



UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA  
CENTRO DAS CIÊNCIAS EXATAS E DAS TECNOLOGIAS - CCET  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -  
PROFMAT

**BRUNA KARLA PEREIRA DE SOUZA CASTRO**

**A RELAÇÃO DE EULER NO ENSINO DE GEOMETRIA: Uma  
Análise dos Livros Didáticos e a Exploração de Poliedros em  
Atividades Investigativas**

BARREIRAS

2025

**BRUNA KARLA PEREIRA DE SOUZA CASTRO**

**A RELAÇÃO DE EULER NO ENSINO DE GEOMETRIA: Uma  
Análise dos Livros Didáticos e a Exploração de Poliedros em  
Atividades Investigativas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Federal do Oeste da Bahia como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vinicius Souza Bittencourt

BARREIRAS

2025

# **A RELAÇÃO DE EULER NO ENSINO DE GEOMETRIA: Uma Análise dos Livros Didáticos e a Exploração de Poliedros em Atividades Investigativas**

Por

**BRUNA KARLA PEREIRA DE SOUZA CASTRO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Federal do Oeste da Bahia, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Souza Bittencourt

## **BANCA EXAMINADORA:**

Prof. Dr. Flavio Ligório Silva

Doutor em Educação pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA)

Documento assinado digitalmente  
 **FLAVIO DE LIGORIO SILVA**  
Data: 24/04/2025 15:59:56-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Ilton Ferreira de Menezes

Doutor em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG)

Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB)

Documento assinado digitalmente  
 **ILTON FERREIRA DE MENEZES**  
Data: 24/04/2025 09:01:01-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Vinícius Souza Bittencourt (Orientador)

Doutor em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP)

Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB)

Documento assinado digitalmente  
 **VINICIUS SOUZA BITTENCOURT**  
Data: 23/04/2025 17:43:18-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Resultado: Aprovada.

Barreiras, 27 de fevereiro de 2025

## FICHA CATALOGRÁFICA

---

C355            Castro, Bruna Karla Pereira de Souza.  
                  A relação de Euler no ensino de geometria: uma análise dos livros didáticos  
                  e a exploração de poliedros em atividades investigativas. / Bruna Karla  
                  Pereira de Souza Castro. – 2025.

105 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Vinicius Souza Bittencourt  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro  
das Ciências Exatas e das tecnologias – CCET. Programa de Pós-  
Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

1. Relação de Euler. 2. Ensino de Matemática. 3. Atividades Investigativas.
4. Poliedros. 5. Livros Didáticos. I. Bittencourt, Vinicius Souza. II. Universidade  
Federal do Oeste da Bahia – Centro de Humanidades. III. Título.

CDD 510

---

**Biblioteca Universitária de Barreiras – UFOB**

*A Geometria existe, como já disse o filósofo,  
por toda a parte.  
É preciso, porém, olhos para vê-la,  
inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.  
O beduíno rude vê as formas geométricas,  
mas, não as entende;  
o sunita entende-as, mas não as admira;  
o artista, enfim, enxerga a perfeição das figuras, compreende o Belo e  
admira a Ordem e a harmonia!  
Deus foi o grande geômetra. Geometrizou a Terra e o Céu.*

***Malba Tahan - Júlio César de Mello e Souza***

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente à Deus por ter me sustentado nos momentos mais difíceis desta jornada. Por ter protegido a mim e a minha família em nossas viagens. Por ter acalentado meus medos e inseguranças e por toda fortaleza nos momentos em que quase desisti.

Agradeço a minha família pelo apoio incondicional, por aguentar minhas crises de ansiedade e insegurança durante toda a minha jornada. Ao meu esposo, Francisco Ricardo de Castro, em especial, pelas broncas quando eu precisava e por não me deixar desistir quando o cansaço desta caminhada tomava conta.

Agradecer imensamente a minha primogênita, Victória Eloise, por me ajudar no desenvolvimento do meu trabalho, buscando e trabalhando na impressão dos sólidos e em cada ajuda que precisei. Aos meus filhos, Maria Antônia e Luís Antônio, pela sua existência, pois sem vocês, eu não estaria lutando por melhoria em minha vida acadêmica.

Agradecer *in memoriam*, a minha avó Olindina Pereira dos Santos e minha mãe, Maria da Conceição Pereira dos Santos e Souza que apesar de não presenciarem a minha jornada em vida, estavam sempre em meus pensamentos, sei o quanto vocês estariam felizes por mais esta conquista.

Aos meus colegas de turma, saibam que levarei comigo todas as nossas trocas em sala de aula e os momentos de confraternização. Vocês fizeram parte de um momento único em minha vida. Obrigada por todo apoio e ajuda durante todo o nosso curso. Em especial, o meu agradecimento ao meu colega Matheus por todas as caronas até a rodoviária, você foi fundamental nesta rede de apoio.

Aos meus amigos e amigas, Amo vocês!!

Aos conhecidos e colegas de trabalho que torceram por mim a cada conquista, não esquecerei cada gesto de carinho que recebi.

Aos meus alunos do CEPMG Dom Prudêncio que alegam meu caminho, mesmo nas adversidades. Saibam que se hoje sou melhor que ontem foi por acreditar que vocês merecem a melhor educação que posso proporcionar.

Aos meus ex-alunos que torceram por mim, que me mandaram mensagem de carinho e incentivo. Todos vocês fazem parte deste processo!

Ao meu Professor Orientador, Vinícius Bittencourt por toda colaboração, o Senhor foi incrível!

Caros Mestres, meus professores do Curso de Mestrado do PROFMAT meu eterno agradecimento por tudo, pelo conhecimento compartilhado, pela paciência, saibam que hoje

exerço à docência muito melhor por que todos contribuíram para minha formação. E também a todos os funcionários e pessoas que tive a oportunidade de compartilhar meus momentos na instituição.

## RESUMO

O presente estudo investiga o uso da Relação de Euler como ferramenta pedagógica no ensino de Geometria, com ênfase em atividades investigativas que promovam o pensamento crítico, a autonomia dos estudantes e a construção ativa do conhecimento. Para isso, foi realizada uma análise de livros didáticos de Matemática aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para o Ensino Fundamental e Médio, com foco na forma como a Relação de Euler é abordada. A investigação revelou que, em grande parte das obras, o conteúdo é apresentado de maneira superficial, sem articulação com metodologias investigativas ou com os princípios da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A pesquisa fundamenta-se na metodologia AI&SD (Análise Institucional e Sequência Didática), propondo como produto educacional a aplicação de tarefas investigativas com poliedros de Platão, Arquimedes, Kepler-Poinsot e toroidais, confeccionados por meio da tecnologia de impressão 3D. Essa proposta permite aos alunos explorar, de forma prática e visual, a validade da Relação de Euler em diferentes sólidos geométricos. Os resultados apontam que a inserção de materiais concretos e de tecnologias digitais no processo de ensino pode tornar o aprendizado mais significativo, contribuindo para o desenvolvimento de competências previstas na BNCC e habilidades avaliadas nas escalas do SAEB.

**Palavras-chave:** Relação de Euler; Ensino de Matemática; Atividades Investigativas; Poliedros; Livros Didáticos; BNCC; Impressão 3D.

## ABSTRACT

This study investigates the use of Euler's Relation as a pedagogical tool in the teaching of Geometry, emphasizing investigative activities that promote students' critical thinking, autonomy, and active knowledge construction. To this end, an analysis was carried out on Mathematics textbooks approved by the National Textbook Program (PNLD) for both Primary and Secondary Education, focusing on how Euler's Relation is addressed. The investigation revealed that, in most cases, the content is presented in a superficial manner, with little connection to investigative methodologies or the principles of the Brazilian National Common Curricular Base (BNCC). The research is grounded in the AI&SD (Institutional Analysis and Didactic Sequence) methodology and proposes, as an educational product, the implementation of investigative tasks using Platonic, Archimedean, Kepler-Poinsot and toroidal polyhedra, produced with 3D printing technology. This approach allows students to explore, in a practical and visual way, the validity of Euler's Relation in different geometric solids. The findings suggest that integrating concrete materials and digital technologies into the teaching process can make learning more meaningful, contributing to the development of competencies outlined in the BNCC and skills assessed by Brazil's Basic Education Assessment System (SAEB).

**Keywords:** Euler's Relation; Mathematics Education; Investigative Activities; Polyhedra; Textbook Analysis; BNCC; 3D Printing.

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

|          |                                                      |
|----------|------------------------------------------------------|
| AI.      | Análise Institucional                                |
| AI&SD.   | Análise Didática & Sequência Didática                |
| BNCC.    | Base Nacional Comum Curricular                       |
| CEP.     | Conselho de Ética em Pesquisa                        |
| DAEB.    | Diretoria de Avaliação da Educação Básica            |
| ED.      | Dispositivo Experimental                             |
| EF.      | Ensino Fundamental                                   |
| EM.      | Ensino Médio                                         |
| ENEM.    | Exame Nacional do Ensino Médio                       |
| INEP.    | Instituto Nacional de Estudo e Pesquisa              |
| IFBA.    | Instituto Federal da Bahia                           |
| UFMG.    | Universidade Federal de Minas Gerais                 |
| LD.      | Livro Didático                                       |
| MEC.     | Ministério da Educação                               |
| PCN.     | Parâmetros Curriculares Nacionais                    |
| PE.      | Protocolo Experimental                               |
| PLA.     | Ácido Poliático                                      |
| PNLD.    | Programa Nacional do Livro Didático                  |
| PCN.     | Parâmetros Curriculares Nacionais                    |
| PPC.     | Projeto Político do Curso                            |
| PROFMAT. | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| SAEB.    | Sistema de Avaliação da Educação Básica              |
| SBEM.    | Sociedade Brasileira de Educação Matemática          |
| SD.      | Sequência Didática                                   |
| UEFS.    | Universidade Estadual de Feira de Santana            |
| UFBA.    | Universidade Federal da Bahia                        |
| UFOB.    | Universidade Federal do Oeste da Bahia               |
| UFG.     | Universidade Federal de Goiás                        |
| UNEB.    | Universidade do Estado da Bahia                      |
| USP.     | Universidade de São Paulo                            |

## LISTA DE FIGURAS

|                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 - Exemplos de poliedros e não poliedros .....       | 22 |
| Figura 2 - Poliedro.....                                     | 23 |
| Figura 3 - Daeb/Inep - Escalas de Proficiência do SAEB ..... | 29 |
| Figura 4 - Poliedros de Platão.....                          | 36 |
| Figura 5 - Relação de Euler .....                            | 37 |
| Figura 6 - Atividade presente no Livro A.....                | 38 |
| Figura 7 - Atividade presente no Livro B.....                | 39 |
| Figura 8 - Algumas atividades presentes no Livro C .....     | 42 |
| Figura 9 - Análise da atividade 5.....                       | 42 |
| Figura 10 - Momentos e fases da AI&SD .....                  | 46 |
| Figura 11 - Impressora Ender-3 S1 Marca Creality .....       | 57 |
| Figura 12 - Conjunto de Poliedros de Platão.....             | 62 |
| Figura 13 - Conjunto de Poliedros Arquimedianos .....        | 63 |
| Figura 14 - Conjunto de poliedros de Kepler-Poinsot.....     | 64 |
| Figura 15 - Poliedros Toroidais .....                        | 64 |
| Figura 16 - Sacolas personalizadas do kit de materiais ..... | 65 |
| Figura 17 - Portal com Modelos de poliedros em papel.....    | 68 |

## **LISTA DE TABELAS**

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 - Quantidade de livros aprovados no PNLD.....                     | 30 |
| Tabela 2 - Valores gastos para a confecção de um kit com 31 poliedros..... | 59 |

## LISTA DE QUADROS

|                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Quadro 1 - Habilidades da BNCC relacionadas ao ensino de poliedros .....           | 20 |
| Quadro 2 - Competências específicas de Matemática da BNCC .....                    | 30 |
| Quadro 3 - Comparação da Abordagem da Relação de Euler.....                        | 40 |
| Quadro 4 - Resumo das principais diferenças entre os dois livros analisados: ..... | 43 |
| Quadro 5 - Elementos constituintes de uma instituição .....                        | 45 |
| Quadro 6 - Detalhamento de AI&SD .....                                             | 47 |
| Quadro 7 - Estrutura da Análise do LD .....                                        | 49 |
| Quadro 8 - Descrição de uma SD .....                                               | 49 |
| Quadro 9 - Análise a priori da Tarefa T .....                                      | 50 |
| Quadro 10 - Critérios para a análise a posteriori da Tarefa T .....                | 51 |
| Quadro 11 - Links dos arquivos dos sólidos impressos.....                          | 58 |

## SUMÁRIO

|                                                                                                       |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>INTRODUÇÃO .....</b>                                                                               | <b>14</b> |
| <b>1.1 Poliedros: um breve passeio na História .....</b>                                              | <b>16</b> |
| <b>1.2 As Múltiplas Demonstrações da Relação de Euler .....</b>                                       | <b>18</b> |
| <b>1.3 O ensino de poliedros no Brasil: um resumo de diversas pesquisas .....</b>                     | <b>20</b> |
| <b>1.4 Geometria e suas Transformações na Educação Básica no Brasil.....</b>                          | <b>26</b> |
| <b>1.5 Ensino de Geometria Espacial na BNCC .....</b>                                                 | <b>26</b> |
| <b>2 O TEOREMA DE EULER NOS LIVROS DIDÁTICOS.....</b>                                                 | <b>30</b> |
| <b>2.1 Metodologia: Explorando a Análise de Conteúdo .....</b>                                        | <b>31</b> |
| <b>2.2 O Processo de Coleta de Dados .....</b>                                                        | <b>32</b> |
| <b>2.3 Análise dos Livros Didáticos do Ensino Fundamental.....</b>                                    | <b>34</b> |
| <b>2.3.1 Análise Comparativa dos Livros Didáticos do Ensino Fundamental.....</b>                      | <b>35</b> |
| <b>2.3.2 Análise Comparativa da Abordagem da Relação de Euler nos Livros A e B.....</b>               | <b>38</b> |
| <b>2.4 Análise dos Livros Didáticos do Ensino Médio.....</b>                                          | <b>41</b> |
| <b>2.4.1 Análise Comparativa dos Livros Didáticos do Ensino Médio .....</b>                           | <b>41</b> |
| <b>3 METODOLOGIA DA PESQUISA.....</b>                                                                 | <b>44</b> |
| <b>3.1 Análise Institucional &amp; Sequência Didática (AI&amp;SD) .....</b>                           | <b>44</b> |
| <b>3.2 Percurso Metodológico da Pesquisa.....</b>                                                     | <b>52</b> |
| <b>4 MATERIAIS CONCRETOS E ATIVIDADES INVESTIGATIVAS COM<br/>DIFERENTES SÓLIDOS GEOMÉTRICOS .....</b> | <b>54</b> |
| <b>4.1 Impressão 3D e o Ensino de Geometria.....</b>                                                  | <b>54</b> |
| <b>4.2 Potencialidades da Impressão 3D na Educação.....</b>                                           | <b>55</b> |
| <b>4.3 Confeção dos Sólidos .....</b>                                                                 | <b>57</b> |
| <b>4.4 Sólidos Geométricos Produzidos .....</b>                                                       | <b>57</b> |
| <b>4.5 Links dos Arquivos para Impressão .....</b>                                                    | <b>58</b> |

|                                                                                 |           |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4.6 Confeção dos Kits .....</b>                                              | <b>58</b> |
| <b>4.7 Aplicação dos Sólidos em Atividades Didáticas .....</b>                  | <b>59</b> |
| <b>4.8 Investigação da Relação de Euler com Poliedros Impressos em 3D .....</b> | <b>60</b> |
| <b>4.9 Atividades Propostas .....</b>                                           | <b>66</b> |
| <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>                                                | <b>69</b> |
| <b>REFERÊNCIAS .....</b>                                                        | <b>71</b> |
| <b>APÊNDICE .....</b>                                                           | <b>76</b> |

## INTRODUÇÃO

A Geometria sempre desempenhou um papel essencial no desenvolvimento do pensamento matemático e do raciocínio espacial dos estudantes. Mais do que um conjunto de conceitos abstratos, ela está presente em diversas áreas do conhecimento e no nosso dia a dia. No entanto, a forma como esse conteúdo é apresentado nos livros didáticos pode fazer toda a diferença no aprendizado, influenciando diretamente a maneira como os alunos compreendem e aplicam esses conceitos de forma significativa.

No Brasil, ensinar Geometria tem sido um grande desafio. Apesar de a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) trazer diretrizes bem definidas para sua abordagem no Ensino Fundamental e Médio, ainda enfrentamos obstáculos como a falta de materiais didáticos adequados, a formação docente limitada e uma prática pedagógica que, muitas vezes, se prende à simples memorização de fórmulas em vez da exploração conceitual e investigativa. Além disso, a ausência de recursos concretos e metodologias mais experimentais acaba comprometendo a construção do conhecimento geométrico pelos estudantes.

Diante desse cenário, é fundamental buscar estratégias que tornem o ensino da Geometria mais acessível e eficaz. Muitos professores já têm utilizado abordagens que envolvem a construção de modelos geométricos, seja com materiais simples, como palitos, canudos e barbantes, seja com a utilização de impressoras 3D, permitindo que os estudantes visualizem e manipulem poliedros de forma concreta.

Com essa perspectiva, este estudo tem como objetivo principal analisar como o Teorema de Euler é abordado nos livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do Ensino Fundamental e Médio. Será verificado se esses materiais incluem outros poliedros além dos de Platão, como os poliedros de Kepler-Poinsot, Arquimedes e os toroidais. A ideia é identificar possíveis lacunas nesses livros no que diz respeito ao uso de atividades que incentivem o pensamento crítico e a formulação de conjecturas, como ocorre com a Relação de Euler. Além disso, pretendo apresentar metodologias investigativas e demonstrar como o uso de poliedros impressos em PLA, um termoplástico biodegradável feito de amido de milho ou cana-de-açúcar, pode tornar o ensino mais participativo e eficiente.

Este estudo também examina como o ensino por meio da experimentação pode estimular o pensamento crítico e a autonomia dos estudantes, permitindo que eles construam seu conhecimento de maneira mais ativa e significativa.

Para organizar melhor essa investigação, dividi o trabalho em quatro capítulos principais. No primeiro capítulo, analiso a Relação de Euler nos livros didáticos e sua conexão com a BNCC, destacando como o conteúdo é tratado e suas implicações no ensino da Geometria. No segundo capítulo, analiso a importância da investigação matemática na aprendizagem, trazendo estratégias que possibilitam um ensino mais interativo e envolvente. No terceiro capítulo apresento a fundamentação teórica que fundamenta a pesquisa, assim como as etapas que foram completadas. Por fim, no quarto capítulo, apresento a aplicabilidade de materiais concretos no ensino da Geometria, com um enfoque especial no uso de sólidos geométricos impressos em 3D e na implementação de atividades investigativas em sala de aula.

Dessa forma, este estudo pretende oferecer uma análise crítica e uma proposta pedagógica alinhada às diretrizes da BNCC, incentivando um ensino mais dinâmico e centrado na construção do conhecimento pelos alunos. A utilização de recursos concretos e estratégias investigativas tem o potencial de proporcionar uma experiência mais envolvente e interativa, promovendo uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos geométricos.

## **1 ANÁLISE DE ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DO TEOREMA DE EULER NO BRASIL**

A Relação de Euler para poliedros é uma equação fundamental na Geometria Espacial, que estabelece uma propriedade topológica entre as faces, arestas e vértices dos poliedros convexos. Esta fórmula se expressa como  $V - A + F = 2$  e foi enunciada por Leonhard Euler em 1750 (Cromwell, 1997, p. 189), em que  $V$  representa o número de vértices,  $A$  denota o número de arestas e  $F$  indica o número de faces. Embora sua demonstração completa tenha enfrentado diversos desafios ao longo do tempo, matemáticos renomados como Adrien Legendre, Augustin Cauchy e Henri Poincaré contribuíram significativamente para sua validação ao longo dos anos.

Discute-se entre os historiadores, mas sem consenso, que René Descartes fez estudos sobre poliedros e desenvolveu ideias que se aproximam da fórmula, especialmente em seus trabalhos sobre geometria e topologia. Em manuscritos não publicados, ele chegou a estabelecer uma relação entre vértices, arestas e faces de alguns poliedros convexos, mas sem generalizar a inovação como Euler fez em 1758. Já Poincaré generalizou essa fórmula para superfícies tridimensionais, o que abriu portas para novas aplicações na geometria e na topologia. Estudos mais generalistas apontam que o número 2 da Relação de Euler ( $V - A + F = 2$ ) não surge ao acaso. Trata-se da característica de Euler (ou característica de Euler-

Poincaré) que é um invariante topológico, um número que descreve a forma ou a estrutura de um espaço topológico independentemente da forma como ela é deformada. Este invariante foi enunciado por Leonhard Euler para poliedros e generalizado por Henri Poincaré (Lima, 1985).

Nosso objetivo é fazer um breve resumo epistemológico da Relação de Euler no contexto dos poliedros, portanto dentro da Geometria Espacial.

### 1.1 Poliedros: um breve passeio na História

Os poliedros têm sido objeto de estudo desde os tempos antigos. Nosso conhecimento sobre a história dos poliedros provém de fontes egípcias, chinesas e babilônicas que abordavam soluções para problemas relacionados às pirâmides. Há papiros dedicados à construção dessas estruturas que nos oferecem insights sobre o tratamento geométrico desses sólidos na época. Um documento egípcio notável é o Papiro de Rhind, também chamado de Papiro Ahmes em homenagem ao escriba responsável por sua cópia por volta de 1650 a.C.. Este manuscrito foi adquirido em 1858 pelo antiquário escocês Henry Rhind (BOYER, 1974, p.9). O papiro contém alguns problemas geométricos específicos sobre pirâmides (BOYER, 1974, p.13-14). De fato, artefatos e esculturas com formas poliédricas podem ser identificados já na antiguidade. Os poliedros começaram a aparecer nas antigas construções arquitetônicas como cubos e paralelepípedos retangulares durante as primeiras fases das pirâmides no Egito na Antiguidade.

É razoável supor que os membros mais antigos da escola pitagórica tinham familiaridade com propriedades geométricas conhecidas pelos babilônios; mas quando o sumário de Eudemo-Proclo lhes atribui a construção das “figuras cósmicas” (isto é, sólidos regulares) há lugar para dúvidas. O cubo, o octaedro e o dodecaedro podiam talvez ter sido observados em cristais, como o da pirita (dissulfeto de ferro); mas em Euclid’s Elements XIII está dito que os pitagóricos só conheciam três dos poliedros regulares: o tetraedro, o cubo e o dodecaedro. O conhecimento dessa última figura é plausível, dada a descoberta perto de Pádua de um dodecaedro de pedra etrusco datando de antes de 500 a.C. (Boyer, 2019, p. 56-57)

O Livro XIII dos Elementos de Euclides é inteiramente dedicado às propriedades dos cinco poliedros regulares, para um estudo detalhado, recomenda-se a edição bilingue de “Os Elementos (UNESP, 2009), traduzida por Irineu Bicudo. Um poliedro é dito regular se, e somente se, as suas faces são todas congruentes. Neste mesmo livro é demonstrado que não pode haver outro poliedro regular além dos *Poliedros de Platão*: Tetraedro, Hexaedro (Cubo), Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro. Estes cinco poliedros, portanto, são os únicos regulares.

Com o Renascimento, houve um revigoramento do interesse por poliedros, em parte devido aos avanços na arte e na arquitetura, que buscavam incorporar formas matemáticas elegantes e complexas. Leonardo da Vinci, por exemplo, realizou vários desenhos de poliedros para a famosa obra de Luca Pacioli, "De Divina Proportione", explorando a estética dessas figuras. Durante este período, Johannes Kepler, buscando explicações matemáticas para os movimentos planetários, estudou a simetria e a interconexão dos sólidos platônicos. Kepler propôs o modelo do sistema solar baseado nos sólidos platônicos, associando as órbitas dos planetas a essas formas geométricas. Além disso, contribuiu para a descoberta dos sólidos arquimedianos, que são semirregulares e resultam de truncamentos de sólidos platônicos.

Um poliedro é uma figura geométrica espacial composta por um número finito de faces planas poligonais, cujos lados se encontram dois a dois ao longo de arestas, e cuja interseção de três ou mais faces ocorre em vértices. Em sua definição mais formal, um poliedro é o envoltório tridimensional formado por polígonos planos que delimitam um volume no espaço, respeitando a condição de que duas faces se encontram ao longo de uma única aresta, e que não há auto interseções. Essa definição abrange tanto os poliedros convexos, nos quais qualquer segmento de reta que liga dois pontos internos está inteiramente contido na figura, quanto os não convexos, que apresentam concavidades ou interseções mais complexas. Segundo Lanner de Moura (2022), "os poliedros são objetos tridimensionais formados por superfícies planas e poligonais, sendo considerados fundamentais no estudo da geometria espacial e na modelagem matemática de formas no mundo físico".

O estudo dos poliedros evoluiu para abarcar não apenas a Geometria, mas também a Topologia e a Teoria dos Grafos. Augustin-Louis Cauchy estabeleceu, no século XIX, um teorema fundamental sobre a rigidez dos poliedros convexos, consolidando a compreensão de como suas faces, arestas e vértices interagem. Já no século XX, o matemático suíço Ludwig Schläfli expandiu o conhecimento ao explorar poliedros em dimensões superiores, dando origem aos politopos. Com o uso de computadores, a pesquisa sobre poliedros inclui hoje aplicações em algoritmos e modelagem tridimensional, com implicações em áreas como arquitetura, química e biologia. Assim, a trajetória do estudo dos poliedros ilustra um fascinante diálogo entre estética e ciência, envolto em diversos esforços humanos na busca de padrões e "ordem" no mundo natural.

## 1.2 As Múltiplas Demonstrações da Relação de Euler

A elegância da **Relação de Euler**, expressa pela fórmula:

$$V - A + F = 2,$$

onde  $V$ ,  $A$  e  $F$  representam respectivamente os números de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, fez com que esse teorema se tornasse não apenas um marco da geometria, mas também uma fonte inesgotável de investigações matemáticas. Desde que Leonhard Euler apresentou essa relação em 1750, matemáticos de diferentes épocas e áreas do conhecimento buscaram compreendê-la, refiná-la e demonstrá-la sob variados pontos de vista (BOYER; MERZBACH, 2012).

Ao longo da história da matemática, foram propostas dezenas de demonstrações diferentes da fórmula de Euler. Cada uma parte de uma abordagem distinta: algumas são essencialmente geométricas, fundamentadas na desmontagem dos poliedros e na visualização de seus elementos; outras são de natureza topológica, ao considerar que todo poliedro convexo pode ser deformado continuamente até se tornar homeomorfo a uma esfera, sem alterar suas propriedades fundamentais. Também há demonstrações inspiradas na teoria dos grafos, que modelam os elementos do poliedro como um grafo planar conexo (COURANT; ROBBINS, 2000).

Além disso, conforme observam Aigner e Ziegler (2018), a Relação de Euler é frequentemente incluída em compilações das mais belas demonstrações da matemática, justamente por permitir tantos caminhos distintos para sua compreensão. Segundo os autores, “existem mais de vinte formas diferentes de demonstrar a relação de Euler, cada uma revelando uma faceta distinta da beleza matemática” (AIGNER; ZIEGLER, 2018, p. 13).

Essa pluralidade de abordagens revela algo fascinante: a Relação de Euler é muito mais do que uma simples fórmula — ela é um elo entre áreas da matemática e um exemplo clássico de como diferentes perspectivas podem iluminar a mesma verdade. A busca por múltiplas demonstrações transformou-se, ao longo do tempo, em um exercício de criatividade e acessibilidade matemática.

A seguir, apresentamos uma demonstração clássica e acessível, pensada para um leitor interessado, ainda que não especialista, e que deseje compreender o raciocínio por trás da fórmula de maneira visual e intuitiva.

Imaginemos um poliedro convexo simples, como um cubo. Podemos supor que seja possível abrir sua superfície, cortando uma das faces e desdobrando o restante até que fique

plano — um processo semelhante ao de desmontar uma caixa de papelão. O que obtemos é uma espécie de "rede" composta por vértices (pontos), arestas (linhas) e faces (polígonos), agora dispostas sobre uma folha plana, sem sobreposições.

Realizaremos agora um experimento mental em quatro etapas:

- **Contagem inicial**

Começamos com um poliedro qualquer. No caso do cubo, temos:

$$V = 8, A = 12, F = 6$$

Substituindo na fórmula de Euler:

$$V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$$

- **Remoção de uma face**

Retiramos uma das faces do poliedro (por exemplo, a face inferior). Essa abertura nos permite "planificar" a figura. Embora tenhamos perdido uma face, os vértices e arestas restantes mantêm sua conexão. Agora temos  $F = 5$ .

- **Redução progressiva**

Passamos a eliminar arestas da borda e as respectivas faces adjacentes, uma por vez, tomando cuidado para não desconectar a estrutura. A cada remoção de uma aresta e sua face correspondente, o valor de  $V - A + F$  permanece constante. Repetimos esse processo até restar apenas um conjunto de vértices conectados por arestas, sem nenhuma face fechada — ou seja, uma árvore.

- **Conclusão**

Uma árvore com  $V$  vértices possui exatamente  $A = V - 1$  arestas. Neste estágio final, temos apenas uma face (a face aberta no início), e podemos aplicar:

$$V - A + F = V - (V - 1) + 1 = 1 + 1 = 2$$

Esse raciocínio é válido para todo poliedro convexo e mostra que, independentemente de sua forma ou complexidade, a estrutura espacial dessas figuras respeita uma mesma relação numérica fundamental. Além de elegante, trata-se de uma demonstração acessível, que pode ser facilmente apresentada a estudantes da educação básica como uma forma introdutória ao estudo de propriedades estruturais das figuras espaciais. Ao trabalhar com desmontagens, planificações e contagens, os alunos desenvolvem não apenas habilidades geométricas, mas também uma compreensão inicial sobre uma característica topológica importante — a invariância da relação  $V - A + F = 2$  para superfícies homeomorfas à esfera. Assim, essa demonstração cumpre um duplo papel: iluminar uma verdade matemática profunda e, ao mesmo tempo, aproximá-la do cotidiano escolar por meio da exploração visual e manipulativa.

### 1.3 O ensino de poliedros no Brasil: um resumo de diversas pesquisas

O ensino de poliedros no Brasil integra o currículo de Matemática do ensino básico (Brasil, 2018), conforme indicado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que enfatiza o desenvolvimento da visualização, representação e análise de figuras tridimensionais em relação ao mundo real. *"A Geometria deve ser abordada de maneira a permitir que os estudantes desenvolvam habilidades para visualizar, representar e relacionar figuras bidimensionais e tridimensionais, analisando suas propriedades e aplicações no mundo real."* (BRASIL, 2018, p. 269).

O Quadro a seguir apresenta as habilidades da BNCC relacionadas ao ensino de poliedros:

Quadro 1 - Habilidades da BNCC relacionadas ao ensino de poliedros

| Série/Ano | Habilidade (Código BNCC) | Descrição da Habilidade                                                                                                                                                                                    |
|-----------|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1º Ano    | EF01MA13                 | Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico.                                                                           |
|           | EF01MA14                 | Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos                          |
| 2º Ano    | EF02MA14                 | Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico                                       |
|           | EF02MA15                 | Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos. |
| 3º Ano    | EF03MA13                 | Associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras.                                                       |
|           | EF03MA14                 | Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações                                                    |
| 4º Ano    | EF04MA17                 | Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais                                          |
| 5º Ano    | EF05MA16                 | Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e                                                                                               |

|               |          |                                                                                                                                                                                                      |
|---------------|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>6º Ano</b> |          | comparar seus atributos. Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos                                                                                                       |
|               | EF05MA17 | Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.                                              |
|               | EF06MA17 | Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial |
|               | EF06MA18 | Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.    |

Fonte: BNCC (2018)

Os poliedros, que, intuitivamente, são sólidos geométricos delimitados por faces poligonais, oferecem uma oportunidade única para a aplicação de conceitos matemáticos em situações práticas. No contexto educacional brasileiro, o estudo desses sólidos é introduzido principalmente no Ensino Fundamental II, onde os alunos começam a explorar as propriedades das formas tridimensionais e suas representações bidimensionais. Além disso, o estudo dos poliedros também incentiva o uso da geometria espacial, fortalecendo habilidades analíticas e a compreensão do espaço tridimensional, essenciais para diversas áreas do conhecimento e aplicações cotidianas.

No entanto, há um problema a ser discutido, apesar de os poliedros serem abordados dentro do currículo escolar e dentro das recomendações da BNCC: como esse conceito é realmente trabalhado e em que medida a forma como é tratado nos livros didáticos reflete a complexidade e a evolução do conhecimento matemático? Este é um problema epistemológico particular, dado que lida tanto com a construção do conhecimento sobre poliedros quanto com a transmissão desse conhecimento e a compreensão desse conhecimento pelos estudantes.

Mais comumente, os poliedros são apresentados nos livros didáticos partindo de uma definição mais formal, muitas vezes no contexto de sólidos convexos. Frequentemente, tais sólidos são distinguidos pelo número de vértices, arestas e faces, aplica-se a Relação de Euler e, às vezes, esses sólidos são desdobrados. Mas isso é suficiente? Limitar a definição de poliedros a certos sólidos tira o potencial investigativo dos estudantes?

O problema é que, ao apresentar poliedros como "figuras geométricas bem comportadas", perdemos a oportunidade de mostrar a matemática como um campo de descobertas, perguntas e múltiplas perspectivas do mesmo objeto matemático. A maioria dos livros diferencia poliedros convexos e não convexos, apresenta uma planificação de alguns

poliedros convexos e verifica a Relação de Euler sem uma abordagem mais investigativa, como a que propomos.

Essa visão simplificada permite uma introdução mais acessível do tema; no entanto, pode restringir a independência intelectual, especialmente para os estudantes, frear o questionamento de conceitos e começar o ensino de aceitação das definições como verdades absolutas. A longo prazo, isso pode limitar a capacidade de fazer a ponte para os tópicos mais avançados: poliedros não convexos, politopos em dimensões superiores, e até mesmo aplicações da geometria em modelagem computacional, por exemplo.

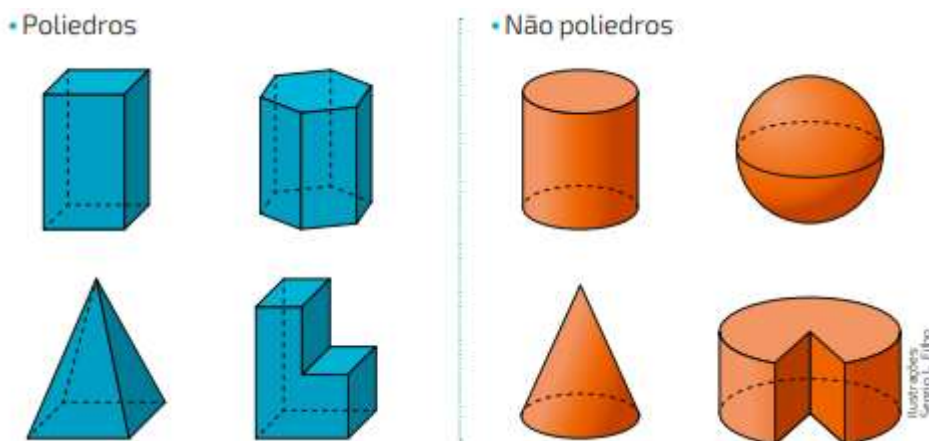
Os conceitos de “sólido geométrico”, “sólido limitado”, “vértice”, “face”, “aresta” e “poliedro” não costumam ser tratados com o devido rigor. Vejamos como Dante e Viana (2020) definem poliedro:

Poliedro é um sólido geométrico formado pela reunião de um número finito  $n$ ,  $n \geq 4$ , de polígonos e pela região do espaço limitada por eles. Cada lado de um desses polígonos é também lado de outro único polígono. As regiões planas limitadas por esses polígonos são as faces do poliedro, e cada lado de um polígono comum a exatamente duas faces é chamado aresta do poliedro. Cada vértice de uma face, por sua vez, é um vértice do poliedro. A intersecção de duas faces quaisquer é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.

A definição abaixo é dada por uma das obras do 6º Ano do Ensino Fundamental do PNLD (Pataro e Balestra, 2018):

Algumas figuras geométricas espaciais são limitadas por uma quantidade finita de polígonos e, além disso, cada lado de um polígono é também lado de apenas um outro polígono. Figuras com essas características recebem o nome de poliedros. Já as figuras que não têm pelo menos uma dessas características são chamadas não poliedros. Veja alguns exemplos.

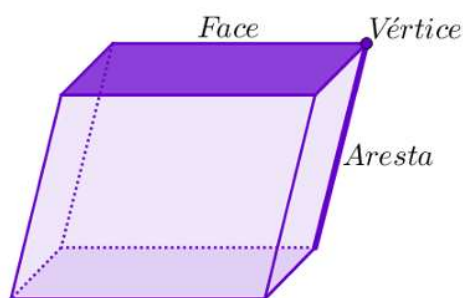
Figura 1 - Exemplos de poliedros e não poliedros



Fonte: Editora SCIPIONE (2018, p. 71) – Recorte do livro Matemática Essencial

A palavra poliedro vem do grego “*πολύ*” (*poly-*), que significa muitos ou vários, e “*ἔδρον*” (*-hedron*) que significa base ou face. Além disso, os poliedros são conhecidos como sólidos geométricos compostos por três elementos basicamente: Faces, Arestas e Vértices, conforme é possível ver na Figura 2 (BRASIL ESCOLA, 2025):

Figura 2 - Poliedro



Fonte: Figura adapta de Brasil Escola (2025)

Diante disso, analisar as definições presentes nos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio é fundamental para entender como essa visão restrita pode impactar a aprendizagem. Se os alunos nunca são expostos a diferentes formas de conceituar poliedros, dificilmente desenvolverão um olhar mais crítico e investigativo sobre a matemática. Além disso, uma abordagem limitada pode gerar dificuldades futuras, quando forem confrontados com exceções ou ampliações do conceito em estudos mais avançados.

Portanto, a maneira como os livros apresentam os poliedros não é apenas uma questão didática, mas epistemológica, pois influencia diretamente a percepção que os alunos constroem sobre a própria matemática. Se queremos formar estudantes que enxerguem a matemática como um campo dinâmico e cheio de possibilidades, talvez seja hora de repensar a forma como ensinamos até mesmo os conceitos mais básicos, como os poliedros.

A formação de professores para o ensino de poliedros no Brasil é um tema de crescente importância na educação matemática, dado o papel fundamental desses sólidos no desenvolvimento do raciocínio espacial dos estudantes.

Na prática educativa, a abordagem dos poliedros não se resume apenas à memorização de suas propriedades, mas envolve também o desenvolvimento de habilidades de visualização e manipulação espacial. Dessa forma, a formação inicial e continuada dos docentes torna-se um elemento crucial para garantir que esses conceitos sejam ensinados de forma eficaz e significativa. Segundo Mukuka e Alex (2024), os programas de formação de professores precisam incorporar metodologias que favoreçam a compreensão ampla dos conceitos de

geometria espacial, incluindo os poliedros, promovendo um ensino que vá além da simples transmissão de informações.

A abordagem dos poliedros nos cursos de licenciatura em Matemática é frequentemente limitada pela falta de um currículo que integre teoria e prática de maneira equilibrada. Conforme argumentam Fürkotter e Morelatti (2019), há uma tendência de se priorizar uma abordagem teórica em detrimento da prática, o que compromete a capacidade do futuro professor de aplicar conceitos em sala de aula. Para remediar essa situação, Fürkotter e Morelatti (2019) sugerem a incorporação de laboratórios de ensino e o uso de tecnologias digitais. A proposta deste trabalho é proporcionar visualizações e manipulações interativas de poliedros, estratégias que ajudam a consolidar o entendimento dos conceitos geométricos, ao mesmo tempo que promovem o engajamento dos alunos.

A formação continuada, por sua vez, desempenha um papel indispensável na atualização do conhecimento docente e na incorporação de novas metodologias de ensino. De acordo com Menegai (2018), as atividades de formação continuada muitas vezes negligenciam o avanço das tecnologias educacionais e sua aplicação no ensino de poliedros. A oferta de oficinas e cursos de capacitação que explorem o uso de softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, pode enriquecer significativamente a prática pedagógica. Além disso, iniciativas colaborativas entre professores, como grupos de estudo e redes de troca de experiências, têm mostrado ser valiosas para a superação de desafios no ensino de conceitos geométricos complexos.

É evidente que a formação de professores no ensino de poliedros no Brasil exige uma abordagem mais holística, que contemple não apenas o domínio do conteúdo, mas também a capacidade pedagógica e o uso de recursos tecnológicos. A literatura aponta para a necessidade de reformas nos cursos de formação inicial e nos programas de formação continuada, que promovam uma articulação entre teoria, prática e tecnologia, permitindo que os futuros professores desenvolvam competências necessárias para o ensino eficaz de geometria espacial. Essa articulação é vital para que os professores consigam capturar o interesse dos alunos e fomentar um aprendizado significativo sobre os poliedros, contribuindo para a formação de cidadãos mais cientes de seu papel no mundo tridimensional que os cerca.

A formação inicial dos professores que lecionam matemática no Brasil enfrenta desafios significativos, especialmente no que se refere ao ensino de tópicos como poliedros. A falta de materiais didáticos específicos e a necessidade de metodologias de ensino mais dinâmicas e interativas são fatores que contribuem negativamente na difusão deste ensino.

Muitos educadores ainda dependem de abordagens tradicionais, como a memorização de fórmulas e propriedades, sem uma compreensão mais profunda da lógica por trás dos conceitos. A utilização de recursos tridimensionais, como softwares de modelagem e impressão 3D, tem sido recomendada por diversos estudiosos para tornar o ensino mais envolvente e significativo.

Por exemplo Aguiar (2015) destaca que a criação de modelos 3D exige o uso de softwares de modelagem, os quais devem ser escolhidos considerando critérios técnicos, pessoais e econômicos, visando facilitar a compreensão de conceitos complexos pelos alunos. No entanto, a adoção ampla dessas tecnologias enfrenta desafios, especialmente devido a restrições de infraestrutura nas escolas.

A introdução de tecnologias educacionais modernas tem o potencial de transformar significativamente o ensino de poliedros. Ferramentas digitais, como aplicativos de realidade aumentada e software de modelagem 3D, podem permitir que os estudantes visualizem e interajam com as figuras de maneira mais concreta. Essas tecnologias podem facilitar a exploração de propriedades complexas dos poliedros, como os processos de transformação e simetria, que são desafiadores de se observar apenas por meio de figuras planas nos livros didáticos. A adoção dessas práticas no Brasil, no entanto, requer esforços coordenados entre políticas públicas, formação contínua de professores e investimentos em infraestrutura tecnológica. Comprometer-se com a implementação dessas estratégias pode impulsionar uma aprendizagem mais profunda e significativa, alinhando-se com demandas contemporâneas de inovação no processo educativo.

A inclusão de abordagens interdisciplinares e práticas pedagógicas inovadoras pode enriquecer ainda mais o ensino de poliedros no Brasil. A articulação entre Arte e Matemática, por exemplo, pode oferecer aos alunos uma visão ampliada sobre a aplicação de conceitos geométricos em diferentes contextos e culturas. Projetos que integram essas disciplinas podem promover uma compreensão mais ampla e crítica dos conceitos matemáticos, além de incentivar o interesse e a criatividade dos estudantes. Ao adotar uma perspectiva mais abrangente, o ensino de poliedros pode desempenhar um papel importante na formação de cidadãos críticos e reflexivos, prontos para enfrentar os desafios de um mundo cada vez mais complexo e interligado. Nesse sentido, o futuro do ensino de poliedros no Brasil dependerá, em grande parte, da capacidade de inovar e adaptar as práticas pedagógicas às necessidades dos alunos e aos avanços tecnológicos disponíveis.

### 1.4 Geometria e suas Transformações na Educação Básica no Brasil

O ensino de Geometria no Brasil passou por diversas transformações ao longo do tempo. No início do século XX, segundo Piaseki (2010), a Geometria era ensinada de maneira sistemática e dedutiva, ocupando um espaço de destaque na formação dos estudantes. No entanto, a chegada do movimento da Matemática Moderna, na década de 1970, trouxe uma abordagem mais algébrica e formal, resultando em uma drástica redução do ensino geométrico nas escolas.

Boyer (2011) aponta que essa mudança teve impactos significativos: a Geometria perdeu seu caráter intuitivo e visual, tornando-se uma disciplina abstrata e distante da realidade dos alunos. Isso criou lacunas no ensino, dificultando a compreensão de conceitos espaciais e resultando em baixos índices de desempenho em avaliações acadêmicas.

Atualmente, a BNCC e o PNLD propõem a recuperação da relevância da Geometria, incentivando metodologias mais investigativas e contextualizadas. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), há uma ênfase na necessidade de um ensino que vá além da mera repetição de fórmulas, incentivando a compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos em diferentes contextos. Um trecho que exemplifica essa abordagem é:

"O ensino da Matemática deve possibilitar ao aluno não apenas a memorização de regras e procedimentos, mas também a compreensão dos conceitos e a capacidade de aplicá-los em situações variadas, desenvolvendo o raciocínio lógico, a criatividade e a autonomia na construção do conhecimento." (Brasil, 1997, p. 27).

Embora os PCNs tenham sido publicados em 1997, seu desenvolvimento iniciou-se na década de 1990, refletindo preocupações educacionais desse período.

Já a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforça essa perspectiva ao destacar a importância da modelagem matemática, da resolução de problemas e do uso de tecnologias digitais. No ensino de Matemática, a BNCC propõe que:

"A Matemática deve ser compreendida como um campo do conhecimento que permite aos estudantes interpretar e atuar na realidade, desenvolvendo a capacidade de argumentação, de resolução de problemas e de modelagem de situações do mundo real, além de explorar, de maneira crítica e significativa, as tecnologias digitais disponíveis." (Brasil, 2018, p. 265).

### 1.5 Ensino de Geometria Espacial na BNCC

A Geometria Espacial desempenha um papel essencial no desenvolvimento da capacidade de visualização e raciocínio tridimensional dos estudantes. Desde os PCNs de 1997, já se apontava a necessidade de priorizar a investigação matemática e o raciocínio espacial,

promovendo o aprendizado por meio da experimentação e da manipulação de materiais concretos.

A BNCC (BRASIL, 2018) estabelece que os alunos devem ser capazes de visualizar, manipular e representar formas planas e espaciais, criando conexões entre os conceitos geométricos e seu cotidiano. Segundo o documento:

Estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. (BRASIL, 2018, p. 271)

Queiroz e Borges (2022) destacam que o ensino de Geometria no Brasil ainda depende fortemente dos livros didáticos, que geralmente apresentam conteúdos de forma expositiva e com poucas atividades investigativas. No entanto, eles argumentam que a aprendizagem poderia ser significativamente enriquecida com o uso de materiais concretos, permitindo que os alunos explorem conceitos geométricos de forma prática:

A manipulação de modelos físicos permite uma compreensão mais profunda das propriedades das figuras geométricas e contribui para um nível mais alto de interação e engajamento dos alunos com o conteúdo que está sendo aprendido. (QUEIROZ; BORGES, 2022, p. 57)

A BNCC propõe que o ensino da Geometria deve ser dinâmico, incorporando novas tecnologias e práticas investigativas que favoreçam a construção do conhecimento pelos alunos.

Uma das perspectivas mais relevantes da BNCC é o incentivo ao desenvolvimento do pensamento matemático por meio de atividades que combinam heurística e dedução formal. Em outras palavras, o ensino de Geometria deve permitir que os estudantes investiguem padrões, formulem hipóteses e construam argumentos matemáticos sólidos, promovendo uma aprendizagem mais significativa.

O presente trabalho busca analisar como o Teorema de Euler é apresentado nos livros didáticos do Ensino Fundamental (anos finais) e do Ensino Médio. Para guiar essa análise, é fundamental observar que a BNCC (2018) inclui habilidades relacionadas aos sólidos geométricos desde as séries iniciais, permitindo que os estudantes desenvolvam seu pensamento matemático de maneira progressiva.

A BNCC concentra o ensino de poliedros até o 6º ano do Ensino Fundamental. E o presente estudo investiga como é feita a abordagem do Relação de Euler nos livros didáticos que foram selecionados pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) em 2020.

Os livros são analisados por especialistas, que verificam como as orientações da BNCC para cada série/ano foram abordadas. Após esta análise, é produzido um guia para ajudar os professores a selecionarem os livros mais apropriados para sua turma. Entretanto, apesar da existência deste documento, muitos professores não têm acesso as cópias físicas ou virtuais em tempo hábil para realizar um exame mais detalhados do material que será utilizado pelos estudantes nos próximos quatro anos. Na prática, tenho vivenciado esta escolha sendo realizada pelos professores, que muitas vezes verificam a qualidade gráfica do material, o tipo de exercícios presentes e se os conteúdos seguem as diretrizes curriculares propostas pelas redes de educação de cada estado, não há uma preocupação em analisar os documentos norteadores no momento de realizar a escolha.

Ao analisar o guia do PNLD 2020, que traz as recomendações para a escolha dos livros didáticos para o Ensino Fundamental II, percebe-se uma recomendação sobre a fragilidade na abordagem de Geometria Espacial em algumas obras, "Observa-se certa fragilidade em algumas obras no que diz respeito à pouca exploração de atividades de planificação e do uso de tecnologias digitais, tais como os softwares de geometria dinâmica" (BRASIL, 2019, p.24).

Esta limitação pode até refletir no desenvolvimento do raciocínio espacial de que os estudantes precisam para trabalhar com os conteúdos matemáticos mais avançados quando chegam ao Ensino Médio. Sem se engajarem em atividades onde essas figuras sólidas são visualizadas e manipuladas, os alunos terão dificuldade em compreender conceitos básicos, como a relação entre faces, arestas e vértices dos poliedros.

No Ensino Médio, não há na BNCC referência explícita sobre a Relação de Euler, mas gostaria de ressaltar a sua importância para as avaliações que medem a qualidade de ensino no Brasil, como a prova do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), que é utilizada para medir a qualidade do ensino na educação básica no Brasil através do Índice de Desenvolvimento da educação Básica (IDEB). O documento de Escalas de Proficiência do SAEB indica as habilidades que os estudantes podem alcançar. Para a 3ª Série do Ensino Médio, a escala varia do Nível 1 ao Nível 10 em Matemática.

Figura 3 - Daeb/Inep - Escalas de Proficiência do SAEB

|                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Nível 8</b><br/>Desempenho maior ou igual a 400 e menor que 425</p> | <p>Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:</p> <p><b>ESPAÇO E FORMA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconhecer a proporcionalidade dos elementos lineares de figuras semelhantes.</li> <li>• Determinar uma das medidas de uma figura tridimensional, utilizando o Teorema de Pitágoras.</li> <li>• Determinar a equação de uma circunferência, dados o centro e o raio.</li> <li>• Determinar a quantidade de faces, vértices e arestas de um poliedro por meio da relação de Euler.</li> <li>• Resolver problema envolvendo razões trigonométricas no triângulo retângulo, com apoio de figura.</li> <li>• Associar um prisma a uma planificação usual dada.</li> </ul> <p><b>GRANDEZAS E MEDIDAS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Determinar a área da superfície de uma pirâmide regular.</li> <li>• Determinar o volume de um paralelepípedo, dadas suas dimensões e unidades diferentes.</li> <li>• Determinar o volume de cilindros.</li> </ul> <p><b>NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconhecer o gráfico de uma função trigonométrica da forma <math>y = \sin(x)</math>.</li> <li>• Reconhecer um sistema de equações associado a uma matriz.</li> <li>• Determinar a expressão algébrica associada a um dos trechos do gráfico de uma função definida por partes.</li> <li>• Determinar o valor máximo de uma função quadrática a partir de sua expressão algébrica e das expressões que determinam as coordenadas do vértice.</li> </ul> |
|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Fonte: Inep/MEC (2020)

A presença na Escala de Proficiência do SAEB, da Relação de Euler no nível 8, entre 400 e 425 pontos, entre as habilidades que os estudantes precisam adquirir ao final do EM nos traz um indicativo da importância deste conteúdo. Como falamos anteriormente, a BNCC não traz nas habilidades necessárias, a relação de Euler como objeto de estudo. Queremos ressaltar que este estudo pretende apresentar um produto educacional que irá utilizar um conjunto de sequências didáticas, que traz como proposta trabalhar a Relação Euler com atividades de investigação com sólidos geométricos impressos em 3D buscando desenvolver as seguintes competências específicas da BNCC no EF e EM presentes no quadro a seguir (BNCC, 2018).

Quadro 2 - Competências específicas de Matemática da BNCC

| Modalidade de Ensino | Competência Específica                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ensino Fundamental   | Competência 2: Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.                                                                                                                                     |
| Ensino Médio         | Competência 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. |

Fonte: BNCC (2018)

Esta pesquisa, tem como objetivo, a partir da análise de alguns livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, apresentar um produto educacional com atividades voltadas para o ensino de poliedros, levando em consideração o uso de atividades investigativas para a verificação da Relação Euler.

## 2 O TEOREMA DE EULER NOS LIVROS DIDÁTICOS

Antes de realizar a análise detalhada dos quatro livros didáticos selecionados, foi essencial compreender o cenário geral do material aprovado pelo PNLD. Para isso, essa investigação teve início na consulta aos Guias do PNLD de 2020 e 2022, buscando mapear quantos e quais livros de Matemática foram aprovados para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, respectivamente. Este mapeamento permitiu obter um panorama mais amplo antes de aprofundar a análise dos conteúdos específicos, especialmente a abordagem dada à Geometria Espacial e à Relação de Euler.

Tabela 1 - Quantidade de livros aprovados no PNLD

| Ano do PNLD               | Quantidade de livros aprovados |
|---------------------------|--------------------------------|
| 2020 (Ensino Fundamental) | 15                             |
| 2022 (Ensino Médio)       | 12                             |

Fonte: Guia do PNLD

O livro didático é um recurso importante tanto para consulta quanto para o enriquecimento do ensino e aprendizagem. Com anos de experiência em sala de aula, percebo como a escolha do material influencia diretamente a forma como os alunos enxergam a matemática. Um livro pode ser um aliado poderoso, auxiliando o professor na construção de um ensino mais investigativo e significativo, no entanto também pode ser um limitador, quando apresenta conceitos de forma engessada, sem conexão com a realidade dos alunos. É por isso que essa análise não se restringe a verificar se a Relação de Euler aparece ou não nos livros – a questão vai além. O foco está em como esse conceito é apresentado, se ele é explorado de forma dinâmica e conectada a outras áreas, ou se aparece apenas como mais uma fórmula pra ser decorada e aplicada mecanicamente.

A metodologia adotada nesta pesquisa buscou captar essas nuances. Com base nos Guias do PNLD, foram selecionados quatro livros didáticos, considerando tanto a realidade da minha prática pedagógica quanto buscar por uma coleção que representasse a diversidade de abordagens sobre o tema.

Nos próximos tópicos, apresenta-se a análise detalhada dessas obras, destacando como os conceitos de poliedros são introduzidos, como as habilidades da BNCC são abordadas, e qual o trabalho realizado para a verificação da Relação de Euler nos exercícios propostos, buscando assim apresentar uma proposta de trabalho complementar com o uso de poliedros impressos em 3D e atividades de investigação.

## **2.1 Metodologia: Explorando a Análise de Conteúdo**

Para compreender como os livros didáticos apresentam a Relação de Euler, adotou-se a análise de conteúdo como principal metodologia de investigação, fundamentada nos estudos de Bardin (2011). Esse método vai além da simples categorização de informações, permitindo uma leitura mais crítica e reflexiva do material. O objetivo não é apenas verificar se o teorema aparece nos livros, mas como ele é abordado, quais conexões são feitas com o ensino investigativo e se o conteúdo realmente contribui para uma aprendizagem significativa.

A escolha desse método se justifica conforme apontam Carvalho e Banqueiro (2020), pelo fato de que os livros didáticos não são apenas um conjunto de páginas organizadas com conteúdo matemático. Eles influenciam diretamente o trabalho do professor e a forma como os alunos constroem o conhecimento. Quando bem estruturados e contextualizados, os livros podem ser aliados no processo de aprendizagem. Contudo, quando adotam uma abordagem

mecânica e pouco investigativa, podem se tornar limitadores. Assim, ao aplicar a análise de conteúdo, é possível identificar padrões na abordagem da Geometria Espacial, destacando se os materiais promovem uma visão reflexiva ou apenas reprodutiva do conhecimento matemático.

A análise dos livros didáticos não pode se limitar a verificar se a Relação de Euler está presente ou não. O impacto real desses materiais está na forma como o conteúdo é explorado e nas oportunidades que oferecem para o desenvolvimento do pensamento matemático. Por isso, segui as três fases da análise de conteúdo de Bardin (2011), adaptadas para tornar o processo mais acessível e reflexivo:

- Pré-análise: Primeiro, organizei e preparei o material para análise. Como os livros escolhidos estavam disponíveis em formato digital, baixei todos no meu computador pessoal para facilitar o acesso e a leitura detalhada.
- Exploração do material: A seguir, foi realizada a leitura de duas coleções de livros didáticos, buscando identificar padrões na apresentação da Relação de Euler e sua relação com a Geometria Espacial. O foco era perceber se o conteúdo era abordado de forma investigativa ou apenas como uma fórmula a ser memorizada.
- Tratamento e interpretação dos resultados: Por fim, fiz uma análise crítica dos achados, relacionando-os com as diretrizes curriculares e com a literatura educacional. O objetivo foi entender se os livros incentivam uma compreensão mais profunda do conceito ou se reforçam um ensino tradicional e mecânico.

Essa metodologia me permite ir além da estrutura superficial dos livros, possibilitando uma análise mais profunda dos conceitos abordados e das práticas pedagógicas sugeridas.

## 2.2 O Processo de Coleta de Dados

Para garantir uma análise consistente, delimitei o corpus da pesquisa aos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio aprovados pelo PNLD. A seleção seguiu critérios como:

- Presença do Teorema de Euler no conteúdo programático.
- Qualidade das ilustrações e exemplos apresentados para visualização geométrica.
- Conexão com a BNCC e o desenvolvimento de competências matemáticas.
- Incentivo à investigação matemática, conforme sugerido por Carvalho e Banqueiro (2020).

Além disso, foram analisados materiais utilizados no Colégio Estadual da Polícia Militar de Goiás – Unidade Dom Prudêncio, onde atuo como professora, juntamente com um livro adicional selecionado com base nos critérios estabelecidos. Essa abordagem configurou um estudo de caso, considerando a realidade local e permitindo uma análise dos materiais disponíveis no PNLD. Dessa forma, o estudo pode servir como referência para outros professores e pesquisadores interessados em investigar a aplicabilidade desses recursos em seus próprios contextos educacionais.

Na fase de exploração dos livros, registrei como a Relação de Euler é apresentado e se há incentivo para que os alunos explorem o conceito de forma investigativa. Como Carvalho e Banqueiro (2020) apontam, um problema recorrente no ensino de Matemática é a abordagem mecânica dos conteúdos, que pode levar à memorização de regras sem compreensão profunda. Para evitar esse viés, foquei em analisar se os livros oferecem atividades que permitem ao aluno construir o conceito de maneira ativa e crítica.

Os livros didáticos estão em praticamente todas as escolas públicas e, muitas vezes, são o principal recurso pedagógico disponível para professores e alunos. Como destaca Valente (2019), eles não apenas organizam os conteúdos, mas também influenciam a maneira como o professor ensina. Isso significa que a qualidade do material impacta diretamente na aprendizagem.

Mas será que o livro didático basta? Como Carvalho e Banqueiro (2020) ressaltam, a forma como o conteúdo é apresentado pode facilitar ou dificultar a construção do conhecimento. No ensino da Geometria Espacial, por exemplo, diversos estudos apontam que muitos livros ainda apresentam falhas na forma como os alunos são levados a desenvolver raciocínio geométrico e habilidades investigativas (Santos & Oliveira, 2021). Como esses autores destacam:

Os materiais didáticos tendem a enfatizar a exposição formal de situações geométricas, desconsiderando mapas e estratégias que melhor se encaixem na construção ativa do conhecimento pelos estudantes. (SANTOS & OLIVEIRA, 2021, p. 102).

Isso mostra que o ensino da Geometria muitas vezes se prende à memorização de fórmulas e regras, sem explorar a construção ativa do pensamento matemático. Skovsmose (2000) alerta que um ensino excessivamente baseado em memorização leva a um aprendizado mecânico e desconectado da realidade. Para contornar isso, pesquisadores sugerem que os

livros didáticos tragam mais investigações matemáticas, modelagem e experimentação (Ponte et al., 2012).

Quando os alunos são desafiados a explorar a Matemática por conta própria, o aprendizado se torna mais sólido e significativo. Eles testam hipóteses, fazem conexões e desenvolvem autonomia na construção do conhecimento. Como destaca Ponte et al. (2012, p. 166): *As investigações matemáticas ajudam a construir a autonomia do estudante porque são convidados a fazer suas próprias conjecturas, a realizar experimentações em suas justificativas, etc.*

Além disso, a tecnologia pode ser uma grande aliada, tornando o ensino mais interativo. Borba & Scucuglia (2016) mostram que softwares de geometria dinâmica ajudam os alunos a visualizar conceitos complexos de maneira mais intuitiva. Ao mesmo tempo, os materiais concretos continuam sendo fundamentais para tornar o aprendizado mais acessível a todos os alunos.

O ensino da Geometria Espacial precisa ir além da transmissão de conceitos prontos, incentivando o estudante a descobrir, testar e construir seu próprio conhecimento matemático. Como vimos com Bardin (2011), os livros devem ser analisados criticamente, considerando como apresentam os conteúdos e se favorecem a investigação matemática. E, como apontam Carvalho e Banqueiro (2020), um bom livro didático não deve ser um fim em si mesmo, mas um ponto de partida para um ensino mais reflexivo e ativo.

Será apresentada a análise de quatro livros didáticos distribuídos pelo PNLD, sendo dois voltados para o Ensino Fundamental Anos Finais e dois para o Ensino Médio. As coleções escolhidas foram: *A Conquista da Matemática* (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018), *Matemática Geração Alpha* (OLIVEIRA; FUGITA, 2019) para o Ensino Fundamental. Já no Ensino Médio, a análise incluída *Matemática em Contextos: Geometria Plana e Geometria Espacial* (DANTE; VIANA, 2020), *Prisma Matemática: Geometria* (BONJORNIO; GIOVANNI JÚNIOR; SOUSA, 2020).

### **2.3 Análise dos Livros Didáticos do Ensino Fundamental**

No Ensino Fundamental, os poliedros ocupam um lugar importante no ensino de Geometria Espacial, conforme indicado na BNCC. É nessa etapa que os alunos começam a desenvolver habilidades voltadas à identificação, visualização e exploração das propriedades dessas figuras tridimensionais. A BNCC estabelece que os estudantes do Ensino Fundamental

II devem ser capazes de analisar e relacionar vértices, arestas e faces dos poliedros, reconhecendo padrões e estruturas geométricas.

Diante disso, a análise dos livros didáticos dessa fase busca compreender como esses conteúdos são apresentados, se incentivam a construção do conhecimento matemático por meio da investigação e exploração, ou se seguem uma abordagem mais tradicional e mecânica. A seguir, apresentamos os resultados dessa análise.

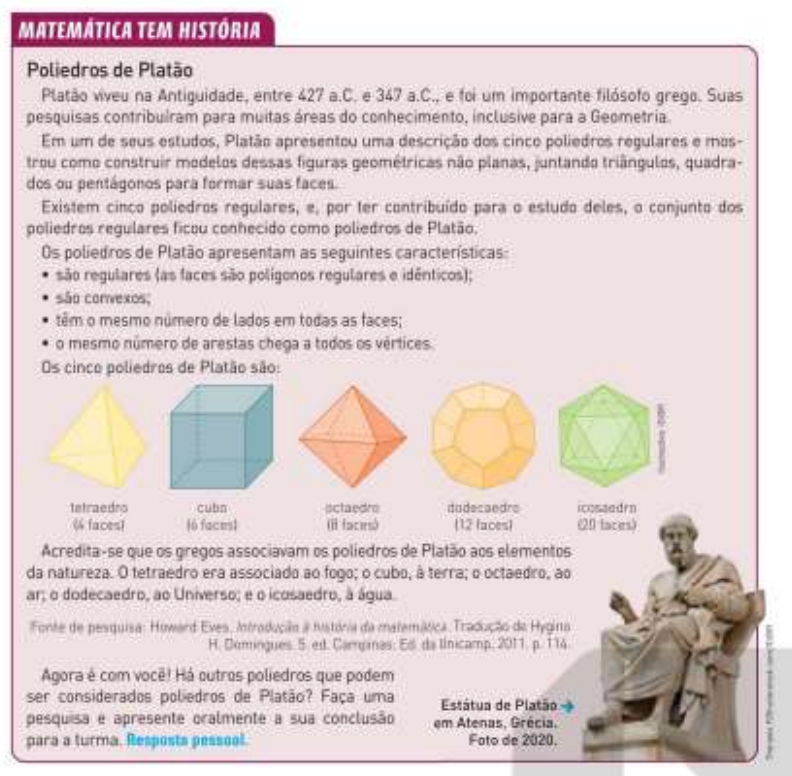
### **2.3.1 Análise Comparativa dos Livros Didáticos do Ensino Fundamental**

A seguir, apresento uma análise detalhada de dois livros didáticos analisados, ambos do 6º ano do Ensino Fundamental II, sendo A Conquista da Matemática e Matemática Geração Alpha – com foco na abordagem dos poliedros, na presença da Relação de Euler, na qualidade dos exemplos e exercícios, e no uso de atividades investigativas. A comparação será feita à luz da metodologia adotada nesta pesquisa e considerando as reflexões de Carvalho e Banqueiro (2020) sobre o papel do livro didático no ensino da Matemática. Para facilitar a leitura e evitar repetições desnecessárias, iremos nos referir ao livro A Conquista da Matemática, por livro A e o livro Matemática Geração Alpha, por livro B.

Sobre a definição de poliedros, ambos os livros apresentam a definição elencando os vértices, arestas e faces de um poliedro. Entretanto o livro A, classifica os poliedros em primas e pirâmides apresentando a nomenclatura e a planificação. Já o livro B, percebemos uma preocupação em classificar os poliedros em convexos e não convexos, para depois agrupar os poliedros convexos em dois grupos: os prismas e as pirâmides e, em seguida apresentar a sua planificação.

Quanto a presença da Relação de Euler, o livro A não apresenta explicitamente a mesma, já o livro B apresenta os Poliedros de Platão em um tópico voltado para a história da matemática e, depois apresenta a relação de Euler, como vemos a seguir:

Figura 4 - Poliedros de Platão



Fonte: Editora SM (2020, pag. 93)

A presença dos Poliedros de Platão no livro é uma ótima oportunidade para mostrar que a Matemática não surgiu do nada, ela tem história, evolução e, acima de tudo, propósito. Platão, lá no século IV a.C., já estudava esses sólidos tridimensionais e via neles um padrão para organizar o universo. Trazer esse olhar histórico para a sala de aula torna a Matemática mais próxima, mais real, ajudando os alunos a perceberem que ela não é apenas um monte de regras e fórmulas, mas sim um conhecimento construído ao longo do tempo para entender o mundo à nossa volta.

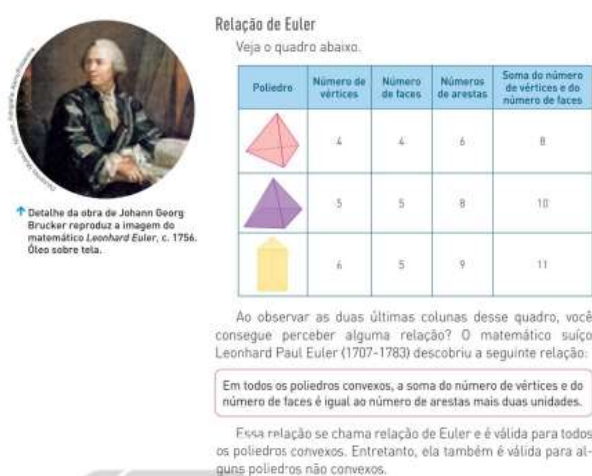
A BNCC (2018) reforça essa ideia ao destacar que o ensino de Matemática deve permitir que os estudantes enxerguem como uma construção humana em constante evolução, ligada a diferentes momentos históricos e sociais. Isso é essencial para que os alunos não vejam a Matemática como algo fixo e imutável, mas como um campo do conhecimento que se transforma com novas descobertas. Mostrar essa evolução dá sentido ao aprendizado e torna os conceitos mais significativos.

Além disso, o livro não apenas apresenta os Poliedros de Platão, mas também propõe uma atividade reflexiva: quais outros sólidos poderiam ser considerados poliedros platônicos? Esse tipo de pergunta faz toda a diferença, porque incentiva os alunos a investigar, testar hipóteses e construir conhecimento ativamente. Segundo Miguel e Miorin (2008), trazer a

História da Matemática para a sala de aula ajuda os alunos a desenvolverem pensamento crítico e autonomia intelectual, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos e da maneira como eles foram descobertos.

Dessa forma, ao situar os Poliedros de Platão dentro de um contexto histórico, o Livro B se aproxima um pouco mais das diretrizes da BNCC e das recomendações de especialistas. Essa abordagem permite que a Geometria seja vista não apenas como um conjunto de definições e fórmulas, mas como um conhecimento vivo.

Figura 5 - Relação de Euler



Fonte: Editora SM (2020, pag. 94)

A análise do recorte do Livro B sobre a Relação de Euler revela pontos relevantes, especialmente no que diz respeito à definição de poliedros, a abordagem conceitual da Relação de Euler e o estímulo à investigação matemática. de Euler. O livro introduz a Relação de Euler de maneira estrutural e visual, por meio de uma tabela com poliedros e a contagem de seus vértices, faces e arestas. Essa abordagem inicial é válida, pois permite que os alunos percebam padrões antes de receberem a fórmula matemática. Além disso, há um questionamento direto ao estudante: *"Você consegue perceber alguma relação?"*, o que pode incentivar a reflexão.

Outro ponto importante é que o livro afirma que a Relação de Euler se aplica a todos os poliedros convexos, mas faz uma observação breve sobre sua validade também para alguns poliedros não convexos. Esse trecho poderia ser mais explorado, considerando que há poliedros não convexos nos quais a relação não se aplica diretamente, o que poderia ser uma excelente oportunidade para aprofundar o conceito.

### 2.3.2 Análise Comparativa da Abordagem da Relação de Euler nos Livros A e B

Quando analisamos como os livros didáticos abordam a Relação de Euler, percebemos que cada material segue um caminho diferente para apresentar esse conceito aos alunos. Ambos trazem explicações corretas, mas o modo como conduzem o aprendizado pode impactar diretamente a forma como os estudantes compreendem e internalizam a ideia.

O Livro A segue uma abordagem mais tradicional e estruturada: apresenta a relação ( $V - A + F = 2$ ) já formulada, acompanha com exemplos visuais e propõe exercícios para reforçar a aplicação da fórmula. Essa estratégia pode ser eficaz para alunos que precisam de um roteiro claro e bem definido, mas pode deixar pouco espaço para a descoberta ativa e a problematização do conceito, pontos que são essenciais para o desenvolvimento do pensamento matemático, conforme defendem Carvalho e Banqueiro (2020).

Figura 6 - Atividade presente no Livro A

**PENSE E RESPONDA** 2. Espera-se que os estudantes percebam que:  $F + V = A + 2$ ; e que essa regularidade vale para todos os poliedros.

Responda às questões no caderno. Resposta na seção **Resoluções comentadas** deste Manual.

1. Observe os poliedros da página anterior e suas superfícies planificadas e monte um quadro que contenha as informações a seguir, acrescentando uma linha para cada um dos demais poliedros. Destaque com uma cor os prismas e com outra cor as pirâmides.

|            | Número de lados da base do poliedro (L) | Número de faces laterais do poliedro (f) | Número de faces do poliedro (F) | Número de arestas do poliedro (A) | Número de vértices do poliedro (V) |
|------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| Poliedro A |                                         |                                          |                                 |                                   |                                    |

2. Acrescente duas colunas ao quadro da atividade 1. Na primeira dessas colunas, adicione o número de vértices (V) e o número de faces (F) de cada poliedro; na segunda dessas colunas, adicione 2 ao número de arestas (A) de cada poliedro. Você percebe alguma regularidade? Essa regularidade vale para todos os poliedros do quadro?

3. Agora, considere as informações referentes apenas aos prismas e analise que relação podemos observar entre:

- o número de faces laterais (f) e o número de lados da base do prisma (L).  $f = L$
- o número de faces do prisma (F) e o número de lados da base (L).  $F = L + 2$
- o número de arestas do prisma (A) e o número de lados da base (L).  $A = 3 \cdot L$
- o número de vértices do prisma (V) e o número de lados da base (L).  $V = 2 \cdot L$
- Pesquise na internet a representação de outros prismas e verifique se as relações observadas continuam válidas. *Sim, continuam válidas. Espera-se que os estudantes percebam que as relações valem para qualquer prisma.*

4. Agora, considere as informações referentes apenas às pirâmides e analise que relação podemos observar entre:

- o número de faces laterais (f) e o número de lados da base da pirâmide (L).  $f = L$
- o número de faces da pirâmide (F) e o número de lados da base (L).  $F = L + 1$
- o número de arestas da pirâmide (A) e o número de lados da base (L).  $A = 2 \cdot L$
- o número de vértices da pirâmide (V) e o número de lados da base (L).  $V = L + 1$
- o número de vértices da pirâmide (V) e o número de faces (F).  $V = F$
- Pesquise na internet a representação de outras pirâmides e verifique se as relações observadas continuam válidas. *Sim, continuam válidas. Espera-se que os estudantes percebam que as relações valem para qualquer pirâmide.*

5. Pesquise quem foi Leonhard Euler (1707-1783) e que relação importante ele estabeleceu entre o número de faces, de vértices e de arestas de certos poliedros.  
A relação de Euler foi a mesma que você percebeu em alguma das atividades?  
Resposta pessoal. Exemplo de resposta na seção **Resoluções comentadas** deste Manual.

Fonte: Editora FTD (2020, pág. 93)

Por outro lado, o Livro B constrói a Relação de Euler de forma mais investigativa. Ele conduz o estudante por um processo de observação de padrões e formulação de hipóteses antes

de apresentar a equação. Além disso, destaca um ponto crucial que muitas vezes passa despercebido nos livros didáticos: a relação também pode ser explorada em poliedros não convexos. Esse tipo de problematização aproxima o ensino da Matemática de uma perspectiva mais reflexiva e aberta à construção do conhecimento, como propõem Miguel e Miorin (2008) ao defenderem o uso da História da Matemática como ferramenta pedagógica.

Figura 10 - Atividade presente no Livro B

**DIVERSIFICANDO**

4. Linha 1: 3; 4; 4; 4.  
Linha 2: 4; 5; 5; 8.

Linha 3: 5; 6; 6; 10.  
Linha 4: 6; 7; 7; 12.

Linha 5: 7; 8; 8; 14.

Resposta: sempre na cabeça.

Característica comum: são figuras geométricas não planas; diferença: o cilindro é um não poliedro, e o cubo é um poliedro.

1. Reúna-se com um colega. Observem o quadro abaixo. Depois, classifiquem cada afirmação a seguir em verdadeira ou falsa.

| Nome do prisma              | Número de vértices do polígono da base | Número de vértices | Número de faces | Número de arestas |
|-----------------------------|----------------------------------------|--------------------|-----------------|-------------------|
| Prisma de base triangular   | 3                                      | 6                  | 5               | 9                 |
| Prisma de base quadrangular | 4                                      | 8                  | 6               | 12                |
| Prisma de base pentagonal   | 5                                      | 10                 | 7               | 15                |
| Prisma de base hexagonal    | 6                                      | 12                 | 8               | 18                |
| Prisma de base heptagonal   | 7                                      | 14                 | 9               | 21                |

a) O número de vértices de um prisma é igual ao dobro do número de vértices de seu polígono da base. **Verdadeira.**

b) O número de faces de um prisma é igual ao número de vértices de seu polígono da base mais 2. **Verdadeira.**

c) O número de arestas de um prisma é igual ao triplo do número de vértices de seu polígono da base. **Verdadeira.**

2. Ainda em dupla, e com base no quadro da atividade anterior, façam o que se pede.

a) Observem a coluna do número de vértices. Vocês conseguem notar alguma regularidade? Se sim, qual? **Respostas pessoais.**

b) Observem a coluna do número de faces. É possível perceber alguma regularidade? Se sim, qual? **Respostas pessoais.**

c) Observem a coluna do número de arestas. Vocês conseguem notar alguma regularidade? Se sim, qual? **Respostas pessoais.**

3. Em cada item, indique uma característica comum e uma diferença entre as figuras.

a)



**Respostas pessoais:**

Característica comum: as bases são círculos; diferença: o cilindro possui duas bases, e o cone, apenas uma.

b)



4. Copie e complete o quadro.

| Nome da pirâmide              | Número de lados do polígono da base | Número de vértices | Número de faces | Número de arestas |
|-------------------------------|-------------------------------------|--------------------|-----------------|-------------------|
| Pirâmide de base triangular   |                                     |                    |                 |                   |
| Pirâmide de base quadrangular |                                     |                    |                 |                   |
| Pirâmide de base pentagonal   |                                     |                    |                 |                   |
| Pirâmide de base hexagonal    |                                     |                    |                 |                   |
| Pirâmide de base heptagonal   |                                     |                    |                 |                   |

5. Com base no quadro da atividade 4, verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

a) O número de vértices de uma pirâmide é igual ao seu número de faces. **Verdadeira.**

b) O número de arestas de uma pirâmide é igual ao seu número de faces mais 2. **Falsa.**

c) O número de arestas da pirâmide é igual ao dobro do número de vértices menos 2. **Verdadeira.**

d) O número de vértices do polígono da base é igual ao número de faces da pirâmide mais 1. **Falsa.**

6. Veja como Pedro verificou a relação de Euler no poliedro abaixo.



$V + F = A + 2$   
 $12 + 8 = 18 + 2$   
 $20 = 20$

V: número de vértices  
 F: número de faces  
 A: número de arestas

Pedro afirmou a um colega que, como a relação de Euler é válida para o poliedro analisado, ele é um poliedro convexo. A afirmação de Pedro está correta? Explique.

**Não, pois apesar de esse poliedro satisfazer a relação de Euler, ele é não convexo.**

Fonte: Editora SM (2020, pág. 97)

Essa diferença entre os dois livros fica evidente quando comparamos os elementos centrais de suas abordagens:

Quadro 3 - Comparação da Abordagem da Relação de Euler

| Aspecto                              | Livro A                                                                              | Livro B                                                                                                 |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Apresentação da Relação de Euler     | Traz a relação de forma estruturada, com exemplos ilustrativos e exercícios diretos. | Incentiva a descoberta progressiva da relação, guiando os alunos por meio de tabelas e questionamentos. |
| Exploração Investigativa             | Propõe algumas atividades reflexivas, mas de forma mais fechada.                     | Incentiva os alunos a verificarem padrões e testarem hipóteses antes de apresentar a fórmula.           |
| Destaque para Poliedros Não Convexos | Não aprofunda essa questão.                                                          | Levanta a problematização sobre poliedros não convexos e sua relação com a fórmula de Euler.            |
| Estímulo à Reflexão                  | Atividades que reforçam a memorização da relação.                                    | Atividades que desafiam os alunos a construir o conhecimento.                                           |

Fonte: Autoria própria

Ao olhar para essas diferenças, fica claro que não há um único caminho para ensinar a Relação de Euler. A abordagem do Livro A pode funcionar bem para alunos que se beneficiam de uma explicação direta e estruturada, enquanto o Livro B favorece um ensino mais exploratório e alinhado às diretrizes da BNCC, que destacam a importância da Matemática como um conhecimento construído ao longo da história e em constante evolução (BRASIL, 2018).

No fim, a melhor abordagem depende do contexto e dos objetivos pedagógicos. O importante é que os professores estejam atentos a essas nuances para garantir que os alunos não apenas aprendam a fórmula, mas realmente compreendam sua origem e suas aplicações. Afinal, como aponta Skovsmose (2000), um ensino matemático voltado apenas para a memorização pode limitar o desenvolvimento do pensamento crítico, enquanto estratégias mais reflexivas promovem um aprendizado mais profundo e significativo.

Apesar das atividades apresentarem características exploratórias, de verificação de padrões, na análise dos sólidos presentes nas páginas dos livros, a manipulação de sólidos concretos tornaria o aprendizado mais significativo. Segundo estudos como os de Borba e Scucuglia (2016), o uso de materiais concretos e tecnologias interativas amplia a visualização geométrica e fortalece o raciocínio espacial dos alunos. Dessa forma, integrar recursos manipulativos ao processo investigativo tornaria o aprendizado ainda mais significativo, permitindo que os estudantes construam ativamente seus próprios conhecimentos, alinhando-se à BNCC e às abordagens investigativas defendidas por autores como Miguel e Miorin (2008).

## **2.4 Análise dos Livros Didáticos do Ensino Médio**

A seguir, apresento uma análise detalhada de dois livros didáticos voltados para o Ensino Médio. Antes da implantação do Novo Ensino Médio, os livros viam separados em 3 volumes com os conteúdos das unidades temáticas distribuídas nas 3 séries do Ensino Médio. Em 2022, as unidades temáticas foram separadas em 6 volumes. Neste caso, iremos analisar 2 livros que contemplam a unidade temática de Geometria Plana e Espacial. Para facilitar a leitura, vamos chamar o livro Matemática em Contexto: Geometria Plana e Espacial, de livro C e o livro Prima Matemática: Geometria, vamos chamar de livro D.

### **2.4.1 Análise Comparativa dos Livros Didáticos do Ensino Médio**

O Livro C apresenta os poliedros de maneira clara e bem estruturada, diferenciando os sólidos convexos dos não convexos e utilizando representações visuais que auxiliam na compreensão de suas propriedades. No entanto, a Relação de Euler é introduzida de forma direta, sem uma abordagem investigativa que permita aos estudantes descobri-la por meio da experimentação.

Embora o conceito já tenha sido trabalhado no Ensino Fundamental, o intervalo entre as séries pode fazer com que os alunos percam essa conexão ao longo do tempo. Nesse sentido, uma abordagem mais exploratória no Ensino Médio poderia consolidar melhor esse aprendizado.

O livro segue as diretrizes da BNCC ao apresentar definições formais e aplicações, mas carece de atividades práticas que permitam aos alunos testarem a Relação de Euler de forma mais ativa. A inclusão de modelagem 3D ou construção de sólidos físicos seria um diferencial para tornar esse aprendizado mais significativo, permitindo que os estudantes manipulem as formas e compreendam melhor as relações entre vértices, arestas e faces.

Já o Livro D adota uma abordagem interdisciplinar, relacionando os poliedros à cristalografia, um ramo da química que estuda a estrutura dos cristais. Essa contextualização amplia a relevância do conteúdo e pode despertar maior interesse nos alunos.

Porém, assim como no Livro C, a Relação de Euler é apresentada de forma direta, sem progressão investigativa que leve os estudantes a descobrirem a fórmula por conta própria. Além disso, a seção de exercícios sobre o tema é limitada, trazendo apenas oito questões, a maioria voltada para a aplicação direta da equação, sem exploração de padrões ou generalizações.

Figura 13 - Algumas atividades presentes no Livro C

**Atividades**  Não escreva no livro.

7. Em um poliedro convexo, o número de vértices é 5 e o de arestas é 10. Qual é o número de faces? **7 faces.**
8. Em um poliedro convexo de 20 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces tem esse poliedro? **11 faces.**
9. Um poliedro convexo apresenta 1 face hexagonal, 6 faces triangulares e 12 arestas. Quantos vértices tem esse poliedro? **7 vértices.**
10. Qual é o número de faces de um poliedro convexo de 20 vértices tal que em cada vértice concorrem 5 arestas? **32 faces.**
11. Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais. **10 vértices.**
12. Uma bola de futebol pode ser representada por um poliedro formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas com lados congruentes entre si. Sabe-se que, para costurar essas faces lado a lado, formando a superfície da bola, usam-se 20 cm de linha em cada aresta do poliedro.  
Qual é a medida de comprimento total, em metros, de linha que será utilizada para costurar toda a bola? **18 m**



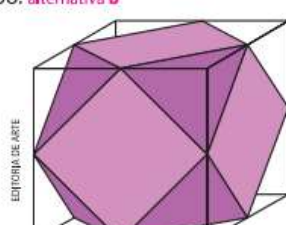
Fonte: Editora Ática (2020, pág. 80)

A análise das atividades revela que, embora os exercícios promovam a contagem de vértices, arestas e faces, há uma limitação na visualização espacial. A maioria das questões exige apenas cálculos numéricos, com poucas representações visuais, o que pode dificultar a percepção tridimensional dos sólidos.

A falta de representações concretas no ensino dos poliedros pode impactar significativamente a compreensão geométrica dos alunos. Lorenzato (2006) defende que "a manipulação de materiais concretos permite ao estudante interagir com os conceitos matemáticos de maneira significativa, favorecendo a construção do conhecimento". Dessa forma, o uso de modelos físicos e tecnologias digitais surge como um recurso essencial para fortalecer a aprendizagem.

Figura 9 - Análise da atividade 5

5. (Unifesp-SP) Considere o poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo. **alternativa b**



O número de faces triangulares e o número de faces quadradas desse poliedro são, respectivamente:

|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| a) 8 e 8. | c) 6 e 8. | e) 6 e 6. |
| b) 8 e 6. | d) 8 e 4. |           |

Fonte: Editora FTD (2020)

O poliedro destacado no exercício 5, é um cuboctaedro, que tem vértices nos pontos médios das arestas de um cubo. Esse sólido, embora visualmente interessante, é difícil de explorar apenas em representações bidimensionais. A falta de um modelo manipulável limita a percepção tridimensional de suas propriedades e dificulta a análise de sua estrutura.

A tecnologia de impressão 3D, aliada a softwares de modelagem, permitiria que os alunos manipulassem os sólidos, observassem suas características de diferentes ângulos e identificassem padrões de maneira intuitiva. D'Ambrósio (1996) já afirmava que "a visualização e a experimentação são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento geométrico", reforçando a importância desses recursos no ensino da Geometria Espacial.

Quadro 4 - Resumo das principais diferenças entre os dois livros analisados:

| Aspecto                       | Livro C                                                                   | Livro D                                                                                     |
|-------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| Apresentação dos Poliedros    | Clara e bem estruturada, com diferenciação entre convexos e não convexos. | Relaciona os poliedros à cristalografia, contextualizando a geometria.                      |
| Relação de Euler              | Apresentada diretamente, sem progressão investigativa.                    | Introduzida de forma direta, sem incentivo à descoberta do padrão.                          |
| Exercícios e Exploração       | Poucas atividades exploratórias; foco na aplicação direta da fórmula.     | Poucos exercícios sobre o tema, com pouca diversidade e sem generalizações.                 |
| Uso de Representações Visuais | Representações gráficas claras, mas sem manipulação concreta.             | Predomínio de descrições textuais, com poucas imagens ilustrativas.                         |
| Sugestões para Aprimoramento  | Inclusão de modelagem 3D e construção de sólidos físicos.                 | Exploração de padrões, materiais concretos e tecnologia digital para visualização espacial. |

Fonte: Autoria Própria

Os dois livros analisados apresentam a Relação de Euler de maneira clara e objetiva, mas sem aprofundamento investigativo que leve os alunos à construção do conhecimento por meio da exploração. Ambos enfatizam a aplicação direta da fórmula, deixando em segundo plano atividades que poderiam fortalecer a percepção espacial e a compreensão conceitual do teorema.

A inclusão de modelagem 3D, manipulação de sólidos e atividades investigativas tornaria o ensino da Geometria Espacial mais dinâmico e significativo. Como argumenta D'Ambrósio (1996), a visualização e experimentação são fundamentais para o

desenvolvimento do pensamento geométrico, tornando a impressão 3D uma ferramenta valiosa para o ensino moderno.

Dessa forma, ao invés de apenas calcular valores numéricos, os estudantes poderiam descobrir a Relação de Euler por meio da experimentação, consolidando o conhecimento geométrico de forma mais efetiva e alinhada às diretrizes educacionais contemporâneas.

### 3 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo, apresenta-se a metodologia escolhida para a pesquisa: Análise Institucional e Sequência Didática (AI&SD), conforme proposta por Henriques (2016). Com base nessa abordagem, detalha-se o percurso metodológico após conhecer seus principais elementos, incluindo os procedimentos realizados nas Pesquisas Interna e Externa.

#### 3.1 Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD)

Com base nos estudos de Henriques, Nagamine e Nagamine (2012), Henrique e Serôdio (2013) e Henriques (2011), que exploram conceitos de Análise Institucional (AI) e Sequência Didática (SD), foi desenvolvida uma metodologia de pesquisa organizada em seis das oito etapas sugeridas pelos autores. Esta metodologia é dividida em duas fases distintas: a fase da Análise Institucional & Sequência Didática, projetada para aplicação em pesquisas educacionais.

Henrique (2016) traz uma definição para AI:

**Definição 1:** Análise Institucional é um estudo realizado em torno de elementos institucionais, a partir de inquietações/questões levantadas pelo pesquisador no contexto institucional correspondente, permitindo identificar as condições e exigências que determinam, nessa instituição, as relações institucionais e pessoais com objetos do saber, em particular, as organizações que intervêm no processo ensino-aprendizagem. (p. 1268, *adaptado, grifo da autora*)

Reforçando essa ideia, Henriques e Serôdio (2013) afirmam que:

A análise institucional, como metodologia de pesquisa, fornece ferramentas para identificarmos as condições e exigências que determinam, numa instituição, as práticas institucionais em torno de objetos de estudos, como as IM, requeridos na formação de recursos humanos (HENRIQUES, SERÔDIO, 2013, p. 3).

Com base no que foi apresentado, entendemos que a inteligência artificial é um campo de estudo originado no contexto institucional e ajuda a fornecer respostas para algumas questões levantadas pelos pesquisadores. Isso permite alcançar seus objetivos ao identificar os elementos principais e suas relações pessoais com a instituição e o objeto de estudo. Henriques (2016) destaca possíveis elementos institucionais passíveis de análise listados no Quadro 5, fundamentando-se em seu trabalho anterior (Henriques, 2011).

Quadro 5 - Elementos constituintes de uma instituição



*Fonte:* Henriques (2011, apud Henriques, 2016, p. 3)

O autor sugere que, ao realizar uma pesquisa em Educação, devemos considerar uma instituição composta por pelo menos um desses elementos (Henriques, 2016). A escolha dessa instituição pelo pesquisador depende das decisões tomadas com base nos objetivos do estudo, na problemática e nas questões de pesquisa. Essas escolhas podem incluir tanto instituições de referência quanto instituições para aplicação prática — tópicos que serão discutidos mais adiante.

Após a escolha da instituição, o foco se volta para analisar as relações institucionais e pessoais com os objetos de estudo que são reconhecidos nela, assim como dos elementos institucionais selecionados pelo pesquisador (ver **Quadro 5**).

Segundo Henriques (2011), a Sequência Didática (SD) é vista como um componente da Engenharia Didática desenvolvida por Artigue (1988). De acordo com Artigue, "como metodologia de pesquisa, a SD está organizada em diversas fases: análises preliminares; concepção e análise a priori; implementação, observação e coleta de dados; análise posteriori e validação" (Artigue, 2015, p. 471). Portanto, a SD deve incorporar essas características, mencionadas pela autora e atreladas à análise institucional. A definição proposta por Henriques (2011, *apud*, Henriques, 2016) é apresentada a seguir:

**Definição 2:** Uma sequência didática é um esquema experimental formado por situações, problemas ou tarefas, realizadas com um determinado fim, desenvolvido por sessões de aplicação a partir de um estudo preliminar [análise institucional] em torno de um objeto do saber e de uma análise matemática/didática, caracterizando os objetivos específicos de cada situação, problema ou tarefa. (Henriques, 2011, APUD, Henriques 2016, p. 4)

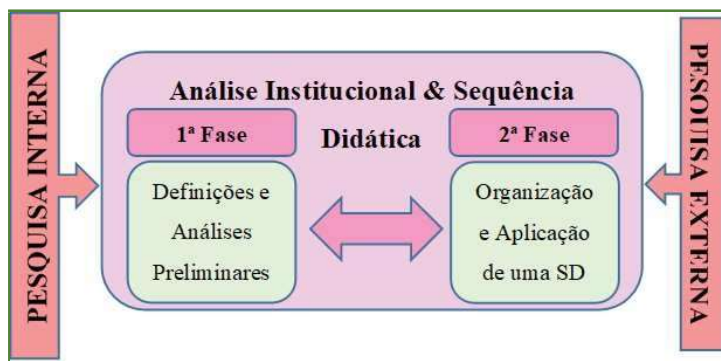
Com isso, o pesquisador será capaz de antecipar o processo de análise didática e confrontá-lo com os resultados obtidos após a aplicação de seu dispositivo didático experimental. Para tanto, essa metodologia delineada pela AI&SD possui dois grandes momentos distintos, o da Pesquisa Interna e o da Pesquisa Externa, que Henriques (2014, *apud* Henriques, 2016) define a seguir:

A **Pesquisa Interna** é uma sondagem realizada pelo pesquisador ou por grupo de pesquisadores, sem intervenção de sujeitos externos. É o momento pelo qual o pesquisador procura compreender melhor o seu objeto de estudo. Ele conjectura, problematiza, formula hipóteses, questiona-se, define o quadro teórico, os objetivos, descreve o percurso metodológico da sua pesquisa, escolhe, analisa os elementos institucionais específicos e apresenta resultados parciais. (Henriques, 2014).

A **Pesquisa Externa** é uma sondagem realizada pelo pesquisador ou por grupo de pesquisadores envolvendo sujeitos externos como público alvo. É o momento pelo qual o pesquisador aplica os estudos desenvolvidos na **pesquisa interna**. Esta aplicação pode ou não envolver seres humanos. Por exemplo, a aplicação de uma sequência para o estudo de práticas efetivas de estudantes de uma instituição é uma pesquisa externa. (Henriques, 2014) (Henriques, 2016, p. 5, *grifo da autora*).

Esse processo de pesquisas interna e externa (considerados também como momentos de pesquisa), que engloba toda a nossa metodologia da AI&SD, pode ser representado pelo esquema, adaptado da autora, da Figura 10.

Figura 10 - Momentos e fases da AI&SD



**Fonte:** Adaptação da Autora (Henriques, 2016, p. 4)

Henriques (2016) delinea o processo metodológico de pesquisa em duas fases, contendo cada uma delas quatro etapas: a primeira denominada de Definições e Análises Preliminares; e a segunda, de Organização, Análises e Aplicação de uma SD, como pode ser observado na Figura 10 e respectivo detalhamento no Quadro 6.

Quadro 6 - Detalhamento de AI&SD

| <b>ANÁLISE INSTITUCIONAL &amp; SEQUÊNCIA DIDÁTICA (AI&amp;SD)</b> |                                                              |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| <b>1ª FASE – DEFINIÇÕES E ANÁLISES PRELIMINARES</b>               |                                                              |
| <b>1ª ETAPA</b>                                                   | Tomada de decisões iniciais Identificação de instituições    |
| <b>2ª ETAPA</b>                                                   | Escolha de elementos institucionais                          |
| <b>3ª ETAPA</b>                                                   | Estudo e apresentação da análise institucional de referência |
| <b>4ª ETAPA</b>                                                   | Organização de uma SD Análise <i>a priori</i>                |
| <b>2ª FASE – ORGANIZAÇÃO, ANÁLISES E APLICAÇÃO DE UMA SD</b>      |                                                              |
| <b>5ª ETAPA</b>                                                   | Organização de uma SD                                        |
| <b>6ª ETAPA</b>                                                   | Análise <i>a priori</i>                                      |
| <b>7ª ETAPA</b>                                                   | Aplicação da sequência                                       |
| <b>8ª ETAPA</b>                                                   | Análise <i>a posteriori</i> e validação                      |

*Fonte:* Produção da Autora

Cada uma dessas fases, em suas etapas, tem particularidades importantes durante o recorte metodológico da pesquisa. A 1ª etapa, que se refere à tomada de decisões iniciais, para Henriques, “é fluentemente clássica, presente em toda pesquisa acadêmica, científica ou técnica” (HENRIQUES, 2016, p. 6). É nesse momento que o pesquisador, diante de suas inquietações, escolhe seu tema de pesquisa, envolto na sua problemática, seja de sua prática docente ou de outra fonte investigativa que lhe seja de interesse. As questões de pesquisa, nessa etapa, surgem em volta do objeto do saber de referência, a partir dos objetivos traçados e da delimitação e escolha do seu quadro teórico.

Na segunda etapa, ocorre a escolha da instituição em relação ao objeto do saber de referência, que é seu objeto de estudo no trabalho. Henriques (2016) classifica as instituições a serem escolhidas para a pesquisa como:

**Instituição de Referência** - instituição de realização da Pesquisa Interna. Esta instituição é tomada como fonte reveladora da epistemologia e organizações possíveis do objeto matemático de referência.

**Instituição de Aplicação** - instituição de realização da Pesquisa Externa. Esta instituição é tomada como campo de coleta de dados relacionados às práticas efetivas de sujeitos envolvidos como público alvo.

**Instituição de Referência e Aplicação** - instituição onde são realizadas ambas as Pesquisas (Interna e Externa). (Henriques, 2016, p. 6, grifo nosso)

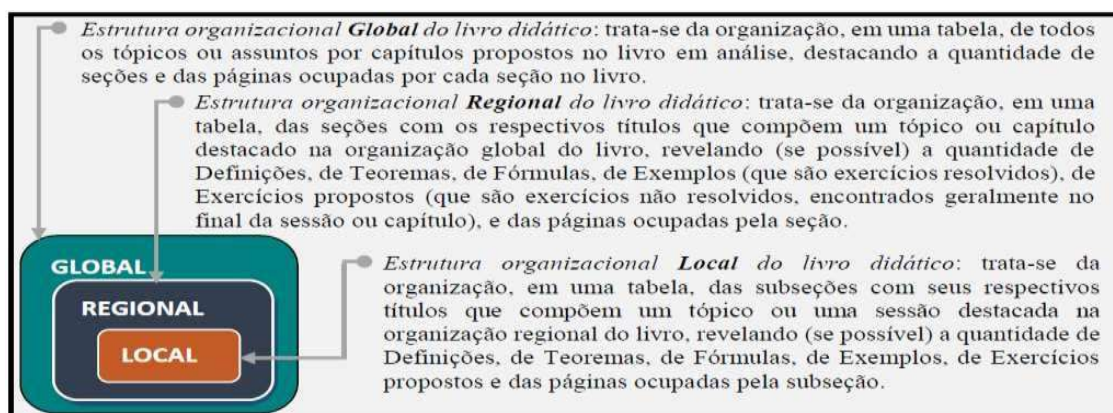
Em algumas pesquisas, é possível que sejam escolhidas duas instituições, uma de referência e outra de aplicação, porém, se o professor pesquisa em sua própria sala de aula, isso leva a tê-la como instituição tanto de referência quanto de aplicação.

A escolha dos elementos institucionais, indicados no Quadro 5 por Henriques (2016), acontece na 3ª etapa, em que pelo menos um deles deve ser escolhido, mas o autor assinala que, para uma pesquisa em Educação, é importante que essa escolha englobe os documentos oficiais que norteiam a *noosfera* do objeto do saber, como BNCC, PCN, PPC etc., o livro didático, as tecnologias que serão utilizadas, as práticas dos professores e estudantes/alunos. Para que essa escolha aconteça, o pesquisador precisa estabelecer o que deseja através das investigações preliminares, ainda na etapa inicial, com relação a seus objetos e questões de pesquisa.

A partir das escolhas feitas na terceira etapa, a 4ª etapa se caracteriza pela análise descritiva desses elementos, a partir de reflexões e da criação de propostas, soluções ou contribuições (a depender da pesquisa a ser feita), frente à instituição escolhida na etapa dois, com relação à problemática exposta (Henriques, 2016). Importante destacar a análise dos Livros Didáticos (LD), pois esta revela explicitamente o formato institucional do objeto matemático a ser investigado. Para tanto, o autor propõe um modelo a seguir (Quadro 7), produzido por Henriques, Nagamine, Nagamine (2012), que é formado de uma estrutura em três partes organizadas, permitindo uma visão geral do objeto. Essa estruturação é dividida

em global, regional e local, dando uma visão geográfica do objeto do saber a ensinar naquela instituição.

Quadro 7 - Estrutura da Análise do LD



**Fonte:** Henriques, Nagamine, Nagamine (2012)

Henriques (2016) complementa afirmando que uma pesquisa que vise a compreender o que estudantes/alunos aprendem ou as dificuldades em torno do objeto do saber a ensinar, durante seu processo de aprendizagem, não pode ficar restrita a analisar essas questões apenas por instrumentos de coletas de dados.

Ao adentrar a segunda fase, na quinta etapa, ocorre a organização da SD, contendo ao menos uma sessão. Essas sessões devem ser constituídas de dispositivos experimentais, que contenham pelo menos uma tarefa *T* ou situações-problema elaboradas pelo pesquisador, feita na etapa anterior (Henriques, 2016). O autor esquematiza essa informação no Quadro 8.

Quadro 8 - Descrição de uma SD

| Sessão I        | → | Sessão II       | → | ... | → | Sessão P        |
|-----------------|---|-----------------|---|-----|---|-----------------|
| T1              |   | T1              |   | ... |   | T1              |
| T2              |   | T2              |   | ... |   | T2              |
| ⋮               |   | ⋮               |   | ⋮   |   | ⋮               |
| T <sub>k1</sub> |   | T <sub>k2</sub> |   | ... |   | T <sub>kP</sub> |

Condições de realização e evolução de R(X, O)

**Fonte:** Henriques (2016)

A partir da construção da Sequência Didática (SD), na sexta etapa, efetuar a análise *a priori* das tarefas desse dispositivo. Artigue (2015) comenta sobre a importância de uma análise *a priori*, destacando que:

A análise *a priori* torna claras as diferentes opções e a forma como elas se relacionam com as hipóteses de pesquisa e análises preliminares. Para cada situação, são assinaladas as principais variáveis didáticas, isto é, aquelas que afetam a eficiência e o custo das possíveis estratégias desenvolvidas pelos estudantes, bem como suas possíveis dinâmicas. Estas variáveis podem ser ligadas às características das funções propostas para os alunos, mas elas também podem ser ligadas aos recursos previstos para os alunos para resolver estas tarefas (que corresponde em teoria ao *milieu* material da situação) e a forma como a interação dos alunos com o meio é socialmente organizada. (p. 473, tradução nossa)

Henriques pontua que “essa é, portanto, uma etapa que se diferencia desta metodologia de pesquisa, com as outras, cujos trabalhos visam coletar dados, “apenas” a partir das práticas efetivas de alunos/estudantes” (Henriques, 2016, p. 10). A análise *a priori* pode seguir o modelo indicado no Quadro 9.

Quadro 9 - Análise a priori da Tarefa T

| <b>T1</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>Enunciado da tarefa T1 apresentado no Quadro 5</b> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| <b>Objetivo de T1</b><br>Apresentar os objetivos da tarefa e do pesquisador relativamente a aplicação da tarefa.                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                       |
| <b>Análise a priori de T1</b><br>Apresentar a análise <i>a priori</i> considerando os conhecimentos institucionais correspondentes a praxeologia da tarefa; as estratégias de resolução; às técnicas necessárias para a realização da tarefa; as resoluções e as soluções possíveis, que sejam corretas ou incorretas, tendo, contudo, um procedimento lógico; destacar as variáveis didáticas correspondentes. |                                                       |
| <b>Resultados esperados</b><br>Apresentar e justificar a escolha das possíveis estratégias utilizadas pelo aluno/estudante. Discutir / apresentar o que se espera das práticas efetivas dos sujeitos envolvidos (alunos, estudantes, Professores, etc.).                                                                                                                                                        |                                                       |
| <b>Pré - requisitos e competências</b><br>Apresentar os pré-requisitos necessários e as competências que o sujeito deve mobilizar para solucionar a tarefa.                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                       |
| <b>Repetir o processo de análise para cada tarefa</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                       |

*Fonte:* Henriques (2016)

Em seguida, partimos para a etapa sete, que compreende a aplicação da SD, vinculada à negociação feita entre o pesquisador e a instituição, através de contatos e autorização, da direção institucional, dos professores e alunos/estudantes envolvidos etc. e, em alguns momentos, do Conselho de Ética em Pesquisa – CEP (Henriques, 2016). Nessa etapa, diante do acordo firmado para que possa ocorrer a aplicação da SD, o pesquisador deve detalhar em seu trabalho todas as condições para essa ocorrência: tempo, local, público, entraves externos etc., revelando também quais tipos de instrumentos serão usados para a recolha de dados para essa aplicação.

“Geralmente são recolhidos dados acerca das produções dos alunos, incluindo arquivos de computador quando a tecnologia é usada, notas de campo de observação, áudios e vídeos, e outros mais, cobrindo o trabalho em grupo e as fases coletivas (Artigue, 2015, p. 474, *tradução nossa*)”.

Com esses instrumentos que contêm os dados, o pesquisador utiliza o que Henriques (2016) indica como Protocolo Experimental (PE):

Definição 3: O Protocolo Experimental é um documento construído pelo pesquisador durante as investigações, constituído de manuscritos de alunos/estudantes, filmagens, transcrições de entrevistas faladas, entrevistas escritas, arquivos de computadores etc. A construção do protocolo experimental é essencial em pesquisas educacionais e deve constar como anexo na versão final do manuscrito da pesquisa. (Henriques, SERÔDIO, 2013, apud Henriques, 2016, p. 11)

O protocolo experimental é de grande importância no momento da análise *a posteriori*, que constitui a última etapa da metodologia AI&SD. Com os dados recolhidos nesse instrumento, o pesquisador, com vistas ao que foi proposto na análise *a priori*, define critérios para acompanhamento das práticas dos alunos/estudantes, ligados ao trabalho, para obter resultados significativos do ponto de vista do ensino e da aprendizagem. Artigue (2015) afirma que essa análise é de natureza qualitativa e local: “o que o pesquisador olha é a dinâmica de um sistema complexo, e ele faz isso através da comparação entre a dinâmica observada com a referência fornecida pela análise *a priori*, tentando fazer sentido para as semelhanças e diferenças (Artigue, 2015, p. 474, *tradução nossa*)”. Henriques (2016) elenca os critérios elaborados pelo pesquisador em torno do objeto para análise de cada tarefa proposta no ED e aplicada, para essa última fase, no Quadro 10.

Quadro 10 - Critérios para a análise *a posteriori* da Tarefa T

| <b>T1</b> | <b>Enunciado da tarefa T1 apresentado no Quadro 5</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|           | <p><b>Elaborar os critérios de análise de T1</b><br/>Considerar os conhecimentos ou conceitos que se pretende ensinar ou que os sujeitos devem mobilizar na realização dessa tarefa; às técnicas necessárias na sua realização; as estratégias de resolução, corretas ou incorretas; as variáveis didáticas mobilizadas.</p> <p><b>Interpretação quantitativa dos dados.</b><br/>Apresentação dos critérios destacados acima em uma tabela, considerando as práticas efetivas quantitativamente/ porcentagem.</p> <p><b>Análise descritiva das práticas dos sujeitos</b><br/>Apresentar uma descrição das práticas efetivas dos sujeitos com base nos critérios considerados acima, comprovadas com recortes dos manuscritos destes sujeitos. O acesso virtual aos manuscritos pode ser efetivado por fotografias ou por escâner.</p> |
|           | <b>Repetir o processo de análise para cada tarefa do dispositivo experimental (cf. Quadro 5)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |

*Fonte:* Henriques (2016)

Diante dos conceitos e elementos que compõem a metodologia AI&SD, passa-se agora à apresentação do percurso metodológico adotado nesta dissertação.

### 3.2 Percurso Metodológico da Pesquisa

Com base nos elementos e descrições feitas, na escolha metodológica pela AI&SD, esta pesquisa foi desenvolvida em duas fases, contemplando seis das oito etapas descritas no **Quadro Q6**. A primeira fase equivale a nossa Pesquisa Interna, enquanto a segunda, refere-se à Pesquisa Externa. A seguir, cada etapa será detalhada, indicando o que foi feito em cada uma das fases.

#### 1ª FASE: DEFINIÇÕES E ANÁLISES PRELIMINARES

A primeira fase, composta de quatro etapas, se iniciou a partir do ano inicial, dos estudos da pesquisadora principal desse trabalho, no PROFMAT-UFOB. Durante o estudo das disciplinas ofertadas por esse programa, foram dados os primeiros passos para o delineamento da pesquisa. A seguir, pontuamos o que ocorreu em cada etapa dessa fase.

##### 1ª ETAPA – TOMADA DE DECISÕES INICIAIS

Após inúmeras idas e vindas em relação ao objeto matemático a ser escolhido, que contemplasse de forma essencial o favorecimento para o processo de ensino e de aprendizagem de Geometria, nos ensinos Fundamental e Médio, foi definido a escolha pelo estudo do Teorema de Euler, atrelado à utilização de Modelos Concretos manipuláveis, englobando o tema do trabalho. A partir dessa escolha, foi redigido o contexto da problemática que envolvia esses processos de aprendizagem, delimitando os objetivos e as questões de pesquisa, em torno desse objeto do saber de referência, como foi observado no primeiro capítulo do trabalho. Além disso, foi realizada uma revisão de literatura sobre os estudos anteriores relacionados à Relação de Euler.

##### 2ª ETAPA – IDENTIFICAÇÃO DA INSTITUIÇÃO

Depois das escolhas iniciais, delimitado o tema e o objeto de estudo, foi estabelecido a Instituição de Pesquisa, que corresponde ao Colégio Estadual da Polícia Militar de Goiás, Unidade Dom Prudêncio, na cidade de Posse, estado de Goiás. O colégio funciona nos turnos matutino com 11 turmas do Ensino Médio, da 1ª a 3ª séries e no turno vespertino com 12 turmas no Ensino Fundamental do 6º ao 9º ano. A aplicação da pesquisa a ser realizada com alunos devidamente matriculados no 6º ano do EF e na 3ª série do EM.

### 3ª ETAPA – ESCOLHA DE ELEMENTOS INSTITUCIONAIS

Nessa etapa, foram escolhidos os elementos institucionais ligados à instituição de referência. Optou-se pela utilização de dois livros didáticos que são utilizados na pesquisa, *Matemática Geração Alpha – 6º Ano* (OLIVEIRA; FUGITA, 2019) e *Prisma Matemática: Geometria* (BONJORNO; GIOVANNI JÚNIOR; SOUSA, 2020). Além disso, foram observadas as habilidades previstas na BNCC.

### 4ª ETAPA – ESTUDO E APRESENTAÇÃO DA ANÁLISE INSTITUCIONAL DE REFERÊNCIA

Inicialmente, foi investigado o documento oficial, a BNCC. Em seguida, feito também um exame, baseado em relatos informais, sobre as práticas dos estudantes e dos professores que costumam ensinar o tema “Relação de Euler”. Para encerrar a etapa, considerou-se relevante o conhecimento acerca das tecnologias empregadas na pesquisa, destacando-se as principais funcionalidades do uso da impressora 3D para elaboração e uso de Modelos Concretos manipuláveis desenvolvidos pela pesquisadora, frente ao estudo do objeto de referência.

### 2ª FASE: ORGANIZAÇÃO, ANÁLISES E APLICAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

De posse das análises e considerações feitas na 1ª fase, em relação à instituição de referência, bem como dos objetivos, iniciou-se a segunda fase. Esse momento se iniciou no segundo ano do curso de mestrado, propondo uma Sequência Didática (SD) baseada em utilização de modelos concretos. A sequência didática (SD) foi construída, traçando a análise *a priori*, efetuando a aplicação dessa sequência, investigando-a com uma análise *a posteriori* e, por fim, validando esse processo, como seguem as próximas etapas indicadas no percurso metodológico. Todavia, devido ao fato deste trabalho não ter sido cadastrado no CEP/UFOB, optou-se por não submeter a sequência didática proposta para a experimentação em sala de aula. Foram realizadas a “5ª Etapa – Organização de uma SD” e “6ª Etapa – Análise *a Priori*” para a sequência didática proposta, cujo resultados estão expressos a seguir, pontuamos o que ocorreu em cada etapa dessa fase.

## **4 MATERIAIS CONCRETOS E ATIVIDADES INVESTIGATIVAS COM DIFERENTES SÓLIDOS GEOMÉTRICOS**

Neste capítulo, serão apresentados os sólidos geométricos confeccionados em PLA por meio da impressão 3D, bem como algumas atividades planejadas para serem aplicadas em sala de aula. O objetivo é ampliar as possibilidades de aprendizado, permitindo que os estudantes tenham contato com diferentes sólidos geométricos e possam explorar suas propriedades de forma concreta e interativa.

O material desenvolvido contempla um conjunto variado de poliedros, incluindo os Poliedros de Platão, de Arquimedes e de Kepler-Poinsot, entre outros. Dessa forma, busca-se proporcionar uma abordagem abrangente, envolvendo tanto poliedros convexos quanto não convexos, estimulando a análise comparativa entre suas características e incentivando a formulação de conjecturas.

Além da apresentação dos sólidos, este capítulo detalha o processo de impressão 3D, abordando aspectos como o tipo de impressora utilizada, os insumos empregados na fabricação dos modelos e os custos envolvidos na confecção dos kits. Essas informações são fundamentais para compreender a viabilidade da produção desse material didático e sua aplicabilidade no contexto educacional.

### **4.1 Impressão 3D e o Ensino de Geometria**

A impressão 3D representa uma inovação significativa para o ensino de Geometria, permitindo que os estudantes visualizem sólidos geométricos sob diferentes perspectivas e manipulem modelos físicos de maneira mais interativa. Essa tecnologia possibilita que conceitos abstratos sejam explorados de forma tangível, promovendo um aprendizado mais significativo e conectado à realidade dos alunos.

A utilização da impressão 3D na educação tem sido amplamente discutida na literatura acadêmica, sendo apontada como uma ferramenta que potencializa a aprendizagem ao estimular o pensamento espacial e a experimentação ativa (Silva & Almeida, 2021). Estudos demonstram que, ao possibilitar a manipulação de modelos tridimensionais, os alunos conseguem compreender melhor propriedades geométricas, como simetria, planificação e relações entre vértices, arestas e faces (Pereira & Santos, 2020). Além disso, essa tecnologia favorece a aprendizagem baseada na resolução de problemas e na criação de hipóteses, tornando o ensino mais dinâmico e investigativo.

A utilização de materiais concretos no ensino de matemática possibilita uma aprendizagem mais significativa, pois permite que os estudantes visualizem, manipulem e explorem conceitos abstratos de maneira mais intuitiva. Modelos físicos, como aqueles gerados por impressão 3D, são recursos essenciais para o desenvolvimento do pensamento espacial e para a construção de conexões entre a teoria e a prática" (Mendes, 2018, p. 112).

Além do impacto na aprendizagem matemática, a impressão 3D se destaca como uma ferramenta valiosa para a Educação Inclusiva. De acordo com Oliveira et al. (2019), a materialização dos conceitos geométricos por meio de modelos físicos permite que alunos com dificuldades visuais ou cognitivas tenham acesso a recursos táteis que reforcem sua compreensão espacial. O contato direto com objetos tridimensionais auxilia no desenvolvimento do pensamento geométrico e na internalização de conceitos que, tradicionalmente, são abordados apenas por meio de representações bidimensionais nos livros didáticos.

#### 4.2 Potencialidades da Impressão 3D na Educação

A aplicação da impressão 3D no ensino de Geometria apresenta diversos benefícios, entre eles:

- **Visualização Espacial Aprimorada:** Modelos tridimensionais permitem que os alunos compreendam melhor as relações entre os elementos geométricos.
- **Experimentação e Investigação:** Os alunos podem manipular os objetos e testar conjecturas matemáticas, promovendo uma aprendizagem mais ativa.
- **Inclusão Educacional:** A possibilidade de materiais táteis contribui para a aprendizagem de alunos com deficiência visual.
- **Durabilidade e Reutilização:** Os modelos impressos podem ser usados por diversas turmas, reduzindo a necessidade de materiais descartáveis.
- **Conexão com a Realidade:** O uso da impressão 3D aproxima a matemática do cotidiano, estimulando o interesse dos alunos por aplicações práticas.

A escolha da impressão 3D como ferramenta pedagógica para este estudo surgiu da inquietação ao observar que, tradicionalmente, os sólidos geométricos utilizados em sala de aula eram confeccionados em papel e montados manualmente, resultando em estruturas frágeis e de curta durabilidade. Outras alternativas, como poliedros construídos com jujubas e palitos ou com canudos, frequentemente acabavam descartadas, gerando desperdício de materiais.

Diante dessa limitação, a impressão 3D se mostrou uma solução viável e sustentável, pois permite a criação de modelos tridimensionais precisos, duráveis e reutilizáveis. Essa percepção foi reforçada pela experiência pessoal da autora com a tecnologia. No ambiente familiar, ao observar a produção de materiais construídos em casa, por meio da impressora 3D utilizada por sua filha, revelou um potencial didático significativo. Os modelos tridimensionais impressos ofereciam maior durabilidade e precisão, características fundamentais para a criação de materiais pedagógicos reutilizáveis em sala de aula. A partir disso, tornou-se evidente que esse recurso poderia ser aplicado ao ensino de geometria, permitindo que os estudantes manipulassem poliedros e verificassem empiricamente a Relação de Euler, observando padrões e desenvolvendo suas próprias conjecturas.

Além disso, a comparação entre os custos das impressoras 3D e das impressoras convencionais frequentemente utilizadas em escolas revelou um aspecto relevante. Enquanto impressoras a laser ou jato de tinta exigem reposição constante de papel e cartuchos de tinta, a impressora 3D, embora tenha um investimento inicial maior, permite a fabricação de materiais duráveis a um custo relativamente baixo por unidade produzida. Essa viabilidade econômica reforça a impressão 3D como um recurso acessível e aplicável ao ensino, permitindo que os alunos manipulem poliedros e verifiquem empiricamente a relação de Euler, observando padrões e desenvolvendo suas próprias conjecturas.

Embora existam pesquisas e relatos sobre a utilização da impressão 3D em aulas de Matemática, a maior parte dessas discussões se concentra na análise da tecnologia em si, e não na aplicação prática de um produto didático voltado especificamente para o ensino de conceitos geométricos fundamentais. Neste trabalho, a proposta central é apresentar um produto educacional que utilize modelos tridimensionais impressos em 3D para facilitar o ensino e a aprendizagem do Teorema de Euler.

A abordagem investigativa proporcionada pela impressão 3D está em conformidade com as diretrizes da BNCC, que incentivam metodologias ativas e exploratórias, promovendo a construção do conhecimento por meio da experimentação. Segundo a BNCC (BRASIL, 2018), o ensino da Geometria deve estimular o desenvolvimento da autonomia dos estudantes, permitindo que eles formulem hipóteses, realizem experimentos e validem conjecturas matemáticas. Dessa forma, a impressão 3D surge como um recurso promissor para transformar a experiência de aprendizagem em sala de aula, proporcionando um ensino mais dinâmico, acessível e conectado às demandas da educação contemporânea.

### 4.3 Confeção dos Sólidos

Para a impressão dos sólidos geométricos apresentados neste trabalho, utilizou-se uma Impressora Ender-3 S1 da marca Creality, cujo valor médio varia entre R\$ 2.000,00 e R\$ 3.200,00. O material escolhido para a confecção dos sólidos foi o PLA (Ácido Polilático), devido à sua durabilidade, rigidez e custo acessível, que varia entre R\$ 97,00 e R\$ 120,00 por kg, dependendo da cor do material.

A escolha do PLA se justifica por suas vantagens em relação a outros materiais, especialmente para o contexto educacional. Diferentemente dos sólidos confeccionados em papel, que são frágeis e podem ser facilmente danificados com o manuseio, os sólidos impressos em 3D possuem alta resistência e podem ser reutilizados em diversas aulas. Além disso, permitem a realização de marcações temporárias com canetas coloridas, sendo sua limpeza simples, utilizando apenas água e sabão.

Figura 11 - Impressora Ender-3 S1 Marca Creality



Fonte: creality.com (site)

### 4.4 Sólidos Geométricos Produzidos

Foram confeccionados **31 sólidos geométricos**, distribuídos entre diferentes categorias:

- **5 Poliedros de Platão:** tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.
- **13 Poliedros de Arquimedes:** tetraedro truncado, cubo truncado, cuboctaedro, rombicuboctaedro, cuboctaedro truncado, octaedro truncado, icosaedro truncado, dodecaedro truncado, icosidodecaedro, rombicosidodecaedro, icosidodecaedro truncado, cubo snub e o icosidodecaedro snub.

- **4 Poliedros de Kepler-Poinsot:** pequeno dodecaedro estrelado, grande dodecaedro estrelado, grande icosaedro e grande dodecaedro.
- **4 Poliedros Toroidais:** poliedros topologicamente iguais ao toro.
- **5 Outros poliedros estrelados:** variantes dos sólidos platônicos.

Todas as peças foram escaladas para aproximadamente 6 cm (60 mm) utilizando o programa de fatiamento Orca Slicer, disponível gratuitamente para Windows e MacOS. A maior parte dos arquivos para impressão dos poliedros foi obtida gratuitamente. Apenas os arquivos para impressão dos poliedros toroidais tiveram um custo de R\$ 30,00.

#### 4.5 Links dos Arquivos para Impressão

O quadro a seguir apresenta os links dos arquivos utilizados para a impressão dos sólidos geométricos, permitindo que os professores/pesquisadores selecionem aqueles mais adequados para suas atividades. Também é possível realizar pesquisas na internet para outros modelos, utilizando o termo **poliedros 3d stl**. O termo **stl** refere-se aos arquivos com modelagem própria para impressão em 3D.

Quadro 11 - Links dos arquivos dos sólidos impressos

| Poliedros                   | Link dos arquivos                                                                                                                                               |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Poliedros de Platão         | <a href="https://www.thingiverse.com/thing:3786299">https://www.thingiverse.com/thing:3786299</a>                                                               |
| Poliedros de Arquimedes     | <a href="https://www.printables.com/model/133696-archimedean-solids#preview.589wC">https://www.printables.com/model/133696-archimedean-solids#preview.589wC</a> |
| Poliedros de Kepler-Poinsot | <a href="https://cults3d.com/en/3d-model/art/art3d-clb-solides-kepler-poinsot">https://cults3d.com/en/3d-model/art/art3d-clb-solides-kepler-poinsot</a>         |
| Poliedros Toroidais         | <a href="https://www.thingiverse.com/thing:2865540">https://www.thingiverse.com/thing:2865540</a>                                                               |
| Outros Poliedros            | <a href="https://www.printables.com/model/710034-platonic-solids-variants">https://www.printables.com/model/710034-platonic-solids-variants</a>                 |

Fonte: Internet

#### 4.6 Confeção dos Kits

Foram confeccionados três kits de sólidos geométricos, em cores diferentes (branca, verde e azul), para auxiliar no desenvolvimento das atividades propostas. Os kits serão apresentados à banca avaliadora e posteriormente disponibilizados ao Laboratório de Matemática da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB), Campus Barreiras. A tabela a seguir apresenta o custo estimado para a confecção de cada kit.

Tabela 2 - Valores gastos para a confecção de um kit com 31 poliedros

|                 |                           |            |
|-----------------|---------------------------|------------|
| <b>DESPESAS</b> | Filamento (kg)            | R\$ 120,00 |
|                 | Material Utilizado (g)    | 559,58     |
|                 | Tempo de Impressão (h)    | 52,87      |
|                 | Taxa de Energia (kwh)     | 1          |
|                 | Consumo da Impressora (W) | 350        |
| <b>CUSTO</b>    | Consumo de Filamento      | R\$ 67,15  |
|                 | Consumo de Energia        | R\$ 18,50  |
|                 | Custo Total               | R\$ 85,65  |

Fonte: Autoria própria

Com esses kits, busca-se não apenas proporcionar uma experiência didática mais interativa e prática, mas também garantir a reutilização dos materiais ao longo dos anos, tornando a iniciativa sustentável e economicamente viável para o ensino da Geometria.

#### 4.7 Aplicação dos Sólidos em Atividades Didáticas

Ao levar a Geometria para o cotidiano dos estudantes, é essencial proporcionar experiências que vão além da mera exposição de conceitos. Como professores, sabemos que os alunos aprendem melhor quando são desafiados a explorar, questionar e construir conhecimento de maneira ativa. A abordagem investigativa na Matemática permite exatamente isso: um ensino baseado na experimentação e na formulação de hipóteses, tornando o aprendizado mais significativo e envolvente.

A proposta deste trabalho se alinha às diretrizes discutidas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) em *Investigação Matemática em Sala de Aula*, que enfatizam que as atividades investigativas permitem aos alunos desenvolverem autonomia no pensamento matemático. Os autores destacam que:

Quando os alunos participam ativamente do processo de aprendizagem, formulando hipóteses, testando-as e analisando seus resultados, eles não apenas compreendem melhor os conceitos matemáticos, mas também desenvolvem habilidades essenciais, como argumentação, resolução de problemas e raciocínio lógico. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 89).

Dessa forma, as atividades planejadas aqui seguem essa perspectiva, promovendo a construção do conhecimento matemático de maneira interativa. O uso dos sólidos geométricos

impressos em 3D proporciona aos alunos a oportunidade de explorar características espaciais, visualizar relações geométricas e desenvolver uma compreensão mais aprofundada dos poliedros.

As atividades desenvolvidas consistem em:

- Classificação de sólidos em convexos e não convexos – Os alunos analisam os 31 sólidos impressos e os separam conforme suas propriedades geométricas.
- Identificação das planificações – Com base em cartas contendo as planificações dos poliedros de Platão e Arquimedes, os estudantes devem relacioná-las com os sólidos correspondentes.
- Associação entre poliedros e suas características – Cada aluno recebe cartas com descrições sobre número de vértices, arestas e faces e deve associá-las corretamente aos poliedros.
- Jogo de classificação – Os sólidos são distribuídos entre os grupos (Platão, Arquimedes e Kepler-Poinsot) e os alunos devem identificá-los corretamente.

Essas atividades foram desenvolvidas visando aprimorar a compreensão dos alunos sobre a estrutura dos poliedros, estimulando a percepção espacial e a relação entre representações tridimensionais e bidimensionais. A implementação dessas práticas será apresentada nos próximos tópicos, com a descrição detalhada de cada uma e a análise dos resultados obtidos.

Ao integrar a investigação matemática com o uso de materiais concretos, espera-se que os alunos não apenas memorizem definições e propriedades, mas descubram por si mesmos os padrões geométricos e ampliem sua capacidade de argumentação matemática. A Geometria se torna, assim, uma experiência tangível e desafiadora, aproximando-se das orientações da BNCC, que enfatizam o desenvolvimento do pensamento lógico e da resolução de problemas.

#### 4.8 Investigação da Relação de Euler com Poliedros Impressos em 3D

A Relação de Euler para poliedros convexos, expressa pela fórmula  $V - A + F = 2$ , é um dos conceitos fundamentais da Geometria Espacial e tem aplicações importantes na Matemática e em áreas como a computação gráfica, arquitetura e engenharia estrutural. No entanto, a compreensão dessa relação pelos alunos pode ser desafiadora quando abordada apenas de forma teórica ou algébrica.

Para que essa aprendizagem se torne mais significativa, propomos aqui uma abordagem investigativa, onde os alunos poderão explorar e validar a Relação de Euler manipulando

sólidos geométricos impressos em 3D. Como já discutido ao longo deste trabalho, atividades investigativas proporcionam uma experiência mais engajadora e permitem que os estudantes construam conhecimento de forma ativa, como enfatizado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013):

A investigação matemática possibilita que os alunos se tornem protagonistas da sua própria aprendizagem, explorando conceitos, formulando conjecturas e validando teorias por meio da experimentação e do raciocínio lógico (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2013, p. 72).

Dessa forma, esta atividade foi planejada para que os alunos descubram a validade da Relação de Euler de maneira empírica, registrando dados, identificando padrões e, ao final, justificando matematicamente seus achados.

A metodologia utilizada para a aplicação das atividades investigativas se baseia na experimentação e exploração dos sólidos geométricos impressos em 3D. A manipulação desses modelos permite que os alunos visualizem concretamente as relações matemáticas, tornando o aprendizado mais acessível e significativo.

Os sólidos utilizados são confeccionados em PLA e possuem a vantagem de serem laváveis e reutilizáveis, permitindo que os alunos façam marcações temporárias utilizando canetas coloridas. Isso é especialmente útil para numerar faces, destacar arestas e facilitar a contagem em sólidos mais complexos, como os poliedros de Kepler-Poinsot. Esse recurso auxilia no desenvolvimento do pensamento espacial e na organização das informações durante as atividades.

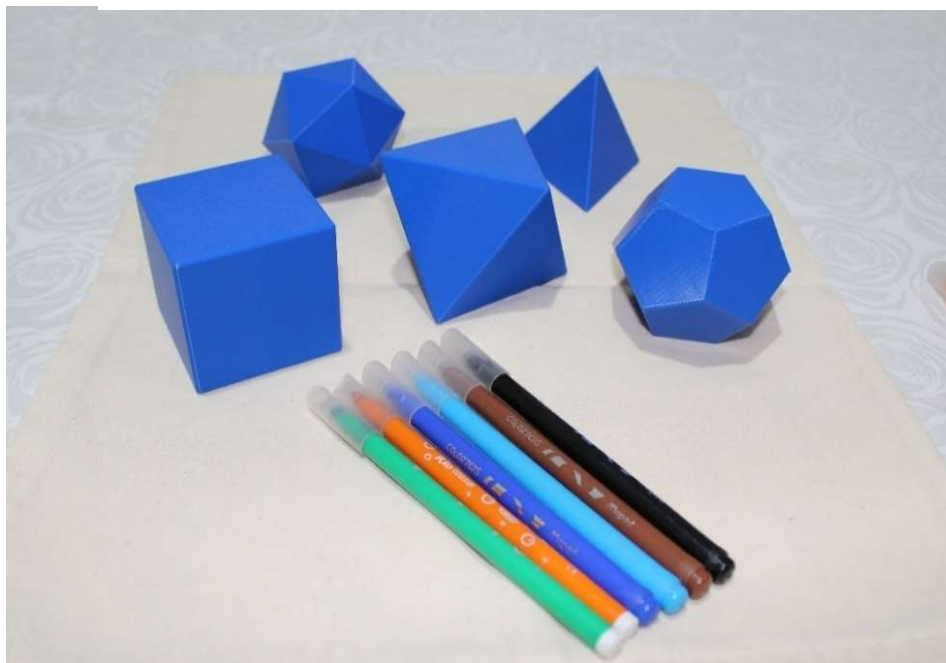
A construção das atividades será detalhada na cartilha educacional anexada nos apêndices deste trabalho, a qual servirá como um produto pedagógico complementar, contendo instruções detalhadas para a aplicação prática das atividades em sala de aula.

Na presente monografia, foram utilizados diferentes tipos de poliedros com o objetivo de proporcionar aos estudantes uma experiência mais ampla e concreta no estudo da Geometria Espacial. Esses sólidos foram selecionados não apenas por suas propriedades matemáticas, mas também por sua relevância histórica e potencial para estimular a investigação matemática. A seguir, apresentaremos uma descrição dos principais poliedros, acompanhados das imagens dos sólidos que foram impressos para a realização da pesquisa.

- a) **Poliedros de Platão:** são cinco sólidos convexos e regulares, ou seja, possuem faces formadas por polígonos regulares congruentes, e o mesmo número de faces se encontra em cada vértice. São eles: o **tetraedro** (4 faces triangulares), o **cubo ou hexaedro** (6

faces quadradas), o **octaedro** (8 faces triangulares), o **dodecaedro** (12 faces pentagonais) e o **icosaedro** (20 faces triangulares).

Figura 12 - Conjunto de Poliedros de Platão



Fonte: Acervo da Autora (2025)

- b) Poliedros de Arquimedes** Os poliedros de Arquimedes, também chamados de sólidos arquimedianos, são treze ao todo e possuem faces compostas por dois ou mais tipos de polígonos regulares, mantendo, no entanto, a simetria dos vértices. São eles: o **tetraedro truncado**, com 4 triângulos e 4 hexágonos (8 faces); o **cuboctaedro**, com 6 quadrados e 8 triângulos (14 faces); o **cubo truncado**, com 8 triângulos e 6 octógonos (14 faces); o **rombicuboctaedro**, com 8 triângulos e 18 quadrados (26 faces); o **cuboctaedro truncado**, com 8 hexágonos, 6 octógonos e 12 quadrados (26 faces); o **cubo snubado (snub cube)**, com 6 quadrados e 32 triângulos (38 faces); o **octaedro truncado**, com 8 hexágonos e 6 quadrados (14 faces); o **icosaedro truncado**, com 20 triângulos e 12 decágonos (32 faces); o **icosidodecaedro**, com 20 triângulos e 12 pentágonos (32 faces); o **rombicosidodecaedro**, com 20 triângulos, 12 pentágonos e 30 quadrados (62 faces); o **icosidodecaedro truncado**, com 20 hexágonos, 12 decágonos e 30 quadrados (62 faces); o **dodecaedro snubado (snub dodecahedron)**, com 12 pentágonos e 80 triângulos (92 faces); e o **dodecaedro truncado**, com 20 triângulos e 12 decágonos (32 faces). Esses sólidos oferecem aos estudantes uma rica

variedade de estruturas geométricas, indo além dos tradicionais poliedros de Platão e ampliando as possibilidades de exploração no ensino da geometria espacial.

Figura 13 - Conjunto de Poliedros Arquimedianos



Fonte: Acervo da Autora (2025)

- c) Os poliedros de Kepler-Poinsot constituem os quatro sólidos regulares não convexos, também chamados de **sólidos estelares regulares**, que se caracterizam por possuírem faces formadas por polígonos regulares e a mesma configuração em torno de cada vértice, apesar de sua forma estendida além da convexidade. São eles: o **pequeno dodecaedro estrelado**, formado por 12 faces pentagonais estreladas (ou pentagramas); o **grande dodecaedro estrelado**, com 12 faces também em forma de pentagramas, porém dispostas de modo diferente dos do pequeno; o **pequeno icosaedro estrelado**, composto por 20 faces triangulares equiláteras que se projetam em formato de estrela; e o **grande icosaedro estrelado**, com 20 triângulos equiláteros igualmente estrelados, porém com intersecções mais acentuadas. Esses sólidos, embora menos conhecidos que os poliedros convexos, apresentam uma beleza geométrica singular e ampliam significativamente a compreensão das propriedades espaciais, sendo fundamentais para enriquecer o ensino investigativo da geometria.

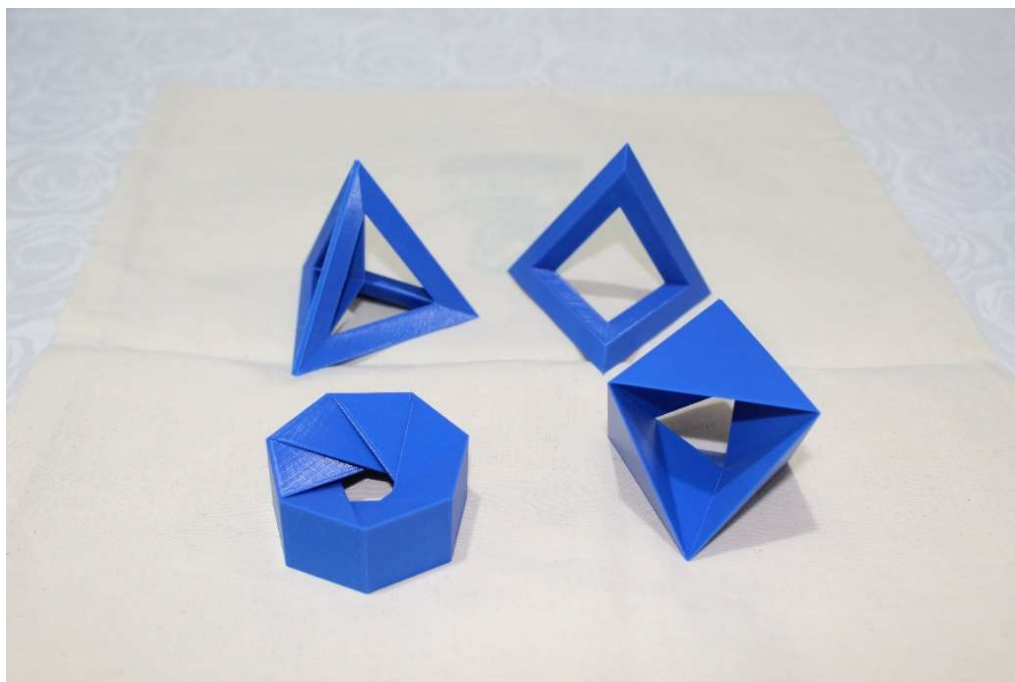
Figura 14- Conjunto de poliedros de Kepler-Poinsot



Fonte: Acervo da Autora (2025)

- d) **Poliedros toroidais:** são sólidos que, diferentemente dos anteriores, apresentam **um** ou **mais buracos** em sua estrutura, fazendo com que sua forma se assemelhe a um toro (como uma rosquinha). Esses poliedros não são simplesmente conexos e introduzem conceitos de topologia que enriquecem o estudo da geometria tridimensional.

Figura 15 - Poliedros Toroidais



Fonte: Acervo da Autora (2025)

A escolha desses modelos visou promover um ensino investigativo, rompendo com a limitação de atividades que contemplam apenas os poliedros de Platão. A diversidade de formas e propriedades contribuiu para ampliar a percepção espacial dos estudantes e incentivar a formulação de hipóteses, observações e generalizações, em conformidade com os princípios da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Figura 28 - Sacolas personalizadas do kit de materiais



Fonte: Acervo da Autora (2025)

#### 4.9 Atividades Propostas

Para tornar o ensino de Geometria mais dinâmico e alinhado com a BNCC, as atividades foram pensadas com diferentes abordagens, incentivando os alunos a explorarem, testarem hipóteses e construir conhecimento de forma ativa. O objetivo é oferecer aos professores estratégias práticas para enriquecer as aulas, indo além do que já aparece nos livros didáticos e tornando o aprendizado mais significativo.

As atividades apresentadas a seguir foram estruturadas considerando níveis gradativos de dificuldade, de modo que possam ser aplicadas em diferentes séries ou anos, conforme a escolha do professor. Ao analisar as habilidades propostas pela BNCC para o Ensino Fundamental, percebe-se uma ênfase na relação entre as figuras espaciais e elementos do cotidiano dos estudantes. Dessa forma, ao trabalhar essas atividades com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, é essencial focar em habilidades básicas, como reconhecer, nomear e identificar poliedros e outras formas geométricas.

Por outro lado, essa abordagem não pode ser a mesma quando se trata da 3ª série do Ensino Médio, pois, neste nível, os estudantes já devem possuir conhecimentos prévios sobre poliedros e suas propriedades. Assim, as atividades voltadas para essa etapa devem explorar conceitos mais avançados e promover o aprofundamento teórico e prático do conteúdo. A proposta apresentada pode, portanto, ser adaptada conforme o nível de ensino. As atividades 1 e 2, por exemplo, podem ser aplicadas na 3ª série do Ensino Médio como uma estratégia de revisão, permitindo verificar se os alunos possuem os conhecimentos prévios necessários sobre o tema.

A proposta de ensino do Teorema de Euler neste trabalho visa estimular o pensamento científico, crítico e criativo, alinhando-se a uma das competências essenciais da BNCC. De acordo com o documento:

"Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas." (BRASIL, 2018, p. 9).

Essa competência destaca a importância de incentivar a autonomia intelectual e a capacidade analítica dos estudantes, permitindo-lhes desenvolver uma visão inovadora diante dos desafios do mundo contemporâneo.

A utilização de materiais impressos em 3D neste trabalho traz uma proposta simples, porém inovadora, para que os estudantes possam ampliar a visão dos poliedros para fora das páginas do livro didático. E assim ao manipular os sólidos impressos em 3D, possam identificar suas características e refletir como a convexidade está presente no dia a dia, em estruturas, construções e até mesmo em obras de arte. Aproximando assim os conhecimentos matemáticos para o cotidiano dos estudantes.

O ensino de alguns tópicos matemáticos pode ser desafiador, especialmente quando os alunos já entram em sala com a ideia de que conteúdos de geometria são abstratos e difíceis. Por isso, um tema abrangente no planejamento de atividades foi: como os alunos podem se interessar pelo tópico desde o início a ponto de gerarem interesse ou curiosidade sobre o assunto antes mesmo de formalizarem o conhecimento?

Respondendo a este questionamento foi proposto no desenvolvimento da pesquisa, as atividades 2 e 3 visando envolver os estudantes no processo de ensino aprendizagem. Ao invés de simplesmente utilizar uma atividade xerocopiada para que os estudantes possam identificar as planificações de diferentes sólidos, buscamos apresentar este tópico através de cartas, criando um ambiente mais lúdico. Assim, busca-se cativar e incentivar os estudantes no desenvolvimento das atividades, apresentando os conceitos por meio de desafios em grupo e competições. Com esta abordagem, recorremos às contribuições de Vygotsky (1984), que destaca a interação social como um aspecto fundamental da aprendizagem. Ele afirma que o conhecimento é construído por meio do diálogo, do compartilhamento de ideias e da resolução de problemas de forma colaborativa, "A aprendizagem acontece na interação com o outro, quando o aluno é desafiado a ir além do que já sabe, com o suporte de um mediador." (VYGOTSKY, 1984).

As atividades voltadas à aplicação e verificação da Relação de Euler assumem um caráter mais investigativo. Mesmo na atividade 3, com o uso das cartas, buscou-se explorar as características dos poliedros de Platão, Arquimedes e Kepler-Poinsot. Nessa atividade, foi apresentado um desafio, em que as cartas serão utilizadas com a finalidade de utilizar a Relação de Euler na identificação de um dos elementos de um poliedro (vértices, arestas ou faces). Para isto, os estudantes em grupos, apresentam apenas dois destes dados e pedem aos demais alunos que calculem o valor desconhecido. Embora esse tipo de problema seja recorrente em listas de exercícios, a proposta aqui apresentada busca torná-la mais interativa.

Já a atividade 4 propõe uma abordagem ainda mais investigativa, em que os estudantes devem manipular modelos sólidos impressos em 3D e verificar a validade da Relação de Euler.

A intenção é apresentar poliedros convexos e não convexos, e até mesmo exemplos que não satisfazem a fórmula de Euler, promovendo discussões mais amplas sobre a natureza e as limitações do teorema.

Contudo, vale ressaltar que as atividades planejadas não foram aplicadas com turmas da educação básica, uma vez que o projeto não foi submetido previamente ao Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB). De acordo com as normas éticas vigentes, pesquisas que envolvem sujeitos humanos devem ser avaliadas e autorizadas por um comitê de ética antes de sua realização. Assim, em respeito às diretrizes institucionais e legais, optou-se por apresentar as propostas de forma teórica e metodológica, resguardando a integridade ética da pesquisa. As atividades aqui descritas encontram-se prontas para serem aplicadas em contextos futuros que estejam devidamente autorizados.

É importante destacar ainda que, mesmo na ausência de uma impressora 3D, é possível adaptar as atividades propostas com o uso de modelos construídos em papel. Para isso, há sites que disponibilizam planificações prontas para impressão, recorte e montagem dos poliedros utilizados nesta pesquisa. Uma excelente referência é o portal <http://www.korthalsaltes.com> (Modelos de papel de poliedros), que reúne moldes gratuitos de diversos sólidos geométricos, incluindo os poliedros de Platão, Arquimedes, Kepler-Poinsot e outros modelos toroidais e compostos. Essa alternativa amplia o acesso à manipulação concreta dos sólidos, sendo uma solução viável, que possibilita ao professor trabalhar com diferentes sólidos geométricos e investigar, de forma concreta, a validade da Relação de Euler, promovendo uma aprendizagem significativa mesmo em contextos com infraestrutura limitada.

Figura 17 - Portal com Modelos de poliedros em papel



Fonte: <http://www.korthalsaltes.com> (Internet 2025)

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ensinar Matemática nunca foi uma tarefa simples — e quando falamos de Geometria, os desafios se tornam ainda mais evidentes. Os conceitos abstratos, o excesso de fórmulas e a dificuldade em visualizar as figuras espaciais criam uma barreira entre o conteúdo e a experiência dos estudantes. Não é incomum que a Geometria seja percebida como algo distante da realidade, difícil de entender e, muitas vezes, pouco útil. Mas não precisa ser assim.

A proposta desenvolvida neste trabalho nasce justamente dessa inquietação: como aproximar o ensino da Geometria da vida dos alunos? Como transformar uma fórmula aparentemente simples como a Relação de Euler em um convite à investigação, à curiosidade e à construção ativa do conhecimento? A resposta, ao menos em parte, passa pelo uso de materiais concretos e por estratégias pedagógicas que favoreçam a exploração, a manipulação e a experimentação. Quando o estudante pode tocar, montar, contar vértices, arestas e faces com as próprias mãos, a Geometria deixa de ser uma sequência de símbolos no quadro e passa a ser algo real, tangível e significativo.

A proposta apresentada aqui, embora ainda não tenha sido aplicada em sala de aula por questões éticas — uma vez que o projeto não foi submetido ao Comitê de Ética da UFOB —, foi pensada com base em princípios sólidos de ensino investigativo e nos referenciais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O uso de sólidos impressos em 3D, por exemplo, surge como uma possibilidade concreta de inovar o ensino, mas é preciso reconhecer: muitos professores da rede pública ainda não têm acesso a esse tipo de tecnologia. A ausência de infraestrutura, de formação técnica ou mesmo de incentivo institucional limita o alcance de práticas mais investigativas e criativas.

Nesse sentido, é fundamental pensar em soluções viáveis para o contexto escolar. A construção manual de sólidos, utilizando moldes disponíveis online, é uma alternativa válida e acessível — mas também é necessário olhar para o futuro e propor que escolas-piloto recebam investimentos em tecnologias como a impressão 3D. Com essa estrutura mínima, seria possível não apenas aplicar as atividades aqui propostas, mas também abrir novos caminhos de pesquisa sobre o uso dessa tecnologia no ensino da Matemática. A escola pode, e deve, ser também um laboratório de experimentação pedagógica.

As atividades aqui apresentadas foram elaboradas com base em diferentes níveis de complexidade, respeitando as orientações da BNCC e considerando as distintas etapas de aprendizagem dos estudantes do Ensino Fundamental e Médio. Ao propor atividades lúdicas, desafiadoras e baseadas na manipulação de sólidos geométricos, este trabalho busca

transformar a sala de aula em um espaço de investigação, descoberta e diálogo. Além disso, reforça-se a importância de metodologias que valorizem a experimentação, mesmo quando os recursos são limitados, explorando as potencialidades de materiais acessíveis, como papel, barbante e canudos, e o uso de tecnologias digitais disponíveis.

Mesmo com a limitação da não aplicação em campo, acredita-se que esta pesquisa representa um passo importante na direção de práticas pedagógicas mais envolventes, criativas e efetivas no ensino da Geometria. A construção do conhecimento matemático não precisa — e não deve — se restringir à memorização de fórmulas e à resolução mecânica de exercícios. Quando o aluno é desafiado a pensar, construir e argumentar, ele se torna protagonista de sua própria aprendizagem.

As atividades propostas neste trabalho serão desenvolvidas em momento oportuno, respeitando os trâmites éticos e institucionais necessários. A expectativa é que, ao serem aplicadas, contribuam para a formação de estudantes mais críticos, curiosos e envolvidos com a Matemática — e que seus resultados possam ser analisados, sistematizados e compartilhados com outros educadores e pesquisadores.

Assim, este trabalho não se encerra em si mesmo. Ele é um convite à continuidade: seja por meio de novas investigações sobre o uso de materiais concretos e tecnologias no ensino de Geometria, seja por meio de análises críticas dos livros didáticos utilizados na rede pública, seja pela proposição de sequências didáticas que se aproximem da realidade escolar. Que este estudo inspire educadores a enxergarem a Geometria não como um conjunto de conteúdos isolados, mas como uma poderosa ferramenta de leitura e compreensão do mundo, acessível a todos e essencial à formação cidadã e científica do estudante do século XXI.

Afinal, a Matemática não precisa ser um caminho árduo e solitário, ela pode ser explorada, tocada, encontrada na ponta dos dedos.

## REFERÊNCIAS

- AGUIAR, Luan Daniel Camargo de. *Um processo para utilizar a tecnologia de impressão 3D na educação*. 2015. 129 f. Dissertação (Mestrado em Design) – Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2015. Disponível em: [https://repositorio.unesp.br/bitstream/11449/137894/3/aguiar\\_ldcd\\_me\\_bauru.pdf](https://repositorio.unesp.br/bitstream/11449/137894/3/aguiar_ldcd_me_bauru.pdf). Acesso em: 10 fev. 2025.
- AIGNER, Martin; ZIEGLER, Günter M. *Demonstrando o Livro: As mais belas demonstrações matemáticas*. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2018.
- ALBUQUERQUE, Evelin Lima. Uso de realidade aumentada no ensino de geometria espacial no ensino fundamental. *Avances de investigación*, v. 11, n. 1, p. 44-61, 2024.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6023: Informação e documentação - Referências - Elaboração. Rio de Janeiro, 2023.
- BARBOSA, Abner Brian Ferreira; PEIXOTO, Arildomá Lobato; FERREIRA, Nacinelma Carneiro. A Impressora 3D como Ferramenta Didática para Professores e Discentes de Licenciatura em Matemática do IFPA, Campus Belém. *Revista Engrenagem*, Belém, n. 17, p. 86-89, jun. 2019. Disponível em: <https://revistaengrenagem.ifpa.edu.br/revistas/edicoes-impressas-digitalizadas/15-17-revista-engrenagem/file>. Acesso em: 02 fev. 2025.
- BARDIN, Laurence. *Análise de conteúdo*. 6. ed. Lisboa: Edições 70, 2011.
- BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. *Prisma Matemática: Geometria – Ensino Médio*. São Paulo: Editora FTD, 2020.
- BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. *Educação Matemática e Tecnologias Digitais*. São Paulo: Cortez Editora, 2016.
- BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. S. Tecnologias digitais e a reconfiguração do conhecimento em Educação Matemática. *Revista Brasileira de Educação Matemática*, v. 16, n. 2, p. 215-232, 2016.
- BOYER, C. B. *A History of Mathematics*. Princeton University Press, 2001.
- BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. São Paulo: Editora Blucher, 2019.
- BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 08 ago. 2024.
- BRASIL. Ministério da Educação. PNLD 2020: matemática – guia de livros didáticos. Brasília, DF: MEC, Secretaria de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, 2019. Disponível em: <https://www.fnede.gov.br>. Acesso em: 08 ago. 2024.

BRASIL. Plano Nacional do Livro Didático – PNLD 2021. Disponível em: [https://pnld.nees.ufal.br/pnld\\_2021\\_didatico/componente-curricular/pnld-2021-obj2-matematica-e-suas-tecnologias](https://pnld.nees.ufal.br/pnld_2021_didatico/componente-curricular/pnld-2021-obj2-matematica-e-suas-tecnologias). Acesso em: 08 ago. 2024.

CARVALHO, R.; BANQUEIRO, M. A função do livro didático no ensino da Matemática. São Paulo: Editora Matemática Viva, 2020.

CENTRO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO PORTO (CMUP). Módulo 3: Poliedros e a Relação de Euler. Disponível em: <https://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/Manhas/Modulo3PolidrosEuler.html>. Acesso em: 02 fev. 2025.

CORES, GRAFOS E RESOLUÇÃO DE CONFLITOS. Disponível em: <http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=247>. Acesso em: 20 dez. 2024.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é matemática?* 2. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

CROMWELL, Peter R. Polyhedra. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

CULTS3D. Modelos de Poliedros para Impressão em 3D. Disponível em: <https://cults3d.com/en/search?q=polyhedron>. Acesso em: 06 ago. 2024.

CUNDY, H. M.; ROLLETT, A. P. Mathematical Models. 3. ed. London: Oxford University Press, 1961.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996.

DANTE, L. R. Matemática: Contexto e Aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em Contextos: Geometria Plana e Geometria Espacial. São Paulo: Ática, 2020.

ELON, P. D. *A característica de Euler-Poincaré*. Revista Matemática Universitária, n. 1, p. 15-20, 2008. Disponível em: [https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n01\\_Artigo02.pdf](https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n01_Artigo02.pdf). Acesso em: 23 ago. 2024.

ESCOLA BRASIL. O que é poliedro? Disponível em: [ <https://brasilecola.uol.com.br/o-qu>. Acesso em: 16 fev. 2025.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Tradução de Higha I. Dalcim. 1. ed. São Paulo: Edusp, 2011.

FILHO, Zoroastro Azambuja. Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros Convexos. Revista do Professor de Matemática, n. 03, p. 15-17, 1983.

FÜRKOTTER, Monica; MORELATTI, Maria Raquel Miotto. A articulação entre teoria e prática na formação inicial de professores de matemática. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 9, n. 2, 2007.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. A conquista da matemática: 6º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

HENRIQUES, A. *Análise Institucional & Sequência Didática como metodologia de pesquisa*. In: I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática, 2011, Bonito, MS. Anais [...]. Bonito: [sn], 2011. Disponível em: <https://grupoddm.pro.br/wp-content/uploads/2020/05/HENRIQUES.pdf>. Acesso em: 02 jan. 2025

HENRIQUES, A.; SERÔDIO, R. *Análise Institucional & Sequência Didática: uma proposta metodológica para pesquisas em Educação Matemática*. Revista de Educação Matemática, v. 2, pág. 1-15, 2013.

HENRIQUES, A.; SERÔDIO, R. *Intervenção de Tecnologias e Noções de Registros de Representação no Estudo de Integrais Múltiplas na Licenciatura em Matemática*. Anais do VI HTEM – São Carlos-SP, 2013.

HILBERT, David; COHN-VOSSEN, Stefan. *Geometry and the Imagination*. New York: Chelsea Publishing, 1952.

HISTÓRIA DA GEOMETRIA (POLIEDROS). Disponível em: [http://www.apm.pt/apm/amm/paginas/231\\_249.pdf](http://www.apm.pt/apm/amm/paginas/231_249.pdf). Acesso em: 20 dez. 2024.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGASPARI, A. Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 2: Geometria Espacial. 9. ed. São Paulo: Atual, 2010.

LIMA, Elon Lages. O teorema de Euler sobre poliedros. *Revista Matemática Universitária*, n. 2, p. 57, dez. 1985.

LAKATOS, I. *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press, 1976.

LINDEN, Gert. *Mathematical Models: From the Collections of Universities and Museums*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2013.

LIMA, E. L. Meu Professor de Matemática e outras histórias. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LIMA, Elon Lages et al. A matemática do ensino médio (Vol. 2). Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. A característica de Euler-Poincaré. Rio de Janeiro: IMPA, 1985.

LORENZATO, S. *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Autêntica, 2006.

MENDES, R. Ensino de Matemática e Materiais Concretos. São Paulo: Editora Educação Ativa, 2018.

MENEGAI, Denice Aparecida Fontana Nisxota et al. Formação Continuada: integração das tecnologias digitais na prática pedagógica de professores de matemática. Revista novas tecnologias na educação, v. 16, n. 2, p. 454-463, 2018.

MIALICH, Flávia Renata. Poliedros e Teorema de Euler. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2013.

MIGUEL, A.; MIORIN, J. História da Matemática e suas Implicações Didáticas. São Paulo: Livraria da Matemática, 2008.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. *Análise Textual Discursiva*. Ijuí: Editora Unijuí, 2007.

MOURA, Lanner de. *Fundamentos da Geometria: uma abordagem visual e intuitiva*. São Paulo: Livraria da Física, 2022.

MUKUKA, Angel; ALEX, Jogymol Kalariparampil. Student Teachers' Knowledge of School-level Geometry: Implications for Teaching and Learning. *European Journal of Educational Research*, v. 13, n. 3, 2024.

OLIVEIRA, Carlos N. C. de; FUGITA, Felipe. *Matemática Geração Alpha 6*. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2019.

OLIVEIRA, L. et al. "Tecnologias Assistivas no Ensino de Matemática". *Revista de Educação Matemática*, v. 20, n. 3, p. 45-67, 2019.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Poliedros. Disponível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/detalhe.php?foto=480&evento=3>. Acesso em: 20 dez. 2024.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. *Matemática essencial 6º ano: ensino fundamental, anos finais*. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

PEREIRA, C.; Santos, A. "A impressão 3D no ensino de Geometria: um estudo exploratório". *Revista Brasileira de Educação Matemática*, v. 15, n. 2, p. 89-104, 2020.

PEREIRA, Hamilton Soares. Poliedros Platônicos. Monografia (Especialização em Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

POLIEDROS ESTRELADOS. *Superfícies Poliédricas*, 17 nov. 2010. Disponível em: <https://superficies-poliedricas.blogspot.com/2010/11/poliedros-estrelados.html>. Acesso em: 08 fev. 2025.

PONTE, J. P. et al. *Investigações matemáticas na sala de aula: perspectivas e desafios*. Educação Matemática Pesquisa, 2012.

PRINTABLES. Conjunto de Poliedros para Impressão 3D. Disponível em: <https://www.printables.com/search/all?q=polyhedron>. Acesso em: 02 ago. 2024.

RABISCO DA HISTÓRIA. Relação de Euler: Vértices, Faces e Arestas. Disponível em: <https://rabiscodahistoria.com/relacao-de-euler-vertices-faces-e-arestas/>. Acesso em: 02 fev. 2025.

SANTOS, L. F.; OLIVEIRA, M. L. O ensino de geometria nos livros didáticos: desafios e perspectivas. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática*, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 95-112, 2021.

SARTOR, Nayara Longo. O Universo dos Poliedros Regulares. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2013.

SILVA, J.; Almeida, R. "O uso de novas tecnologias na aprendizagem matemática". *Educação & Tecnologia*, v. 10, n. 1, p. 25-44, 2021.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Zetetiké*, Campinas, v. 8, n. 1, p. 35-54, 2000.

SKOVSMOSE, O. *Educação Matemática Crítica: a questão da democracia*. Educação & Sociedade, 2000.

STEWART, I. The Shape of Space: How to Visualize Surfaces and Three-dimensional Manifolds. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2019.

THINKIVERSE. Modelos 3D de Poliedros para Impressão. Disponível em: <https://www.thingiverse.com/search?q=polyhedron&type=things>. Acesso em: 10 ago. 2024.

UNESP. Repositório Institucional – Pesquisa sobre a Relação de Euler. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/search?spc.page=1&query=RELA%C3%87%C3%83O%20DE%20EULER>. Acesso em: 08 fev. 2025.

VALENTE, W. R. História da Educação Matemática: uma introdução. Campinas: Autores Associados, 2019.

VALENTE, W. R. O livro didático e o ensino de matemática no Brasil. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, v. 24, n. 3, p. 80-96, 2019.

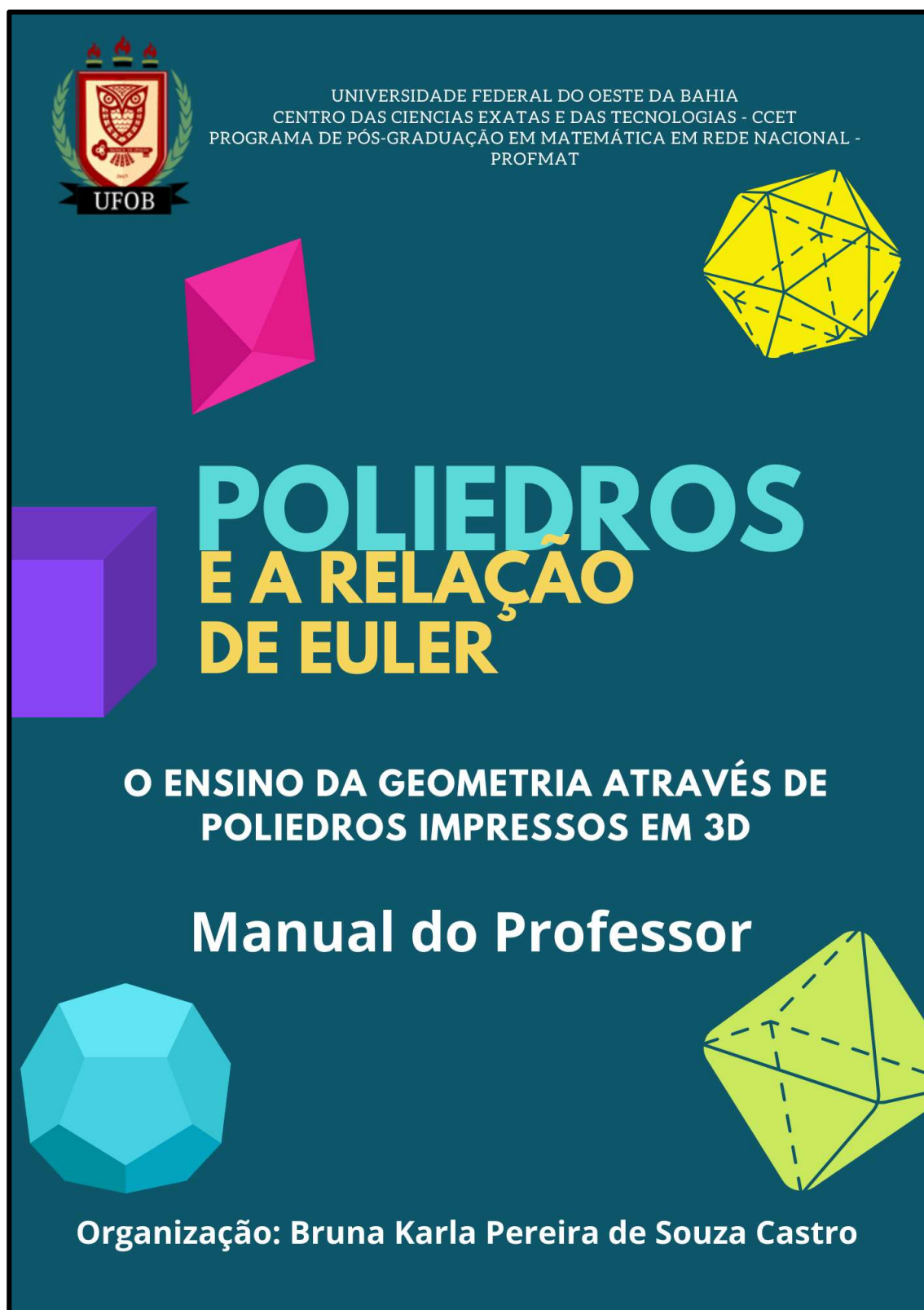
WAGNER, Eduardo.  $V - A + F = 2$ , Existe o Poliedro? *Revista do Professor de Matemática*, n. 47, p. 25-30, 2001.

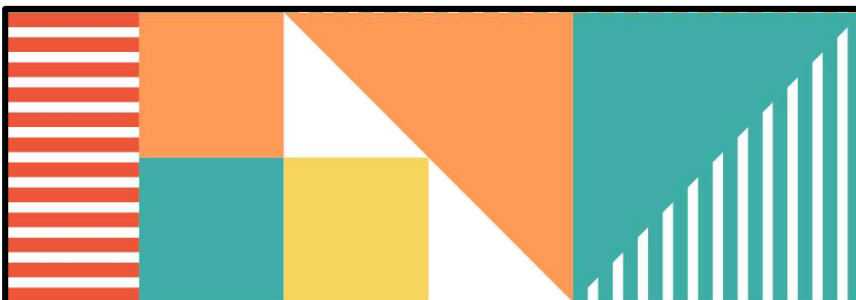
WENNINGER, Magnus J. *Polyhedron Models*. Cambridge: Cambridge University Press, 1971.

ZIEGLER, Günter M. *Lectures on Polytopes*. New York: Springer-Verlag, 1995.

## APÊNDICE

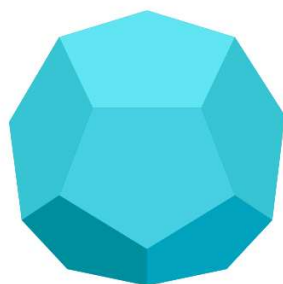
Produto Educacional - Cartilha de orientação ao professor para o ensino da Relação de Euler e o Uso de Poliedros Impressos em 3D





## Índice

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Introdução.....                                                       | 01 |
| 2. Objetivos.....                                                        | 02 |
| 3. Conteúdos: Poliedros e Equação de Euler.....                          | 03 |
| 4. Dicas e Recomendações.....                                            | 03 |
| 5. Habilidades Relacionadas.....                                         | 04 |
| 6. Descritores da Prova SAEB.....                                        | 04 |
| 7. Links dos arquivos para impressão dos poliedros.....                  | 05 |
| 8. Materiais Utilizados.....                                             | 06 |
| 9. Atividade 1 - Classificação de Poliedros Convexos e Não Convexos..... | 07 |
| 10. Atividade 2 - Baralho das planificações.....                         | 09 |
| 11. Baralho para impressão.....                                          | 11 |
| 12. Atividade 3 - Baralho das Características.....                       | 17 |
| 13. Baralho para impressão.....                                          | 19 |
| 14. Atividade 4 - Investigação da Relação de Euler.....                  | 26 |



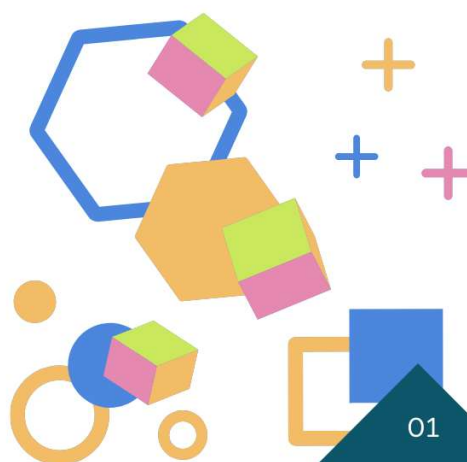
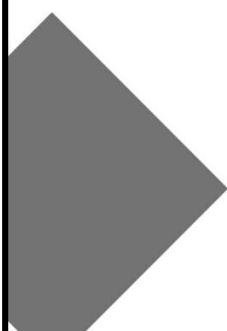


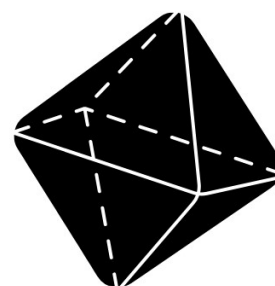
## **CARTILHA: O ENSINO DA GEOMETRIA ATRAVÉS DE POLIEDROS IMPRESSOS EM 3D**

### **1. Introdução**

A Geometria desempenha um papel essencial na Matemática, permitindo que os estudantes compreendam as formas tridimensionais, suas propriedades e aplicações no mundo real. No ensino tradicional, muitas vezes, o estudo dos poliedros fica restrito às representações bidimensionais em livros didáticos, dificultando a visualização espacial e a compreensão de conceito.

Esta cartilha tem como objetivo apresentar uma sequência didática para o ensino da Geometria, utilizando poliedros impressos em 3D como ferramenta de aprendizagem. Através de atividades investigativas, os alunos poderão explorar as propriedades dos sólidos de Platão, Arquimedes, Kepler-Poinsot e toroidais, verificando empiricamente suas características e aprofundando a compreensão sobre a Relação de Euler.





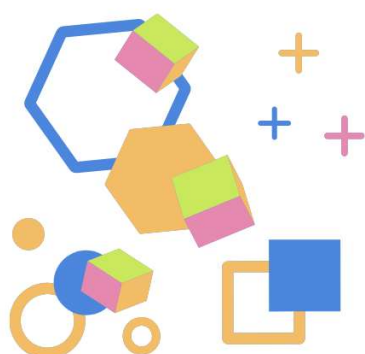
## 2. Objetivos

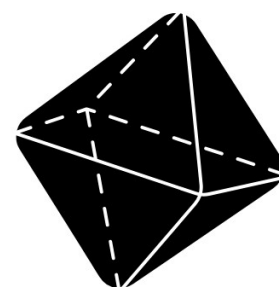
### Objetivo Geral

Proporcionar uma abordagem didática diferenciada para o ensino da Geometria, utilizando poliedros impressos em 3D como recurso pedagógico para a construção do conhecimento matemático.

### Objetivos Específicos

- Favorecer a visualização e manipulação concreta de poliedros para facilitar o entendimento de suas propriedades.
- Explorar a Relação de Euler e sua validade para diferentes tipos de poliedros, indo além dos convexos.
- Desenvolver o pensamento investigativo dos alunos através de atividades práticas e problematizações.
- Relacionar o estudo dos poliedros às habilidades da BNCC e à matriz de referência do SAEB, demonstrando sua importância no currículo escolar.



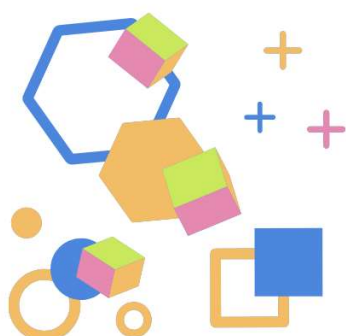


### 3. Conteúdo: Poliedros e a Relação de Euler

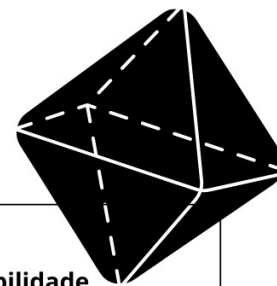
- Definição de poliedros e suas classificações (convexos e não convexos).
- Planificação de poliedros.
- Apresentação dos sólidos de Arquimedes e Kepler-Poinsot.
- A Relação de Euler ( $V - A + F = 2$ ) e sua validade para diferentes tipos de poliedros.

### 4. Dicas e Recomendações

- Incentivar os alunos a explorar os sólidos, contando faces, vértices e arestas para verificar a validade da Relação de Euler.
- As atividades foram alinhadas às competências e habilidades da BNCC, garantindo uma abordagem que favoreça o raciocínio lógico e o pensamento geométrico.
- Integrar a Geometria com outras áreas do conhecimento, como Física, Arquitetura e Arte, promovendo uma visão mais ampla do tema.



## 5. Habilidade Relacionadas:

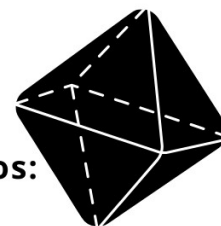


| Série/Ano | Habilidade (Código BNCC) | Descrição da Habilidade                                                                                                                                                                                      |
|-----------|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5º Ano    | <b>EF05MA16</b>          | Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos. Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos. |
|           | <b>EF05MA17</b>          | Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.                                                      |
| 6º Ano    | <b>EF06MA17</b>          | Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial         |
|           | <b>EF06MA18</b>          | Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.            |

## 6. Descritores da Prova SAEB:

- D3 – Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas;
- D4 – Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.





## 7. Links dos arquivos para impressão dos poliedros:

A lista a seguir apresenta os links dos arquivos em stl utilizados para a impressão dos sólidos geométricos. Sugerimos que o tamanho do sólido para impressão seja de pelo menos 6 cm (ou 60mm).

### Poliedros de Platão

<https://www.thingiverse.com/thing:3786299>

### Poliedros de Arquimedes

<https://www.printables.com/model/133696-archimedean-solids#preview.589wC>

### Poliedros de Kepler-Poinsot

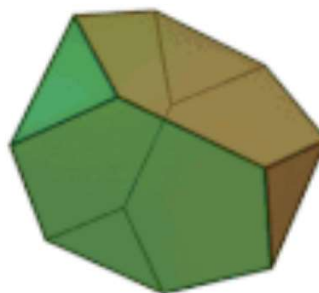
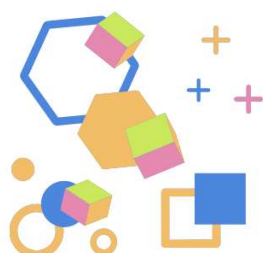
<https://cults3d.com/en/3d-model/art/art3d-clb-solides-kepler-poinsot>

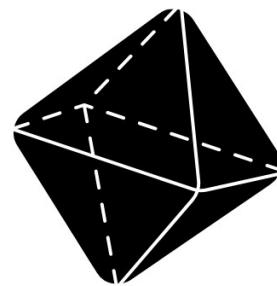
### Poliedros Toroidais

<https://www.thingiverse.com/thing:2865540>

### Outros Poliedros

<https://www.printables.com/model/710034-platonic-solids-variants>

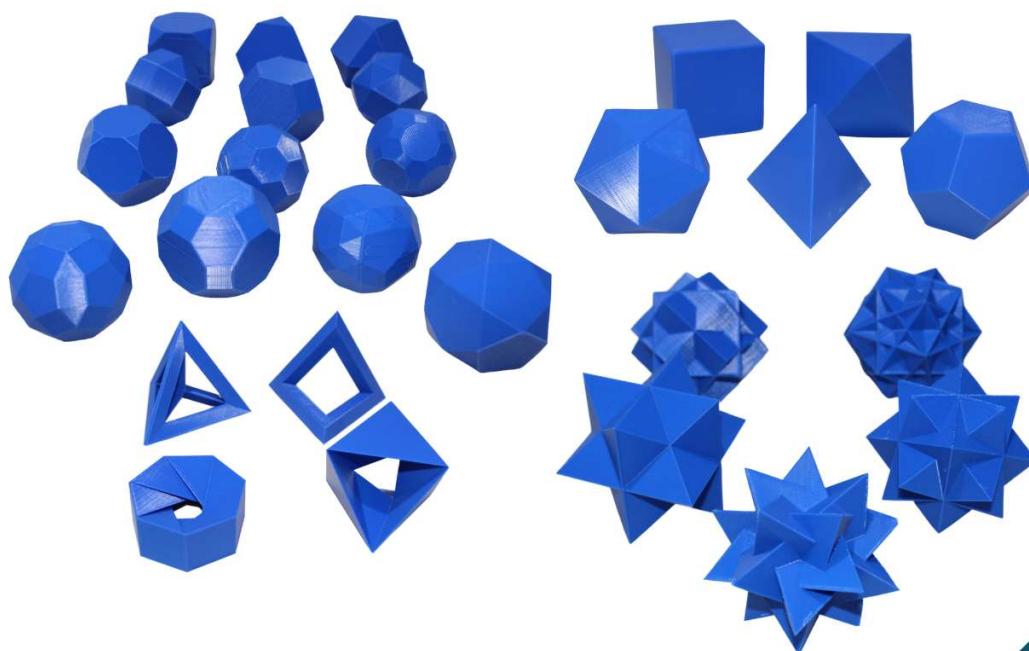




## 8. Materiais Utilizados:

Para a realização das atividades, serão utilizados os seguintes materiais:

- Modelos de poliedros impressos em 3D (convexos e não convexos);
- Cartas com características dos sólidos (número de vértices, arestas e faces);
- Cartas com imagens das planificações dos poliedros;
- Fichas para registro das observações e cálculos;
- Canetas coloridas laváveis para marcações temporárias nos modelos impressos;
- Quadro branco e marcadores para discussões coletivas.



## Atividade 1 – Classificação de Poliedros Convexos e Não Convexos

- Os alunos manipulam os sólidos impressos em 3D, identificam suas características e classificam entre convexos e não convexos.
- Reflexão sobre como a convexidade aparece no dia a dia, em construções e estruturas.

**Público-alvo:** Alunos do Ensino Fundamental (6º ano) e Ensino Médio (3ª série)

**Tempo estimado:** 2 aulas de 50 minutos cada

**Recursos:** Modelos físicos de poliedros impressos em 3D, material de escrita (papel, lápis caneta) e canetinhas coloridas.

### Objetivos:

- Compreender a diferença entre poliedros convexos e não convexos.
- Identificar características dos poliedros convexos e não convexos por meio da observação e manipulação.
- Desenvolver habilidades de argumentação e justificativa matemática.

### Aula 1 – Introdução e Exploração

#### Metodologia:

#### Contextualização (10 min):

- Perguntar aos alunos: "O que caracteriza um sólido geométrico?"
- Apresentar diferentes poliedros e pedir que observem suas formas.
- Introduzir os conceitos de convexidade e não convexidade com exemplos do cotidiano.

#### Manipulação dos Modelos (25 min):

- Entregar aos alunos diferentes poliedros (convexos e não convexos).
- Pedir que os manuseiem e tentem identificar diferenças entre eles.
- Levantar hipóteses sobre o que torna um poliedro convexo ou não.

#### Classificação em Equipes (15 min):

- Apresentar com uso de tecnologias as definições de poliedros convexos e não convexos. Ou distribuir uma folha impressa com as definições de poliedro convexo e não convexo.
- Pedir que os alunos, que classifiquem os poliedros que receberam e justifiquem suas escolhas.



## Aula 2 – Análise e Aplicação

### Metodologia:

#### Discussão dos Resultados (15 min):

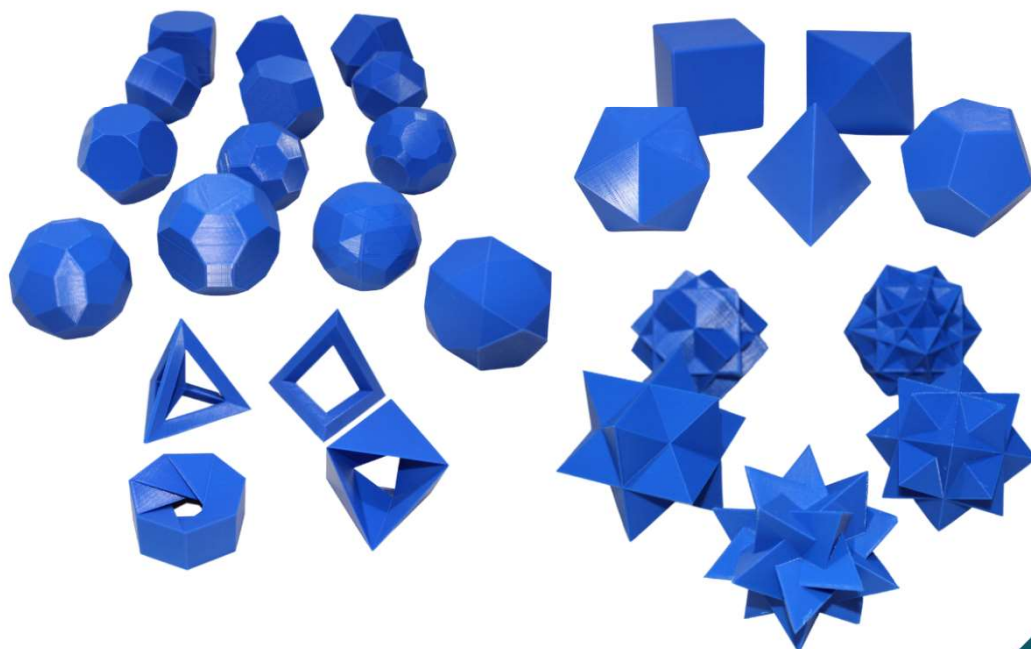
- Cada grupo de alunos compartilha sua classificação.
- O professor corrige e explica eventuais equívocos.

#### Reflexão e Aplicação (15 min):

- Propor que os alunos busquem exemplos de poliedros convexos e não convexos no cotidiano.
- Levantar o seguinte questionamento e solicitar aos estudantes que façam uma consulta na internet e apresentem na próxima aula que busque explicar a seguinte pergunta: "Por que a convexidade é importante em estruturas do dia a dia, como edifícios e pontes?"

### Avaliação:

- Formativa: Observação da participação dos alunos na classificação e justificativa dos sólidos.
- Autoavaliação: Perguntar ao final: "O que você aprendeu sobre convexidade e não convexidade?"
- Produção escrita: Os alunos devem elaborar um pequeno relatório explicando a diferença entre os poliedros convexos e não convexos.





## Atividade 2 – Baralho das planificações

- Associação entre poliedros e suas planificações, ajudando na visualização espacial.
- Atividades que desafiam os alunos a prever como um sólido se desdobra e se reconstrói.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Público-alvo:</b> Alunos do Ensino Fundamental (6º ano) e Ensino Médio (3ª série)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Tempo estimado:</b> 2 aulas de 50 minutos cada                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>Recursos:</b> Cartas contendo imagens de poliedros e suas respectivas planificações (podem ser impressas ou projetadas); Fichas de resposta para os alunos registrarem suas classificações e justificativas; Quadro branco e canetas.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Objetivos:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Relacionar poliedros tridimensionais às suas planificações.</li> <li>• Identificar e classificar poliedros como convexos e não convexos.</li> <li>• Desenvolver a observação e o raciocínio espacial dos alunos.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Aula 1 – Introdução e Exploração</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Metodologia</b><br><b>Contextualização (10 min):</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Apresentação inicial sobre poliedros convexos e não convexos.</li> <li>• Mostrar alguns exemplos de objetos do cotidiano que possuem essas formas.</li> </ul> <b>Distribuição das Cartas (15 min):</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cada dupla ou trio recebe um conjunto de cartas com a imagem de poliedros e planificações.</li> <li>• Os alunos devem parear a imagem do poliedro com sua respectiva planificação.</li> </ul> <b>Classificação e Justificativa (25 min):</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Após formar os pares, os alunos devem classificar os poliedros como convexos ou não convexos.</li> <li>• Eles devem justificar suas escolhas por escrito e explicar como identificaram a relação entre a figura 3D e sua planificação.</li> </ul> |

## Aula 2 – Análise e Aplicação

### Metodologia

#### Discussão Coletiva (15 min):

- Cada grupo apresenta um ou dois pares formados e explica como os identificou.
- O professor corrige e complementa as explicações, reforçando conceitos-chave.

#### Aplicação da Relação de Euler (20 min):

- Os alunos escolhem dois poliedros e aplicam a relação  $V - A + F = 2$ , verificando sua validade.
- Comparação dos resultados entre poliedros convexos e não convexos.

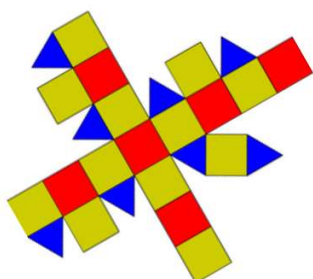
#### Desafio Final (15 min):

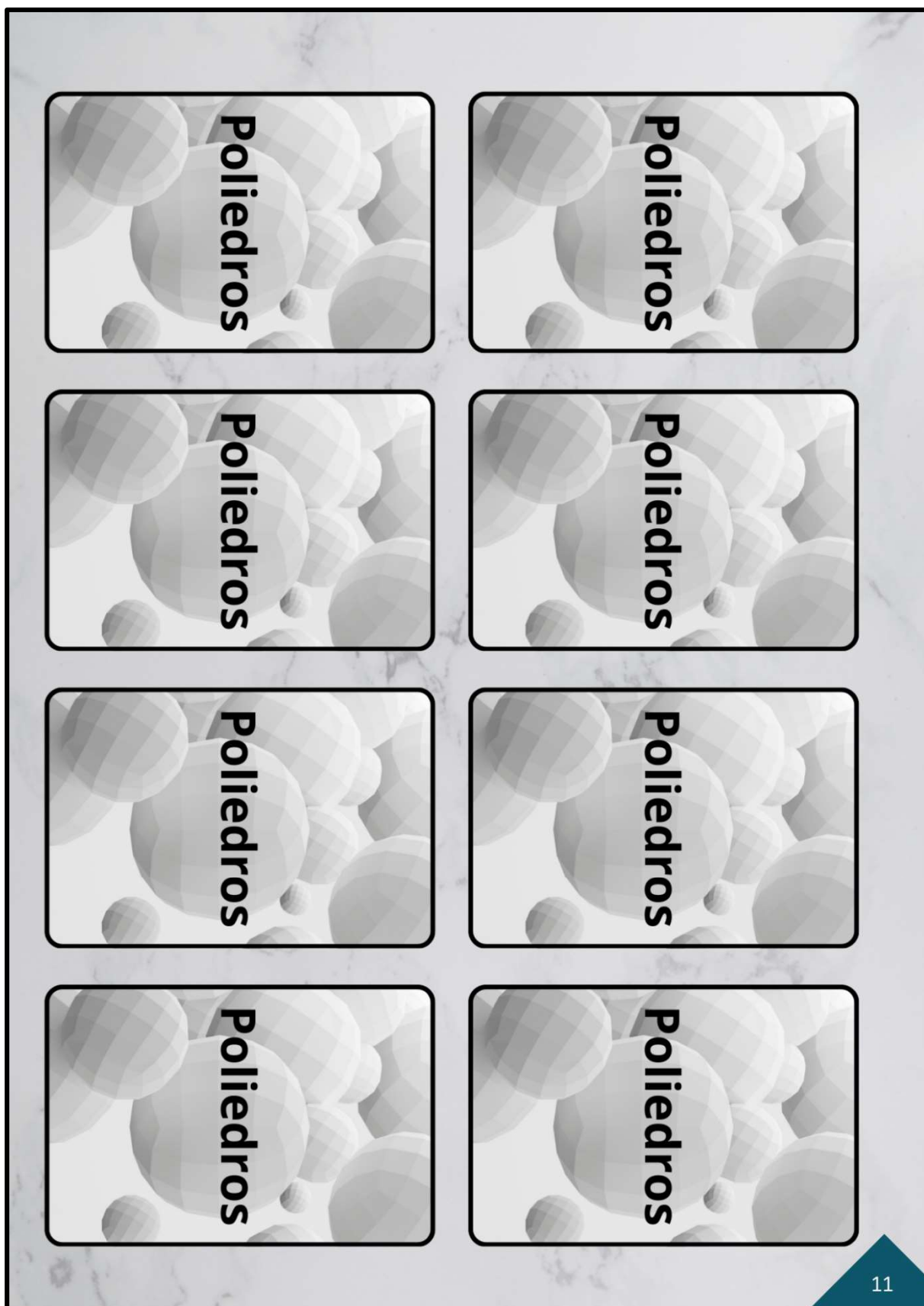
- Os alunos recebem uma carta apenas com a planificação e tentam desenhar a forma tridimensional correspondente.
- Discussão sobre as dificuldades enfrentadas e estratégias para resolver o problema.

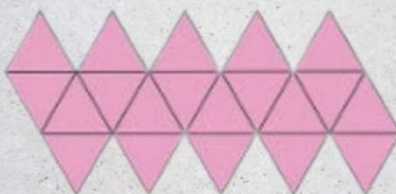
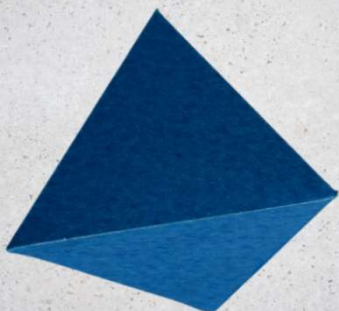
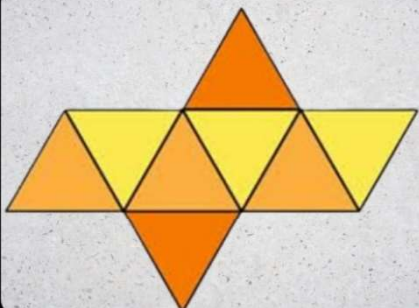
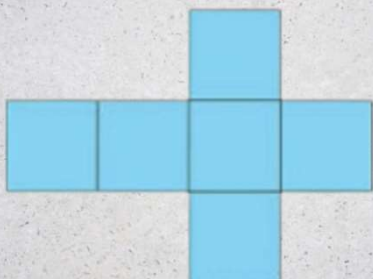
#### Avaliação:

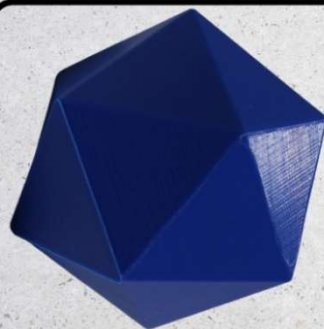
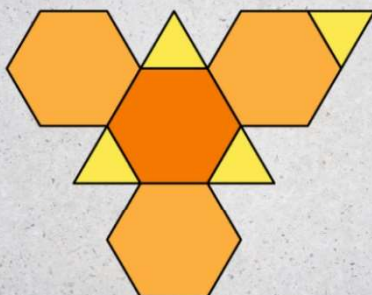
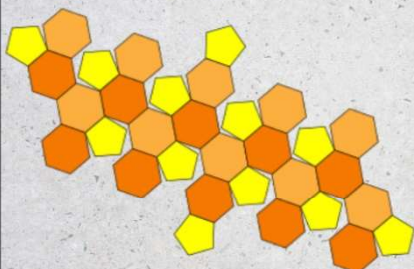
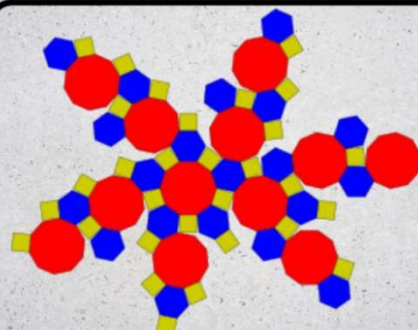
- Participação na classificação e justificativa dos poliedros.
- Correção das fichas de resposta: Verificação se os alunos associaram corretamente as imagens e justificaram suas classificações.
- Autoavaliação e discussão final: O que foi mais fácil? O que foi mais difícil? Como esse conhecimento pode ser aplicado em outras áreas?

Nas próximas páginas temos as folhas para impressão das cartas que fazem parte da atividade propostas. A primeira folha deve ser impressa no verso das demais ou podem ser impressas em papéis diferentes e colcadas. É importante que a impressão deste material seja colorido e preferencialmente em um papel mais grosso. Caso o professor tenha a oportunidade sugerimos que após a impressão, seja feita a plastificação do material.

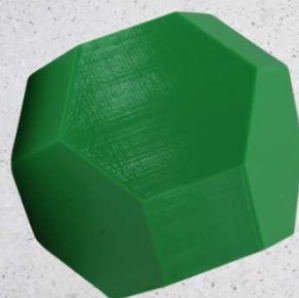




**HEXAEDRO****OCTAEDRO****PLANIFICAÇÃO****PLANIFICAÇÃO****TETRAEDRO****DODECAEDRO****PLANIFICAÇÃO****PLANIFICAÇÃO**

**ICOSAEDRO****TETRAEDRO  
TRUNCADO****PLANIFICAÇÃO****PLANIFICAÇÃO****ICOSAEDRO  
TRUNCADO****ROMBICOSIDODECAEDRO  
MENOR****PLANIFICAÇÃO****PLANIFICAÇÃO**

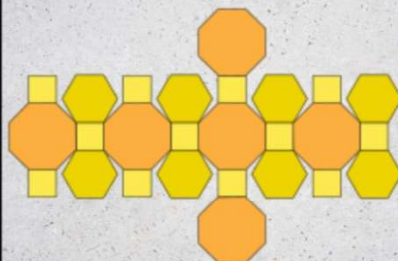
**OCTAEDRO  
TRUNCADO**



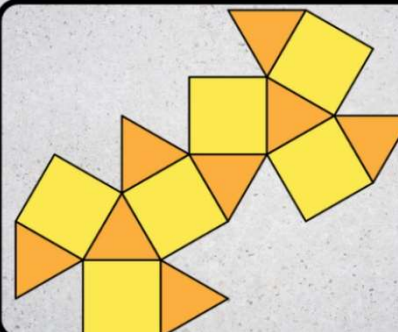
**ROMBICUOCTAEDRO  
MENOR**



**PLANIFICAÇÃO**



**PLANIFICAÇÃO**



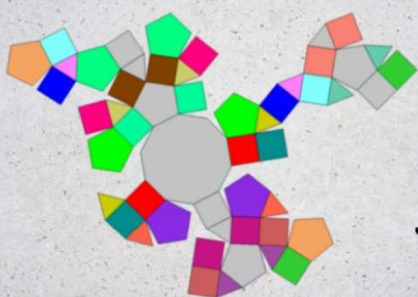
**CUBOCTAEDRO**



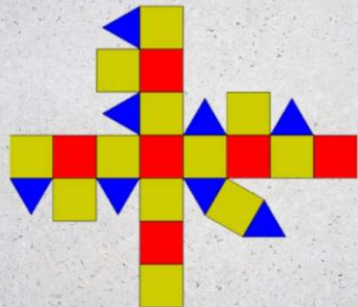
**CUBO  
TRUNCADO**



**PLANIFICAÇÃO**



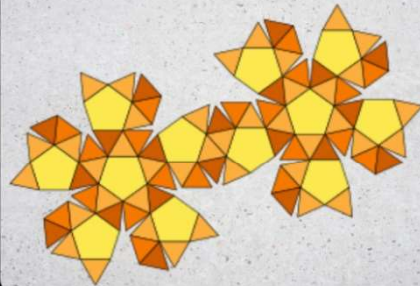
**PLANIFICAÇÃO**



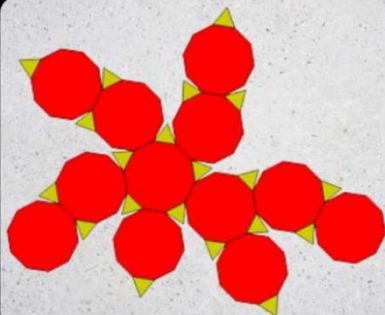
ICOSIDODECAEDRO

DODECAEDRO  
TRUNCADO

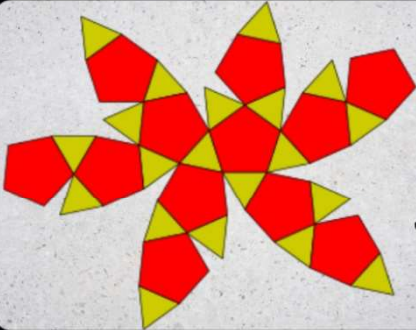
PLANIFICAÇÃO



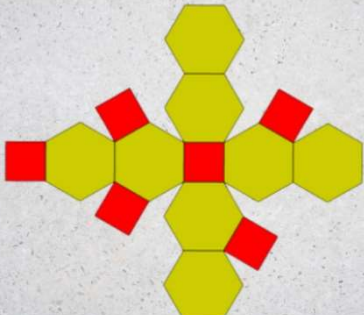
PLANIFICAÇÃO

CUBOCTAEDRO  
TRUNCADOCUBO  
ARREBITADO

PLANIFICAÇÃO



PLANIFICAÇÃO



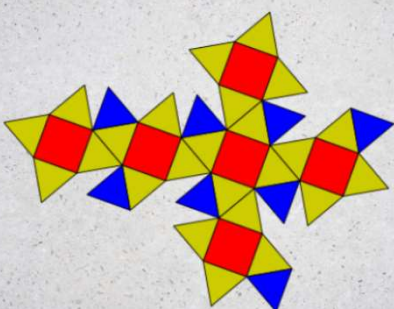
**ICOSIDODECAEDRO  
TRUNCADO**



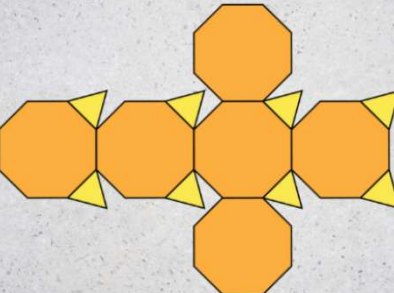
**DODECAEDRO  
SNUB**



**PLANIFICAÇÃO**



**PLANIFICAÇÃO**



## Atividade 3 – Baralho das Características dos Poliedros

- Identificação dos poliedros com base no número de vértices, arestas e faces.
- Exercícios práticos pra aplicar a Relação de Euler e compreender padrões geométricos.

**Público-alvo:** Alunos do Ensino Fundamental (6º ano) e Ensino Médio (3ª série)

**Tempo estimado:** 2 aulas de 50 minutos cada

**Recursos:** Cartas com as características dos poliedros (número de vértices, arestas e faces). Cartas com os nomes dos poliedros e imagens; Fichas de resposta para registro; Quadro branco e canetas.

### Objetivos:

- Identificar poliedros a partir de suas características (vértices, arestas e faces).
- Relacionar as propriedades dos poliedros com a Relação de Euler ( $V - A + F = 2$ ).
- Desenvolver o raciocínio lógico e a análise de padrões matemáticos.

### Aula 1 – Introdução e Exploração

#### Metodologia

#### Apresentação do Conteúdo (15 min):

- Introdução aos conceitos de vértices, arestas e faces.
- Revisão da Relação de Euler para poliedros convexos.
- Exemplos visuais de poliedros.

#### Distribuição das Cartas e Formação de Grupos (10 min):

- Cada grupo recebe duas pilhas de cartas:
- Uma pilha com as características dos poliedros (exemplo: "8 vértices, 12 arestas, 6 faces").
- Outra pilha com os nomes dos poliedros (exemplo: "Cubo").

#### Desafio de Associação (25 min):

- Os alunos devem parear corretamente as cartas das características com as cartas dos poliedros.
- Após completar os pares, cada grupo verifica se a Relação de Euler se mantém para os poliedros escolhidos.

## Aula 2 – Análise e Aplicação

### Metodologia

#### Discussão dos Resultados (15 min):

- Cada grupo compartilha suas associações e explica como chegou a elas.
- O professor corrige e reforça os conceitos.

#### Desafio Adicional (20 min):

- Neste desafio é proposto uma atividade em que os estudantes irão disputar em grupos. Um grupo de alunos recebem algumas cartas com as características e falam apenas duas destas características (por exemplo, número de vértices e arestas) e o outro grupo de alunos precisam deduzir a quantidade de faces antes de encontrar a correspondência correta com a carta que contém a imagem do poliedro.
- Reflexão sobre padrões matemáticos entre os poliedros.

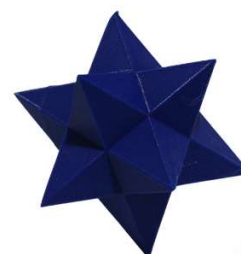
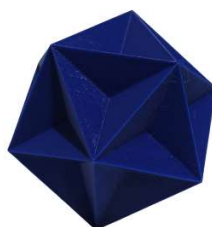
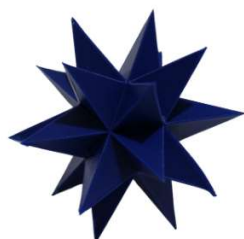
#### Reflexão e Conexão com o Cotidiano (15 min):

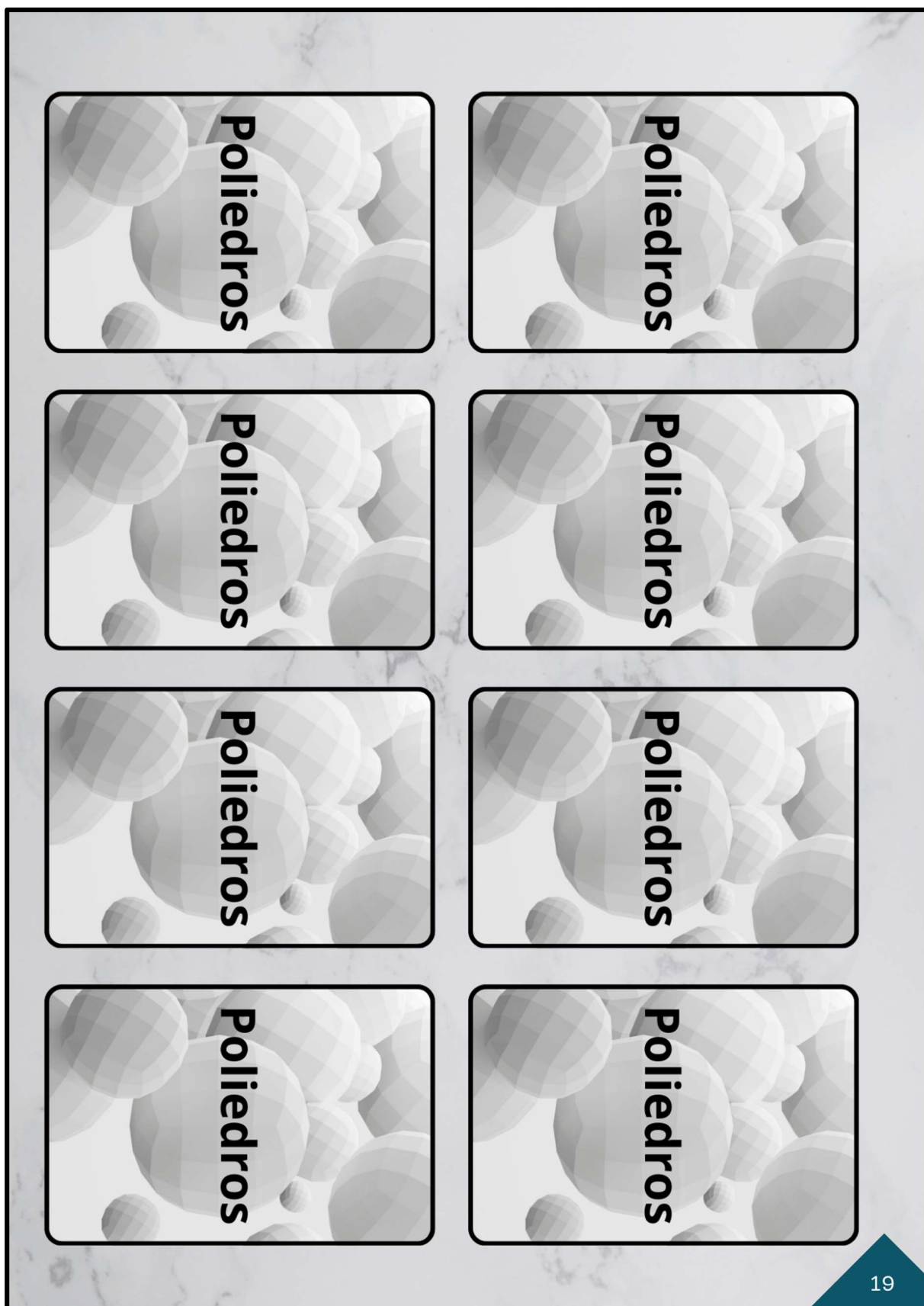
- Como a contagem de vértices, arestas e faces pode ajudar na construção de estruturas arquitetônicas?
- Discussão sobre como o conhecimento de poliedros é usado em diferentes áreas, como engenharia e design.

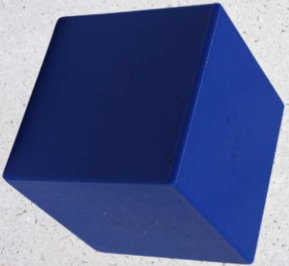
#### Avaliação:

- Formativa: Observação da participação dos alunos na associação das cartas e na justificativa das respostas.
- Correção das fichas de resposta: Os alunos registram suas associações e verificam se aplicaram corretamente a Relação de Euler.
- Discussão final: Perguntas abertas para avaliação do aprendizado.

Nas próximas páginas temos as folhas para impressão das cartas que fazem parte da atividade propostas. Seguir as mesmas orientações dadas na página 10.





**HEXAEDRO****CARACTERÍSTICA**

Poliedro de Platão

6 Faces

8 Vértices

12 Arestas

**OCTAEDRO****CARACTERÍSTICA**

Poliedro de Platão

8 Faces

6 Vértices

12 Arestas

**TETRAEDRO****CARACTERÍSTICA**

Poliedro de Platão

4 Faces

4 Vértices

6 Arestas

**DODECAEDRO****CARACTERÍSTICA**

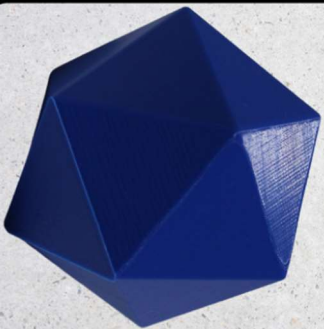
Poliedro de Platão

12 Faces

20 Vértices

30 Arestas

## ICOSAEDRO



### CARACTERÍSTICA

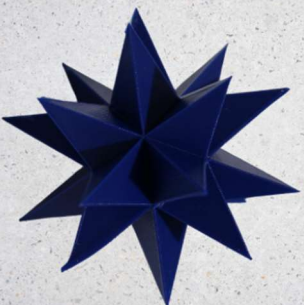
Poliedro de Platão

20 Faces

12 Vértices

30 Arestas

## GRANDE DODECAEDRO ESTRELADO



### CARACTERÍSTICA

Poliedros de

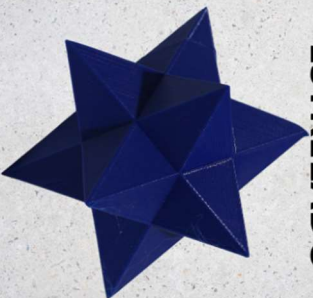
Arquimedes

12 Faces

20 Vértices

30 Arestas

## PEQUENO DODECAEDRO ESTRELADO



### CARACTERÍSTICA

Poliedros de

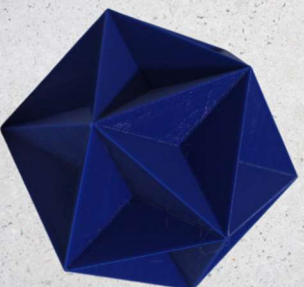
Kepler-Poinsot

12 Faces

12 Vértices

30 Arestas

## GRANDE DODECAEDRO



### CARACTERÍSTICA

Poliedros de

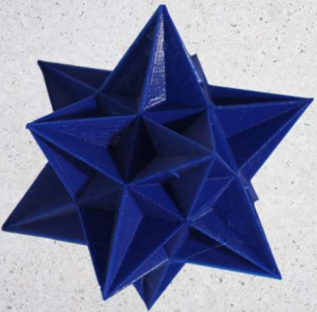
Kepler-Poinsot

12 Faces

12 Vértices

30 Arestas

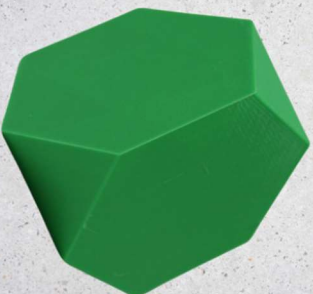
## ICOSAEDRO ESTRELADO



### CARACTERÍSTICA

Poliedros de  
Kepler-Poinsot  
20 Faces  
12 Vértices  
30 Arestas

## TETRAEDRO TRUNCADO



### CARACTERÍSTICA

Poliedros de  
Arquimedes  
8 Faces  
12 Vértices  
18 Arestas

## CUBOCTAEDRO



### CARACTERÍSTICA

Poliedros de  
Arquimedes  
14 Faces  
12 Vértices  
24 Arestas

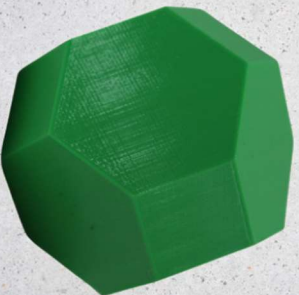
## CUBO TRUNCADO



### CARACTERÍSTICA

Poliedros de  
Arquimedes  
14 Faces  
24 Vértices  
36 Arestas

### OCTAEDRO TRUNCADO



#### CARACTERÍSTICA

Poliedros de  
Kepler-Poinsot

14 Faces

24 Vértices

36 Arestas

### ROMBICUOCTAEDRO MENOR



#### CARACTERÍSTICA

Poliedros de  
Arquimedes

26 Faces

24 Vértices

48 Arestas

### CUBOCTAEDRO TRUNCADO



#### CARACTERÍSTICA

Poliedros de  
Arquimedes

26 Faces

48 Vértices

72 Arestas

### CUBO ARREBITADO



#### CARACTERÍSTICA

Poliedros de  
Arquimedes

38 Faces

24 Vértices

60 Arestas

**ICOSIDODECAEDRO****CARACTERÍSTICA**

Poliedros de  
Arquimedes  
32 Faces  
30 Vértices  
60 Arestas

**DODECAEDRO  
TRUNCADO****CARACTERÍSTICA**

Poliedros de  
Arquimedes  
32 Faces  
60 Vértices  
90 Arestas

**ICOSAEDRO  
TRUNCADO****CARACTERÍSTICA**

Poliedros de  
Arquimedes  
32 Faces  
60 Vértices  
90 Arestas

**ROMBICOSIDODECAEDRO  
MENOR****CARACTERÍSTICA**

Poliedros de  
Arquimedes  
62 Faces  
60 Vértices  
120 Arestas

### ICOSIDODECAEDRO TRUNCADO



### CARACTERÍSTICA

Poliedros de  
Archimedes  
62 Faces  
120 Vértices  
180 Arestas

### DODECAEDRO SNUB



### CARACTERÍSTICA

Poliedros de  
Archimedes  
92 Faces  
60 Vértices  
150 Arestas



## Atividade 4 – Investigação da Relação de Euler

- Contagem direta de V, A e F nos sólidos impressos e verificação da equação  $V - A + F = 2$ .
- Reflexão sobre quando essa relação se mantém e quando pode mudar.

**Público-alvo:** Alunos do Ensino Fundamental (6º ano) e Ensino Médio (3ª série)

**Tempo estimado:** 2 aulas de 50 minutos cada

**Recursos:** Poliedros em 3D; Fichas de resposta para registro; Quadro branco e canetas.

### Objetivos:

- Identificar e contar corretamente os vértices, arestas e faces de poliedros.
- Aplicar a Relação de Euler ( $V - A + F = 2$ ) para poliedros convexos e analisar sua validade para poliedros não convexos.
- Desenvolver habilidades de observação, registro e argumentação matemática

### Aula 1 – Introdução e Exploração

#### Apresentação do Conceito (15 min):

- Introdução ao matemático Leonhard Euler e sua importância para a Matemática.
- Explicação da Relação de Euler ( $V - A + F = 2$ ) com exemplos simples, como cubo e pirâmide.

#### Manipulação de Poliedros (20 min):

- Distribuição de diferentes poliedros físicos para os grupos.
- Os alunos devem contar e registrar o número de vértices, arestas e faces e registrar em uma tabela.

#### Primeira Verificação da Relação de Euler (15 min):

- Aplicação da fórmula em diferentes poliedros convexos e comparação dos resultados.
- Discussão coletiva: "A relação sempre se mantém? Por quê?"

No desenvolvimento desta atividade é importante que os estudantes façam o registro dos valores encontrados para que possam depois aplicar a relação de Euler e assim verificarem se a mesma é válida para poliedros convexos e não convexos. Na página seguinte sugerimos um modelo de tabela para a utilização no desenvolvimento da atividade. O professor pode montar a tabela como achar mais conveniente e distribuir cópias para os alunos.

## Aula 2 – Análise e Aplicação

### Exploração de Poliedros Não Convexos (15 min):

- Introdução aos poliedros não convexos.
- Os alunos analisam poliedros não convexos e verificam se a Relação de Euler se mantém.

### Comparação de Resultados (20 min):

- Registro dos dados obtidos em um quadro geral da turma.
- Discussão sobre padrões encontrados e possíveis exceções.

### Desafio Final (15 min):

- Os alunos recebem poliedros que ainda não analisaram e tentam prever se a Relação de Euler se aplicará antes de contarem as características.
- Reflexão final: “Por que a Relação de Euler é importante na Matemática

### Avaliação:

- Observação da participação e registro correto das contagens.
- Correção das tabelas: Verificação da aplicação da Relação de Euler nos poliedros trabalhados.
- Discussão final: Os alunos apresentam o seu poliedro e explicam com suas próprias palavras se a Relação de Euler funciona.

Tabela de Registro da Relação de Euler

| Poliedro | Número de Vértices (V) | Número de Arestas (A) | Número de Faces (F) | Cálculo $V-A+F$ | Relação de Euler Verificada? (Sim/Não) |
|----------|------------------------|-----------------------|---------------------|-----------------|----------------------------------------|
|          |                        |                       |                     |                 |                                        |
|          |                        |                       |                     |                 |                                        |
|          |                        |                       |                     |                 |                                        |
|          |                        |                       |                     |                 |                                        |



