Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB
Campus Reitor Edgard Santos
Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias
Mestrado Profissional em Matemática

A POTENCIALIDADE DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA DE ENSINO: Uma Estratégia de Intervenção Pedagógica em São Gonçalo do Gurguéia – PI e Gilbués – PI.

por

Edy Carlos Barbosa Rodrigues

Barreiras – BA

Fevereiro de 2025

Edy Carlos Barbosa Rodrigues

A POTENCIALIDADE DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA DE ENSINO: Uma Estratégia de Intervenção Pedagógica em São Gonçalo do Gurguéia – PI e Gilbués – PI.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Federal do Oeste da Bahia, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre.
Orientador: Prof. Dr. Vinicius Souza Bittencourt

Barreiras – BA

Fevereiro de 2025

FICHA CATALOGRÁFICA

R696 Rodrigues, Edy Carlos Barbosa.
A potencialidade do laboratório de matemática como ferramenta de ensino: uma Estratégia de Intervenção Pedagógica em São Gonçalo do Gurguéia – PI e Gilbués – PI. / Edy Carlos Barbosa Rodrigues. – 2025.

69 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Vinicius Souza Bittencourt
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das tecnologias – CCET. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

1. Ensino de Matemática. 2. Laboratório de Matemática. 3. Pesquisa Bibliográfica. Dificuldades de Aprendizagem. I. Bittencourt, Vinicius Souza. II. Universidade Federal do Oeste da Bahia – Centro de Humanidades. III. Título.

CDD 510

Biblioteca Universitária de Barreiras – UFOB

A POTENCIALIDADE DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA DE ENSINO: Uma Estratégia de Intervenção Pedagógica em São Gonçalo do Gurguéia – PI e Gilbués – PI.

Por

EDY CARLOS BARBOSA RODRIGUES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Federal do Oeste da Bahia, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Vinícius Souza Bittencourt

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Vinicius Souza Bittencourt (Orientador)
Instituição: Universidade Federal da Bahia - UFOB.

gov.br Documento assinado digitalmente
VINICIUS SOUZA BITTENCOURT
Data: 25/04/2025 17:10:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Edmo Fernandes Carvalho - Membro Externo (TITULAR)
Instituição: Universidade Federal da Bahia - UFBA.

gov.br Documento assinado digitalmente
EDMO FERNANDES CARVALHO
Data: 26/04/2025 08:19:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Edvaldo Elias de Almeida Batista - Membro Interno (TITULAR)
Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB.

gov.br Documento assinado digitalmente
EDVALDO ELIAS DE ALMEIDA BATISTA
Data: 25/04/2025 17:24:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Resultado: Aprovado.
Barreiras, 27 de fevereiro de 2025

AGRADECIMENTOS

A Deus, que é minha direção.

Ao meu pai, Adão de Souza Rodrigues (in memoriam), que sempre será minha inspiração para ser um homem honesto e honrado.

À minha mãe, Maria Louzimar Barbosa Rodrigues, que é minha fonte de amor e carinho.

À minha esposa, Poliana Souza de Oliveira, que está ao meu lado, me dando força e motivação para ser melhor a cada dia.

Aos meus irmãos, Dárcio Barbosa Rodrigues e Jenysson Barbosa Rodrigues, por estarem sempre torcendo pelo meu sucesso.

Aos meus professores, que me influenciam positivamente a buscar o conhecimento para ser uma pessoa melhor e um profissional cada dia mais qualificado.

Estendo meus agradecimentos aos meus colegas de turma.

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a Deus, ao meu pai Adão de Souza Rodrigues, à minha mãe Maria Louzimar Barbosa Rodrigues, à minha esposa Poliana Souza de Oliveira e aos meus irmãos Dárcio Barbosa Rodrigues e Jenysson Barbosa Rodrigues.

“A matemática me mostrou que a busca pelo entendimento é tão importante quanto o resultado final.”

RESUMO

A Matemática é uma disciplina fundamental no currículo escolar, essencial para o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico dos estudantes. No entanto, muitos alunos enfrentam dificuldades em assimilar os conceitos matemáticos, o que pode levar ao baixo desempenho acadêmico e, em alguns casos, à evasão escolar. Este estudo tem como objetivo investigar a potencialidade do Laboratório de Matemática como ferramenta de intervenção pedagógica nos municípios de São Gonçalo do Gurguéia e Gilbués, no Piauí, visando superar essas dificuldades e tornar o ensino de Matemática mais dinâmico e eficaz. A pesquisa, de natureza bibliográfica, baseou-se em revisão de literatura e análise de dados educacionais, como os índices do IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) dos municípios em questão. Para tanto, empregou-se metodologia de natureza bibliográfica, mediante revisão da literatura a partir dos descritores “Ensino de Matemática” e “Laboratório de Matemática”. Os resultados indicam que o Laboratório de Matemática, ao proporcionar uma abordagem prática e interativa, pode contribuir significativamente para a melhoria do aprendizado, especialmente quando integrado a metodologias ativas e ao ensino lúdico. Além disso, a intervenção pedagógica do professor, aliada ao uso de recursos como sólidos geométricos, discos de frações e jogos como a Torre de Hanói, pode ser uma ferramenta eficaz na superação das dificuldades dos alunos. Este trabalho defende a implementação de políticas públicas que promovam a criação e a estruturação de laboratórios de Matemática nas escolas, com base nas diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Acredita-se que essa abordagem pode não apenas melhorar o desempenho dos estudantes em Matemática, mas também prepará-los para enfrentar desafios acadêmicos e profissionais com maior confiança e competência.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Laboratório de Matemática. Pesquisa Bibliográfica. Dificuldades de Aprendizagem.

ABSTRACT

Mathematics is a fundamental subject in the school curriculum, essential for the development of students' logical and critical reasoning. However, many students face difficulties in assimilating mathematical concepts, which can lead to poor academic performance and, in some cases, school dropout. This study aims to investigate the potential of the Mathematics Laboratory as a tool for pedagogical intervention in the municipalities of São Gonçalo do Gurguéia and Gilbués, in Piauí, aiming to overcome these difficulties and make Mathematics teaching more dynamic and effective. The research, of a bibliographic nature, was based on a literature review and analysis of educational data, such as the IDEB (Basic Education Development Index) indexes of the municipalities in question. To this end, a bibliographic methodology was used, through a literature review based on the descriptors “Mathematics Teaching” and “Mathematics Laboratory”. The results indicate that the Mathematics Laboratory, by providing a practical and interactive approach, can contribute significantly to improving learning, especially when integrated with active methodologies and playful teaching. In addition, the teacher's pedagogical intervention, combined with the use of resources such as geometric solids, fraction discs and games such as the Tower of Hanoi, can be an effective tool in overcoming students' difficulties. This work advocates the implementation of public policies that promote the creation and structuring of Mathematics laboratories in schools, based on the guidelines of the National Common Curricular Base (BNCC). It is believed that this approach can not only improve students' performance in Mathematics, but also prepare them to face academic and professional challenges with greater confidence and competence.

Keywords: Mathematics Teaching. Mathematics Laboratory. Bibliographic Research. Learning Difficulties.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1*: Sólidos Geométricos (1)* 39
Figura 2*: Sólidos Geométricos e suas planificações (1)*...40
Figura 3*: Sólidos Geométricos (2)* 40
Figura 4*: Sólidos Geométricos e suas planificações (2)*...40
Figura 5*: Quadrados e triângulo de madeira* 42
Figura 6*: Quadrado e triângulos de madeira* 42
Figura 7*: Pastilhas de vidro comprovando o teorema de Pitágoras no terno (3, 4 e 5)* 43
Figura 8*: Um disco inteiro e duas metades de um disco*...45
Figura 9*: Diferentes frações que compõem um disco inteiro*..................................46
Figura 10*: Frações diferentes de um disco que resultam na mesma fração do disco.* 46
Figura 11*: Torre de Hanói*..50
Figura 12*: Prisma reto de base triangular regular.* 54
Figura 13*: Prisma da Figura 12 desmontado em três pirâmides de mesmo volume.* 54
Figura 14*: Cone e Cilindro de mesma base e mesma altura.*..................................58
Figura 15*: Material Dourado.*...59

Sumário

1. INTRODUÇÃO 12

2. METODOLOGIA 18

2.1 REFERENCIAL TEORICO 20

3. A FERTILIDADE DA INTERFERÊNCIA PEDAGÓGICA NO ENFRENTAMENTO ÀS DIFICULDADES DOS ALUNOS EM MATEMÁTICA 23

4. METODOLOGIAS ATIVAS, O LÚDICO E A BNCC 29

4.1 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR E O ENSINO LÚDICO DE MATEMÁTICA 31

5. A POTENCIALIDADE DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA 36

5.1 Sólidos geométricos e suas planificações 38

5.2 Uma demonstração do Teorema de Pitágoras 40

5.3 Discos de frações 44

5.4 Torre de Hanói 47

5.5 Volume de uma pirâmide regular 50

5.6 Volume do cone 55

5.7 Material dourado 58

CONSIDERAÇÕES FINAIS 62

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 66

Apêndice - A 68

1. INTRODUÇÃO

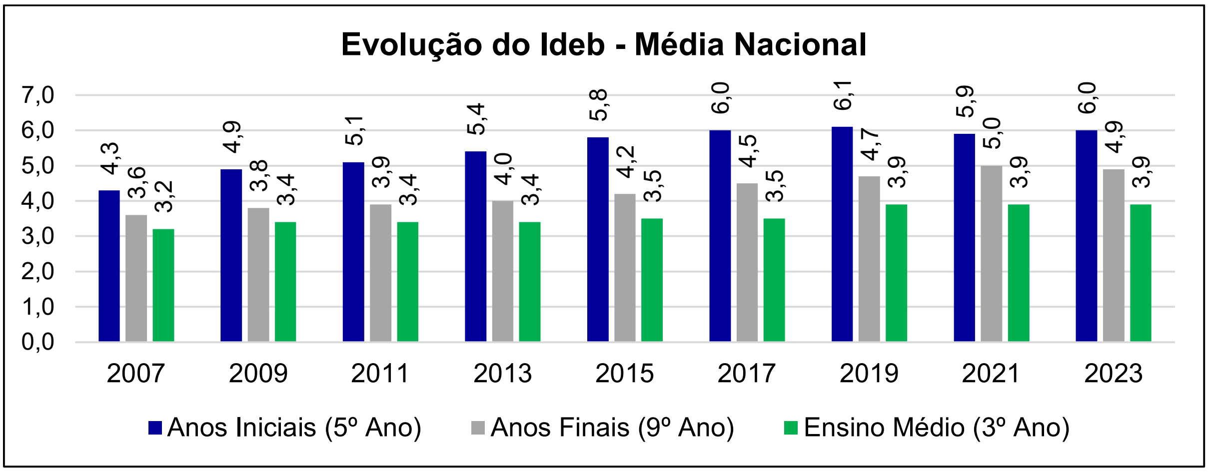
A Matemática é uma disciplina fundamental no currículo escolar, desempenhando um papel crucial na formação integral dos alunos. Segundo Rego (2006), sua importância vai além do simples aprendizado de números e operações; ela está intrinsecamente ligada ao desenvolvimento do raciocínio lógico, à resolução de problemas e à capacidade de análise crítica. O estudo da Matemática desenvolve o raciocínio lógico, ensinando os alunos a pensarem de forma estruturada e a formular argumentos consistentes. Essas habilidades são aplicáveis a diversas áreas do conhecimento e ao cotidiano, permitindo a tomada de decisões informadas e a resolução de problemas de forma estratégica, tanto no meio acadêmico quanto na vida real.

Áreas como Engenharia, Economia, Ciências da Computação e até mesmo Ciências Sociais dependem fortemente da Matemática. Portanto, uma formação sólida nessa disciplina prepara os alunos para o mercado de trabalho, aumentando suas oportunidades profissionais e sua competitividade. Além disso, o ensino da Matemática contribui para uma compreensão mais ampla e integrada do conhecimento, conforme preconizado pela **Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018)**.

No entanto, embora a Matemática seja considerada uma disciplina fundamental, muitos estudantes enfrentam dificuldades em aprendê-la, o que pode levar ao baixo desempenho acadêmico e, em casos mais graves, à evasão escolar. Essas dificuldades são particularmente evidentes em municípios com baixos índices de desenvolvimento educacional, como **São Gonçalo do Gurguéia e Gilbués, no Piauí**. De acordo com dados do IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica), em 2021, o município de São Gonçalo do Gurguéia obteve um IDEB de 4,0 nos anos iniciais do Ensino Fundamental e 3,7 nos anos finais. Já em Gilbués, o IDEB foi de 3,8 nos anos iniciais e 3,7 nos anos finais. Esses dados estão disponíveis nos seguintes endereços:

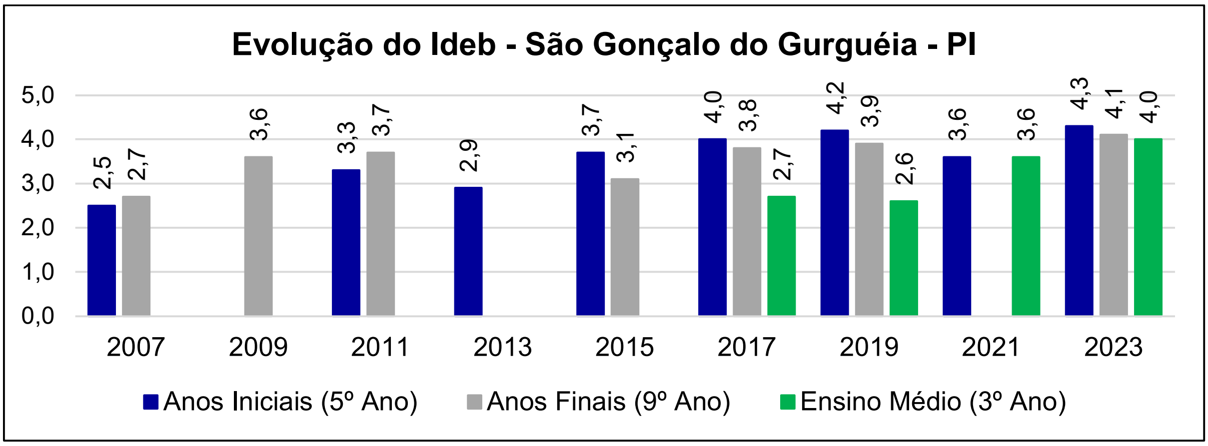
- **São Gonçalo do Gurguéia**: *https://qedu.org.br/escola/22134409-esc-mul-edilon-branco-de-souza/ideb*
- **Gilbués**: *https://qedu.org.br/municipio/2204402-gilbues/ideb*

A seguir temos os gráficos mostrando a evolução da média nacional do Ideb, bem como em cada um dos municípios mencionados:



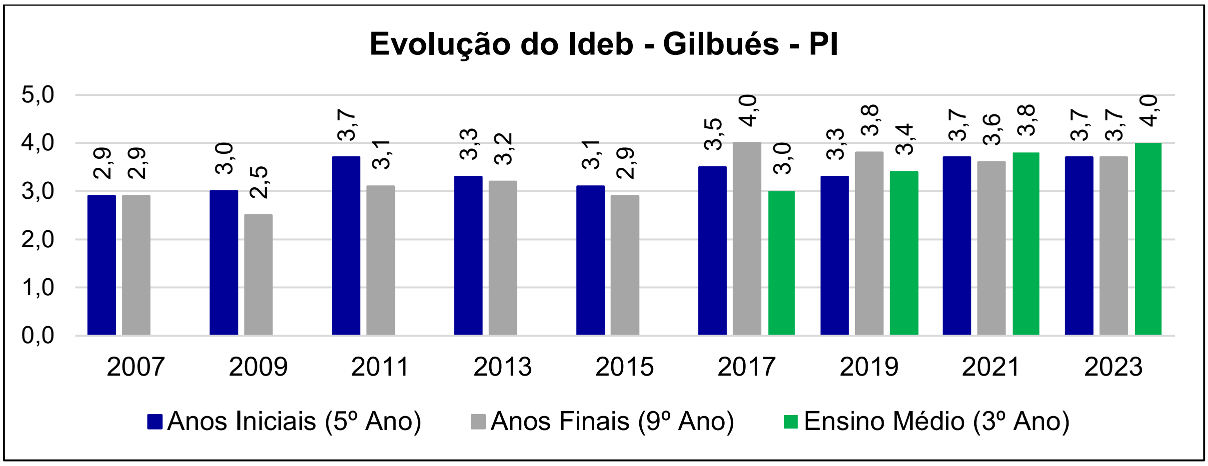
Elaborado pelo autor com dados do QEdu (2025).

Disponível em: *https://qedu.org.br/brasil/ideb*



Elaborado pelo autor com dados do QEdu (2025).

Disponível em: *https://qedu.org.br/escola/22134409-esc-mul-edilon-branco-de-souza/ideb*



Elaborado pelo autor com dados do QEdu (2025).

Disponível em: *https://qedu.org.br/municipio/2204402-gilbues/ideb*

Esses índices estão abaixo da média nacional, que foi de 6,0 nos anos iniciais e 4,9 nos anos finais do Ensino Fundamental em 2023, conforme os dados do IDEB. Essa defasagem evidencia a necessidade de uma intervenção pedagógica que promova melhorias no ensino e na aprendizagem da Matemática nos municípios analisados. Um levantamento realizado revelou que, das 8 escolas de São Gonçalo do Gurguéia e das 25 de Gilbués, nenhuma possui um Laboratório de Matemática.

Diante disso, é válido questionar: **a ausência de um espaço voltado à experimentação e à prática matemática estaria entre os fatores que contribuem para as dificuldades de aprendizagem dos alunos?** A escassez de recursos e a limitação de metodologias inovadoras podem comprometer a atuação docente, dificultando a mediação do conteúdo de forma acessível e significativa aos estudantes.

Um exemplo claro dessa dificuldade é a assimilação da fórmula do volume da pirâmide, dada por $V = \frac{1}{3} \times A_b \times h$, que frequentemente torna-se um desafio para os alunos. Muitos estudantes têm dificuldade em compreender por que o volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma com a mesma base e mesma altura. Essa dificuldade pode ser atribuída à natureza abstrata do conceito, que muitas vezes é abordado somente por meio de fórmulas e demonstrações teóricas. Como resultado, os alunos memorizam a fórmula sem compreender seu significado, o que limita sua capacidade de aplicá-la em situações reais.

No entanto, os objetos do Laboratório de Matemática podem desempenhar um papel fundamental na superação dessa dificuldade. Por meio de materiais concretos, como modelos de pirâmides e prismas, os alunos podem manipular e visualizar diretamente a relação entre esses sólidos geométricos e a fórmula que calcula seu volume. Por exemplo, ao desmontar um prisma em três pirâmides de mesmo volume, os alunos conseguem perceber, de forma prática, que o volume de uma pirâmide equivale, de fato, a $\frac{1}{3}$ do volume do prisma. Esse tipo de abordagem facilita a compreensão da fórmula e, ao mesmo tempo, estimula o raciocínio espacial e a resolução de problemas de maneira criativa. Entretanto, é preciso considerar que esse contato com modelos concretos — como pirâmides e prismas — geralmente se limita ao ambiente escolar. No dia a dia dos estudantes, esses objetos não fazem parte de sua realidade, o que pode dificultar a consolidação do aprendizado fora da sala de aula. Por isso, é fundamental que o professor busque aproximar esses conteúdos de situações mais próximas do cotidiano dos alunos, estabelecendo conexões que tornem a Matemática mais significativa e contextualizada.

Dessa forma, o Laboratório de Matemática se torna uma ferramenta essencial para sanar as dificuldades dos alunos e promover um ensino mais eficaz e dinâmico.

As causas dessas dificuldades são variadas e complexas. Segundo Araújo (2006), muitos alunos apresentam dificuldades na apropriação dos conceitos matemáticos devido à falta de motivação, à ausência de conexão entre os conteúdos ensinados e a realidade dos estudantes, e à predominância de metodologias tradicionais baseadas na memorização e na repetição mecânica. Diante desse cenário, este estudo busca investigar como a utilização do Laboratório de Matemática pode atuar como ferramenta de intervenção pedagógica nos municípios de São Gonçalo do Gurguéia – PI e Gilbués – PI, visando tornar o ensino de Matemática mais dinâmico, acessível e eficaz.

Para Lorenzato (2010), o Laboratório de Matemática deve ser o centro da vida matemática da escola, mais do que um simples depósito de materiais; é o espaço onde os professores estão empenhados em tornar a Matemática mais compreensível aos alunos. O autor destaca que o Laboratório de Ensino de Matemática é essencial na formação de professores, pois proporciona um ambiente de experimentação e manipulação de materiais concretos, favorecendo a aprendizagem significativa. Essa abordagem prática e interativa pode ser especialmente eficaz para superar as dificuldades de aprendizagem, conforme observado por Lorenzato (2010).

Para isso, o trabalho se propõe a identificar as principais dificuldades de aprendizagem em Matemática dos alunos desses municípios, analisando os fatores que contribuem para o baixo desempenho e a evasão escolar. Além disso, busca-se analisar as metodologias do Laboratório de Matemática que podem contribuir para um ensino mais dinâmico e eficaz, com base em práticas que incentivem a experimentação, a manipulação de materiais concretos e a resolução de problemas de forma colaborativa. Por fim, o estudo propõe estratégias e atividades práticas do Laboratório de Matemática para superar as dificuldades identificadas, alinhadas às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) e às necessidades específicas dos alunos de São Gonçalo do Gurguéia e Gilbués.

A pesquisa foi realizada por meio de uma abordagem bibliográfica, com revisão de literatura sobre Ensino de Matemática e Laboratório de Matemática, além da análise de dados educacionais dos municípios em questão. Os resultados indicam que a implementação de laboratórios de Matemática, aliada a uma intervenção pedagógica eficaz, pode contribuir significativamente para a melhoria do aprendizado e do desempenho dos estudantes.

A estrutura deste Trabalho de Conclusão de Curso está organizada da seguinte forma:

Capítulo 1 – Introdução: Apresenta a contextualização do tema, a justificativa para a realização da pesquisa, os objetivos do estudo e a organização do trabalho.

Capítulo 2 – Metodologia e Referencial Teórico: Descreve o método adotado na pesquisa, detalhando o processo de levantamento e análise das fontes bibliográficas utilizadas para embasar o estudo. Além disso, aborda as principais definições e conceitos necessários para a compreensão do estudo, incluindo as possíveis causas das dificuldades dos alunos em matemática, a proposta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino da disciplina e a importância do Laboratório de Matemática como um ambiente inovador que potencializa a aprendizagem por meio de metodologias ativas e do ensino lúdico.

Capítulo 3 – A Fertilidade da Interferência Pedagógica no Enfrentamento às Dificuldades dos Alunos em Matemática: Explora a importância da intervenção pedagógica no ensino da matemática, destacando o papel do professor como mediador e a influência da motivação e afetividade no processo de aprendizagem.

Capítulo 4 – Metodologias Ativas, o Lúdico e a BNCC: Discute o uso de metodologias ativas e do ensino lúdico no contexto do Laboratório de Matemática, alinhando essas práticas às diretrizes da BNCC para promover um ensino mais dinâmico e contextualizado.

Capítulo 5 – A Potencialidade do Laboratório de Matemática: Apresenta a aplicação dos conceitos abordados no referencial teórico, destacando conteúdos específicos trabalhados no Laboratório de Matemática e analisando sua relevância para a superação das dificuldades no ensino da disciplina.

Considerações Finais: Sintetiza os principais achados do estudo, ressaltando as contribuições da pesquisa e apontando sugestões para futuras investigações na área.

Diante de tudo o que foi exposto, fica evidente a importância de investigar como o Laboratório de Matemática pode ajudar a enfrentar os desafios encontrados no ensino da Matemática, especialmente em contextos em que as dificuldades de aprendizagem são mais recorrentes. A proposta deste trabalho é contribuir com reflexões e caminhos possíveis para tornar o ensino da Matemática mais acessível, dinâmico e conectado com a realidade dos alunos. No próximo capítulo, apresento a metodologia adotada para orientar essa pesquisa e fundamentar as análises desenvolvidas ao longo do estudo.

2. METODOLOGIA

A pesquisa bibliográfica é uma abordagem amplamente utilizada no desenvolvimento de estudos acadêmicos em diversas áreas do conhecimento, incluindo a Educação e sua subárea Ensino de Matemática. No entanto, conforme Severino (2007), o termo "pesquisa bibliográfica" não especifica um método por si só, devendo ser compreendido dentro de uma abordagem qualitativa ou quantitativa, que engloba diferentes metodologias e epistemologias (Santos & Kumada, 2023).

Neste estudo, optou-se por uma revisão de literatura, que consiste no levantamento, seleção e análise de materiais relevantes sobre o tema. Diferente de uma revisão sistemática, que segue protocolos rígidos e busca responder a uma pergunta específica com critérios de inclusão e exclusão bem definidos, a revisão de literatura adotada neste trabalho tem caráter exploratório e busca mapear o estado da arte sobre o Laboratório de Matemática e sua contribuição para o ensino e a aprendizagem. Para fundamentar teoricamente esta pesquisa, foram consultadas fontes como livros, artigos científicos, dissertações e teses disponíveis integralmente no Google Acadêmico. O objetivo principal foi reunir conhecimento pré-existente sobre o Laboratório de Matemática e sua contribuição para a formação dos alunos, servindo de base teórica para a investigação proposta (Alves-Mazzoti, 2006; Santos & Kumada, 2023).

As buscas realizadas e seus respectivos resultados foram:

- Busca 1: "ensino de matemática" AND "laboratório de matemática" → 58 resultados
- Busca 2: "laboratório de matemática" AND "aprendizagem" → 32 resultados

Após análise dos resumos, foram selecionadas as seguintes pesquisas diretamente relacionadas ao objeto deste estudo. Esses trabalhos foram denominados "pesquisas-fonte" e servem como base teórica para a investigação.

Pesquisas-Fonte Selecionadas:

1. **Freitas, A. L. (2006).** "*Laboratório de Ensino de Matemática: Uma proposta para licenciatura em matemática e a utilização de jogos de recorrência*."
2. **Ramos, C. A. (2021).** "*Laboratório de ensino de matemática: espaço facilitador e promotor da aprendizagem*."
3. **BENINI, M. B. C. (2006).** "Laboratório de ensino de matemática e laboratório de ensino de ciências: uma comparação."

4. **Lorenzato, S. (2010). "***Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.*"

Essas pesquisas oferecem um embasamento teórico sólido para esta investigação, reforçando o papel do Laboratório de Matemática como ferramenta essencial no ensino da Matemática. Além disso, demonstram que o papel do professor é fundamental para garantir que o Laboratório de Matemática seja utilizado de maneira eficaz no processo de construção da aprendizagem.

Segundo Marconi e Lakatos (2010), a pesquisa bibliográfica segue um conjunto de etapas estruturadas para garantir a organização e a análise rigorosa dos dados. Neste trabalho, adotou-se o modelo apresentado por esses autores, que compreende as seguintes fases:

- **Escolha do tema** – Definição do problema de pesquisa e delimitação do escopo do estudo, focado na potencialidade do Laboratório de Matemática como ferramenta de ensino.
- **Elaboração do plano de trabalho** – Organização da pesquisa, definição dos objetivos, justificativa e abordagem metodológica.
- **Identificação dos documentos** – Levantamento das principais fontes bibliográficas relacionadas ao tema.
- **Localização dos documentos** – Busca de materiais em bases acadêmicas, como Google Acadêmico, periódicos especializados e repositórios de teses e dissertações.
- **Compilação dos dados** – Reunião das informações extraídas dos documentos selecionados para análise.
- **Fichamento** – Organização dos conteúdos relevantes, categorizando as informações de acordo com os objetivos da pesquisa.
- **Análise e interpretação dos dados** – Exame crítico das informações coletadas, identificando as principais contribuições, lacunas e tendências da literatura.
- **Redação** – Estruturação do texto acadêmico, articulando os achados da revisão com os objetivos do estudo.

A revisão de literatura realizada permitiu identificar os principais debates teóricos e pesquisas já desenvolvidas sobre o tema. Esse exame crítico contribui para que pesquisadores compreendam o estado atual do conhecimento relacionado ao problema investigado, possibilitando uma visão ampla das potencialidades e desafios da área (Castro et al., 2020). Como afirmam Boote e Beile (2005), uma revisão de literatura bem estruturada não apenas descreve o que já foi produzido, mas também estabelece conexões entre os estudos analisados e o objeto de pesquisa em questão.

2.1 REFERENCIAL TEORICO

O referencial teórico deste estudo foi construído com base em autores que discutem o ensino de Matemática, a importância do Laboratório de Matemática e as estratégias pedagógicas para superar as dificuldades de aprendizagem. A proposta desta dissertação é investigar como o Laboratório de Matemática pode atuar como ferramenta de intervenção pedagógica nos municípios de São Gonçalo do Gurguéia e Gilbués – PI, visando tornar o ensino de Matemática mais dinâmico, acessível e eficaz. Para isso, foram selecionados autores que oferecem contribuições fundamentais para a compreensão do tema, destacando-se as seguintes obras:

Sérgio Lorenzato (2010): "*Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores*"

Para o autor, esse espaço é essencial para a formação de professores, pois proporciona um ambiente de experimentação e manipulação de materiais concretos, favorecendo a aprendizagem significativa. Lorenzato enfatiza que o Laboratório de Matemática permite aos alunos explorarem conceitos matemáticos de forma prática, tornando a disciplina mais acessível e compreensível.

Paulo Freire (1996, 2004): *"Pedagogia do Oprimido"* e *"Pedagogia da Autonomia"*

Freire (1996, 2004) propõe uma abordagem educacional que se distancia do modelo tradicional bancário de ensino, onde o educador deposita informações nos alunos. Em vez disso, ele defende uma educação dialógica, onde o diálogo e a interação são essenciais. Para Freire, a motivação e a afetividade são fundamentais para o aprendizado eficaz. Ele argumenta que os alunos devem encontrar significado e relevância no que estão aprendendo, e que um ambiente escolar acolhedor e respeitoso é crucial para o desenvolvimento da autoconfiança e da autoestima dos estudantes.

Vera Regina Nunes Araújo (2006): *"Interferências pedagógicas na superação de dificuldades da aprendizagem matemática"*

Araújo (2006) discute a importância da interferência pedagógica no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A autora argumenta que o professor deve atuar como mediador, identificando as dificuldades dos alunos e auxiliando-os na superação desses obstáculos. Araújo também destaca a necessidade de práticas pedagógicas que valorizem a motivação e a afetividade, criando um ambiente de aprendizagem acolhedor e estimulante.

Rosana Giaretta Sguerra Miskulin (2019): ***“Laboratório de Ensino de Matemática: espaço para formação e pesquisa”***

Miskulin (2019) reforça a importância do Laboratório de Matemática como um espaço de formação e pesquisa. A autora argumenta que as atividades realizadas nesse ambiente devem permitir aos alunos a experimentação e a construção do pensamento matemático, fundamentando o pensamento abstrato. Miskulin também destaca que o Laboratório de Matemática é um recurso valioso para a formação de professores, pois oferece oportunidades para a prática e a reflexão sobre o ensino.

Cirilo Arcanjo Ramos (2021): ***“Laboratório de ensino de matemática: espaço facilitador e promotor da aprendizagem”***

Ramos (2021) analisa o Laboratório de Matemática como um espaço facilitador e promotor da aprendizagem. O autor argumenta que esse ambiente permite a integração entre teoria e prática, tornando o ensino mais dinâmico e eficaz. Ramos também destaca a importância do uso de metodologias ativas e do ensino lúdico no Laboratório de Matemática, que podem contribuir para a superação das dificuldades de aprendizagem dos alunos.

As ideias desses autores se complementam e ajudam a construir uma base sólida para a proposta deste trabalho. Ao tratar do Laboratório de Matemática como um espaço de aprendizagem significativa, Lorenzato reforça o papel da prática e da experimentação, fundamentais tanto para a formação docente quanto para o envolvimento dos estudantes. Miskulin aprofunda essa concepção ao destacar o laboratório como um ambiente que possibilita a construção do pensamento abstrato a partir de experiências concretas.

Ramos, por sua vez, traz uma abordagem que valoriza a integração entre teoria e prática, associando o uso do laboratório ao desenvolvimento de metodologias ativas e lúdicas. Já Araújo chama atenção para o papel do professor como mediador no processo de superação das dificuldades, ressaltando que o sucesso do ensino também passa pela sensibilidade e pela escuta ativa em sala de aula. Nesse ponto, Paulo Freire amplia a discussão ao lembrar que aprender vai além de repetir conteúdos: é preciso diálogo, sentido, acolhimento e compromisso com a realidade do aluno.

Essas diferentes vozes ajudam a fundamentar a ideia central da pesquisa: que o Laboratório de Matemática pode ser uma ferramenta eficaz para transformar o ensino da disciplina, principalmente quando aliado a práticas pedagógicas que valorizam a participação ativa dos alunos, a mediação do professor e a construção coletiva do conhecimento.

Diante do percurso metodológico adotado e das referências que embasam este trabalho, percebe-se que o Laboratório de Matemática não deve ser visto apenas como um espaço físico, mas como uma proposta pedagógica capaz de aproximar a Matemática à realidade dos alunos. Mais do que aplicar conceitos, trata-se de provocar descobertas e tornar a aprendizagem mais acessível e significativa. A partir das referências e do caminho metodológico construído até aqui, fica evidente que o Laboratório de Matemática pode ser um recurso valioso para tornar o ensino mais significativo. No entanto, seu impacto está diretamente ligado à atuação do professor e à maneira como ele conduz as práticas pedagógicas no dia a dia da sala de aula. Por isso, o próximo capítulo aborda de forma mais aprofundada como a intervenção pedagógica pode contribuir para enfrentar as dificuldades dos alunos em Matemática, destacando o papel essencial do docente nesse processo.

3. A FERTILIDADE DA INTERFERÊNCIA PEDAGÓGICA NO ENFRENTAMENTO ÀS DIFICULDADES DOS ALUNOS EM MATEMÁTICA

Segundo Araújo (2006), a interferência pedagógica é um elemento fundamental no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, especialmente quando se trata de lidar com as dificuldades dos alunos nessa disciplina. A Matemática é uma área do conhecimento que frequentemente gera desafios para os estudantes, seja pela complexidade dos conceitos, pela abstração das operações ou pela falta de conexão com a realidade cotidiana. Nesse contexto, a intervenção do professor se torna essencial para identificar as dificuldades dos alunos e auxiliá-los na superação desses obstáculos.

> O número elevado de estudantes reprovados e considerados pelos professores, de apresentarem dificuldades na apropriação dos conceitos matemáticos é uma constante nas escolas. Nossa preocupação é que, em vez da superação dessas dificuldades, os estudantes vão acumulando outras à medida que novos conceitos são apresentados. Como consequência, eles passam a ser estigmatizados como incapazes para a matemática, engrossando as estatísticas da reprovação e exclusão escolar. Tal concepção é predominante nos meios escolares. Isso significa dizer, também, que o tratamento dado às dificuldades de aprendizagem depende da concepção do professor (Araújo, 2006, p.1).

A interferência pedagógica frente às dificuldades dos alunos em Matemática reside no papel do professor como mediador do processo de aprendizagem. É por meio da atuação do docente que os estudantes podem ser orientados a desenvolver estratégias de resolução de problemas, a compreender os conceitos matemáticos de forma mais clara e a perceber a relevância da Matemática em suas vidas. Essa interferência contribui para a promoção de um ambiente de aprendizagem acolhedor e estimulante, no qual os alunos sintam-se motivados a enfrentar os desafios da disciplina.

O estudo de Araújo (2006), fundamentado na abordagem Histórico-Cultural, destaca a importância da concepção do professor de Matemática frente às dificuldades dos alunos:

> A abordagem histórico-cultural requer mudanças na prática pedagógica do educador e sua percepção referente à dificuldade de aprendizagem da matemática. Significa superar a ideia de que a sala de aula é um local silencioso, onde os alunos só ouvem, prática tão comum numa visão formalista e tecnicista de educação matemática. A escola é vista como local de trocas de idéias, de trabalho em grupos - para promover as interações/mediações necessárias ao processo de apropriação dos conceitos científicos - e individuais para que os alunos produzam suas reelaborações dos significados

> apropriados nas discussões coletivas. É no espaço coletivo e individual que, de acordo com Vygotski (1993), os alunos se apropriam das significações dos conceitos e dos conhecimentos matemáticos.

Além disso, Araújo (2006) elenca categorias que geram dificuldades de aprendizagem, como a falta de motivação e afetividade nas atividades de ensino. A educação é um campo complexo que envolve não apenas a transmissão de conhecimento, mas também a formação integral do ser humano. Nesse sentido, a autora converge com Paulo Freire (1996, 2004), que enfatizou a importância da motivação e da afetividade no processo educativo. Freire propôs uma abordagem educacional dialógica, onde o diálogo e a interação são essenciais. Para ele, a motivação surge quando os alunos se sentem parte do processo educativo e conectam o conteúdo aprendido com sua realidade cotidiana. A motivação intrínseca é crucial para o aprendizado eficaz, e um ambiente escolar acolhedor e respeitoso contribui para a construção de uma autoestima positiva, essencial para enfrentar desafios acadêmicos.

Paulo Freire (1996, 2004) propôs uma abordagem educacional que se distancia do modelo tradicional bancário de ensino, onde o educador deposita informações nos alunos. Em vez disso, ele defende uma educação dialógica, onde o diálogo e a interação são essenciais. Para Freire, a motivação surge quando os alunos se sentem parte do processo educativo e regularmente sua própria realidade. Nesse processo, a motivação é um fator crucial para o aprendizado eficaz. Segundo Freire, a motivação deve ser intrínseca; ou seja, os alunos devem encontrar significado e relevância no que estão aprendendo. Quando os estudantes se sentem motivados, eles tendem a superar barreiras e dificuldades com mais facilidade. A conexão entre o conteúdo aprendido e sua vida cotidiana é fundamental para essa motivação.

Além disso, para Araújo (2006) e Freire (1996, 2004) a afetividade facilita a empatia e o respeito mútuo dentro da sala de aula. Esses sentimentos ajudam os alunos a se sentirem valorizados e compreendidos, promovendo um espaço onde eles podem explorar suas dificuldades sem medo de julgamento. As dificuldades de aprendizagem muitas vezes estão ligadas à falta de motivação ou à ausência de vínculos afetivos positivos na escola. Ao implementar práticas pedagógicas que valorizem tanto a motivação quanto a afetividade, os educadores podem ajudar os alunos a superarem essas barreiras.

Freire (1996, 2004) sugere que o ensino deve ser contextualizado, levando em consideração as experiências pessoais dos alunos. Essa abordagem aumenta a relevância do conteúdo e motiva os estudantes, mostrando que suas vivências têm valor no processo educativo. Para aplicar as ideias freirianas, algumas estratégias podem ser adotadas: a) o diálogo aberto, criando espaços onde os alunos possam expressar suas opiniões livremente; b) a aprendizagem colaborativa, promovendo atividades em grupo que incentivem o trabalho em equipe; c) o reconhecimento das emoções, validando as emoções dos alunos durante o processo educativo; e d) a contextualização do conteúdo, relacionando o material didático às realidades dos estudantes. Essas práticas não apenas aumentam a motivação dos alunos, mas também fortalecem laços afetivos dentro da sala de aula

Araújo (2006) também destaca que a comunicação e negociação desenvolvidas pelo professor de Matemática podem interferir positiva ou negativamente na motivação do aluno para resolver as atividades, apesar das dificuldades. A pesquisadora observou que, em algumas situações, uma intervenção mais demonstrativa do que interrogativa é mais eficaz. O professor deve realizar intervenções sociais, explicitando significações, procedimentos e articulações do sistema conceitual.

Outro aspecto importante tratado pela autora diz respeito ao tratamento dos professores frente às dificuldades de aprendizagem em Matemática. Em outros termos, de que modo a escola tenta solucionar as dificuldades dos alunos em Matemática?

> Nos meios escolares são estabelecidas medidas paliativas, normalmente oriundas dos órgãos administrativos e se traduzem como: recuperação paralela, aula de reforço, classe especiais, classe de aceleração, apoio pedagógico, entre outras. Por não serem produzidas “com ou pelo” professor, mas “para” ele, tais medidas passam ser vistas como algo para melhorar as estatísticas de aprovação. Com isso, o que seria uma oportunidade para o aluno elaborar seus conceitos matemáticos, passa a ser um momento de repetição e reforço de uma prática pedagógica que gerou tais dificuldades. (Araújo, 2006, p.13)

Por último, a autora constata que alguns aspectos do processo de ensino e aprendizagem da Matemática são causadores de dificuldades à aprendizagem. Em geral, o ensino da Matemática pautado sobretudo na memorização, no hábito de decorar, da absorção mecânica tende a excluir a maioria dos alunos. Nesse sentido, o ensino da Matemática é um tema amplamente debatido nas esferas educacionais, especialmente no que diz respeito às metodologias utilizadas para transmitir conhecimentos matemáticos. Tradicionalmente, muitos sistemas de ensino têm como foco a memorização e a absorção mecânica de conteúdos, o que pode levar à exclusão de uma parcela significativa dos alunos. Este trabalho investiga o impacto do Laboratório de Matemática e como a ênfase excessiva na memorização pode comprometer um aprendizado eficaz e inclusivo. A memorização, baseada na retenção de informações sem compreensão profunda, tem sido historicamente incentivada por métodos tradicionais que priorizam a repetição mecânica. Esse modelo distancia os alunos dos conceitos matemáticos, tornando-os incapazes de aplicar fórmulas de forma crítica. Além disso, pode desmotivar estudantes com diferentes estilos cognitivos, contribuindo para a evasão escolar. Embora facilite o desempenho em testes padronizados, essa abordagem não prepara os alunos para usar a Matemática em situações reais.

Por outro lado, o Laboratório de Matemática é uma ferramenta que incentiva os alunos a aprenderem através da resolução de problemas reais ou simulados. Essa abordagem promove um entendimento mais profundo dos conceitos matemáticos e estimula habilidades críticas como análise, síntese e avaliação. As tecnologias educacionais presentes no Laboratório oferecem ferramentas interativas que podem facilitar o aprendizado ativo, tornando-o mais envolvente.

Ao contrário do ensino tradicional baseado na repetição mecânica, o Laboratório de Matemática propõe uma abordagem que prioriza a construção do conhecimento, permitindo que os alunos apliquem conceitos matemáticos em situações concretas. Embora a memorização possa ter seu valor em determinados contextos, quando utilizada isoladamente, ela tende a excluir muitos estudantes que não se adaptam a esse modelo. Para tornar o ensino mais inclusivo e eficaz, é essencial adotar metodologias que estimulem a reflexão e a aplicação prática do conhecimento. Caso contrário, o descompasso entre professores e alunos se mantém, e a Matemática continua a ser vista como um obstáculo, em vez de um instrumento de compreensão do mundo.

Ao contrário do ensino tradicional baseado na repetição mecânica, o Laboratório de Matemática propõe uma abordagem que prioriza a construção do conhecimento, permitindo que os alunos apliquem conceitos matemáticos em situações concretas. Embora possa ser útil em algumas situações, essa memorização tende a excluir muitos estudantes que não se adaptam bem ao método tradicional.

Para tornar o ensino mais inclusivo e eficaz, é essencial adotar metodologias que estimulem a reflexão e a aplicação prática do conhecimento. Caso contrário, o descompasso entre professores e alunos se mantém, e a Matemática continua a ser vista como um obstáculo.

Tendo em vista a aprendizagem eficaz em Matemática, Oliveira (2013) propõe uma sala de aula como um ambiente inovador e diferenciando para os alunos. Ademais, ressalta a importância da formação de professores para o êxito das práticas pedagógicas em tal ambiente:

> A formação de professores para o processo de ensino-aprendizagem em oficinas, jogos pedagógicos e desenvolvimento de materiais didáticos é de extrema importância para uma boa atuação em sala de aula, ou até mesmo para servir de base para a sala de apoio, esta sala que é destinada aos alunos com dificuldades em absorver o conteúdo aplicado pelo professor em sala de aula regular, e neste caso são encaminhados para este apoio a fim de melhorar seu desempenho escolar. (Oliveira, 2013, p.31).

Segundo Resende (2012), tal formação deve habilitar os professores à priorização dos seguintes aspectos:

> Assim, o professor deve procurar se conscientizar de suas funções, conhecer seu ambiente de trabalho, conhecer seus educandos visando um planejamento de atividades que possam ser realmente aplicadas e que sejam significativas, com objetivos definidos e possibilitando a construção de conhecimentos. Portanto, alunos e professores devem se conhecer, conhecerem seus interesses, expectativas e se comprometerem com atitudes de acordo com suas necessidades. (p. 201)

O compromisso do professor com as necessidades dos alunos é um tema central na educação contemporânea, indo além da transmissão de conhecimento. Seu papel abrange o desenvolvimento acadêmico, social e emocional dos estudantes, como preconiza a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018). Professores que reconhecem a diversidade em sala de aula podem adaptar suas práticas pedagógicas, utilizando métodos e recursos variados para atender às diferentes necessidades dos alunos, criando um ambiente de aprendizagem mais inclusivo e significativo.

Além disso, como ensina Freire (2004), o comprometimento dos professores está ligado à criação de um ambiente seguro e acolhedor. Alunos que percebem o interesse genuíno de seus professores tendem a participar mais das aulas. Um ambiente positivo favorece tanto o aprendizado quanto o desenvolvimento emocional, ajudando os estudantes a construírem confiança e resiliência.

O professor também atua como modelo para os alunos, ensinando não apenas conteúdos curriculares, mas valores como respeito, solidariedade e responsabilidade social. Esse compromisso reflete diretamente no desempenho acadêmico, pois alunos motivados tendem a ter melhores resultados e maior interesse pelo aprendizado.

Por fim, acredito que o engajamento docente precisa estar amparado por políticas públicas e por uma formação contínua, que ofereça ao professor condições reais de atender às necessidades dos alunos.. As instituições precisam oferecer recursos e capacitação para que os educadores atendam às diferentes necessidades dos alunos. A colaboração entre professores, pais e comunidade escolar é essencial para criar uma rede de apoio eficaz, garantindo um ensino mais inclusivo e significativo.

A intervenção pedagógica é essencial para ajudar os alunos a superarem dificuldades em Matemática, isso exige a adoção de estratégias diferenciadas que atendam às necessidades de cada estudante. Isso inclui atividades práticas e contextualizadas, uso de recursos didáticos variados, apoio extraclasse e incentivo ao trabalho colaborativo. Além de auxiliar no aprendizado da disciplina, essa abordagem contribui para o desenvolvimento global dos alunos.

Observando o desempenho dos alunos, o professor identifica dificuldades específicas e planeja intervenções, incentivando a persistência. Como mediador, cria um ambiente favorável que fortalece o aprendizado e o bem-estar dos estudantes. Quando essa ação pedagógica inclui o Laboratório de Matemática, ampliam-se as oportunidades de compreensão e melhora no desempenho, tema do próximo tópico deste estudo.

4. METODOLOGIAS ATIVAS, O LÚDICO E A BNCC

O Laboratório de Matemática se apresenta como um espaço inovador e dinâmico, onde a aprendizagem da Matemática é potencializada por meio da utilização de metodologias ativas e do ensino lúdico, promovendo o desenvolvimento de habilidades matemáticas, bem como estimulando a criatividade, o trabalho colaborativo e o pensamento crítico dos alunos. Segundo Freire (1996), as metodologias ativas possibilitam um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e participativo, permitindo que o estudante atue como protagonista do seu aprendizado, ao invés de ser um mero receptor passivo de informações.

No contexto do Laboratório de Matemática, as metodologias ativas se manifestam em atividades práticas que incentivam os alunos a explorarem conceitos matemáticos por meio da experimentação e da resolução de problemas. Rosa et al. (2021, p.2) destacam que "a aprendizagem é ativada por meio da resolução de problemas reais, da solução de desafios e da construção de novos conhecimentos a partir dos acumulados pelas experiências vividas", o que reforça a importância da interação e do aprendizado prático no ensino da Matemática.

Além disso, a aprendizagem colaborativa desempenha um papel essencial nesse ambiente. Trabalhar em equipe na resolução de desafios matemáticos contribui para o desenvolvimento não apenas do raciocínio lógico, mas também de habilidades sociais, como a comunicação e o pensamento crítico. Essa perspectiva é coerente com a abordagem defendida por Freire (1996), que enfatiza a importância do diálogo e da troca de conhecimentos na construção do saber.

Em um ambiente de laboratório escolar, é comum que os estudantes trabalhem em grupos para resolver desafios matemáticos. Essa interação não só enriquece o aprendizado individual, mas também desenvolve habilidades sociais essenciais, como comunicação e trabalho em equipe. A troca de ideias e estratégias entre os colegas pode levar a novas perspectivas sobre um mesmo problema matemático.

As metodologias ativas partem da ideia de que o aluno precisa participar ativamente do próprio processo de aprendizagem. Em vez de apenas escutar e anotar, o estudante é colocado em situações práticas, onde precisa resolver problemas, tomar decisões, testar hipóteses e construir conhecimento em colaboração com os colegas. Essa abordagem valoriza o protagonismo do aluno e estimula o desenvolvimento do pensamento crítico, da autonomia e da capacidade de aplicar os conteúdos em diferentes contextos.

O ensino lúdico, por sua vez, utiliza jogos, desafios, materiais concretos e situações que envolvem o aluno de maneira mais leve e prazerosa. A ludicidade ajuda a reduzir a ansiedade diante da Matemática, favorece a participação dos estudantes e cria um ambiente mais acolhedor, onde aprender passa a ser uma experiência positiva. Além disso, permite que conceitos abstratos sejam trabalhados de forma concreta, o que facilita a compreensão e torna o aprendizado mais duradouro.

Nesse contexto, o Laboratório de Matemática se consolida como um espaço que une essas duas abordagens, promovendo um ambiente dinâmico e colaborativo. Quando metodologias ativas e ensino lúdico se articulam, os alunos não apenas compreendem melhor os conteúdos matemáticos, mas também conseguem relacioná-los com situações reais. Assim, a Matemática deixa de ser um conjunto de fórmulas distantes da realidade e passa a ser um conhecimento vivo, presente no cotidiano e acessível a todos.

Essas abordagens pedagógicas colocam o estudante como protagonista do seu próprio aprendizado, estimulando a participação ativa, a autonomia e o desenvolvimento de habilidades essenciais para a vida. Segundo Freire (1996), uma das principais vantagens das metodologias ativas é a promoção de um ambiente de aprendizagem dinâmico e colaborativo. Ao invés de apenas receber informações de forma passiva, os alunos são incentivados a buscar conhecimento, resolver problemas e trabalhar em equipe para alcançar objetivos comuns. Isso contribui para o desenvolvimento da capacidade crítica, criativa e analítica dos estudantes, preparando-os para os desafios do mundo contemporâneo.

> Ambientes de ensino em que o estudante acompanha passivamente a matéria lecionada pelo professor, por meio de aulas expositivas, não possibilitam esse compromisso, porque a alienação do aluno neste tipo de aula, somada à avaliação rara e pouco diversificada, não contribui para o desenvolvimento de tais competências. No Brasil, Paulo Freire é, talvez, um dos defensores das metodologias ativas mais reconhecidos, ao argumentar que a aprendizagem é ativada por meio da resolução de problemas reais, da solução de desafios e da construção de novos conhecimentos a partir dos acumulados pelas experiências vividas (Rosa, et al, 2021, p.2).

Além disso, as metodologias ativas permitem que cada aluno aprenda no seu próprio ritmo e de acordo com suas necessidades específicas. Com abordagens ativas, os educadores conseguem adaptar suas práticas pedagógicas às características individuais dos estudantes, promovendo uma educação mais inclusiva e eficaz.

Outro aspecto relevante dessas metodologias é o estímulo ao desenvolvimento de competências socioemocionais. Por meio da interação com os colegas e da resolução de conflitos, os alunos aprendem a lidar melhor com as demandas da vida em sociedade, tendem a se tornar mais colaborativos e seguros.

Portanto, as metodologias ativas representam uma abordagem inovadora e promissora para a educação contemporânea. Motivo pelo qual verifica-se a potencialidade do Laboratório de Matemática à formação dos alunos.

4.1 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR E O ENSINO LÚDICO DE MATEMÁTICA

A importância das brincadeiras para o desenvolvimento da criança é um tema amplamente debatido na área educacional, tais concepções desdobram-se no Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), Lei 8.069/1990. As brincadeiras desempenham um papel fundamental no desenvolvimento saudável e integral dos alunos, sendo reconhecidas como um direito garantido pelo referido Estatuto. O ECA estabelece direitos e deveres para assegurar a proteção integral das crianças e dos adolescentes, promovendo seu desenvolvimento físico, mental, moral, espiritual e social.

O ECA reconhece a importância das brincadeiras como uma forma de expressão, interação social e aprendizado dos sujeitos. Através das brincadeiras, as crianças exploram o mundo ao seu redor, desenvolvem habilidades de resolução de problemas, estimulam a criatividade e fortalecem os laços afetivos com seus pares.

Ao compartilhar experiências lúdicas com seus pares, os alunos aprendem a respeitar as diferenças, a valorizar a diversidade cultural e a conviver harmoniosamente. Desse modo, as brincadeiras são fundamentais para o desenvolvimento saudável dos alunos, conforme preconizado pelo ECA.

A fertilidade dos jogos e brincadeiras é especialmente valiosa para o ensino e aprendizagem da Matemática, pois essas atividades têm o potencial de contribuir para o desenvolvimento pessoal, intelectual e cultural dos alunos. Além disso, facilitam a socialização, a comunicação e a construção do conhecimento. Segundo Velasco (1996):

> […] brincando a criança desenvolve suas capacidades físicas, verbais ou intelectuais. Quando a criança não brinca, ela deixa de estimular, e até mesmo de desenvolver as capacidades inatas podendo vir a ser um adulto inseguro, medroso e agressivo. Já quando brinca à vontade tem maiores possibilidades de se tornar um adulto equilibrado, consciente e afetuoso (Velasco, 1996, p.78).

Segundo Velasco (1996), desde os primeiros anos de vida, as atividades lúdicas têm sido reconhecidas como ferramentas importantes para estimular o pensamento, a criatividade, a resolução de problemas e outras habilidades cognitivas. No contexto escolar, jogos e dinâmicas interativas oferecem um ambiente propício ao desenvolvimento intelectual dos educandos, favorecendo aspectos como memória, atenção, raciocínio lógico e planejamento.

No Ensino Médio, embora o engajamento espontâneo em atividades lúdicas seja menos comum do que em fases anteriores, essas estratégias ainda desempenham um papel relevante. Quando bem utilizadas, promovem maior envolvimento dos educandos, facilitam a compreensão dos conteúdos e tornam o processo de aprendizagem mais interessante e significativo. No caso da Matemática, por exemplo, essas práticas contribuem para o desenvolvimento do pensamento lógico e permitem que o educando perceba como essa disciplina se relaciona com situações reais do seu cotidiano.

Conforme Freitas (2021), a escola deve assegurar a participação ativa dos alunos no aprendizado e promover sua formação integral. O currículo escolar, frequentemente debatido e reformulado, é alvo de críticas por priorizar conteúdos teóricos em detrimento de aspectos práticos e habilidades socioemocionais essenciais. Para suprir essa lacuna, busca-se cada vez mais uma abordagem interdisciplinar e contextualizada, alinhada às demandas da sociedade contemporânea. Cada instituição possui suas particularidades, como perfil dos estudantes, recursos disponíveis e necessidades locais, exigindo um currículo flexível e adaptável a diferentes realidades. Além disso, ele deve ser um processo em constante evolução, atualizado regularmente para acompanhar as transformações sociais, culturais e tecnológicas. Assim, a relação entre currículo e escola deve ser objeto de reflexão contínua, garantindo uma educação dinâmica e de qualidade.

A estrutura da BNCC é composta por três partes principais: Introdução, Parte Geral e Parte Específica. A Introdução apresenta os objetivos gerais da BNCC e como ela deve ser utilizada pelas escolas. A Parte Geral estabelece as competências e habilidades gerais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica, independentemente da etapa em que se encontram. Já a Parte Específica define as competências e habilidades específicas para cada etapa da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), em cada área do conhecimento (Linguagens, Matemática, Ciências Humanas e Sociais e Ciências da Natureza).

A BNCC é um documento extenso e detalhado, que foi construído com a colaboração de especialistas em educação de todo o país e tem como objetivo garantir uma educação de qualidade para todos os estudantes brasileiros. A estrutura do documento da BNCC está organizada de acordo com as etapas de ensino: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. No contexto de cada etapa estão inclusas cinco áreas do conhecimento, sendo uma delas voltada à Matemática, são elas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística. Em cada unidade são definidos os objetos de conhecimento e as habilidades que deverão ser desenvolvidas. Comparando as habilidades listadas em cada uma das unidades temáticas propostas pelo documento, nota-se crescimento e aprofundamento gradativo do conhecimento ao longo dos anos escolares (Brasil, 2018).

Em outros termos, há uma concepção imperante em todos os níveis de ensino: uma determinada habilidade e/ou objeto do conhecimento que está previsto para ser desenvolvido, por exemplo, ao longo do 1º ano do Ensino Fundamental, “sofre” pequenas alterações ao longo dos anos seguintes, há continuidade e retomada de tópicos ao longo dos anos escolares acrescida de novos conceitos peculiares a um determinado nível de ensino (BRASIL, 2018).

> Em todas as unidades temáticas, a delimitação dos objetos de conhecimento e das habilidades considera que as noções matemáticas são retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a ano. No entanto, é fundamental considerar que a leitura dessas habilidades não seja feita de maneira fragmentada. A compreensão do papel que determinada habilidade representa no conjunto das aprendizagens demanda a compreensão de como ela se conecta com habilidades dos anos anteriores, o que leva à identificação das aprendizagens já consolidadas, e em que medida o trabalho para o desenvolvimento da habilidade em questão serve de base para as aprendizagens posteriores (Brasil, 2018, p. 278).

A BNCC estabelece que, nos anos iniciais, o ensino de Matemática deve ser voltado para a construção de conceitos numéricos, geométricos e de medidas, por meio de atividades lúdicas e desafiadoras.

Segundo Freitas (2021), um dos principais objetivos do ensino da Matemática nos anos iniciais é o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Esse tipo de raciocínio é fundamental para a resolução de problemas e para a tomada de decisões em diversas áreas da vida. Além disso, o ensino da Matemática nos anos iniciais contribui para o desenvolvimento da capacidade de abstração, da criatividade e da imaginação. Outra contribuição importante do ensino da Matemática nos anos iniciais, segundo a BNCC, é a melhoria do desempenho escolar dos alunos em outras disciplinas. Estudos mostram que os alunos que têm um bom desempenho em Matemática tendem a ter um desempenho melhor em outras áreas do conhecimento, como ciências e língua portuguesa.

Verificar o ensino da Matemática nos anos finais do ensino fundamental é de extrema importância, pois é nessa fase que os estudantes consolidam e aprofundam seus conhecimentos matemáticos.

De acordo com Freitas (2021), a BNCC propõe uma abordagem mais contextualizada e interdisciplinar para o ensino da Matemática nos anos finais, buscando conectar os conteúdos matemáticos com situações do cotidiano dos estudantes, vislumbramos nesse momento uma possibilidade de o professor de Matemática inserir jogos e brincadeiras em suas aulas. Além disso, a BNCC enfatiza a importância do desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de resolver problemas e da compreensão dos conceitos matemáticos fundamentais.

No que diz respeito às competências específicas que os alunos devem adquirir no ensino da Matemática nos anos finais, a BNCC destaca a necessidade de desenvolver a capacidade de interpretar e resolver problemas matemáticos, utilizar diferentes estratégias para realizar cálculos, compreender e aplicar conceitos geométricos, analisar dados estatísticos e probabilísticos, entre outras habilidades essenciais.

Ainda segundo Freitas (2021), é fundamental que os professores estejam preparados para implementar as diretrizes da BNCC no ensino da Matemática nos anos finais, promovendo atividades que estimulem o pensamento crítico, a criatividade e a autonomia dos alunos. Além disso, é importante oferecer um ambiente de aprendizagem desafiador e motivador, que favoreça o desenvolvimento pleno das competências Matemáticas dos estudantes. Desse modo, o ensino da Matemática nos anos finais a partir da BNCC visa proporcionar uma formação sólida e significativa em Matemática, preparando os alunos e contribuindo para o seu desenvolvimento integral.

Segundo Santos (2018, p.132), cujo estudo trata do ensino de Matemática nos anos iniciais a partir das reformas curriculares, é “necessário discutir a BNCC, mais especificamente, os conteúdos de Matemática, e a participação do professor na construção desse documento que tem como objetivo redimensionar a proposta curricular nas escolas. ”

Conforme a BNCC (2018, p.07):

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

Reitera-se, a BNCC (documento normativo) define o aprendizado essencial em cada nível de ensino. Porém a Base gerou críticas por parte de alguns autores. Por exemplo, segundo Santos (2018, p.136), vislumbra que a implementação da Base exige mudanças na formação de professores e investimentos na infraestrutura das escolas:

> A BNCC apresenta dois rumos importantes os quais compreendem de um lado a formação inicial e continuada, e de outro lado e elaboração de materiais didáticos que envolvam as tecnologias digitais. É preciso esclarecer que para esses objetivos se efetivarem depende de muito investimento na formação docente e na infraestrutura das escolas.

Na presente investigação científica, vislumbra-se o caráter convergente entre as orientações da BNCC ao ensino de Matemática e a inserção de jogos e brincadeiras em tais aulas, especialmente no Laboratório de Matemática.

5. A POTENCIALIDADE DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Segundo Vieira (2012) e Gondim (2023), a importância do Laboratório de Matemática na educação é indiscutível, pois proporciona um ambiente prático e interativo para os alunos explorarem conceitos matemáticos de forma concreta. O Laboratório de Matemática oferece uma abordagem prática que permite aos estudantes experimentarem e visualizar os princípios matemáticos, tornando o aprendizado mais significativo e estimulante. Além disso, o laboratório de matemática promove a colaboração entre os alunos, incentivando a resolução de problemas em equipe e o desenvolvimento de habilidades sociais.

Conforme Silva e Assumpção (2011), ao utilizar materiais manipulativos, como blocos, jogos e equipamentos tecnológicos, os estudantes podem compreender melhor conceitos abstratos da Matemática, como geometria espacial, álgebra e estatística. Essa abordagem prática ajuda a tornar a disciplina mais acessível e interessante para os alunos, contribuindo para o aumento da motivação e do engajamento com a matéria. Além disso, o Laboratório de Matemática possibilita que os professores identifiquem as dificuldades individuais dos alunos de forma mais eficaz. Desse modo, o Laboratório de Matemática atua como um recurso pedagógico valioso para promover a inclusão e a diversidade no ensino da Matemática.

Muitos conteúdos ensinados em sala de aula são demonstrados nos laboratórios, proporcionando aos alunos uma visão prática dos conceitos em seu cotidiano. Em disciplinas como Matemática, Física e Química, essa abordagem se torna um diferencial, despertando o interesse e incentivando o estudo de forma mais eficiente.

De acordo com Lorenzato (2010), o Laboratório de Ensino de Matemática é o espaço propício e indispensável ao contexto escolar, em que há um ambiente favorável à aproximação da Matemática teórica com a Matemática prática. No Laboratório de Ensino da Matemática, a utilização de materiais como jogos, livros, vídeos, computadores, materiais manipuláveis, dentre outros, permitirá ao professor o planejamento e a execução da aula com maior qualidade, tornando-o capaz de fomentar nos seus alunos a curiosidade, a criatividade e a participação nas aulas, fazendo-os sujeitos ativos nos processos de aprendizagem.

Os termos Laboratório de Matemática e Laboratório de Ensino de Matemática são frequentemente utilizados na literatura como sinônimos ou com pequenas variações de significado, dependendo do contexto em que são empregados. De modo geral, ambos se referem a um espaço destinado ao desenvolvimento de atividades práticas que possibilitam a experimentação, a manipulação de materiais e a construção do conhecimento matemático de forma significativa. No entanto, alguns autores fazem distinções sutis: enquanto o Laboratório de Matemática pode ser compreendido como o ambiente físico e os recursos disponíveis para o ensino da disciplina, o Laboratório de Ensino de Matemática enfatiza mais as práticas pedagógicas e metodológicas ali desenvolvidas.

Miskulin (2019) adverte que as atividades realizadas nesse ambiente devem permitir aos alunos, além da aprendizagem, a experimentação da genuína construção do pensamento matemático, que ocorre por meio do exercício prático e fundamenta o pensamento abstrato, essencial à disciplina.

Ademais, conforme Lorenzato (2010), um papel fundamental desempenhado pelos professores dentro da esfera escolar consiste em observar e analisar como seus alunos estão se comportando diante das disciplinas trabalhadas e identificar aqueles que apresentam maiores dificuldades de aprendizagem. Essa observação permite aos docentes ajustarem suas práticas e criar estratégias mais eficazes dentro das rotinas escolares, assegurando que todos os alunos tenham oportunidade de consolidar o conhecimento esperado ao final do período letivo. Criar atividades investigativas para a construção de conceitos é uma forma de engajar o aluno no seu próprio processo de aprendizagem. Deve-se considerar a participação ativa do estudante na investigação de um determinado fenômeno, incentivando a elaboração de hipóteses, a análise de resultados e a interpretação crítica, sempre levando em conta a dimensão coletiva do trabalho.

Como destaca Lorenzato (2010), o Laboratório de Matemática proporciona um ambiente interativo e concreto, favorecendo a compreensão de conceitos abstratos por meio da experimentação. Ao aproximar o conteúdo matemático do cotidiano, essa abordagem contribui para tornar a aprendizagem mais significativa e motivadora para os educandos.

A interferência pedagógica, quando combinada com atividades práticas do laboratório, potencializa a aprendizagem ao adaptar estratégias educacionais às necessidades individuais dos alunos. Assim, essa abordagem integrada favorece não apenas a construção do conhecimento matemático, mas também o desenvolvimento de habilidades cognitivas essenciais para o sucesso acadêmico e profissional.

Dentro dessa perspectiva, este capítulo apresenta elementos fundamentais que proporcionam uma análise a priori sobre a importância do Laboratório de Matemática no ensino e aprendizagem. A seleção dos materiais utilizados considera sua capacidade de tornar conceitos abstratos mais acessíveis e proporcionar experiências significativas.

Neste contexto, os materiais concretos selecionados, como a planificação dos sólidos geométricos, a demonstração do Teorema de Pitágoras, os discos de frações, a torre de Hanói, o cálculo do volume da pirâmide e do cone, além do material dourado, são apresentados como uma proposição de estratégias e atividades a serem analisadas a priori. Embora a pesquisa não tenha realizado experimentação direta desses recursos, sua fundamentação teórica se baseia na literatura especializada, que destaca como esses materiais favorecem a compreensão de conceitos matemáticos abstratos.

Autores como Freire, Lorenzato, Araújo, Miskulin e Ramos discutem o papel do Laboratório de Matemática na construção do pensamento matemático, enfatizando que a manipulação de materiais concretos permite aos alunos desenvolver habilidades essenciais, como a abstração, o raciocínio lógico e a resolução de problemas. Assim, a análise proposta neste estudo busca dialogar com essas perspectivas teóricas, demonstrando como os objetos utilizados no laboratório contribuem para alcançar os aspectos matemáticos discutidos pelos referidos autores.

A seguir, cada um desses materiais será explorado detalhadamente, destacando sua aplicação prática, sua relevância pedagógica e o modo como possibilita a construção do conhecimento matemático dentro do contexto educacional.

5.1 Sólidos geométricos e suas planificações

O estudo dos sólidos geométricos e suas planificações no Laboratório de Matemática proporciona aos alunos uma oportunidade prática para explorar conceitos fundamentais da geometria.

Sólidos geométricos são figuras tridimensionais com volume e ocupam espaço. Entre os principais estão o cubo, o paralelepípedo, a pirâmide, o cilindro, o cone e a esfera, cada um com características específicas. Vejamos alguns:

Cubo: Possui 6 faces quadradas.

Pirâmide: Tem uma base poligonal e faces triangulares que se encontram em um ponto (vértice).

Cilindro: Composto por duas bases circulares conectadas por uma superfície curva.

Compreender essas formas é essencial para a construção do conhecimento matemático dos alunos.

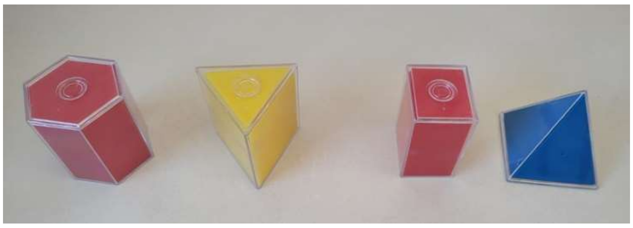
A planificação é o processo de desenhar as faces de um sólido geométrico em uma superfície plana, permitindo visualizar como as partes se juntam para formar o objeto tridimensional. Este conceito é crucial para entender a relação entre duas dimensões (2D) e três dimensões (3D). Vale ressaltar que formas 2D têm apenas comprimento e largura. Elas podem ser criadas usando um gráfico de coordenadas no plano, com os eixos x e y. Formas bidimensionais são representações em mapas ou fotografias. Já as formas 3D têm comprimento, largura e profundidade. Elas precisam de um gráfico de coordenadas com três eixos (x, y e z) para serem criadas.

No Laboratório de Matemática, diversas atividades exploram os sólidos geométricos e suas planificações. Além disso, softwares como GeoGebra e Poly 1.11 possibilitam a manipulação virtual das formas geométricas, ampliando a compreensão das relações espaciais.

Essas práticas tornam o aprendizado mais dinâmico e contribuem para o desenvolvimento de habilidades essenciais, como resolução de problemas, trabalho em equipe e pensamento espacial. Combinar teoria e prática faz com que o aluno compreenda as propriedades dos sólidos tridimensionais.

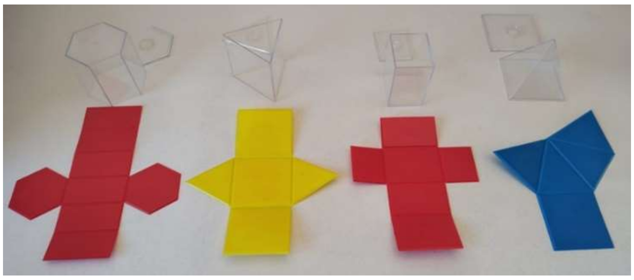
A seguir, são apresentados alguns elementos que compõem o Laboratório de Matemática, foco deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC): os sólidos geométricos e suas respectivas planificações.

Figura 1: Sólidos Geométricos (1)



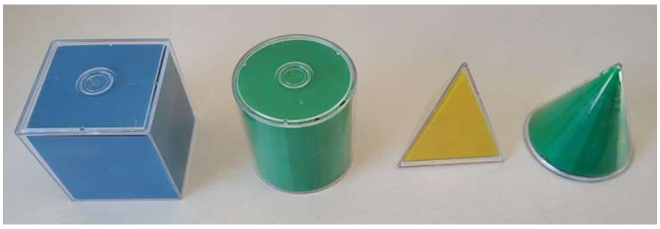
Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Figura 2: Sólidos Geométricos e suas planificações (1)



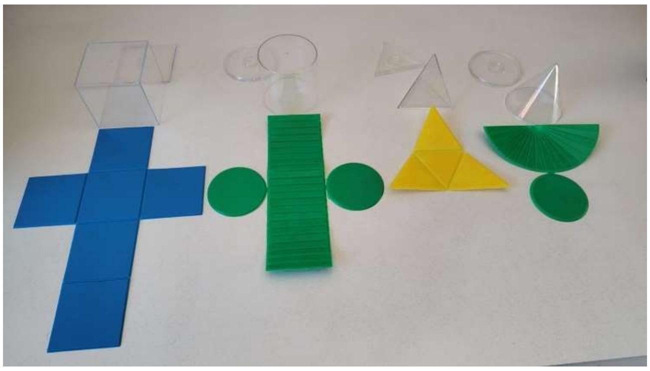
Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Figura 3: Sólidos Geométricos (2)



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Figura 4: Sólidos Geométricos e suas planificações (2)



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

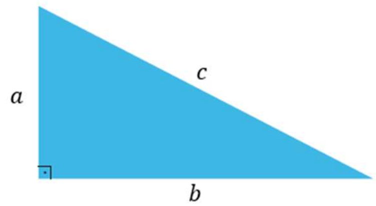
5.2 Uma demonstração do Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um dos pilares da geometria e possui aplicações práticas em diversas áreas, como engenharia, arquitetura e física. A demonstração desse teorema pode ser uma atividade enriquecedora para os alunos, permitindo que eles compreendam não apenas a teoria, mas também a aplicação prática do conceito. Abordaremos como trabalhar a demonstração do Teorema de Pitágoras em um laboratório de matemática, utilizando métodos práticos e interativos. O Teorema de Pitágoras está relacionado principalmente ao desenvolvimento de habilidades no campo da Geometria. Na BNCC, ele pode ser associado às seguintes habilidades:

- EF09MA13: Demonstrar relações métricas e algébricas entre os elementos de figuras geométricas planas, como triângulos, quadriláteros e círculos, utilizando o Teorema de Pitágoras.
- EF09MA14: Resolver e elaborar problemas de aplicação do Teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Antes de iniciar a demonstração prática, é fundamental que os alunos tenham uma compreensão básica do Teorema de Pitágoras. O teorema afirma que, em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa (o lado oposto ao ângulo reto) é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados (catetos).

Considerando o triângulo a seguir:

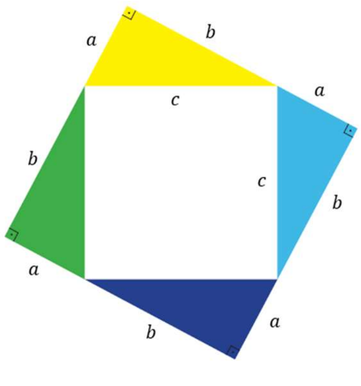


Temos que, o Teorema de Pitágoras será expresso como:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

onde c representa a hipotenusa e a e b representa os catetos.

Em uma das demonstrações desse Teorema, podemos ter:



A área do quadrado de lado $(a + b)$ é igual à soma da área dos quatro triângulos de catetos a e b , que corresponde a $\frac{(a \times b)}{2}$, adicionada à área do quadrado interno de lado c , que é de c^2.

Assim,

$$(a + b)^2 = 4 \times \frac{(a \times b)}{2} + c^2$$

Desenvolvendo o produto notável e efetuando a simplificação, temos:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

Simplificando o termo $2ab$ em ambos os membros, temos:

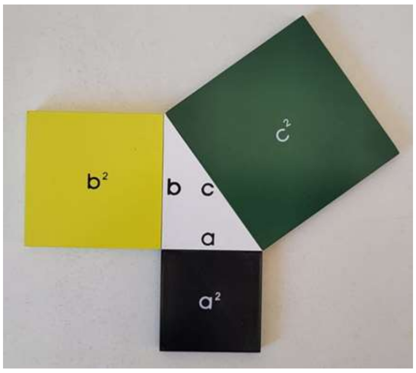
$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = \cancel{2ab} + c^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Essa é uma demonstração do Teorema, o qual enuncia que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

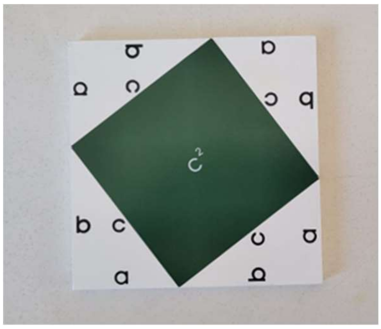
Utilizando os objetos do laboratório, podemos demonstrar visualmente.

Figura 5: Quadrados e triângulo de madeira



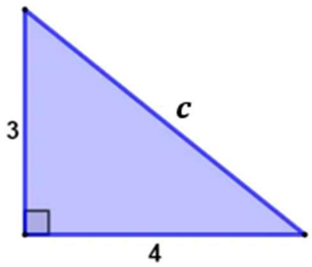
Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Figura 6: Quadrado e triângulos de madeira



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Uma atividade prática a ser desenvolvida em sala de aula é apresentar um triângulo retângulo cuja hipotenusa (c) e os catetos a e b medindo respectivamente 3 cm e 4 cm, e pedir para calcular a medida da hipotenusa (c).



Utilizando o teorema de Pitágoras exemplo dado, temos que:

$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

$\Rightarrow c = \sqrt{25} = 5$

$\therefore c = 5\ cm$

Uma maneira eficaz de demonstrar visualmente o Teorema de Pitágoras é através da construção de quadrados nos lados do triângulo retângulo. Calculando as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos (a e b) e sobre a hipotenusa (c), temos:

Área do quadrado sobre a: $A_a = a^2$

Área do quadrado sobre b: $A_b = b^2$

Área do quadrado sobre c: $A_c = c^2$

Por exemplo:

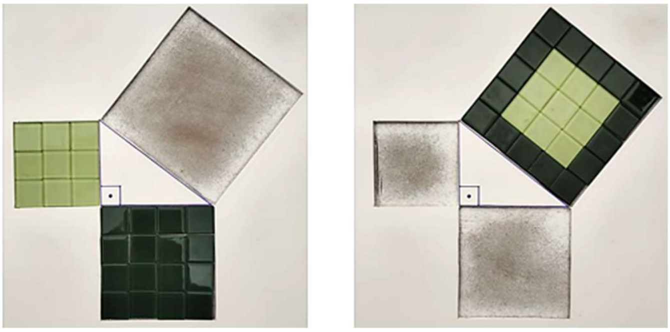
- Se $a = 3\ cm$, então: $A_a = 3^2 \Rightarrow A_a = 9\ cm^2$
- Se $b = 4\ cm$, então: $A_b = 4^2 \Rightarrow A_b = 16\ cm^2$
- E se calculamos anteriormente que $c = 5\ cm$: $A_c = 5^2 \Rightarrow A_c = 25\ cm^2$

Os alunos devem observar que:

$A_a + A_b = A_c \Rightarrow 9\ cm^2 + 16\ cm^2 = 25\ cm^2$

Isso reforça visualmente o conceito apresentado pelo teorema.

Figura 7: Pastilhas de vidro comprovando o teorema de Pitágoras no terno (3, 4 e 5)



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Vale ressaltar que esse modelo disposto no Laboratório de Matemática se aplica somente para evidenciarmos a relação do Teorema de Pitágoras para o terno (3, 4, 5).

Após as atividades práticas é importante incentivar os alunos a pensarem em outras situações em que poderiam aplicar o Teorema de Pitágoras com números inteiros, racionais e reais.

Ao trabalhar com essa abordagem prática no laboratório de matemática, os alunos não apenas aprendem teoricamente sobre o Teorema de Pitágoras, mas também experimentam sua validade através da construção física e visualização das relações entre os lados dos triângulos retangulares.

5.3 Discos de frações

O uso de discos de frações no Laboratório de Matemática proporciona uma abordagem prática e visual para a compreensão de frações. Lorenzato (2010) destaca que materiais concretos tornam a aprendizagem mais significativa ao conectar conceitos abstratos à realidade. Além disso, Miskulin (2019) ressalta que a manipulação desses recursos favorece o desenvolvimento do pensamento matemático.

Esses materiais permitem que os alunos explorem frações de forma intuitiva, tornando o aprendizado mais concreto. Freire (2001) enfatiza que a participação ativa dos estudantes potencializa a construção do conhecimento. Assim, os discos de frações facilitam a compreensão das operações matemáticas e promovem maior engajamento na disciplina.

A seguir, apresenta-se uma aplicação dos discos de fração no ambiente escolar, com base nos princípios defendidos por Lorenzato (2010), Miskulin (2019) e Freire (2001), que ressaltam a importância da experimentação no ensino da Matemática.

Os discos de frações são círculos divididos em partes iguais, representando diferentes frações. Cada disco pode ser colorido ou marcado para indicar as partes que compõem uma unidade. Por exemplo, um disco dividido em quatro partes iguais representa a fração $\frac{1}{4}$, enquanto um disco dividido em oito partes representa $\frac{1}{8}$. Essa representação visual ajuda os alunos a entenderem como as frações se relacionam.

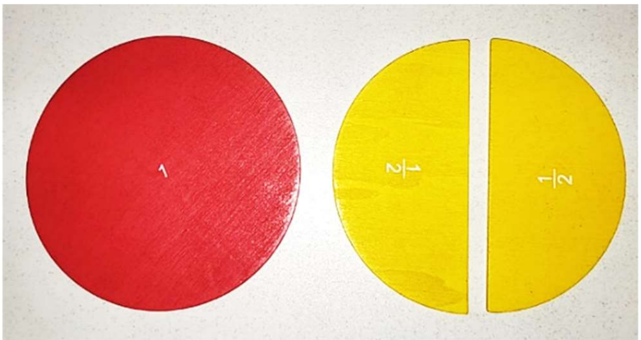
De posse dos discos, várias atividades podem ser realizadas, tais como:

Comparação de Frações: São escolhidos partes diferentes que completam um disco inteiro. Eles podem discutir qual fração é maior ou menor com base na visualização dos discos e com isso perceber que se o numerador é 1 (um), quanto maior for o denominador menor será a fração.

Soma e Subtração de Frações: Utilize os discos para demonstração de transações básicas com frações. Por exemplo, ao somar $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, os alunos podem sobrepor dois discos representando essa fração para ver que o resultado é igual a $\frac{2}{4}\left(\text{ou } \frac{1}{2}\right)$.

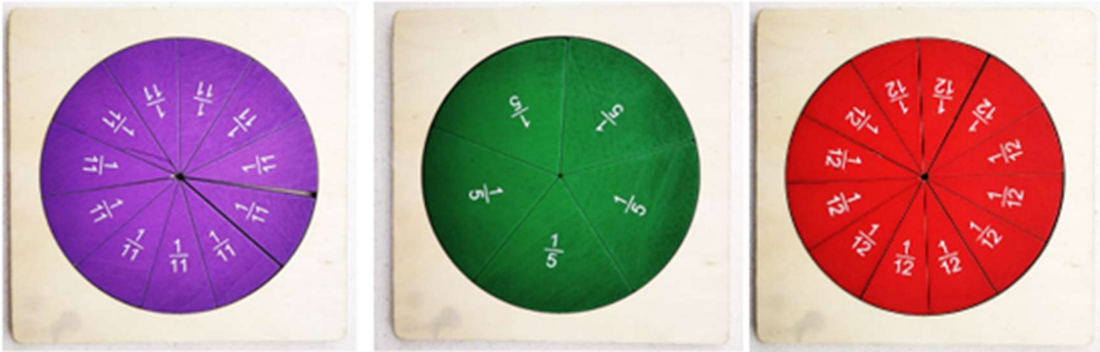
Multiplicação e Divisão: Os alunos também podem usar os discos para explorar multiplicação e divisão de frações. Para multiplicar uma fração por um número inteiro $\left(\text{como } 2\times\frac{1}{3}\right)$, eles podem usar dois discos representando $\frac{1}{3}$ e observar quantas partes do todo isso representa. Dividir uma fração por outra é o mesmo que multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda. Por exemplo: $\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{1}=\frac{4}{2}=2$. Ou seja, o disco correspondente a $\frac{1}{4}$ do inteiro cabe duas vezes no disco correspondente a $\frac{1}{2}$ do inteiro.

Figura 8: Um disco inteiro e duas metades de um disco



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

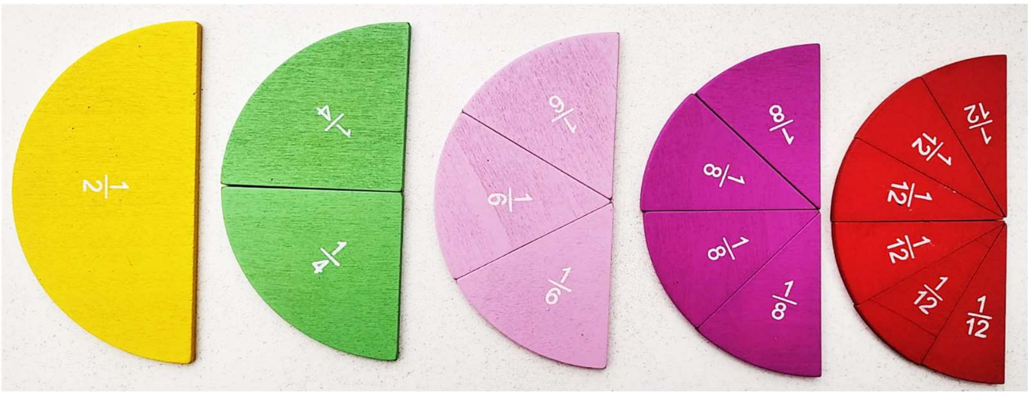
Figura 9: Diferentes frações que compõem um disco inteiro



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Com os discos de frações podemos observar quando duas ou mais frações são equivalentes como podemos observar na figura abaixo:

Figura 10: Frações diferentes de um disco que resultam na mesma fração do disco.



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Na figura acima, podemos observar que as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{6}{12}$ correspondem à mesma parte do inteiro. Isso significa que essas frações são equivalentes. Isso proporciona ao aluno visualizar o real significado de uma fração equivalente.

Após as atividades práticas, é fundamental promover uma discussão em sala sobre o que foi aprendido. Perguntas como “Como você pode representar a soma das duas frações?” ou “O que acontece quando você divide uma fração?” ajudar a consolidar o conhecimento adquirido.

Para avaliar o entendimento dos alunos sobre o conceito de frações após as atividades com os discos, você pode aplicar exercícios escritos ou orais onde eles precisam explicar suas descobertas ou resolver problemas relacionados a operações com frações.

Trabalhar com discos de frações no laboratório de matemática não apenas torna o aprendizado mais interativo e divertido, mas também ajuda os alunos a desenvolverem uma compreensão sólida das relações entre diferentes frações. Essa abordagem prática promove habilidades críticas que serão úteis ao longo da vida acadêmica dos estudantes.

5.4 Torre de Hanói

A Torre de Hanói foi popularizada pelo matemático francês Édouard Lucas, em 1883, há indícios de que ele se inspirou em lendas ou conceitos matemáticos mais antigos. Ele criou a história mitológica associada ao quebra-cabeça, dizendo que existia um templo em Benares, na Índia, onde monges manipulavam 64 discos em três hastes, e que, quando terminassem a tarefa, o mundo acabaria.

No entanto, não há registros históricos que comprovem que esse quebra-cabeça existia antes dele. O mais provável é que Lucas tenha inventado o jogo, mas inspirado por conceitos matemáticos e desafios de movimentação sequencial já estudados antes.

A regra consiste em transferir os discos de uma haste para outra, de modo que apenas um disco pode ser movido por vez, um disco de maior diâmetro não pode ser colocado sobre um disco de menor diâmetro, e somente o disco no topo de cada pilha pode ser movido.

Este problema não é apenas interessante do ponto de vista lógico e matemático, mas também serve como uma excelente ferramenta pedagógica em laboratórios de matemática.

Trabalhar com a Torre de Hanói em um laboratório de matemática tem vários objetivos educacionais. Primeiramente, ele ajuda os alunos a desenvolverem habilidades de raciocínio lógico e resolução de problemas. Além disso, permite que eles explorem conceitos como recursão e algoritmos previstos na BNCC cuja habilidade é EF08MA10: Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.

Passo a Passo para Trabalhar com a Torre de Hanói:

1. **Apresentação do Problema**: Explique as regras básicas e mostre uma configuração inicial com os discos empilhados em ordem decrescente em uma das hastes.
2. **Discussão das Estratégias**: Discuta com os alunos as possíveis estratégias para resolver o problema. Pergunte como eles poderiam mover os discos sem violar as regras matemáticas. Isso promove o pensamento crítico e a colaboração entre os alunos.
3. **Solução Recursiva**: Para mover o(s) disco(s) de uma haste para outra com o menor número de movimentos possíveis, temos que:
   - Mover 1 (um) disco para uma das hastes exigirá 1 (um) movimento.
   - Mover 2 (dois) discos para uma das hastes exigirá 3 (três) movimentos.
   - Mover 3 (três) discos para uma das hastes exigirá 7(sete) movimentos.
   - Mover 4 (quatro) discos para uma das hastes exigirá 15 (quinze) movimentos.

Escrevendo a sequência que representa a quantidade de discos $\boldsymbol{n}$ relacionado ao mínimo de movimentos $\boldsymbol{m}$.

$n = 1 \longrightarrow m = 1$

$n = 2 \longrightarrow m = 3$

$n = 3 \longrightarrow m = 7$

$n = 4 \longrightarrow m = 15$

Observando a sequência **1**, **3**, **7**, **15**, percebe-se que o subsequente é o dobro da anterior mais **1**, assim pode-se concluir que o próximo número da sequência é $\mathbf{2 \times 15 + 1 = 31}$, e a sequência, então, será: **1**, **3**, **7**, **15**, **31**, **63**, **127**, **255**, **511**, **1023**, **2047**.

Termo Geral

Vamos observar a sequência de movimentos até:

$n = 1 \longrightarrow m = 1$

$n = 2 \longrightarrow m = 3$

$n = 3 \longrightarrow m = 7$

$n = 4 \longrightarrow m = 15$

$n = 5 \longrightarrow m = 31$

$n = 6 \longrightarrow m = 63$

$n = 7 \longrightarrow m = 127$

$n = 8 \longrightarrow m = 255$

Analisando a diferença entre termos consecutivos:

- $\begin{matrix} n = 1 \longrightarrow m = 1 \\ n = 2 \longrightarrow m = 3 \end{matrix} \Longrightarrow 3 - 1 = \mathbf{2}$
- $\begin{matrix} n = 2 \longrightarrow m = 3 \\ n = 3 \longrightarrow m = 7 \end{matrix} \Longrightarrow 7 - 3 = \mathbf{4}$
- $\begin{matrix} n = 3 \longrightarrow m = 7 \\ n = 4 \longrightarrow m = 15 \end{matrix} \Longrightarrow 15 - 7 = \mathbf{8}$
- $\begin{matrix} n = 4 \longrightarrow m = 15 \\ n = 5 \longrightarrow m = 31 \end{matrix} \Longrightarrow 31 - 15 = \mathbf{16}$
- $\begin{matrix} n = 5 \longrightarrow m = 31 \\ n = 6 \longrightarrow m = 63 \end{matrix} \Longrightarrow 63 - 31 = \mathbf{32}$
- $\begin{matrix} n = 6 \longrightarrow m = 63 \\ n = 7 \longrightarrow m = 127 \end{matrix} \Longrightarrow 127 - 63 = \mathbf{64}$
- $\begin{matrix} n = 7 \longrightarrow m = 127 \\ n = 8 \longrightarrow m = 255 \end{matrix} \Longrightarrow 255 - 127 = \mathbf{128}$

A sequência da diferença entre dois termos consecutivos é a sequência de base 2: $\{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7\}$

Desse modo,

$n = 1 \longrightarrow m = 1 \Rightarrow 2^1 - 1 = 1$

$n = 2 \longrightarrow m = 3 \Rightarrow 2^2 - 1 = 3$

$n = 3 \longrightarrow m = 7 \Rightarrow 2^3 - 1 = 7$

$n = 4 \longrightarrow m = 15 \Rightarrow 2^4 - 1 = 15$

$n = 5 \longrightarrow m = 31 \Rightarrow 2^5 - 1 = 31$

$n = 6 \longrightarrow m = 63 \Rightarrow 2^6 - 1 = 63$

$n = 7 \longrightarrow m = 127 \Rightarrow 2^7 - 1 = 127$

$n = 8 \longrightarrow m = 255 \Rightarrow 2^8 - 1 = 255$

...

$n = n \longrightarrow m = 2^n - 1$

Assim, para descobrir a quantidade mínima de movimentos para transferir a torre de uma extremidade a outra basta conhecer a quantidade de discos e aplicar no modelo matemático $m = 2^n - 1$.

4. **Análise dos Resultados**: Analise com os alunos quantas jogadas foram permitidas para completar a tarefa e discuta a relação entre o número total de discos e as ações fáceis (que segue a fórmula $2^n - 1$).
5. **Reflexão Final**: Promova uma reflexão sobre as dificuldades durante a atividade e como elas se relacionam com problemas matemáticos mais amplos.

Trabalhar com a Torre de Hanói no laboratório de matemática oferece uma oportunidade valiosa para explorar conceitos fundamentais enquanto desenvolve habilidades práticas nos alunos. Através da combinação entre teoria e prática, eles podem não apenas entender os melhores algoritmos e recursão, mas também aprimorar seu pensamento crítico e colaborativo.

Figura 11: Torre de Hanói

Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

5.5 Volume de uma pirâmide regular

Para entender melhor o sentido da fórmula do volume de uma pirâmide regular vamos relembrar Princípio de Cavalieri. Uma visão mais detalhada do Princípio de Cavalieri pode ser vista no Apêndice - A.

O estudo de sólidos geométricos como pirâmides e prismas é essencial para entender conceitos de volume e área. A BNCC traz a habilidade EF09MA19: Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas. Vejamos o exemplo da relação entre o volume de uma pirâmide e o volume de um prisma que possuem a mesma base e a mesma altura. A afirmação central que analisaremos é que o volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma com mesma base e mesma altura.

Para entender essa relação, precisamos primeiro definir os dois sólidos:

- **Prisma**: Um prisma é um sólido tridimensional que possui duas bases paralelas e faces laterais retangulares. O volume de um prisma pode ser calculado por: $V = A_b \times h$, onde A_b é área da base e h é a altura do prisma.
- **Pirâmide**: Uma pirâmide, por outro lado, tem uma base poligonal e suas faces laterais são triângulos que se encontram em um ponto chamado vértice. O volume de uma pirâmide é dado por: $V = \frac{1}{3} \times A_b \times h$, onde A_b é área da base e h é a altura do prisma.

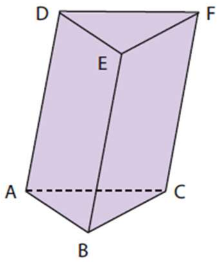
No livro didático **MATEMÁTICA Ciências e Aplicações**, volume 2 do ensino médio, do PNLD 2018, cujos autores são Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida.

Disponível em: api.plurall.net/media_viewer/documents/2414501

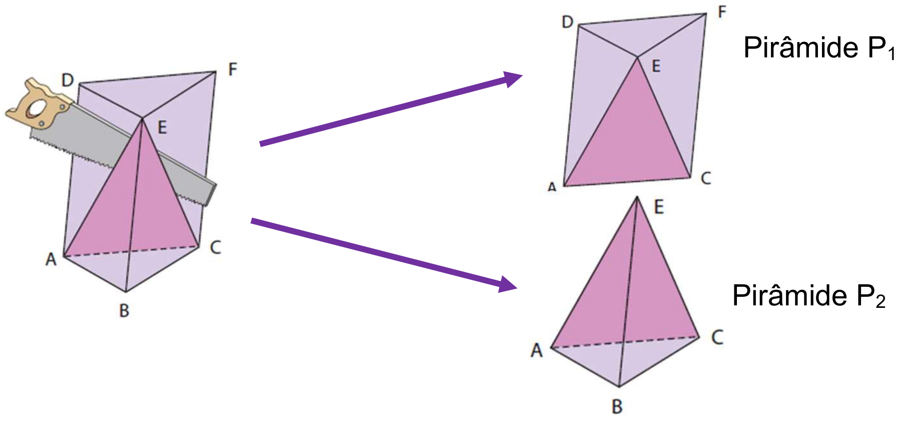
O volume da pirâmide é abordado neste livro, entre as páginas 168 e 170, da seguinte maneira:

Volume (V)

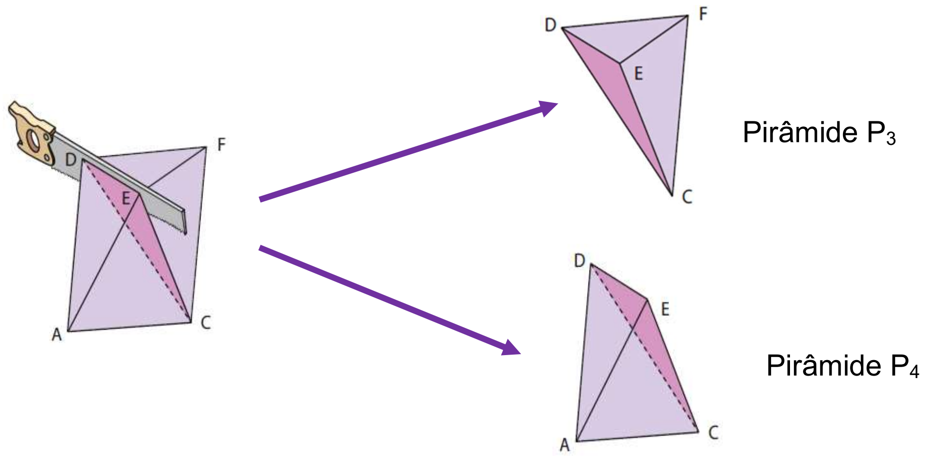
Para determinarmos o volume de uma pirâmide triangular, vamos considerar o prisma triangular da figura abaixo, cuja base tem área $\mathbf{A_b}$ e cuja medida da altura é $\boldsymbol{h}$.



Secionando esse prisma pelo plano (ACE), obtemos uma pirâmide quadrangular P_1 e uma pirâmide triangular P_2, de base ABC e altura de medida h.



Secionando P_1 pelo plano (CDE), obtemos duas pirâmides triangulares: P_3, de vértice F e base DEC (ou de vértice C e base DEF), e P_4, de vértice A e base DEC.



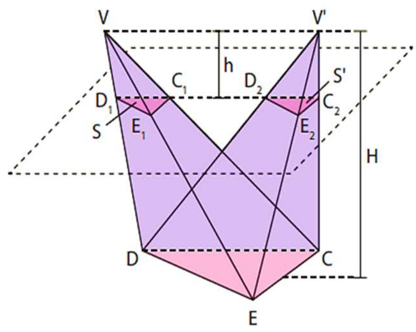
Note que:

- **P_2 e P_3 são pirâmides de bases equivalentes ($\triangle ABC$ e $\triangle DEF$) e mesma altura.**
- **P_3 e P_4 são pirâmides que têm o $\triangle DEC$ como base comum e mesma altura, pois as distâncias de seus respectivos vértices (F e A) ao plano da base são iguais.**

Para obter o volume dessas pirâmides triangulares vamos, de maneira introdutória, mostrar o seguinte teorema:

Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm o mesmo volume.

Demonstração:



Consideremos as pirâmides P e P', de base comum DEC e vértices V e V', ambas com altura de medida H.

Um plano paralelo ao plano da base (DEC) e distando h dos vértices V e V' determina em P e P' as seções S e S', respectivamente, conforme mostrado na figura.

Se A é a área da base DEC, A_1 a área da seção S e A_2 a área da seção S', considerando a semelhança entre os triângulos DEC e $D_1E_1C_1$ e entre os triângulos DEC e $D_2E_2C_2$, temos:

$\frac{h}{H} = k$ **(razão de semelhança)** $\Rightarrow \frac{A_1}{A} = k^2 = \frac{A_2}{A} \Rightarrow \mathbf{A_1 = A_2}$

Logo, pelo princípio de Cavalieri, podemos concluir que: $\mathbf{V_P = V_{P'}}$

Analogamente, podemos mostrar que $V_{P_2} = V_{P_3}$ **e** $V_{P_3} = V_{P_4}$**, então por transitividade, temos que:** $V_{P_2} = V_{P_3} = V_{P_4}$

Fazendo $V_{P_2} = V_{P_3} = V_{P_4} = \mathbf{V}$ **e considerando que o prisma ABCDEF é a reunião das pirâmides P_2, P_3 e P_4, o seu volume ($A_b \times h$) é tal que:**

$\mathbf{A_b} \times h = \mathbf{V + V + V \Rightarrow 3V = A_b} \times h$

$\Rightarrow \mathbf{V} = \frac{1}{3} \times A_b \times h$

Portanto, concluímos, para pirâmides triangulares, a validade do seguinte teorema:

O volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela medida da altura.

De um modo geral, uma pirâmide qualquer cuja base é um polígono de n lados e, de um mesmo vértice deste polígono, tracemos todas as possíveis diagonais que o dividem em ($n - 2$) triângulos. Nesse caso, obteríamos ($n - 2$) pirâmides triangulares de mesma altura que a pirâmide original e com áreas da base A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-2}.

Note que a área da base (A_b) da pirâmide original é dada por:

$\mathbf{A_b = A_1 + A_2 + A_3 + ... +} A_{n-2}$

Note ainda que o volume (V) da pirâmide original é a soma dos volumes dessas ($n-2$) pirâmides triangulares, assim:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \times A_1 \times h + \frac{1}{3} \times A_2 \times h + \frac{1}{3} \times A_3 \times h + \ldots + \frac{1}{3} \times A_{n-2} \times h$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \times h\ (\mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} + \mathbf{A_3} + \mathbf{\ldots} + A_{n-2})$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \times A_b \times h$$

Logo, o volume de uma pirâmide é $\frac{1}{3}$ do volume de um primas de mesma base e mesma altura.

Trazer essa demonstração para uma aula é bastante enriquecedor para o aluno, mas talvez ele não tenha a capacidade nem o interesse em "ligar" essa fórmula com o que realmente ela representa.

Sendo assim, toda essa demonstração pode ser melhor assimilada quando apresentamos um objeto concreto que traga mais sentido à fórmula. Veja as figuras abaixo.

Figura 12: Prisma reto de base triangular regular.

Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Figura 13: Prisma da Figura 12 desmontado em três pirâmides de mesmo volume.

Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Com isso, o aluno pode constatar que a fórmula do volume de uma pirâmide é realmente a terça parte de um prisma de mesma base e mesma altura, pois a manipulação das peças fará o aluno assimilar melhor a fórmula.

Vamos considerar um exemplo prático para ilustrar essa relação:

Suponha que temos um prisma com uma base quadrada cuja área $A_b = 16\ cm^2$ (ou seja, cada lado do quadrado mede 4 centímetros) e uma altura $h = 9\ cm$.

Calculando o volume do prisma (V_{PRISMA}), temos:

$V_{PRISMA} = A_b \times h$

$\Rightarrow V_{PRISMA} = 16 \times 9$

$\Rightarrow V_{PRISMA} = 144\ cm^3$

Logo, o volume do prisma é $144\ cm^3$.

Agora, considerando uma pirâmide com a mesma base, então a área da base da pirâmide (A_b) será $16\ cm^2$ e sua altura (h) será $9\ cm$), desse modo o volume da pirâmide ($V_{PIRÂMIDE}$) será dado por:

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times A_b \times h$

$\Rightarrow V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times 16 \times 9$

$\Rightarrow V_{pirâmide} = 48\ cm^3$

Logo, o volume da pirâmide é $48\ cm^3$

Como podemos observar nos cálculos acima, o volume da pirâmide em relação ao volume do prisma segue como demonstrado, o seja, o volume da pirâmide é exatamente **um terço** do volume do prisma de mesma base e mesma altura.

5.6 Volume do cone

No mesmo livro didático **MATEMÁTICA Ciências e Aplicações**, volume 2 do ensino médio, do PNLD 2018, cujos autores são Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida.

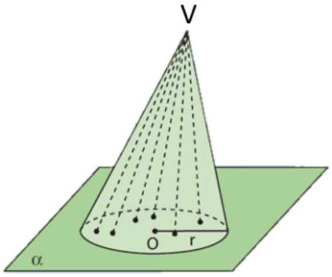
Disponível em: api.plurall.net/media_viewer/documents/2414501

Da página 199 a 202, o volume do cone é abordado neste livro da seguinte maneira: primeiro, o autor apresenta a definição de cone:

DEFINIÇÃO DE CONE

Consideremos um círculo de centro (O) e raio (r), contido em um plano α, e um ponto V, não pertencente a α.

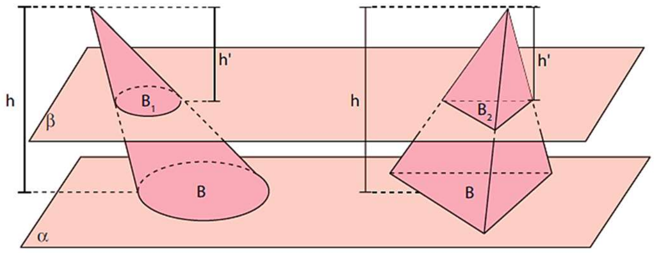
Chama-se cone circular, ou apenas cone, a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra em um ponto do círculo.



Depois, o volume do cone é abordado da seguinte maneira:

Volume (V) do cone

Consideremos um cone de altura de medida h e base circular com área B. Consideremos também um tetraedro cuja altura mede h e base com área B. Note que o cone e o tetraedro têm alturas congruentes e bases equivalentes.



Suponhamos que os dois sólidos tenham as bases contidas em um mesmo plano α e que seus vértices estejam no mesmo semiespaço de origem a. Qualquer plano β paralelo a α que secione o cone a uma distância h' do vértice também seciona o tetraedro à mesma distância h' do vértice.

A seção do cone pelo plano β é um círculo de área B_1. Como os dois cones obtidos são semelhantes, temos que:

$$\frac{B_1}{B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \ (*)$$

A seção do tetraedro pelo plano β é um triângulo de área B_2. Como os dois tetraedros são semelhantes, temos que:

$$\frac{B_2}{B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \ (**)$$

De $(*)$ e $(**)$, temos que:

$$\frac{B_1}{B} = \frac{B_2}{B} \Rightarrow \mathbf{B_1 = B_2}$$

Logo, as seções obtidas são equivalentes e, pelo princípio de Cavalieri, o cone e o tetraedro têm volumes iguais, isto é, $V_{cone} = V_{tetraedro}$.

Como $V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \times B \times h$, então o volume de um cone é igual a $\frac{1}{3}$ produto da área da base pela medida da altura.

Assim,

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \times A_b \times h$$

Como a base do cone é um círculo, sua área (A_b) será dada por:

$$A_b = \pi r^2$$

E desse modo, o volume do cone será dado por:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$$

Então, podemos concluir que o volume de um cone é $\frac{1}{3}$ do volume de um cilindro de mesma base e mesma altura. Essa relação entre os volumes do cone e do cilindro é uma das propriedades fundamentais da geometria sólida, frequentemente explorada em aulas de matemática.

Agora que temos as fórmulas, podemos comparar os volumes.

Se considerarmos um cilindro e um cone que tenham a mesma área da base(A_b) e a mesma altura (h), podemos substituir essas variáveis nas fórmulas:

- Volume do Cilindro: $V_{cilindro} = \pi r^2$
- Volume do Cone: $V_{cone} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$

Ao observar essas duas expressões, fique claro que o volume do cone é exatamente um terço do volume do cilindro. Isso pode ser expresso matematicamente como:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} V_{cilindro}$$

Quando um cilindro com água é preenchido até sua altura máxima, esse líquido ocupa todo o espaço interno. No entanto, ao adicionar um cone invertido dentro desse cilindro (com a mesma base e altura), percebemos que ele ocupa apenas a terça parte desse espaço.

Uma maneira prática de demonstrar essa relação em sala de aula seria através da experiência física com modelos tridimensionais. Ao fazer isso, os alunos podem visualizar claramente como o espaço ocupado pelo cone é menor em comparação ao espaço total disponível no cilindro.

Logo, a abordagem sobre o volume do cone é $\frac{1}{3}$ do volume de um cilindro com a mesma base e altura é uma demonstração clara das propriedades geométricas dos sólidos. Essa relação não só enriquece nosso entendimento matemático, mas também fornece ferramentas úteis para aplicações práticas no mundo real.

Figura 14: Cone e Cilindro de mesma base e mesma altura.

Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

5.7 Material dourado

O uso do material dourado no Laboratório de Matemática facilita a compreensão de conceitos fundamentais, como adição, subtração, multiplicação e divisão. Composto por unidades (cubos), barras (dezenas), placas (centenas) e blocos (milhares), esse recurso didático permite que os alunos visualizem e manipulem quantidades, favorecendo um aprendizado mais concreto e significativo.

Seu uso traz diversos benefícios:

Visualização Concreta – Ao manusear as peças, os alunos internalizam conceitos abstratos de forma mais intuitiva.

Desenvolvimento do Raciocínio Lógico – A manipulação dos blocos auxilia na decomposição e recomposição de números, facilitando as operações matemáticas.

Maior Engajamento – O caráter interativo do material torna as aulas mais dinâmicas e atrativas.

No laboratório, o material dourado pode ser utilizado em diferentes atividades:

Adição e Subtração – Representação numérica com cubos, permitindo a visualização das operações.

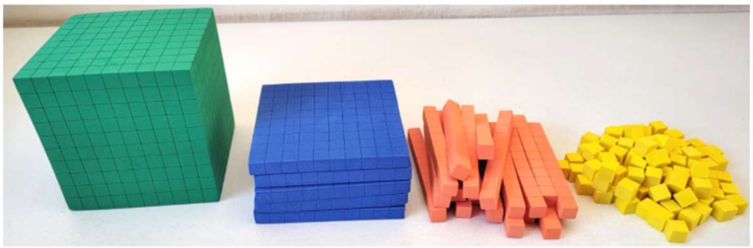
Multiplicação – Formação de grupos iguais para demonstrar o conceito de multiplicação.

Divisão – Distribuição das peças para ilustrar a repartição equitativa de quantidades.

Apesar de sua eficácia, é essencial que os professores sejam capacitados para utilizá-lo corretamente e que explorem o potencial das ferramentas digitais como complemento ao aprendizado.

Assim, o trabalho com material dourado no Laboratório de Matemática não apenas facilita a compreensão dos conteúdos, mas também desenvolve habilidades práticas fundamentais para a aplicação da matemática no cotidiano.

Figura 15: Material Dourado.



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

A inclusão desses materiais no laboratório de matemática deve-se ao fato de tornar o aprendizado mais dinâmico, interativo e concreto. A experiência prática possibilita que os alunos visualizem e manipulem conceitos que por muitas vezes fica só no seu imaginário.

O uso desses recursos também está alinhado à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que enfatiza a importância de metodologias ativas e do ensino lúdico. Além de ajudar na compreensão conceitual, auxiliam no desenvolvimento do raciocínio lógico, na resolução de problemas e na criatividade dos alunos favorecendo uma abordagem inclusiva ao ensino, atendendo às diferentes formas de aprendizagem e incentivando o protagonismo estudantil.

É importante ressaltar que existem inúmeros materiais que poderiam ser incorporados ao Laboratório de Matemática para enriquecer ainda mais a aprendizagem, como ábacos, tangrans, blocos lógicos, geoplano, roletas probabilísticas e softwares educativos. No entanto, a inclusão de todos esses elementos tornaria este trabalho excessivamente extenso. Desse modo, optou-se por destacar alguns dos recursos, deixando em aberto a possibilidade de ampliações futuras conforme as necessidades específicas de cada contexto educacional.

Além disso, a BNCC contempla diversas habilidades que justificam a presença desses materiais, entre elas estão:

- (EF03MA06) – Reconhecer frações como partes de um todo e representar frações associadas às ideias de parte/todo e quociente.
- (EF09MA12) – Demonstrar e utilizar o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas que envolvam triângulos retângulos.
- (EF06MA04) – Relacionar frações, números decimais e porcentagens em diferentes contextos.
- (EF05MA08) – Efetuar adição e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes.
- (EF06MA05) – Resolver problemas envolvendo as quatro operações com frações e números racionais.
- (EF07MA14) – Resolver problemas envolvendo volume de prismas retos, cilindros, cones e pirâmides, aplicando as fórmulas de cálculo.
- (EM13MAT101) – Compreender e utilizar conceitos geométricos, incluindo sólidos, planificações e volumes, na interpretação e solução de problemas.

Essas habilidades demonstram a importância de um laboratório bem estruturado, garantindo que os alunos desenvolvam competências matemáticas fundamentais de forma prática e significativa.

Portanto, esses materiais e atividades são de fundamental importância para criar um ambiente de aprendizagem mais rico, estimulante e eficaz, apresentando a matemática por um outro horizonte que vai além das fórmulas algébricas.

Concluímos o capítulo com a defesa de que as atividades de ensino de matemática em laboratórios especializados desempenham um papel crucial no desenvolvimento do raciocínio lógico e na compreensão de conceitos matemáticos pelos estudantes. Esses ambientes oferecem uma abordagem diferenciada e prática, permitindo que os alunos experimentem e observem fenômenos matemáticos de forma concreta. Segundo Souza (2018), a matemática não deve ser vista apenas como uma disciplina teórica, mas também como uma ciência que pode ser explorada através de experiências e experimentações. Nesse sentido, os laboratórios de matemática proporcionam uma conexão entre teoria e prática, estimulando o interesse e a motivação dos alunos.

Outro aspecto importante é a promoção do aprendizado colaborativo nesses espaços. Lorenzato (2010) destaca que o ambiente de um laboratório permite que os alunos trabalhem em grupos, discutindo ideias e resolvendo problemas em conjunto. Essa dinâmica colaborativa não apenas fortalece o entendimento dos conceitos matemáticos, mas também desenvolve habilidades sociais e de comunicação. A troca de ideias e a exposição a diferentes formas de pensar enriquecem o processo de aprendizagem, permitindo que cada estudante contribua com suas perspectivas individuais, que é essencial para uma formação educativa inclusiva e abrangente.

Finalmente, os laboratórios de matemática são fundamentais para a inovação no ensino. Eles oferecem acesso a tecnologias avançadas e recursos didáticos que permitem a visualização e a manipulação de conceitos abstratos. De acordo com Lorenzato (2010), o uso de softwares matemáticos e modelos concretos manipuláveis em laboratórios melhora significativamente a compreensão dos alunos sobre tópicos complexos, como álgebra avançada e geometria espacial. Assim, a integração de atividades práticas em laboratórios não apenas enriquece o ensino tradicional, mas também prepara os alunos para enfrentar desafios futuros, estimulando o pensamento crítico e analítico, habilidades que são cada vez mais valorizadas no mercado de trabalho atual.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) é uma etapa fundamental na formação acadêmica dos estudantes do ensino superior. Ele representa não apenas o culminar de anos de estudo, mas também uma oportunidade para que os alunos demonstrem suas habilidades, conhecimentos e competências adquiridas ao longo do curso. Em nosso caso, a importância do TCC pode ser comprovada sob várias perspectivas, incluindo o desenvolvimento de habilidades críticas e preparação para o mercado de trabalho.

Primeiramente, o TCC permitiu-me o desenvolvimento de habilidades essenciais como pesquisa, análise crítica e escrita acadêmica. Ao elaborar o projeto de pesquisa e, posteriormente, este trabalho escrito, senti-me desafiado a investigar um tema específico dentro da minha área de estudo, o laboratório de matemática no ensino voltado à educação básica. Isso envolveu a formulação de hipóteses, coleta e análise de dados mediante metodologia bibliográfica, além da interpretação dos resultados. Essas atividades promoveram o pensamento crítico e a capacidade analítica, que são fundamentais em qualquer profissão.

Além disso, o desenvolvimento deste trabalho proporcionou uma oportunidade única para aplicar o conhecimento teórico adquirido durante o curso em situações práticas. Essa experiência prática é valiosa não apenas para consolidar o aprendizado, mas também para desenvolver um estudo que pode ser apresentado a futuros empregos. Além disso, a realização do TCC também estimula a autonomia do aluno na gestão do tempo e na organização das atividades acadêmicas. Os estudantes precisam planejar suas pesquisas, estabelecer prazos e cumprir metas para concluir seu trabalho dentro do prazo estipulado. Essa experiência, indubitavelmente, é essencial para preparar os alunos para as demandas do mercado de trabalho, onde prazos e eficiência são frequentemente exigidos.

Em suma, o Trabalho de Conclusão de Curso foi uma parte vital da nossa formação acadêmica universitária. Ele não apenas consolidou o aprendizado teórico adquirido ao longo dos anos, mas também permitiu o desenvolvimento de habilidades práticas essenciais capazes de subsidiar-nos para enfrentar os desafios do mercado profissional.

No que diz respeito à pesquisa propriamente dita, buscou-se com este trabalho de conclusão de curso identificar a potencialidade do laboratório de matemática frente às dificuldades apresentadas pelos alunos na assimilação dos conteúdos da referida disciplina. Constatou-se que a superação de tais dificuldades de aprendizagem podem ser solucionadas conforme a postura adotada pelo professor de Matemática. Por exemplo, o aporte teórico consultado apontou que a comunicação e negociação desenvolvidas por parte do professor de matemática podem interferir positiva ou negativamente na motivação do aluno para resolver as atividades, apesar das dificuldades. Além disso, a afetividade e as atividades lúdicas também podem subsidiar os alunos no enfrentamento das dificuldades acadêmicas em Matemática.

Nesse sentido, o laboratório de matemática desempenha um papel fundamental no processo educacional ao proporcionar uma experiência prática e dinâmica para os alunos explorarem conceitos matemáticos complexos. O Laboratório de Matemática atua como uma ponte entre a abstração e a materialização dos objetos do saber, permitindo que os estudantes manipulem e visualizem conceitos que, de outra forma, permaneceriam abstratos e distantes de sua realidade. Essa mediação entre o abstrato e o concreto é um gesto de estudo essencial, fomentado pelo professor, que guia os alunos no processo de abstrair, manipular e materializar o conhecimento matemático.

Verificou-se, portanto, a importância da interferência do professor na superação das dificuldades dos alunos em matemática. Reitera-se, a matemática é uma disciplina que frequentemente gera desafios para os estudantes, podendo resultar em dificuldades de aprendizagem e baixo desempenho acadêmico. Nesse sentido, a presença ativa e orientadora do professor se torna fundamental para auxiliar os alunos a superarem tais obstáculos.

É importante ressaltar a inserção de jogos e brincadeiras no ensino de matemática, sobretudo no Laboratório de Matemática, visando tornar o aprendizado mais significativo, estimulante e divertido. A noção de jogo adotada nesta proposta baseia-se em dois grandes blocos: 1) o jogo como desafio individual, em que o aluno supera uma tarefa sozinho; e 2) o jogo como atividade coletiva, em que os participantes atuam em conjunto, colaborando ou competindo em condições de equidade.

Um exemplo que ilustra essa dinâmica é a Torre de Hanói, um jogo que pode ser adaptado tanto para desafios individuais quanto para atividades em grupo. Quando utilizado individualmente, o aluno é desafiado a resolver o problema de mover discos entre hastes seguindo regras específicas, desenvolvendo habilidades como raciocínio lógico e planejamento estratégico. Já em sua versão coletiva, os estudantes podem trabalhar em equipe, discutindo estratégias e tomando decisões conjuntas, o que estimula a colaboração e a comunicação.

Desse modo, creio que os jogos coletivos, como a Torre de Hanói em grupo, favorecem não apenas a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também o desenvolvimento de habilidades sociais, como trabalho em equipe e comunicação. A ausência de jogos individuais justifica-se pelo fato de o Laboratório de Matemática ser um espaço que privilegia a interação e a troca de ideias entre os alunos. No entanto, reconhecemos que os jogos individuais também têm seu valor e podem ser incorporados quando necessário, como na versão solo da Torre de Hanói.

Assim, ao integrar jogos ao Laboratório de Matemática, buscamos não apenas facilitar a assimilação dos conteúdos, mas também contribuir para o desenvolvimento global dos estudantes, preparando-os para desafios acadêmicos e sociais de forma mais confiante. Verificou-se também que as metodologias ativas por meio dos jogos e brincadeiras desempenham um papel crucial no ensino de matemática ao tornar o processo educativo mais atrativo, significativo e eficaz. Ao proporcionar uma experiência educacional envolvente e interativa, essas atividades contribuem para o desenvolvimento integral dos alunos em relação aos conteúdos matemáticos complexos. Sublinhou-se que as metodologias ativas dos jogos e brincadeiras desempenham um papel crucial no ensino de matemática. Ao tornar o aprendizado mais dinâmico, estimulante e interativo, essas atividades contribuem para uma melhor compreensão e apreciação de importantes conceitos matemáticos, preparando os alunos para enfrentar desafios acadêmicos futuros com confiança.

Por fim, este trabalho defende a implementação de políticas públicas municipais voltadas à construção e equipamento de laboratórios didáticos escolares. A criação desses espaços, aliada à formação continuada de professores, é essencial para garantir que os alunos tenham acesso a metodologias ativas e recursos pedagógicos inovadores, como os apresentados neste estudo. A estruturação de laboratórios de matemática nas escolas públicas pode contribuir significativamente para a melhoria do ensino e da aprendizagem, especialmente em regiões com baixos índices de desempenho educacional, como os municípios de São Gonçalo do Gurguéia e Gilbués, no Piauí. Acreditamos que essa iniciativa, alinhada às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pode transformar a realidade educacional, preparando os estudantes para os desafios do século XXI.

Nesse sentido, o produto educacional desenvolvido — *“Laboratório de Matemática: Um Espaço para Aprender e Transformar”* — representa uma proposta prática para tornar essa ideia realidade nas escolas. Ele apresenta um conjunto de atividades baseadas em materiais concretos, sugestões de organização do espaço físico, orientações pedagógicas e estratégias que possibilitam ao professor aplicar metodologias ativas de forma acessível e contextualizada. Voltado à realidade das redes públicas de ensino, o material busca servir como um guia para gestores e educadores que desejam implantar ou aprimorar o uso do Laboratório de Matemática como ferramenta de transformação do ensino.

Para futuros trabalhos, propõe-se a identificação dessas concepções em pesquisa de natureza empírica, por exemplo, aplicando a técnica de coleta de dados ‘observação direta’ em aulas de matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental por professores que também valorizam e organizam a prática pedagógica a partir da junção ludicidade e ensino de Matemática no Laboratório de Matemática.

Além disso, considera-se pertinente que pesquisas futuras possam investigar, de forma empírica, até que ponto a ausência de espaços como o Laboratório de Matemática — somada à escassez de recursos e metodologias inovadoras — interfere diretamente na atuação dos professores e, consequentemente, na aprendizagem dos educandos. Essa hipótese, já levantada ao longo deste trabalho, pode ser explorada a partir de estudos de campo que observem e comparem diferentes contextos escolares, permitindo aprofundar a compreensão sobre os impactos reais dessa carência estrutural no processo de ensino da Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES-MAZZOTI, A. J. A revisão de bibliografia. In: **BIANCHETTI, L.; MACHADO, A. M. N.** (orgs.). *A bússola do escrever*. Florianópolis: Cortez; Editora da UFSC, 2006.

ARAÚJO, V. R. N. Interferências pedagógicas na superação de dificuldades da aprendizagem matemática. *UNIrevista*, v. 1, n. 2, abr. 2006.

BENINI, M. B. C. *Laboratório de ensino de matemática e laboratório de ensino de ciências: uma comparação*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006

BIGODE, A. J. L. Base, que base? O caso da Matemática. In: **CÁSSIO, F.; CATELLI JR, R.** (orgs.). *Educação é a base? 23 educadores discutem a BNCC.* São Paulo: Ação Educativa, 2019. v. 1, p. 123-143.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 27 jul. 2024.

BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática.* 2. ed. São Paulo: IME-SP, 1996.

CASTRO, E. R.; NUNES, J. B. C.; NASCIMENTO, F. J.; RABELO, F. S. A revisão de literatura em teses de doutorado: análise de condução e redação. *Série-Estudos*, Campo Grande, MS, v. 25, n. 54, p. 27-47, maio/ago. 2020.

FIGUEREDO, M. S. A importância do lúdico no ensino de matemática: uma amostra da concepção de professores do Ensino Fundamental II na cidade de Pombal-PB. 2011. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, Pombal, 2011.

FREITAS, J. R. A. O ensino de matemática à luz da BNCC: uma construção afetiva, pedagógica e prática para o professor de matemática do ensino fundamental II. 2021. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT), Instituto de Engenharia e Desenvolvimento Sustentável – IEDS, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2021.

FREIRE, P. *Pedagogia do oprimido.* 17. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.* São Paulo: Paz e Terra, 2004.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. *Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume 2.* 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

GONDIM, R. S. O ensino da matemática na perspectiva da cultura maker: a aplicação de sequências didáticas de abordagem construcionista nos anos iniciais do ensino fundamental. 2023. 167 f. Dissertação (Mestrado em Tecnologia Educacional) – Instituto UFC Virtual, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2023.

LORENZATO, S. *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.* 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

LARA, I. C. M. O jogo como estratégia de ensino de 5ª a 8ª série. In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – ENEM**, 8., 2004. Anais [...]. Minicurso GT 2 – Educação Matemática nas Séries Finais do Ensino Fundamental, 2004.

RAMOS, C. A. (2021). "Laboratório de ensino de matemática: espaço facilitador e promotor da aprendizagem." Dissertação de Mestrado em ensino de ciências exatas. Universidade Federal de São Carlos – UFSCar.

Apêndice - A

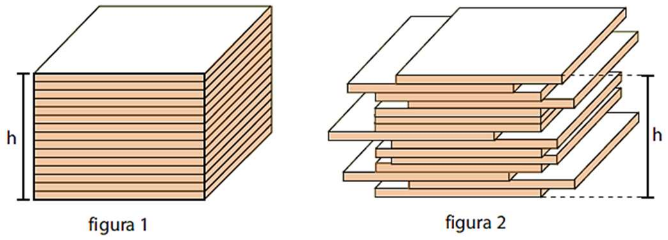
Princípio de Cavalieri

Podemos calcular o volume de um sólido utilizando o Princípio de Cavalieri. Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647) foi um matemático italiano que se dedicou ao estudo dos sólidos geométricos. Algo que o intrigava era o volume desses sólidos. Esse conteúdo é contemplado na BNCC cuja habilidade é EF08MA18: Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.

Antes de enunciar o princípio de Cavalieri, vamos apresentar um exemplo para que ele possa ser compreendido de maneira intuitiva.

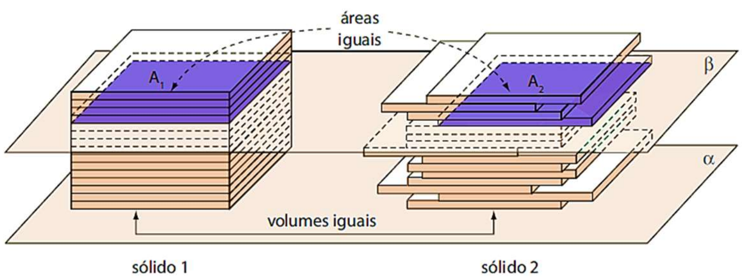
Consideremos um conjunto de chapas retangulares, todas com as mesmas dimensões e, consequentemente, com o mesmo volume.

Imagine que elas foram usadas para formar duas pilhas diferentes, cada qual com a mesma quantidade de chapas, como mostram as figuras 1 e 2:

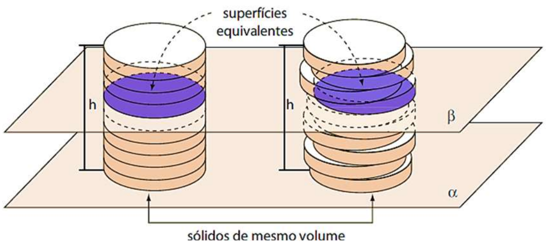


Veja que, em ambas as pilhas, a quantidade de espaço ocupado pela coleção de chapas é a mesma, isto é, os sólidos das figuras 1 e 2 têm o mesmo volume.

Imagine agora esses mesmos sólidos com bases contidas num mesmo plano α e situados num mesmo semiespaço dos determinados por α. Qualquer plano β paralelo a α e secante aos sólidos 1 e 2 determina nesses sólidos superfícies equivalentes, ou seja, de áreas iguais.

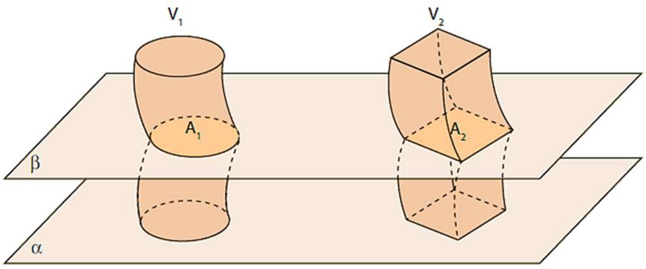


A mesma ideia pode ser estendida para duas pilhas, cada qual com a mesma quantidade de moedas de dimensões iguais:



O que acabamos de apresentar de maneira intuitiva é o que chamamos princípio de Cavalieri.

Sejam dois sólidos distintos. Se todos os planos numa certa direção ao interceptarem esses sólidos determinam secções (indivisíveis) de áreas iguais, então os sólidos têm mesmo volume.



$$A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$$

Em geral, sua aplicação deve ser feita de modo que os dois sólidos com bases em um mesmo plano, paralelo àquele em que estarão as seções de áreas iguais.