Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB
Campus Reitor Edgar Santos
Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Matheus Costa de Souza

Uma proposta de ensino da soma de Riemann para o ensino médio pelo olhar do modelo de Van Hiele.

Barreiras/BA

2024

Matheus Costa de Souza

Uma proposta de ensino da soma de Riemann para o ensino médio pelo olhar do modelo de Van Hiele.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal do Oeste da Bahia, como requisito parcial para a obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Priscila Santos Ramos

Coorientador: Prof. Dr. Fábio Nunes da Silva

Barreiras/BA

2024

FICHA CATALOGRÁFICA

S729 Souza, Matheus Costa de.
Uma proposta de ensino da soma de Riemann para o ensino médio pelo olhar do modelo de Van Hiele. / Matheus Costa de Souza. – 2024.

81 f.: il.

Orientador: Prof. Dra. Priscila Santos Ramos
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das tecnologias – CCET. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

1. Pensamento geométrico. 2. Van Hiele. 3. Cálculo de áreas. 4. Soma de Riemann. 5.Tarefas. I. Ramos, Priscila Santos. II. Universidade Federal do Oeste da Bahia – Centro das Ciências Exatas e das tecnologias. III. Título.

CDD 510

Biblioteca Universitária de Barreiras – UFOB

Matheus Costa de Souza

Uma proposta de ensino da soma de Riemann para o ensino médio pelo olhar do modelo de Van Hiele.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal do Oeste da Bahia, como requisito parcial para a obtenção de título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 14/10/2024

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
PRISCILA SANTOS RAMOS
Data: 27/11/2024 15:53:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa Dra Priscila Santos Ramos
Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB

Documento assinado digitalmente
LENIEDSON GUEDES DOS SANTOS
Data: 29/11/2024 10:58:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Leniedson Guedes dos Santos
Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB

Documento assinado digitalmente
WELTON ALVES DE MENEZES
Data: 27/11/2024 16:03:37-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Welton Alves de Menezes
Universidade Federal Fluminense - UFF

À minha amada mãe, Maria Enecí Costa, dedico.

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida, pela oportunidade de progresso neste plano, por todas as bençãos e cuidados.

À minha amada mãe, Maria Enecí Costa, que sempre me apoiou em minha jornada acadêmica, me incentivou, cuidou e não mediu esforços para que eu alcançasse meus objetivos.

Ao meu irmão, Horlando Loreno, pelo incentivo e companheirismo.

Ao meu amigo, Jeremias Marques, por todo o apoio, incentivo e colaboração nessa jornada de pós-graduação.

À minha orientadora e coorientador, respectivamente, professores Priscila Santos e Fábio Nunes, pela paciência, compreensão e orientação em todas as fases da construção desse trabalho.

Aos meus colegas de curso, por todos os momentos de partilha, de união, de aprendizado, de auxílio mútuo e de descontração durante esses anos.

A todos os professores do PROFMAT - UFOB, em especial aos que ministraram aulas para minha turma, pelo conhecimento partilhado.

Aos meus amigos e colegas de trabalho, principalmente os mais próximos, pelo apoio nessa jornada.

Aos meus alunos que, mesmo de forma indireta, me incentivaram a me aperfeiçoar em minha prática docente.

A todos aqueles que virem utilidade neste trabalho, meus sinceros agradecimentos.

"O homem não é nada além daquilo que a educação faz dele.”

Immanuel Kant

Resumo

Motivados pela discussão do ensino e aprendizagem do cálculo de áreas no ensino médio, este trabalho estuda a proposta da soma de Riemann para calcular a área de uma região não regular delimitada por curvas e apresenta uma estratégia para ensiná-la no ensino médio. A ideia geométrica que constitui a soma de Riemann implicou na escolha do modelo do pensamento geométrico de Van Hiele como base teórica para instigar e aprimorar a conexão histórica que envolve o cálculo de áreas e a geometria. Esta pesquisa contribui para o ensino do cálculo de áreas em dois aspectos: propõe uma adaptação dos níveis de aprendizagem do modelo de Van Hiele para a soma de Riemann e apresenta tarefas como recurso a ser desenvolvido no ensino médio.

Palavras-chave: Pensamento geométrico. Van Hiele. Cálculo de áreas. Soma de Riemann. Tarefas.

Abstract

Motivated by discussions on teaching and learning how to calculate areas in high school, this work studies the proposal of using the Riemann sum to calculate the area of an irregular region bounded by curves and presents a strategy for teaching it in high school. The geometric idea that constitutes the Riemann sum implied the choice of Van Hiele's model of geometric thinking as a theoretical basis for instigating and improving the historical connection involving the calculation of areas and geometry. This research contributes to the teaching of area calculation in two respects: it proposes an adaptation of the learning levels of Van Hiele's model for the Riemann sum and presents tasks as a resource to be developed in high school.

Keywords: Geometric thinking. Van Hiele. Area calculation. Riemann sum. Tasks.

Lista de ilustrações

Lista de quadros

Lista de abreviaturas e siglas

Bolema - Boletim de Educação Matemática

EJA - Ensino de Jovens e Adultos

IFBA - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

PROFMAT - Mestrado Nacional Profissional em Matemática em Rede Nacional

SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica

UFOB - Universidade Federal do Oeste da Bahia,

UNEB - Universidade Estadual da Bahia

Sumário

Introdução

A compreensão do conceito de cálculo de áreas exige o domínio de conceitos matemáticos preliminares, como por exemplo, soma, multiplicação e divisão dos números reais e geometria. Este trabalho é uma contribuição na linha de pesquisa “Matemática na educação básica e suas tecnologias”, cujo objetivo é apresentar uma proposta de ensino e aprendizagem para o cálculo de áreas de uma região não regular delimitada sob curvas para o ensino médio. Para isto, além das operações básicas dos números reais e dos conhecimentos geométricos, é necessário conhecimentos sobre plano cartesiano, e função.

Essa abordagem é especialmente útil para os estudantes do ensino médio, que frequentemente precisam entender e aplicar esses conceitos em problemas de física, como na determinação da distância percorrida em situações onde a velocidade varia ao longo do tempo, e em outras aplicações, como o estudo de gases.

Em virtude de desenvolver o objetivo deste trabalho, nos apropriamos de um modelo geométrico e de uma teoria mais geral para o cálculo de áreas, a saber, o modelo do pensamento geométrico de Van Hiele e a teoria da soma de Riemann, respectivamente.

O modelo do pensamento geométrico de Van Hiele é tema de investigação de muitos pesquisadores interessados em compreender o processo de ensino e aprendizagem em geometria e contribuir para a consolidação do estudo da geometria. Na base de dissertações dos estudantes do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) encontra-se, atualmente, 22 registros de trabalhos que discutem o modelo geométrico de Van Hiele. De modo geral, este modelo enfatiza cinco níveis de aprendizagem e considera que o aprendizado geométrico do estudante ocorre de maneira sequencial, não sendo possível saltar níveis.

A soma de Riemann, proposta pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann, propõe o cálculo de área de uma região não regular delimitada por curvas considerando as seguintes etapas: particionar a região considerada em retângulos (ou outras formas poligonais) de mesmo tamanho, intuir que quanto maior o número de retângulos melhor é a aproximação da área dessa região e concluir que a área da região considerada é aproximadamente a soma dos retângulos que a aproximam.

De posse dessas teorias e considerando o conceito de cálculo de áreas, este trabalho explora as ideias intuitivas e geométricas que envolvem a soma de Riemann e propõe uma adaptação do modelo de Van Hiele para o ensino e aprendizagem do cálculo de áreas de regiões não regulares delimitadas por curvas e apresenta tarefas para auxiliar os professores do ensino médio nessa perspectiva.

Este trabalho é estruturado em três capítulos, além desta introdução e considerações finais. O capitulo 1 explora o modelo do pensamento geométrico de Van Hiele: apresenta como ele surgiu, quais as motivações, sua estrutura e como está presente auxiliando o processo de ensino e aprendizagem desde quando surgiu em outros países até chegar ao Brasil.

O capítulo 2 aborda o cálculo de áreas. Apresenta um breve contexto histórico e expõe a forma que a soma de Riemann está presente em três livros cálculo, obras estas que fazem parte da formação básica de professores. Justificamos nossa abordagem no ensino médio pela necessidade que os estudantes têm de determinar áreas sob curvas, principalmente em problemas relacionados ao componente de física.

Por fim, no capítulo 3, as ideias discutidas nos capítulos 1 e 2 são conectadas e é apresentada uma proposta de adaptação dos níveis de Van Hiele para o estudo de áreas sob curvas, bem como três tarefas sob a luz dessa teoria, usando uma sequência didática.

1 O modelo do pensamento geométrico de Van Hiele

Neste capítulo, é apresentado o modelo do pensamento geométrico de Van Hiele para o ensino e aprendizagem de geometria, evidenciando aspectos históricos, os níveis do pensamento geométrico, as fases de aprendizagem e as propriedades.

1.1 Contexto histórico

O modelo do pensamento geométrico de Van Hiele foi proposto pelo casal Pierre Marie Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof a partir de seus estudos sobre o pensamento geométrico, tema de interesse de ambos em seus programas de doutrorado, concluídos na Universidade de Utrecht, Países Baixos em 1957. De modo geral, o modelo enfatiza níveis hierárquicos do pensamento geométrico e fases de aprendizagem como proposta de ensino e aprendizagem para a geometria (SILVA; CANDIDO, 2007). Nas seções seguintes o modelo é apresentado detalhadamente.

Segundo Walle (2009), apesar do trabalho dos Van Hiele ter chamado muita atenção na antiga União Soviética, por quase duas décadas ficou praticamente desconhecido nos Estado Unidos e na maioria dos países ocidentais. De acordo com o próprio Van Hiele (1986), sua teoria foi introduzida nos Estados Unidos somente em 1974, em uma palestra intitulada "Some Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry (Alguns avanços na psicologia do aprendizado e do ensino de geometria)", proferida por Izaak Wirszup[1] na Sessão Geral de Encerramento do Conselho Nacional de Professores de Matemática.

A partir disso, cresce o interesse da comunidade científica americana pelo trabalho de pesquisa do casal Van Hiele, resultando na publicação do livro "Structure e Insight: A Theory of Mathematics Education (Estrutura e Insight: Uma Teoria da Educação Matemática)" em 1986, no qual Pierre Van Hiele forneceu mais detalhes acerca de seu modelo de aprendizagem, já que Dina Van Hiele faleceu em 1959, pouco tempo depois de conclusão de sua tese (CROWLEY, 1987).

Citamos aqui três trabalhos de pesquisa realizados na década de 70 que contribuiram para a difusão da teoria dos Van Hiele nos Estados Unidos. Segundo Silva e Candido (2007), o objetivo dos pesquisadores era encontrar soluções para os problemas com o ensino

[1] Professor da Universidade de Chicago, desempenhou um papel importante ao chamar atenção dos EUA sobre a importância de melhorar a educação matemática. Contribuiu na difusão da matemática ao traduzir diversos textos matemáticos de outros países. Colaborou também no desenvolvimento do currículo de matemática dos EUA.

de geometria na escola secundária, averiguando se de fato o modelo era válido e quais os benefícios de sua aplicação na época. Assim, os projetos ficaram conhecidos como Brooklin, Chicado e Oregon, independentes entre si. No quadro 1, a seguir, apresentamos a contribuição de cada trabalho de pesquisa

Quadro 1 – Trabalhos de pesquisa que investigaram o modelo de Van Hiele na década de 70

Projeto	**Descrição**
Brooklin	Como maior contribuição, traduziu muitos dos textos de Van Hiele os textos para o inglês e documentou, possibilitando difusão do modelo; Buscou instruir professores a avaliar em que níveis estavam seus alunos seguindo o modelo e o nível em que se encontravam os materiais didáticos por eles utilizados.
Chicago	Avaliou 2.700 estudantes do ensino secundário utilizando alguns testes de múltipla escolha, permitindo comparar o nível de Van Hiele em que os alunos se encontravam antes e depois do curso de geometria. Tais testes ganharam notoriedade devido a sua facilidade de aplicação, mas também muitas criticas de pesquisadores que supunham não ser eficiente avaliar níveis de raciocínio por meio de testes de múltipla escolha.
Oregon	Abordando o assuntos referentes a triângulos e quadriláteros, envolveu 48 estudantes da escola básica que foram avaliados por meio de entrevistas, objetivando verificar os níveis de raciocínio nesse tópico de geometria.

Fonte: Silva e Candido (2007)

No Brasil, conforme a professora e pesquisadora Ana Maria Kaleff , até a década de 1990 o Modelo de Van Hiele não havia sido divulgado e pesquisado no Brasil como deveria. Kaleff et al. (1994) publicou um artigo intitulado “Desenvolvimento do Pensamento Geométrico - O Modelo de Van Hiele”, publicado em 1994 no Boletim de Educação Matemática - Bolema, onde chamava a atenção da sociedade acadêmica da época para a importância e aplicabilidade do modelo de Van Hiele. Anterior a esse ano, raras exceções, como um artigo publicado pela Professora Maria Laura M. L. Lopes no Boletim nº 15 do GEPEM-RJ, em 1983, abordavam a teoria de Van Hiele. As características do Modelo foram citadas pelo Professor Nílson José Machado no livro “Matemática e Língua Materna” da Editora Cortez, publicado em 1990, e uma aplicação do Modelo foi publicada pelo Projeto Fundão, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, em 1992, numa apostila intitulada “Proposta de Geometria segundo a teoria de Van Hiele.

Esta pesquisa apresenta o estudo do modelo de Van Hiele dividido em três partes. A saber, níveis do pensamento geométrico, propriedades dos do pensamento geométrico e as fases de aprendizagem. Na seção seguinte descrevemos os níveis do pensamento geométrico do modelo de Van Hiele, apresentamos suas principais características e exemplificamos.

1.2 Níveis de pensamento geométrico

Para Walle (2009), um dos aspectos mais distintos do modelo de Van Hiele refere-se aos níveis do pensamento geométrico ou níveis de aprendizagem geométrica. Tais níveis mostram como é o processo de pensamento do estudante em geometria, não se concentrando apenas na quantidade de conhecimento geométrico que uma pessoa possui, mas sim na maneira como ela pensa sobre esse conhecimento e nas ideias geométricas com as quais ela se envolve em cada nível.

O modelo apresenta cinco níveis do pensamento geométrico. São eles: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. Nas primeiras versões do trabalho, era explicado que as pessoas desenvolveriam o pensamento geométrico de acordo com níveis enumerados de 0 a 4, justificando o fato de que em algumas literatura e trabalhos de outros autores podem ser encontrados essa progressão do nível zero até o nível 4. Entretanto, com a publicação da obra de 1986, Pierre atendeu às críticas dos pesquisadores sobre a relevância do nível zero, no qual se enquadra a maioria dos alunos que iniciam o Ensino Médio, e assim foi proposto uma simplificação do modelo original, e os níveis foram enumerados de 1 a 5, que adotaremos nesse trabalho. A seguir descrevemos cada um dos níveis, conforme Walle (2009)

Nível 1 (Reconhecimento ou Visualização): os estudantes são capazes de reconhecer e nomear as figuras geométricas, mas o fazem apenas pela sua “aparência”, não conseguindo apropriar-se das suas propriedades. Neste nível, os estudantes discutem as propriedades pela observação visual das figuras.

Nível 2 (Análise): os estudantes no nível de análise conseguem agrupar as formas em classes a partir das suas propriedades. Ou seja, uma forma pertence à classe A se ela tiver propriedades dessa classe. Entretanto, os estudantes desse nível não estabelecem relações entre as classes

Nível 3 (Dedução informal): neste nível, os estudantes estabelecem relações entre as classes com base no conhecimento das suas propriedades e, consequentemente, utilizam argumentação lógica não formal. Pode-se dizer que neste nível os estudantes estão confortáveis para acompanhar as deduções intuitivas, porém lhes faltam conhecimentos axiomáticos e da lógica formal para a compreensão das deduções formais.

Nível 4 (Dedução Formal): a característica mais marcante dos estudantes desse nível é reconhecer a necessidade de conhecer objetos formais, como os axiomas, definições e teoremas. Neste nível os estudantes apresentam argumentações pautadas mais na lógica do que na intuição.

Nível 5 (Rigor): os estudantes que se encontram neste nível comprende e relaciona bem sistemas axiomáticos e, portanto, sentem-se seguros para estudar problemas mais abstratos.

A fim de explorar esses níveis e a sua compreensão, apresentamos um exemplo. Considere que a figura a seguir seja disponibilizada para uma turma de estudantes do ensino médio e que sejam desafiados a destacar seu conhecimento (sobre formas geométricas) geométrico a partir da observação da imagem.

Figura 1 – Discussão dos níveis do pensamento geométrico

Fonte: http://artesplasticasbrasileiras.arteblog.com.br
Tarsila do Amaral. A gare, 1925.

Inferimos que o estudante que pensa geometria no nível 1 destacará apenas as formas geométricas mais conhecidas em suas experiências em sala de aula e em outros espaços, como por exemplo, triângulos, quadrados, retângulos e círculos. O estudante que pensa nível 2, agrupará as formas que aparecem na figura em classes, por exemplo, a classe dos triângulos, dos quadrados e assim por diante. Este estudante formará as classes a partir do seu conhecimento sobre as propriedades das formas, porém ele não percebe a relação de subclasses. Por exemplo, ele não percebe que a classe dos triângulos equiláteros, contêm a classe dos triângulos isósceles. O estudante que pensa nível 3, começará a fazer relações com as propriedades e classes. Como por exemplo, se o triângulo é equilátero, então ele é isósceles, ou ainda, se a forma é um quadrado, então ele tem de ser um retângulo. Neste nível, o estudante considerará a necessidade do argumento lógico. O estudante que pensa nível 4, fará conjecturas a partir do seu conhecimento das propriedades das formas e organização das classes. Este estudante, terá o interesse de provar que "as diagonais do quadrado são perpendiculares e congruentes" por meio de argumentos dedutivos, por exemplo. O estudante que pensa nível 5 considerará as formas apresentadas na figura, poderá listar suas propriedades, citar as relações entre as classes, discutir axiomas e teoremas relacionados às formas formas geométricas que ele vê.

O modelo de Van Hiele aponta o papel formador do professor como crucial para possibilitar ao estudante sua escalada sequencial pelos níveis do pensamento geométrico. Isto é discutido nas "fases de aprendizagem" do modelo, as quais são apresentadas na seção a seguir.

1.3 As Fases de Aprendizagem

O modelo estabelece cinco fases de aprendizagem, as quais ressaltam como o professor deve posicionar-se perante o processo de aprendizagem dos estudantes. Tais fases são:

Informação: a fase inicial compreende a obtenção de informações por meio de questionamentos, visando identificar o nível de conhecimento dos estudantes. O professor identifica os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o assunto e os alunos compreendem a direção que os estudos tomarão.

Orientação Dirigida: geralmente, são abordadas questões mais simples que resultam em respostas diretas. O intuito é proporcionar ao estudante uma identificação com o conteúdo abordado. Nesta fase, o desenvolvimento do tema de estudo é um pouco mais aprofundado, buscando familiarizar o estudante com a estrutura do nível em questão.

Explicação ou explicitação: o papel do professor deve ser o de mediador. Os estudantes articulam e adaptam suas perspectivas em relação às estruturas que observaram, com em suas experiências anteriores, e o professor cuida para que linguagem técnica correta seja desenvolvida. Os alunos trocam opiniões sobre coisas que descobriram nas fases anteriores.

Orientação livre: pretende-se que os estudantes busquem soluções próprias, procurando mais de uma forma de resolver o problema ou responder às atividades propostas.

Integração: o professor resume o que foi estudado e auxilia os estudantes trazendo em pauta uma visão geral daquilo que foi estudado. Não é mais o momento para novas ideias ou ideias discrepantes do que as já trabalhadas.

Segundo Crowley (1987), para os Van Hiele, a instrução desenvolvida de acordo com essa sequência promove a aquisição de um nível. Portanto, após completar a quinta fase, os estudantes devem estar preparados para avançar para o próximo nível, onde passarão novamente por todas as cinco fases, desta vez com a inclusão de novas atividades. Há de salientar que não é necessário passar por todas as fases ao se trabalhar em um determinado nível.

Observando este exemplo, nota-se que existem características do pensamento geométrico que são comuns para cada nível. A seção a seguir é dedicada a esta discussão.

1.4 Propriedades dos níveis

Para auxiliar na compreensão do modelo de Van Hiele e servindo como fundamento para uso adequado do modelo, algumas propriedades gerais foram observadas e merecem ser destacadas. Listamos cinco, a saber:

Sequencialidade - Há uma hierarquização entre os níveis de pensamento. Um aluno precisa dominar completamente um nível antes de avançar para o próximo, sem saltar etapas. Hiele (1986, p. 51) afirma que "as formas de pensar no nível básico, no segundo e no terceiro nível têm um arranjo hierárquico. O pensamento no segundo nível não é possível sem o do nível básico; o pensamento no terceiro nível não é possível sem o pensamento no segundo."

Linguagem Específica - Em cada nível, há uma linguagem específica associada ao tipo de pensamento envolvido. Por exemplo, no início, os alunos podem descrever formas geométricas com base em características visuais simples, mas, conforme avançam, começam a usar termos técnicos e expressar conceitos de maneira mais abstrata. A linguagem usada para descrever os conceitos muda significativamente à medida que o aluno progride nos níveis, o que pode resultar em diferentes interpretações de um mesmo termo dependendo do nível de compreensão do aluno.

Progressão – A transição de um nível inferior para um nível superior não ocorre de forma automática, mas exige a criação de condições adequadas de ensino. Essa mudança não está ligada à idade do indivíduo, mas sim à natureza do conteúdo e dos métodos de instrução aos quais o aluno é exposto.

Evolução Natural - Os conceitos internos a um nível tornam-se os objetos de estudo no nível seguinte. Por exemplo, enquanto um aluno no nível 0 reconhece apenas a forma de uma figura, no nível 1 ele passa a analisar as propriedades e componentes dessa forma.

Localidade - O nível de raciocínio de um aluno pode variar em diferentes áreas do conhecimento. Assim, um aluno pode estar em um nível mais alto em um conceito e em um nível mais baixo em outro, dependendo do campo específico estudado. Além disso, embora originalmente desenvolvido para o ensino e aprendizagem de geometria, o modelo pode ser estendido a outras áreas do conhecimento.

Essas propriedades são confirmadas por autores como Crowley (1987), Walle (2009) e Kaleff (2016) e Pastor (1993). Embora alguns utilizem terminologias diferentes ou apresentem variações em suas interpretações, todos destacam a existência dessas propriedades no modelo de Van Hiele.

Com relação à linguagem, pode ocorrer de a aprendizagem não se efetivar em muitos caso devido a inadequação desta. Por exemplo, muitas vezes professores esperam que os alunos apresentem soluções rigorosas e formais para determinados problemas, características de níveis mais avançados de pensamento, porém os alunos que ainda estão em níveis intermediários tendem a resolver esses problemas com base em exemplos práticos ou raciocínio intuitivo, o que pode gerar uma desconexão entre as expectativas do professor e as respostas oferecidas pelos alunos (PASTOR, 1993).

Outra observação que cabe destaque é o fato de que, ainda conforme Pastor (1993, p. 16), "a interpretação descontínua dos níveis não pode explicar certas situações, bastante frequentes, de alunos que raciocinam simultânea ou alternativamente em dois níveis consecutivos". A transição de um nível para outro não acontece de forma repentina; há um período de transição no qual o aluno combina elementos de raciocínio de ambos os níveis consecutivos.

É também por esse motivo que nessa proposta, como veremos no capítulo 3, que nossa tarefa não será delimitada a um só nível, mas versa a estudantes que possam estar em diferentes estágios.

Em suma, de acordo com o que foi estudado nesse capítulo, podemos dizer que os níveis têm um aspecto descritivo, as propriedades são as características do modelo com seus níveis e as fases têm um aspecto prescritivo ao professor.

O modelo de Van Hiele tem motivado muitos pesquisadores, seja no trabalho com os estudantes identificando os níveis de aprendizagem ou na formação continuada com professores no ensino do modelo e em propostas didáticas que promovam um avanço dos estudantes nos níveis de aprendizagem.

A pesquisa apresentada por Pusey et al. (2003) evidencia quais pesquisas têm sido realizadas usando o modelo de Van Hiele, compara este com outros modelos e discute as implicações do modelo de Van Hiele em sala de aula. Lanhoso (2020) usou o modelo para mensurar o nível de pensamento em que se encontravam os estudantes ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública do Paraná. Considerando o uso de tecnologias para facilitar o processo de ensino e aprendizagem de Jovens e Adultos e Silva (2021) buscou compreender as fases desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno jovem e adulto e como os conceitos geométricos devem ser abordados no processo de ensino e aprendizagem, propondo a utilização do software GeoGebra como recurso auxiliar ao ensino de Geometria Espacial na Educação de Jovens e Adultos (EJA).

No capítulo seguinte, discutimos dois conceitos chave para a compreensão e desenvolvimento deste trabalho. São eles, o cálculo de áreas e a soma de Riemann.

2 Cálculo de áreas

Este capítulo aborda o cálculo de áreas, apresenta o contexto histórico para este conceito, explora o conceito da soma de Riemann para o cálculo de áreas sob uma curva e apresenta uma breve discussão sobre o ensino do cálculo de áreas no Brasil.

2.1 O cálculo de áreas na história da matemática

Historicamente, o conceito do cálculo de áreas está intimamente ligado aos conceitos e formas geométricas. Nesta seção apresentamos algumas contribuições dos egípcios, babilônicos e gregos para a sistematização do conceito de cálculo de áreas. Usamos como principal referência o trabalho de Howard Eves, em seu livro “Introdução à história da matemática”. Nos baseamos também em outros autores, como Rogério Santos Mol, Tatiana Roque e Carl B. Boyer, todos estes tratam da história da matemática.

Os babilônicos destacaram-se na aplicação de métodos geométricos para resolver problemas cotidianos. Eles sabiam calcular áreas, especialmente em relação a figuras como retângulos, triângulos retângulos e trapézios. Em suas tábuas cuneiformes, que datam de cerca de 2000 a.C. a 1600a.C;, são registradas fórmulas para o cálculo de áreas e também de volumes. Os babilônicos também sabiam calcular a área de um círculo usando uma aproximação de π, que consideravam como 3. Também foram encontradas aproximações para $\pi = 3\frac{1}{8} = 3,125$ (MOL, 2017). Outra contribuição para o desenvolvimento do conceito de área foi a utilização de tabelas numéricas e procedimentos algorítmicos que eles já faziam uso.

Os antigos egípcios, assim como os babilônicos, já demonstravam notável habilidade em geometria prática, especialmente no que diz respeito ao cálculo de áreas. No *Papiro de Rhind*, que data aproximadamente de 1650 a.C., encontramos fórmulas usadas pelos egípcios para calcular a área de figuras geométricas, como retângulos, triângulos e trapézios. Um dos resultados mais conhecidos é a fórmula aproximada para a área do círculo, onde os egípcios usavam um valor equivalente a $(\frac{256}{81})$ para a razão entre a circunferência e o diâmetro, oferecendo um cálculo aproximado do valor de π (EVES, 2004) e (MOL, 2017). Embora os métodos usados pelos babilônicos e antigos egípcios fossem principalmente empíricos e baseados em medições práticas, eles formaram a base para a posterior sistematização do conceito de área em outras culturas matemáticas.

Tales de Mileto, que viveu no século VI a.C., é creditado como o primeiro a usar métodos geométricos dedutivos para resolver problemas[1]. Segundo Roque (2012), o cálculo

[1] todos os autores citados concordam com essa afirmação, embora Boyer e Merzbach (2019) afirme que

da altura de uma pirâmide usando a semelhança de triângulos é um de seus feitos. O teorema de Tales, que estabelece que um triângulo inscrito em uma semicircunferência é sempre retângulo, foi uma das primeiras aplicações da geometria no cálculo de áreas, em particular no estudo de triângulos e proporções.

Pitágoras, que viveu no século VI a.C., também é amplamente conhecido pelo famoso teorema que leva seu nome, o qual relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Apesar de já ser conhecido pelos babilônicos (EVES, 2004), (MOL, 2017) e (BOYER; MERZBACH, 2019), conforme indícios, esse teorema trouxe uma nova maneira de calcular áreas, além de seu impacto profundo na álgebra e na geometria. Em um triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os outros dois lados. A relação pitagórica tornou-se uma ferramenta essencial para o cálculo de áreas de triângulos e, por extensão, de outras figuras geométricas. Além disso, conforme Boyer e Merzbach (2019), os pitagóricos, influenciados por sua escola de pensamento, também fizeram contribuições ao estudo das áreas de polígonos e círculos.

Euclides, que viveu por volta de 300 a.C., é uma das figuras mais influentes da matemática grega e teve um papel fundamental na formalização das ideias relacionadas ao cálculo de áreas, especialmente em seu trabalho *Os Elementos*. Conforme Eves (2004), foi ele o responsável por sistematizar o conhecimento matemático da época, abordando de forma rigorosa as propriedades das figuras planas. Além disso, Euclides demonstrou que figuras com áreas iguais podem ser transformadas umas nas outras por meio de uma sequência de construções geométricas. Mostrou também, geometricamente, muitas das identidades algébricas conhecidas hoje, como o cubo da soma e o produto da soma pela diferença.

Ainda segundo Eves (2004), foi Antífon, um contemporâneo de Sócrates (cerca de 430 a.C.), que fez uma das mais antigas e importantes contribuições ao cálculo de áreas ao estudar a quadratura do círculo, pois ele antecipara que a área de um círculo se equipararia à área de um polígono regular quando este tivesse seus lados duplicados sucessivas vezes. Essa abordagem já contava com a semente do método de exaustão, atribuído a Eudoxo de Cnido. O método da exaustão consistia em inscrever polígonos regulares em uma figura curvilínea, como um círculo, e ir dobrando o número de lados até que a diferença entre a área da figura e a do polígono inscrito se tornasse menor do que qualquer quantidade dada.

Posteriormente, esse método foi usado por Arquimedes, no século III a.C., para calcular a quadratura da parábola, entre outras fórmulas. Mas, segundo Eves (2004), uma dúvida que pairava era como Arquimedes descobria as formulas que eram elegantemente provadas usando método da exaustão. Tal dúvida só foi compreendida após a descoberta

não há nenhum documento antigo evidenciando as demonstrações feitas por Tales de uma cópia de "O método", em Constantinopla. Trata-se de um tratado de Arquimedes enviado em forma de carta a Eratóstenes e que se encontrava perdido desde os primeiros séculos de nossa era. Esse método essencialmente consistia em dividir a região a ser analisada em várias tiras planas e suspender essas tiras em uma extremidade de uma alavanca. O equilíbrio era então estabelecido ao comparar a região desconhecida com uma figura de área ou volume conhecidos, cujo centro de gravidade também era previamente determinado.

Com o avanço da matemática no século XVII, o cálculo de áreas passou por uma grande transformação, principalmente com o desenvolvimento do cálculo integral por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Trabalhando de forma independente, estabeleceram as bases do cálculo moderno e, a partir desse momento, o cálculo de áreas de figuras complexas, especialmente sob curvas, tornou-se possível de maneira sistemática e precisa. A ideia de somas infinitesimais, que permitia calcular a área por meio de somas de retângulos cada vez menores, trouxe uma nova perspectiva sobre o conceito de área. Isso marcou um ponto de virada na história da matemática, unindo as noções geométricas com o conceito de limite, que seria central para os avanços futuros.

No século XIX, o matemático alemão Bernhard Riemann deu um passo à frente no entendimento do cálculo de áreas ao formalizar o conceito de soma de Riemann. A soma de Riemann, base para a definição moderna de integral, envolve a divisão de uma região sob uma curva em subintervalos, sobre os quais são construídos retângulos cujas alturas são dadas pelos valores da função. O limite dessas somas, conforme o número de subdivisões aumenta e a largura dos retângulos diminui, resulta no valor exato da área sob a curva. Essa abordagem matemática formalizou a ideia de integração e tornou-se uma ferramenta essencial não apenas para o cálculo de áreas, mas também para o estudo de volumes e outras grandezas físicas.

No século XX, a teoria da medida de Henri Lebesgue ampliou ainda mais o conceito de integral, permitindo o cálculo de áreas para funções mais complexas que não podiam ser tratadas adequadamente pelo método de Riemann. Essa generalização possibilitou o estudo de uma gama maior de problemas matemáticos e tornou a análise mais robusta e adaptada às necessidades da matemática moderna. A teoria de Lebesgue foi crucial para que o conceito de área pudesse ser estendido a contextos mais abstratos, envolvendo funções descontínuas e outros casos desafiadores.

2.2 Abordagens da soma de Riemann nos livros didáticos do ensino superior

Nesta seção, expomos a maneira como alguns livros de cálculo adotados em cursos de licenciatura em matemática abordam a ideia geométrica da soma de Riemann, com o objetivo de compreender como esses livros textos apresentam a informação geométrica do estudo em questão, haja vista que são essas obras usadas em parte da formação do docente do ensino básico.

Para escolha dos livros foi feita uma consulta nas ementas da disciplina de Cálculo dos cursos de licenciatura em Matemática das universidades públicas do oeste baiano: do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - IFBA, da Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB e da Universidade Estadual da Bahia - UNEB. As informações encontradas são apresentadas no quadro 2, abaixo:

Quadro 2 – Bibliografia da disciplina de cálculo do IFBA, UFOB e UNEB

Livro	**IFBA**	**UFOB**	**UNEB**
Diva Marília Flemming; Mirian Buss Gonçalves Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração – Volume A	X		X
Earl W. Swokowski Cálculo com Geometria Analítica			X
G. F. Simmons Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1		X	
Geraldo Ávila Cálculo das Funções de uma Variável – Volume 1 e/ou 2		X	X
George B. Thomas Cálculo – Volume 1		X	
Hamilton Anton Cálculo Um Novo Horizonte – Volume 1 e/ou 2		X	
Hamilton L. Guidorizzi Um Curso de Cálculo – Volume I e/ou II	X	X	X
James Stewart Cálculo – Volume 1	X	X	X
Laurence Hoffman; Gerald Bradley Cálculo: Um Curso Moderno e suas Aplicações	X		X X
Louis Leithold O Cálculo com Geometria Analítica – Volume 1	X	X	X
Mustafá A. Munem; David J. Foulis Cálculo			X
P. Boulos Cálculo Diferencial e Integral – Volume 2		X	
Ron Larson; Bruce Edwards Cálculo com Aplicações	X		
Serge Lang Cálculo: Funções de uma Variável			X

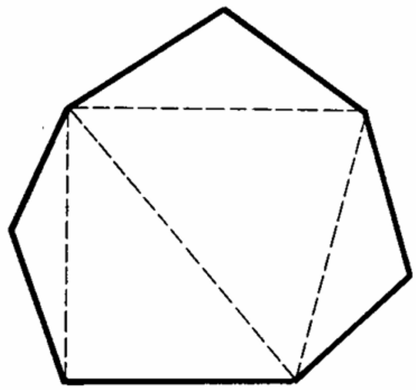
Fonte: Elaborado pelo autor

Observa-se que obras de três autores são adotados paralelamente nos cursos de cálculo das três universidades: as obras do Guidorizzi, Leithold e Stewart. Por essa razão, dedicamos as subseções que se seguem a discorrer sobre a abordagem adotada por cada autor ao tratar de áreas.

2.2.1 Livro 1 - Cálculo com Geometria analítica, de Louis Leithold

O autor inicia uma sessão para apresentar a definição de área, a partir da página 312, admitindo que o leitor tenha conhecimento prévio sobre figuras planas elementares tais como polígonos. Apresenta o conceito de área do polígono como a soma das áreas dos triângulos nos quais ele pode ser decomposto, em seguida, exibe a figura de um polígono com triângulos inscritos e questiona como calcular a área de uma região plana limitada por curvas.

Figura 2 – Área de polígono definida como a soma das áreas de triângulos

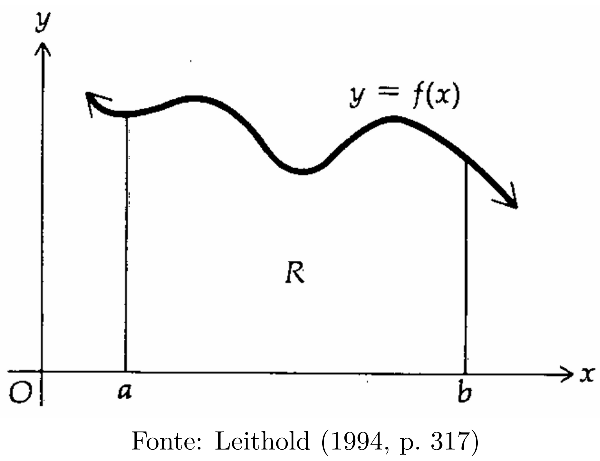


Fonte: Leithold (1994, p. 312)

Afirma que esse problema será a motivação para a definição posterior do conceito da integral definida. Observa que o conceito de área envolverá somas com muitas parcelas e usa alguns exemplos para esta proposta.

Além disso, propõe o seguinte problema: Determinar a área de uma região plana R limitada pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. conforme figura abaixo

Figura 3 – Área de uma região plana R



Fonte: Leithold (1994, p. 317)

Apresenta a proposta de determinar a área da região R de maneira semelhante ao processo usado para determinar a área de um círculo a partir do limite das áreas dos polígonos regulares inscritos quando o número de lados cresce indefinidamente.

Faz um apelo à intuição argumentando que a medida da área da região R deverá estar compreendida entre duas medidas: a medida da área de qualquer região poligonal contida em R e a medida da área da região poligonal contendo R. Estabelece uma estratégia para solução do problema proposto.

Define uma região poligonal contida em R e considera retângulos inscritos na região e define como S_n a soma das áreas dos retângulos inscritos. Em seguida mostra que quando o número de retângulos inscritos cresce, obtém-se uma melhor aproximação para a região R.

Observa que é possível usar uma estratégia análoga usando retângulos circunscritos na região R. Por fim, traz mais alguns exemplos para cálculo de áreas sob regiões curvas, propõe alguns exercícios e, após revisar os processos que foram tomados anteriormente, define a integral definida.

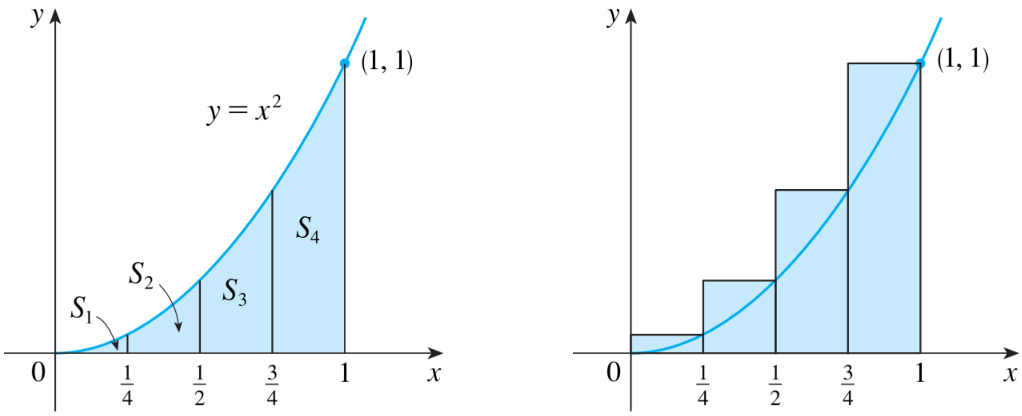
2.2.2 Livro 2 - Cálculo, de James Stewart

O autor inicia, a partir da página 326, discutindo o conceito de área. Afirma que é fácil determinar uma área para regiões com lados retos. Para retângulos, é definida como o produto do comprimento e da largura. Para triângulos, a metade do produto da base e da altura. Conclui que para qualquer polígono, basta dividir este em vários triângulos, calcular cada uma das áreas destes triângulos e somar todas elas ao final.

Afirma que a área de regiões com lados curvos não é tão simples. Que apesar de termos uma ideia intuitiva, devemos dar uma definição exata dessas áreas. Reforça que será usada uma ideia similar à realizada para determinar uma reta tangente. Informa que vai usar de retângulos para aproximar a área de uma região, tomando o limite desses retângulos à medida em que aumenta o número de lados.

Apresenta um exemplo, que consiste em usar partições regulares com retângulos, que ele denomina de faixas, para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 a região parabólica S, para auxiliar na compreensão dessa ideia, conforme figura 4 a seguir

Figura 4 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $y = x^2$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$, com 4 partições regulares



Fonte: Stewart (2013, p. 326)

Determina a área aproximada usando de 4 partições regulares. Diferencia, a partir desse exemplo, partições com extremidades esquerdas e extremidades direitas para obter, respectivamente, estimativas superiores e inferiores à área. Elucida que partições com uma maior quantidade de faixas produz melhores aproximações para a área.

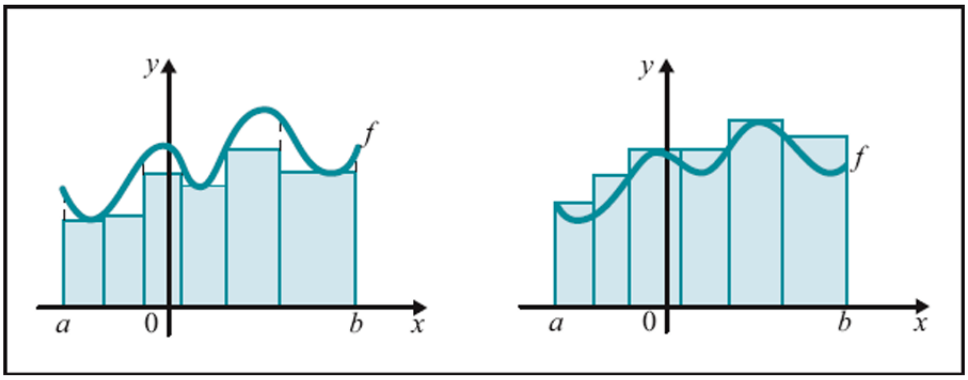
Esclarece que a quantidade de retângulos em que a região pode ser dividida pode ser tão grande quanto for necessária, fazendo com que a soma das áreas dos retângulos se aproxime cada vez mais da área da S, que é delimitada por uma curva, usando a noção de limite. Por fim, usa a Soma de Riemann para definir uma integral definida.

2.2.3 Livro 3 - Um curso de cálculo, de Luiz Guidorizzi

O autor define uma partição de um intervalo e a soma de Riemann, página 386. Usa de exemplos envolvendo somas de retângulos. Apresenta uma região A qualquer do plano que é limitada por duas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de uma função arbitrária $y = f(x)$. Considera uma partição do intervalo que contém A e usou a notação $f(\bar{c}_i)$ para designar o valor mínimo de f e $f(\bar{\bar{c}}_i)$ para representar o valor máximo.

Em seguida, discute que uma boa aproximação para o cálculo da área da região A é a soma de Riemann em aproximações subestimadas , ou seja, com retângulos cujas alturas são inferiores ao gráfico de f, ou superestimadas, cujos retângulos excedem ao gráfico de f.

Figura 5 – Aproximação de área sob uma curva genérica



Fonte: Guidorizzi (2018, p. 400)

A figura acima mostra que o comprimento da base dos retângulos não precisam ser iguais, apesar de facilitarem os cálculos quando são.

Todos os livros citados apresentam a soma de Riemann como uma maneira organizada de aproximar a área da região R (denominada S e A, respectivamente, nos livros 2 e 3) delimitada pelo gráfico de uma função não negativa $y = f(x)$ e pelas retas, $y = 0$, $x = a$ e $x = b$ com a e b ponto no domínio de f. A organização é baseada em conceitos elementares da geometria plana, especificamente, áreas de retângulos, juntamente com as informações que definem a função, como a lei de formação, o domínio e a imagem.

O resgaste do retângulo para a construção da soma Riemann foi feito a partir da observação de que, em retângulos, onde um dos lados é dado pelo segmento definido pelos pontos $A_i = (x_{i-1}, 0)$ e $B_i = (x_i, 0)$, onde $[x_{i-1}, x_i]$ é um subconjunto do domínio de f e o outro lado não paralelo a este é o segmento dado pelos pontos $C_i = (x_i, f(c_i))$ e $D_i = (x_{i-1}, f(c_i))$, sendo c_i pertence ao intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Assim, cada segmento C_iD_i é paralelo ao eixo das ordenadas, isto é, os retângulos $A_iB_iC_iD_i$ são construídos a partir de informações da função f. Dessa maneira, tomando o conjunto $\{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ de forma que $x_{i-1} < x_i$, uma aproximação para área da região R delimitada pelo gráfico de uma função não negativa $y = f(x)$ e pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$ pode ser dada pela soma das áreas dos retângulos $R_i = A_iB_iC_iD_i$, ou seja,

$$\text{Área}(R) \approx \text{Área}(R_1) + \text{Área}(R_2) + \cdots + \text{Área}(R_{n-1}) + \text{Área}(R_n)$$

Observando que, $\text{Área}(R_i) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ e tomando $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$, isto é, $\text{Área}(R_i) = f(c_i)\Delta x_i$. Daí,

$$\text{Área}(R) \approx f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(c_n)\Delta x_n.$$

Os livros citados acima utilizam da notação de somatório para simplificar as escrita da soma de um número n de parcelas. Na referida notação, a soma dos n números reais $\{f(c_1)\Delta x_1, f(c_2)\Delta x_2, \cdots, f(c_{n-1})\Delta x_{n-1}, f(c_n)\Delta x_n\}$, que representam ás áreas dos retângulos construídos, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\text{Área}(R) \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Em relação a escolha de c_i os livros citados, inicialmente estes apresentam a abordagem tomando c_i como máximo (aproximação por excesso) ou mínimo (aproximação por falta), da função no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e concluem com a definição de soma de Riemann com c_i sendo qualquer elemento do intervalo. Também é comum utilizar aproximação a *esquerda* quando $c_i = x_{i-1}$ e aproximação a *direita* quando $c_i = x_i$. Observa-se que, todas as escolhas para c_i trata-se de um caso particular da soma de Riemann. Usaremos no Capítulo 3, a noção de aproximação a direita e a esquerda para propor as tarefas.

Observa-se também que para a construção de exemplos é comum tomar Δx_i constante igual a $\dfrac{b-a}{n}$, o que é denominado partição regular do intervalo $[a, b]$ (também usaremos no Capítulo 3 a noção de partição regular). Assim,

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}, \quad \ldots, \quad x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}.$$

A subseção a seguir aborda alguns aspectos da presença do ensino do cálculo de áreas no Brasil.

2.3 O ensino do cálculo de áreas no Brasil

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), documento normativo que define as aprendizagens que devem ser desenvolvidas pelos estudantes ao longo da Educação Básica brasileira, estruturada em competências e habilidades para cada etapa do ensino. As competências específicas visam ao desenvolvimento do pensamento crítico, a resolução de problemas e a aplicação de conceitos matemáticos em diferentes contextos, e as habilidades são descrições dos conhecimentos (ou ações) que os alunos devem dominar para atingir essas competências. Estas habilidades detalham o que se espera que os estudantes saibam e sejam capazes de fazer ao longo de sua trajetória escolar.

Na etapa do Ensino Médio, as habilidades relacionadas com o cálculo de áreas são descritas a seguir.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

Nessa notação, “EM” significa que é uma habilidade própria do ensino médio; 13 que é válida para as série de 1ª a 3ª, ou seja, para todas as etapas do ensino médio; “MAT” indica o componente curricular matemática; os últimos três algarismos indicam o número sequencial que identifica o objetivo específico dentro desse componente.

As habilidades (EM13MAT307) e (EM13MAT309) estão relacionadas à competência 3, que estabelece: utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Já (EM13MAT506) está relacionada à competência 5, que especifica: investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Essas habilidades evidenciam a matemática do cotidiano com o cálculo de áreas e a relação existente entre o cálculo de áreas e o conhecimento geométrico. Além disso, permitem discutir o quanto o aprofundamento dos conhecimentos geométricos pode possibilitar maior segurança e facilidade no cálculo de áreas.

E com relação ao processo de ensino-aprendizagem de área no ensino básico, alguns estudos buscam auxiliar professores e estudantes nessa jornada. Por exemplo, Ribeiro (2022) discute estratégias para o ensino do cálculo de áreas poligonais e não poligonais, utilizando uma abordagem heurística que explora conceitos fundamentais de áreas de figuras planas. O trabalho revisita técnicas históricas, como o Método de Exaustão de Eudoxo, e introduz ferramentas descobertas a pouco tempo atrás, como o Teorema de Pick. Para a autora, o processo de ensino-aprendizagem deve ser acessível tanto a alunos quanto a professores, proporcionando uma compreensão aprofundada e prática das áreas, essencial no ensino da geometria.

No estudo de Zeferino (2023), a modelagem matemática é abordada como uma metodologia eficaz para o ensino de áreas e perímetros de figuras planas. A autora implementa essa técnica em turmas de ensino médio, utilizando atividades práticas como a construção da planta baixa da escola, o que permitiu aos alunos aplicarem diretamente os conceitos matemáticos em situações concretas. Segundo a autora, essa abordagem facilita o aprendizado, ao relacionar a teoria com o cotidiano dos estudantes, promovendo uma compreensão mais profunda dos conteúdos geométricos. Além disso, o trabalho ressalta a importância de estratégias que não apenas desenvolvam habilidades técnicas, mas também estimulem o pensamento crítico e a capacidade dos alunos de resolver problemas complexos de forma autônoma.

3 Soma de Riemann: uma proposta de tarefas organizadas por meio de uma sequência didática

Neste capítulo, no primeiro momento, é apresentada uma adaptação dos níveis de Van Hiele conforme o que acredita-se ser pertinente para o aprendizado das Somas de Riemann. Em seguida, utiliza-se de uma sequência didática para organizar as etapas de aplicabilidade das tarefas. Esta abordagem é justificada usando as fases de Van Hiele e, então, as tarefas são apresentadas com os respectivos comentários acerca de cada uma.

3.1 Adaptação dos níveis de Van Hiele para o estudo de áreas sob curvas

Com base nas leituras e pesquisa sobre os níveis de Van Hiele, apresentamos nesta seção uma adaptação destes níveis para o estudo de aproximações de áreas sob curvas. Alguns pesquisadores que fizeram adaptação para estudos de outros assuntos, para além da geometria, nos serviram de inspiração e merecem destaque.

O trabalho de Cardoso (2020), cujo objetivo principal de sua dissertação foi propor níveis de aprendizagem para o tópico de funções no ensino médio, baseando-se no modelo de Van Hiele. A pesquisa se inseriu no contexto de dificuldades que muitos alunos enfrentavam na compreensão do conceito de funções. A autora se baseia em estudos anteriores que investigaram as dificuldades no ensino e aprendizagem de funções e que destacam a necessidade de entender melhor o processo de aprendizagem e buscar soluções para minimizar as dificuldades dos alunos.

O trabalho de Duarte e Fuster (2003) discute aspectos comparativos no modelo de Van Hiele para o conceito de aproximação local, especificamente em relação à compreensão da tangente em situações “irregulares” em curvas. Ele explora os diferentes níveis de raciocínio dos alunos e como esses níveis estão relacionados à capacidade de compreender e prever as limitações na identificação da tangente em pontos específicos de uma curva. Além disso, o artigo aborda a importância da interação entre entrevistador e aluno para determinar o nível de raciocínio, destacando a evolução do pensamento do aluno ao passar de um nível para outro.

López e Carreras (2001) abordam a compreensão do conceito de convergência de séries de termos positivos, utilizando uma abordagem educacional baseada no modelo de Van Hiele. O objetivo principal é desenvolver uma componente visual dinâmica que ajude a facilitar a experiência de aprendizado sobre a convergência de séries, permitindo que os alunos explorem e compreendam os diferentes níveis de raciocínio envolvidos nesse conceito matemático.

A adaptação feita por Cardoso (2020) considera apenas o aprendizado de funções, assim como a de Duarte e Fuster (2003) que leva em conta apenas o aprendizado de funções e tangentes. Em nosso trabalho entendemos que, para compreensão total das ideias que antecedem o conceito de soma de Riemann, estuantes devem ter, além de funções, noções de áreas e de conceitos que envolvem somatórios, por isso fizemos uma classificação mais abrangente. Já López e Carreras (2001) aborda um pouco de geometria ao citar as relações que o aluno estabelece entre pontos pertencentes ou não a segmentos de reta.

De uma forma mais direta ou indireta, todos contribuíram como nossa abordagem. Assim, com o objetivo de nortear a construção das atividades que permitirão ao estudante o desenvolvimento do pensamento geométrico e a evolução gradual de um nível a outro no estudo das soma de Riemann, apresentamos os Níveis de Van Hiele no estudo das somas de Riemann.

Nível 1 - Os alunos reconhecem e distinguem os elementos do plano cartesiano: eixo vertical e horizontal, origem e quadrantes. São capazes de localizar pontos no plano dadas suas coordenadas. Identificam intervalos crescentes, decrescentes ou constantes a partir dos gráficos de funções. Compreendem a área como a medida de uma superfície.

Nível 2 – Conhecem e distinguem tipos de funções; Possuem noção sobre os diferentes gráficos e a quais funções representam; Entendem que áreas sob curvas podem ser estimadas por meio de aproximações.

Nível 3 – Neste nível o estudante já deve ter conhecimento de partição de intervalo, altura do retângulo da soma de Riemann está associada à imagem da função. As partições devem ter o mesmo comprimento. O estudante reconhece que a melhor aproximação é quando a partição tem um número maior de subintervalos.

Nível 4 – O estudante compreende a soma de Riemann como a aproximação da área sob curvas limitadas para funções crescentes e decrescentes, escreve a notação formal e compreende que a ideia pode ser estendida para funções quaisquer.

Nível 5 – Domina o conceito da soma de Riemann para qualquer função elementar, faz conjecturas da soma de Riemann para regiões delimitadas por curvas. Faz uso da linguagem matemática formal e compreende e acompanha provas formais.

3.2 A Sequência Didática para organização das tarefas

Para proposição de tarefas que garantam uma compreensão efetiva do nosso tema de estudo, faremos uso de uma Sequência Didática, doravante chamada SD, que permita a assimilação de conteúdos conceituais, usando como referência sobre o tema o trabalho de Antoni Zabala.

Conforme Zabala (1998), entende-se por conteúdos conceituais aos conhecimentos teóricos, conceitos e princípios que os alunos devem compreender e internalizar. São informações sobre fatos, ideias, teorias e princípios que formam a base do conhecimento em uma determinada área. Por exemplo, entender o conceito de área como a medida da superfície de uma figura geométrica.

Ainda segundo o autor, uma SD é um conjunto de atividades organizadas de forma planejada e sequencial, com o objetivo de promover a aprendizagem dos alunos em relação a determinados conteúdos ou habilidades. Ela pode incluir diferentes etapas, como a identificação dos conhecimentos prévios dos alunos, a apresentação dos novos conteúdos, a realização de atividades práticas e a avaliação do aprendizado. A SD pode variar de acordo com os objetivos de ensino e as características dos alunos, mas seu papel deve ser sempre o de promover a aprendizagem.

O processo de aprendizagem é uma construção pessoal, no qual cada aluno desenvolve seu próprio conhecimento individualmente e/ou com a ajuda de outras pessoas. Tal construção depende do interesse, disponibilidade, bagagem de conhecimento e experiências do aluno, juntamente com a contribuição de um educador capaz de intervir de maneira apropriada nos avanços e nas dificuldades que o aluno apresenta, oferecendo suporte e, ao mesmo tempo, incentivando a autonomia do aluno. A aprendizagem é vista como a atribuição de significado a um objeto de ensino, envolvendo a resolução de conflitos entre o conhecimento preexistente e o conhecimento a ser adquirido, além do estímulo do aluno a enfrentar desafios.

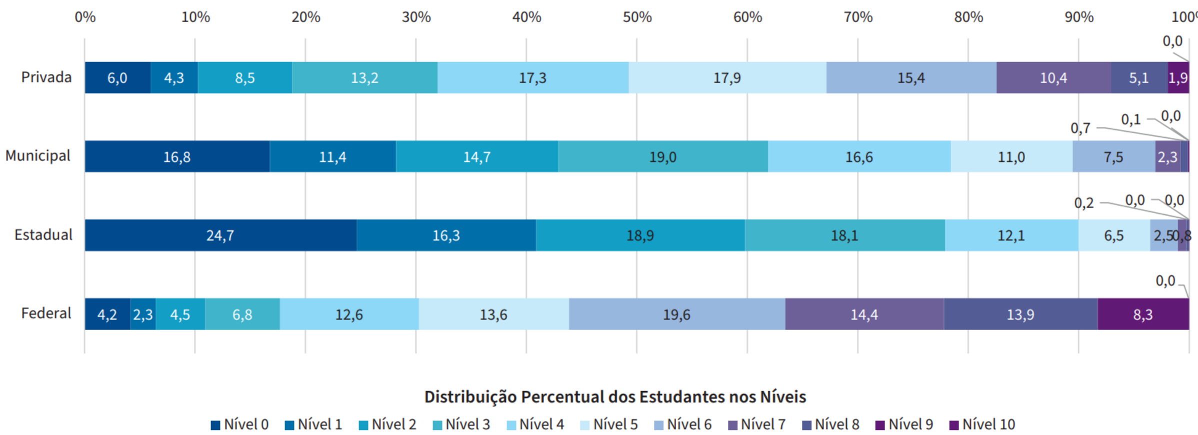
Para organizar as atividades em uma sequência didática de forma eficaz, é importante considerar alguns pontos, como: definição dos objetivos de aprendizagem, ou seja, antes de planejar as atividades, é essencial ter clareza sobre o que se espera que os alunos aprendam ao final da sequência; escolha os conteúdos que serão abordados, levando em consideração a relevância para os objetivos de aprendizagem e para a formação dos alunos; um sequenciamento lógico, onde as atividades são organizadas de forma sequencial; Inclusão de diferentes tipos de atividades para engajar os alunos e atender a diferentes estilos de aprendizagem; momentos de avaliação ao longo da sequência para verificar o progresso dos alunos e identificar possíveis ajustes no ensino; flexibilidade para ajustar as atividades conforme a necessidade dos alunos e os resultados obtidos durante a sequência didática.

3.3 Tarefas propostas

Nesta proposta, utilizaremos o modelo de Van Hiele com ênfase nas fases de aprendizagem, mas sem a intenção de propor tarefas específicas para cada nível de desenvolvimento. Optamos por essa estratégia considerando a realidade das escolas brasileiras, onde frequentemente encontramos turmas com grande heterogeneidade, ou seja, compostas por alunos com bagagens de conhecimento, experiencias pessoais e habilidades variadas. Essa constatação é corroborada pelos dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) de 2021.

A avaliação que compõe a prova SAEB classifica os alunos em níveis de proficiência que vão de 0 a 10, de acordo com os conhecimentos esperados ao fim do ensino médio em cada um desses níveis. A figura 6 mostra a distribuição percentual média do Brasil, em 2021, evidenciando que os estudantes brasileiros que concluem o ensino básico não saem possuindo os mesmos conhecimentos.

Figura 6 – Gráfico da distribuição percentual dos estudantes da 3ª série, por níveis da escala de proficiência no SAEB, em matemática, no Brasil em 2021



Fonte: Relatório de resultados do SAEB (2021, p. 210)

Em vez de segmentar as tarefas, decidimos elaborar três tarefas integradas, que estimulam estudantes em diferentes níveis simultaneamente. A primeira tarefa propõe o desenvolvimento das habilidades dos níveis 1 e 2. A segunda tarefa propõe o desenvolvimento das habilidades dos níveis 3 e 4. Finalmente, a terceira tarefa propõe o desenvolvimento das habilidades do nível 5.

Apresentamos, a seguir, as tarefas, em cada questão tecemos comentários que acreditamos nortear o trabalho docente no momento da aplicação. Essas tarefas encontram-se prontas para impressão nos apêndice A, B e C.

3.3.1 Tarefa 1: Explorando a ideia de aproximação de áreas sob curvas

No quadro 3, descrevemos os objetivos de aprendizagem referentes a esta tarefa, bem como os materiais que o professor necessitará para aplicação e o tempo estimado.

Quadro 3 – Descrição dos objetivos, tempo e materiais para aplicação da tarefa 1.

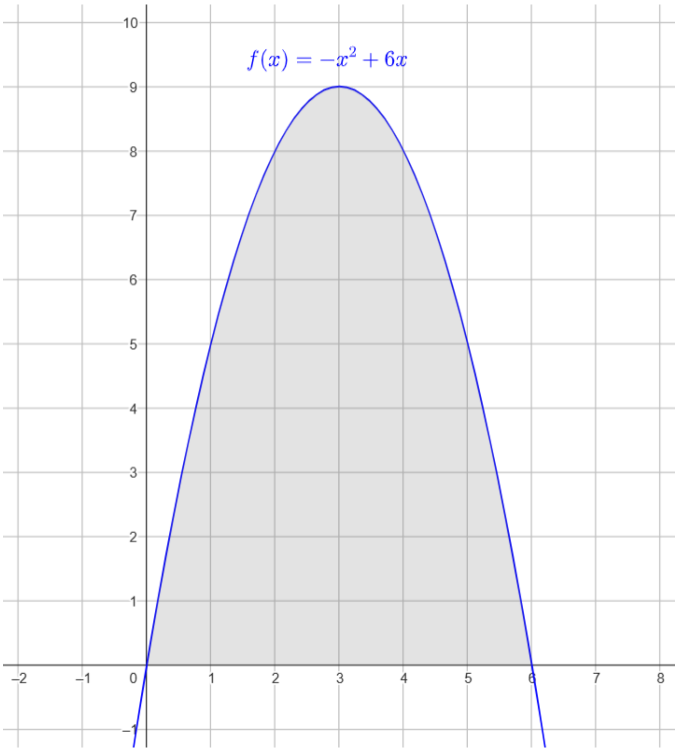
Objetivos:	• Compreender a soma de retângulos como uma possível aproximação de áreas sob curvas. • Comparar diferentes aproximações e entender como que o número de partições afeta a precisão da área aproximada. • Analisar o impacto de subestimação ou superestimação das áreas dependendo da posição dos retângulos (à esquerda ou à direita).
Materiais:	• Cópias impressas (ou versões digitais) das tarefas para distribuição aos estudantes. • Calculadoras (opcional na tarefa 1). • Quadro Branco e Marcadores • Material de Desenho (Lápis, Borracha, Compasso, etc).
Tempo:	• 2 aulas.

Fonte: Elaborado pelo autor

A seguir estão as perguntas da tarefa 1. O que espera-se como possíveis respostas e os comentários que relacionam as fases e os níveis de Van Hiele estão logo após cada pergunta. Seguiremos esta disposição nas tarefas 2 e 3.

QUESTÃO 01 - Considere a função $f(x) = -x^2 + 6x$, cujo gráfico que está esboçado abaixo. A área destacada está delimitada pelo gráfico da função, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 6$.

Figura 7 – Representação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = -x^2 + 6x$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Responda:

a) Em qual ou quais pontos esse gráfico toca o eixo das abscissas?

Com relação às fases do aprendizado, nossa orientação é que a Fase 1 seja trabalhada apenas na Tarefa 1. Justifica-se pelo fato de que é nessa fase que são identificados os conhecimentos prévios que os alunos trazem e é esclarecido o objeto de estudo. Especificamente nesta Questão 01, acreditamos que é possível abordar essas duas situações, tornando desnecessário a abordagem da fase 1 nas demais tarefas, uma vez que os conhecimentos prévios já terão sido identificados. Ressalta-se que em alguns momentos os estudantes devem responder à tarefa individualmente e em outros, em grupos, socializando as respostas conforme condução do professor. Na fase 1, recomenda-se que os estudantes respondam individualmente.

No item (a) dessa questão, espera-se perceber os conhecimentos sobre a localização de pontos no plano cartesiano e sobre os elementos que compõem uma função plotada nesse plano.

É possível que alguns alunos respondam que os pontos onde o gráfico intersecta o eixo das abscissas se encontram aproximadamente em “menos zero vírgula alguma coisa” e “seis vírgula alguma coisa”, mostrando que, mesmo sem realizar o cálculo formal, conseguem identificar visualmente que os pontos se aproximam de 0 e 6. Outros alunos, por sua vez, podem demonstrar um conhecimento mais aprofundado ao calcular as raízes da equação, evidenciando uma compreensão mais ampla da função. No entanto, também é esperado que alguns estudantes não consigam perceber ou identificar nem mesmo visualmente que a função de fato intersepta o eixo dos x.

b) Em qual ou quais pontos o gráfico toca o eixo das ordenadas?

Espera-se que o estudante perceba que a função também intercepta o eixo das ordenadas, embora, diferente do item (a), isso ocorra em apenas um ponto. Mais uma vez, buscamos avaliar se os alunos identificam esse ponto apenas de maneira visual ou se eles recorrem a meios algébricos para determinar esse ponto, utilizando, por exemplo, o $f(0)$

c) Essa função tem ponto de máximo ou de mínimo? Caso haja, determine suas coordenadas.

Neste item, espera-se que o aluno reconheça que a função quadrática admite apenas um ponto de máximo, uma vez que sua concavidade está voltada para baixo, não havendo ponto de mínimo. A partir da resposta, será possível avaliar se o aluno compreende o conceito de ponto de máximo e mínimo e se consegue diferenciar entre ambos, dependendo da função apresentada.

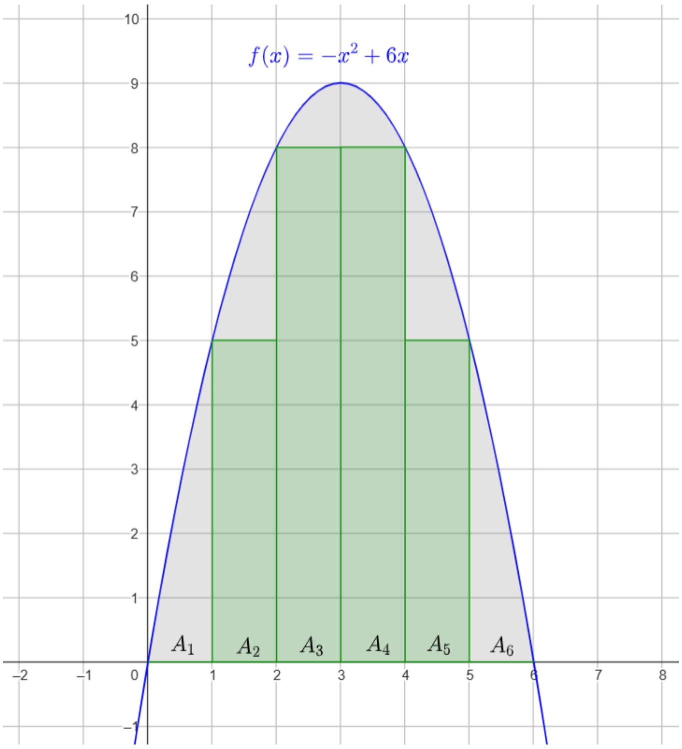
d) Considerando que nosso objetivo seja determinar a área da região em cinza, como podemos fazer isto?

Por fim, buscamos compreender se o estudante possui noção sobre o que é a área de uma figura e de quais ferramentas ele dispõe para determinar uma área como essa. Queremos observar como o aluno pensa em calcular essa área. É esperado que alguns estudantes tentem aproximar a área contando os quadrados da malha quadriculada sobre a qual a função foi plotada. É possível que alguns alunos apresentem abordagens que surpreendam.

Na fase 2, conhecida como orientação dirigida, trabalha-se com questões simples e que evoluem em grau de dificuldade aos poucos. Nosso objetivo é induzir o aluno a compreender, de forma autônoma, conceitos que serão consolidados aos poucos. Nesse primeiro momento, os alunos devem ter contato com a atividade e tentar resolvê-la com o mínimo de interação do professor, buscando chegar às soluções por si mesmos. Recomendamos que, nesta etapa, os alunos sejam incentivados a resolver as Questões de 02 a 04 a seguir, individualmente.

QUESTÃO 02 - Considerando-se a situação da questão anterior, suponha que umas das estratégias usadas para determinar uma aproximação da área citada foi inscrever retângulos abaixo da curva e determinar a soma das áreas desses retângulos. Na figura abaixo, foram usados retângulos de mesma base em partição regular.

Figura 8 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = -x^2 + 6x$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$, com 6 partições regulares



Fonte: Elaborado pelo autor

a) Quantas partições foram feitas?

Nessa questão, introduzimos a ideia de aproximar a área sob uma curva utilizando retângulos. Note que, propositalmente, deixamos nessa aproximação de forma que a altura de cada retângulo possa ser facilmente determinada apenas pela observação da figura, sem a necessidade de cálculos. Isso ocorre porque, nessa tarefa, estamos explorando principalmente as habilidades que os alunos que se encontram entre os níveis 1 e 2 da teoria de Van Hiele possuem. No nível 1, o estudante tem uma compreensão através observação. Ainda não possui uma compreensão das propriedades inerentes ao problema, que só começa a surgir a partir do nível 2.

Deve-se perceber que foram feitas 6 partições, ainda que sejam nulas as áreas nos intervalos $[0, 1]$ e $[5, 6]$,

b) Olhando para o gráfico, é possível saber qual é a medida da área de cada retângulo?

No item (b), espera-se que a resposta seja afirmativa. O objetivo da pergunta é estimular o conhecimento referente ao cálculo de área por meio do produto: comprimento da base vezes altura, mesmo que alguns optem por somar quadrados da malha quadriculada.

c) Complete a tabela abaixo e dê o valor de $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$.

Quadro 4 – Soma das áreas dos retângulos usados como aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = -x^2 + 6x$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$, com 6 partições regulares

Retângulo	**Base**	**Altura**	**Área**
A_1			
A_2			
A_3			
A_4			
A_5			
A_6			

Fonte: Elaborado pelo autor

d) Qual a relação entre as áreas dos três primeiros retângulos e dos três últimos?

O uso da tabela nesse problema foi buscando uma forma para que o estudante mantenha uma organização dos dados, lhe permitindo enxergar com clareza o processo pelo qual está sendo guiado.

Neste item (e), o intuito é levar o estudante a perceber que, na parábola em questão, existe uma simetria entre os três primeiros retângulos e os três últimos, mostrando que reconhece uma propriedade da função. Esse conhecimento será útil em questões futuras, pois facilitará cálculos desnecessários ao lidar com uma quantidade maior de partições em parábolas cujas alturas dos polígonos não sejam pontos visualmente conhecido no gráfico.

e) Você considera o resultado obtido no item (d) um bom valor para expressar a área de toda a região? Por quê?

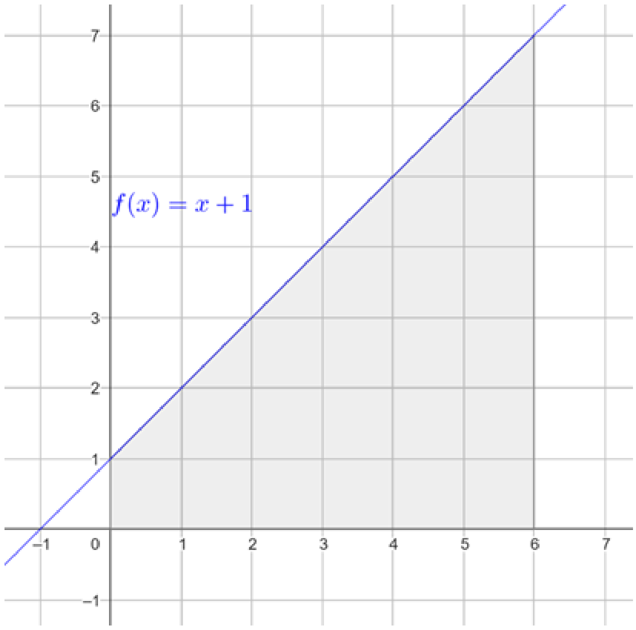
Espera-se que o aluno perceba que, apesar de ser uma aproximação, ela ainda não é a melhor aproximação, visto que há "espaços" na figura, representados em cinza, que não foram preenchidos pelos retângulos. Com essa pergunta, pretendemos estimular a curiosidade dos alunos, levando-os a refletir sobre a qualidade da aproximação: "talvez essa não seja uma aproximação tão boa, mas qual seria uma aproximação melhor?" Alguns alunos podem já perceber que, se utilizássemos mais retângulos ou partições menores, a soma das áreas se aproximaria melhor da área sob a curva, o que é uma resposta esperada para a pergunta seguinte, do item (f).

f) O que fazer para melhorar a aproximação da área?

Alguns estudantes podem sugerir processo diverso do aumento de partições, como talvez usar uma aproximação usando outras figuras que não só retângulos. Todas essas respostas ajudam o professor a perceber a forma de pensar do estudante.

QUESTÃO 03 - Seja a função $f(x) = x+1$, cujo gráfico está representado a seguir. A área sob o gráfico no intervalo de $x = 0$ a $x = 6$ foi destacada.

Figura 9 – Representação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = x + 1$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$.



Fonte: Elaborado pelo autor

a) Determine a área exata da região hachurada.

No problema 3, propomos que os estudantes determinem a área sob o gráfico de uma função afim, cuja região abaixo dele seja delimitada por um polígono. A tarefa tem o objetivo de calcular o valor exato da área abaixo do gráfico, bem como as aproximações obtidas à medida em que os retângulos vão aumentando, permitindo-lhes avaliar se tais aproximações são ou não precisas.

A ideia é ter elementos para inferir que a aproximação não está relacionada ao fato de ela subestimar (fazer uma aproximação ou estimativa que é menor do que o valor real ou exato) ou superestimar (estimativa que é maior do que o valor real ou exato) a área, mas sim à quantidade de partições realizadas. Quanto maior o número de retângulos utilizados na aproximação, mais próxima a área aproximada estará da área real.

Nesse item (a), espera-se que sejam utilizadas as estratégias que os estudantes preferirem para determinar a área sob o gráfico. Por exemplo, podem calcular a área do triângulo utilizando o fato de que essa área é metade da área de um quadrado de mesmo lado e que deve-se subtrair 1/2 de unidade de área correspondente ao intervalo [-1, 0]. Alternativamente, podem determinar a área do trapézio de base igual a 7 (eixo das ordenadas) e altura igual a 6 (eixo das abscissas). Podem contar os quadrados da malha quadriculada que compõem o gráfico ou outra estratégia qualquer que evidencie que a área citada é de 24 unidades de área.

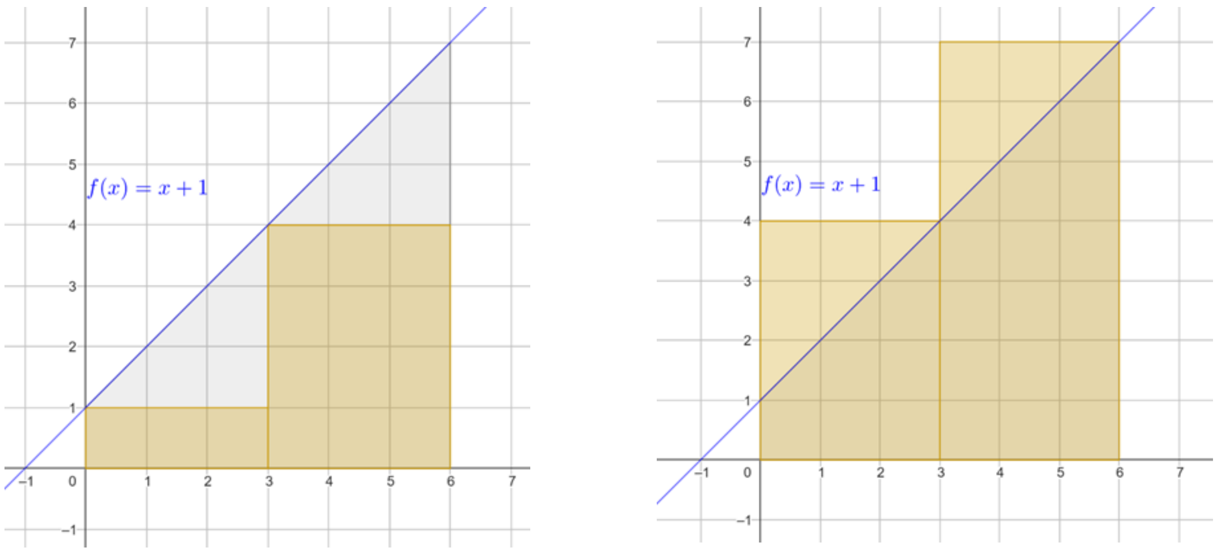
Nos itens (b), (c) e (d) a seguir fizemos aproximações da área real usando retângulos desenhados abaixo do gráfico tomadas as extremidades à esquerda, e retângulos acima do gráfico tomadas as extremidades à direita. Determine a soma dos retângulos em cada situação:

b) Usando 2 retângulos cujos lados sobre o eixo x têm o mesmo comprimento.

Figura 10 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = x + 1$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$, com 2 partições regulares

(i) Subestimação da área sob f em $[0, 6]$ com 2 partições

(ii) Superestimação da área sob f em $[0, 6]$ com 2 partições



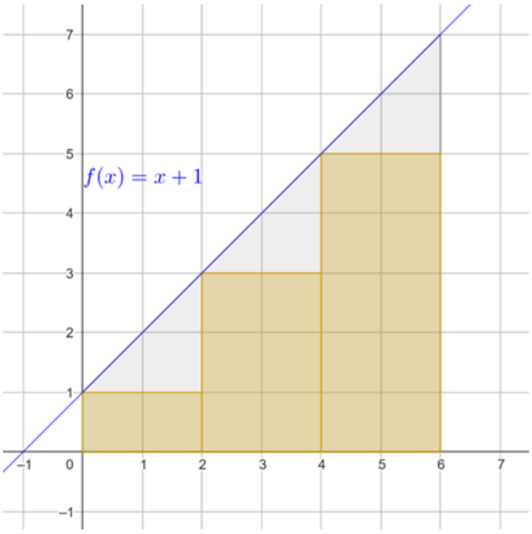
Fonte: Elaborado pelo autor

O objetivo da tarefa é trabalhar com aproximações que intuem ao cálculo da área real. Por exemplo, em estágios iniciais, onde a quantidade de retângulos é menor, como neste item (b), deverão observar que a aproximação ainda está significativamente distante da área real. Nos itens (c) e (d), perceber que a área se aproxima melhor da área real.

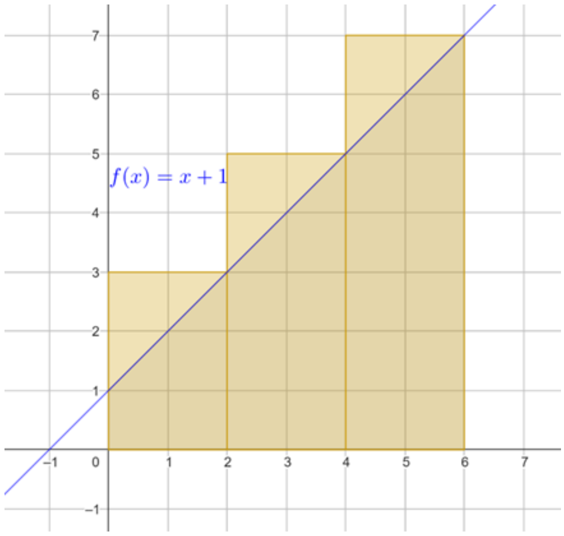
c) Usando 3 retângulos cujos lados sobre o eixo x têm o mesmo comprimento.

Figura 11 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = x + 1$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$, com 3 partições regulares

(i) Subestimação da área sob f em $[0, 6]$ com 3 partições



(ii) Superestimação da área sob f em $[0, 6]$ com 3 partições

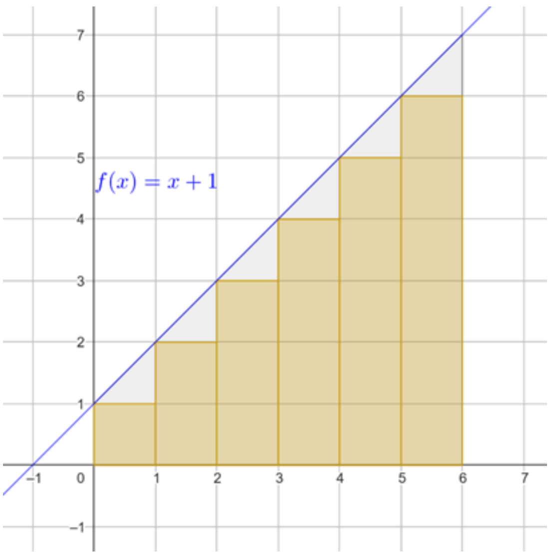


Fonte: Elaborado pelo autor

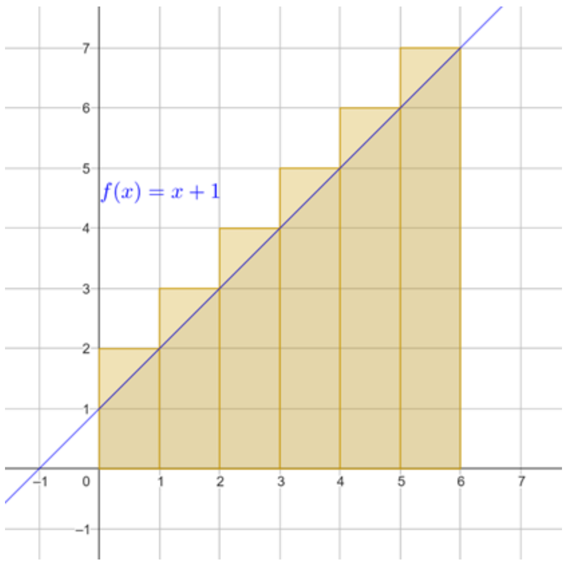
d) Usando 6 retângulos cujos lados sobre o eixo x têm o mesmo comprimento.

Figura 12 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = x + 1$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$, com 6 partições regulares

(i) Subestimação da área sob f em $[0, 6]$ com 6 partições



(ii) Superestimação da área sob f em $[0, 6]$ com 6 partições



Fonte: Elaborado pelo autor

e) O que se pode afirmar à medida em que se aumenta a quantidade de partições?

Essa pergunta tem o objetivo de analisar o quanto a aproximação da área está relacionada com a partição de retângulos que foi proposta. à medida em que a partição se torna mais refinada, a distância para a área real diminui, ressaltando a importância de uma maior quantidade de retângulos para uma aproximação mais precisa.

f) Compare as aproximações encontradas nos itens (b), (c) e (d). Pode-se afirmar que uma delas é melhor do que as outras? Por quê?

Espera-se que fique claro que ambas as aproximações são igualmente válidas, uma vez que ambas convergem para a área real. Que não se pode afirmar que uma seja melhor que a outra, pois a precisão da aproximação está mais relacionada ao número de partições utilizadas do que à escolha entre subestimar ou superestimar a área.

Já o intuito da Questão 04, a seguir, é consolidar as diferenças entre subestimar e superestimar áreas a depender da função. Espera-se observar que, ao tomar a altura de cada retângulo pelo vértice superior esquerdo, em funções crescentes, tende-se a subestimar a área. Já em funções decrescentes, essas mesmas aproximações superestimam a área. E que ocorre o inverso caso sejam tomadas aproximações pela direita.

QUESTÃO 04 – Considere as figuras apresentadas nas letras a), b), c) e d). Para cada uma, responda de acordo com os itens abaixo:

I – A aproximação é pela esquerda ou pela direita;

II – A função é crescente ou decrescente no intervalo considerado;

III – Ocorre uma subestimação ou superestimação da área;

IV – A quantidade de partições.

a) Com relação ao gráfico da função representada na figura 13, abaixo, responda:

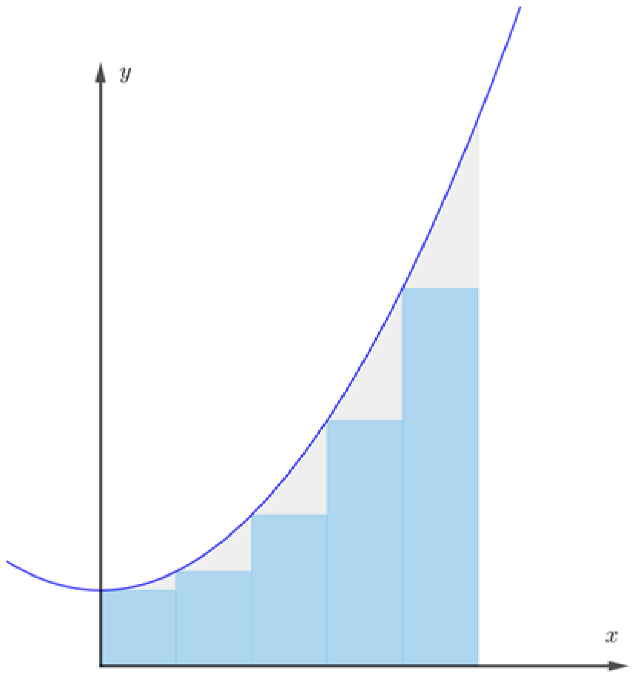
I: ________________________

II: ________________________

III: ________________________

IV: ________________________

Figura 13 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de uma função arbitrária f em um intervalo fechado correspondente ao item (a)



Fonte: Elaborado pelo autor

b) Com relação ao gráfico da função representada na figura 14, abaixo, responda:

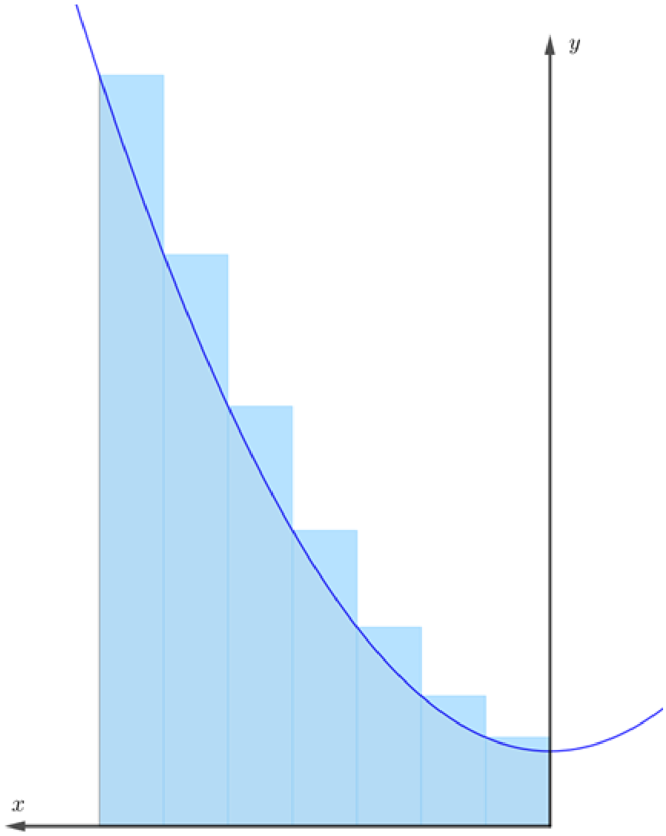
I: __________________________

II: __________________________

III: __________________________

IV: __________________________

Figura 14 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de uma função arbitrária f em um intervalo fechado correspondente ao item (b)



Fonte: Elaborado pelo autor

c) Com relação ao gráfico da função representada na figura 15, abaixo, responda:

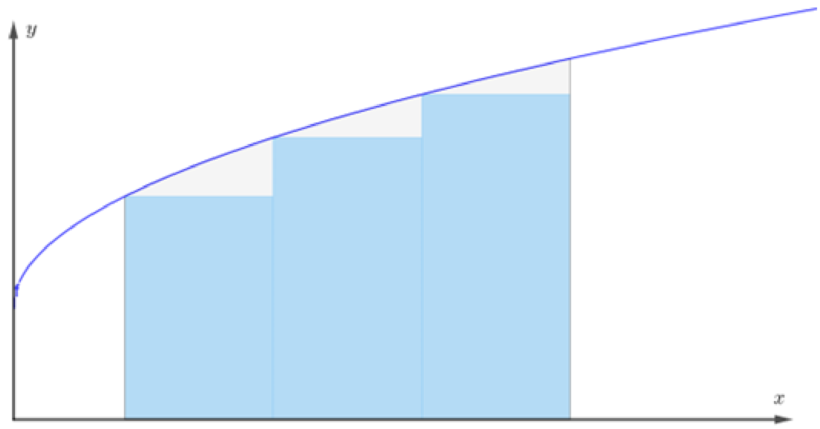
I: __________________________

II: __________________________

III: __________________________

IV: __________________________

Figura 15 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de uma função arbitrária f em um intervalo fechado correspondente ao item (c)



Fonte: Elaborado pelo autor

d) Com relação ao gráfico da função representada na figura 16, abaixo, responda:

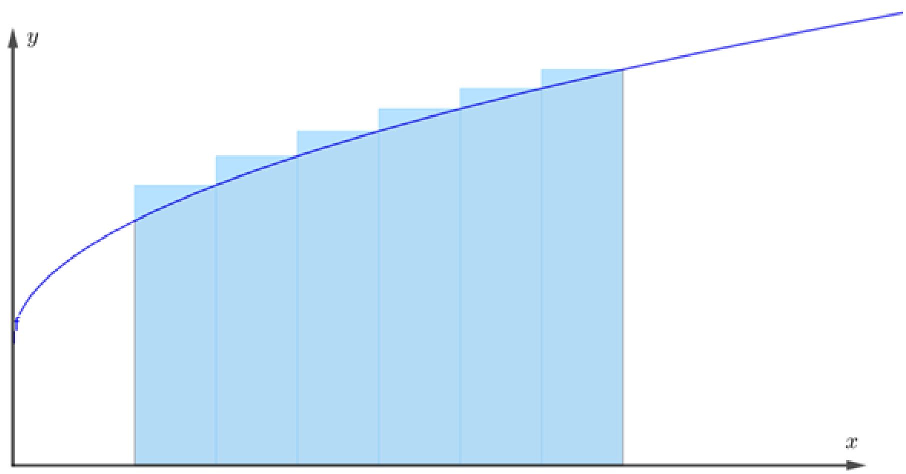
I: ____________________________

II: ____________________________

III: ____________________________

IV: ____________________________

Figura 16 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de uma função arbitrária f em um intervalo fechado correspondente ao item (d)



Fonte: Elaborado pelo autor

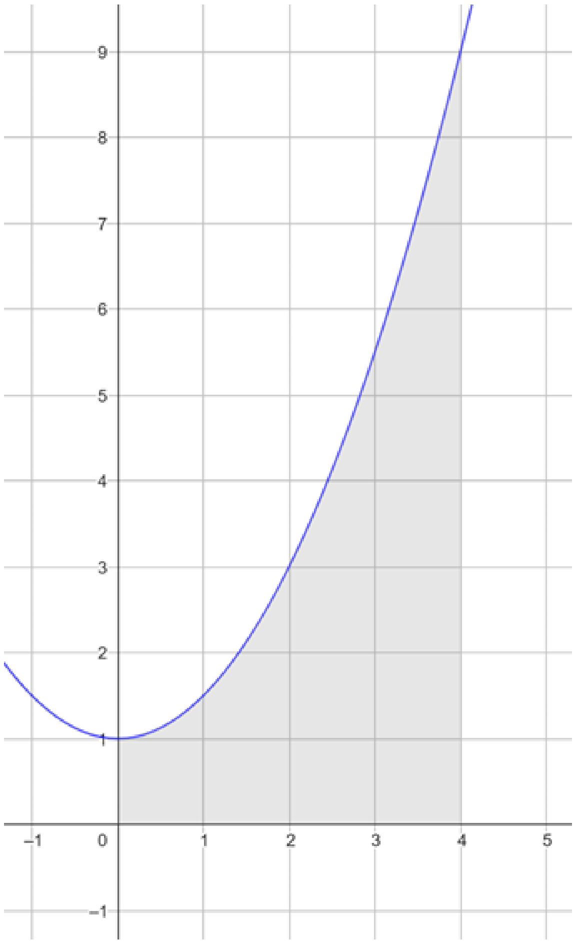
Após o tempo suficiente para resposta dessas questões, o professor pode iniciar a Fase 3 do modelo de Van Hiele, conhecida como explicação ou explicitação, conduzindo a uma discussão, em grupo, sobre os resultados obtidos pelos alunos, criando um espaço para a troca de ideias e informações entre os estudantes e o professor. Durante essa fase, o professor pode ajustar o vocabulário utilizado pelos alunos e esclarecer questões que não foram compreendidas corretamente por alguns, como diferenciar o ponto de máximo e o ponto de mínimo, algumas propriedade da função quadrática, como a direção de sua concavidade a depender do coeficiente a em $f(x) = ax^2 + bx + c$, as raízes, localização de pontos, as diferenças entre as aproximações pela esquerda ou direita em intervalos crescentes ou decrescentes, etc. É o momento de esclarecer as dúvidas que surgiram durante a resolução das questões e garantir que todos os alunos compreendam os conceitos fundamentais discutidos.

A fase 4 pode ser suprimida, pois não há necessidade de buscar formas de resolução das atividades além das que foram fornecidas, e passa-se para a última fase, a integração, quando os estudantes concluem a tarefa respondendo à Questão 05. Essa questão foi projetada para que os estudantes consolidem todo o conhecimento adquirido nas etapas anteriores, sem a introdução de novos conceitos, mas reafirmando e demonstrando o que aprenderam ao longo das perguntas e discussões precedentes.

A Questão 05 ainda se destina aos níveis 1 e 2, pois todo o trabalho aqui ainda é por meio da visualização. Esta difere-se dos problemas da tarefa 2, como veremos na próxima subseção, onde será necessário calcular o valor de $f(x)$ em cada intervalo para determinar a altura exata de cada retângulo. Trata-se de uma questão de transição e consolidação, preparando o aluno para operar no próximo nível.

QUESTÃO 05 - Considere a área abaixo do gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$ *delimitada no intervalo de* $x = 0$ *a* $x = 4$

Figura 17 – Área delimitada pelo gráfico de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 4$



Fonte: Elaborado pelo autor

Considerando partições de mesma largura, calcule as aproximações para esta área usando:

a) 4 partições à esquerda.

Espera-se que, nesse caso, a aproximação obtida seja uma subestimação da área. Ao tomar as alturas dos retângulos, acredita-se que estudantes que operam entre os níveis 1 e 2, percebam que as alturas são, em unidades de comprimento, 1, $\frac{3}{2}$, 3 e $\frac{11}{2}$, tornando a área facilmente determinada, visto que as partições são regulares com cada retângulo tendo como base 1 unidade.

b) 4 partições à direita.

E aqui seja encontrada uma superestimação da área, usando processo análogo ao realizado no item (a) e considerando as alturas tomadas pela direita. Em ambos os itens, a função foi escolhida cuidadosamente para permitir que as medidas das larguras e comprimentos dos retângulos fossem determinados apenas fazendo uma análise visual do gráfico da questão.

3.3.2 Tarefa 2: Estimando áreas usando a notação de somatório

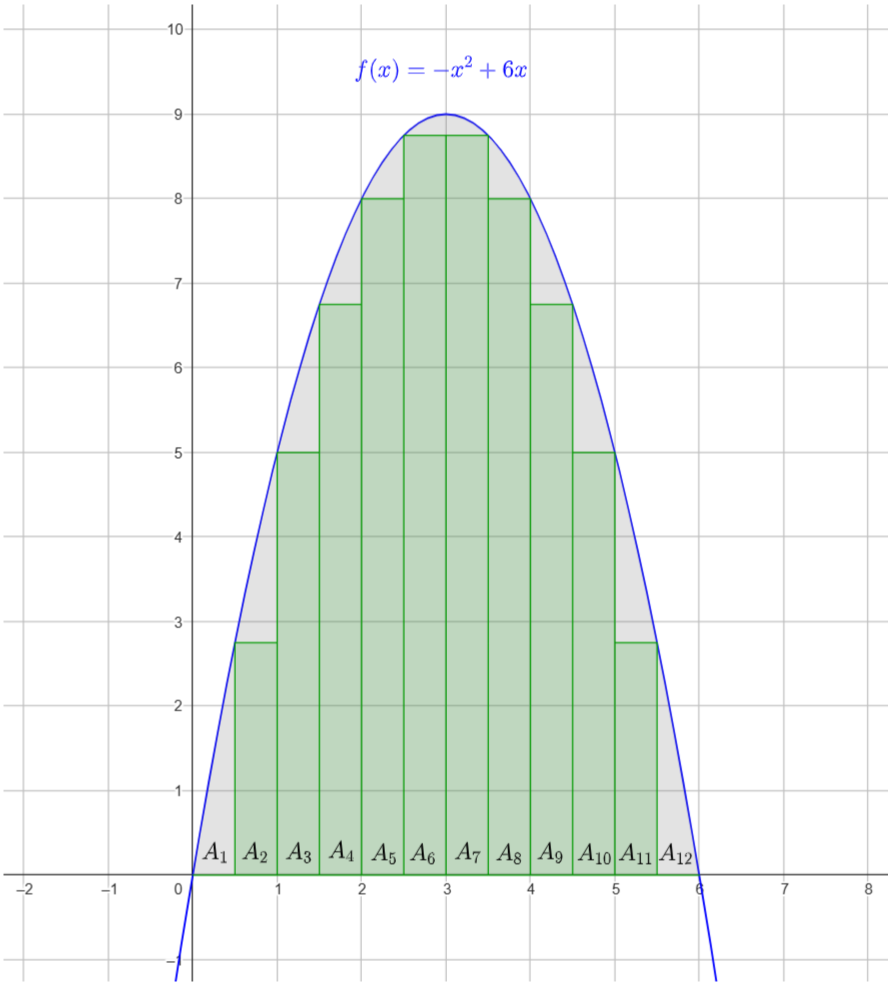
Quadro 5 – Descrição dos objetivos, tempo e materiais para aplicação da tarefa 2.

Objetivos:	• Compreender notações próprias referentes à soma de Riemann. • Usar a notação de somatório para calcular áreas aproximadas sob curvas. • Aplicar a soma de Riemann para estimar áreas.
Materiais:	• Cópias impressas (ou versões digitais) das tarefas para distribuição aos estudantes. • Calculadoras. • Projetor (opcional). • Quadro Branco e Marcadores. • Material de Desenho (Lápis, Borracha, Compasso, etc).
Tempo:	• 2 aulas.

Fonte: Elaborado pelo autor

QUESTÃO 01 - Na função $f(x) = -x^2 + 6x$, considere que a área entre o gráfico da função e o eixo x foi estimada usando doze retângulos, conforme ilustração 18 abaixo.

Figura 18 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = -x^2 + 6x$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$, com 12 partições regulares.



Fonte: Elaborado pelo autor

Sabendo que o comprimento da base de cada retângulo é chamado Δx, complete a tabela abaixo conforme exemplo da primeira linha.

Quadro 6 – Soma das áreas dos retângulos usados como aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = -x^2 + 6x$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 6$, com 12 partições regulares

Retângulo	Base	Altura	Área
A_1	___	$f(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 = 0$	$\Delta x \cdot f(0) = \_\_\_ \cdot 0 = 0$
A_2			
A_3			
A_4			
A_5			
A_6			
A_7			
...	...	...	...
A_{12}			

Fonte: Elaborado pelo autor

a) Qual o valor de Δx?

Nesta etapa, iniciamos pela fase 2 do modelo de Van Hiele, uma vez que os conhecimentos prévios já são conhecidos e o objeto de estudo já familiarizado. Permanecemos nessa fase enquanto forem respondidas as Questões 01 e 02 dessa tarefa.

Nessa Questão 01, o objetivo de utilizar uma tabela nesse problema é o de permitir que os dados necessários para solução do mesmo estejam organizados. Além do mais, iniciando pela fase II, cuja recomendação é que os estudantes manipulem o material de forma autônoma, buscando compreender as respostas por si mesmos, ao fornecer um exemplo na primeira linha, espera-se que sirva como base para conclusão do que foi solicitado.

Neste item (a), espera-se que $0,5$ seja dado como resposta.

b) Caso não fosse possível determinar o valor de Δx apenas olhando para o gráfico, que cálculo poderia ser feito a fim de determiná-lo?

Espera-se perceber e afirmar que uma forma de determinar Δx é usando a diferença entre o valor final e o valor inicial do intervalo, dividindo esse resultado pela quantidade de subintervalos. Ou seja, estamos induzindo o estudante a pensar na forma geral, que é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

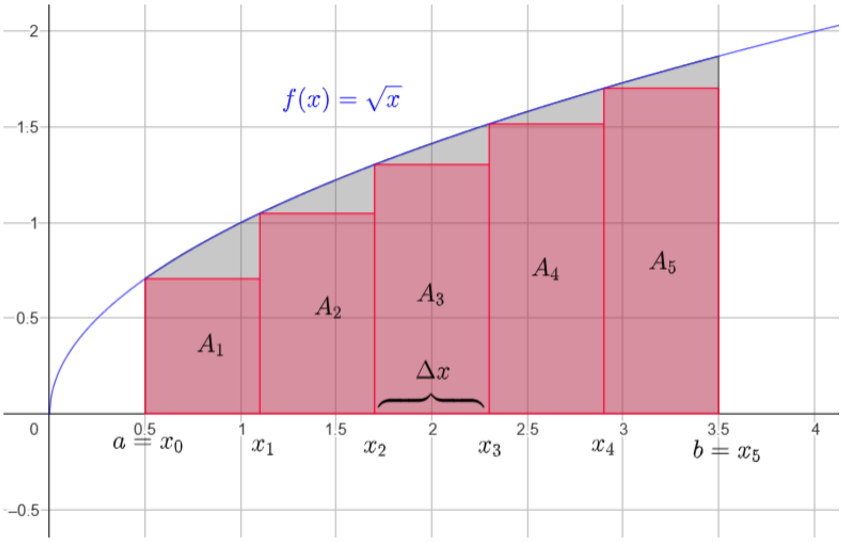
onde b é o valor final, a o valor inicial, e n o número de subintervalos.

c) Qual é o valor da soma das áreas $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + ... + A_{12}$?

Espera-se que sejam capazes de determinar a altura de cada retângulo, substituindo os valores em $f(x)$ nos intervalos correspondentes. É necessário calcular a imagem da função em cada partição para determinar a altura dos retângulos.

QUESTÃO 02 – A área sob o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ e o eixo x foi particionada em 5 retângulos, no intervalo de $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$, conforme figura.

Figura 19 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{7}{2}$, com 5 partições regulares



Fonte: Elaborado pelo autor

a) Como determinar o valor de Δx nessa situação? Escreva a expressão.

Aqui, as partições são regulares, mas nem a largura e nem a altura dos retângulos podem ser determinados com apenas a observação do gráfico da figura.

Espera-se que seja usada a expressão provavelmente percebida no item (b) da Questão 01 e, dessa forma, que se faça

$$\Delta x = \frac{3,5 - 0,5}{5} = 0,6$$

b) Como determinar x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 considerando o valor inicial $a = 0,5$ e as cinco partições regulares, ou seja, $n = 5$?

Espera-se perceber que, como as partições são regulares, as abscissas x_i podem ser determinadas fazendo-se

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0,5 + 0,6 = 1,1 \\
x_2 &= 0,5 + 2 \cdot 0,6 = 1,7 \\
x_3 &= 0,5 + 3 \cdot 0,6 = 2,3 \\
x_4 &= 0,5 + 4 \cdot 0,6 = 2,9 \\
x_5 &= 0,5 + 5 \cdot 0,6 = 3,5
\end{aligned}$$

O objetivo é adquirir bagagem de conhecimentos procedendo dessa maneira na organização dos dados para que, ao chegarem na tarefa 3 referente ao nível 5, sejam capazes de generalizar e fazer uso da expressão abaixo

$$x_i = a + i \cdot \Delta x \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

c) Determine o valor aproximado dessa área.

Espera-se que determinem a área aproximada preferencialmente usando a notação de somatório ou procedendo de maneira similar à que se segue a fim de resolver o problema:

$$\begin{aligned}
A &\approx 0,6 \cdot \left(\sqrt{1,1} + \sqrt{1,7} + \sqrt{2,3} + \sqrt{2,9} + \sqrt{3,5}\right) \\
A &\approx 0,6 \cdot (1,0488 + 1,3038 + 1,5166 + 1,7029 + 1,8708) \\
A &\approx 0,6 \cdot 7,4429 \\
A &\approx 4,4658
\end{aligned}$$

Portanto, o valor aproximado da área é $A \approx 4,47$.

d) Qual é a expressão para $A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ usando a notação de somatório

Espera-se que a expressão dada seja

$$A_i = \sum_{n=1}^{5} A_n$$

Ou seja, indica que estamos somando os valores de A_n para n variando de 1 a 5.

Esse processo visa permitir o progresso para o uso de uma notação matemática mais formal e com uso das propriedades do somatório, como

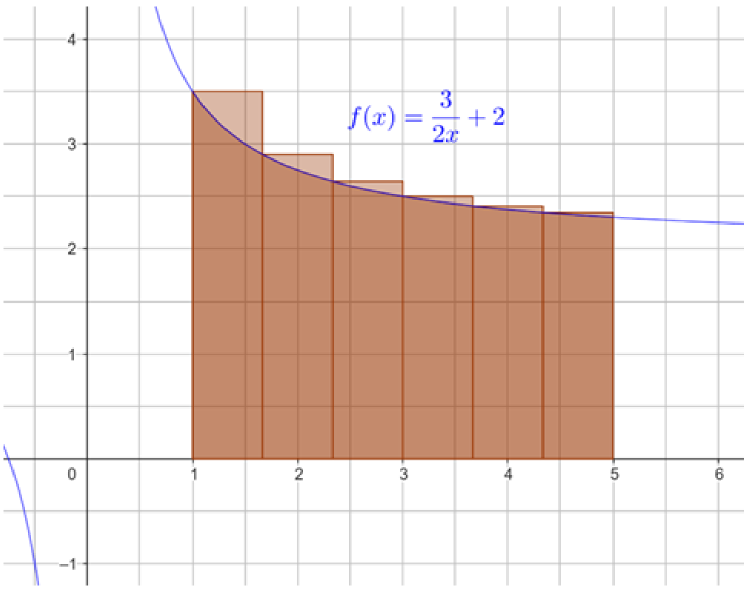
$$A \approx \sum_{i=1}^{5} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Após a conclusão da Questão 02 pelos estudantes, o docente deve reservar um momento, conforme a fase 3 do modelo de Van Hiele, para explicação de alguns tópicos. Esse é o momento de verificar as respostas fornecidas pelos alunos estão coerentes e consolidá-las com orientações formais, mostrando como a notação do somatório é utilizada e qual seria a forma usual para responder a cada um dos itens dessa questão. Mostrar algumas propriedades e problemas envolvendo somatório fazem-se necessários nesse momento, antes de prosseguir para resolução das questões a seguir.

Finalizada essa sistematização, os estudantes devem prosseguir com a resolução da da Questões 04. Nessa questão, espera-se que empreguem corretamente o somatório em sua notação usual, aplicando os conceitos aprendidos na Questão 03 para resolver este problema de forma adequada.

QUESTÃO 03 – Faça uso da notação de somatório para aproximar a área entre $g(x) = \dfrac{3}{2x} + 2$ e o eixo x no intervalo $[1, 5]$ usando uma soma de Riemann à direita com 6 partições iguais.

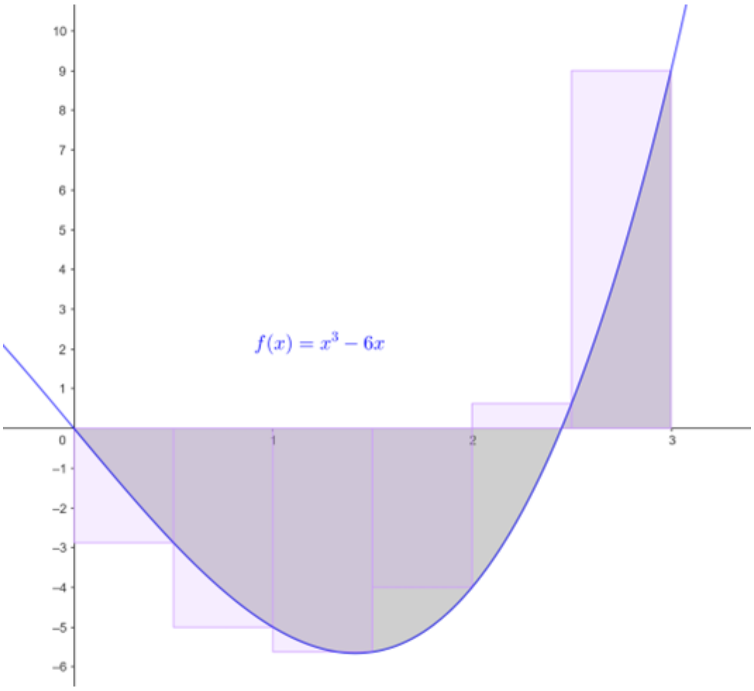
Figura 20 – Aproximação da área delimitada pelo gráfico de $g(x) = \dfrac{3}{2x} + 2$ e pelas retas $y = 0$, $x = 1$ e $x = 5$, com 6 partições regulares



Fonte: Elaborado pelo autor

QUESTÃO 04 - Determine a soma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$, tomando as extremidades esquerdas no intervalo $[0, 3]$ e $n = 6$, conforme figura 21 abaixo.

Figura 21 – Soma de Riemann em $f(x) = x^3 - 6x$ no intervalo $[0, 3]$ com 6 partições regulares



Fonte: Elaborado pelo autor

a) Por que o valor encontrado não representa a área hachurada?

Ao responderem a esta questão, fazemos uso da orientação relacionada à fase 4 de Van Hiele, pois os estudantes se deparam com uma situação que traz um pequeno aumento no nível de dificuldade, obrigando-os a buscar mais de uma forma de resolver o problema. Percebe-se que o fato de trabalhar com intervalos negativos não está presente em problemas anteriores. Os estudantes, pós explicações na fase 3, têm base para fazer uso da notação de somatório, mas necessitam aplicar tal conhecimento em um outro contexto.

Espera-se perceber que a soma de Riemann encontrada aqui, no intervalo em que a função está abaixo do eixo x, tem valor negativo, o que não corresponde à área hachurada, já que a área, geometricamente, é sempre positiva.

b) O que o valor encontrado representa?

Espera-se observar que o valor obtido pela soma de Riemann reflete a diferença entre a área da região acima do eixo x e a área da região abaixo do eixo x, no intervalo $[0, 3]$ para a função $f(x) = x^3 - 6x$. No contexto dessa soma, a região onde $f(x) > 0$, isto é, acima do eixo x, terá valor positivo, enquanto a região onde $f(x) < 0$, ou seja, abaixo do eixo x, terá valor negativo. Assim, Este valor não reflete a "área tota" em termos geométricos (que seria sempre positiva), mas sim a soma algébrica das áreas.

Por fim, na integração, fase 5, os estudantes devem sintetizar as respostas e conclusões encontradas ao resolver esse problema e o professor deve concluir o tópico, fornecendo as respostas esperadas e fazendo as ponderações necessária em relação às respostas dadas pelos alunos.

3.3.3 Tarefa 3: Generalização da Soma de Riemann

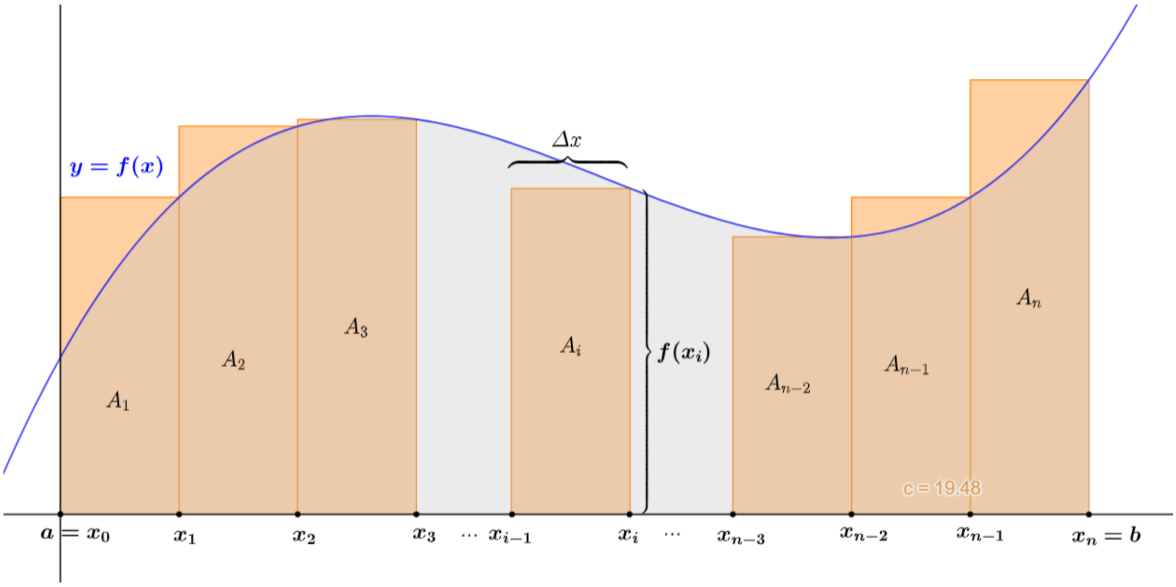
Quadro 7 – Descrição dos objetivos, tempo e materiais para aplicação da tarefa 2.

Objetivos:	• Generalizar a soma de Riemann para n subintervalos. • Demonstrar que a soma de Riemann se aproxima de um valor constante conforme o número de subintervalos aumenta. • Provar que a área sob uma curva converge para um valor específico utilizando a definição de soma de Riemann.
Materiais:	• Cópias impressas (ou versões digitais) das tarefas para distribuição aos estudantes. • Calculadoras. • Quadro Branco e Marcadores • Material de Desenho (Lápis, Borracha, Compasso, etc).
Tempo:	• 2 aulas.

Fonte: Elaborado pelo autor

QUESTÃO 01 – Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua no intervalo* $[a, b]$*. Considere uma partição* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *do intervalo* $[a, b]$*, onde* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$*. Cada subintervalo* $[x_{i-1}, x_i]$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$ *é uma partição do intervalo original.*

Figura 22 – Generalização da soma de Riemann pela direita



Fonte: Elaborado pelo autor

Escreva a expressão que corresponde ao comprimento de cada subintervalo e expresse a soma de Riemann associada à partição P.

Espera-se que os estudantes que operam nesse nível sejam capazes de generalizar a soma de Riemann para uma função qualquer. Assim, fazem-se necessárias respostas mais abrangentes, onde os estudantes sejam incentivados a fazer uso da linguagem matemática usual.

A princípio, devem buscar resolver as todas as questões individualmente. Posteriormente, deve haver o momento para a partilha das respostas encontradas, a discussão sobre essas repostas com mediação do professor, correção da linguagem inadequada caso ocorra, busca por outras formas de resolução dos problemas e um último momento de sistematização de toda a atividade, passando-se assim por todas as fazes do modelo, exceto a primeira, nessa tarefa.

Espera-se encontrar que, caso a partição seja uniforme, a expressão que corresponde ao comprimento de cada partição seja dada por:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

onde a e b são os limites do intervalo e n é o número de subintervalos.

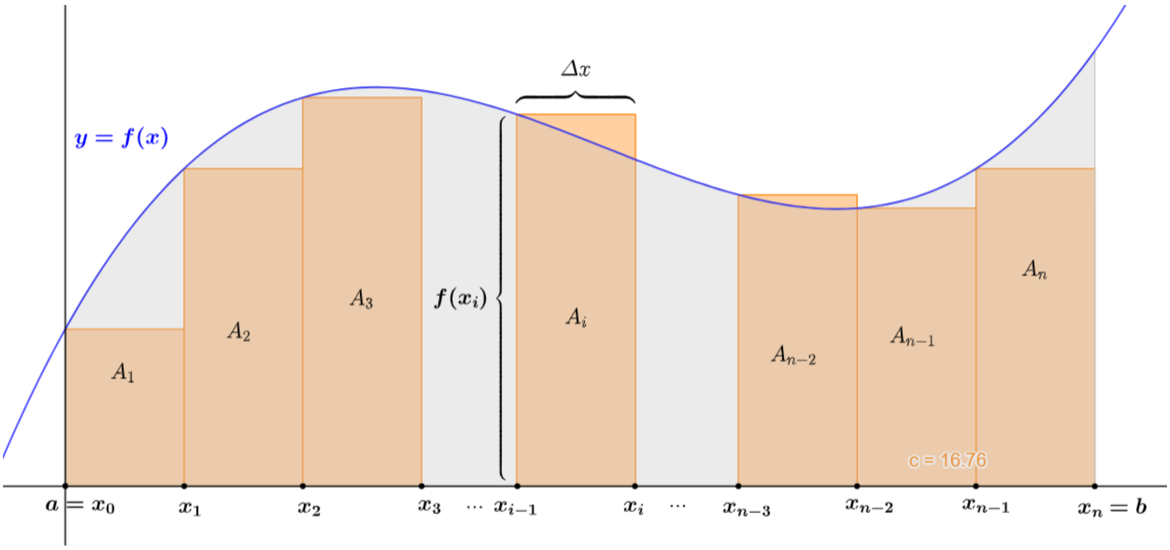
Já a soma de Riemann associada à partição P é dada por:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

QUESTÃO 02 – Esboce um gráfico representando a generalização para a soma de Riemann à esquerda. Defina a expressão para essa soma.

Espera-se que o gráfico esboçado seja similar ao gráfico da questão anterior, mas com os intervalos convenientemente ajustados conforme as aproximações tomadas pela esquerda, como na imagem abaixo:

Figura 23 – Generalização da soma de Riemann pela esquerda



Fonte: Elaborado pelo autor

O intuito é perceber que o intervalo tomado muda a depender da escolha da aproximação pela esquerda ou pela direita. Enquanto que, pela direita, temos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Pela esquerda, temos

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

QUESTÃO 03 – Verifique que a área sob $y = x^2$ definida no intervalo $[0, 3]$, é igual a 9 utilizando a definição de soma de Riemann e uma partição regular de n subintervalos.

Espera-se perceber noções relativas à ideia de infinito ou de crescimento indefinido, ainda que o ensino básico não contemple o estudo de limites, pois será imprescindível para efetuar a verificação.

Uma possível maneira de organizar a solução desse problema seria procedendo da seguinte maneira:

Primeiro, descreve-se a a soma de Riemann para a função descrita, que é

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

onde:

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

é a largura de cada subintervalo e $x_i = \dfrac{3i}{n}$ é o i-ésimo subintervalo. Subistituindo, vem:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{n}$$

$$S_n = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{9i^2}{n^2}$$

$$S_n = \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Sabendo que a soma dos quadrados dos primeiros n inteiros é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Substituindo essa expressão na soma de Riemann, temos

$$S_n = \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_n = \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}$$

Desenvolvendo e simplificando, vem

$$S_n = \frac{18n^2 + 27n + 9}{2n^2}$$

Separando as parcelas

$$S_n = 9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2}$$

À medida que $n \to \infty$, a soma $\dfrac{27}{2n} + \dfrac{9}{2n^2}$ tende a zero e conclui-se que $S_n = 9$, conforme pretendia-se verificar.

QUESTÃO 04 – Dada a função $f(x) = 2x + 3$ definida no intervalo $[1, 4]$, calcule a área sob a curva utilizando a definição da soma de Riemann à direita. Considere uma partição uniforme do intervalo em n subintervalos de igual comprimento. Demonstre que a soma de Riemann para essa função se aproxima de um valor constante à medida que n aumenta e determine essa constante.

Esse problema da Questão 04 resolve-se de forma análoga à Questão 03, entretanto, aqui o número para o qual a soma converge não foi dado.

Uma possível maneira de organizar a solução desse problema, seria fazendo-se:

O comprimento de cada subintervalo Δx é

$$\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

Os pontos x_i são dados por

$$x_i = 1 + i \cdot \Delta x = 1 + i \cdot \frac{3}{n},$$

Tomando em $f(x_i)$

$$f(x_i) = 2\left(1 + i \cdot \frac{3}{n}\right) + 3$$

$$f(x_i) = 5 + \frac{6i}{n}$$

A soma de Riemann à direita é dada por:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(5 + \frac{6i}{n}\right) \cdot \frac{3}{n}$$

$$S_n = \frac{3}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 5 + \sum_{i=1}^{n} \frac{6i}{n}\right)$$

Sabendo que a soma dos primeiros n inteiros é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Substituindo na soma de Riemann, temos

$$S_n = \frac{3}{n}\left(5n + \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

Simplificando, vem

$$S_n = \frac{3}{n}\,(5n + 3n + 3)$$

$$S_n = \frac{3}{n} \cdot 8n + \frac{3}{n} \cdot 3$$

$$S_n = 24 + \frac{9}{n}$$

À medida que $n \to \infty$, o termo $\frac{9}{n}$ tende a zero. Portanto, a soma de Riemann se aproxima de 24, como queria-se demonstrar.

4 Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, foi possível observar que a combinação entre o modelo de Van Hiele e a soma de Riemann oferece um caminho viável para professores e estudantes que buscam compreender o cálculo de áreas sob curvas. Ao utilizar o modelo de Van Hiele, seguindo principalmente as fases de aprendizagem alinhadas a uma sequência didática, acreditamos estar contribuindo com o trabalho docente ao fornecer um material norteador.

A proposta apresentada nesta dissertação reforça a importância de se pensar em metodologias de ensino que considerem os diferentes níveis de pensamento dos estudantes. Isso é evidenciado pelo fato de que alunos de uma mesma série possuem conhecimentos distintos, como demonstram os resultados do SAEB. Saber calcular áreas de figuras planas ou áreas curvilíneas é uma das competências que o estudante deve adquirir no ensino médio, conforme estabelecido na BNCC. Além disso, essa competência tem um caráter interdisciplinar, sendo essencial para a compreensão de fenômenos naturais, especialmente no componente de Física, o que reforça a relevância de trabalhos que abordam essa temática, como este.

Ao comparar este trabalho com estudos anteriores na área, percebe-se que ele complementa pesquisas que destacam a importância de estratégias diversificadas no ensino de Matemática na educação básica. Embora o modelo de Van Hiele tenha sido amplamente explorado e aplicado em contextos de ensino de geometria, esta dissertação expande seu uso ao aplicá-lo no estudo da soma de Riemann, contribuindo para uma compreensão de um assunto antecede o cálculo integral.

Esperamos que este trabalho incentive e auxilie profissionais que buscam diferentes estratégias para obter êxito no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Também esperamos que ele possa influenciar pesquisas futuras que utilizem o modelo de Van Hiele como apoio no estudo de outras áreas da Matemática, além da geometria. Por fim, desejamos que este trabalho inspire estudos relacionados a outras técnicas de cálculo de áreas sob curvas.

Referências

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2019.

BRASIL. *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

CARDOSO, E. de J. Níveis de aprendizagem para o tópico de funções no ensino médio. *Pesquisa e Ensino*, v. 1, p. e202008–e202008, 2020.

CROWLEY, M. L. The van hiele model of the development of geometric thought. *Learning and teaching geometry, K-12*, Citeseer, p. 1–16, 1987.

DUARTE, P. V. E.; FUSTER, J. L. L. Aspectos comparativos en la extensión del modelo de van hiele al concepto de aproximación local. *Suma*, v. 44, p. 44–52, 2003.

EVES, H. W. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Unicamp, 2004.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo: Volume 1*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

HIELE, P. M. V. *Structure and insight*: A theory of mathematics education. Orlando, EUA: Academic Press, 1986.

Instituto Federal da Bahia – IFBA. *Anexo I: Ementário Geral do Curso de Licenciatura em Matemática*. 2024. Acesso em: 13 jun. 2024. Disponível em: <https://portal.ifba.edu.br/barreiras/paginas-menu-cursos/cursos/superior/matematica/documentos/anexo-i-ementario_geral.pdf>.

KALEFF, A. M. M. R. *Novas Tecnologias no Ensino da matemática-Tópicos em Ensino de Geometria: a sala de aula frente ao laboratório de ensino e à história da Geometria*. 2. ed. Niterói: CEAD/UFF, 2016. 223 p. ISBN 978-85-6200-750-1.

KALEFF, A. M. M. R.; HENRIQUES, A. de S.; REI, D. M.; FIGUEIREDO, L. G. Desenvolvimento do pensamento geométrico–o modelo de van hiele. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 9, n. 10, p. 21–30, 1994.

LANHOSO, L. B. Análise dos níveis do pensamento geométrico dos estudantes ingressantes em um curso de licenciatura em matemática na perspectiva de van hiele. Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2020.

LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

LÓPEZ, C. M. J.; CARRERAS, P. P. La noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de van hiele. *Educación Matemática*, Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, v. 13, p. 68–80, 2001.

MOL, R. S. *Introdução à História da Matemática*. Belo Horizonte: Editora CAED-UFMG, 2017.

PASTOR, A. J. *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tese (Doutorado) — Universitat de Valencia (Spain), 1993.

PUSEY, E. L. et al. The van hiele model of reasoning in geometry: a literature review. 2003.

RIBEIRO, L. C. Discussões sobre o cálculo de áreas: uma proposta heurística para o ensino-aprendizagem. Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 2022.

ROQUE, T. *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SILVA, E. O. Geometria espacial na eja: uma proposta de ensino à luz do modelo van hiele com auxílio do software de geometria dinâmica geogebra. Universidade Federal de Goiás, 2021.

SILVA, L.; CANDIDO, C. C. Modelo de aprendizagem de geometria do casal van hiele. *Relatório de Iniciação científica. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo*, 2007.

STEWART, J. *Cálculo: Volume 1*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Universidade do Estado da Bahia – UNEB. *Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática – Campus VII*. 2021. Acesso em: 13 jun. 2024. Disponível em: <https://www.dedc7.uneb.br/wp-content/uploads/2021/05/Matematica-Projeto-Pedagogico.pdf>.

Universidade Federal do Oeste da Bahia – UFOB. *Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática*. 2023. Acesso em: 13 jun. 2024. Disponível em: <https://ufob.edu.br/ensino/graduacao/matematica/2023/ppc_licenciatura-em-matematica_2023-1_versao_final.pdf>.

WALLE, J. A. Van de. *Matemática no Ensino Fundamental*: Formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZEFERINO, R. C. M. A modelagem matemática como estratégia facilitadora no processo de ensino-aprendizagem de áreas e perímetros de figuras planas na rede estadual de ensino. Universidade Federal do Espírito Santo, 2023.

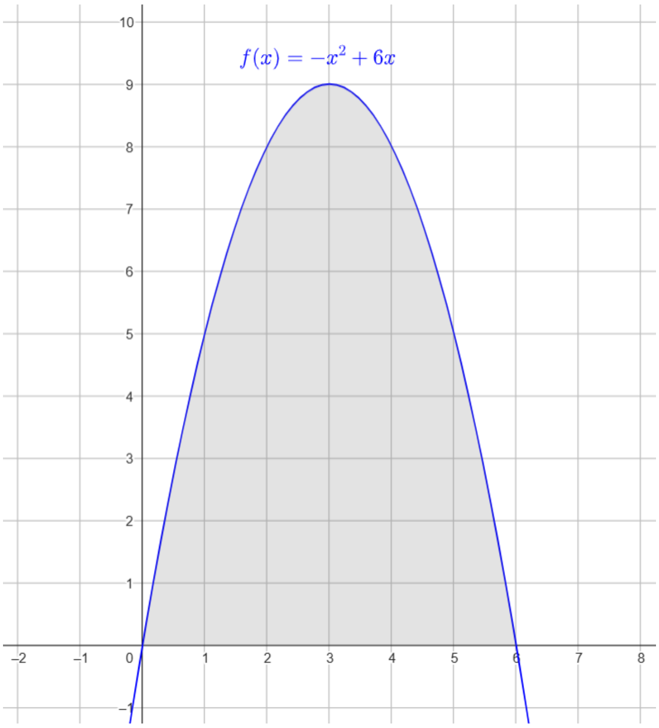
APÊNDICE A – Tarefa 1: Explorando a ideia de aproximação de áreas sob curvas

Escola: ____

Turma: ______________________ Série: ___________________ Turno: _________________

Tarefa 1: Explorando a ideia de aproximação de áreas sob curvas

QUESTÃO 01 – QUESTÃO 01 - Considere a função $f(x) = -x^2 + 6x$, cujo gráfico que está esboçado abaixo. A área destacada está delimitada pelo gráfico da função, pelo eixo x e pelas retas x = 0 e x = 6.



Responda:

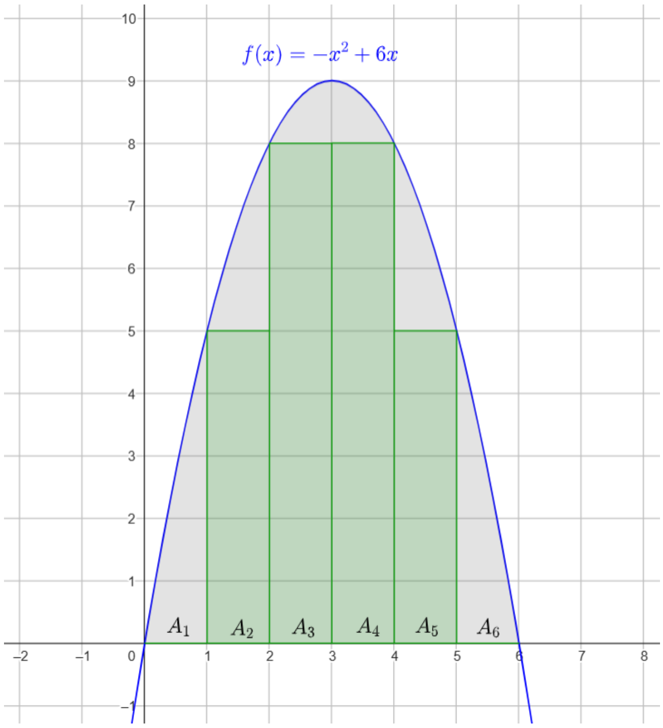
a) Em qual ou quais pontos esse gráfico toca o eixo das abscissas?

b) Em qual ou quais pontos o gráfico toca o eixo das ordenadas?

c) Essa função tem ponto de máximo ou de mínimo? Caso haja, determine suas coordenadas.

d) Considerando que nosso objetivo seja determinar a área da região em cinza, como podemos fazer isto?

QUESTÃO 02 – Considerando-se a situação da questão anterior, suponha que umas das estratégias usadas para determinar uma aproximação da área citada foi inscrever retângulos abaixo da curva e determinar a soma das áreas desses retângulos. Na figura abaixo, foram usados retângulos de mesma base em partição regular.



a) Quantas partições foram feitas?

b) Olhando para o gráfico, é possível saber qual é a medida da área de cada retângulo?

c) Complete a tabela abaixo e dê o valor de $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$.

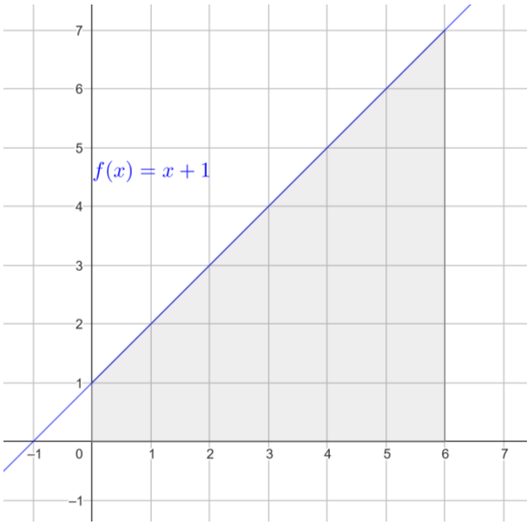
Retângulo	Base	Altura	Área
A_1			
A_2			
A_3			
A_4			
A_5			
A_6			

d) Qual a relação entre as áreas dos três primeiros retângulos e dos três últimos?

e) Você considera o resultado obtido no item (d) um bom valor para expressar a área de toda a região? Por quê?

f) O que fazer para melhorar a aproximação da área?

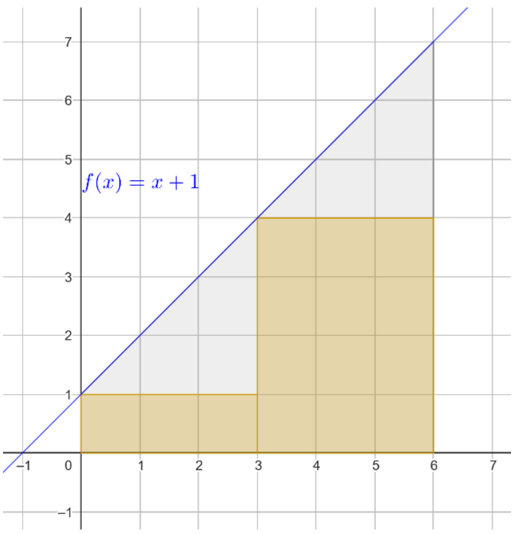
QUESTÃO 03 – Seja a função $f(x) = x + 1$, cujo gráfico está representado a seguir. A área sob o gráfico no intervalo de $x = 0$ a $x = 6$ foi destacada.

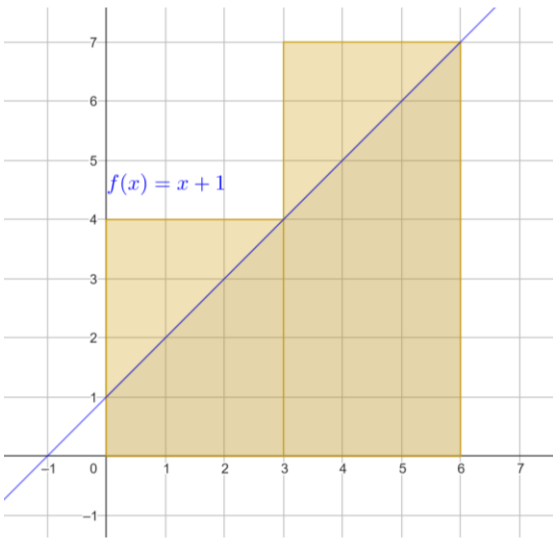


a) Determine a área exata da região hachurada.

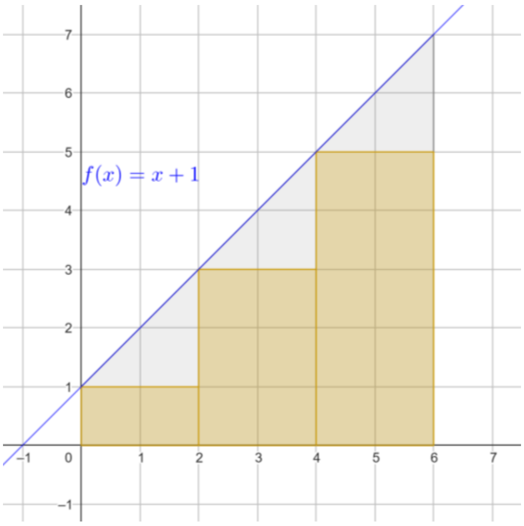
Nos itens (b), (c) e (d) a seguir fizemos aproximações da área real usando retângulos desenhados abaixo do gráfico tomadas as extremidades à esquerda, e retângulos acima do gráfico tomadas as extremidades à direita. Determine a soma dos retângulos em cada situação:

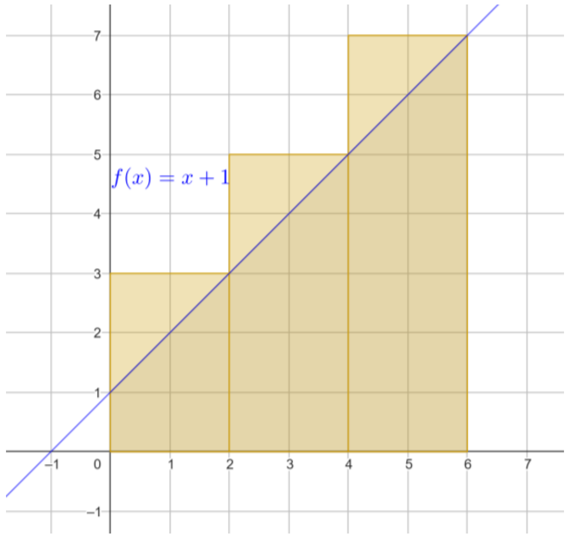
b) Usando 2 retângulos cujos lados sobre o eixo x têm o mesmo comprimento



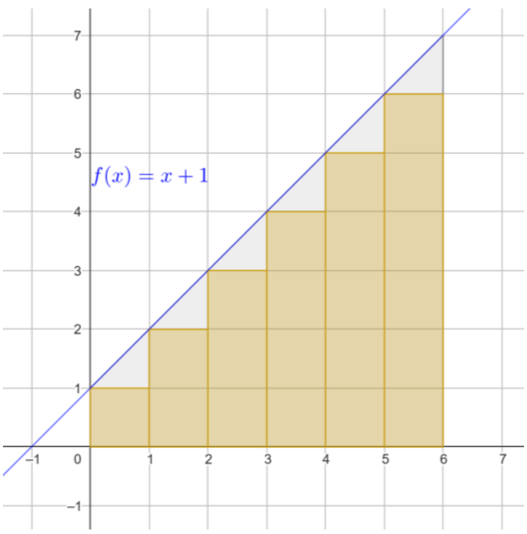


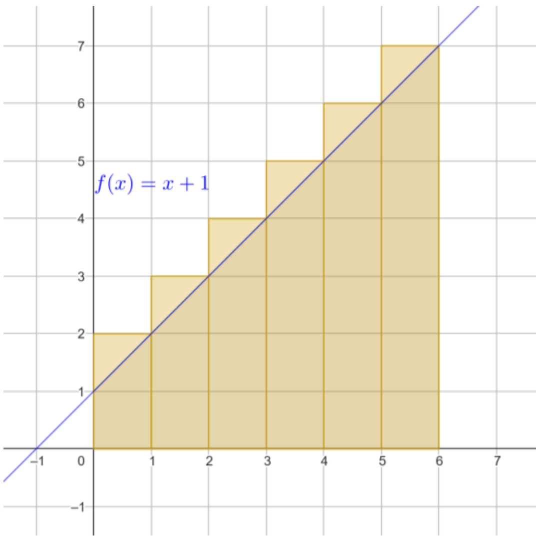
c) Usando 3 retângulos cujos lados sobre o eixo x têm o mesmo comprimento.





d) Usando 6 retângulos cujos lados sobre o eixo x têm o mesmo comprimento





e) O que se pode afirmar à medida em que se aumenta a quantidade de partições?

f) Compare as aproximações encontradas nos itens (b), (c) e (d). Pode-se afirmar que uma delas é melhor do que as outras? Por quê?

QUESTÃO 04 – Considere as figuras apresentadas nas letras a), b), c) e d). Para cada uma, responda de acordo com os itens abaixo:

I – A aproximação é pela esquerda ou pela direita;

II – A função é crescente ou decrescente no intervalo considerado;

III – Ocorre uma subestimação ou superestimação da área;

IV – A quantidade de partições.

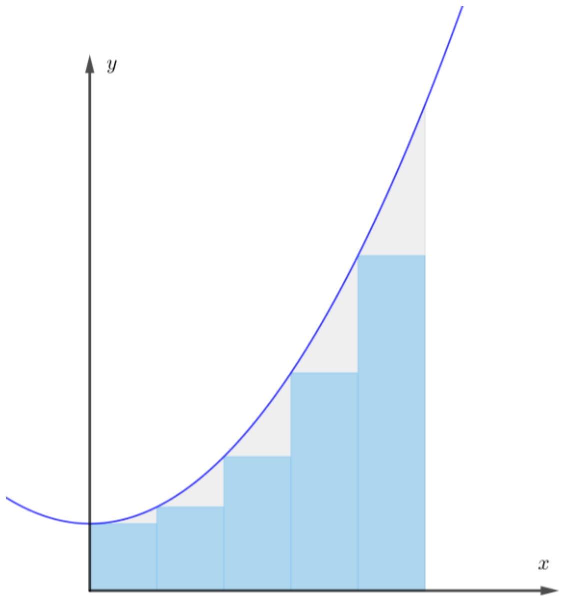
a) Com relação ao gráfico da função representada na figura abaixo, responda:

I: ___________________

II: ___________________

III: ___________________

IV: ___________________



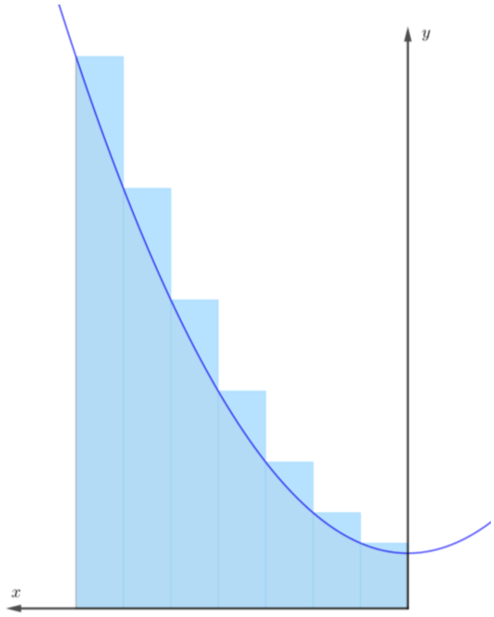
b) Com relação ao gráfico da função representada na figura abaixo, responda:

I: ___________________

II: ___________________

III: ___________________

IV: ___________________



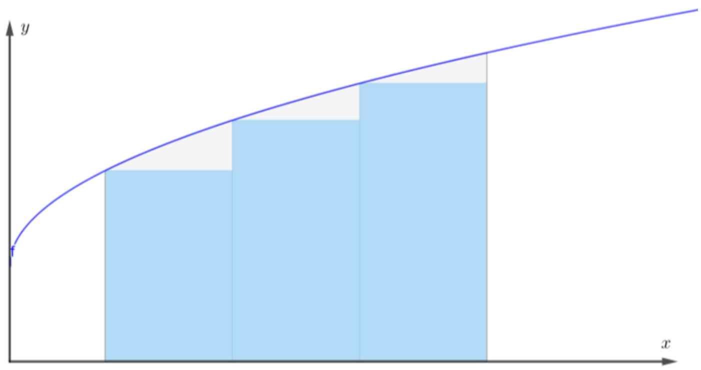
c) Com relação ao gráfico da função representada na figura abaixo, responda:

I: ___________________

II: ___________________

III: ___________________

IV: ___________________



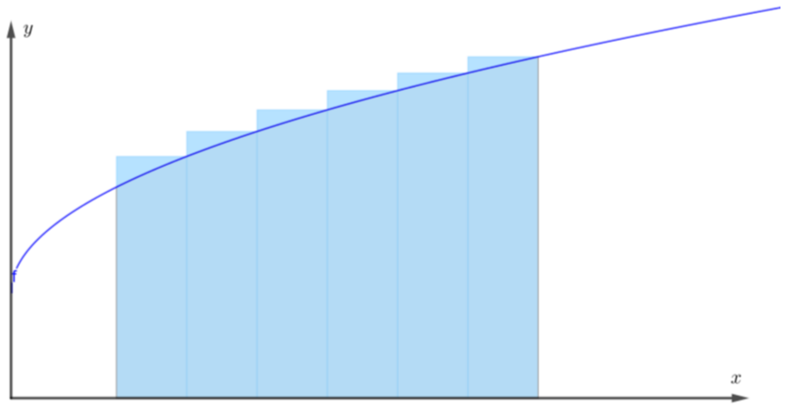
d) Com relação ao gráfico da função representada na figura abaixo, responda:

I: ___________________

II: ___________________

III: ___________________

IV: ___________________



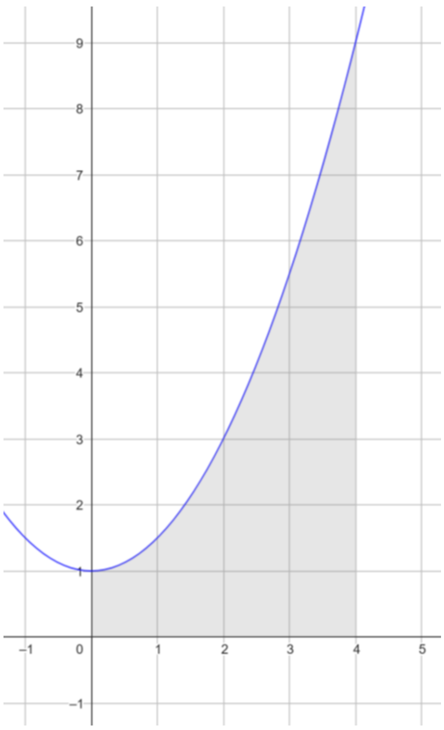
I: ___________________

II: ___________________

III: ___________________

IV: ___________________

QUESTÃO 05 – Considere a área abaixo do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$, delimitada no intervalo de x = 0 a x = 4.



Considerando partições de mesma largura, calcule as aproximações para esta área usando:

a) 4 partições à esquerda.

b) 4 partições à direita.

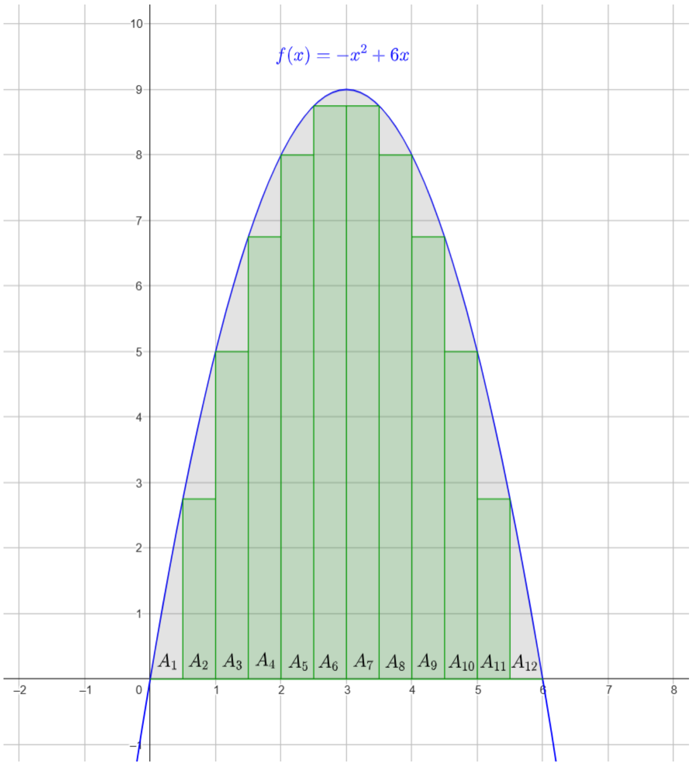
APÊNDICE B – Tarefa 2: Estimando áreas usando a notação de somatório

Escola: ____

Turma: ______________________ Série: ___________________ Turno: _________________

Tarefa 2: Estimando áreas usando a notação de somatório

QUESTÃO 01 – Na função $f(x) = -x^2 + 6x$, considere que a área entre o gráfico da função e o eixo x foi estimada usando doze retângulos, conforme ilustração abaixo.



Sabendo que o comprimento da base de cada retângulo é chamado Δx, complete a tabela abaixo conforme exemplo da primeira linha.

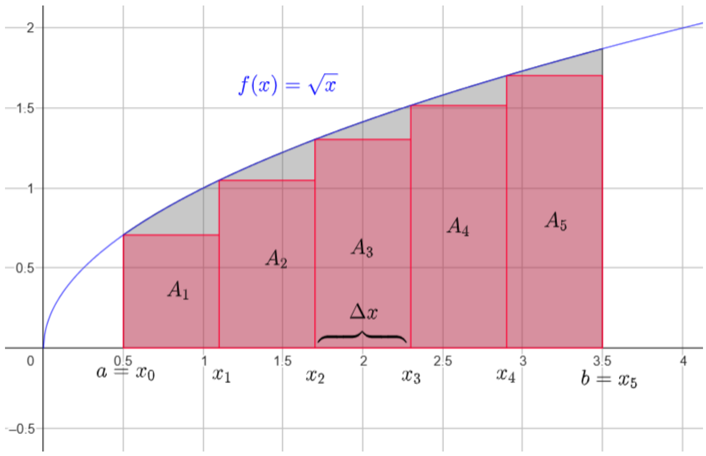
Retângulo	Base	Altura	Área
A_1	___	$f(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 = 0$	$\Delta x \cdot f(0) =$ ___ $\cdot\, 0 = 0$
A_2			
A_3			
A_4			
A_5			
A_6			
A_7			
...	...	...	...
A_{12}			

a) Qual o valor de Δx?

b) Caso não fosse possível determinar o valor de Δx apenas olhando para o gráfico, que cálculo poderia ser feito a fim de determiná-lo

c) Qual é o valor da soma das áreas $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + \cdots + A_{12}$?

QUESTÃO 02 – A área entre a função $f(x) = \sqrt{x}$ e o eixo x foi particionada em 5 retângulos no intervalo de $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$, conforme figura.



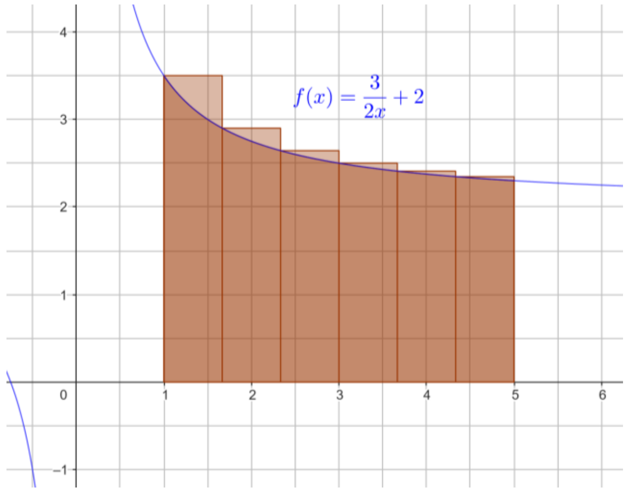
a) Como determinar o valor de Δx nessa situação? Escreva a expressão.

b) Como determinar x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 considerando o valor inicial $a = 0{,}5$ e as cinco partições regulares, ou seja, n = 5?

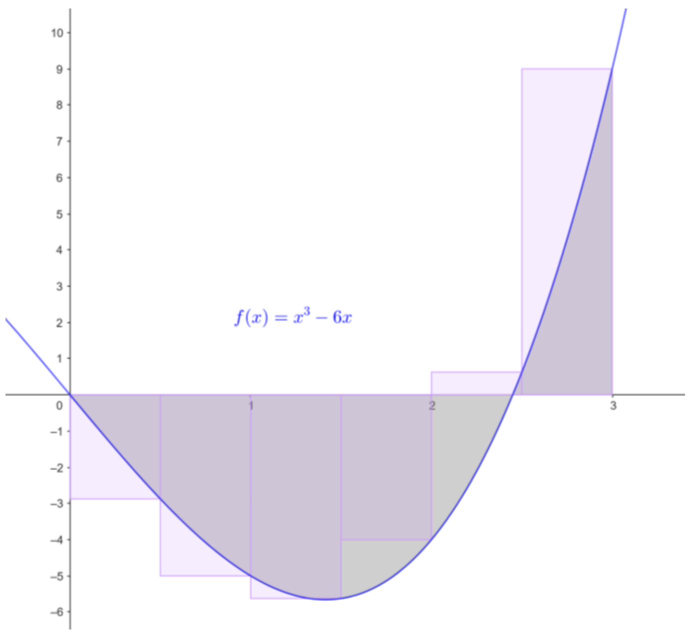
c) Determine o valor aproximado dessa área.

d) Determine uma expressão para $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ usando a notação de somatório.

QUESTÃO 03 – Faça uso da notação de somatório para aproximar a área entre $g(x) = \frac{3}{2x} + 2$ e o eixo x no intervalo $[1, 5]$ usando uma soma de Riemann à direita com 6 partições iguais.



QUESTÃO 04 – Determine a soma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$ tomando as extremidades esquerdas no intervalo $[0, 3]$ e $n = 6$, conforme figura abaixo.



a) Por que o valor encontrado não representa a área hachurada?

b) O que o valor encontrado representa?

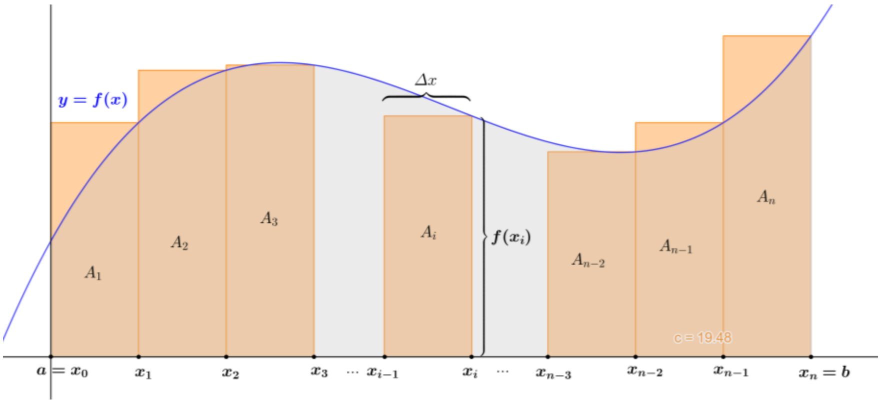
APÊNDICE C – Tarefa 3: Generalização da Soma de Riemann

Escola: ____

Turma: ____________________ Série: _________________ Turno: _______________

Tarefa 3: Generalização da Soma de Riemann

QUESTÃO 01 – Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo [a, b]. Considere uma partição P $= \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$, onde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ é uma subdivisão do intervalo original.



Escreva a expressão que corresponde ao comprimento de cada subintervalo e expresse a soma de Riemann associada à partição P.

QUESTÃO 02 – Esboce um gráfico representando a generalização para a soma de Riemann à esquerda. Defina a expressão para essa soma.

QUESTÃO 03 – Verifique que a área sob $y = x^2$ definida no intervalo $[0, 3]$, é igual 9 utilizando a definição de soma de Riemann e uma partição regular de n subintervalos.

QUESTÃO 04 – Dada a função $f(x) = 2x + 3$ definida no intervalo $[1, 4]$, calcule a área sob a curva utilizando a definição da soma de Riemann à direita. Considere uma partição uniforme do intervalo em n subintervalos de igual comprimento. Demonstre que a soma de Riemann para essa função se aproxima de um valor constante à medida que n aumenta e determine essa constante.