autor

a = medida da hipotenusa;

b = medida do cateto AC

c = medida do cateto AB

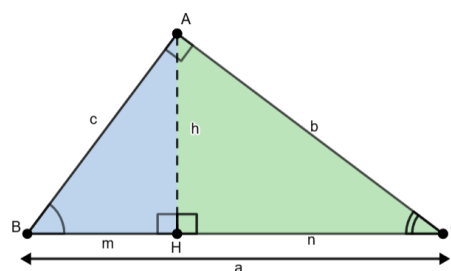
h = medida da altura relativa a hipotenusa

m = projeção do cateto c sobre a hipotenusa

n = projeção do cateto b sobre a hipotenusa

Ao traçarmos a altura h relativa a hipotenusa, obtemos mais dois triângulos semelhantes ao triângulo ABC, que são os triângulos HBA e HAC, pois eles têm dois ângulos internos congruentes.

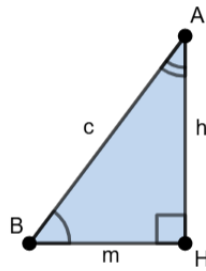
Figura 14 - Semelhança de triângulos



Fonte: elaborado pelo autor

Desta forma podemos verificar as relações:

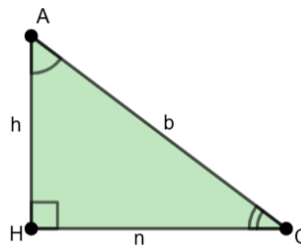
Figura 15 - Relações métricas no triângulo



$$\Delta ABC \sim \Delta HBA \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} \text{ ou } \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am \text{ (I)}$$

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 16 - Relações métricas no triângulo



$$\Delta ABC \sim \Delta HAC \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HC}} \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \text{ ou } b^2 = na \text{ (II)}$$

Fonte: elaborado pelo autor

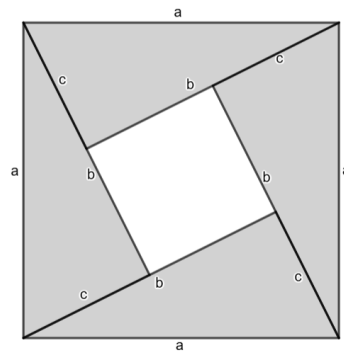
Somando- se I e II, temos:

$$\begin{aligned} c^2 + b^2 &= am + na \\ &= a(m + n) \\ &= a^2 \\ \mathbf{a^2} &= \mathbf{b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

3.3 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS FEITA POR BHÁSKARA

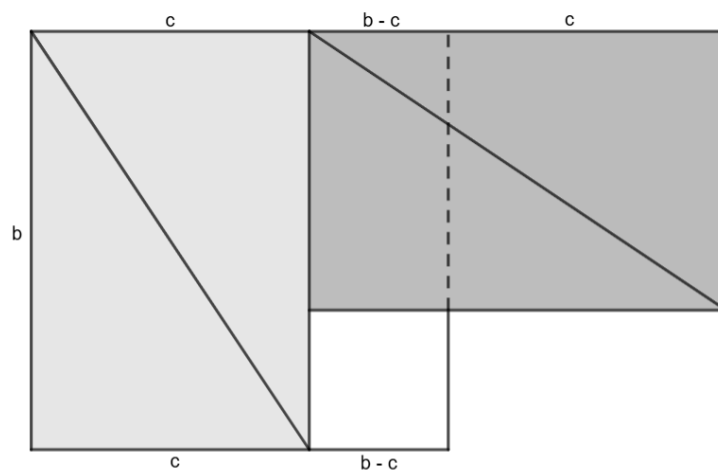
Bháskara (1114 – 1185) foi um matemático indiano, nesta demonstração Bhaskara utilizou congruência de triângulos, em que os quatro triângulos retângulos têm os mesmos catetos e a mesma hipotenusa. Sendo os lados de cada triângulo retângulo identificados como: cateto menor representado por “c”, o cateto maior “b” e a hipotenusa “a”.

Figura 17 - Demonstração feita por Bháskara 1



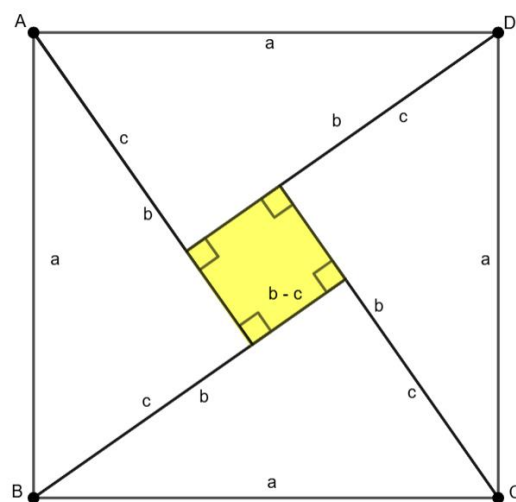
Fonte: elaborado pelo autor

Figura 18 - Demonstração feita por Bháskara 2



Fonte: Magno, 2013, p. 17

Figura 19 - Demonstração feita por Bháskara 3



Fonte: elaborado pelo autor

As Habilidades de Matemática de acordo com a BNCC são:

- (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
- (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas. (Brasil, 2018, p. 315).

A área do quadrado de vértices ABCD é equivalente a soma das áreas das figuras que o compõe. Assim, a área do quadrado ABCD será dada por quatro vezes a medida da área dos triângulos retângulos de catetos b e c mais a área do quadradinho de lado $b - c$. Portanto:

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= 4A_{\Delta} + A_q \\ a^2 &= 4 \cdot \frac{bc}{2} + (b - c)^2 \\ &= 2bc + b^2 - 2bc + c^2 \\ \Rightarrow a^2 &= b^2 + c^2. \end{aligned}$$

(O quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos).

3.4. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS FEITA PELO EX-PRESIDENTE DOS ESTADOS UNIDOS DA AMÉRICA J. GARFIELD

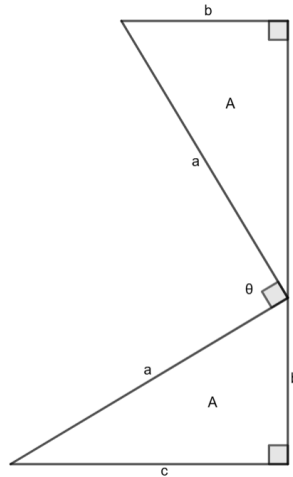
Nesta demonstração podemos observar as habilidades:

- (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
- (EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano. (Brasil, 2018, p. 309).

O presidente James Abrahan Garfield (1831 – 1881) foi o 20^o Presidente dos Estados Unidos da América, era um estudioso e admirador da matemática, e em um momento de grande inspiração, enquanto ainda estava na Assembleia Legislativa desenvolveu o que seria mais uma nova demonstração desse tão importante teorema.

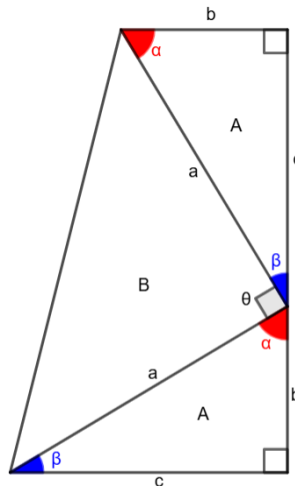
Nas suas anotações ele fez dois triângulos retângulos congruentes, caso ângulo, hipotenusa e cateto, e os colocou conforme a figura abaixo, em seguida fechou a figura formando um quadrilátero denominado trapézio retângulo de bases “b” e “c” e altura (b + c).

Figura 20 - Demonstração feita por J. Garfield



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 21 - Trapézio retângulo 1



Fonte: elaborado pelo autor

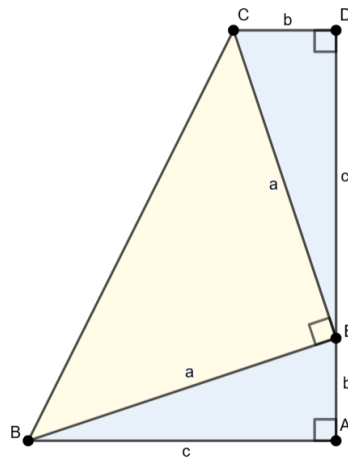
Observa-se que o trapézio é formado por três triângulos: dois congruentes, logo possuem a mesma área “A”, os mesmos lados a, b e c e os ângulos internos congruentes representados pelo ângulo reto (90^0) e pelos ângulos agudos e complementares α e β ($\alpha + \beta = 90^0$) e um terceiro triângulo isósceles de área “B”, que também é retângulo de catetos medindo “a” que é a hipotenusa dos triângulos congruentes, conforme justifico abaixo.

Se o triângulo não congruente é retângulo, conforme a afirmação acima, então o ângulo representado por θ (teta) é reto (mede 90^0).

Sabemos que $\alpha + \beta = 90^\circ$, pois α e β são complementares e que $\alpha + \theta + \beta = 180^\circ$ (ângulo raso ou de meia volta), portanto: $\theta = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, assim $\theta = 180^\circ - 90^\circ$ e, portanto, $\theta = 90^\circ$ e o triângulo formado é um triângulo retângulo isósceles de catetos “a”.

Dado um trapézio formado por três triângulos retângulos, dos quais dois são congruentes, conforme a figura abaixo:

Figura 22 - Trapézio retângulo 2



Fonte: elaborado pelo autor

A área do trapézio será numericamente igual a soma das áreas dos três triângulos. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 A_{ABCD} &= A_{\triangle ABE} + A_{\triangle CDE} + A_{\triangle BCE} \\
 &= \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{aa}{2} \\
 &= \frac{2bc + a^2}{2} \quad \text{(I)} \\
 A_{ABCD} &= \frac{(B+b)h}{2} \\
 &= \frac{(b+c) \cdot (b+c)}{2} \\
 &= \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} \quad \text{(II)}
 \end{aligned}$$

Igualando (I) e (II), temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{2bc + a^2}{2} &= \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} \\
 2bc + a^2 &= b^2 + 2bc + c^2 \\
 \Rightarrow a^2 &= b^2 + c^2.
 \end{aligned}$$

3.5 DEMONSTRAÇÃO TEOREMA DE EUCLIDES

De acordo com a BNCC, as habilidades trabalhadas nessa demonstração são:

- (EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.
- (EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e/ou com o uso de tecnologias digitais.
- (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
- (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. (Brasil, 2018, 297).

A exposição da prova do Teorema de Pitágoras por Euclides, conforme apresentada em "Os Elementos", é uma das mais célebres e marcantes na história da matemática. Nesta obra, Euclides compila e expande os conhecimentos matemáticos da época, incluindo definições, axiomas e proposições, com suas respectivas demonstrações.

O Teorema de Pitágoras, localizado na proposição 47 do primeiro livro, é baseado em conceitos e ferramentas que Euclides desenvolveu anteriormente. Entre eles, está a definição de um quadrado como uma figura quadrilátera equilátera e retângula, e diversos axiomas e proposições referentes à geometria e aos princípios de igualdade e paralelismo.

A prova de Euclides se destaca por sua abordagem puramente geométrica, diferentemente das demonstrações mais modernas que frequentemente recorrem a métodos algébricos. Ele emprega a noção de igualdade de áreas para estabelecer que o quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados construídos sobre os outros dois lados.

Esta maneira de provar o teorema, utilizando apenas ferramentas geométricas, ressalta o caráter intrinsecamente geométrico do teorema. Ao contrário das abordagens contemporâneas, que muitas vezes utilizam propriedades métricas e semelhança de triângulos, a demonstração de Euclides permanece fiel ao espírito da geometria clássica. Através de uma série de construções inteligentes e lógica geométrica, ele consegue revelar uma verdade profunda sobre triângulos retângulos de uma maneira elegante e puramente visual.

Além da pura elegância geométrica, a prova de Euclides também é notável pela sua simplicidade e economia de conceitos. Ele não depende de fórmulas complexas ou cálculos

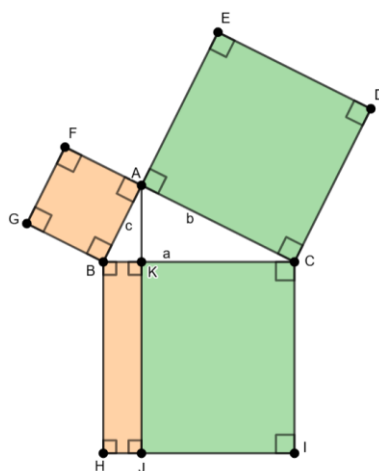
avançados, mas sim de um entendimento profundo das propriedades dos espaços e figuras geométricas. Essa abordagem torna sua demonstração não apenas uma lição de matemática, mas também um exemplo de beleza e simplicidade na resolução de problemas.

A influência dessa prova estende-se além da matemática, influenciando o pensamento filosófico e científico ao longo dos séculos. A habilidade de Euclides em demonstrar uma verdade complexa de forma tão elegante e acessível é um testemunho à sua genialidade e ao poder da mente humana para descobrir e compreender as leis do universo.

Em resumo, a prova do Teorema de Pitágoras por Euclides não é apenas um marco na história da matemática, mas também um exemplo brilhante da capacidade humana de usar o pensamento lógico e criativo para desvendar os mistérios do mundo ao nosso redor. É um legado que continua a inspirar e desafiar matemáticos, filósofos e cientistas gerações após gerações.

Esta técnica inteligente empregada por Euclides revela não apenas sua profunda compreensão da geometria, mas também sua habilidade em transformar conceitos complexos em demonstrações acessíveis e lógicas. Ao simplificar a base do problema e manipular as áreas de forma criativa, Euclides não apenas prova o famoso teorema, mas também ilustra a beleza inerente à matemática. Sua metodologia ressoa até hoje, servindo como um exemplo claro de como a matemática pode ser ao mesmo tempo simples e profundamente reveladora.

Figura 23 - Trapézio retângulo 3



Fonte: elaborado pelo autor

Essa abordagem de Euclides, caracterizada pela manipulação elegante de formas e espaços, não só demonstra a validade do Teorema de Pitágoras de uma maneira visualmente intuitiva, mas também ilumina a natureza da geometria como uma disciplina baseada na

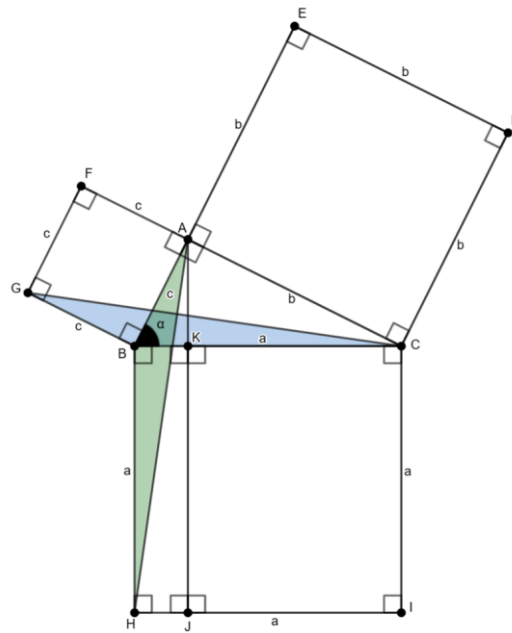
exploração espacial e na transformação de figuras. Ao desdobrar essas formas geométricas de maneira criativa, Euclides não apenas resolve um problema matemático, mas também nos ensina a ver o espaço e as formas de uma nova maneira, destacando a beleza e a simplicidade inerentes à matemática.

Enfim, vamos a demonstração:

A princípio Euclides desenhou um triângulo retângulo de vértices A, B e C, com o ângulo reto em A. e em cada lado desse triângulo construiu quadrados com as respectivas medidas dos lados. Nomeou cada vértice das figuras construídas.

O objetivo de Euclides era mostrar que a soma das áreas dos quadrados menores era igual a área do quadrado maior. A princípio ele traçou os segmentos GC e AH, formando os triângulos $\triangle BGC$ e $\triangle ABH$, que são congruentes pelo caso lado, ângulo e lado (LAL), como iremos provar a seguir.

Figura 24 - Triângulo retângulo (Euclides) 1



Fonte: elaborado pelo autor

Os segmentos $\overline{BG}$ e $\overline{AB}$ são congruentes pois representam dois dos lados do quadrado ABGF, os $\angle GBC$ e $\angle ABH$ são congruentes medem $(90^\circ + \alpha)$, e os lados $\overline{BC}$ e $\overline{BH}$ são congruentes pois representam dois dos lados do quadrado CBHI, portanto os triângulos: $\triangle BGC$ e $\triangle ABH$ são congruentes.

Em símbolos:

$\triangle GBC \cong \triangle ABH$, em que: $\overline{BG} \cong \overline{AB}$; $\overline{BH} \cong \overline{BC}$ e aos ângulos $\angle GBC$ e $\angle ABH$ são congruentes, medem $90^\circ + \alpha$, cada um.

Notemos que o $\triangle GBC$ foi construído com vértices nas paralelas $\overline{BG}$ e $\overline{CF}$, logo a sua base é representada por $\overline{GB}$ e a sua altura por $\overline{GF}$, que medem cada uma “c”.

Logo a medida da área do $\triangle GBC$ será dada por:

$$\begin{aligned} A_{\triangle GBC} &= \frac{\overline{GB} \cdot \overline{GF}}{2} \\ &= \frac{c \cdot c}{2} = \frac{c^2}{2} \\ c^2 &= 2A_{\triangle GBC}, \end{aligned}$$

ou seja, a área do quadrado ABGF é o dobro da área do triângulo $\triangle GBC$.

Como os triângulos $\triangle GBC$ e $\triangle ABH$ são congruentes então eles têm a mesma área. Assim:

O $\triangle ABH$ tem os seus vértices sobre as paralelas $\overline{BH}$ e $\overline{AJ}$, logo sua base será dada pela medida do segmento $\overline{BH}$, de valor “a”, e sua altura pelo segmento $\overline{HJ}$, portanto:

$$\begin{aligned} A_{\triangle ABH} &= \frac{\overline{BH} \cdot \overline{HJ}}{2} \\ &= \frac{a \cdot \overline{HJ}}{2} \\ \Rightarrow a \cdot \overline{HJ} &= 2 \cdot A_{\triangle ABH}. \end{aligned}$$

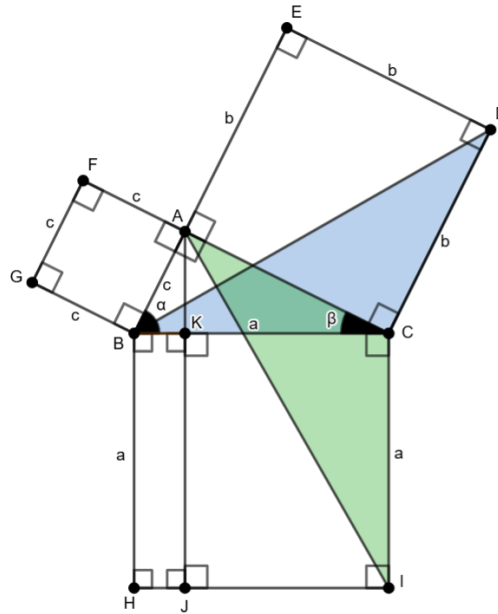
Como os triângulos são congruentes,

$$a \cdot \overline{HJ} = 2 \cdot A_{\triangle GBC} \Rightarrow a \cdot \overline{HJ} = c^2,$$

que corresponde a área do quadrado ABGF e é equivalente a área do retângulo BHJK.

De forma semelhante faremos para calcularmos a área do retângulo CKJI.

Figura 25 - Triângulo retângulo (Euclides) 2



Fonte: elaborado pelo autor

Os triângulos $\triangle CBD$ e $\triangle CAI$ são congruentes conforme o caso lado, ângulo, lado (LAL), como mostraremos a seguir.

$\triangle CBD \cong \triangle CAI$, em que: $\overline{CB} \cong \overline{CI}$ (lados do quadrado de lado de medida “a”); $CD \cong CA$ (Lado do quadrado de lado de medida b) os ângulos $\angle BCD$ e $\angle ACI$ são congruentes, medem $90^\circ + \beta$, cada um.

O $\triangle CBD$ possui os seus vértices sobre as retas paralelas $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$, tendo assim como base a medida do segmento $\overline{CD}$ e altura com medida do segmento $\overline{DE}$.

$$\begin{aligned} A_{\triangle CBD} &= \frac{\overline{CD} \cdot \overline{DE}}{2} \\ &= \frac{b \cdot b}{2} = \frac{b^2}{2} \\ \Rightarrow b^2 &= 2 A_{\triangle CBD} \text{ (I).} \end{aligned}$$

O $\triangle CAI$ possui os seus vértices sobre as retas paralelas $\overline{JA}$ e $\overline{IC}$, tendo assim como base a medida do segmento $\overline{CI}$ e altura com medida do segmento $\overline{JI}$.

Assim:

$$A_{\triangle CAI} = \frac{\overline{CI} \cdot \overline{JI}}{2}$$

$$= \frac{a \cdot \overline{JI}}{2}$$

$$= a \cdot \overline{JI} = 2 A_{\triangle CAI}.$$

Como $\triangle CBD \cong \triangle CAI$,

Então,

$$a \cdot \overline{JI} = 2 A_{\triangle CBD},$$

Pela equação (I) temos:

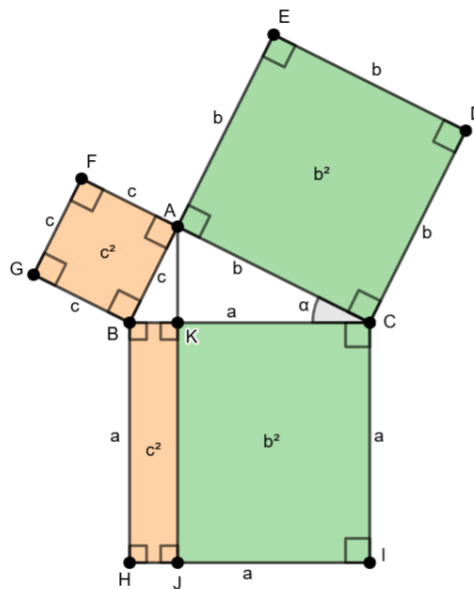
$$a \cdot \overline{JI} = b^2,$$

Em que $a \cdot \overline{JI}$ representa a área do retângulo CKJI e b^2 representa a medida da área do quadrado ACDE, portanto o retângulo CKJI e o quadrado ACDE são equivalentes.

Portanto percebemos que a área do quadrado CBHI, de lado de medida “a” é igual a soma das medidas das áreas dos quadrados ACDE, de lado de medida “b” e o do quadrado ABGF, de lado de medida “c”.

$$A_{CBHI} = A_{ACDE} + A_{ABGF}, \text{ portanto, } a^2 = b^2 + c^2.$$

Figura 26 - Demonstração feita por Euclides



Fonte: elaborado pelo autor

3.6 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS USANDO O TEOREMA DAS CORDAS DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

De acordo com o teorema das cordas e para um melhor aprofundamento sugiro o livro de Geometria- Coleção Profmat de Antonio caminha, capítulo 3, páginas 90 e 91, 164 a 166, onde encontramos a relação: $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

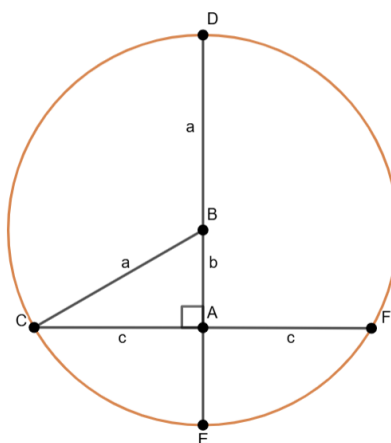
Habilidades trabalhadas de acordo com a BNCC:

- (EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
- (EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
- (EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica. (Brasil, 2018, p. 309).

Conhecendo essa relação, podemos demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Dado um triângulo ABC, com ângulo reto no vértice A, construímos uma circunferência de centro B e raio $\overline{BC}$, cuja medida é “a”.

Figura 27 - Circunferência e o triângulo retângulo



Fonte: elaborado pelo autor

Traça-se o diâmetro da circunferência passando pelos pontos A e B, em seguida prolonga-se o segmento $\overline{CA}$ formando a segunda corda que se intercepta com a primeira corda no ponto A, obtendo assim a corda $\overline{CF}$. Após essas construções podemos aplicar o Teorema das cordas:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{AE} = \overline{AC} \cdot \overline{AF}, \text{ em que;}$$

$$\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{BA} = a + b$$

$$\overline{AE} = \overline{BE} - \overline{BA} = a - b$$

$$\overline{AC} = \overline{AF} = c.$$

Daí,

$$(a + b)(a - b) = c \cdot c$$

$$a^2 - b^2 = c^2, \text{ portanto } \mathbf{a^2 = b^2 + c^2}.$$

3.7 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS ENVOLVENDO A BISSETRIZ INTERNA DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Podemos observar as seguintes Habilidades:

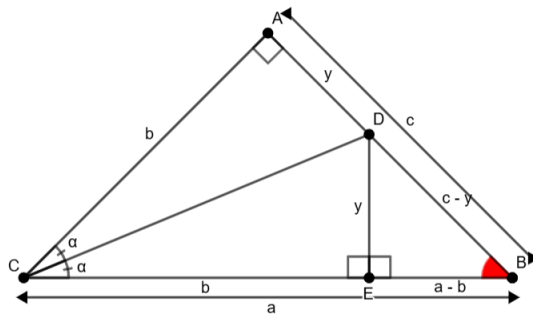
- **(EF09MA16)** Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
- **(EF09MA12)** Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
- **(EF09MA10)** Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. (Brasil, 2018, p. 319, grifo do autor).

Todo triângulo possui três bissetrizes internas que concorrem em um ponto que é chamado de Incentro, o qual corresponde ao centro da circunferência inscrita no triângulo.

Traçando-se uma bissetriz de um ângulo agudo do triângulo retângulo e usando as relações de congruência e de semelhança de triângulos podemos demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em A, de lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ de medidas a, b e c respectivamente. Traçando-se a perpendicular $\overline{DE}$, teremos dois triângulos congruentes $\triangle ACD \cong \triangle DCE$, pelo caso (ACH).

Figura 28 - Teorema de Pitágoras via a bissetriz interna

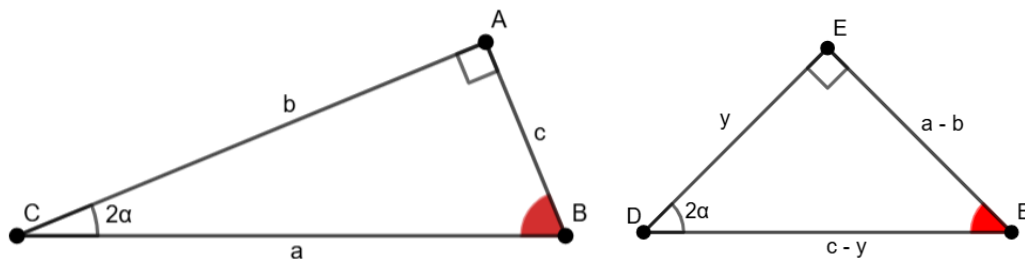


Fonte: elaborado pelo autor

$\triangle ACD \cong \triangle DCE$; $\hat{A} \cong \hat{E}$; $\overline{AC} \cong \overline{CE}$ e $\overline{CD}$ = hipotenusa (lado comum)

Observemos também que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EDB$ são semelhantes pelo caso AA.

Figura 29 - Triângulos semelhantes



Fonte: elaborado pelo autor

$$\triangle ABC \sim \triangle EDB$$

$$\hat{A} \cong \hat{E} (90^\circ)$$

$$\angle ABC \cong \angle EBD \text{ (ângulo comum aos triângulos)}$$

Daí,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{c}{a-b} \Rightarrow \frac{a}{c-y} = \frac{b}{y}$$

Como,

$$\frac{c}{a-b} = \frac{b}{y} \Rightarrow ab - b^2 = cy \text{ (I)}$$

$$\frac{c}{a-b} = \frac{a}{c-y} \Rightarrow a^2 - ab = c^2 - cy \text{ (II)}$$

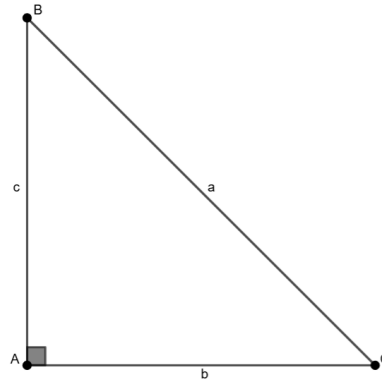
fazendo (I) + (II), temos

$$ab - b^2 + a^2 - ab = cy + c^2 - cy, \text{ portanto, } a^2 = b^2 + c^2.$$

3.8 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS REALIZADA POR HERON

Dado o triângulo retângulo ABC, de catetos b e c e hipotenusa “a”, reto em A, aplicando a fórmula de Heron para calcular a sua área, temos:

Figura 30 - Teorema de Pitágoras por Heron



Fonte: elaborado pelo autor

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ substituindo o semiperímetro } p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$A = \sqrt{\frac{(a+b+c) \cdot (-a+b+c) \cdot (a-b+c) \cdot (a+b-c)}{16}}$$

$$\begin{aligned} 16A^2 &= (a+b+c)(b+c-a)(a-b)(a+b) - c(a-b) + c(a+b) - c^2 \Rightarrow \\ &= [(b+c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - b^2 - ac + bc + ac + bc - c^2] \Rightarrow \\ &= [(b+c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - b^2 + 2bc - c^2] \Rightarrow \\ &= [(b+c)^2 - a^2] \cdot [-a^2 + b^2 - 2bc + c^2] (-1) \Rightarrow \\ &= [(b+c)^2 - a^2] \cdot [-a^2 + (b-c)^2] (-1) \Rightarrow \\ &= [[(b+c)^2 \cdot (b-c)^2 - a^2(b+c)^2 - a^2(b-c)^2 + a^4] \cdot (-1)] \Rightarrow \\ &= [(b+c)(b-c)]^2 - a^2(b+c)^2 - a^2(b-c)^2 + a^4 \cdot (-1) \Rightarrow \\ &= [b^2 - c^2]^2 - a^2(b+c)^2 - a^2(b-c)^2 + a^4 \cdot (-1) \Rightarrow \\ &= [b^4 - 2b^2c^2 + c^4 - a^2b^2 - 2a^2bc - a^2c^2 - a^2b^2 + 2a^2bc - a^2c^2 + a^4] \cdot (-1) \Rightarrow \\ &= [b^4 - 2b^2c^2 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + a^4] \cdot (-1) \Rightarrow \\ &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4 - a^4 \end{aligned}$$

Como também $A = \frac{bc}{2}$, temos:

$$\begin{aligned}
16\frac{b^2c^2}{4} &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4 - a^4 \Rightarrow \\
&= 4b^2c^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4 - a^4 \Rightarrow \\
&= b^4 + c^4 + a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 4b^2c^2 = 0 \Rightarrow \\
&= b^4 + c^4 + a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = 0,
\end{aligned}$$

fatorando:

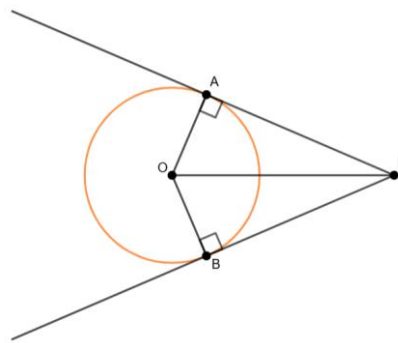
$$\begin{aligned}
(b^2 + c^2 - a^2)^2 &= 0 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0, \text{ logo} \\
\mathbf{a^2} &= \mathbf{b^2 + c^2}.
\end{aligned}$$

3.9 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS VIA INRAIO

Teorema das retas tangentes a uma circunferência

Se por um ponto exterior a circunferência traçamos duas semirretas tangentes a essa circunferência, os segmentos de extremos no ponto externo e no ponto de tangência são congruentes.

Figura 31 - Retas tangentes à circunferência



Fonte: elaborado pelo autor

P = ponto exterior a circunferência

A e B = pontos de tangência

$$\overline{PA} \cong \overline{PB} \text{ (segmentos congruentes)}$$

Unindo o ponto P ao centro da circunferência, formamos o segmento PO e ao traçarmos o raio AO e OB formamos dois triângulos congruentes $\triangle AOP$ e $\triangle BOP$, caso ACH (ângulo de 90° , cateto, hipotenusa), uma vez que:

$$\overline{AO} \cong \overline{BO} = \text{raio}$$

$$\angle PAO \cong \angle PBO = 90^\circ$$

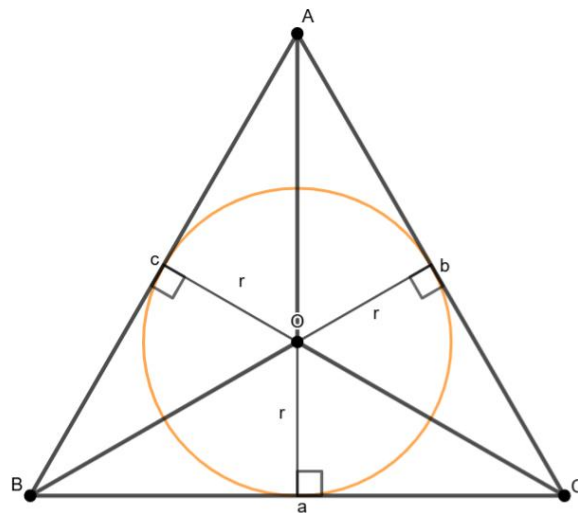
$\overline{OP}$ = lado comum (hipotenusa)

Portanto $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

Área de um triângulo em função do raio da circunferência inscrita e de seu semiperímetro

Dado um triângulo qualquer de medidas a , b e c e uma circunferência inscrita nele de raio r , podemos determinar a área do triângulo pelo produto do seu semiperímetro pela medida do raio da circunferência.

Figura 32 - Área de um triângulo circunscrito



Fonte: elaborado pelo autor

Unindo o centro da circunferência aos vértices do $\triangle ABC$, formamos três triângulos $\triangle OBC$, $\triangle OAC$ e $\triangle OAB$ que, respectivamente, possuem bases a , b , c e altura igual a medida do raio r . Assim:

$$A_{\triangle ABC} = A_{\triangle OBC} + A_{\triangle OAC} + A_{\triangle OAB} \Rightarrow$$

$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} \Rightarrow$$

$$= \frac{(a + b + c) \cdot r}{2}, \text{ portanto:}$$

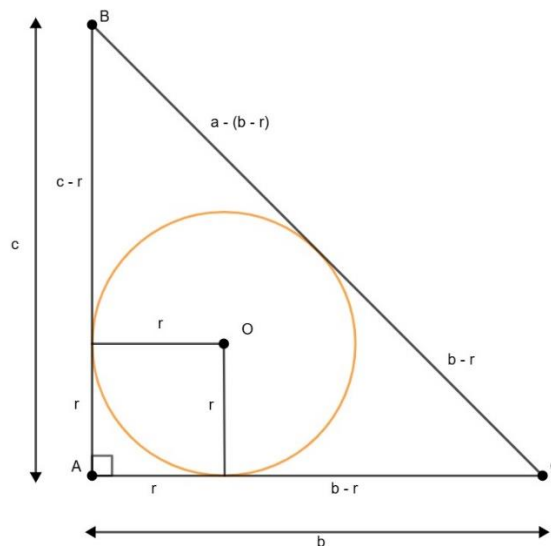
$$A_{\triangle ABC} = p \cdot r$$

Demonstração da expressão que determina o valor do Inraio

O termo Inraio, corresponde ao raio da circunferência inscrita em um triângulo qualquer.

Dado o triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a e uma circunferência de raio r inscrita nele. Como sabemos pelo Teorema das tangentes, a uma circunferência que elas formam segmentos congruentes com extremos nos vértices do triângulo e nos pontos de tangência, temos:

Figura 33 - Inraio do círculo inscrito num triângulo



Fonte: elaborado pelo autor

Daí,

$$a - (b - r) = c - r \Rightarrow$$

$$a - b + r = c - r \Rightarrow$$

$$r + r = b + c - a \Rightarrow$$

$$2r = b + c - a \Rightarrow$$

$$r = \frac{b+c-a}{2}$$

A demonstração do Teorema de Pitágoras usando o Inraio é realizada tendo-se um triângulo retângulo em A e uma circunferência de raio r inscrita nele, razão pela qual podemos usar as expressões:

$$A_{\triangle ABC} = p \cdot r$$

$$\frac{bc}{2} = \frac{(a+b+c)}{2} \cdot \frac{(b+c-a)}{2},$$

percebe-se que há um produto da soma pela diferença de dois termos,

$$\frac{bc}{2} = \frac{[(b+c)+a]}{2} \cdot \frac{[(b+c)-a]}{2} \Rightarrow$$

$$2bc = (b + c)^2 - a^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

3.10 DEMONSTRAÇÃO DA RECÍPROCA DO TEOREMA DE PITÁGORAS

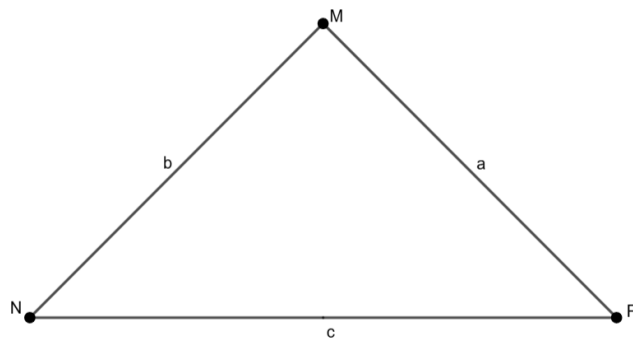
A recíproca do Teorema de Pitágoras afirma que “se a soma das áreas dos quadrados das medidas de dois dos lados de um triângulo for igual ao quadrado da medida do terceiro lado, então esse triângulo é retângulo”.

Habilidades de acordo com a BNCC:

- (EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos. (Brasil, 2018, p. 309).

Seja o triângulo MNP, tal que $MP = a$; $MN = b$ e $NP = c$, se $a^2 = b^2 + c^2$ é verdadeira então o $\triangle MNP$ é um triângulo retângulo.

Figura 34 - Triângulo acutângulo

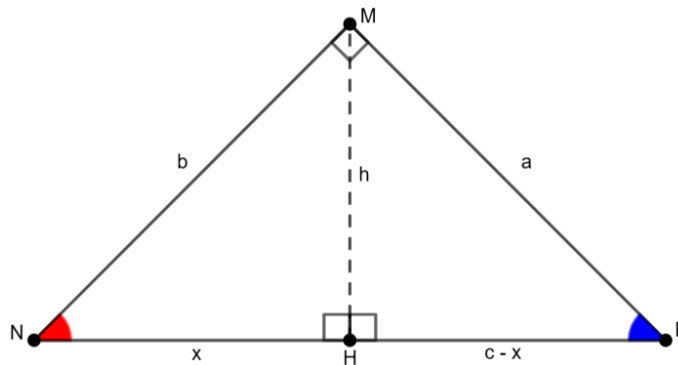


Fonte: elaborado pelo autor

Faremos a demonstração usando o método da contradição. Dividiremos a demonstração em dois casos:

1º caso: O triângulo MNP é Acutângulo (os três ângulos do triângulo são menores que 90°).

Figura 35 - Recíproca de Pitágoras



Fonte: elaborado pelo autor

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle MHN$:

$$b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = b^2 - x^2 \text{ (I)}$$

Fazendo de maneira análoga no $\triangle MHP$:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2 \text{ (II)}$$

Substituindo em (II) a equação (I):

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx, \text{ sabemos por hipótese que:}$$

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ então:}$$

$$b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2cx \Rightarrow$$

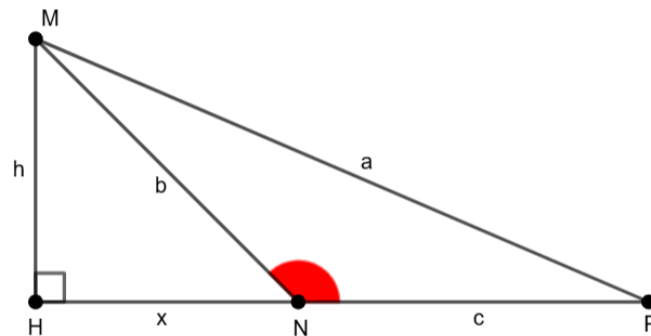
$2cx = 0$, logo $c = 0$ ou $x = 0$, é um absurdo, uma vez que a , b , c e x são segmentos de um triângulo.

Portanto, o triângulo MNP não é acutângulo.

2º Caso: O triângulo MNP é obtusângulo (Tem um ângulo interno entre 90° e 180°).

Dado o triângulo MNP obtusângulo, cujos lados medem a , b e c .

Figura 36 - Recíproca de Pitágoras



Fonte: elaborado pelo autor

Traçando a altura a partir do vértice M, em relação ao lado NP:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo MHN:

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ temos:}$$

$$b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = b^2 - x^2 \text{ (I)}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo MHP, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ daí:}$$

$a^2 = h^2 + (x + c)^2$ (II), substituindo a equação (I) na segunda equação, obtemos:

$$a^2 = b^2 - x^2 + (x + c)^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + x^2 + 2xc + c^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 + 2xc + c^2, \text{ como } a^2 = b^2 + c^2 \text{ é válida, temos:}$$

$$b^2 + c^2 = b^2 + c^2 + 2xc, \text{ daí}$$

$2xc = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $c = 0$, o que é um absurdo! Pois x e c são números positivos, os quais representam os lados de um triângulo.

Portanto o triângulo MNP NÃO é obtusângulo.

Assim, se um triângulo não é acutângulo, não é obtusângulo, logo ele é um triângulo retângulo e portanto, para todo triângulo retângulo: “o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos”, isto é:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

3.11 A LEI DOS COSSENOS

A Lei dos Cossenos é uma relação matemática que relaciona a medida de dois dos lados de um triângulo e o cosseno do ângulo formado por eles, para se determinar o valor da medida do terceiro lado.

Habilidades de acordo com a BNCC:

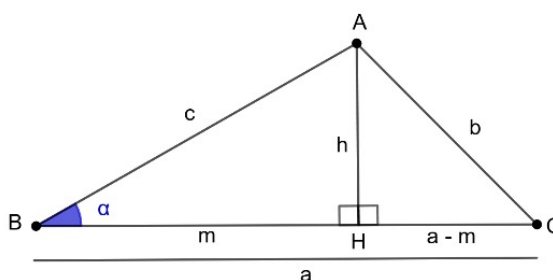
- (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
- (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
- (EM13MAT306PE22) Resolver e elaborar situações problema, envolvendo as funções seno e cosseno, comparando com contextos diversos de fenômenos cíclicos e periódicos como, por exemplo, o estudo de ondas sonoras, com e/ou sem uso de softwares de álgebra e geometria. (Brasil, 2018, p. 319).

A demonstração da Lei dos Cossenos será feita em três casos:

1º Caso: O ângulo considerado é agudo ($\alpha < 90^\circ$)

Dado o $\triangle ABC$ com ângulo B de valor $\alpha < 90^\circ$, traçamos a altura $h = \overline{MH}$

Figura 37 - Lei dos cossenos 1



Fonte: elaborado pelo autor

No $\triangle AHC$, Por Pitágoras:

$$b^2 = h^2 + (a - m)^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = b^2 - (a - m)^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = b^2 - a^2 + 2am - m^2 \quad (I)$$

No $\triangle AHB$, Por Pitágoras:

$$c^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = c^2 - m^2 \text{ (II),}$$

Substituindo h da (I) na (II), teremos:

$$b^2 - a^2 + 2am - m^2 = c^2 - m^2 \Rightarrow$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2am \text{ (III)}$$

no $\triangle AHB$: $\cos \alpha = \frac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot \cos \alpha$ (IV) substituindo (IV) em (III)

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \alpha \text{ (lei dos cossenos para } \alpha < 90^\circ).$$

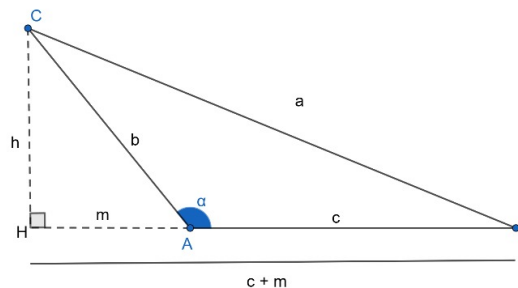
2º Caso: O ângulo considerado é obtuso ($\alpha > 90^\circ$).

Dado o triângulo ABC obtusângulo em A, cujos lados medem a, b e c.

Traçando-se a altura $h = \overline{CH}$ relativa ao lado $\overline{AB}$, formamos dois triângulos retângulos:

$\triangle AHC$ e $\triangle BHC$.

Figura 38 - Lei dos cossenos 2



Fonte: elaborado pelo autor

No $\triangle AHC$, por Pitágoras:

$$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = b^2 - m^2 \text{ (I)}$$

No $\triangle BHC$, por Pitágoras:

$$a^2 = h^2 + (m + c)^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = a^2 - (m + c)^2 \text{ (II),}$$

substituindo (I) em (II)

$$\begin{aligned} b^2 - m^2 &= a^2 - (m + c)^2 \Rightarrow \\ &= a^2 - m^2 - 2mc - c^2 \Rightarrow \\ a^2 &= b^2 + c^2 + 2mc \text{ (III)} \end{aligned}$$

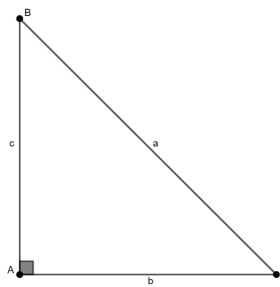
$$\text{No } \triangle AHC, \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{m}{b} \Rightarrow m = -b \cdot \cos\alpha \text{ (IV)}$$

Substituindo (IV) em (III)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cos\alpha \text{ (lei dos cossenos quando } \alpha > 90^\circ).$$

3º Caso: O ângulo considerado é reto ($\alpha = 90^\circ$).

Figura 39 - Triângulo retângulo (lei dos cossenos)



Fonte: elaborado pelo autor

Neste caso podemos afirmar que o Teorema de Pitágoras é um caso particular da Lei dos cossenos, uma vez que $\cos 90^\circ = 0$.

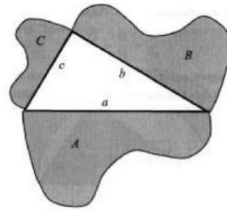
A lei dos cossenos aplica-se a qualquer triângulo, no entanto, de forma mais prática quando o triângulo for retângulo aplica-se o Teorema de Pitágoras e a lei dos cossenos para os demais triângulos

3.12 O TEOREMA DE PITÁGORAS E AS FIGURAS SEMELHANTES CONSTRUÍDAS SOBRE SEUS LADOS

Pode-se demonstrar com facilidade, através das propriedades geométricas de cada figura, que se construirmos figuras semelhantes sobre os lados de um triângulo

retângulo a relação de Pitágoras é verificada (Polya, proposição 5).

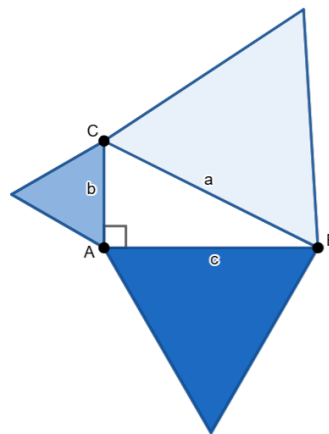
Figura 40 - Figuras semelhantes e o triângulo retângulo



Fonte: elaborado pelo autor

Usando as informações contidas e desenvolvidas por Polya faremos uma demonstração envolvendo triângulos equiláteros cujos lados têm as mesmas medidas dos lados do triângulo retângulo (a, b e c) conforme figura abaixo.

Figura 41 - Figuras semelhantes nos lados de um triângulo



Fonte: elaborado pelo autor

Seja ABC um triângulo retângulo em A, de catetos b e c e hipotenusa a, temos que a área dos triângulos construídos S_A , S_B , e S_C são dadas por:

$$S_A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; S_B = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \text{ e } S_C = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}. \text{ Adicionando-se as áreas } S_B \text{ e } S_C \text{ e usando o Teorema de Pitágoras temos: } S_B + S_C = \frac{b^2}{4}\sqrt{3} + \frac{c^2}{4}\sqrt{3} = \frac{(b^2 + c^2)\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = S_A.$$

Logo $S_B + S_C = S_A$

4 APLICAÇÃO PRÁTICA – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Pode-se constatar que, os métodos usados para planejar e criar aulas inovadoras. Deve-se fazer um registro detalhado dos objetivos e estratégias de cada aula, explicando as razões por trás da escolha dos tópicos e dos resultados esperados. Uma Sequência Didática é um conjunto de atividades planejadas e executadas de forma a atingir um objetivo educacional específico. De acordo com a BNCC, a metodologia das Sequências Didáticas tem como característica principal a realização de uma série de etapas que, se bem executadas, garantem o alcance do objetivo proposto.

As aulas experimentais podem ser realizadas com uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, ou com estudantes do 1º ano do Ensino médio. Antes disso, os alunos devem ter uma noção sobre os tópicos, como congruência de triângulos, manipulação algébrica, uso básico do software Geogebra, e conceitos de razão e proporção.

O programa está dividido em cinco encontros, cada um focado em diferentes habilidades e competências necessárias para compreender o tema. Para participar, os alunos precisavam ter conhecimento prévio em construções geométricas, cálculo de áreas, noções básicas de equações e informática.

As atividades foram planejadas para serem feitas individualmente, embora os alunos pudessem trabalhar em grupos se preferissem, com o foco principal sendo o desenvolvimento autônomo do conhecimento.

O quinto encontro é uma sugestão de atividade, uma vez que nem sempre é possível a sua aplicação na totalidade por falta de computadores, no entanto pode em parte ser usada através do uso de aparelho celular, assim foi planejada para grupos de três, devido essas limitações tecnológicas.

Cada encontro está programado para durar 50 minutos, exceto o encontro 5, que foi estendida para 100 minutos devido a desafios com o tempo previsto.

Os alunos receberão todas as folhas de atividades impressas e materiais adicionais fornecidos pelo aplicador.

Primeiro Encontro – Observar a validade do Teorema de Pitágoras através de construções geométricas.

Habilidades trabalhadas:

- **(EF07MA31)** Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.
- **(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
- **(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. (Brasil, 2018, p. 309, grifo do autor).

A aula tem dois objetivos principais:

- o primeiro é compreender o por meio de construções geométricas e cálculos de área;
- o segundo é aplicar o conhecimento adquirido para calcular a distância de um segmento, proporcionando um contexto prático ao teorema.

A dinâmica da aula envolve exercícios práticos onde os estudantes são incentivados a construir quadrados sobre os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo, calcular suas áreas e depois analisar suas observações. As atividades são apresentadas em folhas contendo uma malha de pontos, com a distância entre pontos consecutivos, na horizontal ou na vertical, definida como uma unidade.

A aula é dividida em três partes: cálculo de áreas e construções geométricas com relato das observações; construção geométrica e cálculo de áreas com transposição para uma tabela e descrição das observações; e o cálculo de comprimentos de segmentos aplicando Pitágoras. Podem ser utilizados lápis de cor, lápis de escrever, régua e calculadora.

O professor ou mediador deve estar atento a possíveis dificuldades durante a aula, intervindo quando necessário.

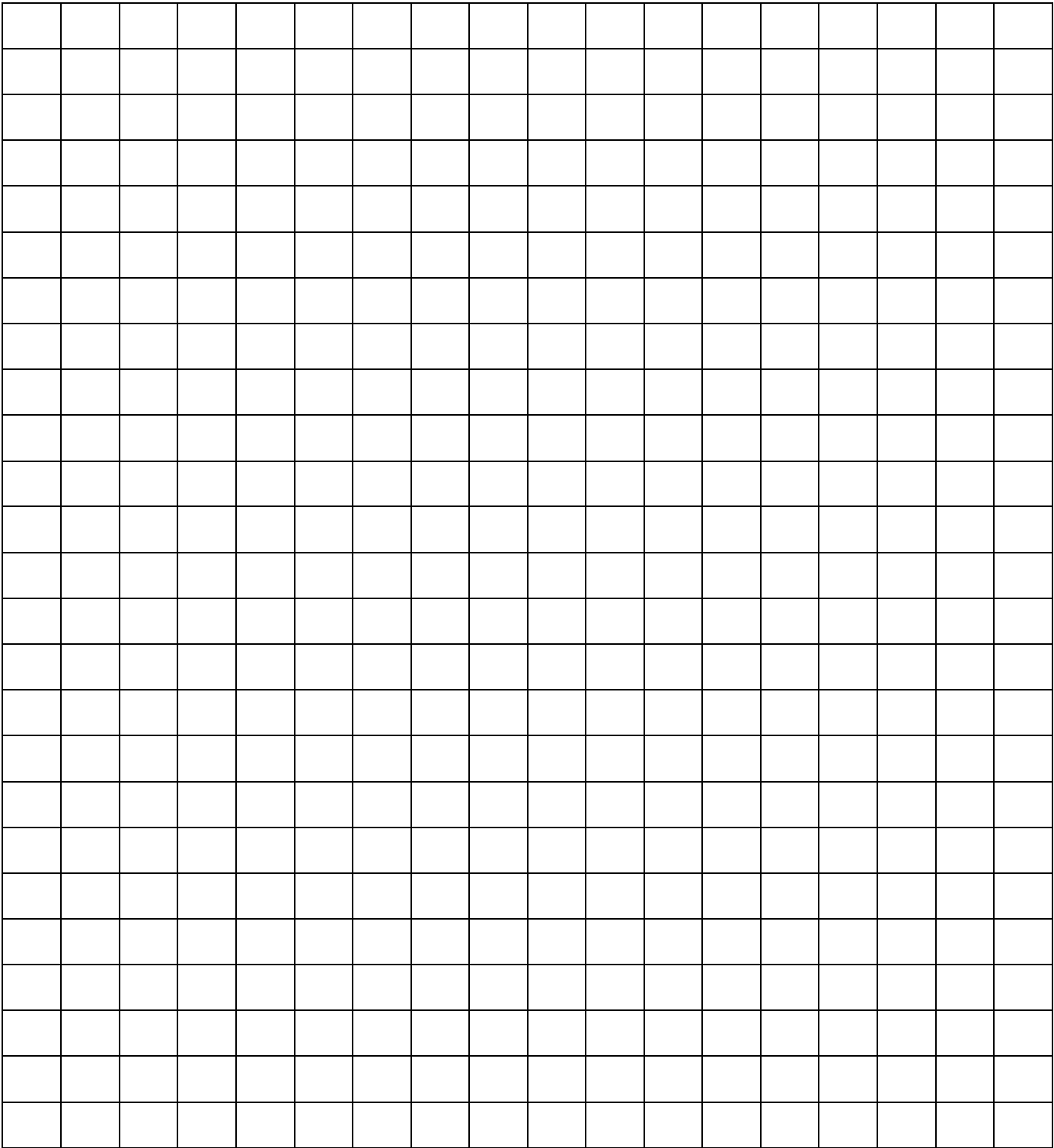
Folha para o primeiro encontro

Figura 42 - Malha de pontos



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 43 - Malha quadriculada



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 44 - Tabela para registros

	Cateto menor	Cateto maior	Hipotenusa
Figura 1			
Figura 2			
Figura 3			

Fonte: elaborado pelo autor

Segundo encontro– A Possível Demonstração feita por Pitágoras".

Esta aula tem como objetivos:

- introduzir os alunos a possível metodologia utilizada por Pitágoras para demonstrar seu famoso teorema, conforme descrito no livro "Introdução à História da Matemática" (EVES).
- Permitir que os alunos explorem a demonstração do teorema tanto geometricamente quanto algebricamente, usando técnicas de recorte e colagem.

HABILIDADES:

- **(EF07MA31)** Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.
- **(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
- **(EM13MAT307)** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (Brasil, 2018, p. 309).

A aula foi planejada para ser realizada em 50 minutos, com as seguintes atividades:

Pintura de quadrados;

Decomposição dos quadrados por meio de recortes;

Organização e colagem dos pedaços em uma sequência específica;

Análise dos resultados das colagens;

Apresentação algébrica do teorema

Os materiais necessários incluem lápis de cor, lápis de escrever, tesoura e cola.

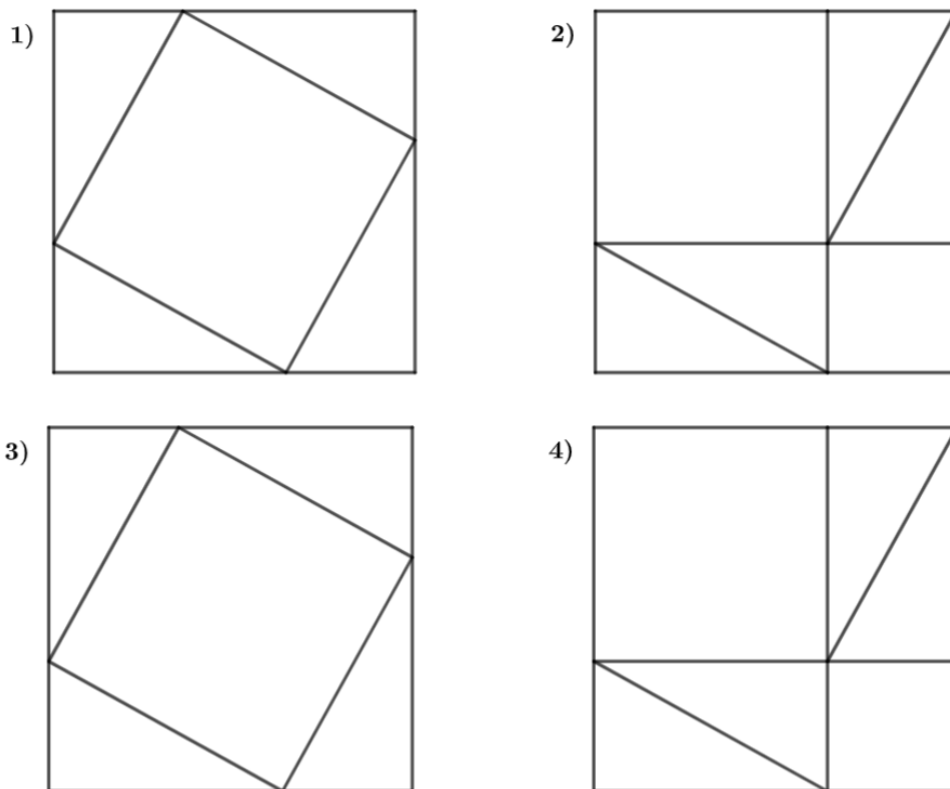
- Os estudantes são orientados a pintarem os triângulos de uma mesma cor, pois são triângulos congruentes

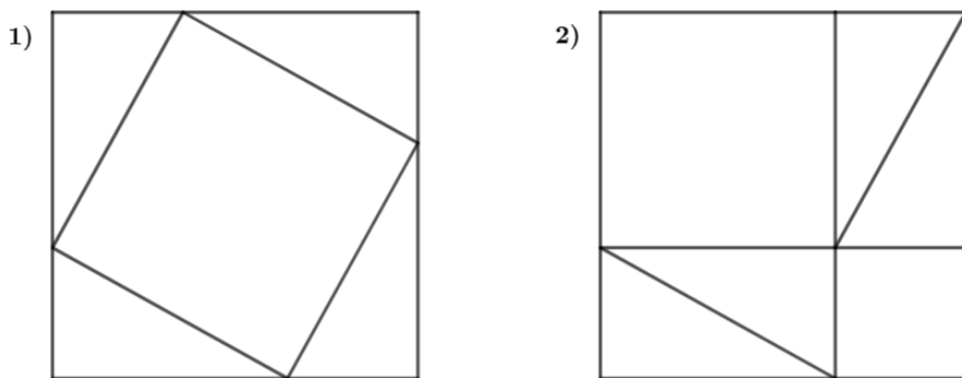
- Os quadrados devem ser pintados em cores distintas
- Fazer a colagem das peças do 1º quadrado no segundo quadrado
- Concluir que a área do quadrado do meio é igual a soma das áreas dos quadrados do 2º quadrado

Um desafio que poderá ser identificado é a transição dos alunos da representação geométrica para a algébrica, uma habilidade muitas vezes não familiar para alguns. O professor tem a liberdade de decidir se deve intervir ou não, dependendo do nível de compreensão dos alunos. Idealmente, o professor atuaria como um mediador, incentivando os alunos a desenvolverem suas próprias conclusões.

2º Encontro – Demonstração por Pitágoras

Figura 45 - Quadrados de Pitágoras





Fonte: elaborado pelo autor

Terceiro encontro – A atividade pode ser feita individualmente ou em grupo. Tem como objetivo:

- Compreender a utilização do Tangram como instrumento de composição e construção de figuras.
- Perceber a demonstração ou validade do Teorema de Pitágoras usando as peças de um Tangram.

Habilidades de acordo com a BNCC:

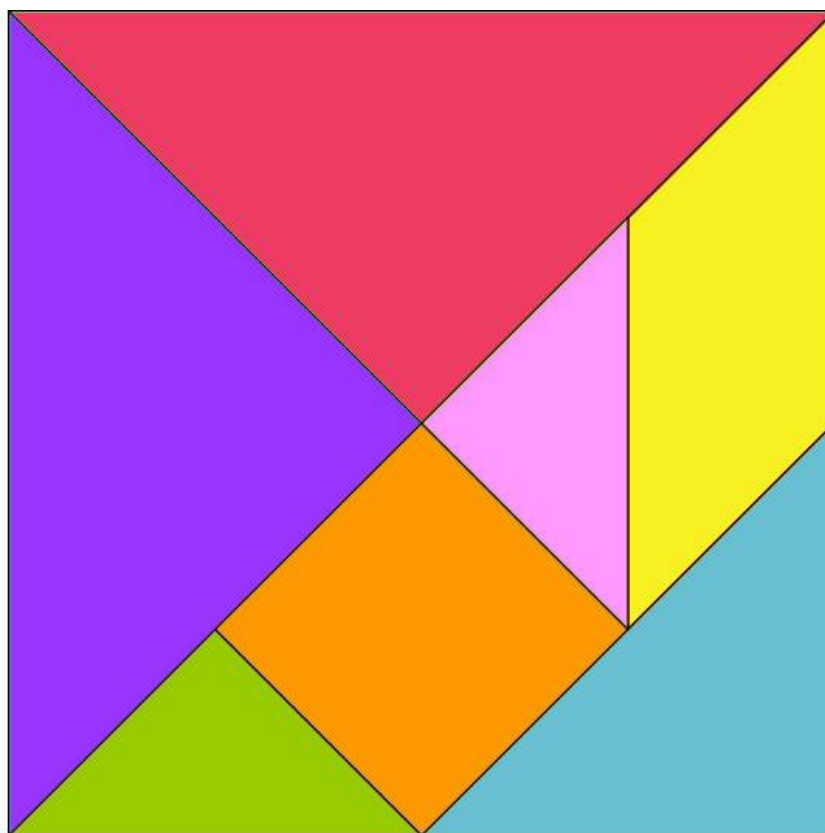
- **(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
- **(EF09MA14)** Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. (Brasil, 2018, p. 309, grifo do autor).

ATIVIDADES:

1. Os estudantes devem usar adequadamente as peças do Tangram para verificar a validade do teorema de Pitágoras: O quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.
2. Como uma segunda atividade atribuir para o triângulo pequeno o valor de 1 cm para a medida de seu cateto e pedir que os estudantes calculem as medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo e por fim calcule a área do quadrado da hipotenusa.

Esta atividade (terceiro encontro) terá no mínimo duas aulas de 50min cada.

Figura 46 - O Tangram



Fonte: elaborado pelo autor

Quarto encontro – Aplicação do Teorema de Pitágoras para calcular distâncias

Esta atividade terá uma duração de 100 minutos e tem como objetivo:

Desenvolver a habilidade dos estudantes em resolver quebra cabeças

Aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas

Habilidades de acordo com a BNCC:

- **(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
- **(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.
- **(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
- **(EF09MA14)** Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. (Brasil, 2018, p. 315, grifo do autor).

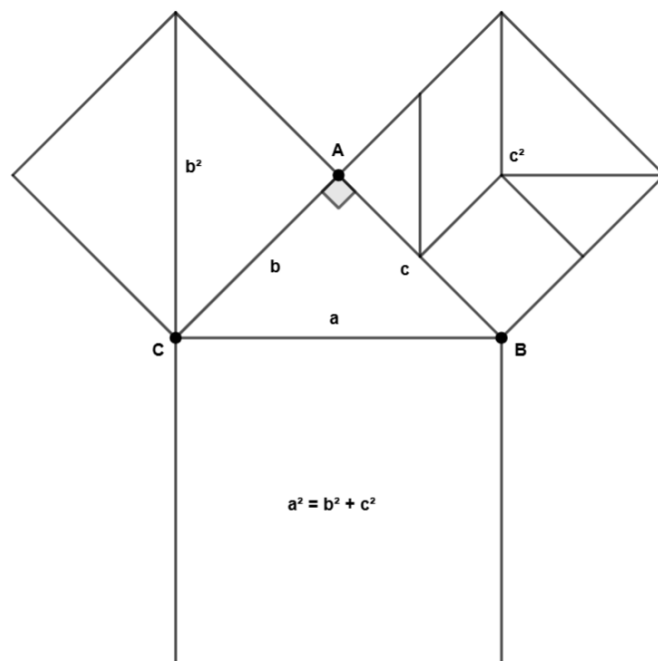
A atividade pode ser desenvolvida em grupos ou individualmente, sendo dividida em duas etapas:

1. Resolução de quebra cabeça, mostrando a validade do Teorema.
2. Praticar a resolução de exercícios usando o Teorema.

ATIVIDADES:

1 – Monte o quadrado maior como a soma das peças dos quadrados menores em que, no triângulo retângulo: “a” representa a hipotenusa, “b” e “c” representam as medidas dos catetos do triângulo

Figura 47 - Quebra cabeça pitagórico

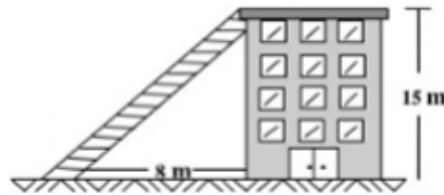


Fonte: elaborado pelo autor

2 – Aplique o Teorema de Pitágoras e resolva os problemas:

I) Em um edifício que tem 15m de altura, conforme figura abaixo, com uma escada colocada a 8 m de sua base ligada ao topo do edifício. Qual é o comprimento da escada?

Figura 48 - Aplicações do Teorema 1

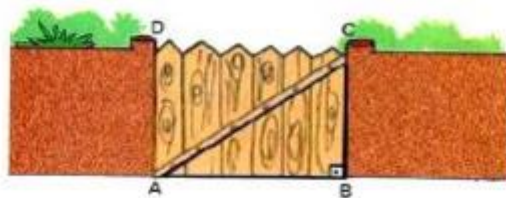


Fonte: Adaptado do Blog Prof. Warles .com

- a) 17m
- b) 16m
- c) 15m
- d) 14m
- e) 23m

II) O portão de entrada de uma casa tem 4m de comprimento e 3m de altura. Que comprimento teria uma trave de madeira que se estendesse do ponto A até o ponto C.

Figura 49 - Aplicações do Teorema 2

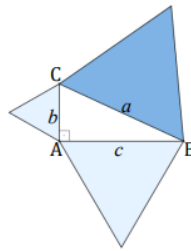


Fonte: Adaptado do Blog Prof. Warles .com

- a) 2m
- b) 5m
- c) 7m
- d) 8m
- e) 12m

2 - Sendo os triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo de lados medindo 3cm, 4cm e 5cm. Podemos dizer que as áreas desses triângulos equiláteros satisfazem o Teorema de Pitágoras?

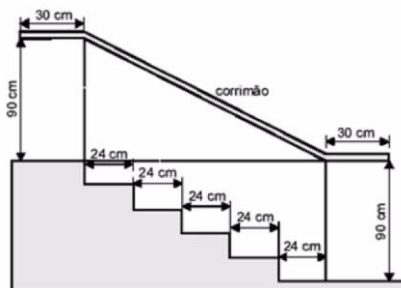
Figura 50 - Aplicações do Teorema 3



Fonte: elaborado pelo autor

04 - A figura abaixo, representa o projeto de uma escada de 5 degraus com mesma altura. De acordo com os dados da figura, qual é o comprimento de todo o corrimão?

Figura 51 - Questão do ENEM



Fonte: Enem 2006 – Azul – 63 (M)

05 – Podemos afirmar que a peça de ligação indicada na figura abaixo vale, aproximadamente:

Figura 52 - Ilustração da atividade



Fonte: Adaptado do Blog Prof. Warles .com

- a) 200cm
- b) 225cm
- c) 250cm
- d) 300cm
- e) 350cm

06 - Coloque nas opções abaixo V para verdadeiro ou F para falso.

- () O teorema de Pitágoras pode ser aplicado para qualquer tipo de triângulo.
- () O teorema de Pitágoras pode ser demonstrado com o auxílio de 2 quadrados e 1 círculo
- () O teorema de Pitágoras pode ser enunciado como “a soma dos quadrados das medidas de comprimento dos catetos é igual ao quadrado da medida de comprimento da hipotenusa”.
- () Ao considerarmos o teorema de Pitágoras temos que verificar o tipo de triângulo.

Quinto encontro (sugestão) – Explorando o Teorema de Pitágoras com o Geogebra" tem como finalidade demonstrar o Teorema de Pitágoras usando uma abordagem computacional, utilizando o software Geogebra. Esta abordagem reconhece a importância de integrar a matemática em diferentes contextos e utilizar métodos que engajem os alunos no aprendizado dos conteúdos.

Habilidades de acordo com a BNCC:

- (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.
- **(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica. (Brasil, 2018, p. 541, grifo do autor).

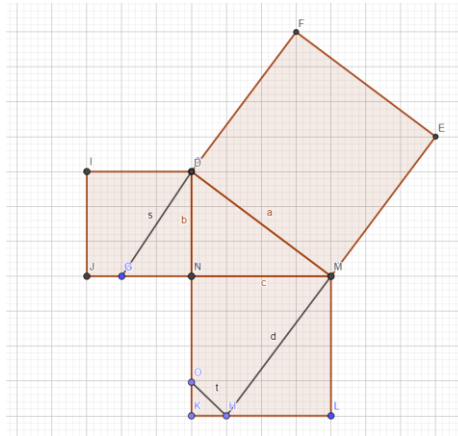
A estratégia da aula é oferecer uma forma inovadora de exploração do teorema, centrada no uso do Geogebra, e avaliar se os alunos compreendem conceitos matemáticos essenciais.

A aula será realizada ao longo de duas sessões, totalizando 100 minutos, e incluirá as seguintes atividades:

1. Construção de uma demonstração do Teorema de Pitágoras usando áreas.
2. Análise comparativa das áreas calculadas;
3. Discussão sobre as observações feitas durante a construção;
4. Realização de uma série de exercícios em folhas de atividade.
5. É possível, ainda, promover uma autoavaliação dos alunos com os seguintes questionamentos:
 - Quais elementos são necessários para que o teorema de Pitágoras seja válido?
 - Em quais situações posso aplicá-lo?
 - Quais foram as dificuldades que encontrei ao longo desse estudo?

6 - Monte o quebra cabeça recortando as figuras que compõem cada quadrado dos cateto do triângulo retângulo abaixo, sabendo que pelo Teorema de Pitágoras “O quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos”.

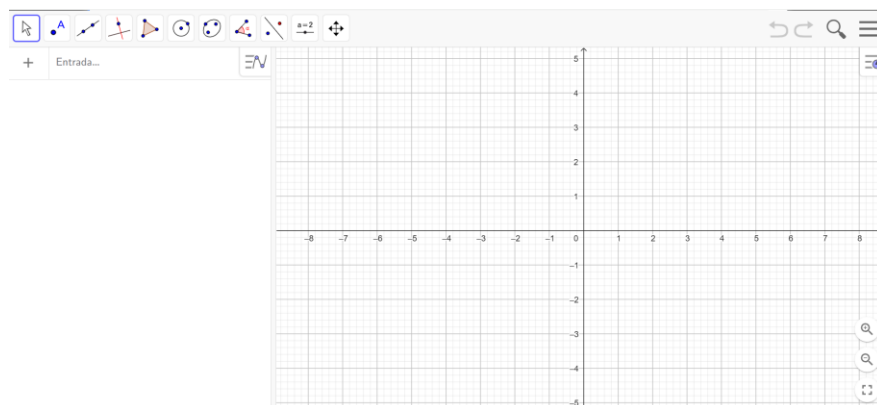
Figura 53 - Quebra cabeça com o Geogebra



Fonte: elaborado pelo autor

Um desafio que pode ser identificado é a familiarização dos alunos com o software matemático. Assim, é essencial que o instrutor introduza o Geogebra antes da oficina para desenvolver as habilidades necessárias nos alunos.

Figura 54 - Página inicial do Geogebra



Fonte: elaborado pelo autor

Os resultados serão coletados observando-se o progresso dos alunos durante as atividades e analisando-se as folhas de exercícios completadas. O registro da oficina será

realizado por meio das folhas de atividades coletadas e anotações feitas pelo professor durante a aplicação, usando um caderno de notas para documentar o processo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta jornada educacional, exploramos diversas facetas do ensino de matemática, enfocando especialmente no Teorema de Pitágoras e em métodos inovadores para seu ensino. Os encontros (aulas) desenvolvidas representam um esforço contínuo para tornar a matemática mais acessível, envolvente e significativa para os alunos.

As oficinas destacam a importância de abordagens inovadoras no ensino de conceitos matemáticos. A utilização de ferramentas como o Geogebra (sugestão) e métodos práticos como recortes e colagens demonstram que o aprendizado de matemática pode ser enriquecido com atividades criativas e interativas.

As experiências realizadas revelaram desafios importantes, como a familiarização dos alunos com softwares matemáticos e a transição do pensamento geométrico para o algébrico. As adaptações feitas nas aulas, em resposta a esses desafios, sublinham a necessidade de flexibilidade e ajustes constantes em métodos de ensino para atender às necessidades dos alunos.

Um aspecto central das oficinas é a ênfase na construção autônoma do conhecimento pelos alunos. Incentivando a experimentação e a reflexão individual e em grupo, as atividades planejadas promovem um entendimento mais profundo dos conceitos matemáticos.

A incorporação das atividades desenvolvidas no currículo escolar e sua aplicação prática demonstram como a matemática pode ser relevante e aplicável na vida cotidiana dos alunos. Essa abordagem ajuda a desmistificar a matemática e a destacar sua utilidade e beleza.

A coleta de feedback dos alunos e a reflexão contínua sobre as práticas de ensino são fundamentais. Elas não apenas ajudam a melhorar as estratégias didáticas, mas também envolvem os alunos no processo de aprendizagem, tornando-os parceiros ativos em sua educação.

Neste sentido, estas aulas representam um passo valioso na busca por um ensino de matemática mais dinâmico, envolvente e eficaz. Elas destacam a importância de métodos de ensino que são tanto reflexivos quanto adaptáveis, e que colocam os alunos no centro do processo de aprendizagem. Através destas experiências, podemos vislumbrar um caminho promissor para a educação matemática, onde o aprendizado é tanto uma jornada de descoberta quanto de compreensão.

REFERÊNCIAS

ANDRINNI, Álvaro. **Praticando Matemática**. São Paulo: Brasil, 1989.

BIANCHI, A. G. A. O uso do software educativo na prática pedagógica do professor de matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 26., 2003, Caxambu. **Anais [...]**. Rio de Janeiro: ANPED, 2003. p. 1-21.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BONJORNIO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Matemática do Ensino médio**. São Paulo: FTD, 2020.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 1999.

ESPÍNDOLA, Juan Pablo. Segundo Pitágoras. In: **Enciclopédia Humanidades**, 2023. Disponível em: <https://humanidades.com/br/pitagoras/>.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: UNICAMP, 2007.

HOHENWANTER. I; HOHENWANTER.I. **A importância da Geogebra**. [S. l.: s. n.]: 2009.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da matemática elementar**. São Paulo: Saraiva, 1977. (Conjuntos e funções, vol. 1).

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. [S. l.]: SBM, 1987.

LOOMIS, Elisha Scott. **The Pythagorean Proposition**. Washington: [s. n.], 1968.

LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de ensino de matemática**. Campinas: Autores Associados, 2009.

MAGNO, Weverton Ferreira de Castro. **Sobre o teorema de Pitágoras**. Niterói: UFFL, 2013.

MISKULIN, Rosana Giaretta *et al.* A utilização de softwares educativos no ensino de Matemática. *In*: ANPED SUL, 2006, Caxias do Sul. **Anais [...]**. Caxias do Sul: ANPED SUL, 2006. p. 1-10.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Professor de Matemática, vol. 25).

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SANTOS, R. A. **As dificuldades no ensino da geometria**: um estudo de caso. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2008.

SILVA, J. E. H. *et al.* Teorema de Pitágoras: extensões e generalizações. C.Q.D. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 6, p. 21-47, jul. 2016.

TIZZIOTTI, José Guilherme. **Matemática do 2º grau**. São Paulo: Ática, 1980.