Artigo Original

REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

EXPLORANDO OS NÚMEROS REAIS COMO A UNIÃO ENTRE NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO BÁSICO

Exploring Real Numbers As The Union Between Algebraic And Transcendent Numbers: An Approach For Basic Education

Maria Eloisa Ferreira DOS SANTOS
Escola Municipal São Geraldo, Bom Conselho-PE, Brasil
elo.santos8@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5664-7052

Alcindo Teles GALVÃO
Universidade Federal de Alagoas, Campus Arapiraca, Brasil
alcindo.galvao@arapiraca.ufal.br
https://orcid.org/0000-0002-7423-020X

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Construir conceitos matemáticos a partir de problemas intuitivos e do conhecimento prévio do aluno é uma maneira de exercitar a autonomia do estudante no processo de ensino-aprendizagem, que é um tópico amplamente discutido no contexto da Educação Básica. Em particular, no Ensino de Matemática, a metodologia de Resolução de Problemas objetiva desenvolver essa autonomia. Neste artigo, discutimos a importância e a possibilidade de trabalhar, com estudantes do Ensino Médio, conceitos comumente trabalhados no ensino superior, mais especificamente, os conceitos iniciais da Teoria dos Números Transcendentes. Para tanto, propomos uma sequência didática que tem como objetivo abordar as definições de Número Algébrico e de Número Transcendente a partir do conhecimento acerca dos Conjuntos Numéricos, já adquiridos ainda no Ensino Fundamental. Abordar conceitos mais abstratos da matemática ainda no ensino básico com o uso da metodologia de Resolução de Problemas contribui para despertar a curiosidade e o interesse na área, além de contribuir com o desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Números Transcendentes, Educação Básica

ABSTRACT

Building mathematical concepts based on intuitive problems and the student's prior knowledge is a way of exercising student autonomy in the teaching-learning process, which is a widely discussed topic in the context of Basic Education. In particular, in Mathematics Teaching, the Problem Solving methodology aims to develop this autonomy. In this article, we discuss the importance and possibility of working with high school students on concepts commonly used in higher education, more specifically, the initial concepts of Transcendent Number Theory. To this end, we propose a didactic sequence that aims to address the definitions of Algebraic Number and Transcendent Number based on knowledge about Numerical Sets, already acquired in Elementary School. Addressing more abstract concepts of mathematics in basic education using the Problem Solving methodology contributes to awakening curiosity and interest in the area, in addition to contributing to the development of logical and deductive reasoning.

Keywords: Problem Solving, Transcendent Numbers, Basic Education

1 INTRODUÇÃO

No decorrer da história, os números foram surgindo das necessidades básicas de contar e medir. Do ponto de vista macroscópico, a infinidade dos números é algo evidente, seja para matemáticos ou não, principalmente com relação aos números naturais. Por outro lado, menos trivial, é olhar por um ponto de vista microscópico: imaginemos uma régua de 30 centímetros que possa ser ampliada tanto quanto se queira. Qual a natureza dos números observados?

Visualizar e compreender o conceito de infinidade não é uma tarefa simples. No contexto matemático, a densidade da reta real é um dos exemplos que exige um bom nível de abstração, mesmo que esse conceito seja trabalhado sem a formalização de teoremas e resultados da Análise Real, estudados apenas em nível superior. Trabalhar tais concepções com estudantes do ensino básico permite que estes provoquem seus processos de reflexão e abstração, dando sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, dedutivos e sistêmicos, como é previsto na BNCC (2017).

Além disso, para aqueles estudantes que pretendem se profissionalizar em uma área do campo das exatas, esses conceitos permitem que esses tenham mais facilidade na compreensão do cálculo diferencial e integral, que exige um forte conhecimento prévio das propriedades dos números reais.

Uma das etapas mais importantes do ensino da Matemática é a prática, a resolução de questões dos mais variados níveis, sempre de acordo com a turma que se está trabalhando. Para a abordagem nessa etapa, a metodologia de Resolução de Problemas é uma forte aliada. O matemático George Pólya (1887 - 1985) discorre sobre essa metodologia em sua obra *A arte de resolver problemas*, que, em suma, propõe a introdução de um conceito matemático a partir da resolução de problemas, desenvolvendo, no estudante, um trabalho cada vez mais independente, tornando a aprendizagem mais significativa.

Muitas vezes quando verificamos a resolução de um problema que não conseguimos resolver, nos perguntamos como que alguém teve aquela ideia e se um dia seremos capazes de desenvolver algo tão bem elaborado para resolver um problema proposto. De fato, ter boas ideias não é uma tarefa simples, no entanto, para Pólya (1978), essas ideias fazem parte da sua experiência e de seus conhecimentos prévios, pois é resolvendo problemas que aprendemos a resolvê-los.

Resolver problemas é criar uma espécie de banco de dados, onde você guarda as ideias para resolução de problemas futuros correlatos.

> Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas anteriormente resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados. Assim sendo, deve-se muitas vezes começar o trabalho pela indagação: *conhece um problema correlato?* (Pólya, 1978, p. 6)

A área da Matemática é colocada "diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído pelos estudantes" (BNCC, 2017, p. 518), isto é, o conhecimento prévio dos alunos é essencial para o desenvolvimento de novas habilidades. E para a abordagem de novos conceitos deve-se escolher bem cada passo e cada problema a ser trabalhado, de modo que os pré-requisitos sejam bem aproveitados e o objetivo da abordagem seja cumprido.

A prática pedagógica exige uma organização de modo que seja feita uma ordenação dos passos a serem realizados, e um meio para realizar essa organização é a utilização de sequências didáticas. Uma sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas a serem realizadas em uma ou mais aulas. Essas atividades podem ser uma leitura, uma anotação, uma pesquisa, um debate ou um exercício, e são definidas, por Zabala (1998), como "uma unidade básica do processo de ensino aprendizagem", pois são esses elementos que norteiam o andamento da aula.

Assim, utilizando a metodologia de resolução de problemas, objetivamos a construção de uma sequência didática que tenha como proposta a abordagem dos conceitos de números algébricos e transcendentes para estudantes de ensino médio. Para tal realização é necessário o conhecimento prévio desses alunos acerca do conjunto dos números reais, especialmente sobre a distinção entre racionais e irracionais, que é visto nos anos finais do ensino fundamental.

2 A TEORIA DOS NÚMEROS TRANSCENDENTES E SUA RELEVÂNCIA NO CONTEXTO DA MATEMÁTICA BÁSICA

Os números são classificados de acordo com as suas particularidades e um estudo detalhado sobre os conjuntos numéricos é realizado ainda na escola básica, destacando as características e propriedades que cada número real possui. No entanto, uma perspectiva diferente acerca dos números reais é menos conhecida, inclusive nos cursos de Licenciatura em Matemática: classificá-los de acordo com suas propriedades algébricas.

No ensino básico, um estudo mais detalhado sobre polinômios é comumente realizado no 3º ano do Ensino Médio, abordando desde a definição e operações, até o Teorema Fundamental da Álgebra. Diante do contexto apresentado, a proposta de sequência didática que será apresentada tem o objetivo de distender esses conceitos com a apresentação de números algébricos e transcendentes.

Nem todos os números reais satisfazem equações algébricas, isto é, nem todos são raízes de polinômios com coeficientes inteiros. De um modo geral, todo número que é solução de uma equação algébrica, com coeficientes inteiros, é chamado de *algébrico* e aqueles que não satisfazem tais equações são chamados de *transcendentes.* Daí, podemos definir o conjunto dos números reais como a união disjunta entre números algébricos e transcendentes, diferente da forma convencional que é dada como a união de racionais e irracionais.

No ensino básico podem surgir prováveis questionamentos a respeito da natureza de alguns números, desde os anos finais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Em uma aula sobre potenciação, por exemplo, um estudante que tenha conhecimento dos números π e $\sqrt{2}$ pode, naturalmente, perguntar se 2^{π} ou $2^{\sqrt{2}}$ são números racionais ou irracionais. Esses números "enigmáticos" também podem ser encontrados como soluções de equações exponenciais, como $\frac{\log 3}{\log 2}$ que é solução da equação $2^x = 3$.

Um resultado da teoria dos números transcendentes que nos possibilita escrever infinitos transcendentes é o *Teorema de Gelfond-Schneider*: dados α, β números algébricos, com $\alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ e $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, temos que os números da forma α^{β} são transcendentes. Assim, os números $2^{\sqrt{2}}, (-7)^{\sqrt{3}}$ e $\sqrt{5}^{\sqrt{2}}$ são exemplos de números transcendentes. O conhecimento desse resultado possibilita a ampliação do conhecimento acerca da natureza dos números reais.

Sob esta perspectiva, destacamos a importância de ter conhecimento do conceito de números transcendentes, em quais contextos podemos encontrá-los e até mesmo dos principais casos em aberto. Dessa forma, evitamos que possíveis dúvidas não sejam sanadas, além de incentivar estudo de uma matemática um pouco mais formal antes mesmo do ingresso do estudante na universidade, para aqueles que despertarem a curiosidade.

3 A INTERAÇÃO ENTRE PROFESSOR E ESTUDANTE SOB A PERSPECTIVA DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Seja qual for a metodologia utilizada, a forma como é feita a mediação por parte do professor é essencial para o andamento do processo de ensino-aprendizagem. O primeiro passo é a escolha do problema: que esse não seja tão fácil de modo que o estudante não demonstre interesse, nem tão difícil que o faça perder a motivação. Para tal feito, é necessário conhecer a turma com a qual irá trabalhar e quais os seus conhecimentos previamente adquiridos. Feito isso, seguimos para o que Pólya (1978) denomina de “auxílio ao estudante”.

Até mesmo para aqueles estudantes que possuem muita dificuldade de fazer um trabalho independente, o auxílio do professor deve ser feito de modo que o aluno sinta essa independência. Para isso, segundo Pólya (1978, p. 1), “o professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que *poderia ter ocorrido ao próprio estudante*.” Dessa forma, fazendo as indagações corretas, o estudante consegue definir a incógnita do problema e desenvolver passos para encontrá-la.

A autonomia do estudante em seu processo de aprendizagem é um princípio didático geral dos Parâmetros Curriculares Nacionais, dado como “uma opção metodológica que considera a atuação do aluno na construção de seus próprios conhecimentos, valoriza suas experiências, seus conhecimentos prévios e a interação professor-aluno” (PCN’s, 1997, p. 61 e 62).

Diante desse contexto, ao abordar um conteúdo novo em sala de aula, essa autonomia por parte do estudante permite que os conceitos sejam construídos a partir de seus conhecimentos prévios e deduções, dando mais significado ao novo conhecimento a ser adquirido. Assim, conforme é abordado nos PCN’s (1997), trabalhando dessa forma o aluno desenvolve capacidades como identificar diferentes maneiras de resolver um problema, validar um raciocínio, fazer bons questionamentos e desenvolver bons argumentos em suas respostas. Tais atitudes se ampliam de modo que também possam ser aproveitadas em outras áreas do conhecimento.

4 PROPOSTA DIDÁTICA

Com base na metodologia de resolução de problemas, ao invés de iniciar a proposta com uma abordagem expositiva dos conteúdos a serem trabalhados, estes serão deduzidos a partir da discussão e resolução de problemas propostos. Os objetivos desta sequência didática são: deduzir a existência de números transcendentes, concluir que o conjunto dos números reais pode ser definido como a união disjunta de números algébricos e transcendentes e aplicar os conceitos definidos à resolução de equações, com a utilização de recursos computacionais.

4.1 Deduzindo a existência de números transcendentes

Inicialmente trataremos sobre a natureza de raízes de polinômios. Para isso, o problema inicial será construir os polinômios que possuem determinados números como raízes.

Problema 1.

encontre os polinômios com coeficientes inteiros que possuem cada um dos números abaixo como raízes.

a) 2
b) – 2
c) $\frac{3}{4}$
d) $-\frac{5}{6}$
e) $\sqrt{2}$
f) $\sqrt{7}$
g) $\sqrt[3]{5}$
h) $\sqrt{\sqrt{3}-8}$
i) π
j) e

Para auxiliar os estudantes nos casos mais elaborados, sugere-se a exposição de um exemplo.

Exemplo 1.

Seja $\sqrt{\sqrt{6}-1}$ o número proposto. Faça $x = \sqrt{\sqrt{6}-1}$. Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$
\begin{aligned}
x = \sqrt{\sqrt{6}-1} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 = \left(\sqrt{\sqrt{6}-1}\right)^2 && (1)\\
&\Leftrightarrow \quad x^2 = \sqrt{6}-1 && (2)\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+1 = \sqrt{6} && (3)\\
&\Leftrightarrow \quad (x^2+1)^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 && (4)\\
&\Leftrightarrow \quad x^4+2x^2+1 = 6 && (5)\\
&\Leftrightarrow \quad x^4+2x^2-5 = 0 && (6)
\end{aligned}
$$

Portanto, $P(x) = x^4 + 2x^2 - 5$ é o polinômio que possui o número $\sqrt{\sqrt{6}-1}$ como uma de suas raízes.

Feito isso, o(a) professor(a) irá verificar, junto aos estudantes, os métodos e os resultados encontrados do problema proposto e generalizar o problema para números racionais, isto é:

i. Dado a um número inteiro, este é raiz do polinômio $A(x) = x - a$;

ii. Dado $\frac{p}{q}$ um número racional, este é raiz do polinômio $B(x) = qx - p$.

No que segue, deverá ser realizada uma discussão sobre a impossibilidade de realizar o processo com os números e e π, mesmo que tenha sido possível encontrar polinômios para outros números irracionais propostos (itens *e*, *f*, *g* e *h*). Diante desse contexto, o estudante consegue deduzir que todo racional é raiz de um polinômio, mas nem todo irracional possui essa propriedade, o que induz a conclusão de que os irracionais podem ser divididos em dois grupos: aqueles que são raízes de polinômios e aqueles que não são.

Assim, os conceitos a serem trabalhados devem ser definidos formalmente, a saber, a definição de números algébricos como todo número que é raiz de um polinômio de coeficientes inteiros e de números transcendentes como aqueles que não satisfazem essa condição, além de suas propriedades aritméticas, conforme será exposto a seguir. Além disso, após expor a definição de número transcendente, o problema discutido permite concluir que todo número transcendente é irracional, no entanto, a recíproca não é verdadeira.

Definição 1.

Um número real é dito algébrico quando é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros, isto é, se dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existe um polinômio $P(x)$ com coeficientes inteiros tal que $P(\alpha) = 0$. O conjunto dos números algébricos é denotado por $\overline{\mathbb{Q}}$.

Definição 2.

Um número real é transcendente quando não é algébrico.

Após conhecer, formalmente, os conceitos de números algébricos e transcendentes, o próximo passo será investigar as propriedades de fechamento de cada conjunto. Apesar do conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$ ser formado por racionais e parte dos irracionais, é fechado em relação às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero). Em contrapartida, tem-se o conhecimento de que tais propriedades não são satisfeitas no conjunto dos números irracionais. Segue disso que o conjunto dos números transcendentes também não possui essas propriedades, uma vez que seus elementos são números irracionais. Dessa forma, sobre as propriedades aritméticas desses conjuntos, temos as seguintes proposições:

Proposição 1 (Aritmética dos algébricos).[1]

Sejam α, β números algébricos não nulos. Temos:

i. $\alpha \pm \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$;
ii. $\alpha\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$;
iii. $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}$;
iv. $\alpha^m \in \overline{\mathbb{Q}}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.
v. $\alpha^{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$, para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Proposição 2 (Aritmética entre transcendentes e algébricos).

Sejam $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} - \{0\}$ e $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$. Então,

i. $\alpha \pm T \notin \overline{\mathbb{Q}}$;
ii. $\alpha T \notin \overline{\mathbb{Q}}$;

[1] A demonstração desta proposição foge do escopo deste artigo, no entanto, pode ser encontrada em Santos (2023).

iii. $T^{-1} \notin \overline{\mathbb{Q}}$;

iv. $T^n \notin \overline{\mathbb{Q}}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$;

v. $T^{\frac{p}{q}} \notin \overline{\mathbb{Q}}$, qualquer que seja $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

A demonstração a seguir será feita por contradição. Sugere-se que tal método seja abordado antes de sua aplicação, de modo que facilite a compreensão dos estudantes acerca do processo.

Demonstração:

(i) Suponha que $\alpha \pm T \in \overline{\mathbb{Q}}$. Considere que $\alpha + T = K_1$, e $\alpha - T = K_2$ onde K_1 e K_2 são números algébricos. Segue disso que $K_1 - \alpha = K_1 + (-\alpha) = T$ e $\alpha + (-K_2) = T$, contradizendo o fato de que $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$, pela proposição anterior. Logo, $\alpha \pm T \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

(ii) Suponhamos que $\alpha T \in \overline{\mathbb{Q}}$. Daí, $\alpha T = K$, com K algébrico. Multiplicando ambos os membros da última igualdade por α^{-1} , obtemos:

$$\alpha\alpha^{-1}T = K\alpha^{-1} \Leftrightarrow T = K\alpha^{-1}. \quad (7)$$

Mas α^{-1} é algébrico, e, portanto, $K\alpha^{-1}$ também o é, o que implica que T seria algébrico, uma contradição. Portanto, $\alpha T \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

(iii) Suponha que T^{-1} fosse um número algébrico K. Então $T^{-1} = K$ e multiplicando essa igualdade por T, teríamos

$$T^{-1} = K \Leftrightarrow TT^{-1} = KT \Leftrightarrow 1 = KT. \quad (8)$$

Assim, por (ii), concluiríamos que 1 é transcendente, um absurdo. Logo, $T^{-1} \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

(iv) Suponha, por absurdo, que $T^n \in \overline{\mathbb{Q}}$. Então existe um polinômio $P(x)$, de grau m, com coeficientes racionais $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tal que $P(T^n) = 0$. Daí,

$$P(T^n) = a_m(T^n)^m + a_{m-1}(T^n)^{m-1} + \cdots + a_1T^n + a_0 = 0. \qquad (9)$$

Considere o polinômio $R(x) = a_mx^{mn} + a_{m-1}x^{mn-n} + \cdots + a_1x^n + a_0$, de grau mn. Desenvolvendo $P(T^n)$, obtemos

$$P(T^n) = a_mT^{mn} + a_{m-1}T^{mn-n} + \cdots + a_1T^n + a_0 = R(T) = 0 \qquad (10)$$

isto é, T é raiz de $R(x)$, contradizendo o fato de que $T \notin \overline{\mathbb{Q}}$. Portanto, $T^n \notin \overline{\mathbb{Q}}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(v) Suponhamos $T^{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$ e considere, sem perda de generalidade, $q > 0$. Assim, existe $K \in \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $T^{\frac{p}{q}} = K$. Elevando ambos os membros dessa igualdade ao expoente q, obtemos:

$$\left(T^{\frac{p}{q}}\right)^q = K^q \iff T^p = K^q. \qquad (11)$$

Todavia, pelo item (iv) da proposição anterior, $K^q \in \overline{\mathbb{Q}}$, e pelo item (iv) desta proposição, $T^p \notin \overline{\mathbb{Q}}$, uma contradição. Portanto, $T^{\frac{p}{q}} \notin \overline{\mathbb{Q}}$, qualquer que seja $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

■

Corolário: sejam $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Então $\alpha^{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$, qualquer que seja $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Demonstração. Suponhamos que $\alpha^{\frac{p}{q}} \notin \overline{\mathbb{Q}}$ e consideremos, sem perda de generalidade, $q > 1$. Pelo item (iv) da proposição 2

$$\left(\alpha^{\frac{p}{q}}\right)^q \notin \overline{\mathbb{Q}}, \text{ qualquer que seja } q \in \mathbb{N}.$$

Entretando, pelo item (iv) da proposição 1

$$\left(\alpha^{\frac{p}{q}}\right)^q = \alpha^p \in \overline{\mathbb{Q}}, \text{ para todo } p \in \mathbb{Z},$$

Uma contradição. Portanto, $\alpha^{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

4.2 Conhecendo potências transcendentes

Os estudos sobre potenciação passam a fazer parte da vida do estudante desde o 6º ano do Ensino Fundamental. No decorrer dos estudos acerca dos conjuntos numéricos é totalmente plausível o surgimento de perguntas sobre os resultados de potências como $2^{\sqrt{2}}$ ou 5^{π}, por exemplo, além de qual o conjunto que esses números pertencem.

Em 1900, o matemático David Hilbert listou, durante a realização do Congresso Internacional de Matemáticos, 23 problemas, todos sem solução até aquela data. O 7º problema questionava a respeito da natureza do número $2^{\sqrt{2}}$. Essa questão foi respondida em 1930, quando R. Kuzmin e C. L. Siegel provaram, de maneira independente, que qualquer número da forma $a^{\sqrt{n}}$ é transcendente, quando a é um algébrico não nulo e diferente de 1, e n é um inteiro positivo não quadrado.

Quatro anos depois, também de maneira independente, os matemáticos Alexander Gelfond e Theodor Schneider generalizaram esse resultado, confirmando mais uma infinidade de números transcendentes. Tal generalização é conhecida como o *Teorema de Gelfond-Schneider,* enunciado a seguir.

Teorema 1 (Gelfond-Schneider).
Dados α, β, com α algébrico diferente de zero e um e β um algébrico a menos dos racionais, os números da forma α^{β} são transcendentes.

Dando continuidade na formalização do conteúdo, deve ser enunciado o Teorema de Gelfond-Schneider, incluindo o seu contexto histórico, conforme foi exposto anteriormente. Essa abordagem permitirá que os estudantes construam infinitos transcendentes com base em seus conhecimentos prévios. Além disso, a exposição do Teorema de Gelfond-Schneider permite que o estudante saiba a qual conjunto as potências dessa forma pertencem.

4.3 Explorando as soluções das equações da forma $x^n = n^x$

É pouco conhecida a natureza de potências da forma n^T, com $n \in \mathbb{N}$ e T transcendente. A respeito dos números 2^{π} e 2^{e}, por exemplo, ainda não se sabe se são transcendentes ou não. Nesta seção veremos que existem alguns transcendentes dessa forma.

Em Santos (2023), é feita uma investigação acerca das soluções das equações $x^n = n^x$, com $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ e $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, e ideia desta seção é trabalhar com casos particulares da equação $x^n = n^x$ baseada nesses estudos já realizados. Para isso, após a apresentação do Teorema de Gelfond-Schneider e ainda sem recorrer à utilização de recursos tecnológicos, sugira aos estudantes que analisem as soluções das equações para os casos iniciais: $x^2 = 2^x$, $x^3 = 3^x$, $x^4 = 4^x$ e $x^5 = 5^x$.

Cada uma dessas equações possui $x = n$ como uma de suas soluções, denominada *solução trivial* por Santos (2023). Notemos também que as soluções de cada equação são dadas pela intercessão das curvas x^n e n^x, o que possibilita outra maneira de verificar quais são as soluções, além de recorrer a métodos algébricos. Por exemplo, tomando o caso $n = 2$, temos a equação $x^2 = 2^x$, e a intercessão da parábola (x^2) com a exponencial (2^x) são os pontos destacados na figura 1.

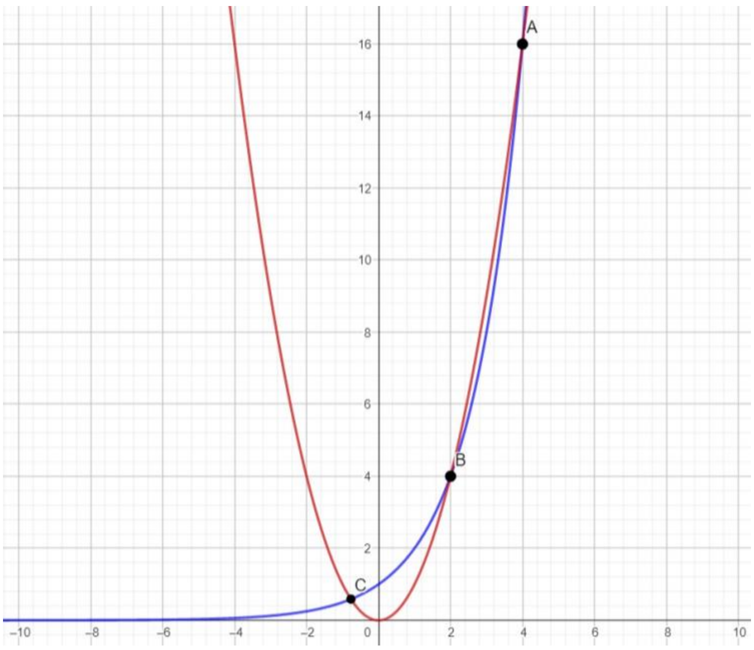

Figura 1: intercessão dos gráficos das curvas x^2 e 2^x.
Fonte: Elaborado pelos autores, no *software* Geogebra

Assim, feita a análise das soluções por parte dos estudantes, confirme com estes a existência da solução trivial para cada uma das equações e verifique se outras soluções foram encontradas e quais os métodos utilizados. No que segue, com a utilização do *software Geogebra* ou outra ferramenta para plotagem de gráficos de funções, exponha os gráficos de cada uma das equações dadas na forma de função, isto é, tomar $x^n - n^x = 0$

como $f(x) = x^n - n^x$. Assim, a visualização das raízes ficará mais clara. Vejamos o exemplo do caso $n = 2$ (figura 2).

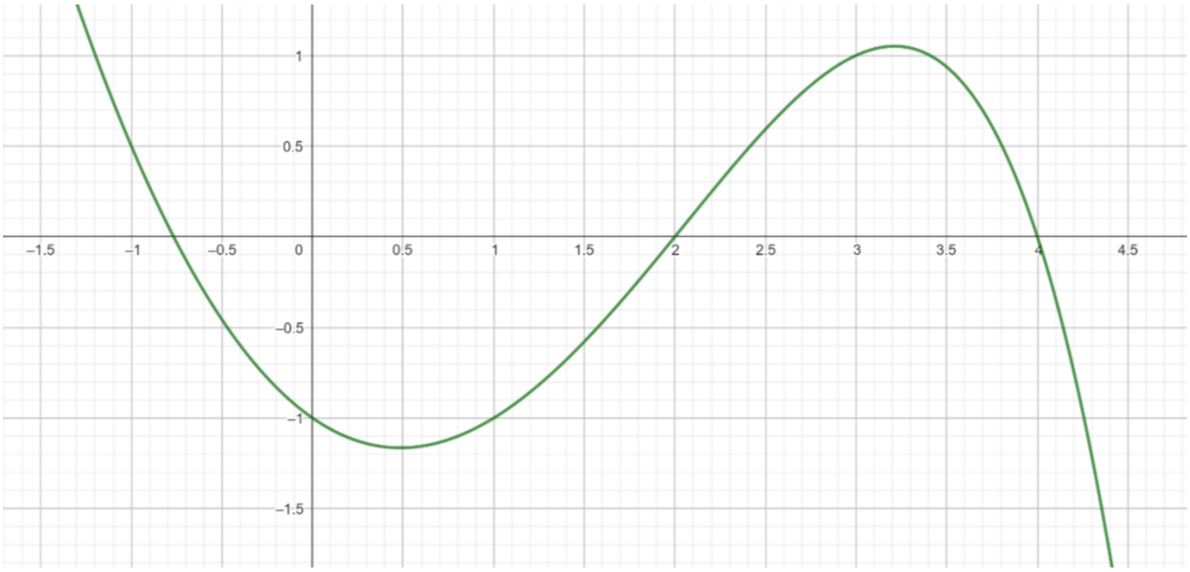

Figura 2: gráfico da função $f(x) = x^2 - 2^x$
Fonte: Elaborado pelos autores, no *software* Geogebra

O próximo passo é encontrar o valor aproximado dessas raízes. Para tal feito, serão utilizados os métodos de aproximação do cálculo numérico: o método de Newton-Raphson, para obtenção das raízes negativas quando tomamos n como um número par e, o método do Ponto Fixo, para obter as raízes positivas, dado um n qualquer, dentro das condições estabelecidas. Tais métodos fornecerão aproximações das raízes com até 16 casas decimais.

Para facilitar os cálculos das iterações desses métodos, será utilizada como ferramenta de aplicação uma plataforma de compilação[2] para linguagem Python, onde serão colados os códigos abaixo.

Códigos para obtenção das raízes negativas (n par) – utilização do método de Newton-Raphson:

```
import math
x_inicial = -1
```

[2] A plataforma é de livre escolha, mas para facilitar o acesso, sugere-se a Online GDB, que pode ser acessada diretamente no navegador, sem a necessidade de fazer o download de programas. Link de acesso: https://www.onlinegdb.com/.

```
raizes = [x_inicial]
for i in raizes:
    x_atual = i - (i**n - n**i)/(n*i - (n**i)*math.log(n))
    raizes.append(x_atual)
    if len(raizes) == 500:
        break

print(raizes)
```

Códigos para obtenção das raízes positivas (n qualquer) – utilização do método do ponto fixo:

```
x_inicial = 1
raizes = [x_inicial]
for i in raizes:
    x_atual = (n**i)**(1/n)
    raizes.append(x_atual)
    if len(raizes) == 400:
        break

print(raizes)
```

Nos códigos acima, antes de compilar, o n deve ser substituído pelo número natural do caso que você está analisando. Durante essa exposição é interessante associar as aproximações obtidas com a visualização dos gráficos das funções que estão sendo consideradas. Feito isso, a discussão parte para a justificativa de que tais soluções são transcendentes, o que justifica a dificuldade de encontrar essas raízes "manualmente".

Diante disso, conclui-se que todo número que é solução de um polinômio com coeficientes inteiros pode ser determinado sem o auxílio de programas ou ferramentas afins, os quais são ditos algébricos. No entanto, diante das discussões, depreende-se que nem todo número real é algébrico, o que permite a definição do conjunto dos números reais como a união entre o conjunto dos números algébricos e o conjunto dos números transcendentes. Essa definição torna-se distinta da usual (união entre racionais e irracionais) pelo fato de existir números irracionais algébricos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos tópicos mais discutidos nos últimos anos na esfera educacional é a autonomia, o protagonismo dos estudantes. Para desenvolver essa característica, além do engajamento do estudante, é necessário haver uma harmonia na relação professor-aluno. Para tal feito, em especial no ensino de matemática, uma das metodologias que permitem o desenvolvimento dessa autonomia é a metodologia de resolução de problemas, apresentada aqui como ferramenta essencial para o desenvolvimento da sequência didática.

Além disso, outro tópico bastante discutido é a utilização de tecnologias, que pode facilitar o processo de ensino-aprendizagem, contribuindo com a visualização e obtenção de resultados relacionados com os conteúdos estudados. Além de motivar o estudante a conhecer outros meios de buscar conteúdos, outros métodos de estudo.

Consoante a essas observações, aponta-se a exploração de conteúdos de níveis mais elevados no ensino de matemática da escola básica como forma de motivar os estudantes que tem interesse na disciplina. Uma das maneiras de trabalhar isso é através de propostas de eletivas inseridas no Novo Ensino Médio, incentivando a iniciação científica no contexto escolar.

REFERÊNCIAS

Brasil. (2017). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC.

Brasil. (1997). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: MEC/SEF.

Polya, George. (1978). *A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático.* Rio de Janeiro: Interciência.

Ripoll, Jaime Bruck; Ripoll, Cydara Cavedon & Silveira, José Francisco Porto da. (2011). *Números Racionais, Reais e Complexos*. Porto Alegre: Editora da UFRGS.

Santos, Maria Eloisa Ferreira dos. (2023). *Números transcendentes e as equações da forma* $x^n = n^x$ (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Alagoas, Arapiraca.

Zabala, Antoni. (1998). *A Prática Educativa Como Ensinar*. Porto Alegre: ArtMed.

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA
Explorando os números reais como a união entre números algébricos e transcendentes: uma abordagem para o ensino básico.

Maria Eloisa Ferreira dos Santos
Mestra em Matemática pela Universidade Federal de Alagoas (UFAL)
Professora dos anos finais do Ensino Fundamental na Escola Municipal São Geraldo, Bom Conselho-PE, Brasil
elo.santos8@hotmail.com

https://orcid.org/0000-0002-5664-7052

Alcindo Teles Galvão
Doutor em Matemática pela Universidade Federal do ABC (UFABC)
Universidade Federal de Alagoas, Campus Arapiraca, Brasil
alcindo.galvao@arapiraca.ufal.br

https://orcid.org/0000-0002-7423-020X

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Sandra de Almeida Barros, 37, Bairro Francisco Simão dos Santos Figueira, 55291-060, Garanhuns, PE, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Às instituições responsáveis pelo programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT: a Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: M. E. F. Santos
Coleta de dados: M. E. F. Santos
Análise de dados: M. E. F. Santos
Discussão dos resultados: A. T. Galvão, M. E. F. Santos
Revisão e aprovação: A. T. Galvão, M. E. F. Santos

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 24-05-2024 – Aprovado em: 24-02-2025