



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE



PAULO JOSÉ MARQUES DE SOUZA

**EXPLORANDO AS LEIS DE KEPLER E AS PROPRIEDADES DA ELIPSE COM
AUXÍLIO DO GEOGEBRA**

Arapiraca-AL

2025

PAULO JOSÉ MARQUES DE SOUZA

**EXPLORANDO AS LEIS DE KEPLER E AS PROPRIEDADES DA ELIPSE COM
AUXÍLIO DO GEOGEBRA**

Dissertação apresentado ao colegiado do mestrado profissional em ensino de matemática em rede nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), Campus Arapiraca, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José da Silva Barros

Arapiraca-AL

2025



Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus Arapiraca
Biblioteca Setorial *Campus* Arapiraca - BSCA

S729e Souza, Paulo José Marques de
Explorando as Leis de Kepler e as propriedades da elipse com auxílio do Geogebra/ Paulo José Marques de Souza. – Arapiraca, 2025.

82f.: il.

Orientador: Prof. Dr. José da Silva Barros.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas, *Campus* Arapiraca, Arapiraca, 2025.

Disponível em: Universidade Digital (UD) – UFAL (*Campus* Arapiraca).

Referências: f. 116 -125

Apêndices: f. 57-82

1. GeoGebra (Software) 2. Elipse (Geometria) 3. Geometria analítica 4. Astronomia - Matemática I. Barros, José da Silva II. Título.

CDU 51


Bibliotecário responsável: Gerlane Costa Silva de Farias
CRB - 4 / 1802

PAULO JOSÉ MARQUES DE SOUZA


Explorando as Leis de Kepler e as propriedades da elipse com auxílio do Geogebra

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática do *Campus* Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas, aprovada em 26 de fevereiro de 2025.


BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 JOSE DA SILVA BARROS
Data: 27/02/2025 13:23:03-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. José da Silva Barros
Orientador (PROFMAT-Arapiraca/UFAL)

Documento assinado digitalmente
 EMERSON DE LIMA
Data: 27/02/2025 12:19:06-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. Emerson de Lima
Membro interno (UFAL)

Documento assinado digitalmente
 MORENO PEREIRA BONUTTI
Data: 27/02/2025 10:25:20-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti
Membro interno (PROFMAT-Arapiraca/UFAL)

Documento assinado digitalmente
 TASSO DE OLIVEIRA SALES
Data: 27/02/2025 11:37:51-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. Tasso de Oliveira Sales
Membro externo (5ª GERE/AL)

Dedico a minha família e meus amigos, pelas alegrias, tristezas e dores compartilhadas. Obrigado por transformarem suas preocupações em apoio e por acreditarem em mim, mesmo quando minha maior habilidade parecia ser acumular canecas de café.

AGRADECIMENTOS

Sou grato inicialmente a Deus, por ter permitido que eu tivesse saúde e determinação para não desanimar durante a realização deste trabalho, pela minha vida, e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da realização deste trabalho.

A minha esposa Karla Souza, meus filhos Antonio Carlos, Manoel Flávio, minha Mãe Rozângela e minha irmã Alana, agradeço imensamente a essas pessoas, pela amizade incondicional e pelo apoio demonstrado ao longo de todo o período de tempo em que me dediquei a este trabalho. Que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização deste trabalho.

Aos professores do programa PROFMAT (UFAL), pelas correções e ensinamentos que me permitiram apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação para professor de matemática ao longo do curso.

Aos professores da Banca, Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti e Prof. Dr. Emerson de Lima que deram colaborações significativas para conclusão desse trabalho, em especial o meu orientador e meu colaborador que contribuíram diretamente na produção deste trabalho, me incentivando, direcionando e compartilhando suas experiências e perspectivas os professores, Dr. José Barros e Dr. Tasso de Oliveira Sales.

Aos amigos, Almir, Tales Tomé e Carlos Borges pessoas incríveis que me potencializaram como estudante, pai de família e professor de matemática, sobretudo, como ser humano. Que sempre estiveram ao meu lado, pela amizade incondicional e pelo apoio demonstrado ao longo de todo o período em que me dediquei a este trabalho.

A todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de aprendizado.

Aos meus colegas de turma e meus amigos da secretaria do programa Renilson e Everaldo por compartilharem comigo tantos momentos de descobertas, aprendizado e por todo o companheirismo ao longo deste percurso.

RESUMO

Este trabalho apresenta a importância do uso do GeoGebra como ferramenta para o estudo das cônicas, os conceitos matemáticos da elipse são essenciais para compreender as Leis de Kepler. Além disso, o Cálculo Diferencial e Integral fornece as ferramentas matemáticas necessárias para descrever a dinâmica do movimento dos planetas em torno do Sol, permitindo assim representar com precisão o sistema planetário, objeto de estudos da astronomia. Dessa forma, destaca-se as Leis de Kepler: a Primeira Lei afirma que os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos; A segunda Lei explora os conhecimentos sobre a elipse, como a excentricidade e os focos que são fundamentais para entender a variação da velocidade dos planetas; já a terceira Lei de Kepler relaciona o período orbital com o tamanho da órbita e utiliza os conceitos de geometria analítica que são indispensáveis para explicar a dinâmica celeste e a gravitação universal. O software GeoGebra se apresenta como um instrumento poderoso que uni a matemática a astronomia, auxiliando na visualização das orbitas e na resolução de problemas; tornando o aprendizado mais dinâmico e acessível, ajudando os alunos do ensino básico a compreender conceitos fundamentais, como as Leis de Kepler, a gravitação universal e a geometria da cônicas e das órbitas celestes.

Palavra-chave: Leis de Kepler; Geogebra; elipse.

ABSTRACT

This paper presents the importance of using GeoGebra as a tool for studying conics. The mathematical concepts of the ellipse are essential for understanding Kepler's Laws. In addition, Differential and Integral Calculus provide the mathematical tools necessary to describe the dynamics of the movement of planets around the Sun, thus allowing for the accurate representation of the planetary system, the object of astronomy studies. Thus, Kepler's Laws stand out: the First Law states that the planets move in elliptical orbits with the Sun at one of the foci; the Second Law explores knowledge about the ellipse, such as eccentricity and foci, which are fundamental for understanding the variation in the speed of the planets; Kepler's Third Law relates the orbital period to the size of the orbit and uses the concepts of analytical geometry that are indispensable for explaining celestial dynamics and universal gravitation. GeoGebra software is a powerful tool that combines mathematics and astronomy, helping to visualize orbits and solve problems; making learning more dynamic and accessible, helping elementary school students understand fundamental concepts such as Kepler's Laws, universal gravitation and the geometry of conics and celestial orbits.

Keyword: Kepler's Laws; GeoGebra; ellipse.

“A percepção do desconhecido é a mais fascinante das experiências. O homem que não tem os olhos abertos para o misterioso passará pela vida sem ver nada”. Albert Einstein

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Cones interceptado por um plano, destacando as cônicas	13
Figura 2 - Resumo de cônicas	16
Figura 3 - Parâmetros da Elipse	18
Figura 4 - Modelo Astronômico de Ptolomeu	21
Figura 5 - Modelo Astronômico de Copérnico	22
Figura 6 - Órbita a ser percorrida pelo planeta em torno do Sol	24
Figura 7 - Diagrama de vetores	25
Figura 8 - Modelo ilustrativo da Lei das Áreas	28
Figura 9 - Intervalo de tempo da Área varrida	28
Figura 10 - Relação entre área e ângulo	29
Figura 11 - Modelo orbital de excentricidade nula	30
Figura 12 - Órbita elíptica	33
Figura 13 - Excentricidade da Elipse	33
Figura 14 - Diretrizes da Elipse	35
Figura 15 - Atração gravitacional	36
Figura 16 - Ilustração dos parâmetros geométricos da Elipse:	43
Figura 17 - Animação da órbita com alta excentricidade	46
Figura 18 - Animação da órbita com baixa excentricidade	46
Figura 19 - Interface do Geogebra	39
Figura 20 - Construção da Elipse: Uso da barra do Software GeoGebra	41
Figura 21 - Construção da Elipse: Escolha da localização	41
Figura 22 - Construção da Elipse: Desenho da Elipse	42
Figura 23 - Ideia do modelo planetário no Software GeoGebra	43
Figura 24 - Ilustração da Lei das Órbitas	44
Figura 25 - Animação com os dados da Solução do Problema 1.....	45
Figura 26 - Visualização dos dados do Problema 2 com auxílio do GeoGebra	46
Figura 27 - Animação com os elementos do Problema 2	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	CÔNICAS	13
2.1	Uma breve abordagem das cônicas	14
2.2	Parâmetros da Elipse	16
2.2.1	Equação da Elipse	18
3	KEPLER E O MOVIMENTO DOS PLANETA	21
3.1	Uma curta passagem pelo Geocentrismo e Heliocentrismo	21
3.2	Leis de Kepler	23
3.3	Primeira Lei de Kepler	24
3.4	Segunda Lei de Kepler	27
3.5	Terceira Lei de Kepler	32
3.6	A importância das Leis de Kepler para Isaac Newton	36
4	O GEOGEBRA	39
4.1	Construção da Elipse com o GeoGebra	40
4.2	O Software GeoGebra como ferramenta de ensino das Leis de Kepler	42
5	PROBLEMAS RELACIONADOS AS LEIS DE KEPLER	48
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
7	REFERÊNCIA	55
	APÊNDICE A - PRODUTO EDUCACIONAL	56

1 INTRODUÇÃO

Muitos alunos enfrentam desafios ao tentar compreender problemas que envolvem as Leis de Kepler, por conta de não ter conhecimentos sobre os conceitos de cônicas, em especial o estudo da elipse, que no momento atual, a BNCC não cita "cônicas" diretamente em todos os casos, mas ela orienta o desenvolvimento de habilidades relacionadas à análise de gráficos, equações, funções e relações geométricas no plano, o que abre espaço para o estudo das cônicas, principalmente em escolas que oferecem um currículo mais aprofundado em matemática, embora seja um conteúdo relevante para a formação matemática do ensino médio, muitos alunos trazem consigo a ideia de que as órbitas são circulares e apresentam dificuldades em entender por exemplo, que os planetas seguem trajetórias elípticas, com o Sol localizado em um dos focos, deixando claro que conhecimento prévio é extremamente importante, tanto no processo de aprendizagem quanto na resolução de problemas. Ele funciona como uma base sobre a qual novas informações são construídas.

Assim, as animações produzidas através do Software GeoGebra apresentadas nesse trabalho, será de suma importância para visualização planetária proposta, tornando conceitos abstratos mais visuais, dinâmicos e interativos. Seu uso pode melhorar significativamente a compreensão dos alunos e estimular os interesses pelos conceitos abordados. Desse modo, o uso de tecnologias educacionais, como o software GeoGebra, aliado à contextualização e à interdisciplinaridade, pode transformar o modo como os alunos compreendem conteúdos complexos, como as Leis de Kepler que foram demonstrados por meio de experimentos e matemática pura como o cálculo diferencial e integral.

A importância do cálculo diferencial e integral para as Leis de Kepler está no fato de que, embora Kepler tenha formulado suas Leis com base em observações e geometria, foi o cálculo que permitiu entender profundamente o "porquê" dessas Leis funcionarem e explicá-las de forma precisa. A matemática é uma ciência fundamental que estuda padrões, relações, formas e quantidades. Ela está presente em diversas áreas da vida e do conhecimento, desde a tecnologia até a natureza. Assim, o uso de recursos visuais e interativos será essencial no processo de aprendizagem.

O estudo tem como objetivo apresentar aos alunos, a importância das cônicas em especial a elipse para melhor entendimento das Leis de Kepler, permitindo analisar o movimento planetário e a relação entre as forças gravitacionais e as órbitas celestes por meio do GeoGebra, desenvolvendo habilidades matemáticas e geométricas para o aumento da capacidade de resolver problemas. Para isso, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar a importância dos conteúdos de cônicas em especial o estudo da elipse para o entendimento das órbitas dos planetas;
- Mostrar por meio do Software GeoGebra a forma elíptica das órbitas planetárias, representando a trajetória de um planeta ao redor do Sol e destacando o Sol em um dos focos da elipse, mostrar também que a excentricidade das órbitas pode variar e como isso afeta a forma da elipse;
- Mostrar com o GeoGebra que o raio vetor que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais;
- Propor um modelo dinâmico no qual o planeta percorra a órbita em diferentes posições e explorar a variação da velocidade do planeta ao longo da órbita (velocidade maior próximo ao periélio e menor no afélio);
- Apresentar problemas de física que possam ser resolvidos por meio do cálculo diferencial e integral, mostrando que o cálculo é uma ferramenta indispensável para a modelagem e a resolução desses problemas.
- Ajudar a alunos e professores a desenvolverem uma intuição sobre os conceitos físicos que estão por trás dos problemas e como o cálculo pode ser usado para descrevê-los matematicamente;
- Propor problemas voltados a educação básica para que os alunos possam praticar e solidificar o conhecimento adquirido do conteúdo proposto de forma clara, objetiva e dinâmica.

Este trabalho apresenta uma proposta com estratégias didáticas para o ensino da elipse e sua relação com as Leis de Kepler, visando facilitar a compreensão dos conceitos astronômicos e matemáticos envolvidos.

Desse modo, o trabalho está organizado da seguinte forma:

A primeira seção apresenta a problemática, objetivos, justificativa, a relevância e a estrutura da pesquisa.

Na segunda seção, serão apresentadas as cônicas, em especial a elipse, que é um conceito algébrico/geométrico importante na matemática e na astronomia, por suas inúmeras aplicações no mundo real e essencial para entender os movimentos planetários.

Em seguida, a terceira seção, aborda os sistemas geocêntrico e heliocêntrico. Posteriormente, as três Leis de Kepler com o auxílio do cálculo diferencial e integral, finalizando a terceira seção com a teoria da gravitação universal de Isaac Newton que continua sendo fundamental para a astronomia moderna e a exploração espacial.

A quarta seção, nos traz uma breve ideia da importância do software GeoGebra como uma ferramenta poderosa para a criação de simulações interativas que auxiliam no ensino e aprendizagem nos conceitos de matemática e física. Seu uso facilita a visualização de conceitos abstratos, melhora a compreensão e torna o aprendizado mais dinâmico.

Na quinta seção, serão abordados dois problemas sobre as Leis de Kepler do livro de James Stewart, Cálculo volume 2 páginas 785 e 786, eles apresentam pela terceira Lei de Kepler quão grandemente, o cálculo diferencial e integral é importante para encontrar as soluções e como o software GeoGebra pôde contribuir visualmente com suas animações.

As Considerações Finais e as Referências Bibliográficas desse trabalho, se encontram na quinta e sexta seção respectivamente.

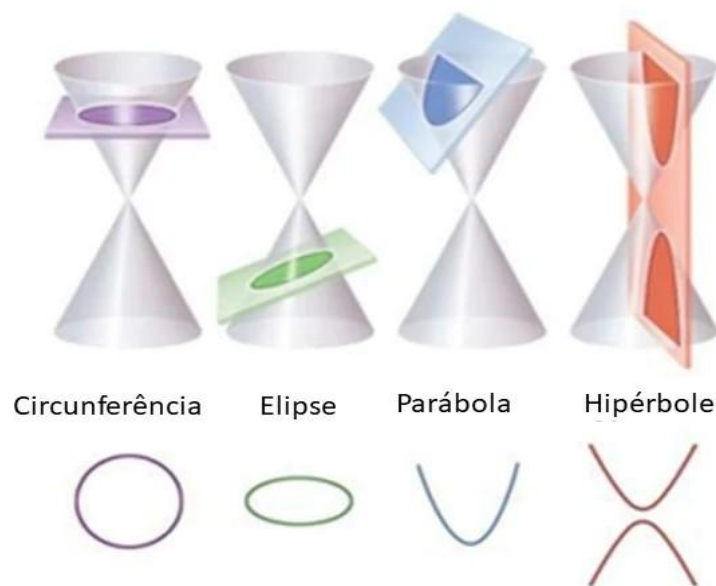
Finalmente, em anexo, no apêndice I, foi apresentado o Produto Educacional, que envolvem problemas e soluções com o auxílio do software GeoGebra sobre astronomia, explorando a excentricidade da órbita elíptica dos planetas, distância do sol ao afélio e o periélio e conhecimentos que definem cada Lei de Kepler.

Portanto, o uso de animações nas Aulas de Matemática e Física não apenas torna o aprendizado mais atrativo, mas também melhora a compreensão e o desempenho dos alunos. Essa abordagem prepara melhor os alunos para a resolução de problemas e para o uso da tecnologia na aprendizagem.

2 CÔNICAS

As secções cónicas muitas vezes referidas apenas como cónicas, resultam de um tipo de curva que é obtida através da interseção de um plano com um cone duplo. Consoante ao ângulo de interseção que o plano produz com o cone, pode-se obter uma circunferência, uma Elipse, uma parábola ou uma Hipérbole. Existem alguns casos especiais, que não é abordado nesse trabalho, em que a interseção resulta num ponto ou numa linha reta.

Figura 1 - Cones interceptado por um plano, destacando as cónicas.



Fonte: <https://encurtador.com.br/IHJuR> (2024)

Existem diversas aplicações práticas das cónicas, aqui destaca-se alguns exemplos: Johannes Kepler descobriu em 1609 que as órbitas dos planetas em torno do sol consistem numa elipse; Galileo Galilei publicou em 1638 um livro em que descrevia que a trajetória de um projétil, (por exemplo uma bala de canhão), podia ser calculada através da parábola; as antenas parabólicas usam as propriedades das parábolas para poder captar o sinal enviado pelos satélites; alguns tipos de telescópios usam dois espelhos, um maior que é parabólico e outro menor que é hiperbólico. Estes são apenas alguns exemplos do uso das cónicas que possuem aplicações práticas em várias áreas no domínio da Física, da Química, da Economia e da Engenharia.

O estudo das cónicas permite compreender e modelar fenômenos reais com precisão matemática. Elas são uma ponte entre teoria e prática, sendo essenciais para o avanço da ciência

e da tecnologia. A importância do estudo da elipse, parábola, hipérbole e circunferência vai muito além da geometria e essas curvas aparecem naturalmente em diversas áreas da matemática, física, astronomia, engenharia e até na natureza.

2.1 Uma breve abordagem das cônicas

O estudo das cônicas é de grande importância tanto no campo da matemática quanto em diversas aplicações práticas em outras áreas do conhecimento. As cônicas, que incluem o círculo, elipse, parábola e hipérbole, são figuras geométricas fundamentais na geometria analítica e possuem um papel crucial em fenômenos naturais, como o movimento dos planetas, bem como em tecnologias modernas. Aqui estão os principais pontos sobre sua importância:

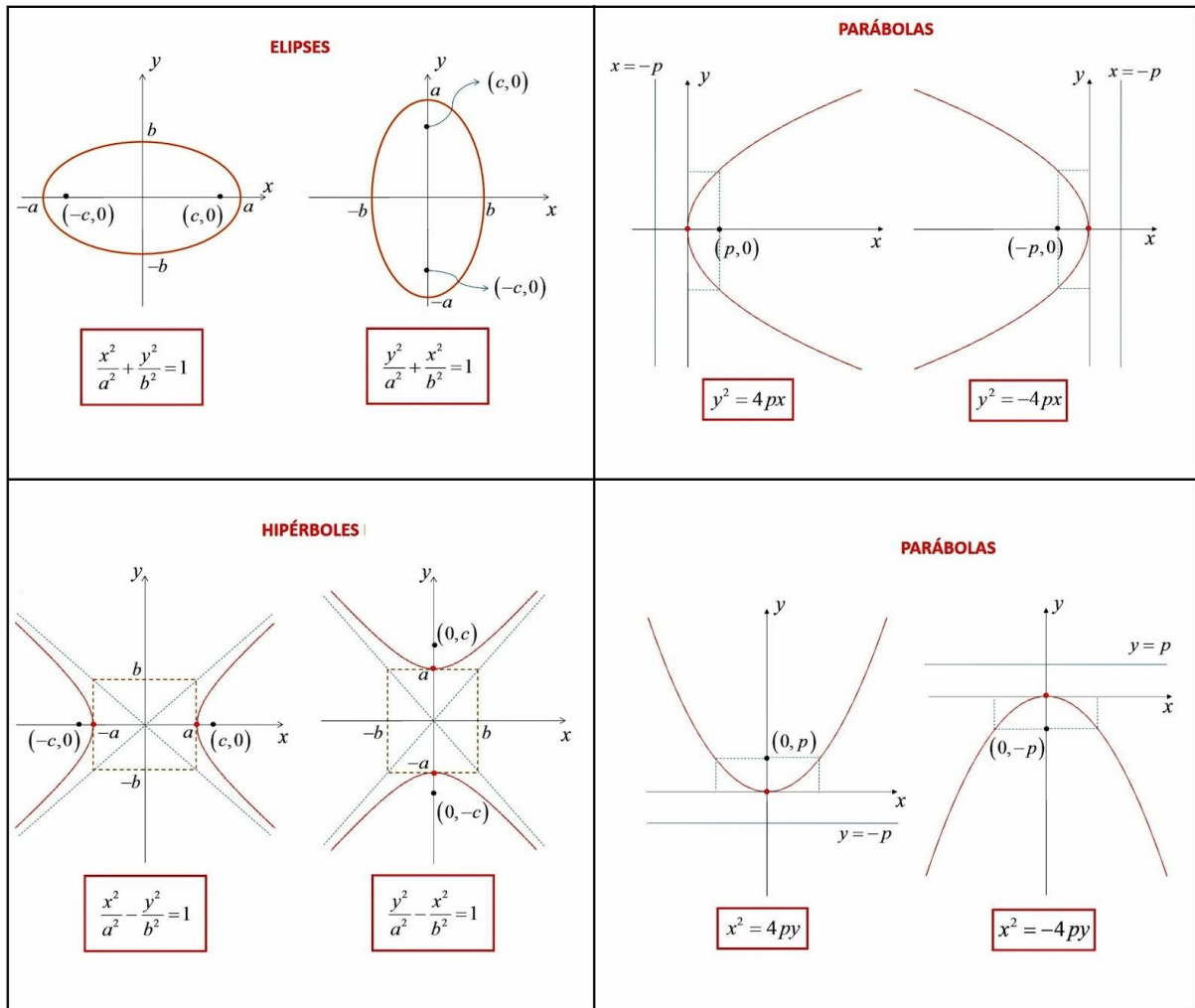
- **Fundamentos da Geometria Analítica:** O estudo das cônicas é essencial para o entendimento da Geometria Analítica, que conecta álgebra e geometria por meio de equações algébricas no plano cartesiano. As cônicas ajudam a entender conceitos como distância, ângulos e simetrias, além de ser a base para o estudo dos sólidos de revolução, em especial as quádricas.
- **Aplicações na Astronomia:** As órbitas planetárias são elípticas, conforme descrito nas Leis de Kepler, e sem a compreensão da elipse, seria impossível entender o movimento dos planetas ao redor do Sol. Cônicas também aparecem em órbitas de satélites e no estudo de trajetórias espaciais.
- **Relevância em Engenharia e Tecnologia:** Cônicas são usadas em designs de antenas parabólicas, refletores e em dispositivos ópticos, como lentes e espelhos, para focar ou direcionar ondas de luz, som ou outras radiações. O design de estradas e pontes também pode ser influenciado pelo estudo das cônicas, principalmente em termos de trajetórias de movimento e eficiência estrutural.
- **Aplicações em Física:** Cônicas estão presentes em fenômenos ópticos, como o comportamento da luz em espelhos elípticos ou parabólicos. São importantes também em mecânica clássica, como no estudo do movimento de projéteis, refletindo propriedades como a simetria e as Leis de reflexão.
- **Desenvolvimento do Raciocínio Matemático:** O estudo das cônicas ajuda no desenvolvimento do pensamento lógico e crítico, pois envolve a resolução de equações quadráticas, análise de gráficos e compreensão de transformações geométricas. Também promove a habilidade de trabalhar com modelagem matemática, essencial em várias áreas científicas e tecnológicas.

Como as cônicas são curvas geométricas formadas pela interseção de um plano com um cone de dupla geratriz, conforme mostrado na Figura 2, que possuem características únicas:

- Elipse - é formada pela interseção de um plano com um cone em um ângulo oblíquo. Ela pode ser vista como uma versão "achatada" de um círculo. A elipse tem dois focos fixos, e a soma das distâncias de qualquer ponto da elipse aos dois focos é constante. A sua excentricidade (e) descreve o grau de "achatamento" da elipse. Para um círculo, a excentricidade é zero.
- Hipérbole - é formada pela interseção de um plano com um cone em um ângulo maior do que o ângulo da geratriz. Ela é composta por duas ramificações abertas. A hipérbole tem duas ramificações que se afastam de forma simétrica em relação aos seus eixos, a diferença das distâncias de qualquer ponto da hipérbole aos dois focos é constante e possui assíntotas (linhas retas que a hipérbole se aproxima, mas nunca cruza).
- Parábola – é formada pela interseção de um plano com um cone quando o plano é paralelo a uma geratriz do cone. É uma curva aberta, simétrica em relação ao seu eixo. Ela possui um vértice (ponto de mínima ou máxima curvatura) e um foco, que é o ponto de reflexão para raios paralelos que incidem na parábola e tem simetria em relação a uma linha chamada eixo de simetria.

A Figura 2 apresenta os gráficos das cônicas e suas equações principais, essas equações representam parte desse estudo, e cada uma delas é fundamental para a compreensão de diversos conceitos na área da matemática, como a que estamos apresentando nesse trabalho, onde o foco principal será o estudo da elipse, figura geométrica que representa a órbita dos planetas e corpos que compõe o sistema solar.

Figura 2 - Resumo de Cônicas (Elipses, Parábolas e hipérboles)



Fonte: <https://encurtador.com.br/TBrKV> (2025)

O estudo das cônicas é fundamental para o entendimento da matemática e suas aplicações no mundo real, especialmente nas áreas de física, engenharia, astronomia e até mesmo no design de tecnologias. Além disso, a geometria das cônicas oferece uma base sólida para outras áreas matemáticas, como as funções e as transformações, contribuindo para o desenvolvimento de um raciocínio matemático mais aprofundado.

2.2 Parâmetros da Elipse

O estudo da elipse foi fundamental para que Kepler pudesse formular corretamente suas leis do movimento planetário, especialmente a primeira Lei. Antes dele, acreditava-se que os corpos celestes seguiam órbitas circulares perfeitas, o que não explicava com precisão os dados observacionais.

Ao entender a geometria da elipse, Kepler percebeu que ela se ajustava muito melhor às posições reais dos planetas observadas por Tycho Brahe. A principal característica da elipse que Kepler aproveitou foi o fato de ela ter dois focos, e que o Sol está localizado em um desses focos, não no centro da órbita, como se pensava nos modelos circulares, por esse motivo será dado mais atenção ao estudo da elipse, não que seja mais importante para o estudo de cônicas, mas sim pela relevância neste trabalho.

Em uma elipse, os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos, e a distância entre eles é igual a $2c$. Sua definição formal é: dados os pontos F_1 e F_2 , a elipse é o conjunto de pontos P em que vale a seguinte expressão:

$$d(PF_1) + d(PF_2) = 2a \quad (1)$$

Isso significa que a elipse é o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias até os focos é igual a uma constante. Em outras palavras, o ponto P pertence a uma elipse se a soma da distância de P até F_1 com a distância de P até F_2 é igual a $2a$.

De acordo com a Figura 3, apresentada abaixo, destacamos os elementos da elipse.

- Foco: São os pontos F_1 e F_2 ;
- Distância focal: é a distância $2c$ entre os pontos;
- Centro: É o ponto médio C do segmento $\overline{F_1F_2}$;
- Eixo maior: É o segmento $\overline{A_1A_2}$ de comprimento $2a$ (o segmento $\overline{A_1A_2}$ contém os focos e os eixos externos);
- Eixo menor: É o segmento $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$ (o segmento $\overline{B_1B_2}$ é ortogonal ao segmento $\overline{A_1A_2}$ no ponto C).
- Vértices: São os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 ;

Excentricidade: A excentricidade e exprime o “achatamento” da elipse e é dada por:

$$e = \frac{c}{a}$$

Em toda a elipse vale a relação pitagórica:

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad (2)$$

onde,

- a é a medida do semi-eixo maior;
- b é a medida do semi-eixo menor;

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Passando o segundo termo da equação acima para o segundo membro,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ambos ao quadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2$$

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividindo ambos os lados por 4.

$$xc = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevamos, novamente, ambos os lados ao quadrado:

$$a^4 - 2a^2xc + c^2x^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$

$$a^4 + x^2(c^2 - a^2) = a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

Multiplicando por -1:

$$\begin{aligned} x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

Se Dividirmos ambos os lados por $a^2(a^2 - c^2)$, teremos:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1.$$

(5)

Da relação (2), temos:

$$b^2 = a^2 - c^2. \tag{6}$$

Substituindo (6) em (5), apresentaremos duas equações reduzidas. A primeira delas é válida para o caso em que os focos dessa figura estão sobre o eixo x e o centro da elipse coincide com a origem de um plano cartesiano:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A segunda equação reduzida é válida para os casos em que os vértices da elipse estão sobre o eixo y e seu centro sobre a origem do plano cartesiano.

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Assim conclui-se o estudo da elipse, curva essencial não só para a matemática, mas também para a compreensão do universo. Foi graças a ela que Kepler pôde descrever corretamente o movimento dos planetas, revelando que o cosmos segue Leis geométricas elegantes e precisas. Além disso, as propriedades geométricas da elipse permitem modelar fenômenos reais com precisão, desde trajetórias orbitais até aplicações em engenharia e óptica. Portanto, dominar os elementos e características da elipse não só amplia o conhecimento geométrico, mas também contribui para o entendimento do universo e o avanço tecnológico. A elipse, portanto, não é apenas uma curva, mas uma ponte entre a matemática e a astronomia.

3 KEPLER E O MOVIMENTO DOS PLANETA

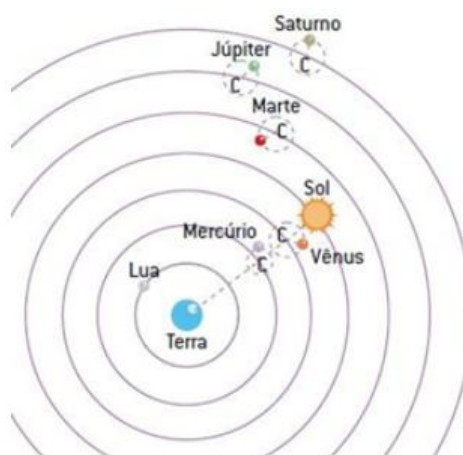
3.1 Uma curta passagem pelo Geocentrismo e Heliocentrismo

Durante a Idade Média, a visão predominante do universo era baseada no modelo geocêntrico de Ptolomeu, onde a Terra era o centro do universo e os planetas giravam em órbitas circulares. No século XVI, Nicolau Copérnico propôs um modelo heliocêntrico, onde o Sol era o centro e os planetas orbitavam ao seu redor.

No entanto, as previsões desse modelo ainda não eram precisas, pois consideravam órbitas perfeitamente circulares, o que não correspondia às observações astronômicas.

Cláudio Ptolomeu (90-168 d.C.) foi um astrônomo, matemático e geógrafo grego que viveu em Alexandria, Egito, durante o Império Romano. Ele é mais conhecido por seu modelo geocêntrico do universo, que dominou a astronomia por mais de 1.400 anos. O modelo de Ptolomeu foi a principal explicação do movimento dos astros durante a Antiguidade e a Idade Média. Ele afirmava que a Terra era o centro do universo e que o Sol, a Lua, os planetas e as estrelas giravam ao seu redor em órbitas circulares.

Figura 4 - Modelo astronômico de Ptolomeu.

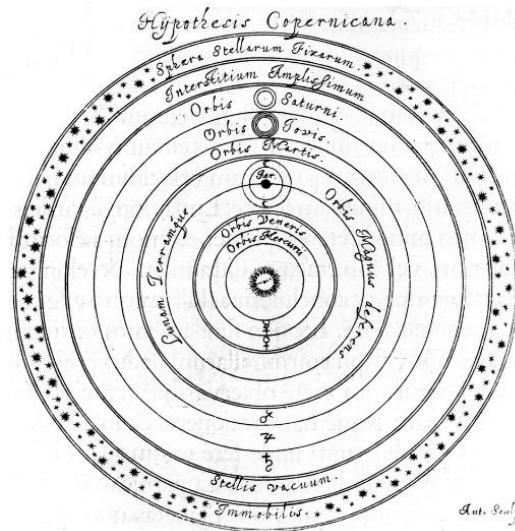


Fonte: <https://encr.pw/0pWz2> (2024).

O modelo de Ptolomeu foi um marco na história da astronomia, mas sua complexidade e imprecisão levaram à sua substituição. Hoje sabemos que a Terra não está no centro do universo, mas orbita o Sol dentro de uma galáxia gigantesca. Mesmo que suas teorias tenham sido superadas, Ptolomeu foi um dos grandes pensadores da história e ajudou a moldar o conhecimento científico da humanidade. Chegando no século XVI, Nicolau Copérnico (1473-

1543) revolucionou a astronomia ao propor o modelo heliocêntrico, no qual o Sol está no centro do universo e os planetas, incluindo a Terra, giram ao seu redor. Essa ideia contrariava o modelo geocêntrico de Ptolomeu, que era aceito há mais de 1.400 anos.

Figura 5 - Modelo astronômico de Copérnico



Fonte: <https://11nq.com/DgfEU> (2024).

O modelo de Copérnico foi a base para a astronomia moderna e ajudou a transformar nossa compreensão do universo. Suas ideias foram confirmadas com o tempo e hoje sabemos que o Sol não está no centro do universo, mas sim do Sistema Solar, e que nossa galáxia é apenas uma entre bilhões no cosmos. Hoje sabemos que nem o Sol está no centro do universo, mas sim que ele é apenas uma estrela dentro da Via Láctea, que, por sua vez, é uma entre bilhões de galáxias.

Os modelos astronômicos foram fundamentais para o desenvolvimento das Leis de Kepler, que descrevem o movimento dos planetas ao redor do Sol. A evolução do pensamento astronômico, do geocentrismo ao heliocentrismo, permitiu que Kepler formulasse suas Leis com base em observações mais precisas. As Leis de Kepler surgiram da necessidade de descrever com precisão as órbitas planetárias no modelo heliocêntrico. A teoria copernicana ainda utilizava órbitas circulares, o que não correspondia às observações reais. Johannes Kepler, ao analisar os dados coletados por Tycho Brahe, concluiu que as órbitas eram elípticas, não circulares, e formulou três Leis fundamentais.

Assim, Kepler conseguiu explicar com precisão o movimento planetário sem a necessidade de epiciclos (movimentos circulares adicionais) usados no geocentrismo, resolvendo as discrepâncias entre o modelo copernicano e as observações astronômicas,

fornecendo base para que Isaac Newton desenvolvesse a Lei da Gravitação Universal, unificando a mecânica celeste e terrestre.

3.2 Leis de Kepler

As Leis de Kepler representam um marco na história da ciência e da astronomia, pois foram as primeiras a descrever com precisão os movimentos dos planetas em torno do Sol com base em observações empíricas. Ao abandonar a ideia de órbitas circulares perfeitas, Kepler mostrou que os corpos celestes seguem órbitas elípticas (1ª Lei), que se movimentam com velocidade variável dependendo da distância ao Sol (2ª Lei) e que existe uma relação matemática entre o tempo de órbita e a distância média ao Sol (3ª Lei).

Essas Leis revelaram que o Universo funciona de maneira ordenada e previsível, obedecendo a princípios geométricos e matemáticos. Mais do que simples descrições, as Leis de Kepler abriram caminho para a física moderna, sendo fundamentais para que Isaac Newton (1643-1727), em sua obra "*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*" (publicada em 1687), demonstrou que as Leis do movimento planetário de Kepler podiam ser deduzidas a partir de uma força central de atração a gravidade. Ao aplicar suas três leis do movimento junto com a Lei da Gravitação Universal. Assim, Newton matematizou e fundamentou fisicamente as observações empíricas de Kepler, estabelecendo o modelo newtoniano do universo, explicando o porquê desses movimentos. Em resumo, as Leis de Kepler não apenas mudaram a forma como entendemos o Sistema Solar, mas também consolidaram a ideia de que a natureza pode ser compreendida por meio da ciência e da razão.

As Leis de Kepler, baseadas em observações precisas do movimento dos planetas, descreviam como eles se moviam, mas não explicavam por que isso acontecia. Foi aí que entrou Isaac Newton, com sua genialidade, para dar sentido físico às Leis de Kepler.

Ao formular a Lei da Gravitação Universal, Newton mostrou que todos os corpos do universo se atraem com uma força proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Essa força gravitacional é justamente o que mantém os planetas em órbita ao redor do Sol.

Com essa descoberta, Newton foi capaz de demonstrar matematicamente que as Leis de Kepler eram uma consequência natural da gravidade. Ou seja, ele provou que os planetas seguem órbitas elípticas, varrem áreas iguais em tempos iguais e que o tempo de revolução está relacionado à distância ao Sol — tudo como Kepler havia observado, mas agora com base em princípios da física.

Portanto, Newton foi fundamental para dar às Leis de Kepler um fundamento teórico sólido, transformando descrições empíricas em Leis físicas universais. Seu trabalho uniu a astronomia com a física e marcou o nascimento da ciência moderna.

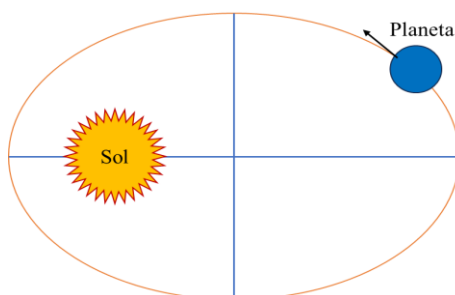
3.3 Primeira Lei de Kepler

A Primeira Lei de Kepler, também conhecida como Lei das Órbitas, foi um marco na história da astronomia. Formulada por Johannes Kepler (1571–1630) no início do século XVII, essa lei rompeu com a antiga crença de que os planetas se moviam em órbitas circulares perfeitas ao redor da Terra ou do Sol. Com base nas observações precisas do astrônomo Tycho Brahe (século XVI), Kepler descobriu que os planetas descrevem órbitas elípticas, tendo o Sol localizado em um dos focos da elipse. Essa descoberta foi essencial para compreender a verdadeira geometria do Sistema Solar e iniciou uma nova era no estudo dos movimentos celestes, baseada em observações e cálculos matemáticos.

A Primeira Lei de Kepler afirma que:

"Os planetas descrevem órbitas elípticas ao redor do Sol, que ocupa um dos focos da elipse."

Figura 6 - Órbita a ser percorrida pelo planeta em torno do sol

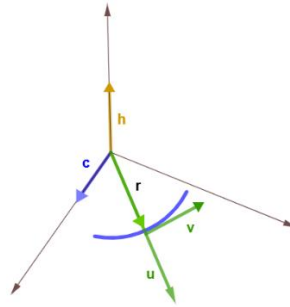


Fonte: Autor (2025).

Essa foi uma descoberta empírica feita por Johannes Kepler com base nos dados de Tycho Brahe, mas mais tarde foi demonstrada teoricamente por Isaac Newton, usando sua Lei da Gravitação Universal e as Leis do movimento. Abaixo, será apresentado um resumo da demonstração teórica da Primeira Lei de Kepler com base na física de Newton:

Usando um sistema de coordenadas onde teremos o sol como ponto de origem, $\vec{r} = r(t)$ o vetor posição do planeta, r a distância entre os centros de massa do planeta ao sol, \vec{v} o vetor velocidade e \vec{u} o vetor unitário que indica a direção radial.

Figura 7 - Diagrama de vetores



Fonte: Autor (2024).

Como a força gravitacional do Sol sobre um planeta é muito maior em relação a força exercida por outros corpos celestes, dessa forma, irei desconsiderar todos os corpos celestes.

A princípio, foi igualado a segunda Lei de Newton com a Lei da gravitação universal.

Tabela 1: Apresentação das Leis de Newton que fundamentam a primeira Lei de Kepler.

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	Segunda Lei de Newton
$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}$	Lei da gravitação universal

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leis_de_Newton

Definindo, \vec{F} como força, m e M como massas, uma menor e outra maior respectivamente, \vec{a} como aceleração vetorial e G , como a constante gravitacional, $r = |\vec{r}|$ e $\vec{u} = (1/r)\vec{r}$ representa o vetor unitário na direção de \vec{r} .

$$m \cdot \vec{a} = -\frac{GmM}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}.$$

De modo, que \vec{a} é paralelo a \vec{r} e o seu produto vetorial $\vec{r} \times \vec{a} = 0$.

Note que

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r}' \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{v}'.$$

Como $\vec{r}' = \vec{v}$, $\vec{v}' = \vec{a}$ e $\vec{r} \times \vec{a} = 0$, temos que.

$$\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = 0 + 0 = 0.$$

Posteriormente, segue que

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{h}.$$

Onde $\vec{h} \neq 0$ é um vetor constante perpendicular à v e $\vec{r} = \vec{r}(t)$ em todos os valores de t . Isso significa que o planeta está situado em um plano que passa pela origem e que sua órbita é uma curva plana.

Para demonstrar a primeira Lei de Kepler, irei reescrever o vetor \vec{h} como segue:

$$\begin{aligned}\vec{h} &= \vec{r} \times \vec{v} \\ &= \vec{r} \times \vec{r}' \\ &= r\vec{u} \times r\vec{u}' \Rightarrow r^2(\vec{u} + \vec{u}'),\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{h} &= -\frac{GM}{r^2} \vec{u} \times (r^2 \vec{u} \times \vec{u}') \\ &= -GM \vec{u} \times (\vec{u} + \vec{u}') \\ &= -GM[(\vec{u} \cdot \vec{u}')\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{u}'].\end{aligned}$$

Sabendo que $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = 1$, $|\vec{u}(t)| = 1$ e que $u \cdot u' = 0$, em seguida

$$\begin{aligned}a \times h &= GMu' \\ (\vec{v} \times h)' &= \vec{v}' \times h \\ &= a \times h \Rightarrow GMu' \\ v \times h &= GMu + \vec{c}.\end{aligned}\tag{7}$$

Com \vec{c} sendo um vetor constante.

Recomendar favoravelmente os eixos coordenados para que o vetor na base canônica \vec{k} aponte na direção do vetor \vec{h} . Da equação (7), tem-se que \vec{c} pertence ao plano xy , dado que $\vec{h} \times \vec{v}$ e \vec{u} são perpendiculares a \vec{h} . Podemos então escolher os eixos x e y tais que o vetor \vec{i} esteja na direção à excentricidade e .

Dado θ , o ângulo entre \vec{c} e \vec{r} , então (r, θ) são coordenadas polares do planeta, da equação (1), temos então.

$$\begin{aligned}r \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) &= \vec{r} \cdot (GMu + \vec{c}) \\ &= GM\vec{r} \cdot \vec{u} + \vec{r} \cdot \vec{c} \\ &= GMr\vec{u} \cdot \vec{u} + |\vec{r}||\vec{c}|\cos\theta \\ &= GMr + rc \cos\theta.\end{aligned}$$

Onde $c = |\vec{c}|$. Logo,

$$r = \frac{\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h})}{GM + c \cos\theta} = \frac{1}{GM} \frac{\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h})}{1 + e \cos\theta}.$$

Como $e = \frac{c}{GM}$. Porém

$$\begin{aligned}\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) &= (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{h} \\ &= \vec{h} \cdot \vec{h} = |\vec{h}|^2 \Rightarrow h^2.\end{aligned}$$

Onde $h = |h|$, daí

$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + e \cos\theta} = \frac{\frac{eh^2}{c}}{1 + e \cos\theta}.$$

Escreva $d = \frac{h^2}{c}$, e obtém-se

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos\theta}. \quad (8)$$

Assim, a equação (8) corresponde a forma polar da elipse com excentricidade e . Portanto, conclui-se que os planetas fazem um movimento elíptico em torno do Sol.

A Primeira Lei de Kepler revolucionou a compreensão do Sistema Solar ao afirmar que os planetas não se movem em círculos perfeitos, mas sim em órbitas elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da elipse. Essa descoberta rompeu com séculos de pensamento baseado no modelo geocêntrico e nas órbitas circulares propostas por Aristóteles e Ptolomeu. A partir dessa nova visão, foi possível entender de forma mais precisa o movimento dos corpos celestes, abrindo caminho para o desenvolvimento da física moderna e da teoria da gravitação. A Primeira Lei mostrou que o Universo obedece a Leis geométricas elegantes e previsíveis, e foi o primeiro passo na formulação de um modelo astronômico mais fiel à realidade.

3.4- Segunda Lei de Kepler

A Segunda Lei de Kepler, ao afirmar que “o planeta varre áreas iguais em tempos iguais”, revela um aspecto fascinante do movimento planetário: a velocidade de um planeta não é constante ao longo de sua órbita. Isso mostra que o Universo não se comporta de maneira uniforme e simples como se pensava no modelo circular de órbitas antigas.

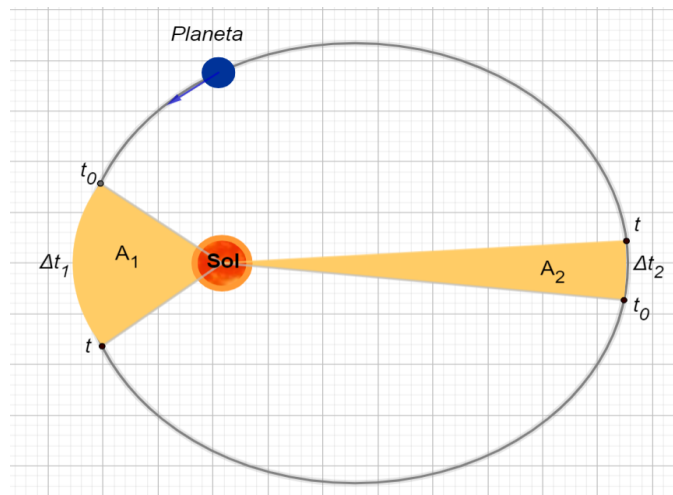
Essa lei destaca a harmonia dinâmica do Sistema Solar, onde velocidade e distância do Sol se equilibram para manter o movimento regular dos planetas. É uma consequência direta da conservação do momento angular, um princípio físico fundamental que aparece também em outros contextos, como no giro de um patinador que acelera ao juntar os braços.

Além disso, a Segunda Lei de Kepler foi um passo importante para a física moderna. Ela inspirou Newton a desenvolver sua lei da gravitação universal, explicando por que os planetas se movem dessa forma, descrevendo um comportamento regular e elegante dos corpos celestes, mas também conecta fenômenos físicos profundos como a gravidade, o momento angular e a geometria das órbitas. Considerando

$$T = \frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2} = \dots = k$$

Onde T é o período de revolução dos planetas, A_1 e A_2 são as áreas varridas pelos planetas, Δt_1 e Δt_2 são os intervalos de tempo e k é uma constante.

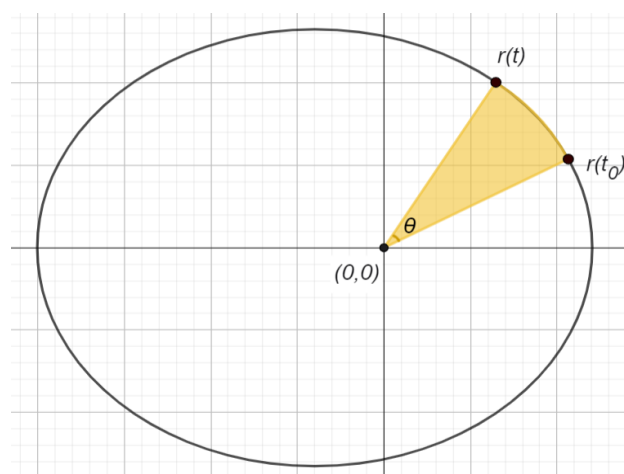
Figura 8 - Modelo das Leis das Áreas.



Fonte: Autor 2025, <https://www.geogebra.org/classic> (2024).

Essa seção apresenta a segunda Lei de Kepler e utiliza os conceitos de coordenadas polares.

Figura 9 - Intervalo de tempo da área varrida.



Fonte: Autor (2025), <https://www.geogebra.org/classic> (2024).

Considerando que o deslocamento de um planeta em um curto intervalo de tempo varre uma área ($\Delta t \rightarrow 0$), aproximada a área de um triângulo, ou seja:

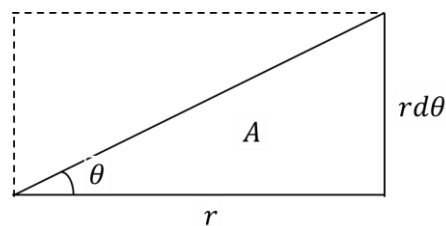
$$A = \frac{b \cdot h}{2},$$

onde, b é o comprimento da base e h é o comprimento da altura.

Assumindo que a área varrida pelo planeta se trata de uma área diferencial com distância entre os centros de massa r , e em módulo, do arco, temos então:

$$A = \frac{r^2 \theta}{2}$$

Figura 10 - Relação entre área e ângulo.



Fonte: Autor (2025).

Como a área e o ângulo variam com o tempo, obtém-se:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt},$$

Assim a região da curva é dada pela integral da:

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} r^2 dt.$$

Derivando A em função de θ temos:

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} r^2.$$

Pela regra da cadeia:

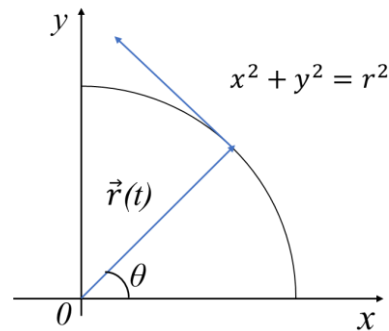
$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned} \tag{9}$$

onde $A = A(t)$ é a área varrida pelo vetor radical $\vec{r} = r(t)$ no intervalo de tempo (t_0, t) , como mostra a Figura 9.

Admitindo que \vec{r} pode ser escrito em coordenadas polares, a órbita do planeta é uma elipse de excentricidade nula (modelo circular), com o sol no seu centro.

A equação da circunferência centrada na origem é:

Figura 11 - Modelo orbital, excentricidade nula



Fonte: Autor (2025).

Parametrizando a curva; $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. O Vetor posição será dado por:

$$\vec{r}(\theta) = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} + 0 \vec{k},$$

em que o vetor unitário \vec{u} , é dado por.

$$\vec{u} = \frac{1}{r} \cdot \vec{r}.$$

Então,

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} + 0 \vec{k},$$

e daí

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \vec{j} + 0 \vec{k}.$$

Calculando o produto vetorial obtemos.

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} & \cos \theta \frac{d\theta}{dt} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 \\ \cos \theta \frac{d\theta}{dt} & 0 \end{bmatrix} \vec{i} - \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} & 0 \end{bmatrix} \vec{j} + \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} & \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} \vec{k} \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \frac{d\theta}{dt} \vec{k}. \end{aligned}$$

Como a velocidade do planeta é fundamental para a Segunda Lei de Kepler, porque ela é o que compensa a distância variável entre o planeta e o Sol para garantir que a área varrida seja sempre a mesma em tempos iguais. Assim, essa variação de velocidade acontece naturalmente por causa da força gravitacional do Sol — quanto mais perto do Sol, maior a força → maior aceleração → maior velocidade.

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Assim, Usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\vec{V}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ &= -r\text{sen}\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \vec{i} + r\text{cos}\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \vec{j}.\end{aligned}$$

Pela demonstração da primeira Lei de Kepler, temos que:

$$\vec{h} = r^2 \left(\vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right).$$

Calculando o módulo de \vec{h} ,

$$\begin{aligned}|\vec{r}| &= r \Rightarrow |\vec{V}| = r \frac{d\theta}{dt} \\ h &= (r) \cdot \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ &= r^2 \frac{d\theta}{dt}\end{aligned}\tag{10}$$

Relembre que,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Comparando as expressões (9) e (10), obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{h}{2} \\ dA &= \frac{h}{2} dt.\end{aligned}\tag{11}$$

Assim,

$$|\vec{h}| = h = \text{constante}.$$

Portanto,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} = \text{constante}$$

Essa equação nos mostra o caminho pela qual A é percorrida é constante e dessa forma, prova a segunda Lei de Kepler.

Conclui-se, portanto, que a Segunda Lei de Kepler revela a variação da velocidade dos planetas ao longo de suas órbitas, garantindo que a área varrida pelo raio que liga o planeta ao Sol seja sempre igual em tempos iguais. Essa lei evidencia a influência direta da força gravitacional e da conservação do momento angular no movimento planetário.

Dando sequência, Kepler formulou a Terceira Lei, também conhecida como Lei dos Períodos, que afirma:

“O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do raio médio de sua órbita.”

Essa relação matemática mostra que quanto mais distante um planeta está do Sol, maior será o tempo que ele leva para completar uma volta ao seu redor.

3.5 Terceira Lei de Kepler

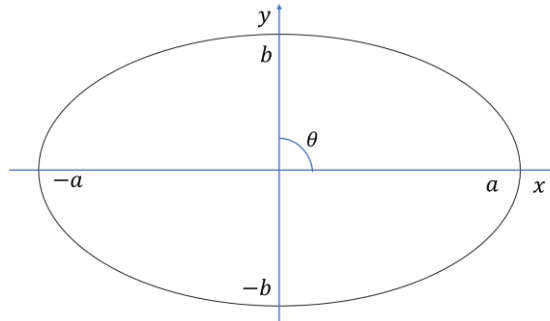
Após descrever a forma das órbitas planetárias e a variação de velocidade dos planetas, Johannes Kepler formulou sua terceira e última lei, que estabelece uma relação matemática precisa entre o tempo que um planeta leva para dar uma volta completa ao redor do Sol (período orbital) e sua distância média ao Sol. Conhecida como a Lei dos Períodos, essa lei foi fundamental para entender como os planetas se organizam no Sistema Solar e como suas órbitas se relacionam entre si. A Terceira Lei de Kepler não apenas descreve o movimento dos planetas de forma elegante, como também lançou as bases para os estudos de Isaac Newton sobre a gravitação universal. Para construção da terceira Lei de Kepler, darei início pela expressão (11) enunciada na segunda Lei.

Sabendo que A representa a área da elipse e T é o período orbital no intervalo de $(0, t)$. Então a área da elipse é dada por:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^T \left(\frac{dA}{dt} \right) dt \\
 A &= \int_0^T \frac{1}{2} h dt \\
 A &= \frac{1}{2} hT.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Desse modo, comparando com a área de uma região plana de uma elipse, com eixos $2a$ e $2b$. Obtemos.

Figura 12 - orbita elíptica.



Fonte: Autor (2025).

$$A = \pi ab. \quad (13)$$

Assim, igualando as expressões (12) e (13), tem-se:

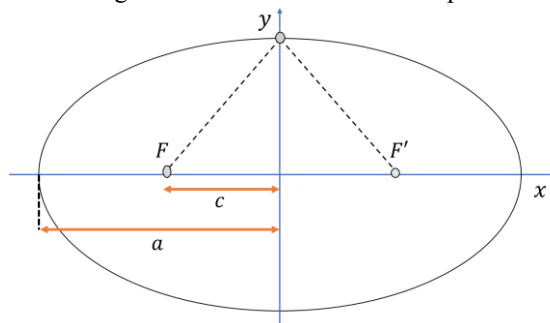
$$\frac{1}{2} hT = \pi ab$$

$$T = \frac{2\pi ab}{h}. \quad (14)$$

Elevando a expressão (14) ao quadrado.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2} \quad (15)$$

Figura 13 - Excentricidade da Elipse



Fonte: Autor (2025).

Sendo e , a excentricidade, conforme a Figura 13, temos:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = ae.$$

Dessa forma:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$= b^2 + (ae)^2$$

$$b^2 = a^2 - (ae)^2$$

$$= \sqrt{a^2(1 - e^2)}.$$

Portanto, elevando ambos os membros ao quadrado

$$\frac{a^2}{b^2} = (1 - e^2).$$

Assim, definimos a semi-latus rectum após substituir na equação (15),

$$\begin{aligned} T &= \frac{h^2}{GM} \\ &= a(1 - e^2) \end{aligned}$$

Essa demonstração mostra que a órbita se periódica é elíptica, assim determina a primeira Lei de Kepler.

Logo, se

$$b = a(1 - e^2).$$

Consideremos:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2(1 - e^2) \\ &= a \cdot a(1 - e^2) \\ &= aT \Rightarrow \frac{b^2}{a} = T. \end{aligned}$$

Como definimos a semi-latus rectum por:

$$T = \frac{h^2}{GM}$$

e

$$\frac{b^2}{a} = \frac{h^2}{GM}.$$

ou seja

$$\begin{aligned} b &= \left(\frac{ah^2}{GM} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow T = \frac{2\pi ab}{h} \\ (Th)^2 &= \left(2\pi a \left(\frac{ah^2}{GM} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ T^2 h^2 &= 4\pi^2 a^2 \frac{ah^2}{GM}. \end{aligned}$$

portanto

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}. \quad (16)$$

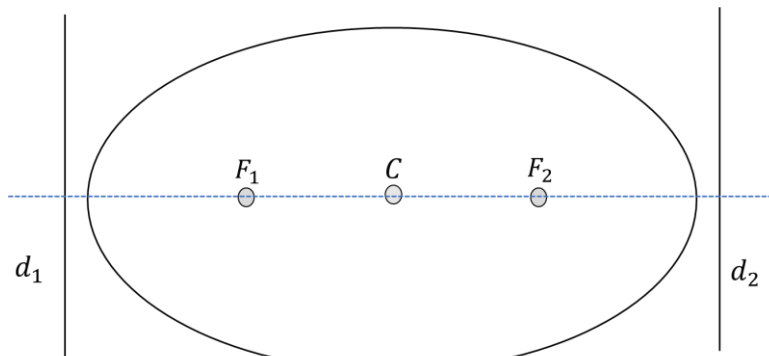
considerando k a expressão $\frac{4\pi^2}{GM}$, então:

$$T^2 = ka^3$$

Dessa forma, toda elipse tem duas diretrizes d_1 e d_2 (considerando os seus dois focos F_1 e F_2 nessa ordem) e uma excentricidade e , com $0 < e < 1$. Se a elipse tiver semi-eixo maior a e semi-eixo menor b , então a excentricidade será dada por $e = \frac{c}{a}$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ é a distancia do centro C a cada foco.

Cada diretriz está d unidades de seu foco correspondente, onde $d = \frac{b^2}{c^2}$, e as diretrizes são perpendiculares ao eixo maior.

Figura 14 - Diretrizes da elipse



Fonte: Autor (2025).

A equação (16) prova a terceira Lei de Kepler. Essa Lei, apresenta de forma brilhante a descrição do movimento planetário, ao mostrar que existe uma proporção matemática entre o período orbital dos planetas e sua distância média ao Sol. Essa descoberta foi essencial para a compreensão da estrutura do Sistema Solar, pois permitiu prever com precisão o tempo que cada planeta leva para completar sua órbita. Além disso, essa lei foi um passo decisivo para o desenvolvimento da lei da gravitação universal de Newton, conectando os estudos astronômicos com os fundamentos da física clássica. Assim, a Terceira Lei de Kepler não apenas explica como os planetas se movem, mas também fortalece a ideia de que o universo segue princípios racionais e matemáticos.

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{GM} &= \frac{b^2}{a} \\ &= \frac{b^2}{\frac{c}{e}} \Rightarrow b^2 \cdot \frac{e}{c} \\ &= ed\end{aligned}$$

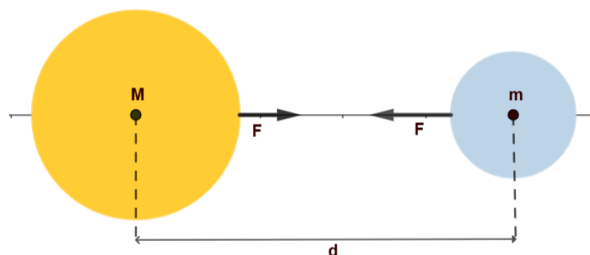
3.6 A importância das Leis de Kepler para Isaac Newton

A importância de Kepler para Newton na formulação da gravitação universal foi enorme. As Leis de Kepler, especialmente a primeira e a terceira, forneceram a base empírica e matemática que Newton usou para desenvolver sua teoria.

Por que Kepler foi essencial para Newton:

- Kepler descreveu o "como" os planetas se movem (órbitas elípticas, velocidades variáveis), mas não o "porquê".
- Newton, ao estudar as Leis de Kepler, percebeu que havia uma força agindo à distância que mantinha os planetas em órbita — e essa força era a gravidade.
- A famosa terceira lei de Kepler (que relaciona o tempo de revolução dos planetas à sua distância do Sol) foi deduzida por Newton a partir da gravitação universal, provando que a gravidade explicava Kepler.

Figura 15 - Atração gravitacional



Fonte: Autor (2025).

Dois corpos quaisquer (de massa M e m), separados por uma distância “ d ”, se atraem por meio de uma força gravitacional F . Essa força é dada por:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$$

- Onde G é a constante gravitacional e vale cerca de $6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ essa expressão nos mostra que:
- A força gravitacional é proporcional ao valor das massas que se atraem.
- A força gravitacional é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre essas massas.
- A constante gravitacional é um número muito pequeno, então, a força gravitacional entre objetos do nosso cotidiano será desprezível.

Como a força gravitacional é a força peso, podemos fazer $\text{Peso} = \text{Força gravitacional}$, isto é:

$$m \cdot g = G \frac{M \cdot m}{d^2}$$

Cortando-se o m dos dois lados da expressão chegamos a uma expressão para a aceleração da gravidade em um planeta ou corpo celeste qualquer.

Ou seja:

$$g = \frac{G \cdot M}{d^2}$$

- A aceleração da gravidade em um planeta não depende da massa do objeto que está sendo atraído (objetos diferentes à mesma altura, caem com a mesma aceleração).
- A aceleração da gravidade é proporcional ao valor da massa do planeta (ou corpo celeste).
- A aceleração da gravidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância ao centro do planeta.
- A aceleração da gravidade não depende da atmosfera. Mesmo onde não há ar, há gravidade.

Uma nave em órbita da Terra está sob a ação da gravidade da Terra. Um astronauta nessa nave tem a falsa sensação de ausência de gravidade porque, tanto ele quanto a nave estão “caindo” no campo gravitacional da Terra. Essa queda, porém, coincide com a curvatura da Terra.

Lembrando que a força gravitacional em um satélite ou em uma nave em órbita da Terra atua como uma força centrípeta, podemos chegar a uma expressão para a velocidade de

um satélite em órbita circular (ou de um planeta em torno do Sol em uma órbita “quase” circular). A expressão para essa velocidade é:

Por meio dessa expressão podemos ver que:

$$V = \sqrt{\frac{GM}{d}}$$

- A velocidade de um satélite não depende da massa desse satélite, só da altura de sua órbita;
- Os satélites em órbita menor têm velocidade maior, e, também, planetas mais próximos do sol têm maior velocidade (quanto mais próximo do Sol maior a velocidade do planeta).
- Planetas mais afastados do Sol demoram mais para completar uma volta em torno de sua órbita.

Obs. Satélites estacionários estão parados em relação à Terra e, portanto, têm período de translação em torno da Terra de cerca de 24h.

Sem as Leis de Kepler, Newton talvez não tivesse os dados nem a direção certa para formular sua teoria. Kepler observou e descreveu, Newton explicou e generalizou. Juntos, eles revolucionaram nossa compreensão do universo.

4 O GEOGEBRA

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que combina geometria, álgebra, cálculo e estatística em um único ambiente interativo. Ele é muito utilizado no ensino e aprendizado de matemática e física, pois permite a exploração visual e prática de conceitos matemáticos complexos.

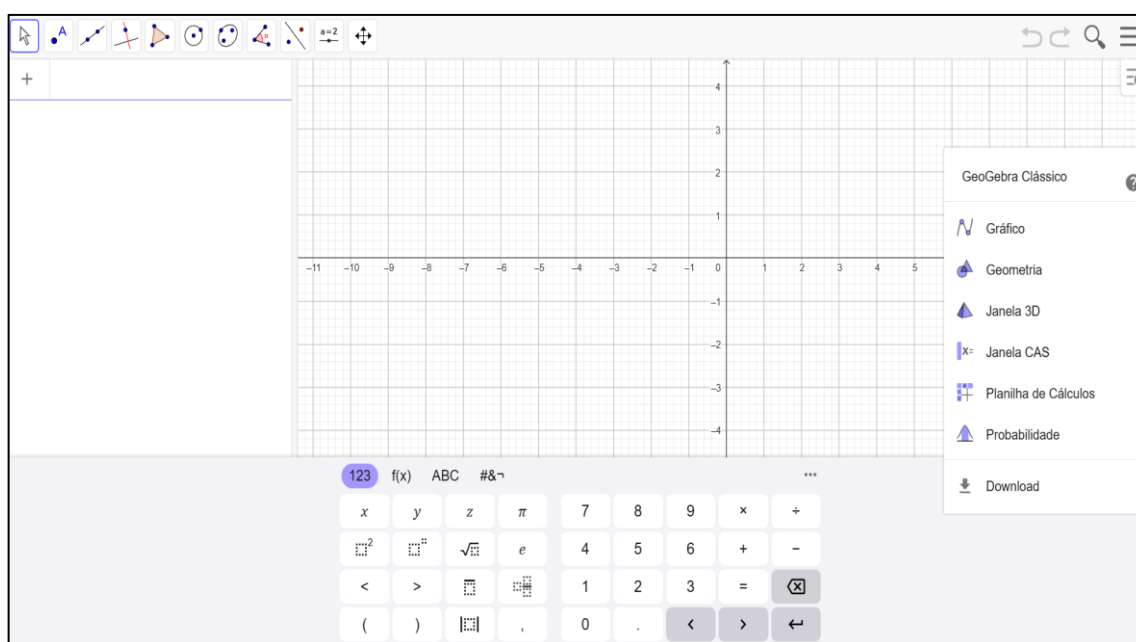
Principais características do GeoGebra:

- Gratuito e multiplataforma, podendo ser usado no computador, celular ou online;
- Interface é interativa permitindo criar construções geométricas e explorar gráficos dinamicamente;
- Aplicação em diversas áreas, tendo uma utilidade significativa proporcionando uma leitura longe das abstrações para geometria, álgebra, cálculo, estatística e física;
- Facilidade de uso, ele é ideal para estudantes e professores visualizarem conceitos matemáticos de forma intuitiva.

Exemplos de uso do GeoGebra:

- Órbitas planetárias – Modelagem das Leis de Kepler.
- Funções matemáticas – Plotagem de gráficos de equações.
- Geometria dinâmica – Construção e manipulação de figuras geométricas.
- Física – Simulação de movimentos, vetores e forças.

Figura 19 - Interface do GeoGebra.



Fonte: GeoGebra Classic (2025).

O uso do Geogebra incentiva uma abordagem mais construtivista, onde os alunos constroem seu próprio conhecimento por meio da experimentação, desse modo, foi observado que o software incentiva uma abordagem construtivista no ensino e na aprendizagem, pois promove a construção ativa do conhecimento pelos próprios alunos. A teoria denominada construtivista aparece no cenário mundial da educação para tentar explicar o difícil caminho de como se aprende as coisas e como ocorre a aprendizagem humana, e, para tanto, utilizou-se de distintas áreas do conhecimento para se apoiar cientificamente e apoiar este complexo processo de produção do conhecimento humano ao longo dos seus períodos históricos.

A interatividade desse poderoso Software revoluciona o ensino, transformando conteúdos estáticos em experiências dinâmicas e exploratórias. Seja em matemática, física ou astronomia, ele permite um aprendizado mais ativo, visual e intuitivo, tornando a educação mais eficaz e envolvente.

Portanto, o GeoGebra é uma das ferramentas mais interativas para o ensino de matemática e ciências, permitindo que alunos e professores explorem conceitos de maneira visual, dinâmica e intuitiva. Seu principal diferencial está na capacidade de manipular objetos, alterar parâmetros e observar resultados em tempo real, o que facilita a compreensão de conteúdos complexos.

4.1 Construção da Elipse com o GeoGebra

A elipse é fundamental para o estudo das Leis de Kepler, pois descreve com precisão as órbitas dos planetas ao redor do Sol. Antes de Kepler, acreditava-se que os planetas seguiam órbitas circulares perfeitas, mas as observações de Tycho Brahe e os cálculos de Kepler mostraram que as órbitas são elípticas.

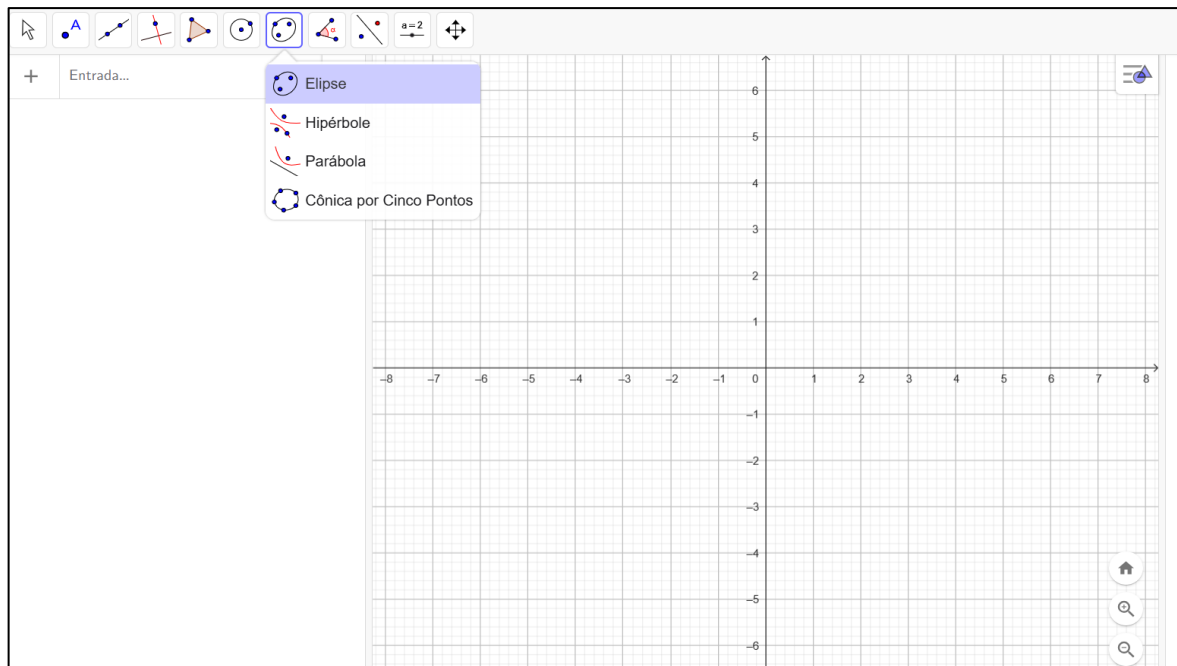
A construção geométrica da elipse usando o Software GeoGebra permite visualizar e manipular interativamente a forma e as propriedades da elipse, facilitando o aprendizado e a aplicação dos conceitos matemáticos e físicos.

Essa construção, é simples e pode ser feita de diferentes maneiras. Segue o passo a passo para criar uma elipse usando os focos e a definição clássica, além de algumas ideias a serem exploradas em sala de aula.

1 - Abra o GeoGebra (modo gráfico), como o da Figura 23;

1. No GeoGebra, vá até a ferramenta "**Elipse**" na barra de ferramentas.

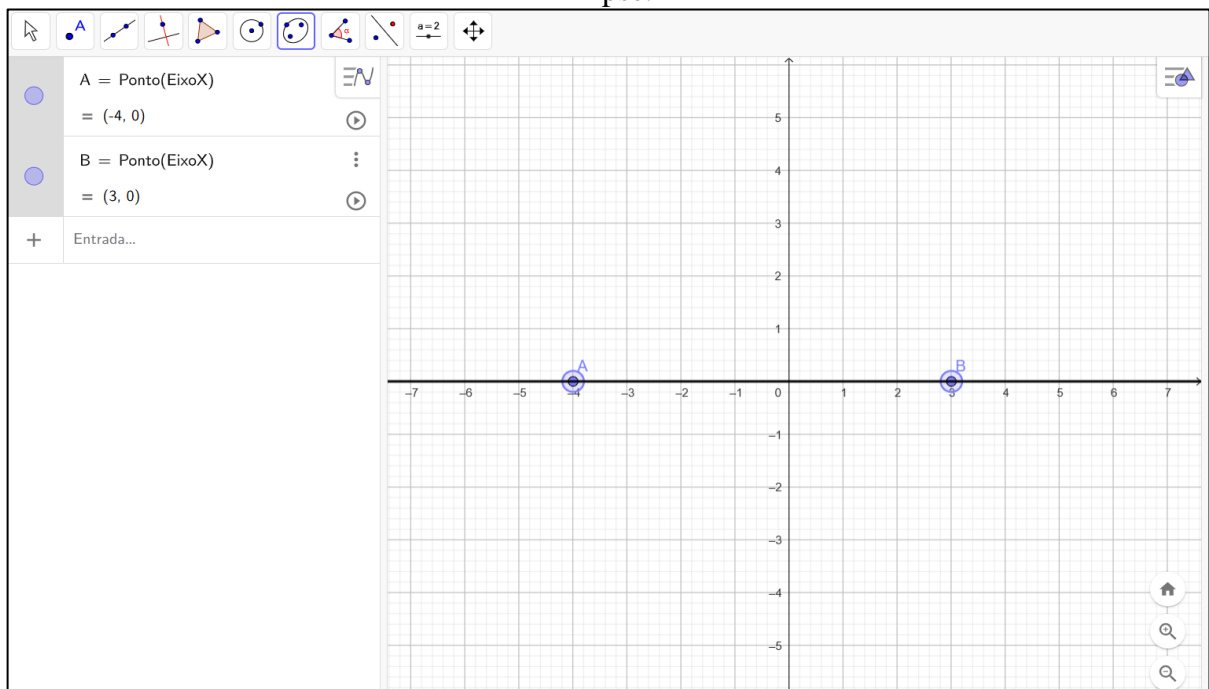
Figura 20 - Construção - Usar a barra do GeoGebra e selecionar Elipse



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/u7anm3ca> (2025).

2. Clique para selecionar **dois focos e um terceiro ponto** sobre a elipse.

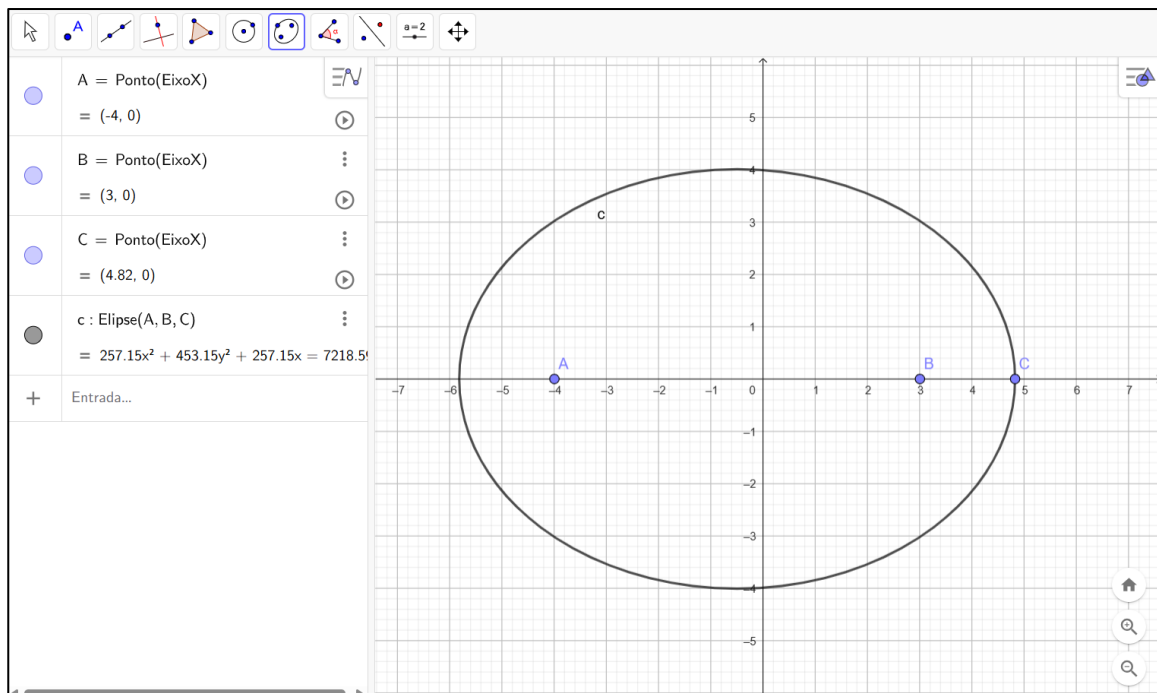
Figura 21 - Construção - Escolher a localização dos pontos no plano, eles serão os focos da Elipse.



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/u7anm3ca> (2025).

3. Mova o mouse em qualquer direção e quando escolher o tamanho da sua figura, clique sobre ela e a elipse será desenhada automaticamente!

Figura 22 - Construção - Desenhando a elipse no tamanho desejado.



Fonte: <https://www.geogebra.org/classic/u7anm3ca> (2025).

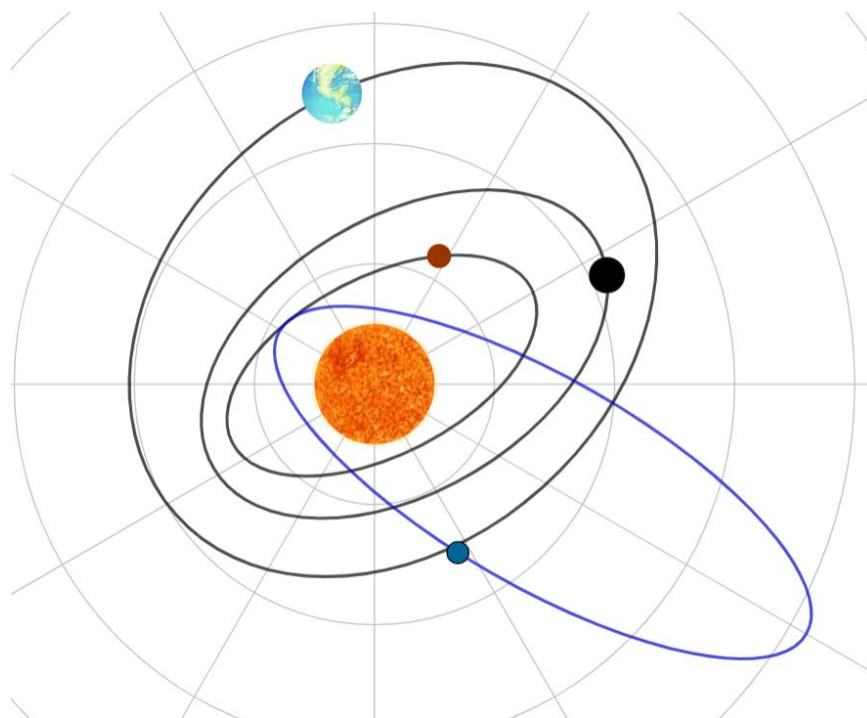
Essa ferramenta é essencial para estudar a elipse e as Leis de Kepler de forma prática e interativa. Permitindo que alunos e professores experimentem e simulem diferentes cenários, tornando o aprendizado mais dinâmico e envolvente.

4.2 O Software GeoGebra como ferramenta de ensino das Leis de Kepler

O Software GeoGebra é uma ferramenta dinâmica, interativas e eficazes, seu uso permite que professores expliquem conceitos complexos de maneira visual, enquanto os alunos aprendem de forma ativa e prática.

Como esse software permite criar simulações interativas para visualizar conceitos astronômicos, como órbitas planetárias, Leis de Kepler e gravitação universal. Com ele, pode ser construído um modelo simplificado de um sistema planetário, para ajudar os alunos a entender como os planetas se movem ao redor do Sol

Figura 23 - Ideia de modelo planetário criado no GeoGebra.



Fonte: Autor (2025). - GeoGebra Classic,
Disponível em: sistema planetário – GeoGebra_ (2025).

Então, criar um sistema planetário no GeoGebra é uma forma inovadora de ensinar astronomia e as Leis de Kepler, permitindo que os alunos visualizem e experimentem conceitos fundamentais sobre o movimento dos planetas. Assim, podemos utilizar essa ferramenta, como um instrumento dinâmico, lúdico e altamente envolvente, que por sua vez, servirá de suporte no processo de ensino-aprendizagem nas diferentes áreas das ciências, entre elas a matemática e física.

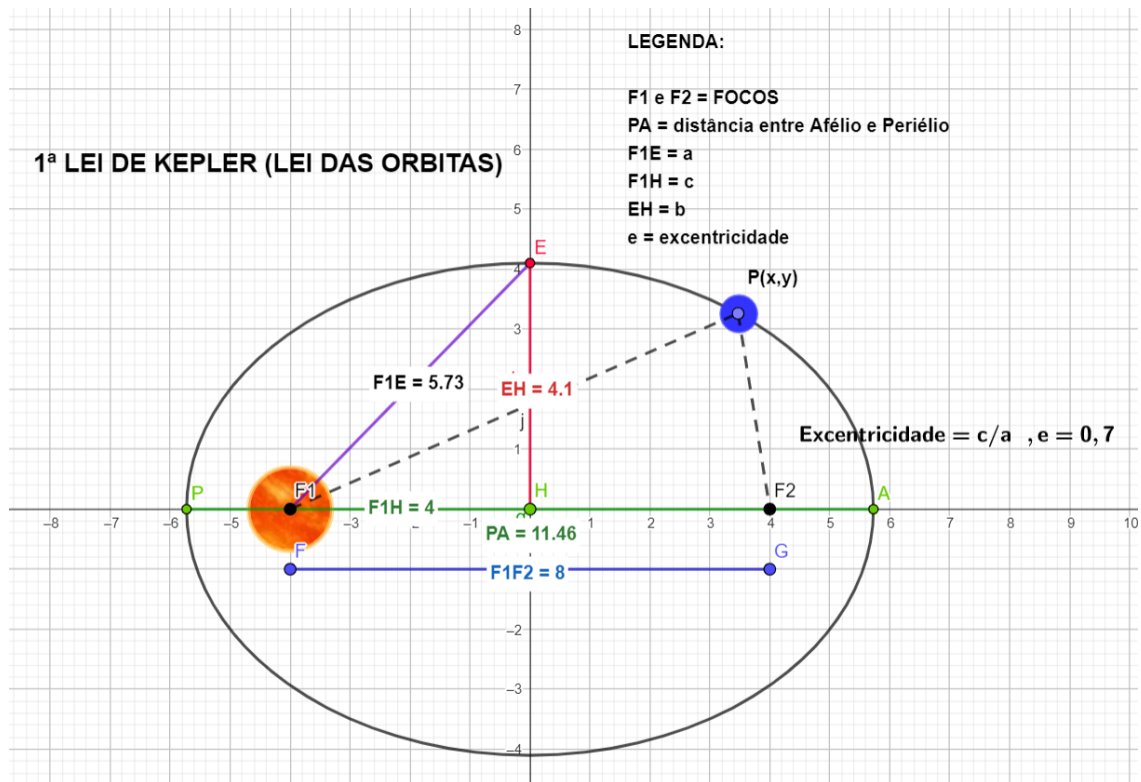
Como o Software GeoGebra é uma ferramenta bastante intuitiva e fácil de manipular, tornando-se uma excelente opção para professores e alunos que desejam explorar matemática, geometria, álgebra, estatística e física de maneira interativa, esse software permite que usuários iniciantes e avançados consigam explorar conceitos matemáticos. Seja para ensinar ou aprender.

Então, para abordar as Leis de Kepler, será apresentado quatro **simulações** fundamentadas nas órbitas dos planetas do sistema solar. Deste modo, para a lei das órbitas, a primeira simulação apresenta as órbitas dos planetas e seus movimentos.

"Os planetas se movem ao redor do Sol em órbitas elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da elipse."

A Figura 24 apresenta uma representação interativa dessa Lei, permitindo que os alunos explorem visualmente o formato das órbitas planetárias e a posição do Sol.

Figura 24 - Ilustração da Lei das orbitas no GeoGebra.



Autor (2025). GeoGebra Classic
 Disponível em: lei das órbitas – GeoGebra

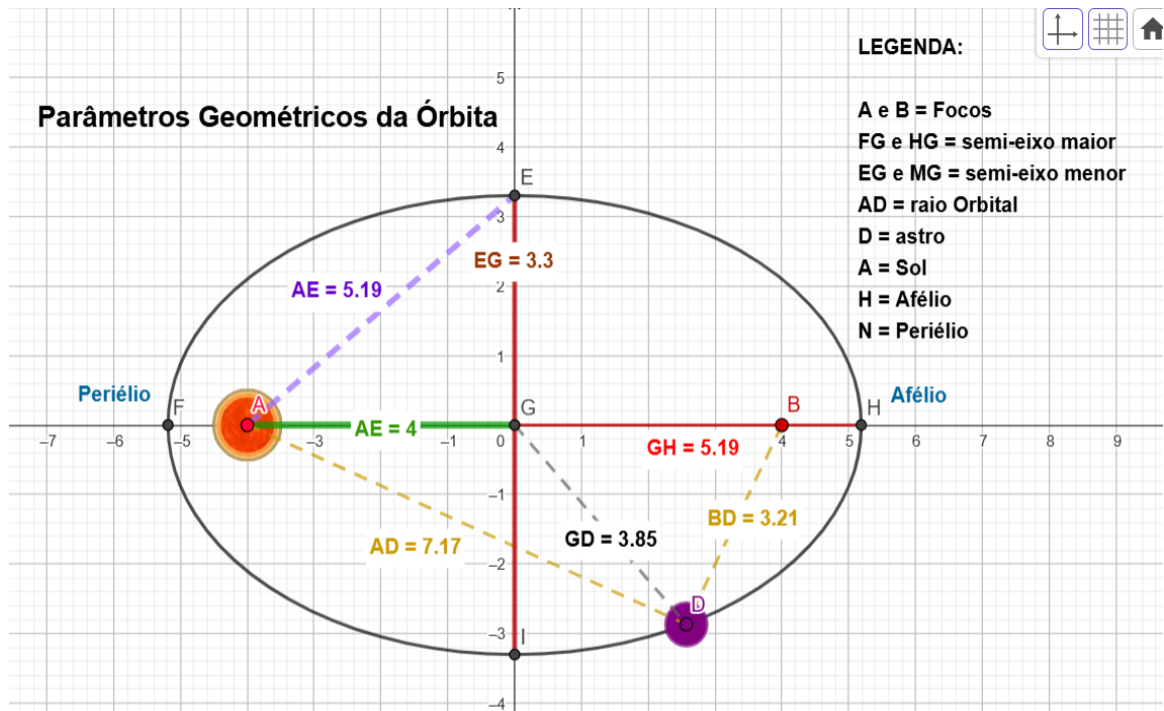
O GeoGebra torna a Primeira Lei de Kepler muito mais acessível e compreensível, permitindo que os alunos experimentem e observem como os planetas realmente se movem no espaço.

A segunda simulação, representada na Figura 24, proporciona as características da elipse e a descrição de seus parâmetros geométricos. Nela, pode ser explorado e construídos parâmetros como o semi eixo maior, semi eixo menor, raio orbital e posicionar o afélio e o periélio, permitindo a construção e exploração dos parâmetros geométricos da elipse de forma interativa, ajudando os alunos a compreender suas propriedades de maneira visual e dinâmica. A animação “Lei das Órbitas” no Software GeoGebra, podemos observar de forma clara e dinâmica como se comporta a órbita de um planeta em torno do Sol, conforme descrito pela Primeira Lei de Kepler. Essa lei afirma que os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da elipse. Ao analisar a simulação, nota-se que a trajetória do planeta não é circular, mas sim uma elipse, e que o Sol não está no centro dessa trajetória, mas em uma posição excêntrica.

Durante a animação, podemos perceber que a distância entre o planeta e o Sol varia ao longo da órbita. Essa variação evidencia os pontos chamados periélio (quando o planeta está

mais próximo do Sol) e afélio (quando está mais distante). Além disso, a animação permite visualizar como a forma da elipse muda com a excentricidade, ou seja, quanto mais “achatada” for a elipse, maior será a diferença entre essas distâncias.

Figura 25 - Ilustração dos Parâmetros geométricos no Geogebra.



Autor (2025). GeoGebra Classic
Disponível em: Parâmetros geométricos da elipse – GeoGebra

A terceira simulação (Figura 25) apresenta a variação da velocidade dos planetas ao longo da sua órbita, e a quarta simulação apresenta o movimento orbital de um exoplaneta cuja órbita é bastante excêntrica, o que permite visualizar com maior facilidade a variação da velocidade orbital. As duas últimas simulações versam sobre a terceira lei: a primeira delas relaciona a distância dos planetas e seus períodos.

A Terceira Lei de Kepler, também chamada de Lei dos Períodos, afirma que:

"O quadrado do período orbital de um planeta é diretamente proporcional ao cubo do semi-eixo maior da sua órbita."

Matematicamente, isso pode ser expresso como:

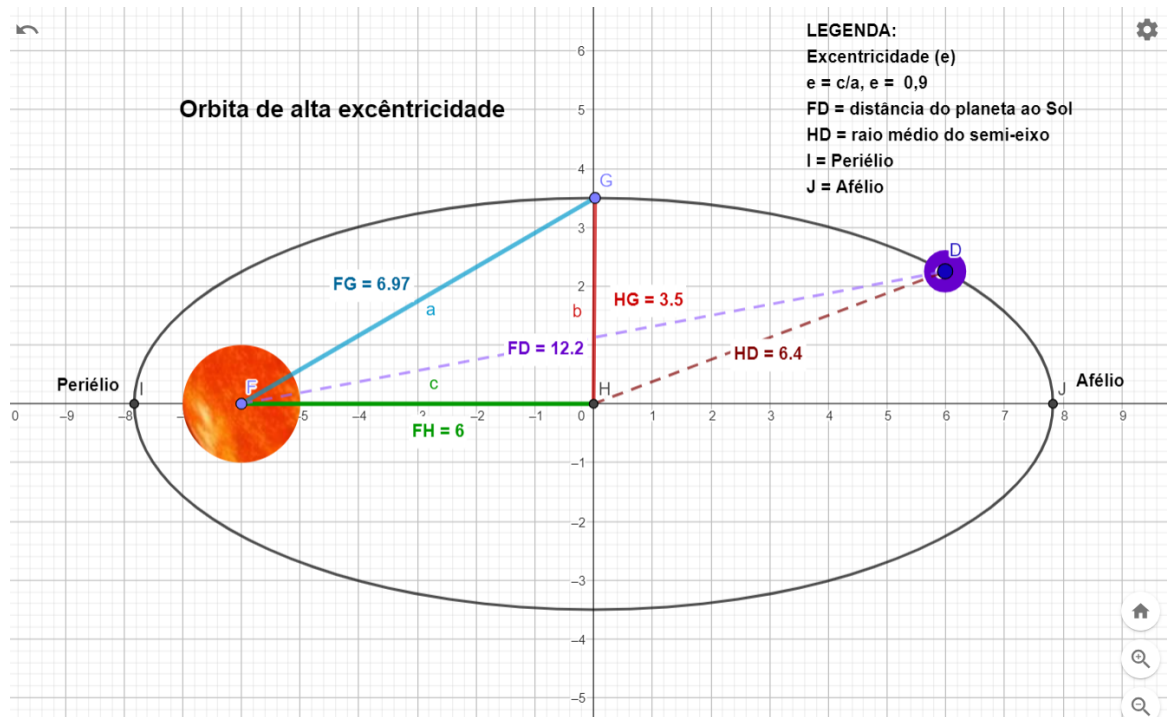
$$T^2 = \alpha a^3$$

Onde,

- T é o Período orbital do planeta (tempo para completar uma órbita);
- a é o Semi-eixo maior da elipse orbital.

Essa lei mostra que planetas mais distantes do Sol demoram mais tempo para completar uma órbita.

Figura 26 - Ilustração da Órbita com alta excentricidade no GeoGebra.



Fonte: Autor (2025). GeoGebra Classic
 Disponível em: Orbita de alta excentricidade – GeoGebra

As órbitas de alta excentricidade são aquelas em que a forma da elipse é muito alongada, com uma grande diferença entre os eixos maior e menor.

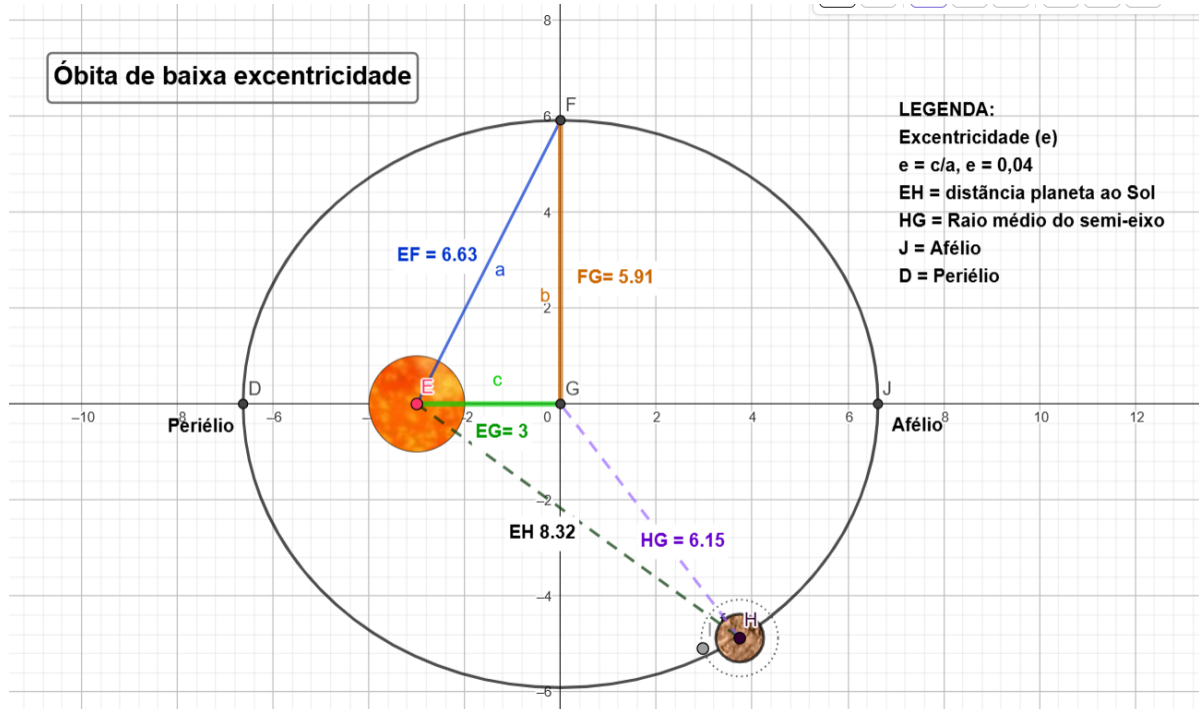
Elas são comuns em:

- Cometas e asteroides no Sistema Solar.
- Órbitas excêntricas de planetas e satélites artificiais.
- Objetos celestes que passam perto do Sol e depois se afastam.

O GeoGebra é uma ferramenta excelente para visualizar e explorar as órbitas de alta excentricidade, permitindo que os alunos compreendam como a forma da órbita afeta o movimento do corpo celeste.

A segunda e última simulação permite determinar o período de cada planeta a partir da sua distância até o Sol expressa em unidades astronômica. A Astronomia adota como unidades de medida de distância a unidade astronômica (UA), o ano-luz (al) e o parsec (pc), este com seus múltiplos quiloparsec (kpc) e megaparsec (Mpc).

Figura 27 - Ilustração Órbita com baixa excentricidade no GeoGebra.



Fonte: Autor (2025). GeoGebra Classic
 Disponível em: Órbita de baixa excentricidade – GeoGebra

Esse software, permite explorar visualmente as órbitas de alta excentricidade, ajudando os alunos a entender como a forma da órbita afeta o movimento dos corpos celestes.

Portanto, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para demonstrar a Terceira Lei de Kepler, permitindo que os alunos interajam e descubram as relações matemáticas entre o período orbital e o semi-eixo maior. Esse tipo de abordagem torna o ensino da astronomia e física mais engajante e intuitivo. Transformando o ensino das Leis de Kepler em uma experiência prática e envolvente. Ao permitir a construção e simulação das órbitas planetárias, ele facilita a compreensão de conceitos astronômicos e matemáticos, promovendo um aprendizado mais significativo.

Depois de mostra as três Leis de Kepler, agora, apresentaremos dois problemas do livro de Cálculo Volume 2 James Stewart páginas 785 e 786 usando os modelos matemático do primeiro capítulo para confirmar os conceitos estudados sobre as Leis de Kepler. Eles incluem cálculos e interpretações físicas para reforçar a compreensão dos princípios fundamentais do movimento planetário.

5 PROBLEMAS RELACIONADOS AS LEIS DE KEPLER

1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, com o Sol em um dos focos.
2. O segmento de reta que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.

Kepler formulou essas Leis, pois elas se ajustavam aos dados astronômicos. Ele não foi capaz de perceber por que elas eram válidas nem como se relacionavam umas com as outras. Mas Sir Isaac Newton, em seu Principia Mathematica, de 1687, mostrou como deduzir as três Leis de Kepler. A seguir será apresentado dois problemas com suas respectivas soluções, e com o Software GeoGebra as animações descritas por eles, baseando-se nos conceitos apresentados na terceira Lei.

Problema 1

O período da Terra girando em torno do Sol é de aproximadamente 365,25 dias. Utilize esse fato e a Terceira Lei de Kepler para determinar o eixo maior da órbita terrestre. Você precisará do valor da massa do Sol, $M = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$, e da constante gravitacional, $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Para iniciarmos a solução do problema, necessita as seguintes nomenclaturas:

- T é o período orbital,
- G é constante Gravitacional,
- M é a massa do sol,
- a é o semi-eixo maior da orbita.

Usando como base a equação (16) onde, mostra a terceira lei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.$$

Primeiramente vamos diferenciar ambos os lados em relação a T:

$$2T \cdot \frac{dT}{dT} = \frac{4\pi^2}{GM} 3a^2 \cdot \frac{da}{dT}.$$

Como, $\frac{dT}{dT} = 1$, simplificando a expressão:

$$2T = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot 3a^2 \cdot \frac{da}{dT}.$$

Isolando $\frac{da}{dT}$

$$\frac{da}{dT} = \frac{2T \cdot GM}{3a^2 \cdot 4\pi^2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Portanto, a medida do eixo é dada por:

$$a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

Considerando,

$$T = 365,25 \text{ dias} \times 24 \times 60^2 \frac{\text{segundos}}{\text{dias}} \therefore T \approx 3.1558 \times 10^7 \text{ segundos},$$

Substituindo na equação (17), a medida do semi-eixo maior da órbita terrestre.

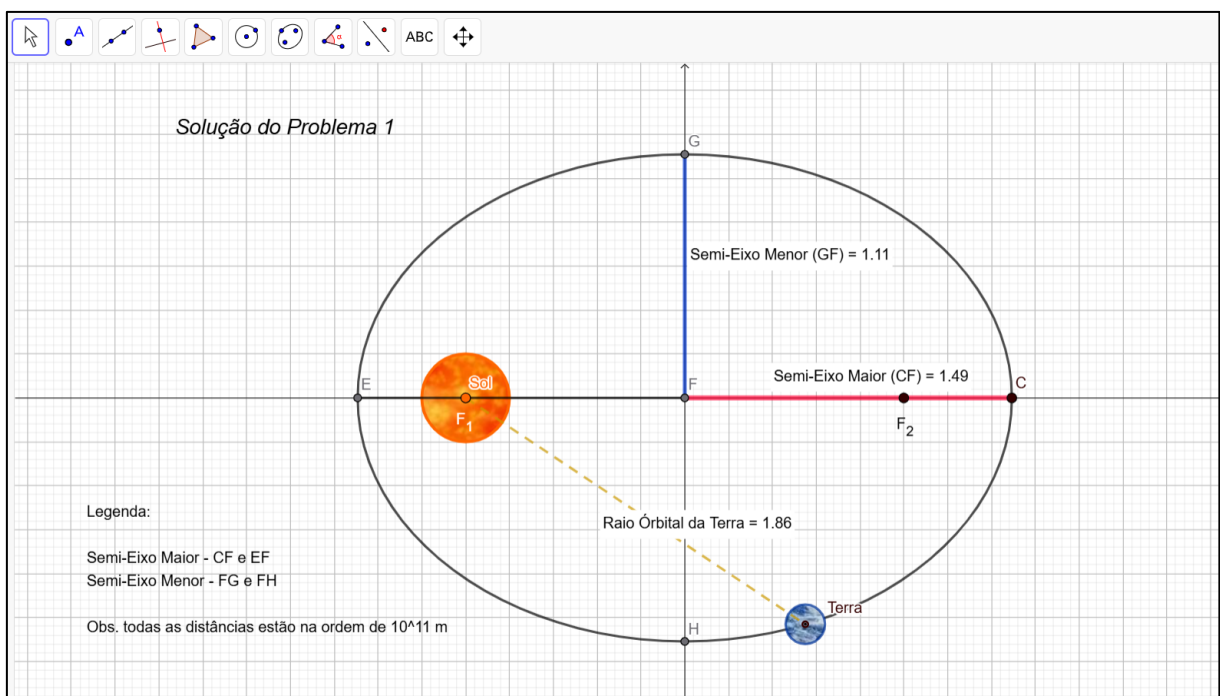
$$a = \sqrt[3]{\frac{(6,67 \cdot 10^{-11}) \cdot (1,99 \cdot 10^{30}) \cdot (3,1558 \cdot 10^7)^2}{4\pi^2}} \approx 1,496 \times 10^{11} \text{ m}.$$

Assim, o comprimento do eixo principal da orbita terrestre (que é $2a$),

$$a \approx 2,99 \times 10^{11} \text{ m ou } a \approx 2,99 \times 10^8 \text{ km}.$$

A Figura 25 apresenta uma animação descrita no **problema 1**.

Figura 25 - Animação com os dados da solução do problema 1



Fonte: Autor (2025). <https://www.geogebra.org/classic>
Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/yfjtbdu>

Problema 2

É possível colocar um satélite em órbita em torno da Terra de modo que ele permaneça fixo em uma posição localizada sobre o equador. Calcule a altitude necessária para esse satélite. A massa da Terra $M = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ seu raio é $r = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$. (Essa órbita é chamada Órbita Geossíncrona de Clarke, em homenagem a Arthur C. Clarke, quem primeiro propôs a ideia, em 1945. O primeiro satélite com essas características, Syncom II, foi lançado em julho de 1963.)

Solução:

A equação (16) apresenta a terceira lei de Kepler, para um objeto orbitando a terra.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Dados:

- T é o período orbital, (86.400 segundos para orbita geossíncrona),
- G é constante Gravitacional, ($6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$)
- M é a massa da terra, ($5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$)
- r é a distância do satélite ao centro da terra.

Queremos calcular r de forma que o período seja exatamente 24 horas, mas faremos isso usando derivadas para entender a dependência de T em relação a r .

Para ver como T varia com r , derivando a equação (ambos os lados da equação em relação a r):

$$\frac{d(T^2)}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{4\pi^2}{GM} r^3 \right)$$

A derivada de T^2 em relação a r será:

$$2T \frac{dT}{dr}$$

E a derivada da direita será:

$$\frac{4\pi^2}{GM} \cdot 3r^2$$

Dessa forma, a equação ficará:

$$2T \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot 3r^2$$

Isolando $\frac{dT}{dr}$,

$$\frac{dT}{dr} = \frac{6\pi^2 r^2}{GMT}$$

Sendo a órbita geossíncrona, e o T seja constante, dessa forma $\frac{dT}{dr} = 0$. Isso indica que valor específico de r procurado ocorre onde T é exatamente 86.400 *segundos*.

Isolando r na equação (16):

$$r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

Substituindo os valores de G , M e T , para r :

Considerando GM o centro do sistema, então T é o período da órbita do satélite em torno da Terra. M é a massa da Terra e a é o comprimento do semieixo maior da órbita do satélite (medido a partir do centro da Terra).

Assim, para que o satélite permaneça fixo acima de um ponto específico no equador da Terra, T deve coincidir com o período da própria rotação da Terra, *então* $T = 24 \text{ h} = 86.400 \text{ s}$. A massa da Terra é $M = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$.

Então se,

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

Fazendo as devidas substituições, teremos.

$$r = \sqrt[3]{\frac{(6,67 \cdot 10^{-11}) \cdot (86,400)^2 \cdot (5,98 \cdot 10^{24})}{4\pi^2}}$$

Dessa forma, o r a distância entre o satélite e o centro da terra,

$$r \approx \sqrt[3]{75,686967 \times 10^{21}}$$

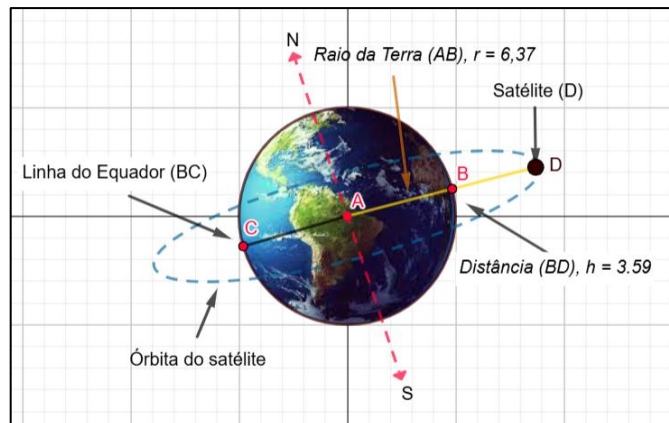
$$\approx 4,225 \times 10^7 \text{ m}$$

$$\approx 42.250 \text{ km.}$$

Sendo assim, se assumir uma orbita circular, o raio da orbita seria a e como o raio da terra é $6,37 \times 10^6$ metros, a altitude necessária da superfície acima da terra para o satélite será.

$$h = r - R = 4,225 \times 10^7 - 6,37 \times 10^6 \approx 3,59 \times 10^7 \text{ m ou } 35.900 \text{ Km.}$$

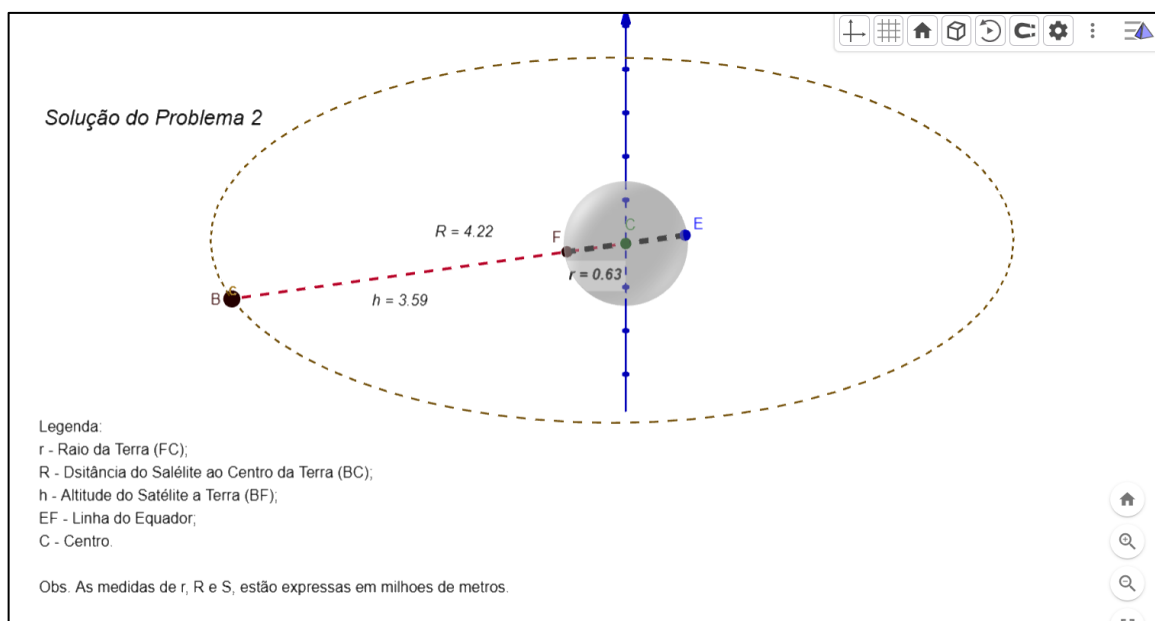
Figura 26 - Visualização dos dados do problema 2 com auxílio do GeoGebra



Fonte: Autor (2025). <https://www.geogebra.org/classic>
Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/acbcbdv>

A Figura 27 apresenta uma animação descrita no **problema 2**

Figura 27 - Animação produzida no GeoGebra dos dados apresentados no problema 2



Fonte: Autor (2025). <https://www.geogebra.org/classic>
Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/nbdzhz9x>

Portanto, as animações apresentadas através do software Geogebra, além de disponibilizar uma interpretação visual dos problemas, também demonstra de forma clara e dinâmica os princípios fundamentais das Leis de Kepler, especialmente a terceira Lei. Através da visualização interativa, é possível observar como o período orbital, a massa do Sol e a constante gravitacional, oferecem elementos suficientes, que por meio do estudo das cônicas (elipse), e o cálculo diferencial e integral pode-se obter o comprimento do semi-eixo e a distância de um satélite que se encontra na órbita do planeta terra descrito por uma trajetória

elíptica. Essa abordagem torna o aprendizado mais intuitivo, reforçando a aplicação dos conceitos físicos e matemáticos envolvidos, contudo fica explícito que o Software GeoGebra, contribui para diminuir as dificuldades de compreensão de conceitos que não são facilmente visualizáveis, acessíveis, envolventes e compreensíveis.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A elipse é uma das seções cônicas mais importantes da matemática e tem aplicações em diversas áreas do conhecimento. Seu estudo é fundamental para a compreensão de propriedades geométricas, cálculos algébricos e fenômenos naturais, mas também para outras áreas do conhecimento. Sua aplicação se estende da astronomia ao design de engenharia, e ferramentas como o GeoGebra tornam seu aprendizado mais interativo e intuitivo.

O Cálculo Diferencial e Integral é uma ferramenta fundamental para a compreensão e demonstração matemática das Leis de Kepler, que descrevem o movimento dos planetas ao redor do Sol. Embora Kepler tenha formulado suas Leis empiricamente, foi Isaac Newton, com o desenvolvimento do Cálculo e da Lei da Gravitação Universal, que explicou essas Leis de maneira rigorosa.

O estudo das Leis de Kepler e das propriedades da elipse é fundamental para a compreensão dos movimentos planetários e de outros corpos celestes no universo. Com o GeoGebra, podemos visualizar, manipular e simular esses conceitos de maneira interativa, tornando o aprendizado mais dinâmico e intuitivo. A interatividade proporcionada pelo GeoGebra permite que os alunos experimentem e visualizem as Leis de Kepler e suas relações matemáticas de maneira dinâmica, promovendo uma aprendizagem mais intuitiva e significativa. A possibilidade de manipular elementos geométricos, criar gráficos e simular fenômenos físicos em tempo real torna o processo educacional mais envolvente e motivador, ajuda a visualizar o abstratismo que muitas vezes são trazidos nos enunciados dos problemas de astronomia em especial as Leis de Kepler. Ademais, o GeoGebra se destaca como uma ferramenta versátil, podendo ser utilizada tanto em sala de aula quanto em atividades autônomas dos alunos. Dessa forma, professores podem criar materiais interativos personalizados, adaptados às necessidades específicas de seus estudantes, enquanto os alunos podem explorar conceitos de forma independente, reforçando sua autonomia no aprendizado.

Em conclusão, o GeoGebra se estabelece como uma ferramenta pedagógica essencial para o ensino de astronomia, proporcionando uma abordagem didática moderna e eficaz. Seu uso em sala de aula deve ser incentivado, permitindo e ajudando que alunos explorem novas formas de interação com o conhecimento e aprimorem suas práticas educacionais. Ele transforma problemas abstratos em representações visuais claras, facilitando o aprendizado e a resolução de desafios matemáticos e científicos.

REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, David Paul. **Educational Psychology: a cognitive view**. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- MUNEM, Mustafa; FOULIS, David. **Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 1982. (v. 1).
- CASPAR, M. **Kepler**. New York: Dover Publications, 1993.
- COHEN, I. **O nascimento de uma nova Física**. Lisboa, Gradiva, 1985.
- STEINBRUCH, Alfredo, Winterle. **Geometria Analítica**. 2 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- GGB – GeoGebra. GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 10 jan. 2025.
- HELERBROCK, Rafael. Leis de Kepler. **Brasil Escola**. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/fisica/leis-kepler.htm>. Acesso em: 18 fev. 2025.
- HEWITT, P. G. **Conceptual Physics**. 10. ed. San Francisco: Pearson, 2006.
- KEPLER, S. O.; SARAIVA, M. F. O. **Astronomia & Astrofísica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.
- PIRES, A. S. T. **Evolução das ideias da Física**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2008. p. 102-111.
- RAMALHO, Francisco; GILBERTO, Nicolau; SOARES, Paulo Antônio. **Fundamentos da Física: parte 3**. Brasil, São Paulo, 2014
- SILVA, Luiz Paulo Moreira. Cônicas. **Brasil Escola**. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/conicas.htm>. Acesso em: 19 mar. 2025.
- SILVA, Luiz Paulo Moreira. O que é elipse? Uma figura geométrica?. **Brasil Escola**. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-elipse.htm>. Acesso em: 18 fev. 2025.
- STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: **Trilha**, 2016. (v. 2)

APÊNDICE A - PRODUTO EDUCACIONAL



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE



PRODUTO EDUCACIONAL
**EXPLORANDO AS LEIS DE KEPLER E AS PROPRIEDADES DA
ELIPSE COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA**

Paulo José Marques de Souza
Prof. Dr. José da Silva Barros

Prefácio

É recorrente ouvir dos professores do ensino básico que muitos alunos afirmam não entenderem as Leis de Kepler, menos ainda entenderem os conteúdos relacionados a **hipérbole, elipse e parábola que são conteúdos pertencentes à Geometria Analítica**, mais especificamente ao estudo das **cônicas**, que são as curvas obtidas pela interseção de um plano com um cone. Aliado a isto, muitos afirmam também não conseguirem compreendê-las, o que torna então a tarefa de fazer os alunos perceberem o que é de fato a matemática por trás das Leis, e não somente isto, mas, também se empolgarem ao estudá-las, um grande desafio para os professores do ensino básico. Devido a isto, e ao fato de se buscar cada vez mais formas eficientes de se transmitir o conhecimento aos alunos durante as aulas, muitos professores têm buscado usar em suas aulas de matemática diversas ferramentas didáticas. Além disto, em geral, os alunos sentem dificuldades em aprender cônicas e suas composições básicas, bem como, suas formas e aplicações. Foi pensando nestas questões que resolvemos desenvolver aqui uma proposta didática com o auxílio do Software GeoGebra para ser usada em aulas sobre das Leis de Kepler, que tanto fosse uma interessante ferramenta didática para ser empregada em sala de aula para deixar a aula mais dinâmica, como também, ajudar os alunos no aprendizado dos conteúdos relacionados ao estudo da elipse e conseqüentemente a Astronomia. Assim, destaca-se a seguir quatro problemas que podem ser resolvidos seguindo os passos de George Polya (1897-1985), as situações propostas expõem conhecimentos básicos sobre sistema planetário, como a excentricidade da orbita elíptica dos planetas, distância do sol ao afélio e o periélio e conhecimentos que definem cada Lei de Kepler. Portanto, a proposta didática apresentada a seguir será muito útil, tanto para ser aplicado nas escolas públicas e particulares, proporcionando a alunos e professores, uma forma mais dinâmica e iterativa para tratar de de problemas relacionados a matemática e a astronomia.

Paulo José Marques de Souza
Prof. Dr. José da Silva Barros

Arapiraca – Alagoas
Fevereiro de 2025

Sumário

1 -	
Apresentação.....	60
2 - Uma breve passagem pela órbita da Elipse-----	61
2 - Explorando rapidamente as Leis de Kepler-----	63
3 – Passos de George Polya para resolução de problemas. -----	67
4 - A BNCC na Resolução de problemas envolvendo Elipses dentro das Leis de Kepler -----	68
5 – O Software GeoGebra como ferramenta de auxílio na resolução de problemas -----	69
5.1 - Problema 1-----	69
5.2 - Problema 2-----	72
5.3 - Problema 3-----	75
4.4 - Problema 4-----	78
6 - Considerações Finais -----	81
7 - Referência Bibliográfica-----	82

1 – APRESENTAÇÃO

Este trabalho apresenta, um breve resumo sobre a elipse e sua importância no estudo das Leis de Kepler. A elipse é uma figura geométrica fundamental para compreender o movimento dos planetas ao redor do Sol, conforme descrito por Johannes Kepler (1571-1630). Sua forma e propriedades ajudam a explicar com precisão as órbitas planetárias, substituindo a antiga ideia de órbitas perfeitamente circulares.

Assim, conhecer os elementos da elipse antes de estudar as Leis de Kepler é fundamental, porque fornece a base algébrica e geométrica necessária para compreender a dinâmica dos corpos celestes. As órbitas planetárias seguem trajetórias elípticas, e sem um entendimento prévio da elipse, conceitos essenciais sobre astronomia podem parecer abstratos ou difíceis de visualizar. Para isso, o Software GeoGebra, pode nos ajudar a encurtar o caminho no processo de ensino e aprendizagem, assim, essa ferramenta vai torna o aprendizado de parte da astronomia mais intuitiva e eficaz, evitando confusões conceituais e permitindo uma abordagem mais matemática e visual do movimento orbital.

O uso de metodologias ativas no ensino das órbitas planetárias, como aquelas propostas por Kepler, pode transformar significativamente a aprendizagem permitido aos alunos visualizar e interagir com modelos matemáticos e físicos de forma dinâmica e intuitiva.

Por meio do GeoGebra, é possível construir representações das órbitas elípticas dos planetas, identificar os focos (onde se encontra o Sol), observar a variação da velocidade orbital e explorar as três leis de Kepler de forma prática. Isso favorece:

- A compreensão conceitual das órbitas como elipses e não círculos perfeitos;
- O entendimento da segunda lei de Kepler (lei das áreas), observando como o planeta se move mais rápido quando está mais próximo do Sol;
- A aplicação da terceira lei em simulações com diferentes distâncias orbitais e tempos de translação.

Essa abordagem também promove o protagonismo do aluno, que passa de espectador a agente ativo no processo de aprendizagem, investigando, testando hipóteses e resolvendo problemas reais com apoio tecnológico.

2 - UMA BREVE PASSAGEM PELA ÓRBITA DA ELIPSE

Como já apresentado na seção 2, uma elipse é uma curva fechada em que a soma das distâncias de qualquer ponto da curva até dois pontos fixos chamados focos é constante.

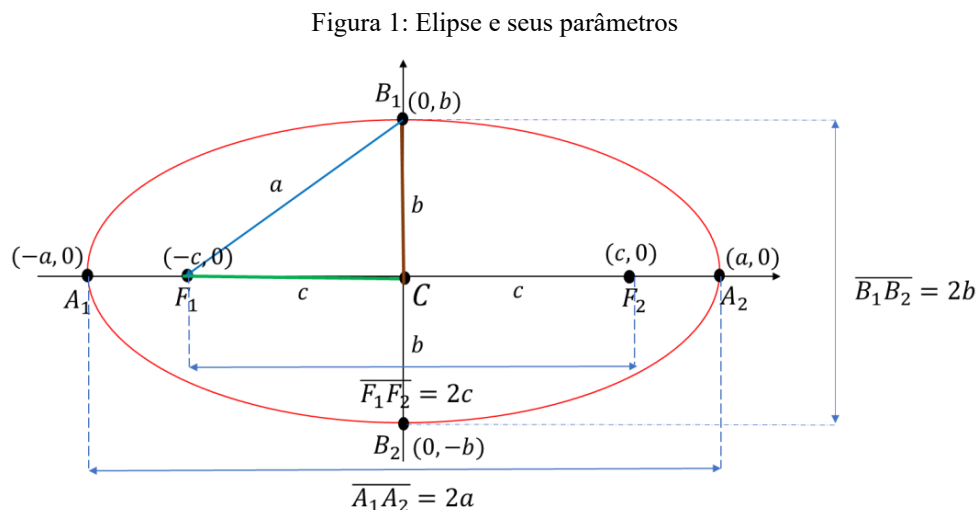
Em uma elipse, os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos, e a distância entre eles é igual a $2c$. Sua definição formal é: dados os pontos F_1 e F_2 , a elipse é o conjunto de pontos P em que vale a seguinte expressão:

$$d(PF_1) + d(PF_2) = 2a$$

Isso significa que a elipse é o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias até os focos é igual a uma constante. Em outras palavras, o ponto P pertence a uma elipse se a soma da distância de P até F_1 com a distância de P até F_2 é igual a $2a$.

De acordo com a Figura 3, apresentada abaixo, destacamos os elementos da elipse.

- Foco: São os pontos F_1 e F_2 ;
- Distância focal: é a distância $2c$ entre os pontos;
- Centro: É o ponto médio C do segmento $\overline{F_1F_2}$;
- Eixo maior: É o segmento $\overline{A_1A_2}$ de comprimento $2a$ (o segmento $\overline{A_1A_2}$ contém os focos e os eixos externos);
- Eixo menor: É o segmento $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$ (o segmento $\overline{B_1B_2}$ é ortogonal ao segmento $\overline{A_1A_2}$ no ponto C).
- Vértices: São os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 ;



Em uma elipse, o semieixo maior é a média geométrica da distância do centro para qualquer foco e a distância do centro para qualquer diretriz (A diretriz de uma elipse é uma reta que define a forma da elipse e é usada para encontrar os seus focos).

A excentricidade(e). nos diz a quão achatada é a elipse, quanto maior for o valor da excentricidade, mais próximo de uma circunferência estará a elipse. Como o eixo maior tem sempre comprimento maior que a distância focal, então,

Assim, definimos o grau de achatamento da elipse e é dado por:

$$e = \frac{c}{a}, \quad (1)$$

Onde, (a) representa o semi-eixo maior, (b) o semi-eixo menor e (c) é a distância entre o centro da elipse e um dos focos. Estão representadas na Figura 1.

Na geometria analítica, é bastante comum buscar descrever figuras geométricas por meio da álgebra. Sendo assim com os estudos dessa cônica, foi possível desenvolver-se a equação da elipse com centro na origem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Na equação, quando $a > b$, então os focos da elipse estarão sobre o eixo x e teremos que $a^2 = b^2 + c^2$, em que $2c$ é a distância focal, como vimos anteriormente. Quando $b > a$, os focos da elipse estão sobre o eixo y , e teremos que $b^2 = a^2 + c^2$.

Assim como nas outras figuras geométricas, a área da elipse também pode ser calculada com uma fórmula.

$$A = ab\pi \quad (3)$$

Portanto, foi apresentado apenas um breve direcionamento do estudo da elipse, que servirá como base para a resolução de problemas relacionados às leis de Kepler.

2 - EXPLORANDO RAPIDAMENTE AS LEIS DE KEPLER

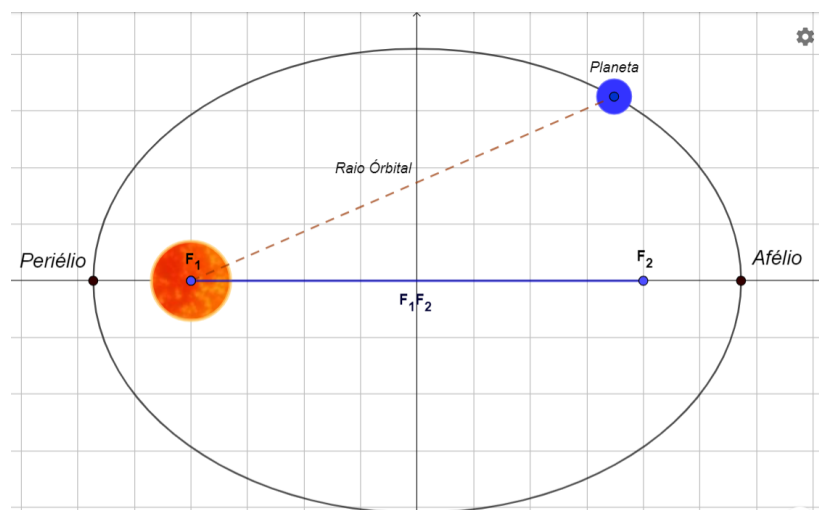
As Leis de Kepler descrevem o movimento dos planetas ao redor do Sol e são fundamentais para a astronomia e a física orbital. Elas foram formuladas pelo astrônomo Johannes Kepler no início do século XVII, com base nas observações de Tycho Brahe. Essas leis, representam um marco na astronomia e na física. A seguir, apresento brevemente as Leis de Kepler, que ajudam a compreender como os corpos celestes se comportam sob a influência da gravidade solar.

1ª Lei de Kepler (Lei das Órbitas) - Os planetas se movem ao redor do Sol em órbitas elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da elipse.

A distância do planeta ao Sol varia ao longo da órbita. Os dois pontos principais são o Periélio que é o ponto mais próximo do Sol e o Afélio que é mais distante do Sol.

O afélio e periélio que estão em destaque na Figura 2, são decorrentes do movimento, a órbita que a Terra descreve em torno do Sol. Há dois momentos, o afélio é quando a Terra está mais afastada do Sol e o periélio é quando a Terra está mais próxima do Sol. A velocidade no periélio nesse da órbita é maior. No afélio, o planeta encontra-se mais afastada do Sol.

Figura 2: periélio e Afélio



Fonte: Autor 2025, Autor 2025 - GeoGebra Classic

Kepler percebeu que a velocidade orbital dos planetas em torno do Sol não era constante. Por causa do formato das órbitas, havia pontos nos quais a distância ao Sol aumentava ou

diminuía e que essa mudança era responsável por variações na velocidade dos planetas que orbitam o Sol.

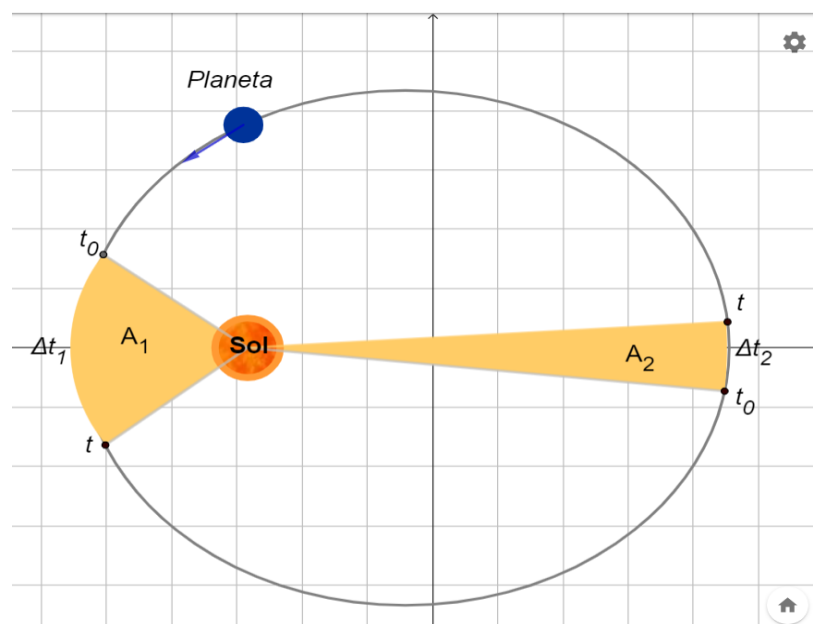
2ª Lei de Kepler (Lei das Áreas) - A linha imaginária que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

Isso significa que o planeta se move mais rápido quando está próximo ao Sol (periélio) e mais devagar quando está mais distante (afélio).

A velocidade orbital de um planeta não é constante, mas varia ao longo da órbita.

Ao procurar por alguma proporcionalidade entre a velocidade orbital de um planeta e sua distância ao Sol, Kepler chegou a uma relação curiosa entre a área “varrida” por uma linha imaginária ligando o planeta ao Sol e o tempo gasto no percurso orbital correspondente.

Figura 3: Lei das áreas



Fonte: Autor 2025, Autor 2025 - GeoGebra Classic

Na Figura 3, em um dado intervalo de tempo, digamos, o planeta se desloca pela órbita elíptica cobrindo uma certa área entre sua posição inicial e final. De acordo com a Segunda Lei de Kepler, também conhecida como Lei das Áreas o planeta, assim, varre áreas iguais em tempos iguais. Isso significa que, mesmo que sua velocidade varie ao longo da órbita, a área coberta em intervalos de tempo iguais será sempre a mesma. Essa lei só é possível de compreender plenamente quando se entende a geometria da elipse, onde o Sol ocupa um dos focos.

$$\frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2} = cte. \quad (4)$$

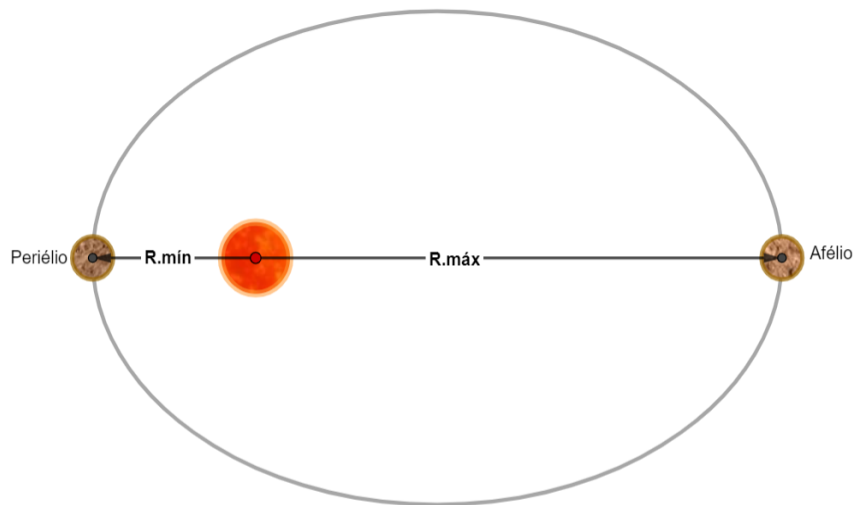
3ª Lei de Kepler (Lei dos Períodos) - O quadrado do período orbital de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da sua órbita.

A terceira lei de Kepler afirma que o quadrado do período orbital (T^2) de um planeta é diretamente proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol (R^3). Além disso, a razão entre T^2 e R^3 tem exatamente a mesma magnitude para todos os astros que orbitam essa estrela. A expressão usada para o cálculo da terceira lei de Kepler é mostrada a seguir, confira:"

$$\frac{T^2}{R^3} = cte$$

Observe a próxima figura, nela mostramos os semieixos maior e menor de uma órbita planetária em torno do Sol.

Figura 4: Raios Orbitais



Fonte: Autor 2025 - GeoGebra Classic

O raio médio da órbita, utilizado no cálculo da terceira lei de Kepler, é dado pela média entre os raios máximo e mínimo. As posições mostradas na Figura 4, que caracterizam a maior e a menor distância da Terra em relação ao Sol, são chamadas de afélio e periélio, respectivamente. onde:

$$R_{médio} = \frac{R_{máx.} + R_{mín.}}{2} \quad (5)$$

A fórmula mais detalhada da terceira lei de Kepler é mostrada a seguir. Observe que a razão entre T^2 e R^3 é determinada exclusivamente por duas constantes, o número pi e a constante da gravitação universal, e também pela massa do Sol:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (6)$$

- G – Constante da gravitação universal ($6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$)
- M – Massa do Sol ($1,989 \cdot 10^{30} kg$)

O ensino de astronomia na educação básica é fundamental para desenvolver o pensamento crítico, estimular a curiosidade científica e promover uma visão mais ampla do universo. Além de ser uma ciência inspiradora, ela contribui para a formação de cidadãos mais conscientes e preparados para desafios futuros.

3 - MÉTODO POLYA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O método de George Polya (1897-1985) é uma abordagem estruturada e eficiente para a resolução de problemas, sendo amplamente utilizado na matemática e em diversas áreas do conhecimento.

Polya publicou o seu livro *How to solve it* no ano de 1957, expondo as suas ideias sobre a heurística de resolução de problemas. Ele foi considerado um dos maiores matemáticos do século XX. Foi ele o primeiro a apresentar uma heurística de resolução de problemas específica para a matemática. Polya (1978) dividia o processo de resolução de um problema em quatro etapas: compreensão do problema; construção de uma estratégia de resolução; execução da estratégia e revisão da solução.

Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. [...] se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom 'resolvedor de problemas' tem que resolver problemas.

Dessa forma, esperava-se que essência da arte da descoberta e que a habilidade de deparar e idealizar poderiam ser acentuadas por uma bem determinada na aprendizagem. Nela, o aluno é levado a perceber os começos da descoberta e tem a ocasião de exercitá-los. Em seu livro *A arte de resolver problemas*, Polya (1978) afirma que o modo como se vê o problema pode sofrer alterações. No princípio, tem-se uma visão inacabada e complicada, mas quando se realizam algumas evoluções, essa percepção começa a mudar e ela ainda será diferente no momento em que se chegar à solução do problema. Com a finalidade de agrupar melhor as indagações e sugestões, Polya (1978) dividiu o seu processo de resolução de um problema matemático em quatro passos:

- **Passo 1: Compreender o problema** - é preciso compreender o problema, ou seja, entender o que é pedido e os dados do problema;
- **Passo 2: Construir uma estratégia** - é preciso estabelecer um plano, utilizando as relações entre as partes do problema;
- **Passo 3: Executar a estratégia** - é preciso executar o plano;
- **Passo 4: Revisar a solução** - é preciso revisar o procedimento executado, analisando e discutindo a resolução apresentada.

O método de Pólya é essencial para ensinar os alunos a pensar de forma estruturada e a resolver problemas matemáticos de maneira eficaz, melhorando seu desempenho na disciplina.

4 - A BNCC NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO ELIPSES DENTRO DAS LEIS DE KEPLER

Nesse sentido, trabalhar com as leis astronômicas por meio de atividades interdisciplinares e metodologias ativas, como o uso do Software GeoGebra, promove não apenas o aprendizado dos conceitos matemáticos e físicos, mas também o desenvolvimento do pensamento crítico e da capacidade de modelar fenômenos do mundo natural um dos objetivos centrais da BNCC para o ensino de Ciências da Natureza e Matemática no Ensino Fundamental e Médio. Aliado a isso, aqui apresento algumas competências.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) tem um papel fundamental na **resolução de problemas** dentro do contexto educacional brasileiro. Ela estabelece diretrizes que orientam o ensino em todo o país, e um dos seus principais focos é o **desenvolvimento de competências** que permitam aos estudantes pensar criticamente, agir de forma criativa e resolver problemas de forma eficaz em diferentes áreas do conhecimento.

A importância da BNCC para a resolução de problemas:

- **Integração entre teoria e prática** - A BNCC incentiva metodologias ativas e o uso de situações-problema que conectam os conteúdos escolares à vida real, promovendo a aprendizagem significativa;
- **Desenvolvimento de competências gerais** - Uma das 10 competências gerais da BNCC é justamente o "pensamento crítico, científico e criativo", que exige que o aluno formule, analise e resolva problemas;
- **Interdisciplinaridade** - Ao propor uma abordagem integrada dos conteúdos, a BNCC estimula os alunos a aplicar conhecimentos de diferentes disciplinas na resolução de problemas complexos;
- **Protagonismo do aluno** - A BNCC coloca o estudante no centro do processo de aprendizagem, incentivando a autonomia na busca de soluções e na tomada de decisões;
- **Avaliação formativa** - A resolução de problemas também é usada como forma de avaliação formativa, ajudando professores a identificar dificuldades e orientar o ensino de forma mais eficaz;
- **Preparação para a vida e o mundo do trabalho** - Resolver problemas é uma habilidade essencial no mercado de trabalho e na vida em sociedade, e a BNCC busca preparar os alunos para enfrentar esses desafios.

5 – O SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE AUXÍLIO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Aqui apresento quatro problemas com as respectivas soluções, suas habilidades relacionadas a BNCC e a descrição no software GeoGebra.

5.1 - Problema 1

Tendo os planetas órbitas elípticas em torno do Sol, a distância entre eles e a nossa estrela é variável, ou seja, por vezes eles estão mais próximos e por vezes mais distantes.

Chamamos de periélio o ponto da órbita do planeta em que está mais próximo do Sol, já o ponto em que o planeta está mais distante do Sol é chamado de afélio. Além dos planetas, outros corpos celestes também têm órbitas elípticas, como os cometas. Para calcular as distâncias do periélio r_p e do afélio r_A são dadas por:

- Distância do periélio - $r_p = a(1 - e)$ (7)

- Distância do afélio - $r_A = a(1 + e)$ (8)

Problema 1.

O cometa 15P/Finlay é um cometa periódico que orbita o Sol aproximadamente a cada 6,5 anos. Esse período orbital foi influenciado por interações gravitacionais, especialmente com Júpiter, que alteraram sua órbita ao longo do tempo, dito isso. **Qual é a distância do cometa ao Sol quando ele estiver no ponto que está situado o periélio e o afélio? Sabendo que os semieixos maior e menor de sua órbita medem, respectivamente, 4 UA e 3,31 UA.**

Para a resolução do problema será usada as seguintes habilidades da BNCC:

- **EM13MAT301** – Resolver e elaborar problemas que envolvam conhecimentos algébricos, geométricos ou estatísticos, utilizando diferentes linguagens matemáticas, incluindo representações gráficas, tabelas e fórmulas, como ferramentas para modelar e

investigar situações do cotidiano, de outras áreas do conhecimento e de contextos históricos ou sociais.

- **EM13MAT302** – Analisar e representar geometricamente relações entre grandezas (como as de uma órbita elíptica), com base nos conceitos de geometria analítica e funções, interpretando seus significados no contexto do problema.
- **EM13MAT405** – Utilizar modelos matemáticos para representar fenômenos periódicos ou cíclicos, como o movimento orbital de planetas, analisando e prevendo comportamentos com base em dados e parâmetros.
- **EM13CNT103** (interdisciplinar com Ciências da Natureza) – Compreender a estrutura e a dinâmica do universo, a partir de conceitos da astronomia e da física, relacionando-os com os modelos matemáticos utilizados na descrição dos movimentos planetários.

Solução:

Aqui estão os **quatro passos clássicos para a resolução de problemas segundo George Pólya** (1897-1985):

Passo 1: Compreender o problema

1.1 - O que se pede?

O problema pede para calcular a distância do sol em relação ao afélio e o periélio. Para isso, pode-se usar as equações (7) e (8), enunciada no problema.

De acordo com o enunciado do problema 2, para o cálculo da distância entre o sol (S) ao Periélio (P) e o Afélio (A), será necessário encontrar o valor da excentricidade (e). Desse modo, para que possamos encontra-la precisaremos também encontrar a distância entre o centro (D) e o ponto (S).

1.2 - Quais são os dados disponíveis?

Foram disponibilizados os comprimentos dos semieixos (maior e menor) que compõe sua orbita.

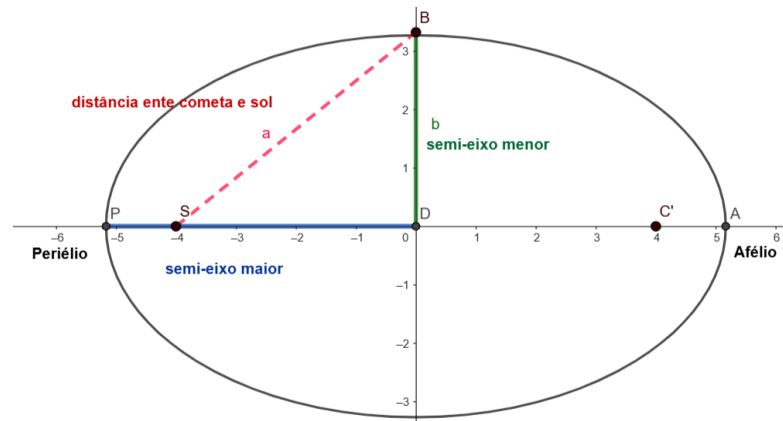
- Semi-eixo menor (b) = 3,31 UA
- Semi-eixo maior (a) = 4 UA

Passo 2: Construir uma estratégia

2.1- É possível representar ou reescrever o problema?

A Figura 5 produzida no software GeoGebra, apresenta a forma geométrica do problema 1.

Figura 5: Interpretação Geométrica do problema 1



Autor 2025 - GeoGebra Classic

Passo 3: Executar a estratégia

3.1 - Aplicar a estratégia escolhida com atenção.

Assim, para encontrar a medida de (e) , iremos recorrer ao teorema de Pitágoras. Substituindo os valores de a e b , que representam os semi-eixos maior e menor, teremos.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

$$\sqrt{4^2 - 3,31^2} \approx 2,2 \text{ UA}$$

Já sabemos que $c \approx 2,2$ e $a \approx 5,2$ agora já podemos obter o valor de (e) . Onde: c é a distância do centro da elipse até um dos focos, a é o semi-eixo maior da elipse.

$$e = \frac{c}{a} \approx 0,42$$

Como já obtivemos o valor de (e) , agora poderemos encontrar as distancias solicitadas apresentadas nas equações (7) e (8).

- Distância do periélio: $r_p = a(1 - e) \Rightarrow 5,2(1 - 0,42) = 3,01 \text{ UA}$
- Distância do afélio: $r_A = a(1 + e) \Rightarrow r_A = 5,2(1 + 0,42) = 7,38 \text{ UA}$

Passo 4: Revisar e verificar a solução

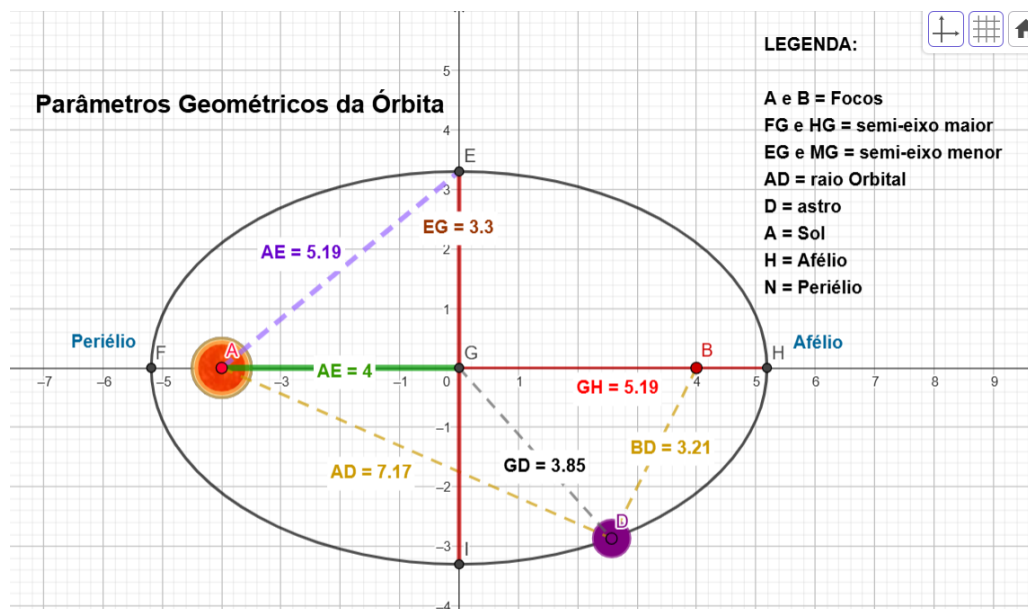
4.1 - A resposta faz sentido? Os cálculos estão corretos?

Sim, os cálculos revisados estão corretos e coerentes com os dados disponíveis sobre o cometa 15P/Finlay. De acordo com a página da Wikipédia, respeitando os parâmetros orbitais do cometa.

4.2 - Existe outro método que poderia ser usado?

O Software GeoGebra também foi usado para verificar a solução. A partir da animação produzida, foi possível medir as distâncias entre o Sol e os pontos de afélio e periélio, conferindo que os cálculos feitos manualmente estavam corretos e que a solução fazia sentido de acordo com a visualização.

Figura 6: Simulação 1



Autor 2025 - GeoGebra Classic

Disponível em: [Parâmetros geométricos da elipse – GeoGebra](#)

5.2 - Problema 2

Primeira Lei de Kepler

“Todos os planetas se movem em órbitas elípticas em torno do Sol que ocupa um dos focos.”

Nesse contexto, podemos entender a elipse como sendo uma curva que descreve um plano em torno de dois focos, de forma que, para todos os pontos da curva, a soma das duas distâncias até os focos é constante. Ou seja, uma elipse é mais ou menos como um círculo alongado e simétrico. Quanto mais alongado, maior sua excentricidade. A órbita de qualquer astro será, então, descrita por uma elipse.

Problema 2

Analise e justifique baseando-se nos conceitos apresentados sobre as Lei de Kepler.

- a) **A órbita dos planetas é circular?**
- b) **O Sol ocupa o centro da órbita elíptica dos planetas?**
- c) **A distância entre um planeta e o Sol muda durante a órbita?**
- d) **Todos os planetas possuem a mesma excentricidade orbital?**

Habilidades necessárias da BNCC para a resolução do problema:

- **EM13CNT103** - Compreender a estrutura e a dinâmica do universo com base em teorias, modelos e leis físicas, como as Leis de Kepler, reconhecendo a natureza científica dessas explicações.
- **EM13MAT301** - Resolver e elaborar problemas a partir da construção de modelos geométricos e matemáticos (como a elipse), articulando conceitos para interpretar fenômenos naturais.
- **EM13MAT302** - Utilizar conceitos de geometria analítica (como cônicas e distâncias) para representar situações reais ou de outras áreas do conhecimento.

Solução:

Solução do problema com base nos passos de George Polya.

Passo 1: Compreender o problema - Analisar afirmações sobre as órbitas planetárias com base nas Leis de Kepler.

1.1 - O que está sendo perguntado?

- Se as proposições são verdadeiras ou falsas e por quê.

1.2 - O que sabemos?

- As órbitas dos planetas são elipses (1ª Lei de Kepler).
- O Sol está em um dos focos da elipse, não no centro.

- A distância entre o planeta e o Sol varia ao longo da órbita.
- Cada planeta possui uma excentricidade orbital diferente.

Passo 2: Planejar uma estratégia - Usar as três Leis de Kepler como base para analisar cada item.

- 1ª Lei (Lei das Órbitas): Os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos.
- 2ª Lei (Lei das Áreas): O planeta varre áreas iguais em tempos iguais → velocidade orbital varia.
- 3ª Lei (Lei dos Períodos): A razão entre o quadrado do período orbital e o cubo do semi-eixo maior é constante.

Complementar com noções de excentricidade e geometria da elipse.

Passo 3: Executar o plano - Analisar cada alternativa.

a) *A órbita dos planetas é circular?*

Não. De acordo com a 1ª Lei de Kepler, as órbitas são elípticas, embora algumas tenham baixa excentricidade e se aproximem de um círculo.

b) *O Sol ocupa o centro da órbita elíptica dos planetas?*

Não. O Sol está em um dos focos da elipse, não no centro.

c) *A distância entre um planeta e o Sol muda durante a órbita?*

Sim. Como a órbita é uma elipse, a distância entre o planeta e o Sol varia constantemente, sendo mínima no periélio e máxima no afélio.

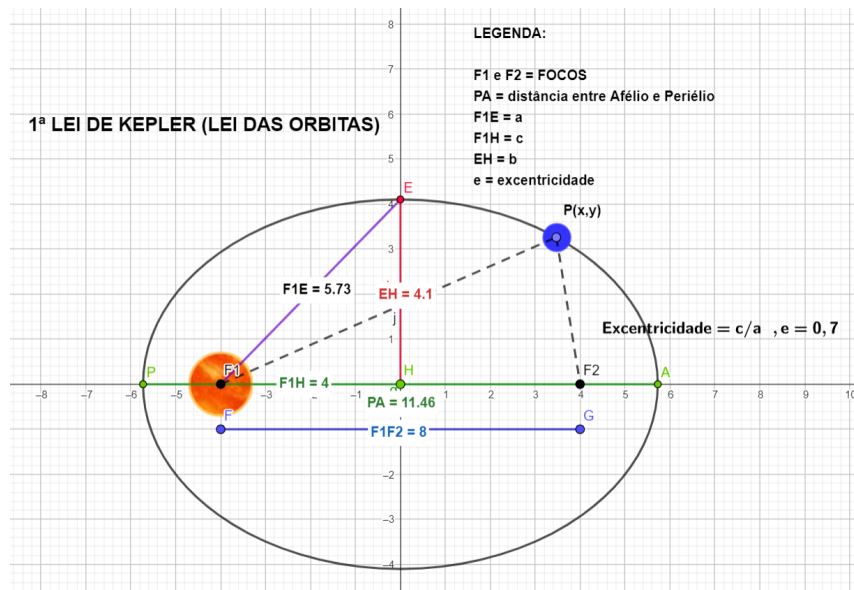
d) *Todos os planetas possuem a mesma excentricidade orbital?*

Não. Cada planeta tem uma excentricidade diferente, o que determina o quanto sua órbita é “achatada”.

Passo 4: Rever e verificar

Todas as respostas foram justificadas com base nas Leis de Kepler e foi verificado o vocabulário científico se está sendo usado corretamente. Os conceitos de elipse, foco e excentricidade foram aplicados corretamente e apresentados na Animação 2.

Figura 7: Animação 2



Autor 2025 - GeoGebra Classic
 Disponível em: [lei das órbitas – GeoGebra](#)

5.3 - Problema 3

Excentricidade e Forma da Órbita.

A excentricidade orbital é um conceito fundamental na astronomia que descreve a forma da órbita de um objeto celeste ao redor de outro. Ela mede a quão alongada ou circular é a órbita de um objeto em relação a uma órbita perfeitamente circular. A excentricidade orbital é representada por um número entre 0 e 1, onde 0 indica uma órbita perfeitamente circular e 1 indica uma órbita altamente alongada. De acordo com a tabela abaixo poderemos classificar a excentricidade das órbitas.

Tabela I: Medida de Excentricidade das órbitas

Excentricidade	Classificação da órbita
$e = 0$,	Perfeitamente circular.
$0 < e < 0,3$	Levemente excêntrica.
$0,3 \leq e < 0,6$	Moderadamente excêntrica.
$0,6 \leq e < 1$	Alta excentricidade.
$e = 1$	Parabólica.
$e > 1$	Hiperbólica.

Fonte: <https://11nq.com/NxFYu>

Problema 3

Nenhum planeta do Sistema Solar tem excentricidade de 0,9. Uma excentricidade tão alta está mais associada a cometas ou objetos do cinturão de Kuiper ou nuvem de Oort, como o cometa Halley. Disto isto, **o 2P/Encke é um cometa periódico famoso que orbita o Sol com excentricidade orbital de 0,85. Isso significa que sua órbita é mais próxima de uma circunferência ou uma elipse alongada?**

Habilidades da BNCC necessárias para resolver o problema:

- **EM13MAT301** - Resolver e elaborar problemas que envolvam conhecimentos algébricos e geométricos, utilizando modelos matemáticos para representar e investigar situações do cotidiano e de outras áreas do conhecimento.
- **EM13MAT302** - Utilizar representações geométricas no plano para analisar situações reais ou de outras áreas do conhecimento, como a geometria das órbitas elípticas e o conceito de distância focal.
- **EM13CNT103** - Compreender e explicar, com base em teorias e modelos, a estrutura e a dinâmica do universo, como os movimentos dos corpos celestes e suas órbitas.

Solução:

Aplicação dos passos de George Polya ao problema:

Passo 1: Compreender o problema

Pergunta: A órbita do cometa 2P/Encke, com excentricidade de 0,85, é mais próxima de uma circunferência ou de uma elipse alongada?

Informações importantes dadas:

- Nenhum planeta do Sistema Solar tem excentricidade tão alta (0,9).
- Excentricidades altas estão associadas a cometas, como o 2P/Encke.
- O 2P/Encke tem excentricidade de 0,85.

Conceito-chave: A excentricidade orbital (e) mede o “achatamento” de uma elipse:

- $e = 0$ - Circunferência perfeita.
- $0 < e < 1$ - Elipse (quanto maior o valor, mais alongada).
- $e \approx 1$ - Elipse extremamente alongada, quase aberta.

Passo 2: Fazer um plano (estratégia)

- Relacionar o valor da excentricidade ao formato da órbita.

- Comparar com outros exemplos (planetas → baixa excentricidade; cometas → alta excentricidade). E concluir com base na definição matemática de elipse.

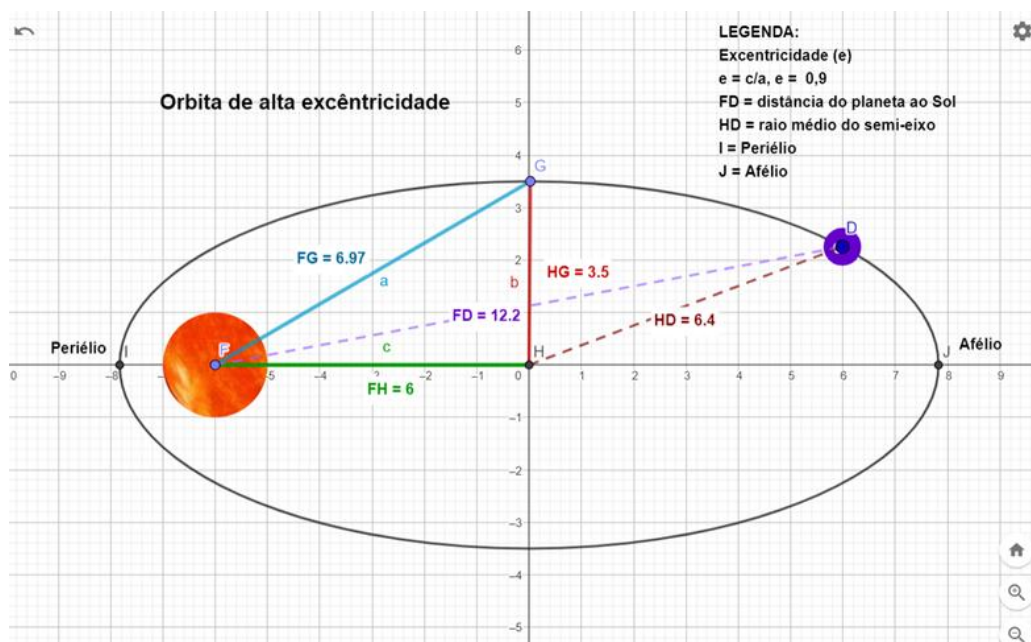
Passo 3: Executar o plano

- O valor da excentricidade do 2P/Encke é 0,85, o que é muito maior do que o dos planetas (que variam de $\sim 0,006$ a $0,2$).
- Isso indica que sua órbita é muito alongada.
- Portanto, a órbita do cometa 2P/Encke é uma elipse alongada, e não uma circunferência.

Passo 4: Verificar e revisar

A conclusão é consistente com o conceito de excentricidade e o exemplo do cometa Halley reforça o raciocínio, quanto maior a excentricidade, mais esticada a órbita. A resposta está justificada com base em dados comparativos e definição matemática e apresentada na Animação 3.

Figura 8: Animação 3



Fonte: Autor 2025 - GeoGebra Classic

Disponível em: [Orbita de alta excentricidade – GeoGebra](#)

5.4 - Problema 4

Como já foi enunciado na equação (1) a excentricidade (e) de uma órbita elíptica é dada por:

$$e = \frac{c}{a}$$

Onde:

- a é a distância do centro da elipse ao foco (onde o Sol está localizado),
- c é o semi-eixo maior da elipse.

Outra galáxia além da via Láctea?

A Nasa divulgou, na 2ª feira (25.out.2021), a possível descoberta de um planeta fora da Via Láctea. Segundo a agência especial norte-americana, o “candidato” a exoplaneta tem o tamanho aproximado de Saturno que é 9 vezes maior do que a Terra e orbita um astro na galáxia M51 (Messier 51), a cerca de 28 milhões de anos-luz do nosso planeta. <https://encurtador.com.br/Pz2BK>

Problema 4

Imaginemos então, que nessa mesma galáxia exista um planeta chamado LAFU e a informação que temos é que a órbita do planeta LAFU tem um semi-eixo maior de 6,63 UA e a distância do centro da órbita ao Sol é 3 UA. **Qual é a excentricidade e como deveremos classificar a órbita do planeta LAFU?**

Habilidades da BNCC envolvidas na resolução do problema

- **EM13MAT301** - Resolver e elaborar problemas a partir da construção de modelos geométricos e matemáticos, articulando conceitos para interpretar fenômenos naturais.
- **EM13MAT302** - Utilizar representações geométricas (como equações de cônicas) para analisar e resolver problemas de diferentes áreas do conhecimento.

Solução:

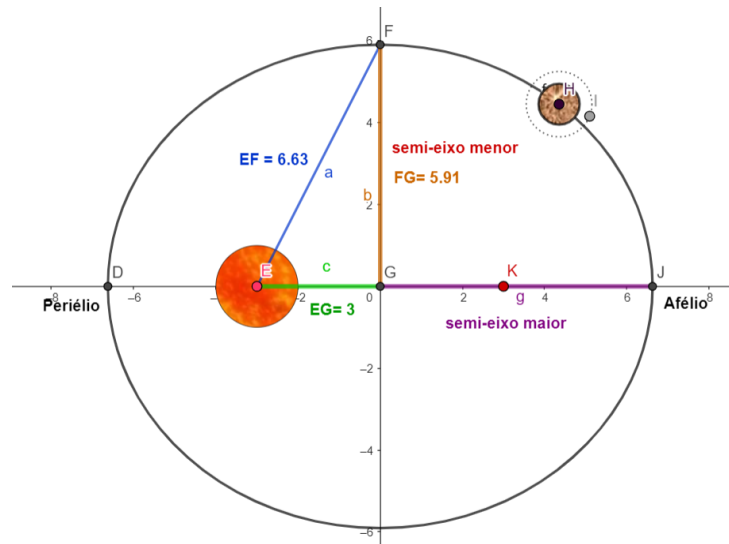
Passos de George Polya aplicados:

Passo 1: Compreender o problema

1.1 - O que é dado?

- Semieixo maior (a) = 6,63 UA
- Distância do centro da órbita ao Sol (c) = 3 UA

Figura 9: Representação Geométrica do problema 4.



Fonte: Autor 2025 - GeoGebra Classic

1.2 - O que se quer descobrir?

- O valor da excentricidade (e)
- A classificação da órbita: circular, levemente elíptica ou muito alonga

Passo 2: Fazer um plano (estratégia)

- Aplicar a fórmula da excentricidade da elipse.
- Substituir os valores de c e a .
- Calcular e interpretar o resultado:
- $e = 0$ - Circunferência
- $0 < e < 1$ - Elipse (quanto mais próximo de 1, mais alongada)

Passo 3. Executar o plano (resolver)

Como a medida EF, apresentado na Figura 9 é a mesma medida dos segmentos DG e GJ, o que nos garante a relação fundamental da elipse $a^2 + b^2 = c^2$, sendo assim, o semi-eixo maior terá a medida de 6,63 UA e c é a distância do centro da elipse ao foco (onde o Sol está localizado) mede 3 UA,

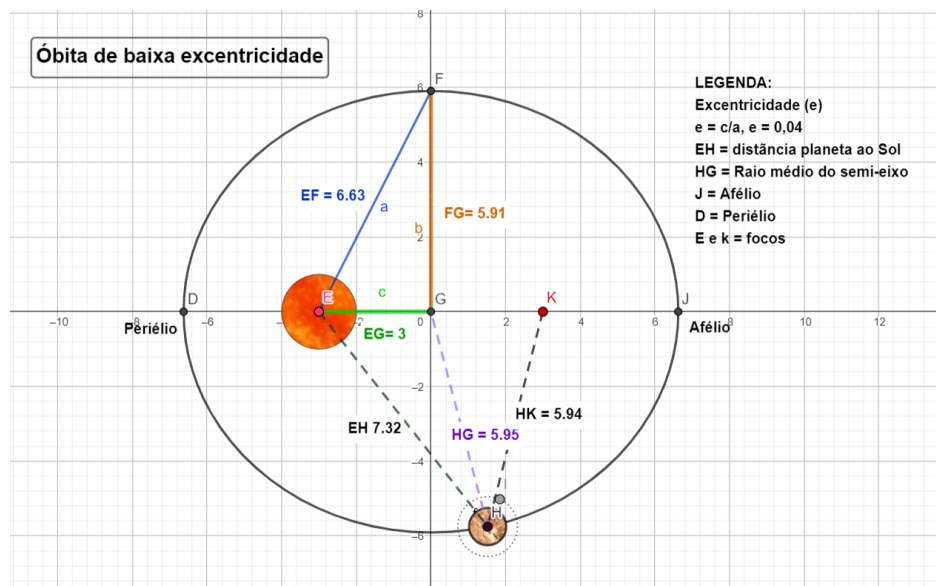
Como já temos os valores necessários para calcular a excentricidade foi usado a equação (1).

$$e = \frac{c}{a} \approx 0,045 \text{ UA}$$

Passo 4: Rever e verificar

O valor faz sentido: está entre 0 e 1, indicando uma órbita elíptica. Como $e \approx 0,45$, trata-se de uma elipse moderadamente alongada. Assim, poderemos observar os dados apresentados na animação 4.

Figura 10: Simulação 4



Fonte: Autor 2025 - GeoGebra Classic

Disponível em: [Óbita de baixa excentricidade – GeoGebra](#)

6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática por trás das Leis de Kepler é fundamental para compreender o movimento dos planetas e a estrutura do universo. As equações derivadas dessas leis fornecem uma descrição precisa das órbitas planetárias, demonstrando que elas são elípticas, com o Sol em um dos focos.

O uso do GeoGebra potencializa a aplicação do método de Polya, pois permite que os alunos visualizem conceitos matemáticos de maneira interativa e dinâmica.

Portanto, a combinação do método de Polya com o GeoGebra se mostra altamente eficaz no ensino da matemática, auxiliando no desenvolvimento do raciocínio lógico e na autonomia dos estudantes na resolução de problemas.

7 - REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- Brasil. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 23 fev. 2025.
- DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações. Volume 3. São Paulo: Ática, 2005.
- GEOGEBRA. Aplicativos Matemáticos. Disponível em <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 27 fevereiro 2025.
- Geometria Analítica/ Steinbruch, Alfredo, Winterle, Paulo. – 2º edição – São Paulo: McGraw-Hill, 1987
- HELERBROCK, Rafael. "Leis de Kepler"; *Brasil Escola*. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/fisica/leis-kepler.htm>. Acesso em 18 de fevereiro de 2025.
- IEZZI, Gelson et al. Matemática: Volume Único. 1. ed. São Paulo: Atual, 2006.
- KEPLER, S. O.; SARAIVA, M. F. O. *Astronomia & Astrofísica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014. p. 80.
- POLYA, G. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- RAMALHO, Francisco; GILBERTO, Nicolau; SOARES, Paulo Antônio. Fundamentos da Física, parte 3. Brasil, São Paulo, 2014
- SILVA, Luiz Paulo Moreira. "O que é elipse? Uma figura geométrica?"; *Brasil Escola*. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-elipse.htm>. Acesso em 18 de fevereiro de 2025.