INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL

CAMPUS CANOAS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ISAURA CARDOSO LINDE

APRENDER E ENSINAR GEOMETRIA DE MODO INTEGRADO À ARITMÉTICA E À ÁLGEBRA: POSSIBILIDADE PARA A CONSTRUÇÃO DE GENERALIZAÇÕES EM MATEMÁTICA

CANOAS – RS

2024

ISAURA CARDOSO LINDE

APRENDER E ENSINAR GEOMETRIA DE MODO INTEGRADO À ARITMÉTICA E À ÁLGEBRA: POSSIBILIDADE PARA A CONSTRUÇÃO DE GENERALIZAÇÕES EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Matemática ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, no campus Canoas do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS).

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Carina Loureiro Andrade

Coorientadora: Prof.ª Dr.ª Jaqueline Molon

CANOAS – RS

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L743a Linde, Isaura Cardoso

Aprender e ensinar geometria de modo integrado à aritmética e à álgebra: possibilidade para a construção de generalizações em matemática / Isaura Cardoso Linde. - 2024.
192 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Canoas, BR-RS, 2024.

Orientadora: Profa. Dra. Carina Loureiro Andrade.

1. Matemática: ensino e aprendizagem. 2. Construção de generalizações. 3. Integração de geometria, aritmética e álgebra. I. Andrade, Carina Loureiro, orientadora. II. Título.

CDU 51

Elaborado por: Sabrina Clavé Eufrásio CRB-10/1670

ISAURA CARDOSO LINDE

APRENDER E ENSINAR GEOMETRIA DE MODO INTEGRADO À ARITMÉTICA E À ÁLGEBRA: POSSIBILIDADE PARA A CONSTRUÇÃO DE GENERALIZAÇÕES EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Matemática ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, no campus Canoas do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS).

Canoas, 2 de Dezembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Carina Loureiro Andrade
Orientadora
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul

____

Dr. Nicolau Matiel Lunardi Diehl
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul

____

Profª. Drª Raquel Milani
Universidade de São Paulo

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu companheiro Fabricio, que me deu todo o suporte necessário, fazendo todos os esforços para me ajudar. Desde os momentos em que, com seu humor, aliviou a tensão que eu enfrentava, até os momentos em que respeitou meu espaço para estudar, você foi essencial em todo este processo.

Quero expressar minha gratidão à minha família e aos amigos que sempre apoiaram e incentivaram minha busca pelo crescimento, compreendendo minha ausência em tantos momentos. Em especial, agradeço à Bruna, que sempre me apresentou o PROFMAT e me inspirou a trilhar esse caminho, e ao Fernando, que, ao me ligar no dia do ENA, lembrou-me do compromisso, sendo essencial para que eu participasse, pois sem ele, não teria feito a prova.

Aos colegas do mestrado, deixo meus sinceros agradecimentos. Vocês foram essenciais para me manter motivada e focada, com palavras de apoio, caronas, encontros de estudo, trocas de experiências e valiosos ensinamentos. Sinto-me profundamente acolhida pela turma e levarei a amizade e os momentos compartilhados.

Agradeço aos professores do mestrado, inclusive àqueles com quem não tive disciplinas diretamente, mas que fizeram parte da minha jornada por meio de palestras, substituições ou outras interações. Tive o privilégio de aprender com professores dedicados e motivadores, que ensinam com qualidade e disposição, respondendo a dúvidas e promovendo reflexões. Além disso, o IFRS me proporcionou a oportunidade de crescer como professora ao retornar ao papel de aluna, inspirando-me a aprimorar minha prática docente por meio dos exemplos de excelência que encontrei. Destaco a professora Claudinha, que incentivou a turma a participar do 6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, o professor Nicolau, que se dispôs a realizar encontros virtuais para tirar dúvidas, sempre incentivando e demonstrando genuíno interesse pelo nosso aprendizado, e o professor Claudiomir, que me ajudou a ajustar as medidas para o corte utilizando a cortadora a laser.

Deixo um agradecimento especial às professoras Carina e Jaqueline, minhas orientadoras. Não há palavras que expressem plenamente minha gratidão. Foi uma honra compartilhar esse tempo com vocês. Aprendi imensamente, e a orientação de vocês foi essencial em cada etapa deste trabalho.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro concedido. Este trabalho foi desenvolvido com o suporte da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Esta dissertação propõe e analisa a aplicação de uma sequência didática que integra conceitos de aritmética, geometria, e álgebra para o estudo de polígonos convexos e de relações associadas aos seus ângulos internos e externos, oportunizando a construção generalização matemática. A sequência foi elaborada começando com tarefas simples e aumentando progressivamente em dificuldade, tendo como objetivo criar um ambiente de aprendizado participativo e exploratório, incentivar competências como o pensamento crítico, a resolução de problemas e a autonomia. Essa sequência foi aplicada em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental, em uma escola da rede municipal no município de Canoas - RS, onde a pesquisadora atua como professora. A proposta promoveu o uso de materiais concretos em MDF produzidos pelos alunos com auxílio do GeoGebra e de uma cortadora a laser, proporcionando uma abordagem experimental e interativa para explorar conceitos geométricos, propriedades aritméticas e formalizações algébricas. Além de investigar a capacidade dos alunos em construir generalizações e explorar relações matemáticas, buscou-se avaliar o impacto da sequência didática no engajamento e na motivação dos estudantes, incentivando a compreensão das propriedades matemáticas por meio da experimentação e da reflexão crítica. A pesquisa, de natureza qualitativa, analisou dados coletados por meio de observações e registros dos estudantes. O uso de atividades exploratórias e a integração entre diferentes áreas do conhecimento matemático revelaram-se estratégias promissoras para enriquecer os processos de ensino e de aprendizagem e promover competências previstas pela BNCC, como o pensamento crítico e a resolução de problemas.

Palavras chave: Construção de generalizações; Integração de geometria, aritmética e álgebra; Sequência didática; Estudo de polígonos convexos.

ABSTRACT

This dissertation proposes and analyzes the application of a didactic sequence that integrates concepts of arithmetic, geometry, and algebra for studying convex polygons and the relationships associated with their internal and external angles, offering opportunities for mathematical generalization. The sequence was designed to start with simple tasks and progressively increase in difficulty, aiming to create a participatory and exploratory learning environment that fosters competencies such as critical thinking, problem-solving, and autonomy. This sequence was implemented in an 8th-grade class at a public school in the municipality of Canoas-RS, where the researcher works as a teacher. The proposal encouraged using MDF-based concrete materials produced by the students with the assistance of GeoGebra and a laser cutter, providing an experimental and interactive approach to explore geometric concepts, arithmetic properties, and algebraic formalizations. Beyond investigating students' abilities to construct generalizations and explore mathematical relationships, this study aimed to evaluate the impact of this didactic sequence on student engagement and motivation, encouraging comprehension of mathematical properties through experimentation and critical reflection. This qualitative research analyzed data collected through observations and student records. The use of exploratory activities and the integration of different areas of mathematical knowledge proved to be promising strategies for enriching teaching and learning processes and promoting competencies outlined by the BNCC, such as critical thinking and problem-solving.

Keywords: Construction of Generalizations; Integration of Geometry, Arithmetic, and Algebra; Didactic Sequence; Study of Convex Polygons.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A aprendizagem de geometria na educação básica desempenha um papel fundamental no desenvolvimento das habilidades cognitivas e visuais dos alunos. Nesse cenário, esta pesquisa buscou investigar e implementar uma abordagem participativa no ensino e na aprendizagem de geometria, na qual os alunos desempenham um papel ativo na construção do conhecimento geométrico. Para tanto, optou-se por trabalhar geometria de forma integrada com aritmética e álgebra. Assim, acredita-se que é possível não apenas melhorar a compreensão da geometria, mas também fortalecer as habilidades matemáticas dos alunos de forma geral, ajudando-os a desenvolverem habilidades de resolução de problemas e seu pensamento crítico. Entende-se pensamento crítico como uma capacidade de questionar informações e dados que são recebidos, buscando questionar sua veracidade ou compreender sua origem.

A motivação para a realização desta pesquisa reside nas lacunas observadas durante o processo de ensino de geometria no decorrer do nível básico, frequentemente resultando em uma compreensão superficial ou na falta de interesse por parte dos estudantes, o que impacta diretamente no processo de aprendizagem. Abordagens baseadas em memorização e aplicação de fórmulas, que não derivam de um processo de construção e de compreensão dos significados associados, podem não fomentar uma compreensão sólida e duradoura dos conceitos geométricos e, por consequência, resultar em desconexão entre o conteúdo escolar e sua aplicação na vida cotidiana dos alunos. A simples apresentação de fórmulas e processos mecânicos, sem um entendimento profundo por parte dos estudantes, pode ser um obstáculo, até mesmo um aspecto desmotivador, para o processo de aprendizado.

Dessa forma, este trabalho busca explorar elementos da geometria que não se limitam apenas a visualização de figuras e aplicação de fórmulas, mas envolve a compreensão das relações espaciais, padrões e propriedades dos objetos, considerando a integração entre aritmética, geometria e álgebra. Portanto, a partir da sequência didática aqui proposta busca-se uma abordagem que permita aos alunos alcançarem uma compreensão profunda dos princípios subjacentes às fórmulas e procedimentos matemáticos que foram incluídos nas atividades desenvolvidas para o presente estudo, as quais incentivam a construção de generalizações e a utilização dos resultados matemáticos construídos por cada estudante nas atividades subsequentes.

Com base na problemática exposta, o objetivo geral deste trabalho é analisar de que forma uma sequência didática pautada na integração de atividades aritméticas, geométricas e algébricas pode favorecer a construção de generalizações em matemática.

A fim de possibilitar tal análise foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver uma sequência didática que integre atividades de caráter aritmético, geométrico e algébrico para o estudo de polígonos e de relações associadas aos seus ângulos internos e externos.
- Aplicar a sequência didática desenvolvida, identificando a motivação, o interesse e os principais desafios emergentes durante a realização das atividades propostas.
- Avaliar o impacto da sequência didática na dinâmica da sala de aula durante sua aplicação como recurso para oportunizar a construção de generalizações.
- Realizar ajustes na sequência didática a partir da experiência da aplicação.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

No presente capítulo, serão abordados conceitos fundamentais relacionados ao ensino de aritmética, geometria e álgebra, divididos em duas seções principais. Na seção 2.1 discute-se a evolução histórica do ensino dessas áreas no Brasil, com ênfase especial no papel da geometria e seu progressivo abandono nas escolas. Serão apresentados aspectos que influenciaram o enfraquecimento da geometria ao longo do tempo, bem como as dificuldades enfrentadas pelos professores e estudantes nos processos de ensino e de aprendizagem dos seus conceitos.

A seção 2.2 explora a importância da experimentação e investigação no ensino de matemática, com foco no alcance da generalização por meio da integração entre aritmética, geometria e álgebra. Destaca-se, também, a relevância dos cenários de investigação (Skovsmose, 2000) e da experimentação em matemática como ferramenta pedagógica para o alcance desse objetivo.

2.1 Aritmética, geometria e álgebra no ensino de matemática no Brasil

Esta seção aborda a trajetória do ensino de aritmética, geometria e álgebra no Brasil, destacando as principais reformas e desafios que marcaram a integração dessas disciplinas no currículo escolar. Pavanello (1989) esclarece que as áreas da matemática, como aritmética, álgebra e geometria, eram tratadas como disciplinas independentes, ministradas por diferentes professores. A partir da unificação dessas áreas pela reforma de Francisco Campos em 1931, observa-se uma transformação no modo como a matemática passou a ser ensinada, deixando de lado o ensino isolado de cada conceito e buscando uma abordagem mais integrada (Miguel; Fiorentini; Miorim, 1992).

O decreto 19890, de 18 de abril de 1931, trouxe diretrizes pedagógicas relacionadas às disciplinas escolares. Nesse contexto, os três pontos de vista matemáticos — aritmético, algébrico e geométrico — passaram a ser integrados como uma unidade. Como resultado, a disciplina passou a ser lecionada por um único professor em cada série. Pavanello explica que o texto desse decreto enfatizava a necessidade de os alunos se tornarem descobridores e não meros receptores de conhecimento. Além disso, recomendava-se abandonar completamente a memorização sem raciocínio e adotar um ensino de geometria intuitiva e experimental, indicando uma mudança de paradigma que valorizava o pensamento crítico e a compreensão ativa no aprendizado da matemática.

No entanto, ao longo das décadas, a geometria acabou sendo relegada a segundo plano, principalmente em decorrência de reformas curriculares e mudanças nas prioridades pedagógicas (Pavanello, 1989). Nesse contexto, não havia uma preocupação significativa com aplicações práticas, e o ensino permanecia predominantemente abstrato.

Pavanello (1989) enfatiza que, na década de 70, a orientação era de que a geometria fosse abordada sob o enfoque das transformações, um tema que a maioria dos professores não dominava. Conforme a autora, isso levou muitos a abandonarem o ensino da geometria em qualquer abordagem, que junto com o movimento da matemática moderna levaram à ênfase no ensino da álgebra em detrimento das demais áreas. Nesse sentido, Lorenzato (1995) destaca:

> A proposta da Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje. Presentemente, está estabelecido um círculo vicioso: a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la (p. 4).

Entretanto, Pavanello (1989, p. 166) observa que, nas escolas particulares e em instituições militares, o ensino de geometria ainda ocorria, afirmando que "a tradicional dualidade do ensino brasileiro poderia ser expressa como: 'escola onde se ensina geometria' (escola para a elite) e 'escola onde não se ensina geometria' (escola para o povo)". No final do século XX e início do XXI o ensino de geometria voltou a ganhar espaço na educação brasileira, porém não atingindo, ainda, um grau satisfatório no ensino (Teixeira; Boni; Kirnev, 2017).

Atualmente, considera-se que a geometria é de grande importância para o entendimento de outros conteúdos dentro da própria matemática, bem como para a correlação com as outras áreas (Lorenzato, 2010). Além disso, a geometria está presente na vida cotidiana e em diversas áreas do conhecimento, o que reforça sua relevância no ensino e na formação dos alunos.

Nos objetivos específicos de matemática estabelecidos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), percebe-se uma ênfase no desenvolvimento do pensamento geométrico, fundamental para o progresso nas competências de investigação de propriedades, formulação de hipóteses e construção de argumentos geométricos sólidos, relacionados ao estudo de posições e movimentos no espaço, bem como às formas das figuras geométricas e às relações entre seus elementos (Brasil, 2017). Portanto, o ensino da geometria se mostra não apenas desejável, mas também necessário para uma formação matemática completa e abrangente:

> Sabemos que, por várias razões, a geometria não tem ocupado o seu devido lugar no ensino da matemática. Porém, é possível, desejável e necessário que o ensino dessa parte importante da matemática seja fortemente enfatizado, porque, como já vimos, sem experiência geométrica não se consegue raciocinar geometricamente e, por consequência, se constrói uma visão capenga, falaciosa e incompleta da matemática (Lorenzato, 2010, p.70).

No entanto, é responsabilidade do professor adotar estratégias que permitam alcançar as competências definidas no currículo. Para um ensino de geometria que contribua para a formação de um cidadão crítico e que faça um real sentido para o aluno, é necessário que o professor busque explorar os potenciais dos estudantes evitando uma compreensão superficial da geometria baseada apenas no uso de fórmulas. Dessa forma, para Perez (1995, p.61):

> torna-se necessário um Ensino de Geometria (assim como de toda a Matemática) que permita aos alunos liberdade de imaginação, liberdade de expressão, descoberta, iniciativa, originalidade e crítica, onde a criatividade não seja sufocada, ignorada. E o principal construtor desse ambiente, em sala de aula, é, sem dúvida, o professor, que não poderá esquecer-se que cada criança é um indivíduo com qualidades únicas, com ideias e valores próprios.

O campo da geometria desempenha um papel crucial em diversas áreas do conhecimento, fornecendo um conjunto de ferramentas e conceitos que transcendem as barreiras disciplinares. Lorenzato (2010) cita a importância de desenvolver o pensamento geométrico já que exigem um “modo específico de raciocínio que só a geometria consegue desenvolver” (p. 59), ou seja, mesmo que se possa aplicar certos conceitos da geometria em outras áreas, essas aplicações não seriam suficientes para resolver questões que demandam o raciocínio específico dessa disciplina.

A geometria desempenha um papel crucial como uma ponte natural, na transição entre as linguagens naturais e o formalismo matemático e, nesse contexto, o pensamento geométrico emerge como um estágio indispensável, que deve se fazer presente no desenvolvimento típico da atividade racional do ser humano (Miguel, Fiorentini e Miorim, 1992). Sendo assim, a geometria parece ser um elo também entre conceitos dentro da própria matemática, sendo considerada, ao longo deste trabalho, como caminho para a construção de generalizações.

2.2 Experimentar e investigar para generalizar em matemática

É essencial repensar o ensino de matemática para que ele transcenda a mera transmissão de conhecimentos e estimule a participação ativa dos alunos. Ao fomentar situações desafiadoras e instigantes, a matemática pode se tornar um campo propício para o desenvolvimento da criatividade, do pensamento crítico e da resolução autônoma de problemas, proporcionando uma visão mais ampla e enriquecedora da disciplina.

Nesse aspecto, a geometria é uma disciplina que oferece uma compreensão do espaço, das formas e relações (Brasil, 2017), contribuindo para o desenvolvimento do pensamento lógico e da capacidade de resolver problemas. No entanto, o ensino de geometria muitas vezes se concentra em fórmulas e definições, deixando de lado a compreensão intuitiva e a aplicação prática (Lorenzato, 1995). Essa abordagem pode ser insuficiente para despertar o interesse dos alunos, não favorecendo a aprendizagem.

Segundo Caldatto e Pavanello (2015), as avaliações de abrangência nacional, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), revelam que, apesar dos esforços para reintegrar a geometria nos currículos escolares por meio de políticas governamentais o desempenho dos alunos em geometria permanece abaixo do esperado. As autoras destacam que, mesmo com a inclusão de conteúdos geométricos nos currículos nacionais, os resultados dessas avaliações evidenciam dificuldades em alcançar os objetivos pedagógicos desejados para essa área. Esses dados sugerem a necessidade de estratégias pedagógicas mais eficazes que vão além da mera inclusão curricular, promovendo uma aprendizagem significativa da geometria para os estudantes.

Além disso, Caldatto e Pavanello (2015) argumentam que, embora a geometria euclidiana esteja formalmente inserida nos currículos da educação básica e nos cursos de licenciatura em matemática, muitos professores enfrentam dificuldades para ensinar essa área de maneira efetiva. As autoras destacam que, em grande parte, essa lacuna se deve à formação insuficiente e ao domínio limitado que muitos docentes possuem sobre o conteúdo, o que resulta em uma abordagem superficial ou, muitas vezes, na completa ausência de propostas dessa área em sala de aula. Essa situação reflete a necessidade de uma formação continuada e de estratégias pedagógicas específicas que permitam aos professores desenvolver segurança e habilidades no ensino de geometria euclidiana, para que possam proporcionar uma melhor experiencia com esse campo da matemática.

Entretanto, essa necessidade de adoção de estratégias pedagógicas que mobilizem os estudantes no processo de aprendizagem não se restringe à geometria. Para D'Ambrosio (1989) a forma convencional como a matemática é frequentemente apresentada nas salas de aula contribui para a percepção de que se trata de um “corpo de conhecimentos acabado” (1989, p.16) e já completamente elaborado. A autora salienta que a abordagem tradicional gera a crença de que a participação do aluno na aula de matemática é passiva causando desinteresse ao aluno. E assim a ausência de oportunidades para expressar a criatividade limita a visão do aluno sobre o verdadeiro potencial e aplicação prática da disciplina (Libâneo, 1994).

O desenvolvimento de habilidades investigativas e reflexivas é essencial para o aprendizado significativo dos alunos. Ole Skovsmose (2000), em sua teoria sobre cenários para investigação, propõe um rompimento com o paradigma tradicional do exercício, que prioriza a aplicação mecânica de fórmulas, algoritmos e a busca por respostas únicas. Em vez disso, ele defende um ambiente de aprendizado onde os alunos são incentivados a explorar, formular perguntas e encontrar suas próprias explicações. Esse processo investigativo faz com que os estudantes se tornem agentes ativos na construção do conhecimento, ao invés de meros receptores passivos.

Skovsmose (2000) argumenta que, no paradigma do exercício, o professor tende a manter o controle da sala de aula, oferecendo aos alunos problemas fechados e limitados, nos quais a aplicação de algoritmos e técnicas pré-determinadas garante a resposta correta. Essa abordagem tradicional pode limitar a capacidade dos alunos de desenvolver um pensamento crítico e investigativo. Isso se reflete em práticas educacionais que privilegiam a memorização e a reprodução de conteúdos, ao invés de estimular a compreensão e a curiosidade.

Ao promover um cenário para investigação, Skovsmose (2000) sugere que o professor introduza desafios abertos, como "O que acontece se...?", que convide os alunos a explorar diferentes caminhos e possibilidades matemáticas. Esse tipo de questionamento incentiva a reflexão, o raciocínio lógico e a construção de hipóteses, levando os alunos a uma participação mais ativa e autônoma no processo de aprendizagem. A partir do momento em que os próprios alunos começam a questionar-se sobre "o que acontece se...?", como aponta Skovsmose (2000), observa-se o início de uma mudança no papel dos alunos, que passam a investigar o problema proposto de maneira colaborativa e crítica. Esse ambiente investigativo, no qual os alunos se tornam responsáveis pela exploração e pela explicação, representa um novo paradigma de ensino e aprendizagem, onde o aprendizado acontece de maneira colaborativa e ativa.

> É importante que os alunos e professores, juntos, achem seus percursos entre os diferentes ambientes de aprendizagem. A rota "ótima" não pode ser determinada apressadamente, mas tem que ser decidida pelos alunos e pelo professor (Skovsmose, 2000, p. 15).

D'Ambrosio (1989) afirma que em todo o percurso educacional, as aulas de matemática raramente propiciam situações que instiguem a criatividade dos alunos ou os motivem a resolver problemas por meio da curiosidade inerente à situação ou pelo desafio do próprio problema. A matemática escolar, muitas vezes, não oferece vivências de investigação, exploração e descobrimento, privando os alunos de experiências importantes para o desenvolvimento de habilidades matemáticas.

> O processo de pesquisa matemática é reservado a poucos indivíduos que assumem a matemática como seu objeto de pesquisa. É esse processo de pesquisa que permite e incentiva a criatividade ao se trabalhar com situações problemas (D'Ambrosio, 1989, p.16).

Nesse sentido, é fundamental abrir espaço em sala de aula para que os alunos possam se envolver em processos investigativos, assumindo a responsabilidade pela própria aprendizagem. Quando o professor questiona "Por que isto...?" provoca nos alunos um desafio, incentivando a buscarem explicações para os fenômenos observados (Skovsmose, 2000). Segundo o autor, essa prática resulta em períodos de reflexão, onde o silêncio e as discussões entre os alunos indicam que eles estão se engajando no processo investigativo. Isso reflete uma mudança de paradigma, em que os estudantes deixam de ser apenas receptores de conhecimento e passam a construir seu entendimento através da exploração (Skovsmose, 2000) e experimentação.

O ser humano tem na sua natureza a experimentação. E desde criança, apesar das recomendações dos adultos, se colocam em perigo, como por exemplo experimentando colocar o dedo na tomada. Porém o ensino escolar parece desconsiderar essa característica inata ao ser humano, apresentando conclusões prontas que não permitem ao aluno investigar e experienciar para compreender o que estão estudando, tornando o ensino superficial (Lorenzato, 2010).

A experimentação em sala de aula proporciona ao aluno a oportunidade de se engajar ativamente no processo de aprendizado, estimulando a participação e a interação social ao compartilhar e discutir descobertas com os colegas, não se limitando a simples atividades práticas, mas, de fato, desencadeando o raciocínio, a reflexão e a construção do conhecimento (Lorenzato, 2010). Além disso, o autor destaca que a experimentação serve como catalisadora para que o aluno formule hipóteses, busque alternativas, explore novos caminhos e esclareça dúvidas. Sob essa abordagem, o estudante tem a oportunidade de validar o que é verdadeiro, válido, correto ou uma solução para determinado problema. Em síntese, a experimentação, conforme argumentado por Lorenzato (2010), emerge como uma ferramenta pedagógica poderosa que vai além do aspecto prático, fomentando habilidades cognitivas essenciais e promovendo uma aprendizagem mais significativa.

Conforme a perspectiva de Lorenzato (2010), a experimentação é uma abordagem que coloca ênfase no processo de construção do conhecimento em detrimento do mero resultado. Em seu entendimento, na formação do aluno, a habilidade crucial vai além de simplesmente conhecer a solução, pois é fundamental compreender como chegar a essa solução. Em última análise, para Lorenzato (2010), experimentar é sinônimo de investigar, destacando assim a importância da exploração ativa e da descoberta no processo educacional.

A utilização da experimentação desempenha um papel fundamental no processo de aprendizado com significado, contribuindo para uma compreensão mais profunda e real do conteúdo. No contexto do estudo em questão, torna-se evidente a necessidade de explorar a temática para solucionar situações específicas, assim como compreender os motivos que justificam o estudo em si. Conforme ressaltado por Lorenzato, a experimentação "realça o 'porquê', a explicação e, assim, valoriza a compreensão" (Lorenzato, 2010, p. 72) , da mesma forma como é oportunizado aos estudantes dentro dos cenários investigativos (Skovsmose, 2000).

Ao propor aos estudantes atividades nesse contexto, é importante considerar que o aluno deve descobrir as respostas por meios próprios idealizados e executados por eles, sem que o professor dê o resultado esperado (Lorenzato, 2010), mas apenas auxilie nesse processo. Nessa dinâmica, certas circunstâncias inesperadas podem emergir durante uma sessão de aula, proporcionando uma oportunidade única para enriquecer a experiência educacional, especialmente quando habilmente exploradas.

Isso inclui a possibilidade de surgirem questões que demandem um profundo conhecimento por parte do professor sobre o tema abordado.

Dessa forma, Lorenzato (2010) destaca que é crucial que os objetivos da aula sejam claramente definidos, e que as estratégias de ensino empregadas estejam em sintonia com o nível de desenvolvimento dos alunos envolvidos. Em muitos casos, os estudantes não estão familiarizados com a abordagem experimental no processo de aprendizagem (Lorenzato, 2010). É importante fazer o exercício de tentar prever, conjecturar e levantar hipóteses e suposições, mesmo incorretas, estando preocupados com o processo, e não apenas no resultado final, o que nem sempre tem sido considerado no ensino de matemática (Lorenzato 2010).

Nessa perspectiva de dar atenção ao processo, o cenário para investigação proposto por Skovsmose (2000) oferece um acompanhamento mais próximo e detalhado das construções realizadas pelos alunos. Ao observar como eles formulam perguntas e buscam respostas, o professor pode identificar quais conceitos ainda não foram plenamente compreendidos, ajustando suas intervenções pedagógicas de acordo com as necessidades individuais dos estudantes. Skovsmose (2000) defende que o professor, nesse papel de mediador e problematizador, deve incentivar a curiosidade dos alunos, ao invés de simplesmente fornecer respostas prontas. Isso não só estimula a aprendizagem autônoma, mas também fortalece o vínculo entre o processo de investigação e o desenvolvimento de habilidades essenciais, como a análise crítica e a argumentação lógica.

Cabe ressaltar que o desenvolvimento de propostas didáticas nesse cenário demanda tempo de envolvimento e dedicação que pode ser maior do que o que seria destinado a uma aula expositiva. Esse dispêndio de tempo pode ser motivo de angústia para alguns professores, já que uma das principais preocupações dos professores está relacionada à quantidade de conteúdo abordado (D'Ambrosio, 1989). Para muitos, essa quantidade torna-se prioridade em sua prática pedagógica e não a aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, professores têm dificuldade em se convencer de que o verdadeiro objetivo do processo educacional é maximizar o aproveitamento dos alunos. No entanto, esse objetivo fica comprometido quando a meta do professor passa a ser cobrir o máximo de conteúdo possível nas aulas, deixando a qualidade da aprendizagem em segundo plano.

Entretanto, ao trabalhar com atividades que envolvam experimentação e investigação, muitas vezes, se estará promovendo a integração de conteúdos que nem sempre estarão presentes nas matrizes curriculares de um único ano escolar. É nesse contexto que foi pensada a sequência didática desenvolvida neste estudo, pautada na integração de atividades aritméticas, geométricas e algébricas com o intuito de favorecer a construção de generalizações em matemática.

Nesse sentido, Lorenzato (2010) enfatiza que a proposta de abordar de maneira integrada o ensino da aritmética, geometria e álgebra é benéfica para atender as diretrizes do currículo em espiral. Essa integração não apenas reflete a interconexão desses campos, mas também fornece um suporte para a aprendizagem de diversos alunos. Ao entrelaçar esses conceitos, a abordagem integrada facilita a compreensão e a assimilação de significados associados a símbolos matemáticos.

A BNCC propõe uma estrutura que permite a progressão contínua das competências e habilidades, os conteúdos não são ensinados uma única vez em uma progressão linear, mas sim revisitados e aprofundados ao longo de diferentes níveis de ensino. Isso significa que certos conceitos, habilidades e competências são introduzidos em estágios iniciais e, em seguida, revisitados em estágios subsequentes com maior complexidade e profundidade. Isso permite que os alunos tenham a oportunidade de consolidar e expandir seus conhecimentos ao longo do tempo. Essa metodologia busca evitar a superficialidade na aprendizagem e incentiva a construção progressiva do conhecimento ao longo do tempo e pode incentivar o desenvolvimento de práticas pedagógicas como as propostas aqui.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

Para a realização deste estudo, desenvolveu-se uma sequência didática integrando atividades que abordassem aspectos aritméticos, geométricos e algébricos no estudo de polígonos, bem como as relações associadas aos seus ângulos internos e externos. O objetivo principal é analisar se essa abordagem favorece a construção de generalizações matemáticas, proporcionando aos alunos uma compreensão mais abrangente e aprofundada dos conceitos envolvidos.

Procurou-se identificar tanto a motivação quanto o interesse dos alunos durante a implementação da sequência didática. Além disso, buscou-se compreender os principais desafios que surgiram ao longo dessa aplicação, bem como analisar a eficácia da abordagem pedagógica adotada e seu impacto no desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes especialmente no que diz respeito à capacidade de construir generalizações sobre os conteúdos propostos.

A pesquisa apresentada neste trabalho segue uma abordagem qualitativa, buscando compreender em profundidade as dinâmicas e efeitos da intervenção pedagógica. Fundamentada nesse viés, objetivou-se encurtar a distância entre a produção acadêmica na área da educação e as instituições de ensino, implementando melhorias e avaliando inovações no sistema educacional já estabelecido. Dessa forma, foi pensada a atuação do professor como um investigador ativo (Damiani *et al.*, 2013).

O método de pesquisa do tipo intervenção pedagógica compreende o planejamento e a execução de uma interferência, seguidos pela avaliação dos seus efeitos (Damiani, 2012). Este enfoque implica na proposição de ações deliberadas no ambiente educacional, visando não apenas identificar questões práticas, mas também promover mudanças significativas por meio da implementação de estratégias específicas. O objetivo final é analisar de forma crítica e sistemática os resultados obtidos, contribuindo assim para o aprimoramento contínuo dos processos de ensino e aprendizagem.

Nesta intervenção, foi desenvolvida uma apostila que abrange uma sequência didática previamente planejada. Este material, devidamente impresso, encadernado e distribuído aos estudantes, apresenta um guia abrangente contendo instruções passo a passo para cada atividade proposta. A organização das atividades teve como propósito oferecer aos estudantes a oportunidade de experimentação, permitindo uma abordagem prática e interativa no processo de aprendizado. O roteiro incentiva os alunos a escreverem em linguagem própria os resultados matemáticos observados e a compartilharem suas experiências.

A apostila, além de ser uma ferramenta de orientação, desempenhou um papel fundamental como instrumento de coleta de dados. Após a aplicação, as apostilas foram recolhidas para análise dos dados gerados. Essa análise visou observar o nível de envolvimento dos alunos e os resultados alcançados durante a aplicação da sequência didática, além de indicar a necessidade de realização de ajustes no material elaborado. Em resumo, a análise das apostilas serviu como um meio de avaliação abrangente, abordando diferentes aspectos do resultado da intervenção no contexto educacional. Além das apostilas foi utilizado um diário de campo no qual a pesquisadora registrava os aspectos observados no desenvolvimento das atividades.

No final de cada uma das aulas onde as atividades foram propostas esse material era recolhido, sendo devolvido aos alunos no início da aula subsequente. Essa prática tinha como objetivo assegurar que não houvesse interferências externas durante o desenvolvimento das atividades. Nos casos em que as atividades envolviam construções computacionais, os alunos eram instruídos a salvar seus arquivos na conta vinculada ao e-mail institucional no GeoGebra[1] e, posteriormente, compartilhar o link do arquivo com a professora no Google Sala de Aula. Essa abordagem possibilitava à professora o acesso aos trabalhos dos alunos e mantinha os arquivos disponíveis para as atividades subsequentes.

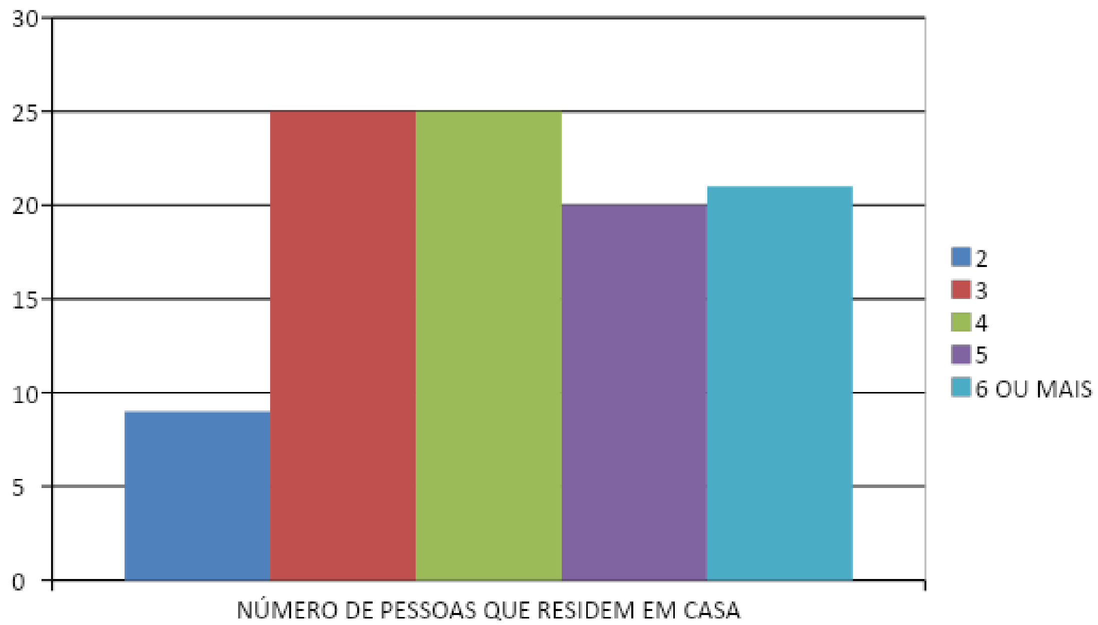
A presente pesquisa foi conduzida em uma turma de oitavo ano do ensino fundamental, onde a pesquisadora é docente de matemática. A turma é composta por 19 alunos, em uma escola municipal, que oferece o ensino fundamental completo de nove anos, localizada na cidade de Canoas no Rio Grande do Sul (RS). No ano de 2023, a escola atendeu aproximadamente 600 alunos. A infraestrutura escolar é um aspecto importante que caracteriza as práticas pedagógicas ali desenvolvidas. A partir das turmas de 6º ano, as aulas são ministradas em salas temáticas, que contam com estantes e livros relacionados à disciplina lecionada na sala específica. A escola destaca-se na região pelo diferencial de possuir ar condicionado e dispositivos audiovisuais, como projetores ou *smart* TVs em todas as salas, proporcionando um ambiente mais confortável e tecnologicamente equipado para os estudantes.

[1] https://www.geogebra.org/

A escola atende a uma ampla faixa etária, englobando alunos desde os seis até os 18 anos, com uma diversidade socioeconômica, cultural e étnica que reflete a realidade da comunidade na qual está inserida. Recentemente, a instituição observou uma diminuição na participação dos responsáveis nas atividades escolares, especialmente nos anos finais do ensino fundamental. Para contornar essa questão, a escola procura estabelecer uma conexão mais efetiva com os responsáveis, promovendo reuniões e disponibilizando horários pós-comerciais para a entrega de avaliações. Essa abordagem leva em consideração as demandas da classe trabalhadora, reconhecendo que nem sempre é possível comparecer em horários convencionais. Apesar desses esforços, a participação dos responsáveis ainda não atingiu os níveis almejados.

Os gráficos a seguir representam a comunidade e foram extraídos do Projeto Político Pedagógico da escola[2]. Entre as informações constantes no documento, é interessante destacar que mais do que 65% dos alunos moram em residências com quatro (04) ou mais pessoas, menos de 5% dos responsáveis possuem ensino superior completo e mais de 50% dos estudantes ficam sozinhos ou com irmãos no turno inverso da escola, conforme consta nas figuras 1, 2 e 3 abaixo.

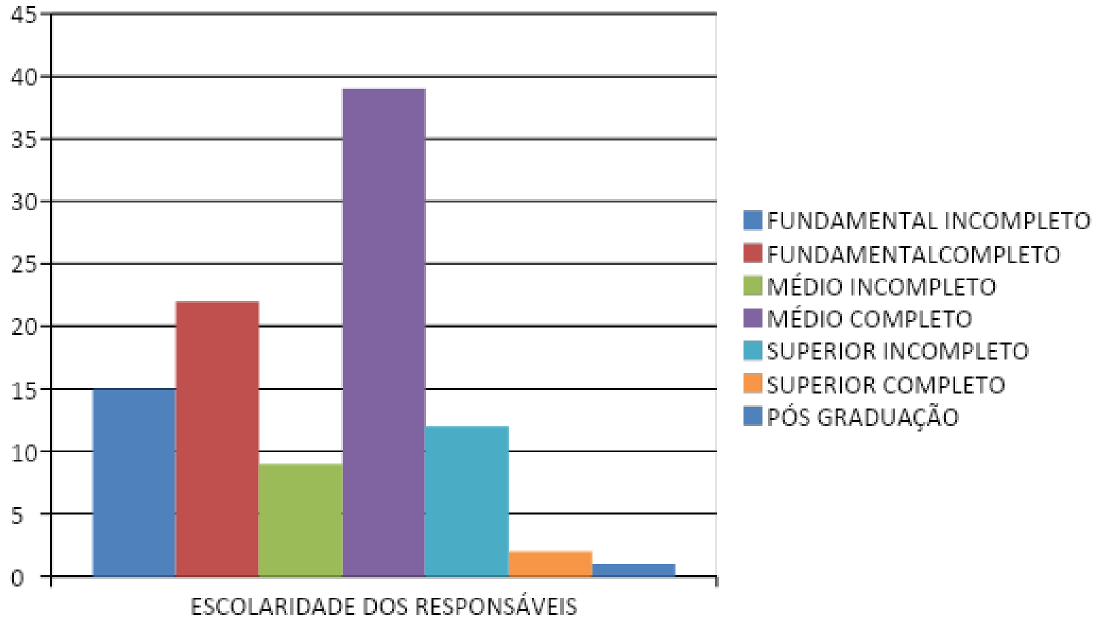
Figura 1 - Gráfico do número de pessoas que residem na casa



Fonte: Baseado no Projeto Político Pedagógico da escola (2023)

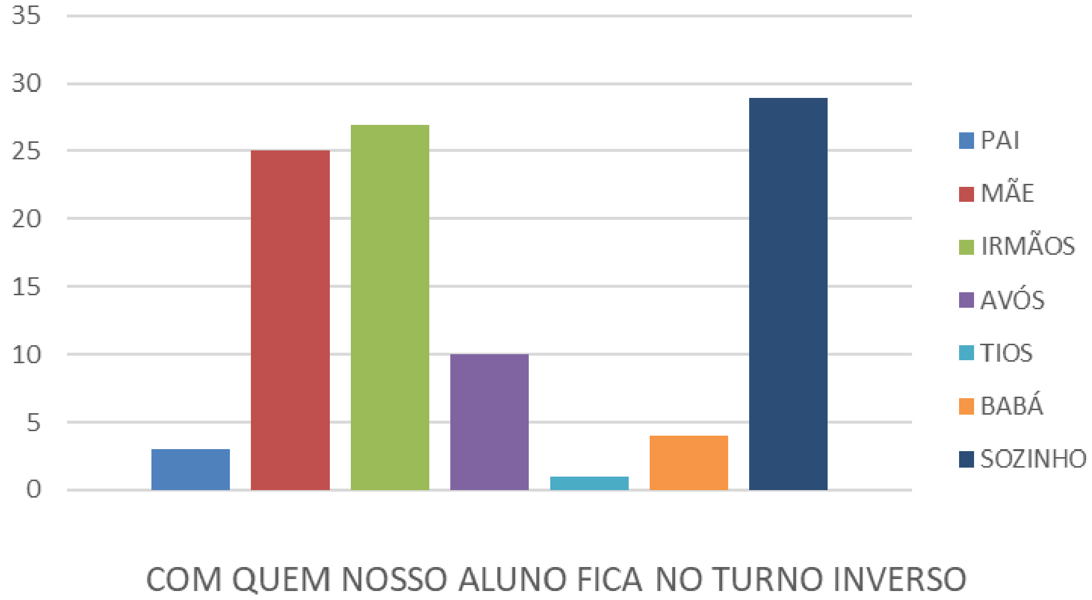
[2] PPP da escola foi omitido das referências para preservar a identidade da instituição e garantir a ética na condução da pesquisa.

Figura 2 - Gráfico do nível de escolaridade dos responsáveis



Fonte: Projeto Político Pedagógico da escola (2023)

Figura 3 - Gráfico de com quem o aluno fica no turno inverso



Fonte: Projeto Político Pedagógico da escola (2023)

Sobre o último gráfico apresentado, nota-se que muitos alunos dos anos finais permanecem com irmãos no turno inverso da escola e acredita-se que, na maioria dos casos, esses irmãos são mais novos. Esse fato é evidenciado quando as turmas das séries iniciais são dispensadas, pois, em muitos casos, alunos que originalmente teriam aulas normais solicitam permissão para sair junto com o irmão mais novo, uma vez que não há mais ninguém disponível para acompanhá-lo. Isso sugere que, mesmo no contexto do ensino fundamental, os alunos assumem a responsabilidade de cuidar de seus irmãos mais novos, refletindo um papel ativo na dinâmica familiar.

Desde 2019, a Prefeitura de Canoas tem realizado investimentos significativos na promoção da inclusão digital nas escolas. Adquiriu cursos para o aprimoramento dos professores e forneceu *Chromebooks* para uso dos estudantes. Todas as 44 escolas de ensino fundamental do município foram equipadas com esses dispositivos, contudo, é válido mencionar que a falta de acesso e a instabilidade da internet ainda persistem como desafios atuais. Isso se deve ao fato de que os equipamentos dependem de uma conexão à internet para serem ligados e realizarem o *login.*

A turma participante deste estudo é composta por 19 alunos, sendo dez (10) do sexo feminino e nove (09) do sexo masculino. Nota-se que a maioria dos estudantes está na mesma escola desde o primeiro ano, resultando em uma turma coesa com poucas transferências ou mudanças do sétimo para o oitavo ano. Esse tempo prolongado de convivência contribui para o estabelecimento de laços sólidos entre os colegas, criando um ambiente propício para a construção de relações interpessoais.

As atividades foram realizadas durante o horário de aula regular da turma, nas instalações da escola. Para conduzir as atividades, foram aproveitados recursos como o quadro branco, *Chromebooks,* projetor e a lousa interativa disponíveis na instituição. Vale destacar que a escola conta com acesso à internet sem fio na sala de aula, o que facilitou a execução das atividades sem a necessidade de deslocamento para garantir conectividade. Essa infraestrutura contribuiu para a eficiência e comodidade no desenvolvimento das atividades propostas.

No início do ano letivo, observou-se a presença de diversas lacunas de aprendizado nesse grupo, o que dificultava o trabalho pedagógico associado às habilidades do oitavo ano, conforme estabelecido na BNCC. Essas lacunas podem ser atribuídas a diversos fatores, mas acredita-se que a pandemia seja um dos elementos preponderantes. O contexto pandêmico modificou significativamente a continuidade do processo educacional, uma vez que resultou no afastamento dos alunos e professores do ambiente escolar, o que pode ter contribuído para o surgimento dessas deficiências no aprendizado ou as descortinou.

No contexto do município de Canoas, diversas estratégias foram adotadas para enfrentar os desafios impostos pela pandemia. No ano de 2020, além de disponibilização de materiais impressos com retirada na escola, foram implementadas aulas *online* via Google Meet. No entanto, ficou evidente a dificuldade dos alunos em participar devido à carência de recursos tecnológicos e de um ambiente favorável para a realização dos estudos. Em 2021, as aulas *online* síncronas foram eliminadas, dando lugar a um modelo que envolveu o revezamento dos alunos no ensino presencial, com presença facultativa e impressão e entrega de atividades remotas. No ano de 2022, houve o retorno integral ao ensino presencial. Ao longo desses três anos, foi adotada a política de progressão automática, independentemente da participação e do desempenho dos alunos.

O desafio do fracasso escolar já era amplamente reconhecido no Brasil, discutido por estudiosos como Patto (1988) e Angelucci *et al*. (2004). Contudo, de acordo com a UNICEF (2021), a pandemia intensificou esse problema, acarretando impactos adversos significativos na educação. Torna-se evidente que a dinâmica entre professores e alunos foi afetada com a alteração do ensino presencial. A maioria dos professores relatou perceber uma falta de motivação, apatia e desinteresse entre os alunos, associados à falta de comprometimento, imaturidade e dificuldade de concentração devido a distrações no ambiente doméstico (Cipriani; Moreira; Carius, 2021). As condições precárias de oferta e acesso ao ensino remoto, aliadas às inúmeras dificuldades enfrentadas pelos alunos em seus lares, agravaram ainda mais a privação do direito à educação de qualidade para milhares de estudantes brasileiros.

Diante desse cenário, marcado por lacunas de aprendizagem, os estudantes da turma em que a pesquisa foi aplicada apresentavam deficiências nos conhecimentos exigidos para um grupo do oitavo ano. Paralelamente, manifestavam receio em relação à professora, que frequentemente abordava temas dos quais eles não tinham domínio. No entanto, mesmo diante dessas limitações, sabe-se do potencial dos alunos, especialmente quando as atividades que lhes são propostas os desafiam e motivam.

Na turma onde esta pesquisa foi realizada, iniciou-se o ano letivo abordando álgebra, em especial equações polinomiais do 1º grau, conforme previsto no 7º ano da BNCC. No entanto, observava-se uma disparidade no entendimento do grupo, com alguns alunos assimilando rapidamente os conceitos propostos, enquanto outros enfrentavam dificuldades em manter o envolvimento nas atividades por períodos mais longos. Esse desafio prolongava o tempo necessário para o aprendizado, dificultando o progresso para alcançar o conteúdo do 8º ano. Nesse contexto, a integração das três esferas - aritmética, álgebra e geometria - tornou-se crucial para proporcionar um aprendizado mais eficiente.

A turma possui estudantes com necessidades específicas e, portanto, priorizou-se uma compreensão aprofundada das necessidades individuais, implementando estratégias pedagógicas personalizadas. Essas abordagens são fundamentais para garantir uma aprendizagem efetiva e inclusiva. O suporte contínuo, a análise cuidadosa e a colaboração entre todos os envolvidos são cruciais para promover o progresso e o bem-estar desses alunos. No desenvolvimento dos estudantes, leva-se em conta a integração das dimensões cognitivas, sociais e emocionais. A criação de um ambiente inclusivo e adaptado às suas necessidades é essencial para superar desafios, permitindo que atinjam seu potencial máximo.

Destaca-se que para preservar a identidade dos estudantes participantes, ao longo da apresentação e da análise de dados optou-se por referenciá-los por Aluno 1, Aluno 2, …, Aluno 19, sem distinção de gênero e numerados em ordem aleatória pela pesquisadora no início do processo de análise de dados. Cabe ressaltar que o presente projeto foi submetido ao Comitê de Ética e aprovado sob o Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE) nº 74297623.0.0000.8024. A seguir, apresentam-se detalhes sobre três casos específicos de alunos: o Aluno 16, o Aluno 4 e o Aluno 5.

O Aluno 16 foi diagnosticado com Transtorno do Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH) do tipo desatento, evidenciando características como falta de foco e dificuldade em manter a atenção em tarefas específicas. Demonstra muita dificuldade em matemática, em particular, entender problemas matemáticos e falta de habilidade em reconhecer e operar com números, bem como em compreender conceitos matemáticos. De acordo com seu laudo médico, apresenta características compatíveis com a discalculia, essa condição pode afetar significativamente o aprendizado de conceitos fundamentais da matemática. Contudo é um aluno dedicado e esforçado, e que possui muita vontade de fazer o que é proposto.

O Aluno 4 foi diagnosticado tanto com Transtorno do Espectro Autista (TEA) quanto com Transtorno do Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH). Apesar de ser alfabetizado apresenta dificuldades de expressão oral e escrita. Demanda estímulo para abrir o caderno e iniciar suas atividades, necessitando de cobrança constante para o envolvimento nas tarefas. O TDAH, em conjunto com o TEA, intensifica os desafios do aluno, especialmente em relação à atenção e foco. Esse aluno não gosta de receber atividades diferentes dos colegas, assim investe-se em estratégias pedagógicas que incentivem a autonomia, respeitando seu ritmo de aprendizado, contribuindo para o desenvolvimento de suas habilidades. Os pais do aluno solicitaram à secretaria da educação por uma professora auxiliar, que dê o suporte ao aluno na sala de aula, uma vez que o aluno não faz o que é proposto se não houver alguém auxiliando. Mas ainda não tiveram seu pedido atendido.

O Aluno 5 ingressou na turma após a metade do ano letivo. Ele apresentou dificuldades singulares, já que ele veio da Venezuela e se deparou inicialmente com a barreira do idioma português. Essa transição influenciou significativamente sua capacidade de comunicação com colegas e professores, gerando um distanciamento em relação ao grupo. Sua dificuldade em se comunicar, tanto com colegas quanto com professores, contribuiu para um isolamento, pois a barreira linguística dificulta a interação. Essa situação impactou negativamente suas relações na turma, uma vez que colegas expressaram frustrações quanto à impossibilidade de comunicação efetiva. De modo específico em relação à matemática, se deparou com uma dificuldade adicional de acompanhar o conteúdo que já estava em andamento, especificamente sobre polinômios. Sua falta de familiaridade com o tema, agravada pela barreira linguística, tornou difícil a assimilação dos conceitos apresentados em sala de aula. Mesmo com tentativas de oferecer recursos adicionais, como videoaulas explicativas em espanhol do Youtube e impressão das atividades visando otimizar o tempo e evitando a necessidade de copiar informações, o rendimento nos exercícios permaneceu aquém do desejado.

Por fim, cabe destacar que a aplicação das atividades previstas na apostila ocorreu no período de 13/11 a 14/12 de 2023, totalizando 28 períodos de 50 minutos. A descrição de como se deu cada momento da proposta, junto à análise dos resultados alcançados são o foco da próxima seção.

4 RESULTADOS

A seguir, são apresentadas as atividades da proposta didática, com o planejamento e objetivos idealizados, seguidas da discussão dos dados gerados durante sua aplicação. Na descrição da atividade optou-se por usar o tempo verbal presente, enquanto que a análise dos dados gerados se faz no tempo verbal passado respeitando a cronologia dos acontecimentos associados à pesquisa. Ainda, a metodologia de apresentação e discussão se dá atividade a atividade possibilitando que outros professores interessados em utilizar a proposta didática, ou apenas parte da mesma, possam facilmente localizar os dados obtidos nesse estudo de acordo com as atividades de interesse.

4.1 Atividade zero: introdução aos polígonos

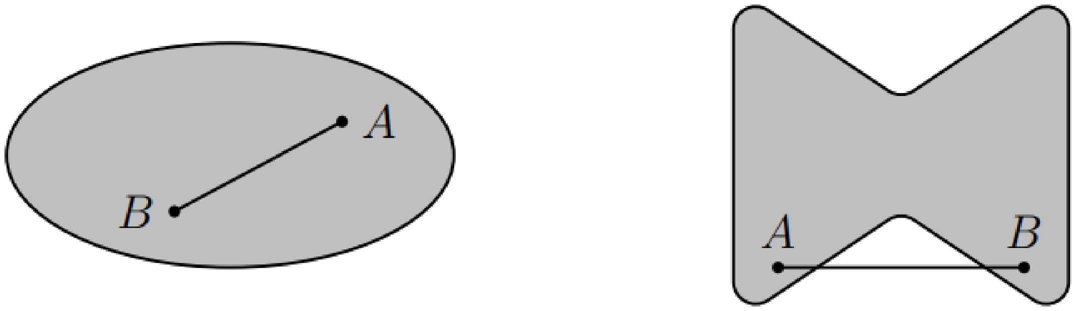
A atividade zero “Introdução aos polígonos” foi assim denominada pois a sequência didática pensada tem foco no estudo polígonos convexos e, posteriormente, dá ênfase em propriedades acerca dos polígonos regulares, principalmente ao estudar os seus ângulos externos e internos. A atividade é composta por três itens e tem como objetivo retomar os principais conceitos relacionados a polígonos como o número de lados, ângulos e vértices; a identificação da congruência ou não dos lados e dos ângulos, familiarizando os estudantes ou relembrando-os acerca de termos como equilátero e equiângulo; e, ainda, explora se o polígono é côncavo ou convexo. Todas essas definições foram propostas para análise dos estudantes, procurando concluir sobre o que é necessário para um polígono ser ou não regular.

A seguir são explorados alguns conceitos da geometria plana que são fundamentais para este trabalho. As definições necessárias, como regiões convexas e não convexas, além da caracterização de ângulos e polígonos, foram extraídas da obra *Geometria*, de Antônio Caminha Muniz Neto, parte da Coleção PROFMAT (Muniz Neto, 2013). A análise desses elementos geométricos estabelece uma base sólida para a compreensão da atividade e a aplicação prática dos conceitos abordados.

Em geometria, o ponto é um conceito primitivo, admitido sem definição. Pontos são representados por letras latinas maiúsculas. Para determinar se uma região do plano é concavo ou convexa, precisamos examinar os segmentos de reta que une dois pontos quaisquer desta região. Para determinar se uma região do plano é concavo ou convexa, precisamos examinar os segmentos de reta que une dois pontos quaisquer desta região.

Uma região $\mathcal{R}$ do plano é convexa quando, para todos os pontos A, B ∈ $\mathcal{R}$, o segmento de reta com extremidades A e B estiver contido em $\mathcal{R}$. Caso contrário, a região $\mathcal{R}$ é dita uma região não convexa (Muniz Neto, 2013), conforme exemplificado na Figura 4.

Figura 4 - Regiões convexa (esquerda) e não convexa (direita)

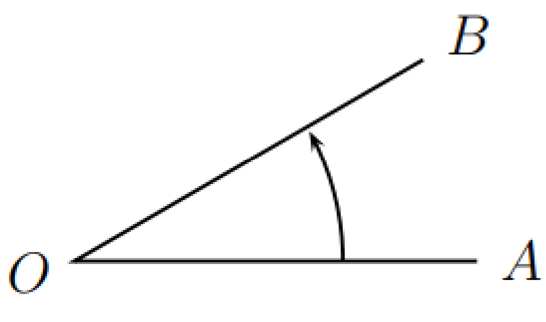


Fonte: Muniz Neto, 2013

De acordo com a definição acima, para uma região $\mathcal{R}$ ser não convexa basta que existam dois pontos A, B ∈ $\mathcal{R}$ tais que pelo menos um ponto do segmento $\overline{AB}$[3] não pertença a $\mathcal{R}$. Nesse caso, diz-se que a região é côncava.

Define-se um ângulo (ou região angular) como a região convexa do plano delimitada por duas semirretas de mesma origem. Seja o ângulo AÔB, o ponto O é denominado o vértice e as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo.

Figura 5 - Região angular

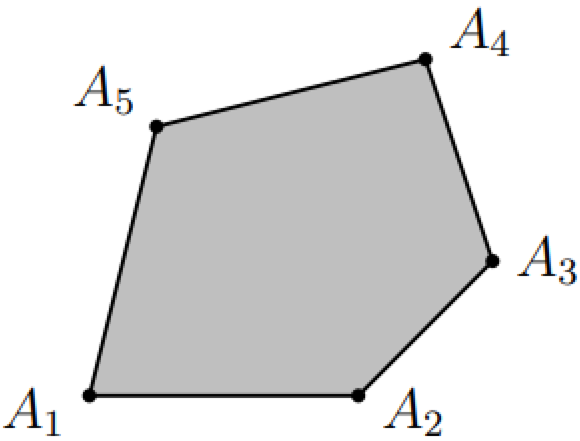


Fonte: Muniz Neto, 2013

[3] Embora Muniz Neto (2013) utilize a notação A_1A_2 para referir-se ao respectivo segmento, neste trabalho optou-se por utilizar $\overline{A_1A_2}$.

Pontos, segmentos e ângulos são elementos constituintes de um polígono, conforme exemplificado na figura 6. Os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são os vértices do polígono; os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ são os lados do polígono. A região poligonal correspondente ao polígono $A_1A_2 \ldots A_n$ é a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$.

Figura 6 - Região poligonal correspondente a um pentágono



Fonte: Muniz Neto, 2013.

Esperava-se que os alunos possuíssem algum conhecimento prévio sobre o assunto, mas mesmo assim considerou-se relevante enfatizar as definições indicadas para garantir que todos compreendessem e pudessem prosseguir na atividade. Logo, para a realização da proposta, em um primeiro momento foram apresentadas e discutidas no grande grupo, utilizando como recurso o projetor de slides, as definições a seguir, de forma a adaptá-las para uma linguagem mais simples, conforme abaixo:

- Vértices: Os vértices de um polígono são os pontos de interseção entre dois lados consecutivos. Para facilitar a identificação, eles serão representados por letras maiúsculas, seguindo uma ordem alfabética no sentido anti-horário do polígono.
- Lados: Os lados de um polígono são segmentos de reta que conectam dois vértices consecutivos. Cada lado será representado pelas letras que correspondem aos vértices de suas extremidades. Por exemplo, o segmento de reta que une os vértices A e B será denotado por $\overline{\mathrm{AB}}$.
- Ângulos: Os ângulos de um polígono são as regiões internas formadas por dois lados consecutivos. Para representar um ângulo, utiliza-se, por exemplo, a notação AÔB, onde O indica o vértice e as letras A e B correspondem aos vértices do polígono localizados nos lados do ângulo.

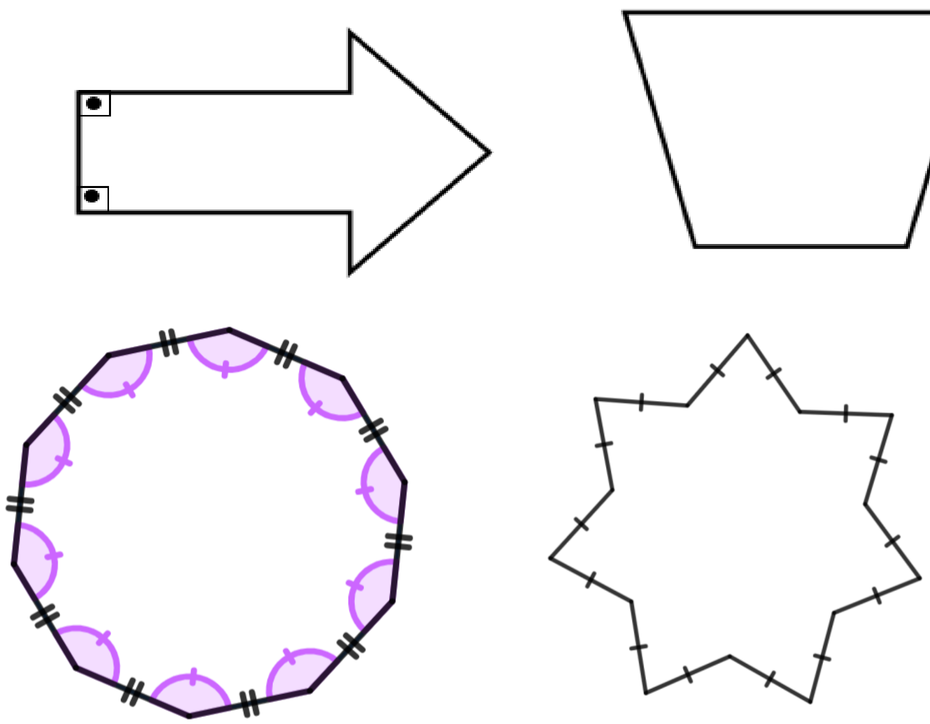
Outras definições são importantes para o andamento das atividades pensadas na sequência didática e também foram retomadas ao longo da atividade zero. Um polígono será **equiângulo** quando todos os seus ângulos internos tiverem a mesma medida. Por sua vez, será **equilátero** quando todos os seus lados tiverem o mesmo comprimento, ou seja, todos os segmentos de reta que conectam vértices consecutivos possuírem a mesma medida.

Para a distinção entre **polígonos convexos e côncavos** partiu-se da definição de região côncava ou convexa apresentada acima. Assim, um polígono será convexo quando, para qualquer par de pontos no interior do polígono, o segmento de reta que os une está completamente contido na região poligonal e, caso contrário, será côncavo.

Todas essas definições foram trabalhadas para que os alunos conseguissem, posteriormente, identificar **polígonos regulares**, tendo em vista que um polígono convexo é considerado regular quando todos os seus lados têm o mesmo comprimento e todos os seus ângulos têm a mesma medida.

Junto da apresentação e discussão das definições mencionadas, foram construídos exemplos no quadro branco para ilustrar cada um desses conceitos. Posteriormente, os polígonos ilustrados na figura 7 foram projetados e suas características destacadas com o uso de canetas de cores distintas.

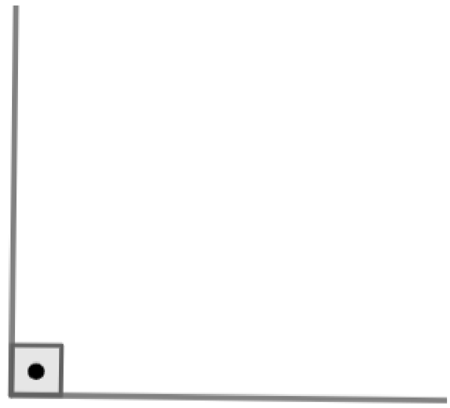
Figura 7 - Polígonos usados como exemplo



Fonte: Elaborada pela autora (2023)

Nesses polígonos foram identificados os vértices, ângulos e lados, foi analisada sua concavidade ou convexidade, bem como efetuada a classificação quanto a equiangularidade, equilateralidade e regularidade. Adicionalmente, destacou-se a relevância da notação utilizada, os “traços”, para indicar a igualdade de medidas de lados e dos ângulos. Enfatizou-se, ainda, a notação própria utilizada para ângulo reto, aquele cuja medida é 90°, a qual indica-se como na figura 8 abaixo.

Figura 8 - Ângulo Reto



Fonte: Elaborada pela autora (2023)

Após a etapa conjunta de retomada de conceitos, a execução do primeiro item da atividade foi iniciada e para isso foi fornecida aos estudantes uma variedade de polígonos já impressos denominados Pol.A, Pol.B, ..., Pol.S, totalizando 20 polígonos (Apêndice D), para que cada estudante pudesse então realizar a atividade completando a tabela (Figura 9) disponível na apostila.

Figura 9 - Item 1 da atividade zero

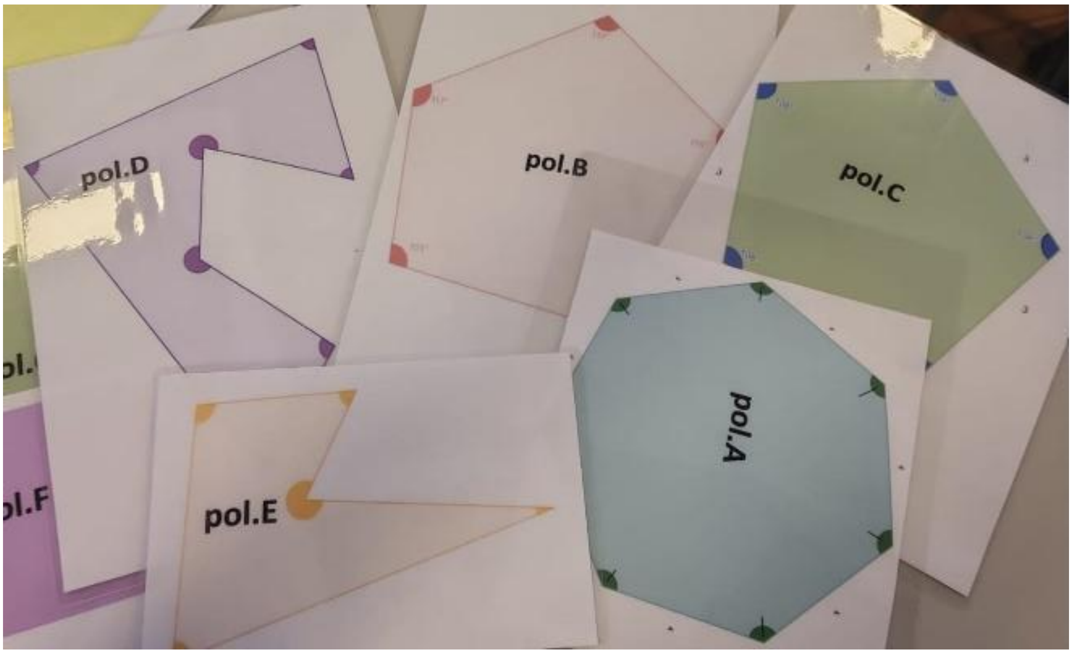
1. Preencha a tabela a seguir de acordo com cada polígono:

	Qual o número de lados?	Qual o número de ângulos?	Qual o número de vértices?	É equiângulo?	É equilátero?	É côncavo ou convexo?	É regular?	O que te levou a concluir se o polígono é regular ou não?
pol.A								
pol.B								

Fonte: Apostila elaborada pela autora (2023)

Foi proposto aos alunos que formassem duplas e sentassem em um semicírculo junto ao restante da turma. Em seguida, os polígonos foram entregues à turma para que pudessem manusear e preencher a tabela (Figura 9). Para facilitar esse processo, os polígonos foram plastificados, evitando que fossem danificados ou desgastados (Figura 10). Nessa atividade, os alunos tiveram a oportunidade de praticar a classificação dos polígonos de acordo com suas características geométricas, ao mesmo tempo em que seriam encorajados a colaborar e interagir uns com os outros.

Figura 10 - Polígonos plastificados



Fonte: Da autora (2023)

Ainda durante a explicação inicial sobre polígonos regulares, o Aluno 11 questionou se um quadrado poderia ser considerado regular. Contudo, ele próprio argumentou que, dado que *"todos os lados são iguais e todos os ângulos internos são de 90°"*, o quadrado atende aos critérios discutidos, demonstrando uma compreensão aprofundada do conteúdo em debate e o atendimento aos objetivos da atividade zero.

Durante o trabalho em duplas surgiram desafios intrigantes relacionados às dúvidas dos alunos, principalmente em relação aos ângulos e à concavidade e convexidade dos polígonos. Alguns estudantes buscaram esclarecimentos sobre a validade de suas abordagens e, em vez de oferecer respostas diretas, a pesquisadora optou por adotar uma postura mais orientadora, incentivando a autonomia e a participação ativa dos alunos no processo de aprendizado, ao encontro do proposto por Lorenzato (2010) e Skovsmose (2000).

A decisão de não fornecer respostas imediatas foi motivada pela intenção de transformar a sala de aula em um espaço onde os alunos pudessem ser os protagonistas de seu próprio aprendizado. Apesar da tentação de esclarecer todas as dúvidas prontamente, a pesquisadora compreendeu a importância de permitir que os alunos superassem desafios e desenvolvessem uma postura crítica durante a resolução de problemas. Como por exemplo, diante das questões sobre a contagem de vértices, caso a pesquisadora dissesse o número correto diretamente aos estudantes que questionaram, esses não teriam a oportunidade de desenvolver suas próprias estratégias, levantar hipóteses e chegar às suas próprias conclusões. Assim, optou-se por devolver as perguntas aos estudantes, encorajando-os a pensar e tentar resolver os problemas por si mesmos, incentivando o desenvolvimento da autonomia e a autoconfiança dos alunos.

A dinâmica da atividade, que envolvia a classificação de polígonos e a discussão coletiva das conclusões, pretendia criar um ambiente colaborativo e estimular a interação entre os alunos. Para isso, a turma organizou-se em formato de círculo e a ideia inicial era seguir uma ordem de entrega dos polígonos aos alunos, onde cada estudante, após preencher os dados deste polígono na tabela, entregaria ao colega à sua direita. Contudo, essa abordagem foi ajustada devido às diferentes velocidades de conclusão, uma vez que gerava certa ansiedade na espera pelo término do colega. Na prática, permitiu-se que os alunos que concluíram mais cedo acessassem os polígonos restantes, resultando em uma busca empolgante pelos polígonos faltantes ao final da atividade. Essa adaptação proporcionou uma dinâmica mais fluida e incentivou a participação ativa de todos os alunos, promovendo, assim, um ambiente de aprendizado mais colaborativo e engajador.

Durante a realização da prática, alguns alunos optaram por apoiar o polígono em objetos como garrafas ou estojos, facilitando a colaboração mútua ao trabalharem em conjunto, cada um respondendo em sua apostila. Essa abordagem colaborativa proporcionou debates ocasionais sobre as respostas encontradas e a classificação do polígono. Em um momento inicial da prática, o Aluno 15 levantou a questão sobre a regularidade de um polígono (pol.Q), que apresentava 8 vértices, 8 ângulos e 8 lados. Esta dúvida evidenciou uma possível confusão conceitual, levando a pesquisadora a revisitar os exemplos dados e esclarecer que a regularidade de um polígono refere-se à igualdade nas medidas de cada lado e de cada ângulo, não à quantidade de lados e ângulos. Para proporcionar uma compreensão visual da situação, desenhou-se um polígono no quadro com lados e ângulos claramente distintos. Durante a discussão, explorou-se o conceito de regularidade, percebendo que, embora houvesse a mesma quantidade de lados, vértices e ângulos, o polígono não era equilátero e equiângulo. Esse esclarecimento contribuiu para dissipar as dúvidas e consolidar o entendimento conceitual dos alunos.

Durante a atividade, o Aluno 15 trouxe novamente a questão sobre a regularidade do polígono, indagando se ser equilátero e equiângulo era requisito para sua regularidade. A professora, ao confirmar essa teoria, encorajou o aluno a utilizar essa compreensão como justificativa na última coluna da tabela. Observou-se que um grupo de alunos assimilou rapidamente essa linguagem recém-adquirida, empregando as nomenclaturas de equilátero e equiângulo para discutir a regularidade, possivelmente influenciados pelas indagações do Aluno 15.

Na correção posterior da atividade, realizada em conjunto com a turma, notou-se que todos apresentaram respostas muito semelhantes, conforme fica exemplificado no recorte extraído do material do Aluno 15:

Figura 11 - Respostas do Aluno 15 ao item 1 da atividade Zero

	Qual o número de lados?	Qual o número de ângulos?	Qual o número de vértices?	É equiângulo?	É equilátero?	É côncavo ou convexo?	É regular?	O que te levou a concluir se o polígono é regular ou não?
pol.A	7	7	7	sim	sim	convexo	sim	Pra ser reguiar ele precisa ser equiângulo e equilátero
pol.B	5	5	5	não	não	convexo	não	não é equiângulo nem equilatero
pol.C	5	5	5	não	não	convexo	não	não é equiângulo nem equilátero
pol.D	7	7	7	não	não	côncavo	não	não é equiângulo nem equlátero
pol.E	5	5	5	não	não	côncavo	não	não é equiangulo nem equilatero
pol.F	6	6	6	sim	sim	convexo	sim	angulos e lados são iguais
pol.G	6	6	6	não	não	convexo	não	os angulos e os lados não tem a mesma medida
pol.H	8	8	8	sim	não	convexo	não	não é equilátero

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Essa semelhança nas respostas dá indícios de uma compreensão consolidada dos conceitos discutidos durante a prática, sugerindo que o diálogo e a colaboração podem favorecer a assimilação deste conteúdo por parte dos alunos.

O segundo item da atividade zero demandava que os alunos estabelecessem associações entre duas colunas, considerando o número de lados e a nomenclatura correspondente a cada polígono (Figura 12). Observou-se que a maioria relacionou prontamente o triângulo com “3 lados” e o quadrado com “4 lados”. Entretanto, em relação aos demais polígonos, alguns alunos vincularam a termos já conhecidos, como pentacampeão e hexacampeão.

Figura 12 - Item 2 da atividade Zero

2. Relacione o nome do polígono com seu número de lados

a) Triângulo	( ) 6 lados
b) Quadrilátero	( ) 8 lados
c) Pentágono	( ) 17 lados
d) Hexágono	( ) 20 lados
e) Heptágono	( ) 11 lados
f) Octógono	( ) 14 lados
g) Eneágono	( ) 3 lados
h) Decágono	( ) 10 lados
i) Undecágono	( ) 16 lados
j) Dodecágono	( ) 12 lados
k) Tridecágono	( ) 7 lados
l) Tetradecágono	( ) 18 lados
m) Pentadecágono	( ) 4 lados
n) Hexadecágono	( ) 13 lados
o) Heptadecágono	( ) 19 lados
p) Octadecágono	( ) 15 lados
q) Eneadecágono	( ) 5 lados
r) Icoságono	( ) 9 lados

Fonte: Apostila elaborada pela autora (2023)

Adicionalmente, a professora pesquisou e projetou no quadro, para que os alunos pudessem visualizar o número de lados, imagens de esportes, a exemplo de lutas de Artes Marciais Mistas (MMA), cujos confrontos ocorrem em um "octógono" (Figura 13). Essas atividades proporcionaram aos estudantes a percepção de que os prefixos utilizados nas nomenclaturas possuem significados semelhantes. Notavelmente, foi observado que palavras conhecidas em outros contextos, como as utilizadas em competições esportivas, também compartilham significados e origens próximas.

Figura 13 - Imagem de uma luta em um octógono

Fonte: Globo. Disponível em: <https://ge.globo.com/sportv/combate/blogs/especial-blog/ultimmato/post/novo-angulo-nick-diaz-deita-no-octogono-durante-luta-contra-anderson-no-ufc.html>. Acesso em 2023.

Por fim, na análise das respostas dos alunos ao terceiro item desta atividade "o que foi novidade nessa aula, ou seja, o que você aprendeu? Explique com suas palavras", considerando as discussões ocorridas em aula, foi possível perceber que o conteúdo abordado foi, de fato, uma novidade para muitos. Além disso, a satisfação expressa pelos alunos foi evidente, com muitos descrevendo o conteúdo como algo "legal", conforme escrito pelos Alunos 15 e 18:

> Para mim tudo é tão novo, nunca tinha ouvido falar sobre polígonos, lados, ângulos, vértices, equiângulo, equilátero, regular, convexo e côncavo. O polígono quando a gente conta os lados dele, ele vai ter a mesma quantidade de ângulos e vértices. Pro polígono ser regular ele precisa ser equiângulo e equilátero. Para ser equiângulo os ângulos têm que ser iguais e para ser equilátero os lados tem que ser iguais. (Aluno 15, item 3, atividade zero)

> Na verdade, é tudo muito novo. Eu já tinha ouvido falar algumas coisas, mas eu não sabia o que era vértice, equiângulo, equilátero, côncavo, convexo e até mesmo os nomes dos polígonos. Tudo isso eu aprendi por agora. Está sendo uma experiência bem legal e interessante de aprender. (Aluno 18, item 3, atividade zero).

Essa reação positiva indica não apenas a assimilação do conteúdo do material, mas também o engajamento e o interesse dos alunos pelo aprendizado exploratório e interativo proposto. Além do engajamento dos alunos na atividade prática, surgiram perguntas instigantes, como “qual o nome desse jogo?” (Aluno 19), a possibilidade de levar os polígonos para casa e se encontrariam na internet. Essas indagações demonstraram não apenas o interesse dos alunos na atividade, mas também a possibilidade de estender o aprendizado para além da sala de aula.

4.2 Atividade 1: construção de um polígono convexo

O objetivo desta atividade é construir um polígono convexo a ser utilizado como base para as próximas aulas. Cada dupla de alunos recebeu uma folha de papel quadrada com 20 cm de lado para construir um polígono convexo com n lados, sendo n um número sorteado pela professora. Após a construção, os alunos foram orientados a nomear os vértices do polígono com letras maiúsculas (A, B, C etc.), depois precisavam medir os lados e os ângulos do polígono utilizando a régua e o transferidor e anotar essas informações em tabela disponível na apostila (Figura 14).

Figura 14 - Item 4 da atividade 1

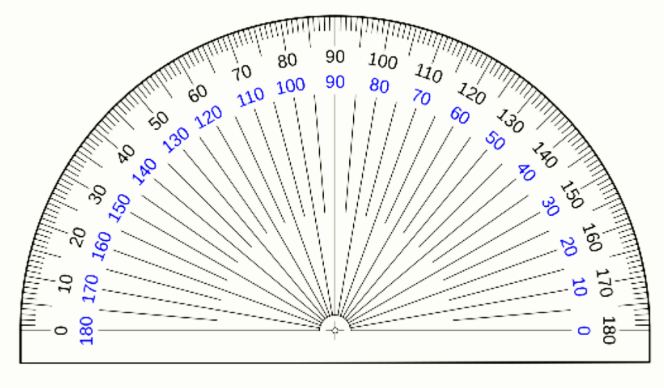
Medida do lado	Medida do ângulo
$\overline{AB} =$	$A\hat{B}C =$
$\overline{BC} =$	$B\hat{C}D =$
$\overline{CD} =$	$C\hat{D}E =$

Fonte: Apostila elaborada pela autora (2023)

Para a construção do polígono, os alunos podiam utilizar tanto uma régua quanto uma dobradura de acordo com suas preferências e habilidades. Para a atividade de medição, os alunos iniciaram pelos lados utilizando a régua, já que possuíam maior afinidade e conhecimento quanto ao uso adequado do instrumento. Assim, para medir um lado do polígono, os alunos posicionavam a régua sobre o lado que desejavam medir, embora algumas orientações consideradas simples se fizeram necessárias. A régua precisa ser alinhada de forma que um dos seus pontos de referência coincida com um dos vértices do lado a ser medido e, em seguida, observa-se a marcação correspondente ao final desse lado na régua. A diferença entre essas marcações é o que indica o comprimento do lado em questão. Assim, um segmento de medida 3 cm seria obtido tanto pelo aluno que iniciar posicionando a marcação que indica 2 cm na régua sobre o vértice inicial do segmento e verificar que o segmento termina na marcação 5 cm, quanto por aquele que iniciar a medição a partir da referência 0 cm e terminar em 3 cm na régua. Isso já é uma observação interessante de ser realizada com os alunos.

Já para medir um ângulo, os alunos precisavam utilizar o transferidor. Para tanto, iniciou-se apresentando o transferidor e suas duas marcações. Ou seja, a marcação externa que tem o início pela esquerda (em preto na Figura 15) e a marcação interna que tem seu início pela direita (em azul na Figura 15). Além disso, enfatizou-se também o ponto de referência central que indica o vértice dos ângulos.

Figura 15 – Transferidor

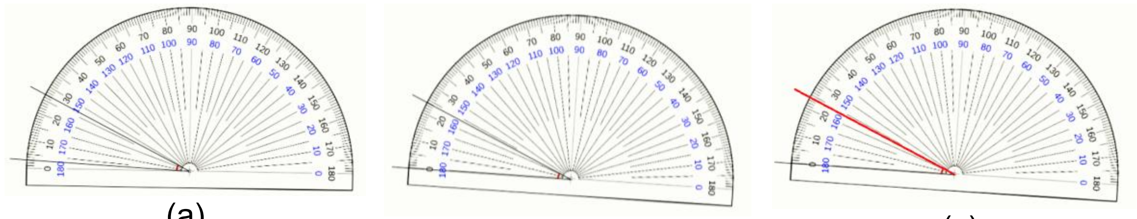


Fonte: Teachablemath. Disponível em: <https://teachablemath.com/apps/protractor-practice-app/> Acesso em 2023.

Neste momento a professora, com auxílio da tecnologia, mediu alguns ângulos com auxílio de um transferidor virtual[4], o qual é exatamente igual ao transferidor comum de 180°. Por meio desse recurso consegue-se girar o transferidor e o sobrepor aos ângulos que se deseja medir, com a vantagem de poder utilizar um projetor e facilitar a visualização de cada detalhe, uma vez que essa fica ampliada em relação ao uso de um transferidor comum. O processo de medição apresentado aos alunos é ilustrado na figura 16 e descrito a seguir:

[4] Disponível em: https://teachablemath.com/apps/protractor-practice-app/

Figura 16 - Etapas do processo de medição de um ângulo



(a) (b) (c)

Fonte: Teachablemath. Disponível em: <https://teachablemath.com/apps/protractor-practice-app/> Acesso em 2023.

i) Primeiro, sobrepõe-se o ponto no centro do transferidor com o vértice do ângulo (Figura 16 a).

ii) Mantendo o centro do transferidor fixo, posiciona-se o transferidor de forma que a linha de base (a linha horizontal inferior também chamada de linha de fé) coincida com um dos lados do ângulo (Figura 16 b).

iii) Verifica-se qual é a medida do ângulo no transferidor, observando onde a semirreta do outro lado do ângulo, indicado em vermelho na figura 16 (c), cruza a escala angular do transferidor. Ângulos são medidos em graus, logo, nesse exemplo, tem-se um ângulo de 24 graus, ou seja, 24º.

Após essa intervenção da professora destacou-se que esse processo poderia ser repetido para medir diferentes ângulos e que tanto a marcação interna quanto a externa do transferidor poderiam ser utilizadas como referência para a medição dos ângulos. Após essas orientações foi solicitado aos alunos que realizassem as medições dos ângulos do polígono construído pela sua dupla, anotando essas informações na apostila.

Ao término da atividade 1, a apostila oferecia aos alunos um compartimento (uma espécie de envelope ou pasta improvisada, confeccionada a partir de uma folha de ofício fixada na página da apostila, com a parte superior deixada aberta) para que um aluno da dupla pudesse guardar o polígono de papel construído durante a atividade. Adicionalmente, solicitou-se que cada aluno assinalasse se o polígono criado pela dupla seria armazenado em sua própria apostila ou na apostila do colega e, nesse caso, indicando o nome do colega destinatário. Este espaço serviu como uma ferramenta prática para preservar o polígono de papel de forma segura e organizada, facilitando o desenvolvimento das próximas atividades.

No início da aplicação desta atividade os alunos receberam a orientação para formarem duplas, enfatizando que essas parcerias se estenderiam ao longo das próximas atividades, possivelmente até a conclusão da apostila. Antes mesmo de iniciar a aula, foi identificado que o Aluno 5 estava isolado do restante da turma, tanto durante as aulas quanto nos intervalos. Por essa razão, foi solicitado a um grupo de alunos que o incluíssem, ressaltando a possibilidade de formarem um trio, se necessário. O Aluno 7 prontamente se ofereceu para formar dupla com o Aluno 5, comprometendo-se não apenas a trabalhar em conjunto, mas também a ajudar, explicar e oferecer assistência sempre que necessário.

Durante a formação das duplas, três alunos ficaram sem par, incluindo dois com dificuldades em matemática, o que sugere que a falta de parceria poderia estar relacionada a essa dificuldade. Foi solicitado a esses alunos que se unissem a outras duplas já formadas, formando trios. A turma foi informada de que, caso algum membro do grupo se sentisse desconfortável, poderia procurar a professora.

Em seguida, a professora definiu que os polígonos deveriam ter entre 6 e 10 lados, variando conforme o grupo. Os trios, por terem um integrante a mais, foram responsáveis por produzir dois polígonos: um pentágono e outro com o número de lados determinado pela professora. Essa abordagem foi adotada para garantir a participação ativa de todos os alunos, promovendo um ambiente colaborativo e inclusivo.

Curiosamente, notou-se algumas variações na execução dos polígonos pelos trios, em relação ao que foi inicialmente proposto. O primeiro trio, listado no quadro 1, deveria ter criado polígonos de 7 e 6 lados, mas acabou desenvolvendo com 6 e 5 lados. O segundo trio, que começou com polígonos de 8 e 5 lados, devido à limitação de tempo, optou por se concentrar apenas no polígono de 8 lados. Já o terceiro trio, inicialmente sugerido para criar um polígono de 10 lados, encontrou dificuldades e acabou produzindo um polígono de 12 lados, além do polígono de 5 lados proposto. Ao lidar com o último trio, foi proposta uma solução simples para o problema apresentado, sugerindo a ligação do décimo vértice ao primeiro e eliminando os três lados excedentes. Apesar da compreensão da solução, os alunos expressaram preferência pelo polígono inicialmente desenvolvido com 12 lados e solicitaram continuar com essa configuração, evidenciando o apreço pelo resultado alcançado por eles. O quadro 1 apresenta a sistematização dos grupos de trabalho e dos polígonos sob responsabilidade de cada um.

Quadro 1 - Organização dos grupos de trabalho

Grupo	Integrantes			Número de lados do polígono
Grupo 1	Aluno 5	Aluno 7		6
Grupo 2	Aluno 13	Aluno 18		6
Grupo 3	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 17	6 e 5
Grupo 4	Aluno 3	Aluno 6		7
Grupo 5	Aluno 4	Aluno 12	Aluno 16	8
Grupo 6	Aluno 15	Aluno 19		9
Grupo 7	Aluno 8	Aluno 14		10
Grupo 8	Aluno 9	Aluno 10	Aluno 11	12 e 5

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

O trabalho precisou ser interrompido nesse dia para que os alunos pudessem acompanhar uma feira de ciências na escola. Na aula seguinte, os alunos foram instruídos sobre como realizar a medição dos ângulos utilizando o site Teachablemath, mencionado anteriormente. A tarefa consistia em medir os ângulos internos dos polígonos que eles próprios construíram, utilizando um transferidor. Os alunos foram previamente alertados para trazerem seus próprios transferidores, entretanto, havia também outros disponíveis em uma caixa para uso compartilhado. Com essas informações deveriam responder as perguntas e preencher o quadro em suas respectivas apostilas.

Nessa aula, a pesquisadora teve a oportunidade de acompanhar de forma mais atenta o trabalho do Aluno 5, o estudante venezuelano que enfrenta desafios significativos devido à barreira linguística. A sua dupla não compareceu à aula naquele dia, levando o aluno a se sentar com outra dupla para que pudessem se auxiliar. Apesar da dupla de apoio ter demonstrado empatia e se oferecido para ajudá-lo, a barreira da língua tornou-se evidente, e a dupla buscou assistência docente diversas vezes para intermediar a comunicação. Contudo, apesar das dificuldades que ele demonstrou em ler, entender e realizar as atividades da apostila, o mesmo construiu um polígono de cinco lados com notável capricho e conseguiu realizar as medições e responder ao solicitado. Ao parabenizá-lo por seu trabalho, o aluno respondeu com um sorriso genuíno, revelando sua satisfação e orgulho pelo esforço empregado. O *feedback* é também um importante aliado no processo de aprendizagem.

Nessa atividade surgiram algumas dificuldades com o uso dos instrumentos de medida, régua e transferidor. Um exemplo claro dessa dificuldade foi observado ao medir os lados do polígono. Foi necessário explicar ao Aluno 4 que nem sempre uma medida é representada por uma quantidade inteira de centímetros. Na régua existem marcações que representam décimos de centímetro. No caso trazido por este aluno, ao ultrapassar o número 10 é preciso contar os pequenos traços subsequentes até atingir o vértice, resultando em uma medida não inteira de centímetros (10,4), ou seja, 10 centímetros e 4 décimos de centímetro.

Observou-se, durante a realização da atividade, que a velocidade e o ritmo variaram entre as duplas e trios. Enquanto alguns alunos já haviam medido os ângulos e respondido às perguntas, outros ainda não tinham finalizado as primeiras medições de lados. Circulando pela sala, foram identificados os alunos que estavam mais atrasados, a professora ofereceu auxílio e incentivou os alunos a concluírem a atividade. Em muitos casos, a falta de foco e pequenas dúvidas foram superadas com a ajuda da professora, resultando em um progresso mais rápido. Aqueles que concluíam as atividades eram encorajados a avançar, explorando e executando as tarefas das próximas páginas da apostila (itens 5, 6 e 7 na figura 17). Um dos objetivos dessa etapa era fazer com que os alunos comparassem suas medidas, garantindo que nenhum deles obtivesse uma medida de ângulo interno do polígono igual ou superior a 180°, retomando a necessidade de o polígono construído ser convexo.

Figura 17 - Itens 5, 6 e 7 da atividade 1

1.5 Algum ângulo interno do seu polígono é maior ou igual a 180°? Por quê?

1.6 Explique com suas próprias palavras como você fez para obter a medida de um lado (por exemplo, o lado $\overline{BC}$) do seu polígono.

1.7 Explique com suas próprias palavras como você fez para obter a medida de um ângulo (por exemplo, o ângulo $A\hat{B}C$) do seu polígono.

Fonte: Apostila elaborada pela autora (2023)

Os alunos enfrentaram dificuldades para expressar e relatar algumas situações nesses itens. Nesse contexto, a participação ativa da professora desempenhou um papel crucial, envolvendo-se nas discussões, estimulando a reflexão e questionando as respostas dos alunos. Percebeu-se que alguns alunos buscaram orientação da professora, solicitando esclarecimentos sobre o que deveriam escrever. Em resposta, foi pedido que os alunos lessem novamente a questão, indagando sobre suas interpretações da situação. Entretanto, mesmo após essa orientação, alguns grupos ainda encontraram dificuldades em formular respostas que considerassem adequadas. Diante dessa situação, optou-se por reunir toda a turma e projetar a apostila no quadro, apresentando o diálogo proposto, revisitando e discutindo o que estava sendo esperado.

Durante essa revisão, recordou-se que cada grupo havia construído um polígono, atribuindo nomes aos vértices e preenchendo uma tabela com as medidas dos ângulos e lados. Foi solicitado que todos observassem se havia alguma medida de ângulo na tabela maior que 180° e a turma prontamente percebeu que não havia. Alguns alunos comentaram que, agora, estavam compreendendo a pergunta. Antes de prosseguir, surgiu a afirmação de que já tinham percebido que todos os ângulos internos dos polígonos comparados eram menores que 180°, mas queriam entender o motivo dessa propriedade. Aproveitando esse questionamento, a turma foi indagada sobre hipóteses para explicar por que isso ocorria. Os olhares atentos e o silêncio persistiram por alguns segundos. As primeiras respostas que surgiram foram que mediram usando o transferidor, o que de fato estava correto. Contudo, desejava-se aprofundar essa discussão, trazendo argumentos que dialogassem com a causa desse fenômeno.

Dessa maneira, foi decidido incentivar os alunos a explorarem a razão subjacente a essa limitação, questionando se essa condição sempre se aplicava. A maioria dos alunos acreditava que sim. Seguindo essa linha de raciocínio, foi proposta a seguinte indagação: se, por acaso, existisse um ângulo maior que 180°, isso apresentaria algum problema? O que aconteceria? O Aluno 2 sugeriu que teria uma "ponta para dentro” do polígono, enquanto o Aluno 15 argumentou que isso ocorreria porque o polígono não seria convexo. A turma concordou com essas observações e outros comentários ressaltaram que, se houvesse um ângulo interno maior que 180°, o polígono seria côncavo. Aproveitando o engajamento dos alunos, questionou-se se poderia haver um ângulo exatamente igual a 180°, e a turma rapidamente concluiu que não seria possível, pois "seria uma linha reta". Observa-se aqui um elemento que Skovsmose (2000) menciona nos cenários de investigação, que se refere a momentos em que professor e alunos questionam sobre possibilidades a serem investigadas no decorrer da atividade.

Posteriormente, usando recurso do GeoGebra com a projeção no quadro branco, foi criado rapidamente um polígono convexo e configurado para exibir as medidas dos ângulos internos. Destacou-se que todos os ângulos internos eram, de fato, inferiores a 180°. Mostrou-se à turma que, ao mover um vértice até que o ângulo atingisse 180°, os dois lados adjacentes a esse vértice se transformariam em um só, alterando o número de lados e fazendo com que esse vértice deixasse de existir. Ao mover ainda mais esse vértice, o ângulo ultrapassaria a medida de um ângulo raso, e como discutido anteriormente, o polígono passaria a ser côncavo. Em seguida, foi solicitado que os alunos registrassem essas conclusões em suas apostilas, respondendo às perguntas propostas.

Em resumo, enfatiza-se que essa atividade de construir um polígono convexo proporciona aos alunos a oportunidade de praticar a medição de lados e ângulos utilizando uma régua e um transferidor. Além disso, eles também têm a chance de explorar a nomenclatura dos vértices, utilizando letras maiúsculas para identificá-los. A atividade proporcionou, também, aos estudantes o levantamento de conjecturas acerca dos elementos que estavam sendo analisados, fazendo-os refletir sobre propriedades e condições da construção desses polígonos. Essa atividade é um passo importante para o entendimento dos conceitos fundamentais da geometria plana e será uma base sólida para as próximas aulas.

4.3 Atividade 2: construção do polígono convexo no GeoGebra

Nesta atividade, buscou-se explorar a construção do polígono previamente definido na atividade anterior, ou seja, com lados e ângulos específicos, utilizando o site GeoGebra[5]. O objetivo é proporcionar aos alunos do ensino fundamental uma experiência digital na construção desse polígono. Vale ressaltar que nossa abordagem não teve como foco explorar o dinamismo característico do GeoGebra, mas sim concentrar-se na reprodução digital do polígono elaborado anteriormente. O GeoGebra, por ser uma ferramenta intuitiva e de fácil utilização, facilitou a execução da atividade, que foi apresentada tanto pela professora, por meio do projetor, quanto por material impresso distribuído aos alunos.

No início da atividade, surgiram preocupações em relação às medidas, principalmente no que diz respeito aos ângulos. Essa foi uma oportunidade para discutir a importância das medidas corretas na geometria e como elas afetam a construção precisa do polígono. Para a montagem do polígono no GeoGebra, os alunos foram incentivados a observar e analisar os ângulos e lados apresentados no material físico. Essa análise prévia ajudou os alunos a compreenderem como deveriam posicionar os

[5] Disponível em: https://www.geogebra.org/geometry

vértices do polígono no GeoGebra, garantindo que os ângulos e lados estivessem de acordo com as especificações.

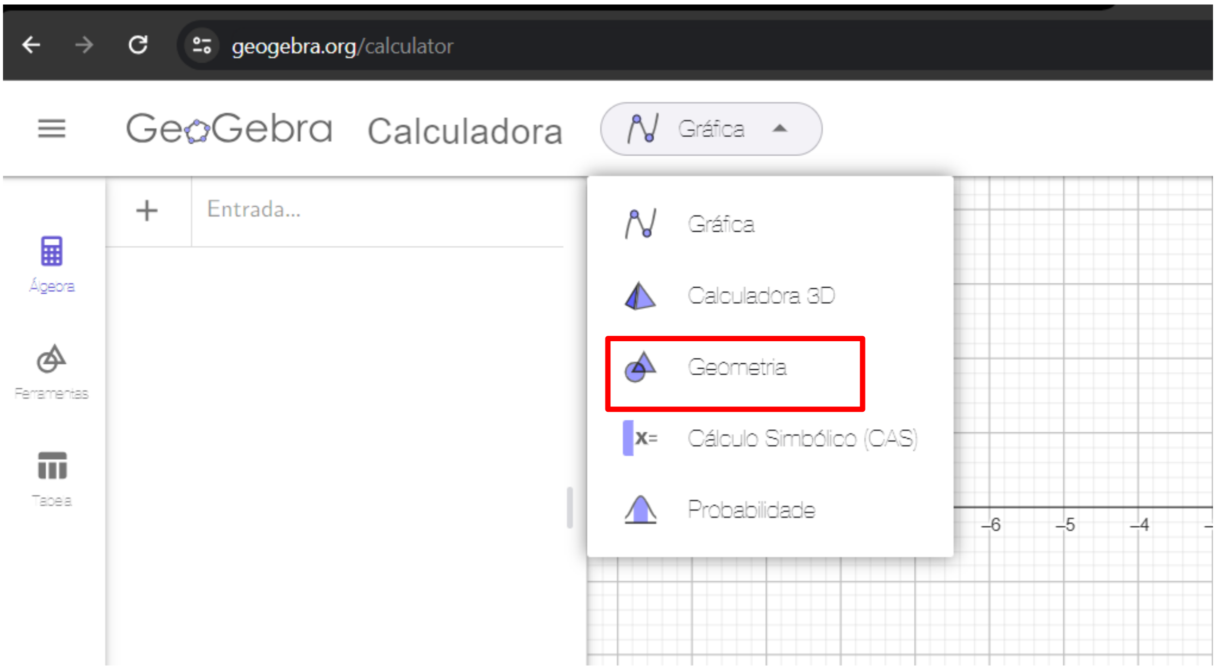
Durante a atividade, a professora forneceu instruções passo a passo, demonstrando visualmente no projetor como utilizar as ferramentas do GeoGebra para criar os segmentos de reta correspondentes aos lados do polígono, de forma que fossem consecutivos. Além disso, incentivou-se a interação entre os alunos, encorajando-os a compartilhar suas descobertas e desafios durante o processo de construção. Isso criou um ambiente colaborativo, promovendo o aprendizado coletivo.

Ao final da atividade, surgiram perguntas que ajudaram os alunos a verificarem se o polígono desenhado no GeoGebra possuía as mesmas medidas do polígono desenhado no papel, permitindo que identificassem possíveis erros e compreendessem melhor as propriedades dos polígonos. Assim, os alunos tiveram a oportunidade de comparar o polígono construído no GeoGebra com o previamente definido. Esse processo permitiu que avaliassem a precisão de suas construções e discutissem os desafios encontrados ao realizar a tarefa.

Ao iniciar a aula, os alunos foram informados que seriam utilizados os Chromebooks e eles sugeriram que a turma se dirigisse à sala Google da escola. Essa sala conta com cadeiras giratórias, tipo de escritório, e mesas que se encaixam formando círculos e uma tela interativa. Embora a ideia inicial fosse trazer os Chromebooks para a sala de aula, percebeu-se que a turma estava empolgada com a possibilidade de usar a sala Google, que estava disponível naquele momento. Desse modo, a turma se deslocou até lá.

Entretanto, no início da atividade, foi encontrado um pequeno contratempo. As instruções orientavam os alunos a digitar na barra de endereço geogebra.org/geometry, mas constatou-se que esse domínio estava bloqueado para acesso pelos Chromebooks. Buscando contornar essa situação, ao utilizar o login de um aluno, foi observado que, ao acessar o site inicial do GeoGebra (www.geogebra.com), não havia problema de bloqueio. Dessa forma, utilizando a tela interativa, o passo a passo a ser seguido, incluindo o login pela conta Google institucional que é a mesma utilizada para acessar o Chromebook, foi apresentado. Desta maneira, o problema de acesso foi solucionado, permitindo que os alunos realizassem o login com êxito. Após fazer o login com a conta google no site do GeoGebra, foi necessário acessar a aba calculadora e mudar para o tipo geometria (Figura 18).

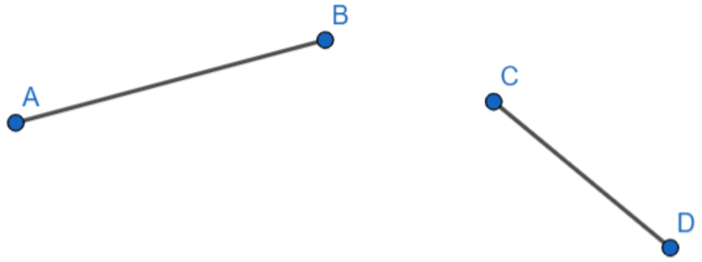
Figura 18 - Aba geometria do GeoGebra



Fonte: GeoGebra. Disponível em: < https://www.geogebra.org/calculator >. Acesso em 2024.

Durante a construção do polígono no GeoGebra, foi destacada a importância de seguir rigorosamente os passos definidos na apostila. Enquanto alguns alunos executavam a tarefa com facilidade, outros questionavam cada passo, buscando orientação adicional. Nesse contexto, foi incentivada a leitura atenta da apostila, enfatizando a importância de seguir o passo a passo indicado. Em alguns casos, a apostila foi lida em conjunto com o aluno. Por exemplo, para a construção do segmento BC, o aluno deveria considerar o ponto B já existente no segmento AB. No entanto, alguns alunos, ao clicarem fora do ponto B para iniciar o novo segmento, acabaram gerando os pontos C e D e o segmento CD (Figura 17). Diante dessa situação, surgiram questionamentos sobre como unir esses dois segmentos, evidenciando a necessidade de compreender corretamente cada etapa do processo de construção e retomando o próprio conceito de segmentos consecutivos.

Figura 19 - Segmentos separados

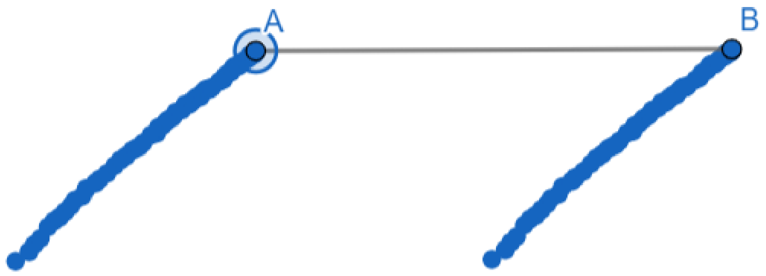


Fonte: Construção feita pela autora no GeoGebra (2024)

Foi instruído aos alunos que estavam na situação descrita a apagarem o segmento incorreto e tentarem refazer, seguindo as orientações que a professora apresentava na tela interativa e atentando-se às instruções da apostila. Durante essa etapa, foi selecionada a ferramenta de segmento de comprimento fixo e, conforme as orientações da apostila, foi perguntado aos alunos qual ponto deveria ser selecionado primeiro. Eles responderam corretamente: o ponto B. Em seguida, abriu-se a janela solicitando o tamanho do comprimento, e foi explicado que cada grupo tinha uma medida que poderia ser diferente, mas que deveriam seguir a mesma medida descrita na atividade 1. Essa explicação ajudou a esclarecer a razão pela qual estavam enfrentando dificuldades na construção do polígono e reforçou a importância de seguir as instruções detalhadas da apostila para garantir a precisão na execução das tarefas. Ao seguir a construção guiada pela apostila, o polígono em questão possui comprimentos fixos, todos dependentes do primeiro vértice.

Na figura 20, é possível observar a habilitação do rastro dos dois pontos (em azul). Ao mover o ponto A, o ponto B se desloca com a mesma angulação e sentido. Nota-se que o ponto A está livre, possibilitando movê-lo para qualquer parte do plano. Essa visualização ilustra a relação dinâmica entre os pontos A e B durante a manipulação no GeoGebra, enfatizando como as mudanças em um ponto afetam o posicionamento do outro.

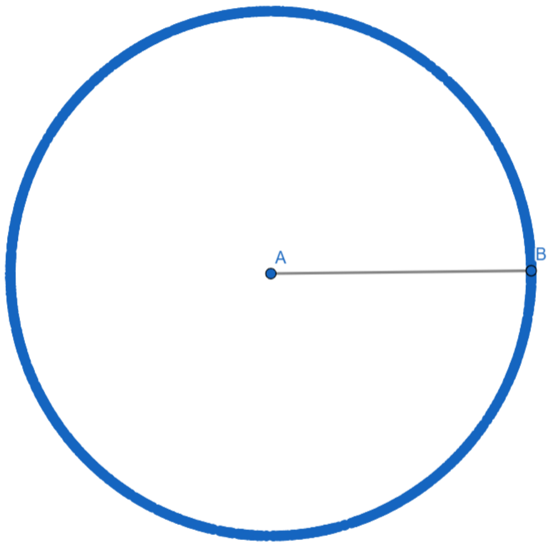
Figura 20 - Rastro ao mover o ponto A



Fonte: Construção feita pela autora no GeoGebra. (2024)

Na figura 21, realizou-se o mesmo procedimento para o ponto B, movendo-o e habilitando o rastro dos pontos, o que torna evidente que o ponto A permanece estacionado. Isso ocorre devido à forma como o ponto B foi construído, mantendo uma distância fixa em relação ao ponto A. Portanto, o ponto B não pode ser movido independentemente para qualquer parte do plano. A "amarração" do ponto B a essa distância específica do ponto A é ilustrada pelo rastro (em azul), destacando todos os lugares pelos quais o ponto B pode se deslocar. Essa característica ressalta a limitação na movimentação do ponto B e realça a importância de compreender as restrições impostas pelos passos de construção na apostila.

Figura 21 - Rastro ao mover o ponto B



Fonte: Construção feita pela autora no GeoGebra (2024)

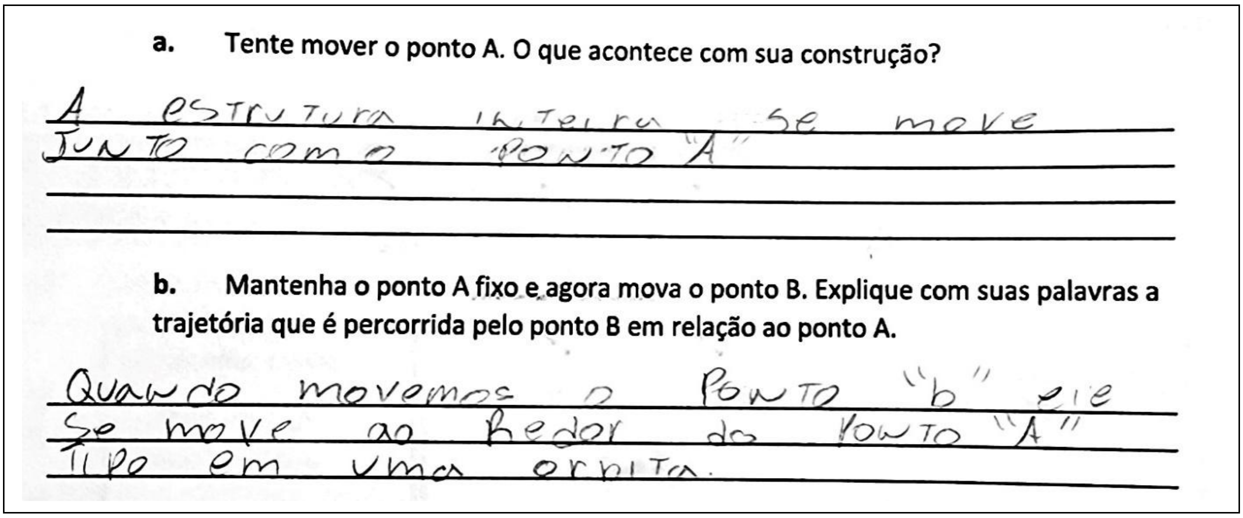
A questão anterior foi discutida com base na pergunta do item 1.4 da atividade 2 da apostila, a qual estimula os alunos a perceberem a diferença entre mover o ponto A e mover o ponto B. É importante ressaltar que a explicação detalhada fornecida anteriormente não foi apresentada diretamente aos alunos. Em vez disso, cada estudante teve a oportunidade de manipular os pontos em sua própria construção, permitindo que experimentassem, descobrissem e comparassem as características por meio de suas observações individuais. Além disso, um recurso adicional na apostila, indicado por uma "figurinha", incentivou os alunos a explorarem mais sobre o conceito de lugar geométrico na última página, promovendo assim a autodescoberta e o aprofundamento do conhecimento. Essa abordagem visa incentivar a participação ativa dos alunos no processo de aprendizagem.

Fica evidente que os alunos realmente perceberam as diferenças entre mover o ponto A e mover o ponto B, conforme descrito nas figuras 22[6] e 23[7]. Além disso, é possível notar o entendimento da definição do lugar geométrico circunferência, demonstrando assim um aprendizado prático durante a atividade.

[6] Resposta do Aluno 2 no item a: A estrutura inteira se move junto com o ponto A. Resposta no item b: Quando movemos o ponto "B" ele se move ao redor do ponto A tipo em uma órbita.

[7] Resposta do aluno 8 no item a: Quando eu movo o ponto A ambos se mexem. Resposta no item b: O ponto B se move em torno do ponto A, sem mudar a sua distância em relação ao ponto A.

Figura 22 - Respostas do Aluno 2 ao item 1.4 da atividade 2



a. **Tente mover o ponto A. O que acontece com sua construção?**

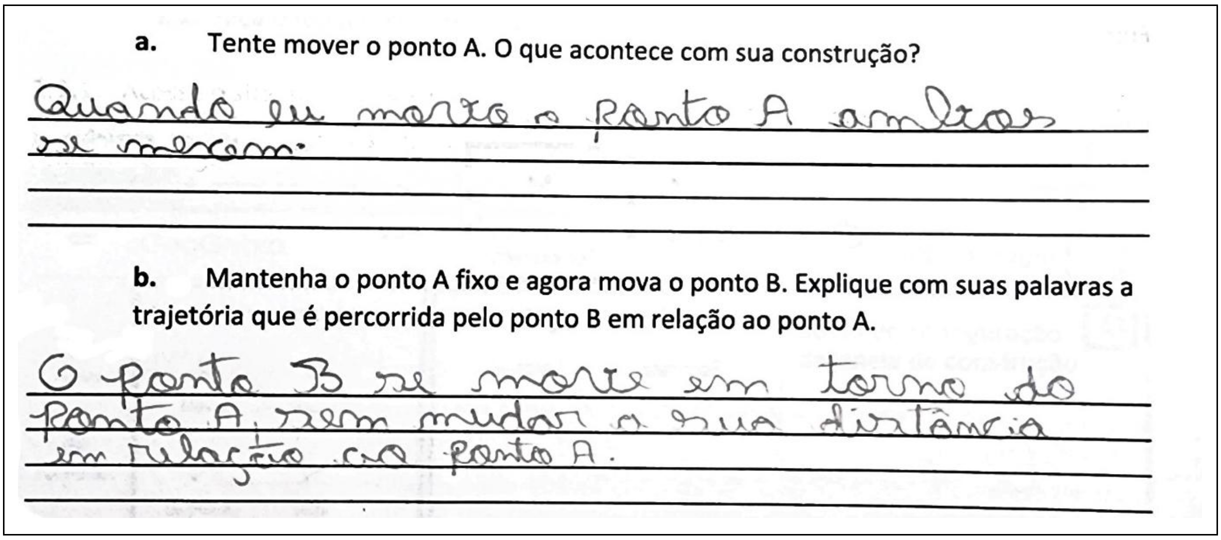
A estrutura inteira se move junto com o ponto "A"

b. **Mantenha o ponto A fixo e agora mova o ponto B. Explique com suas palavras a trajetória que é percorrida pelo ponto B em relação ao ponto A.**

Quando movemos o ponto "b" ele se move ao redor do ponto "A" tipo em uma orbita.

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Figura 23 - Respostas do Aluno 8 ao item 1.4 da atividade 2



a. **Tente mover o ponto A. O que acontece com sua construção?**

Quando eu movo o ponto A ambos se movem.

b. **Mantenha o ponto A fixo e agora mova o ponto B. Explique com suas palavras a trajetória que é percorrida pelo ponto B em relação ao ponto A.**

O ponto B se move em torno do ponto A, sem mudar a sua distância em relação ao ponto A.

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Após a construção do lado $\overline{BC}$, os alunos foram instruídos a construir o ângulo $A\hat{B}C$. Em seguida, cada aluno foi orientado a mover o ponto C de modo que a medida desse ângulo correspondesse à mesma medida do polígono feito anteriormente em papel. A construção dos próximos lados do polígono seguiu um processo de repetição semelhante ao passo da construção do lado $\overline{BC}$ e do ângulo $A\hat{B}C$, tornando o procedimento mais rápido e com menos dúvidas. Enquanto os alunos executavam esses passos, a professora circulava entre os grupos para auxiliá-los. Dessa vez, havia menos alunos com dúvidas, e as questões foram mais pontuais, permitindo que a professora atendesse a todos com eficiência. Assim, foram construídos todos os vértices do polígono, faltando apenas o último segmento, que conecta o último vértice ao ponto A.

No item 1.10 desta atividade, utilizou-se a ferramenta polígono para concluir a construção. No entanto, os alunos enfrentaram dificuldades para compreender a ordem sugerida pela apostila. O texto do item 1.10 foi escrito da seguinte maneira:

> Vamos traçar nosso polígono, idêntico ao da atividade 1. Vá na ferramenta Polígono e clique, de forma consecutiva, em todos os vértices da sua construção, iniciando no ponto A e finalizando nele também, para 'fechar' seu polígono.

Diante das muitas dúvidas que surgiram, foi necessário que a pesquisadora mostrasse um exemplo na tela interativa para os alunos seguirem. Foi explicado que, após selecionar a ferramenta polígono no GeoGebra, deviam clicar primeiro no ponto A, depois no B e assim por diante, até finalizar no ponto A novamente. Essa visualização tornou o procedimento mais acessível e de fácil compreensão para os alunos. Devido a esta experiência, o texto foi alterado, acrescentando algumas informações adicionais:

> Vamos traçar nosso polígono, idêntico ao da atividade 1. Vá na ferramenta Polígono e clique, de forma consecutiva, em todos os vértices da sua construção, iniciando no ponto A e finalizando nele também, para "fechar" seu polígono. Em outras palavras, selecione a ferramenta polígono e clique no ponto A, depois no ponto B, e assim por diante. Depois de selecionar o último vértice, clique novamente no vértice A.

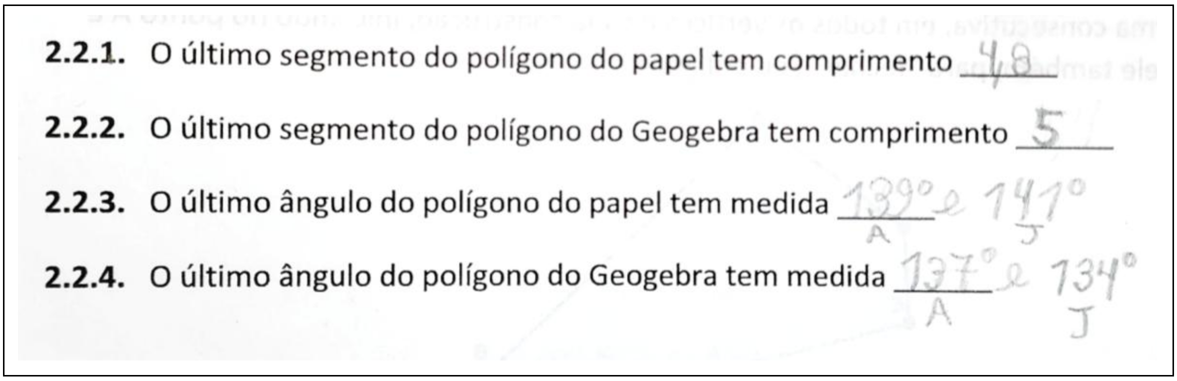
Ressalta-se que, com exceção do último, todos os outros lados do polígono possuem a mesma medida imposta pelo aluno durante a construção. Já em relação às medidas dos ângulos, o primeiro e o último ângulos ficam automaticamente determinados pela construção, restando apenas aos alunos a conferência de suas medidas ao final. Por exemplo, considerando um decágono com vértices de A a J, ao construir o ângulo $I\hat{J}A$, seria necessário mover o ponto A para ajustar a medida desse ângulo sem alterar o ângulo anterior. No entanto, isso resultaria na modificação do ângulo $A\hat{B}C$.

Como a apostila não estava prevendo essa situação, foi solicitado nas perguntas a seguir que os alunos colocassem as medidas do ângulo do vértice A e do ângulo de seu último vértice ao lado[8], identificados com a letra de cada vértice. Alguns

[8] Essa alteração já está implementada no material final, disponível no Apêndice C.

alunos tiveram pequenas diferenças comparando o polígono de papel com o polígono do GeoGebra, como pode-se notar nas figuras 24 e 25 a seguir.

Figura 24 - Respostas do Aluno 14 aos itens 2.1 ao 2.4 da atividade 2



2.2.1. O último segmento do polígono do papel tem comprimento 4,8

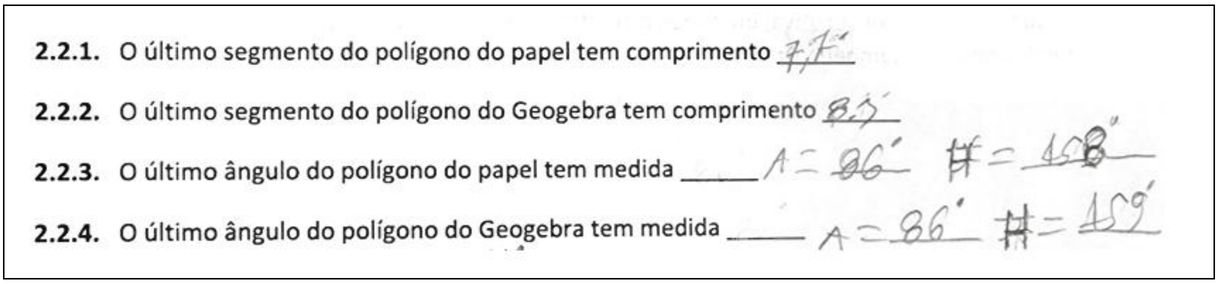
2.2.2. O último segmento do polígono do Geogebra tem comprimento 5

2.2.3. O último ângulo do polígono do papel tem medida 139° e 141°
A J

2.2.4. O último ângulo do polígono do Geogebra tem medida 137° e 134°
A J

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Figura 25 - Respostas do Aluno 12 aos itens 2.1 ao 2.4 da atividade 2



2.2.1. O último segmento do polígono do papel tem comprimento 7,7

2.2.2. O último segmento do polígono do Geogebra tem comprimento 8,5

2.2.3. O último ângulo do polígono do papel tem medida ____ A = 86' # = 108'

2.2.4. O último ângulo do polígono do Geogebra tem medida ____ A = 86' # = 159'

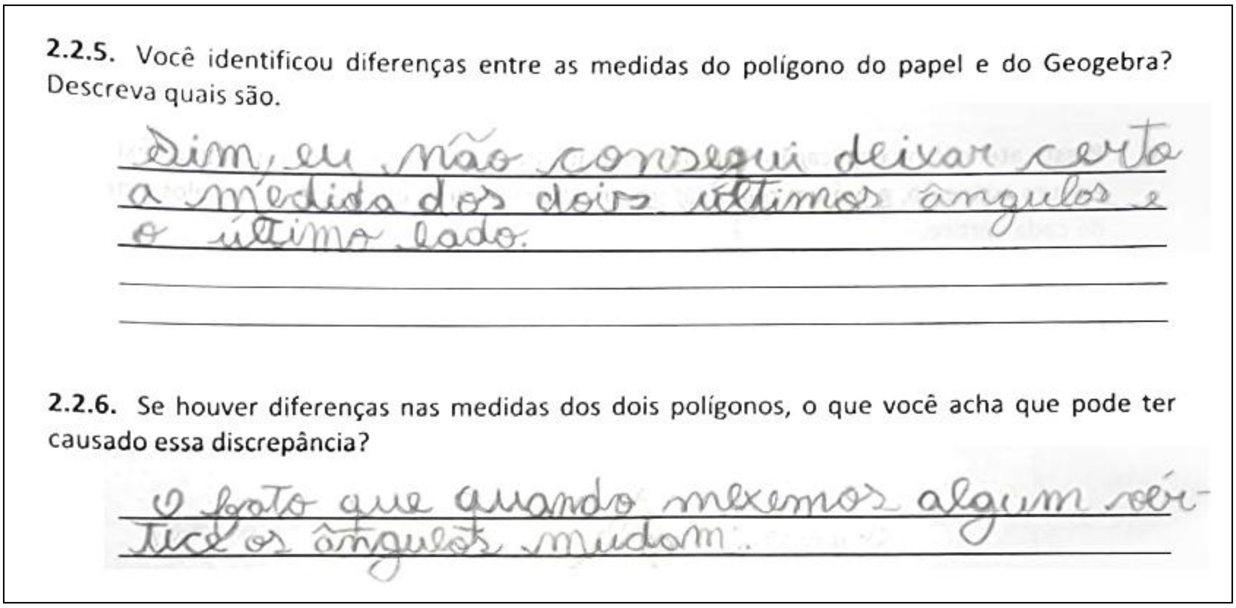
Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Durante essa aula, notou-se que alguns alunos preferiram trabalhar em duplas, compartilhando apenas um computador Chromebook, enquanto outros optaram por sentar-se juntos, cada um utilizando seu próprio Chromebook para realizar a construção. Foi permitido aos alunos escolherem a maneira que se sentissem mais confortáveis para trabalhar.

Esta aula foi concluída logo após o preenchimento das questões ilustradas nas figuras 22 e 23, com poucos alunos avançando para as questões subsequentes. Portanto, no início da aula seguinte, foi necessário retomar e finalizar duas questões que haviam ficado em aberto. Essas questões focavam nas diferenças observadas entre o polígono de papel e o polígono construído no GeoGebra.

A aula seguinte foi iniciada com o seguinte questionamento da professora aos alunos: "alguém notou diferenças entre as medidas do polígono construído no papel e do polígono construído no GeoGebra?". Logo que compartilharam as respostas com o restante da turma, ficou evidente que foi comum, e muitos perceberam diferenças, proporcionando um certo conforto aos estudantes. Dessa forma, foi solicitado que respondessem, nos itens 2.5 e 2.6 da atividade 2 (Figura 26), quais eram exatamente essas diferenças observadas, incentivando uma discussão mais aprofundada e reflexiva sobre as variações geométricas entre os modelos físicos e virtuais.

Figura 26 - Respostas do Aluno 14 aos itens 2.5 e 2.6 da atividade 2



2.2.5. Você identificou diferenças entre as medidas do polígono do papel e do Geogebra? Descreva quais são.

Sim, eu não consegui deixar certo a medida dos dois últimos ângulos e o último lado.

2.2.6. Se houver diferenças nas medidas dos dois polígonos, o que você acha que pode ter causado essa discrepância?

O fato que quando mexemos algum vértice os ângulos mudam.

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

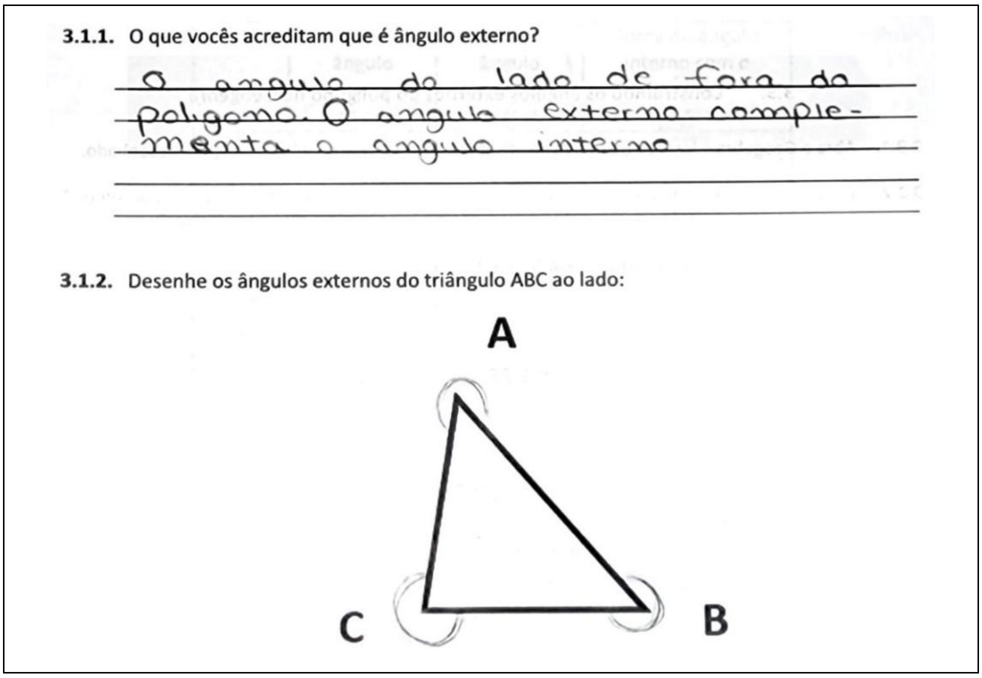
Uma observação interessante foi perceber as tentativas dos alunos de deixar os ângulos do polígono no GeoGebra com medidas próximas das medidas que constavam na apostila do polígono de papel. Alguns alunos moveram diversas vezes os vértices. Ao mover um vértice, isso alterava o ângulo seguinte, e por essa razão, precisavam mover em outro vértice, e assim sucessivamente, a exemplo do justificado pelo Aluno 14 na figura 26. E uma dúvida interessante ocorreu com o valor do último lado do polígono, pois ao construir um polígono com os outros lados corretos, alguns alunos perceberam que não conseguiam obter o último lado com a medida esperada. Isso mostrou que existe uma relação entre esses elementos dos polígonos. Ou seja, para obter um certo ângulo em um certo vértice, isso alterava outro(s) ângulo(s), e para obter um tamanho diferente desse último lado, precisariam movimentar alguns vértices, alterando alguns ângulos.

A respeito da pergunta que indagava sobre as razões por trás dessas discrepâncias, inicialmente os alunos não souberam como responder, levantando dúvidas sobre a possibilidade do GeoGebra estar errado ou não permitir que colocassem o ângulo correto, já que movimentar um vértice acabava movimentando outros. Entretanto, um ponto de discussão surgiu quando dois colegas mediram o mesmo ângulo e encontraram valores diferentes. Isso levantou a questão de que alguns ângulos não apresentavam medidas exatas, pois não eram valores inteiros, e as medições não estavam perfeitamente alinhadas com as marcações do transferidor, resultando em valores aproximados. Além disso, pequenos ajustes no posicionamento do transferidor e da régua, juntamente com a falta de precisão nos desenhos dos polígonos pelos alunos, também contribuíram para pequenas discrepâncias durante as medições.

4.4 Atividade 3: ângulos externos

O objetivo da atividade 3 é explorar o conceito e a construção do ângulo externo de um polígono e concluir acerca da suplementaridade do ângulo externo e do ângulo interno de um mesmo vértice. Nesta atividade, inicialmente, solicitou-se que o aluno propusesse uma definição para ângulos externos, de acordo com o que ele acreditasse que poderia ser. Em seguida, foi solicitado que ele desenhasse no triângulo em sua apostila o que seriam os ângulos externos desse polígono. Todos os alunos demonstraram nas suas construções que o ângulo externo seria o ângulo que falta para completar uma volta, ou seja, seria um ângulo de medida 360° excluindo-se a medida do ângulo interno. Isso mostrou que os alunos não conheciam a definição e que a nomenclatura pode induzir ao erro. Veja na figura 27 e a resposta do aluno 15:

Figura 27 - Respostas do Aluno 15 aos itens 1.1 e 1.2 da atividade 3


3.1.1. O que vocês acreditam que é ângulo externo?

O angulo do lado de fora do poligono. O angulo externo comple-
menta o angulo interno

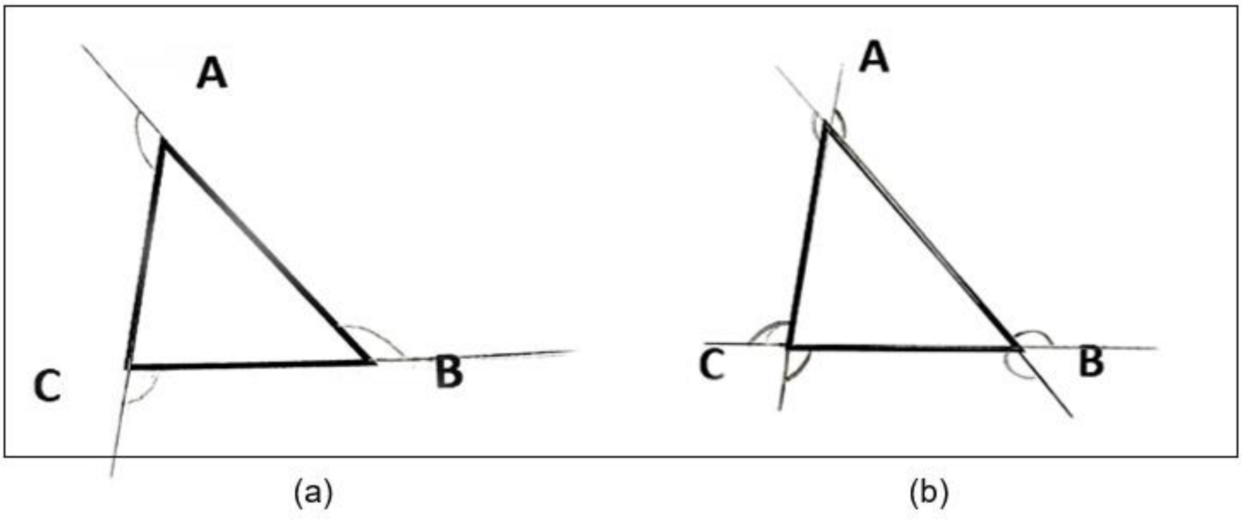
3.1.2. Desenhe os ângulos externos do triângulo ABC ao lado:

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

O passo seguinte consistiu em informar aos discentes que a docente explicaria o conceito de ângulo externo e que não era necessário apagar o que já havia sido feito caso não estivesse correto. A questão proposta era o que eles acreditavam ser um ângulo externo, ressaltando que poderiam haver diferentes opiniões, uma vez que se tratava de uma definição nova e desconhecida para eles. As respostas (antes da apresentação da definição pela professora) seriam objeto de estudo, e por isso era essencial que permanecessem registradas em suas apostilas. A docente então projetou um pentágono no quadro, construindo seus ângulos externos por meio do prolongamento de seus lados, utilizando para isso uma régua comum e uma caneta para quadro.

Logo em seguida, depois dessa explicação os alunos deveriam refazer sua construção de ângulos externos utilizando a definição que acabaram de aprender. Nesse momento, surgiram algumas questões relevantes, como se faria diferença se prolongasse em ambos os lados ou em apenas um dos lados, e se haveria um lado correto para prolongar. Brevemente, a professora trouxe esse debate para a turma e falou sobre ângulos opostos pelo vértice possuírem a mesma medida. Sendo assim, seria indiferente a forma como seria prolongado o lado. A figura 28 exemplifica construções realizadas após a apresentação da definição. O Aluno 13 (Figura 28 a) seguiu estritamente a definição, já o Aluno 17 (Figura 28 b) considerou a questão dos ângulos opostos pelo vértice já descrita.

Figura 28 - Respostas dos alunos 13 e 17 ao item 2.1 da atividade 3



Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Logo após, os alunos deveriam voltar para a construção de seus polígonos no GeoGebra e construir os ângulos externos (itens 3.1 a 3.5 da atividade 3 da apostila). Para isso, a pesquisadora combinou que, seguindo a apostila, iriam considerar o prolongamento de cada lado seguindo a ordem alfabética, ou seja, no lado AB, seria traçada a semirreta de origem em A passando por B. Cada construção que os alunos conseguiam fazer era motivo de orgulho e de comentários. Nesta atividade, alguns alunos disseram que entenderam porque foi solicitada a construção do ângulo externo sem a definição, pois, segundo eles, o nome "externo" gerava uma interpretação errada e a professora já sabia que a turma seria "enganada". Já na construção do ângulo externo no GeoGebra, os alunos chamaram a professora para que conferisse e mostraram com orgulho que conseguiram fazê-lo sem "ajuda". Isso demonstra maior independência dos alunos e maior intimidade com o GeoGebra.

O próximo passo foi preencher a tabela (item 4.1 da atividade 3 da apostila) que mostra a figura 27 a seguir:

Figura 29 - Respostas do Aluno 15 ao item 4.1 da atividade 3

	Medida do ângulo interno	Medida do ângulo externo	Soma do ângulo interno com o externo
$\hat{A}$	134°	46°	180°
$\hat{B}$	163°	17°	180°
$\hat{C}$	133°	47°	180°
$\hat{D}$	142°	38°	180°
$\hat{E}$	131°	49°	180°
$\hat{F}$	130°	50°	180°
$\hat{G}$	136°	44°	180°
$\hat{H}$	150°	30°	180°
$\hat{I}$	141°	39°	180°

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

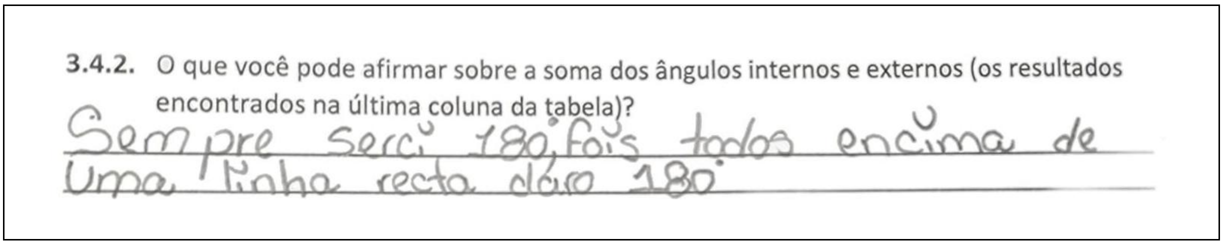
Durante a atividade, alguns discentes solicitaram o auxílio da professora para verificar a correta execução da tarefa, pois observaram que a soma do ângulo interno com o ângulo externo de seus polígonos sempre resultava em 180°. A professora confirmou e os encorajou a prosseguir com a atividade.

Mesmo com o encorajamento e a confirmação de que estavam corretos, os alunos demonstraram curiosidade em saber o motivo pelo qual a soma sempre resultava em 180°. Por isso, muitos grupos chamaram a professora para questionar o porquê dessa soma específica. Diante dessa situação, a professora chamou a turma para dialogar, perguntando sobre o valor que estavam encontrando na última coluna da tabela, e todos responderam 180°. Aqueles que ainda não haviam percebido a similaridade também passaram a notá-la. A pesquisadora, então, questionou: "Por que todos vocês encontraram 180°?" Nesse momento, foi interessante perceber que os alunos estavam bastante atentos, curiosos e ansiosos para responder a essa indagação. A docente retomou o processo de construção do ângulo externo, utilizando a tela interativa para construir um hexágono e seus ângulos internos e externos com cores diferentes, de forma a torná-los visíveis. Foi solicitado que pensassem brevemente sobre a situação, focando na maneira como o ângulo externo foi construído e que discutissem com seu grupo.

O Aluno 15 fez uma observação pertinente, notando que a soma dos primeiros ângulos internos com seus respectivos ângulos externos resultava em 180°. Ele percebeu que isso ocorre porque ambos estão situados sobre a mesma linha reta, formando sempre um semicírculo. Apesar de não ter concluído as demais somas, deduziu que também resultariam em 180°. A docente elogiou seu raciocínio ágil, mas solicitou que não compartilhasse ainda essa informação com os colegas, pois desejava que todos refletissem sobre o fenômeno observado, considerando que alguns discentes ainda estavam preenchendo apenas as duas primeiras colunas da tabela, sem ter realizado a soma.

Ficou evidente que a resposta do item 4.2 da atividade 3 tornou-se clara para os discentes. O Aluno 5 empregou uma justificativa similar à do Aluno 15 para responder à questão subsequente, conforme ilustrado na figura 30. De forma similar as respostas aos demais itens (4.3 a 4.5) da atividade 3 também demonstraram entendimento por parte do Aluno 14 (Figura 31).

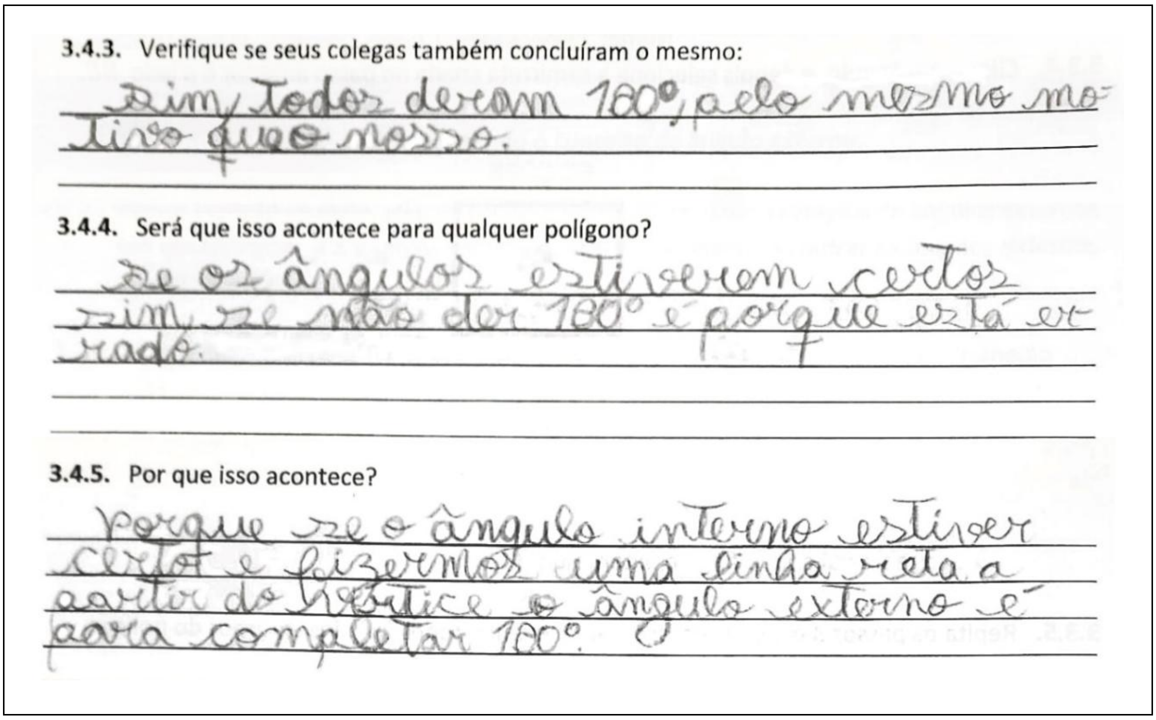
Figura 30 - Resposta do Aluno 5 ao item 4.2 da atividade 3


3.4.2. O que você pode afirmar sobre a soma dos ângulos internos e externos (os resultados encontrados na última coluna da tabela)?

Sempre serci 180° pois todos encima de Uma linha recta dáro 180°

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Figura 31 - Respostas do Aluno 14 aos itens 4.3 a 4.5 da atividade 3



3.4.3. Verifique se seus colegas também concluíram o mesmo:

sim, Todos deram 180°, pelo mesmo motivo que o nosso.

3.4.4. Será que isso acontece para qualquer polígono?

se os ângulos estiverem certos sim, se não der 180° é porque está errado.

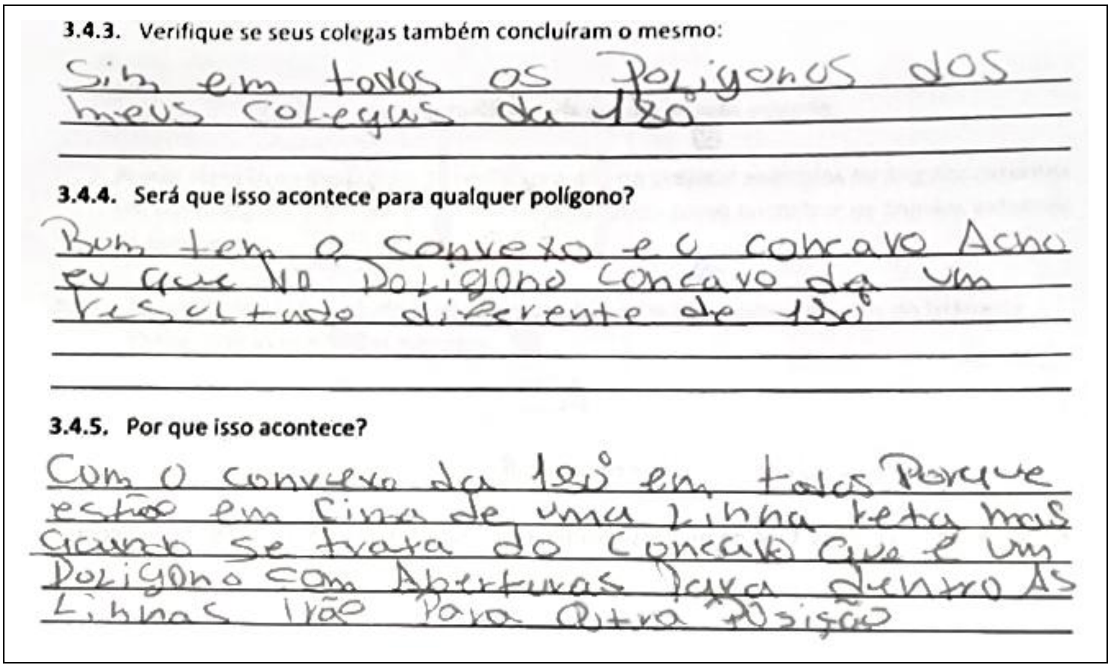
3.4.5. Por que isso acontece?

Porque se o ângulo interno estiver certo e fizermos uma linha reta a partir do vértice o ângulo externo é para completar 180°.

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

A dupla composta pelos alunos 15 e 19 destacou-se ao apresentar uma resposta significativamente distinta das demais, levantando a hipótese de que a soma do ângulo interno com o ângulo externo ser igual a 180° ocorre apenas em polígonos convexos, ou seja, essa propriedade não se aplica a polígonos côncavos. A resposta apresentada na apostila do Aluno 15 pode ser visualizada na figura 32.

Figura 32 - Respostas do Aluno 15 aos itens 4.3 a 4.5 da atividade 3



3.4.3. Verifique se seus colegas também concluíram o mesmo:

Sim em todos os Poligonos dos meus colegas da 180

3.4.4. Será que isso acontece para qualquer polígono?

Bom tem o convexo e o concavo Acho eu que no Poligono concavo da um resultado diferente de 180

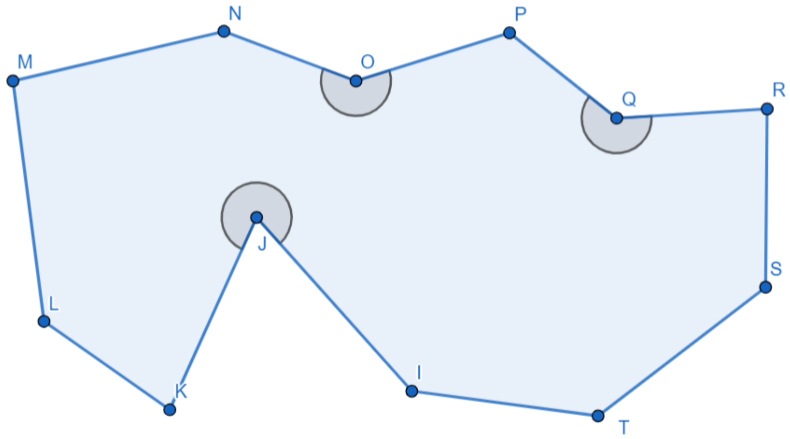
3.4.5. Por que isso acontece?

Com o convexo da 180 em todos Porque estão em cima de uma Linha reta mas quando se trata do concavo que é um Poligono com Aberturas para dentro As Linhas vão Para outra Posição

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Ao final dessa atividade, colocou-se em discussão na turma o motivo pelo qual todos encontraram 180° como soma do ângulo interno e do seu respectivo externo. Vários alunos souberam responder, mencionando que a reta suporte do lado formaria um semicírculo. Para facilitar a visualização, a pesquisadora utilizou o GeoGebra para construir um polígono (convexo), mostrando o que os colegas estavam explicando. Após essa construção, ficou claro que isso sempre ocorreria. Esperava-se que a dupla citada anteriormente abordasse o debate de que a soma do ângulo interno e do externo ser 180° não valeria para um polígono côncavo, assim, questionou-se se isso aconteceria sempre, para qualquer polígono. Como previsto, o Aluno 15 respondeu, mas percebeu-se que muitos não estavam visualizando nem compreendendo. Assim, a professora construiu um polígono côncavo, e nesse momento os alunos perceberam que haveria ângulo maior que 180° (como os ângulos $\hat{J}, \hat{O}$ *e* $\hat{Q}$ na figura 33). Dessa forma, não se obteria o mesmo resultado que anteriormente.

Figura 33 - Polígono côncavo



Fonte: Construção feita pela autora no GeoGebra (2024)

Nos minutos finais, foram lidas as instruções da próxima atividade, na qual seria utilizada a cortadora a laser e seria realizada a visita ao campus Canoas do IFRS. As instruções gerais foram salientadas, incluindo cuidados no manuseio e segurança da máquina, autorização para a saída de campo, horário e utilização do uniforme.

4.5 Atividade 4: reprodução em MDF

O objetivo dessa atividade era que os alunos acompanhassem a reprodução de suas criações na cortadora a laser do LabMaker[9] no IFRS - Canoas, ou seja, a construção de peças em MDF[10] correspondentes aos polígonos desenhados no GeoGebra. Foi solicitado que os alunos certificassem de identificar corretamente cada polígono, facilitando a manipulação das peças posteriormente. Além disso, a proposta era utilizar o MDF para cortar peças que representassem os ângulos externos dos polígonos, os quais haviam sido medidos no passo anterior.

Para facilitar a identificação dos ângulos externos e internos, foram pintados cada par de ângulos, interno e externo, que compartilham o mesmo vértice, com cores correspondentes. Utilizou-se uma cor específica para cada vértice, de forma que ângulos externos e internos do mesmo vértice tivessem cores iguais, com intuito de tornar a análise visual mais intuitiva para os alunos.

Os alunos estavam muito animados com a visita ao IFRS. Apesar da proximidade da escola, cerca de 2 km, nunca haviam visitado o local. É um ambiente pouco frequentado pelos alunos e ex-alunos dessa escola, fazendo com que se sentissem especiais por estarem lá. Além disso, o IFRS é um ambiente frequentado por estudantes mais velhos (do ensino médio) ou por jovens e adultos (do ensino superior e da EJA[11]), o que desperta interesse natural nessa faixa etária.

A primeira coisa que chamou a atenção dos alunos foi a estrutura física da instituição, que parecia uma "escola particular" na visão de alguns deles. Destacaram-se o banheiro com espelho e pia de granito, além do bar e das salas de informática. Nesse dia, estava muito quente, e os alunos foram direcionados para uma sala de aula com ar condicionado, tornando o ambiente muito agradável e propício para a realização da atividade. Essa sala era próxima a sala que possui cortadora a laser.

A pesquisadora forneceu diversas cores de tintas e pincéis, além da impressão, em papel, do arquivo do polígono com ângulos externos realizado no GeoGebra na aula anterior. Assim, os grupos sentaram-se em conjunto e foram instruídos a pintar, de

---

[9] Laboratório Maker que possui uma cortadora a laser, uma impressora 3D pequena e duas grandes. Para mais informações: https://labmaker.canoas.ifrs.edu.br/pagina-inicial

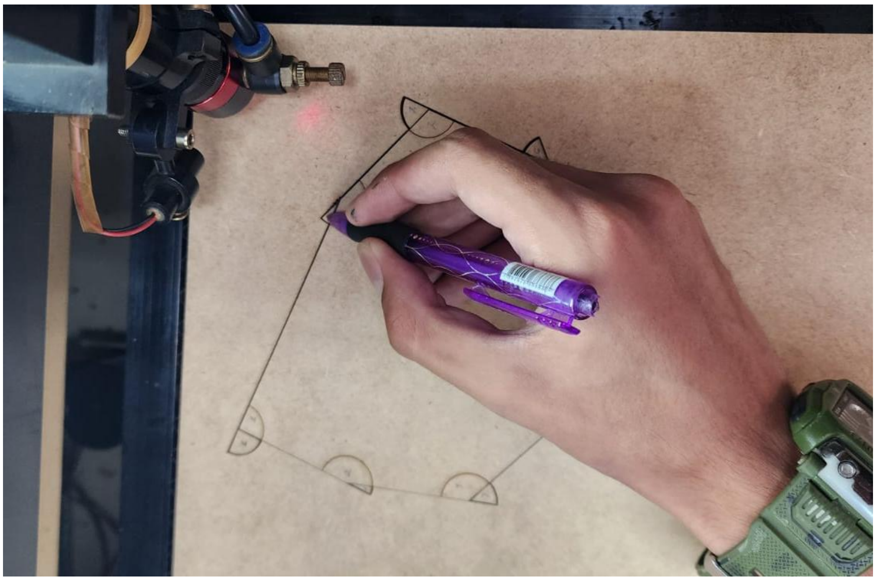
[10] MDF, que significa "Medium Density Fiberboard" (ou "Fibra de Média Densidade" em português), é um tipo de painel de madeira fabricado a partir de fibras de madeira aglutinadas com resinas sintéticas, sob alta pressão e temperatura.

[11] EJA é a sigla para Educação de Jovens e Adultos. Trata-se de uma modalidade de ensino destinada a pessoas que não concluíram o ensino fundamental ou médio na idade apropriada e desejam retomar seus estudos.

mesma cor, os setores circulares correspondentes a cada par de ângulos interno e externo que compartilhavam o mesmo vértice desse polígono impresso[12], com cada par sendo representado por uma cor única, da mesma forma como fariam posteriormente com o MDF. Foram disponibilizados copos descartáveis para que pudessem fazer combinações de cores, caso necessário. Enquanto isso, cada grupo era chamado para realizar o corte no MDF de seu polígono na cortadora a laser.

A professora coordenou o funcionamento da cortadora a laser por meio de seu computador. Os alunos tiveram a oportunidade de observar o funcionamento da máquina e, após o corte, numeraram os ângulos com uma lapiseira (antes da retirada das peças) para facilitar a identificação e a pintura correta dos mesmos. Como demonstra a figura 34.

Figura 34 - Aluno 12 numerando os pares de ângulos após o corte

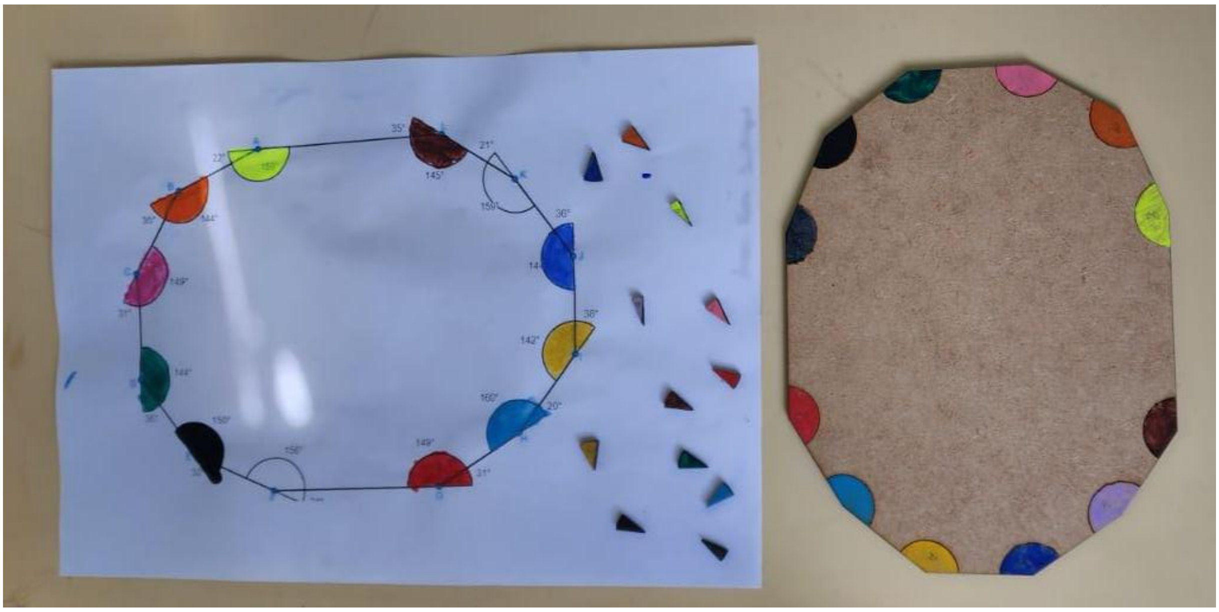


Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Após o corte, os grupos coloriram com as mesmas cores o polígono impresso de papel e o cortado de MDF. Obtendo o resultado como mostra a figura 35, com o trabalho desenvolvido pelo grupo composto por Aluno 9, Aluno 10 e Aluno 11.

[12] A partir deste ponto se menciona o termo "pintar ângulo" com o intuito de facilitar a comunicação, faz-se referência a coloração do setor circular que o representa.

Figura 35 - Polígono construído por Aluno 9, Aluno 10 e Aluno 11



Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

Neste caso específico (Figura 35), o polígono apresentou ângulos externos bastante pequenos e, por conseguinte, difíceis de manusear. Esse era o grupo composto pelos Aluno 9, Aluno 10 e Aluno 11, que havia criado um polígono de 12 lados por não conseguir fazer o polígono de 10 lados. E acabaram perdendo as peças correspondentes à representação de dois desses ângulos externos durante a visita ao IFRS. Uma delas foi recuperada pela pesquisadora, enquanto a outra precisou ser cortada novamente.

Os alunos fizeram uma pequena pausa e organizaram uma espécie de lanche coletivo, onde puderam compartilhar alimentos e saciar a fome, enquanto secava a tinta de seus projetos. Logo após organizaram a sala de aula de forma autônoma, sem que fosse necessário solicitar.

Posteriormente, aproveitando a visita dos estudantes, as professoras do Instituto Federal demonstraram o funcionamento da impressora 3D, explicando e colocando-a para fazer uma impressão. Por fim, levaram a turma para conhecer o LEMA[13] (Laboratório de Educação Matemática). Lá os alunos puderam experimentar diversos recursos didáticos, como diversos jogos e quebra-cabeças. Os alunos estavam maravilhados conhecendo e desbravando esses recursos até a chegada do transporte.

[13] LEMA (Laboratório de Educação Matemática) – O LEMA disponibiliza diversas propostas e recursos didáticos voltados ao ensino e à aprendizagem da matemática. Seus materiais estão disponíveis para empréstimo aos usuários. Para mais informações, acesse: https://matematica.canoas.ifrs.edu.br/lema

Ao retornar à escola, a turma foi impactada pela alta temperatura. E vale salientar a diferença de estar em um ambiente climatizado. A permanência na sala de aula tornou-se difícil devido à falta de energia elétrica, o que tornou o ambiente extremamente abafado e causou grande agitação entre os alunos. Eles queriam sair constantemente para beber água. Além disso, estavam eufóricos para encontrar alunos de outras turmas, com os quais não haviam interagido durante a tarde devido à saída, bem como outros professores e funcionários, para compartilharem a experiência.

Nos minutos finais, a turma recebeu a visita da bibliotecária da escola na sala de aula, que veio trazer alguma informação da rotina escolar. Ela logo se interessou pelo material que estavam manuseando, e os alunos apresentaram os polígonos cortados em MDF e idealizados por eles, explicando sobre os ângulos internos e externos, e sua relação. Foi notável ver o interesse e orgulho dos alunos em mostrar suas produções. Por um momento, a situação lembrou uma feira de ciências, onde se podia experimentar a interação e o entusiasmo dos alunos ao compartilhar seus conhecimentos.

4.6 Atividade 5: dedução da soma das medidas dos ângulos externos

O objetivo dessa atividade é possibilitar aos estudantes a realização de conjecturas acerca da soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo, partindo do manuseio das peças cortadas na etapa anterior. Cabe ressaltar que cada conjunto de peças pertencente a um grupo foi acondicionado em sacos plásticos, acompanhados pela impressão em papel do polígono construído no GeoGebra, que foi previamente pintada.

Para iniciar a atividade, foram distribuídas as apostilas aos alunos, que se organizaram sentando ao lado de seus respectivos grupos, conforme a disposição adotada nas aulas anteriores. Foi solicitado que todos abrissem a apostila na página 16 para a execução da atividade que seria lida em conjunto. A atividade exigiu que os alunos liberassem espaço na mesa para receberem as peças de MDF, de modo a facilitar a manipulação das mesmas. Posteriormente, foi pedido que posicionassem os ângulos externos[14] de MDF sobre a folha de papel, verificando se todos os ângulos estavam presentes. O próximo passo consistia em retirar a folha de ofício e encaixar todos os ângulos em torno de um único vértice.

[14] A partir de agora, os elementos matemáticos cujas representações em MDF foram construídas serão referenciados diretamente pela sua denominação, sem fazer menção à construção em si, para não tornar o texto demasiadamente extenso.

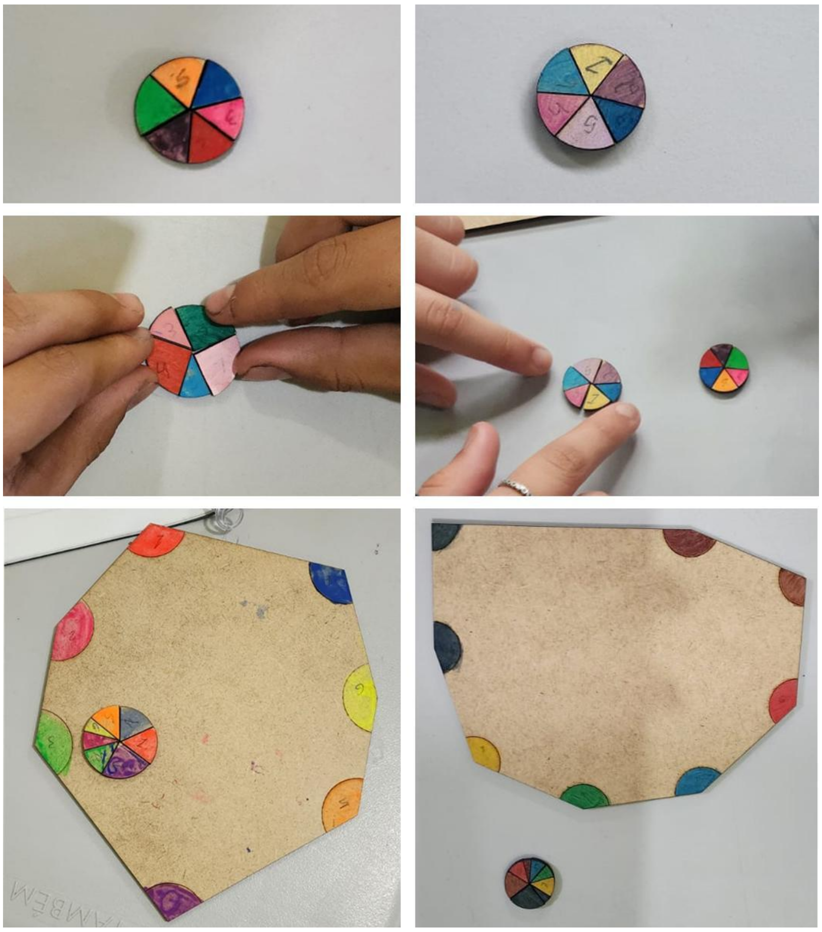
Essa sequência de instruções não foi de fácil compreensão para os alunos, que olharam de forma surpresa e incerta, questionando o que deveriam fazer. A professora explicou que deveriam utilizar todos os ângulos externos, encaixando-os como se fossem um quebra-cabeça e pediu que tentassem montá-lo formando uma figura geométrica. Alguns grupos conseguiram chegar ao resultado esperado, enquanto outros continuavam a questionar o que deveriam fazer. Tendo em mãos três ângulos cortados em MDF de uma atividade posterior, a professora utilizou dois desses ângulos e perguntou à turma onde estavam os vértices desses ângulos e, em seguida, de que forma poderiam encaixar esses dois ângulos, concluindo que deveriam fazê-lo de acordo com a figura 36.

Figura 36 - Ângulos encaixados com vértices unidos

Fonte: Da autora (2023)

Utilizando a estrutura da figura, os alunos deveriam fazer os próximos encaixes seguindo essa mesma lógica. A pesquisadora circulou entre os grupos, verificando quem já havia concluído e auxiliando aqueles que tinham alguma dúvida pontual. A figura 37 mostra a montagem realizada pelos alunos dos diferentes grupos nesta etapa.

Figura 37 - Montagem dos ângulos externos



Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Na segunda parte da aula, os alunos deveriam responder às perguntas solicitadas na apostila. A primeira questão consistia em completar as frases apresentadas na figura 38. Nela, os alunos deveriam associar qual o valor da soma dos ângulos externos de acordo com a montagem realizada anteriormente.

Figura 38 - Resposta do Aluno 9 ao item 2.1 da atividade 5

5.2.1 Complete:

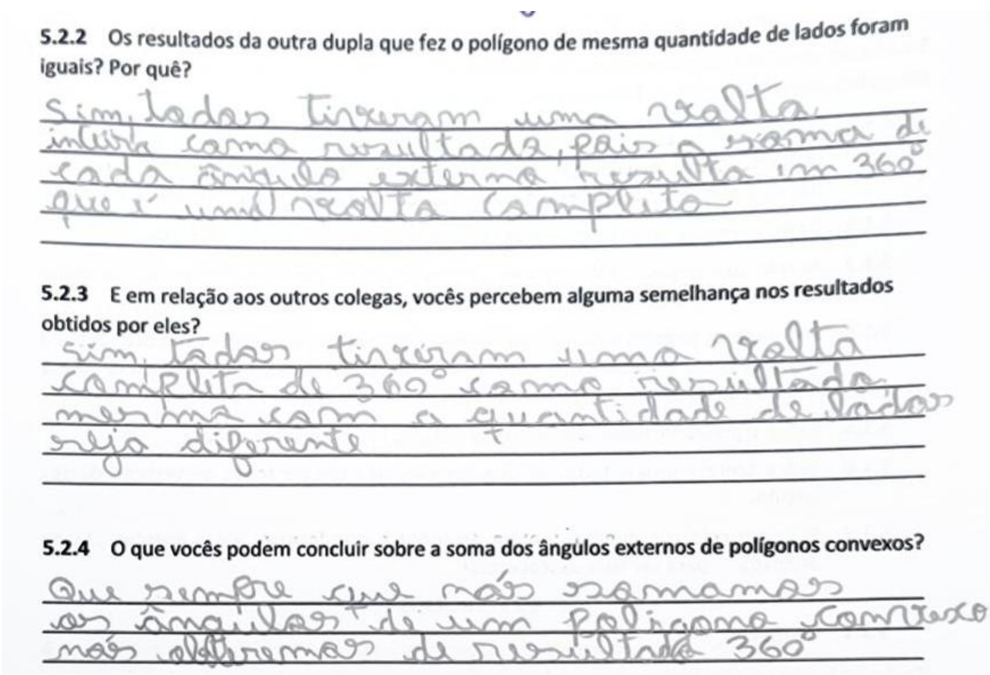
Os ângulos externos se alinham formando um círculo. A soma dos ângulos externos do seu polígono é 360º graus.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Na sequência a professora abriu a discussão no grande grupo, explorando o fato observado por cada dupla, ou seja, de que a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo era 360º, e abordando os questionamentos seguintes (itens 2.2, 2.3 e 2.4), conforme figura 39.

Poucos grupos criaram polígonos com o mesmo número de lados. Portanto, o item 2.2 que interroga: "Os resultados da outra dupla que fez o polígono de mesma quantidade de lados foram iguais? Por quê?", só é pertinente se existirem outras duplas que tenham construído um polígono com o mesmo número de lados, possibilitando essa comparação. Por este motivo alguns alunos deixaram em branco, seguindo para a próxima questão, ou responderam o mesmo que no item 2.3.

Figura 39 - Respostas do Aluno 8 aos itens 2.2 a 2.4 da atividade 5



5.2.2 Os resultados da outra dupla que fez o polígono de mesma quantidade de lados foram iguais? Por quê?

Sim, todos tiveram uma volta inteira como resultado, pois a soma de cada ângulo externo resulta em 360° que é uma volta completa

5.2.3 E em relação aos outros colegas, vocês percebem alguma semelhança nos resultados obtidos por eles?

sim, todos tiveram uma volta completa de 360° como resultado mesmo com a quantidade de lados seja diferente

5.2.4 O que vocês podem concluir sobre a soma dos ângulos externos de polígonos convexos?

Que sempre que nós somamos os ângulos de um polígono convexo nós obteremos de resultado 360°

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Para o item 2.3, destaca-se a oportunidade dos alunos observarem e compararem suas respostas com as de seus colegas, enfatizando que, apesar de trabalharem com polígonos de diferentes números de lados, todos chegaram à mesma soma dos ângulos externos, que pode ser verificada experimentalmente através dos recortes realizados em MDF. Essa observação pode levar à compreensão de um padrão nos polígonos estudados, reforçando a ideia de uniformidade nas propriedades geométricas.

Quanto ao item 2.4, este serve como uma ponte para a generalização dos conceitos aprendidos a partir de observações específicas. Aqui, o professor pode encorajar os alunos a refletir sobre os resultados obtidos e formular uma conclusão geral sobre a soma das medidas dos ângulos externos em polígonos convexos. Esta é uma chance de conjecturar que, independentemente do número de lados do polígono convexo, a soma sempre será 360°.

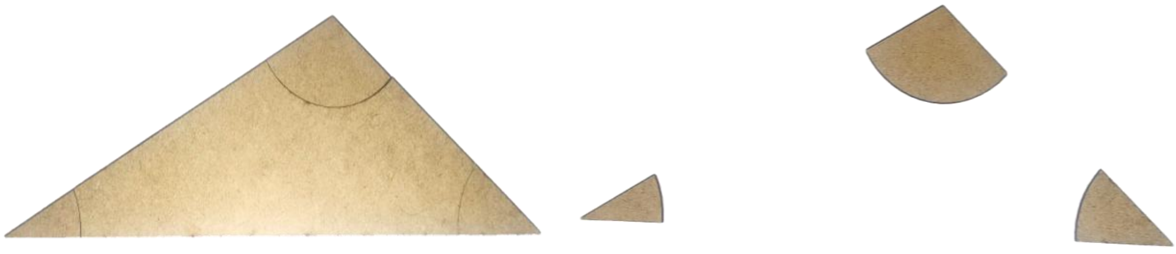
4.7 Atividade 6: dedução da soma dos ângulos internos

O objetivo geral dessa atividade é possibilitar que os alunos percebam, por meio de abordagem aritmética e geométrica, que existe relação entre o número de lados (vértices ou ângulos) de um polígono convexo qualquer e a soma das medidas dos seus ângulos internos. Essa atividade foi organizada em cinco etapas que são discutidas nas subseções a seguir.

4.7.1 Atividade 6.1: descobrindo a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Nesse item explorou-se aritmeticamente a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, empregando para isso a construção de um triângulo recortado em MDF (Figura 40 a) com ângulos destacáveis (Figura 40 b), previamente preparado pela professora.

Figura 40 - Triângulo em MDF com ângulos destacáveis



(a) (b)

Fonte: Da autora (2023)

Durante a atividade, solicitou-se que os alunos manipulassem as peças e tentassem conjecturar o valor da soma correspondente. Inicialmente, a professora apresentou o triângulo recortado, destacando que seus ângulos eram removíveis e convidou os alunos a se reunirem ao redor da mesa onde o triângulo e seus ângulos estavam dispostos. Em seguida, ela retirou a peça do triângulo que não continha os ângulos, deixando na mesa apenas os três ângulos destacáveis. Portanto, esse material manipulativo foi usado com os alunos com a finalidade de concluir quanto seria a soma das medidas desses três ângulos. A professora esperava que os alunos dispusessem os ângulos de modo que ficassem consecutivos adjacentes e que percebessem que o valor buscado era igual a 180º tendo em vista que obteriam um semicírculo.

Inicialmente, a turma mostrou-se um pouco receosa em realizar a tarefa na frente dos colegas. Alguns alunos deram sugestões, mas relutaram em manipular as peças, preferindo que a professora o fizesse. Encorajando a participação ativa dos alunos, o Aluno 19 tomou a iniciativa e começou a manipular as peças. Não demorou muito para que os ângulos fossem encaixados como esperado. Em seguida, foram feitas algumas perguntas norteadoras: (I) Vocês notaram alguma relação entre a forma que os ângulos se encaixam lado a lado e a formação de uma linha reta? (II) O que acontece com as semirretas dos ângulos (lados) ao posicioná-los juntos? (III) Qual operação representa o encaixe dos três ângulos? (IV) Qual é o valor desse ângulo maior formado pelo encaixe desses três ângulos menores? e (V) Vocês conseguem encontrar alguma maneira de provar que os lados do ângulo resultante do encaixe das peças ficam apoiados numa mesma reta, ou seja, compreendem 180 graus?

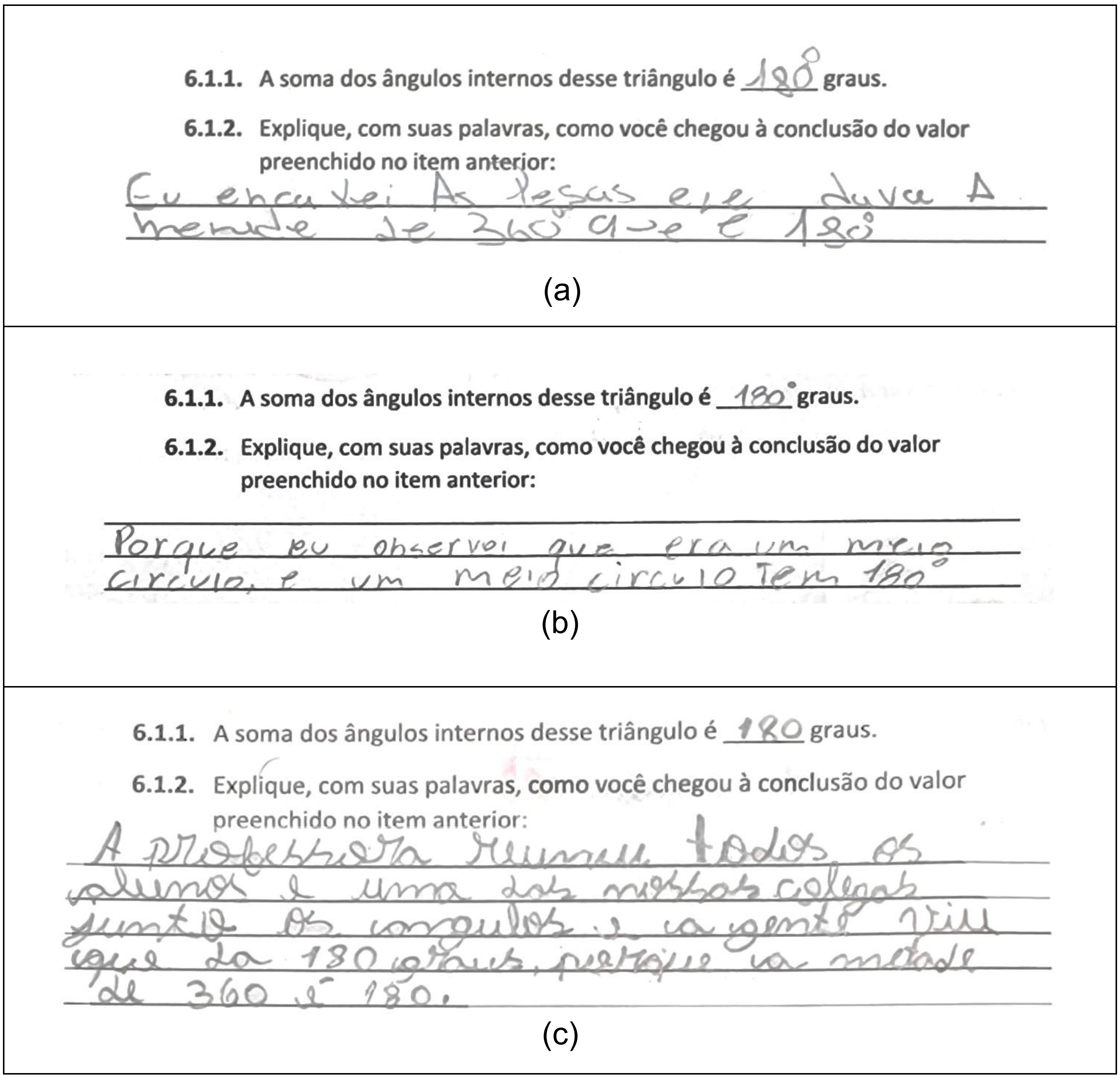
Os alunos observaram a formação dessa linha reta na base dos ângulos encaixados, e a professora utilizou uma régua para mostrar que os ângulos alinhados formavam essa linha. A segunda pergunta, sobre o que acontece com as semirretas quando os ângulos são posicionados juntos, foi mais desafiadora para os alunos visualizarem. Então, a professora desenhou no quadro o contorno dos três ângulos encaixados e esboçou as semirretas do primeiro ângulo; ao desenhar as do segundo ângulo, mostrou que a semirreta do ângulo anterior estava alinhada com a semirreta deste próximo ângulo, evidenciando que, se fossem duas semirretas, estariam posicionadas uma sobre a outra, ou seja, coincidentes.

No debate, a professora destacou que ao encaixar os três ângulos formava-se um ângulo maior, então questionou qual seria a operação matemática que representava essa junção. Os alunos responderam que seria a soma, e então a professora confirmou que o encaixe desses três ângulos formava um ângulo maior que resultava na soma das medidas dos três ângulos. Foi então perguntado qual era a medida do ângulo formado por esse encaixe. Alguns alunos responderam prontamente que era 180 graus.

A professora então questionou se haveria uma forma de provar, de fato, que o ângulo tem medida igual a 180 graus. Prontamente, os alunos responderam que sim, trazendo o transferidor para medir o ângulo. Confirmada a resposta correta, a pergunta foi refeita: como provar que a soma dos ângulos é de 180 graus sem o uso do transferidor?

Os alunos não responderam imediatamente, ressaltando a importância do papel do professor em perceber a necessidade da turma e direcioná-la para alcançar os objetivos educacionais. Nesse contexto, foi encorajado que os alunos retomassem o que havia sido feito até então. Os ângulos foram encaixados, observou-se que um ângulo maior é resultante da soma dos três ângulos do triângulo, e também se notou que eles formam uma linha reta na base. Alguns alunos perceberam que o resultado é 180 graus. Foi questionado se todos concordavam com isso, e a turma confirmou. Então, a professora questionou por que chegaram à conclusão de 180 graus, afinal, eles não haviam usado um transferidor para confirmar que ali teria 180 graus. Agora sim surgiu um debate onde alguns alunos explicaram que seria “meia volta”, como o transferidor que possui 180°.

Figura 41 - Respostas dos alunos 19, 2 e 17 aos itens 1.1 e 1.2 da atividade 6


6.1.1. A soma dos ângulos internos desse triângulo é 180° graus.

6.1.2. Explique, com suas palavras, como você chegou à conclusão do valor preenchido no item anterior:

Eu encaxei As pesas ele dava A metade de 360° que é 180°

(a)

6.1.1. A soma dos ângulos internos desse triângulo é 180° graus.

6.1.2. Explique, com suas palavras, como você chegou à conclusão do valor preenchido no item anterior:

Porque eu observei que era um meio circulo, e um meio circulo tem 180°

(b)

6.1.1. A soma dos ângulos internos desse triângulo é 180 graus.

6.1.2. Explique, com suas palavras, como você chegou à conclusão do valor preenchido no item anterior:

A profesora reuniu todos os alunos e uma das nossas colegas junto os angulos e a gente viu que da 180 graus, porque a metade de 360 é 180.

(c)

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Para concluir essa etapa, os alunos deveriam responder a três itens em suas apostilas que abordavam o assunto discutido (itens 1.1 a 1.3 da atividade 6). Observa-se, nas imagens a seguir, que foram disponibilizadas diversas linhas para os alunos escreverem e desenvolverem todo o raciocínio, justificando suas respostas. No entanto, na prática, os alunos não justificaram suas respostas, limitando-se a escrever apenas a conclusão final. A figura 41 mostra as respostas do Aluno 19 (a), do Aluno 2 (b) e do Aluno 17 (c) como exemplos de respostas obtidas nos dois primeiros itens.

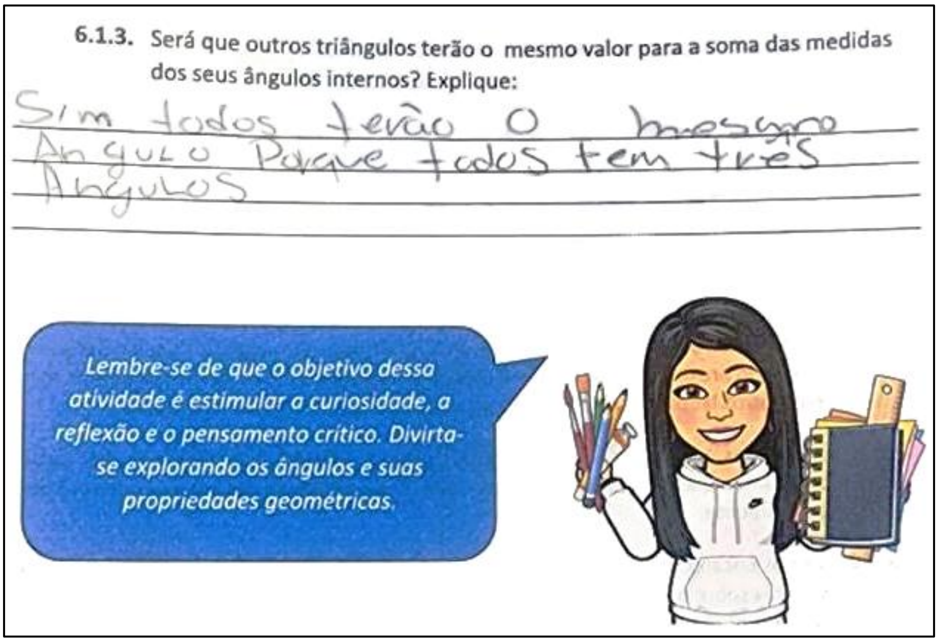
O Aluno 19 mencionou que foi ele mesmo que realizou o encaixe das peças dos ângulos, conforme discutido anteriormente. Por outro lado, o Aluno 2 descreveu que o encaixe dos ângulos em MDF forma um "meio círculo" e que isso indica a presença de 180°. Essa justificativa, embora sugira uma compreensão do conceito, não serve como uma prova concreta e carece de argumentos mais robustos. A análise dos argumentos utilizados pelos alunos revela que o Aluno 17 concentrou-se mais em relatar a execução da atividade ao invés de justificar ou argumentar sobre como chegou a esse resultado. Dois fatores podem ter contribuído para essa situação. O primeiro está relacionado à formulação da pergunta, que possivelmente não incluiu a solicitação explícita para que justificassem suas respostas, oferecendo clareza no que era desejado pela professora, e isso foi ajustado na versão final da apostila. O segundo fator diz respeito ao fato de que os alunos não estão habituados a escrever extensivamente, especialmente ao fornecer argumentos que justifiquem uma conclusão em matemática. Essa falta de prática pode levar a respostas menos elaboradas que não revelam em si informações mais ricas acerca da compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

É fundamental destacar a importância de estimular a escrita argumentativa entre os alunos para que desenvolvam a habilidade de articular raciocínios lógicos e justificar conclusões matemáticas de forma coerente e fundamentada. A prática da escrita em matemática não apenas fortalece a compreensão dos conceitos, mas também prepara os alunos para apresentar e defender suas ideias de maneira clara e eficaz. Além disso, a escrita dos alunos pode fornecer evidências do processo de aprendizagem dos alunos e revelar possíveis dúvidas ou incorreções, contribuindo para um melhor acompanhamento pedagógico. Assim, é recomendável integrar atividades que promovam essa habilidade de forma contínua no currículo, incentivando os estudantes a expressar o processo de pensamento que os leva a determinadas conclusões, além de argumentar de forma construtiva e crítica.

Na última pergunta, foi questionado aos alunos se outros triângulos teriam o mesmo valor para a soma das medidas de seus ângulos internos. Junto com esta pergunta, havia um *sticker*[15] lembrando que o objetivo da atividade era a reflexão sobre o assunto. Apesar disso, os alunos procuraram a professora para saber o que deveriam responder. Alguns expressaram dúvida sobre a validade da propriedade para outros triângulos, argumentando que, em triângulos "tortos", a propriedade poderia não ser válida. Por outro lado, alguns alunos argumentaram que a propriedade é válida para todos os triângulos.

O Aluno 19 inicialmente inclinava-se a acreditar que a propriedade não se aplicaria a outros triângulos, porém, em sua apostila, registrou que a propriedade é válida para qualquer outro, influenciado pela sua dupla e colegas (Figura 42). Contudo, os argumentos apresentados por ele para justificar essa mudança de posição foram superficiais e não demonstraram um entendimento profundo do conceito. Essa discrepância entre sua expressão oral inicial e o que foi escrito na apostila destaca uma oportunidade de aprofundar a compreensão dos alunos sobre a matéria e encorajá-los a desenvolver justificativas mais robustas para suas conclusões matemáticas.

Figura 42 - Resposta do Aluno 19 ao item 1.3 da atividade 6

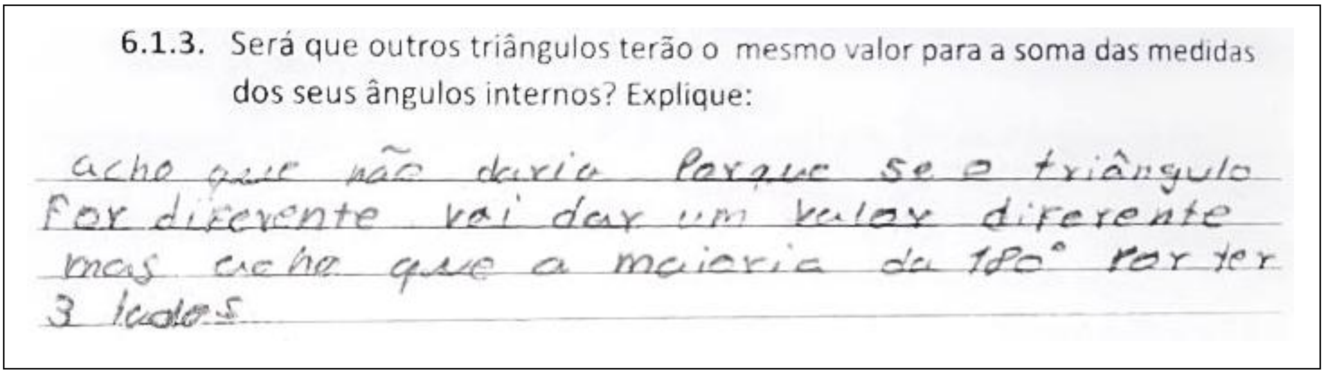


Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

[15] Sticker é uma pequena imagem digital usada em mensagens eletrônicas e plataformas de redes sociais para expressar emoções, ideias ou reações de forma visual. Diferente dos emojis, que são caracteres padronizados, os stickers são personalizados pelos usuários ou fornecidos em pacotes temáticos por desenvolvedores, permitindo uma comunicação mais criativa e divertida. Eles podem representar personagens, memes, frases ou qualquer ilustração que transmita um significado, sendo amplamente usados em aplicativos de mensagens como WhatsApp, Telegram e Instagram.

O Aluno 11 manteve sua posição e respondeu consistentemente na sua apostila, conforme ilustrado na figura 43. Apesar disso, alguns colegas, conhecidos por seu bom desempenho em matemática, afirmaram já saber que a soma sempre resulta em 180°. Essa certeza expressa pelos colegas pode explicar por que alguns alunos alteraram suas respostas na apostila, ajustando-as com base nas afirmações dos pares que demonstraram maior confiança no conceito.

Figura 43 - Resposta do Aluno 11 ao item 1.3 da atividade 6



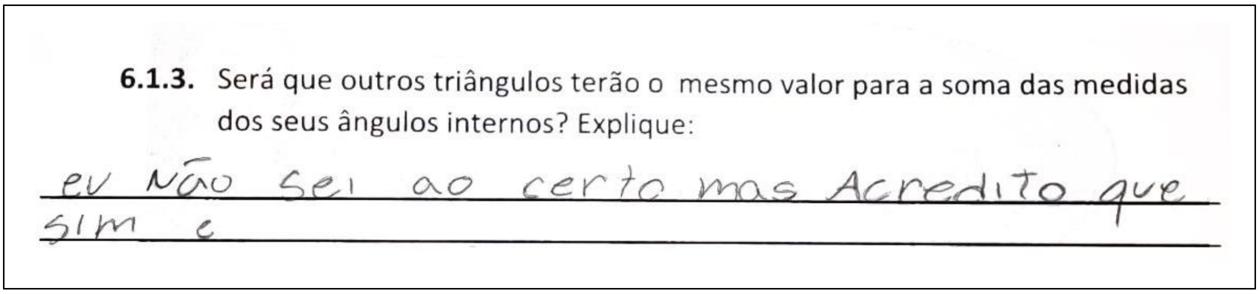
6.1.3. Será que outros triângulos terão o mesmo valor para a soma das medidas dos seus ângulos internos? Explique:

acho que não daria porque se o triângulo for diferente vai dar um valor diferente mas acho que a maioria da 180° por ter 3 lados

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

O Aluno 2 manteve suas dúvidas, ainda não totalmente convencido sobre a validade da propriedade, apesar de estar inclinado a aceitá-la como correta. Sua hesitação em aceitar plenamente a validade da propriedade para todos os triângulos foi marcada pela falta de argumentos concretos para sustentar sua posição, o que sugere uma influência dos colegas que afirmam a validade da propriedade. Esse cenário ilustra a importância de compreender em vez de confiar no consenso do grupo. Nota-se que esses aspectos vão além da própria matemática, pode-se refletir, por exemplo, acerca da confiabilidade de informações que são divulgadas pelas mídias sociais, por exemplo, e instigar as pessoas a buscar argumentos para verificar a validade das informações antes de compartilhá-las, combatendo *fake news*.

Figura 44 - Resposta do Aluno 2 ao item 1.3 da atividade 6



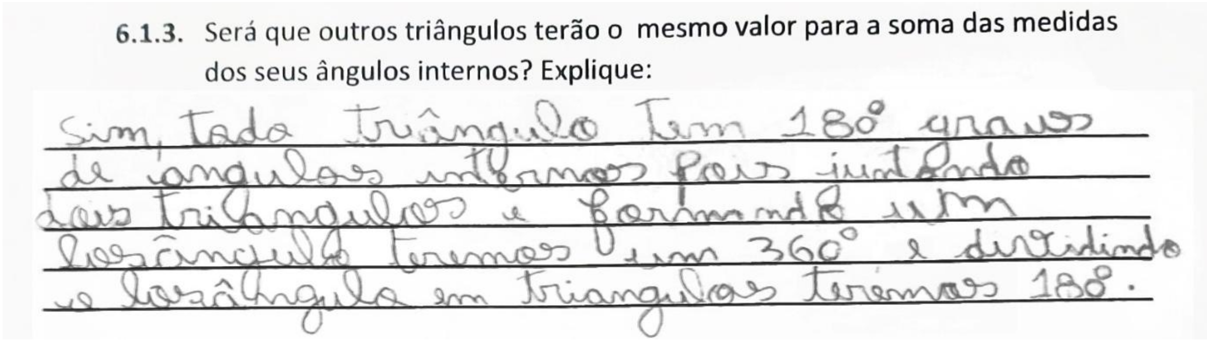
6.1.3. Será que outros triângulos terão o mesmo valor para a soma das medidas dos seus ângulos internos? Explique:

eu NÃO sei ao certo mas Acredito que sim

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Já o Aluno 8 apresenta mais informações na sua justificativa como mostra a figura 45, mas ainda não conseguiu convencer totalmente seus colegas, apesar de estar correto. Assim, essa atividade ajuda a fortalecer não só os conteúdos trabalhados, mas também o poder de argumentação.

Figura 45 - Resposta do Aluno 8 ao item 1.3 da atividade 6



6.1.3. Será que outros triângulos terão o mesmo valor para a soma das medidas dos seus ângulos internos? Explique:

Sim, todo triângulo tem 180° graus de angulos internos pois juntando dois triângulos e formando um losângulo teremos um 360° e dividindo o losângulo em triangulos teremos 180°.

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Independente da resposta registrada na apostila, os alunos tiveram a oportunidade de refletir sobre a possibilidade da propriedade ser válida para outros triângulos, gerando um ambiente de questionamento e discussão. Esse debate permitiu que os alunos explorassem e argumentassem diferentes pontos de vista. Ao mesmo tempo, o *sticker* ressaltou o objetivo de reflexão e serviu também para lembrar aos alunos de se divertirem durante essa exploração. Essa abordagem busca enfatizar a importância de um ambiente educacional em que o questionamento e a reflexão sobre o que está sendo trabalhado são fundamentais.

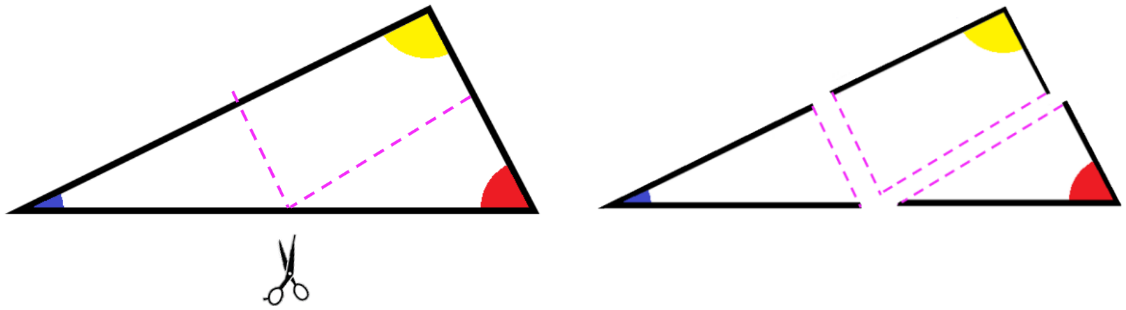
4.7.2 Atividade 6.2: descobrindo a soma das medidas dos ângulos internos de outros triângulos

Nesta atividade, o objetivo é demonstrar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ser 180° é uma propriedade universal, válida para qualquer triângulo, e não apenas para um caso específico. Cada aluno foi encarregado de montar seu próprio triângulo em uma folha de ofício para explorar essa propriedade. Foi orientado que o triângulo a ser construído fosse suficientemente pequeno para caber no retângulo destinado à atividade na apostila, ou seja, deveria ser menor que metade de uma folha A4.

O segundo passo envolveu recortar o triângulo e fazer seu contorno no espaço reservado para isso na apostila. Após realizar o contorno, tanto o triângulo recortado quanto o contornado foram coloridos com três cores diferentes, uma para cada ângulo, assegurando que ângulos correspondentes fossem coloridos com a mesma cor. Em seguida, o triângulo foi recortado em três partes, de modo que cada parte ficasse com um dos ângulos coloridos.

Para facilitar o entendimento de como realizar esse recorte, a professora sugeriu a uma técnica eficaz, ilustrando-a com o uso do projetor (Figura 46 a): fixando um ponto na base do triângulo e traçando, a partir deste ponto, dois segmentos que se conectem aos outros dois lados do triângulo.

Figura 46 - Recorte ao triângulo



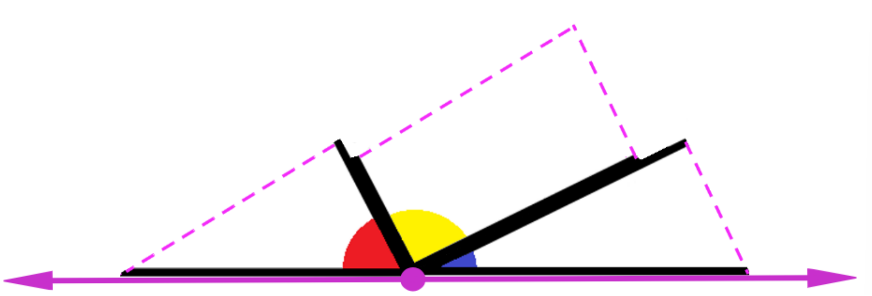
(a) (b)

Fonte: Da autora (2023)

Nesta etapa, os alunos foram orientados a manipular as três peças, remontando o triângulo inicial (Figura 46 b). É importante observar que alguns alunos encontraram dificuldades para fazer essa montagem. Nesse caso, o professor auxiliou, proporcionando suporte para que todos os estudantes pudessem concluir a tarefa com sucesso.

Em seguida, a atividade solicitava que os alunos encaixassem as três peças, posicionando os três vértices no mesmo ponto e justapondo o lado de um ângulo com o lado do ângulo anterior, como se fossem juntar os três ângulos, um na sequência do outro, posicionando-os sobre o semiplano superior da reta guia, conforme será ilustrado na figura 47. É importante ressaltar que este encaixe deve ser realizado pelos alunos sem prévia visualização da figura. Ou seja, embora a figura ilustre o objetivo final da montagem, os alunos devem tentar alcançar esse resultado através de sua própria experimentação e raciocínio, sem a influência direta da imagem. Aqui, a ilustração serve para demonstrar o que é esperado.

Figura 47 - Encaixe dos 3 ângulos

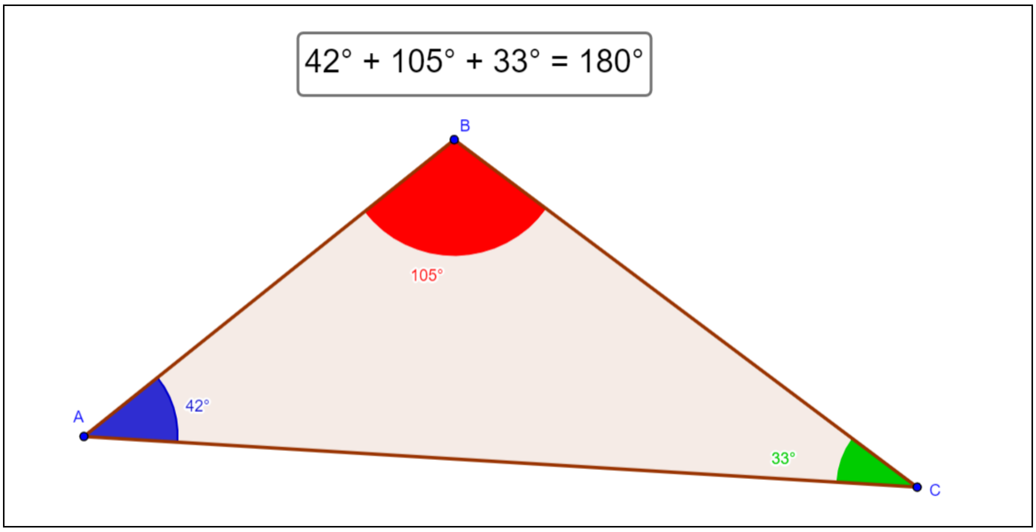


Fonte: Da autora (2023)

A pesquisadora então retomou o debate sobre a soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos criados por cada um dos alunos. Todos encontraram 180°, mas questionou-se se seria mera coincidência. A professora incentivou os alunos a observarem os diferentes triângulos montados pelos colegas, comparando-os com os seus próprios, e questionou novamente se existiria algum triângulo cuja soma dos ângulos internos fosse diferente de 180°. A essa altura, a turma estava convencida de que todos os triângulos deveriam ter essa mesma soma.

Para complementar o debate, a professora utilizou o GeoGebra para montar um triângulo na tela interativa, que mostrava a medida em graus de cada ângulo interno e a soma dessas medidas (Figura 48). Esse triângulo tinha seus três vértices livres para serem movidos a qualquer parte do plano, permitindo que os valores dos ângulos mudassem a cada manipulação dos vértices, mas a soma permanecia constante e igual a 180°.

Figura 48 - Soma dos ângulos internos de um triângulo no GeoGebra



Fonte: Construção feita pela autora no GeoGebra (2023)

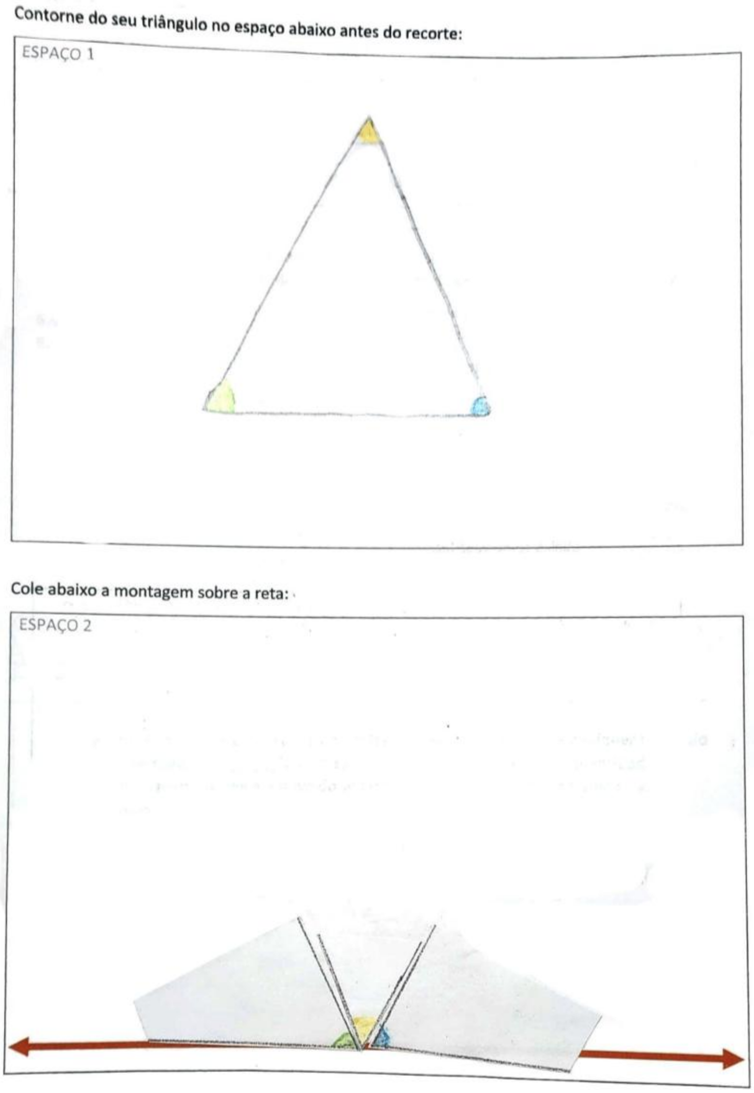
Apesar de não ter sido planejada essa etapa, a professora agiu com rapidez, pois já tinha realizado este tipo de construção e percebeu que se enquadraria perfeitamente no contexto da aula, e a atividade foi incorporada à proposta didática. Os alunos se envolveram ativamente, fazendo diversas solicitações para que a professora movesse o vértice de acordo com suas curiosidades, explorando como as diferentes configurações afetam os ângulos. Outros alunos pediram permissão para manipular os vértices diretamente e foi particularmente enriquecedor utilizar o *touch screen* da tela, que permitia visualizar claramente qual vértice estava sendo movido, adicionando uma dimensão dinâmica à construção.

A pergunta 2.8 da atividade 6 da apostila solicitava duas informações. No item "a" pedia para completar a frase: "A soma das medidas dos três ângulos internos do seu triângulo é igual a _____ graus.", que foi facilmente preenchido. Já o item "b" questionou: "Essa descoberta se aplica a todos os triângulos, independentemente do tamanho ou tipo? Explique". Para esta pergunta obteve-se respostas tais como: "sim, a resposta sempre vai ser 180°, pois mesmo que o ângulo seja torto ele sempre vai ser 180°" (Aluno 6, item 2.8, atividade 6); "Sim, porque sempre que juntamos os ângulos dará 180° porque eles formam uma reta fazendo um meio círculo" (Aluno 14, item 2.8, atividade 6); "Todos os triângulos deram 180° porque têm 3 pontas e quando se unem dão a mesma medida de 180°" (Aluno 5, item 2.8, atividade 6).

Ao finalizar, um breve debate foi realizado sobre o que os alunos podiam concluir a partir dessa atividade. Observou-se, através de diversos triângulos diferentes, que todos possuíam a mesma propriedade: a soma das medidas dos ângulos internos é sempre igual a 180°. Esta discussão reforçou o entendimento do conceito matemático explorado e incentivou os alunos a refletirem sobre a universalidade dessa propriedade dos triângulos, independentemente do tipo de triângulo ou do seu tamanho.

Essa atividade transcorreu de maneira leve e agradável, sendo percebida pelos alunos como uma experiência prazerosa. Eles comentaram positivamente sobre o aspecto lúdico de pintar os ângulos, comparando a uma aula de artes. Destaca-se que o Aluno 4, conhecido por enfrentar dificuldades em realizar as tarefas propostas, conseguiu executar a atividade, com mínima ajuda da professora. Esse progresso é um indicativo significativo de seu avanço com as atividades escolares. A figura a seguir ilustra seu desenvolvimento durante essa atividade, demonstrando claramente seu engajamento e a melhoria em sua habilidade de trabalhar de forma independente.

Figura 49 - Respostas do Aluno 4 aos itens 2.7 da atividade 6



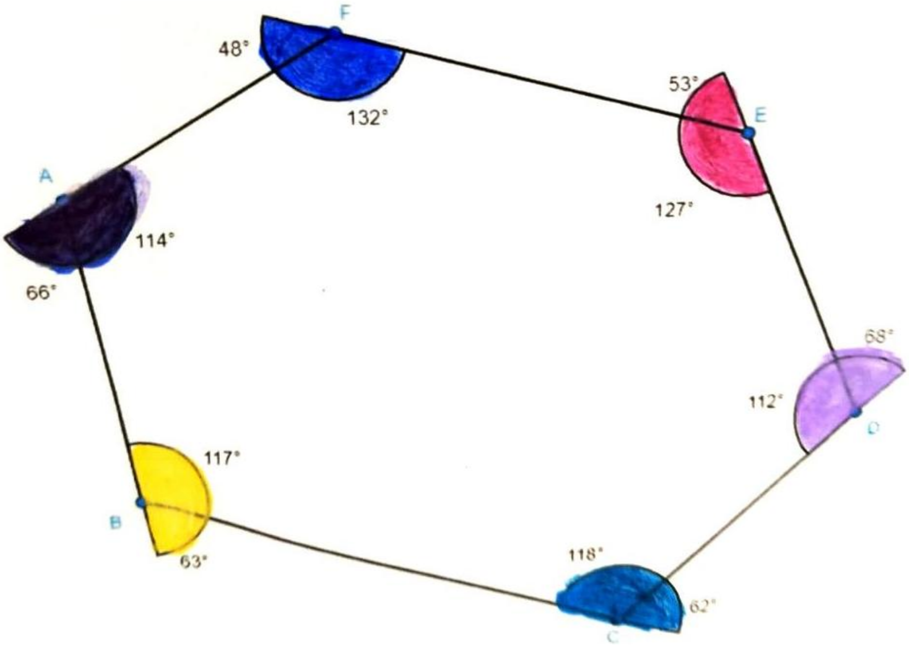
Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Esta interação prática não só explorou a propriedade matemática, mas também engajou os alunos em um processo de descoberta ativa, em que puderam testar e verificar por si mesmos a invariância da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Este método de aprendizado, baseado na exploração direta e na interatividade, reforçou significativamente o entendimento dos alunos sobre o conceito, além de estimular o pensamento crítico e a curiosidade científica.

4.7.3 Atividade 6.3: explorando a soma das medidas dos ângulos internos do polígono

Nesta atividade, os alunos têm a oportunidade de aprofundar seu entendimento sobre as propriedades geométricas, explorando a soma das medidas dos ângulos internos do polígono que eles próprios construíram anteriormente no GeoGebra. Para facilitar a análise, foram utilizadas as impressões desses polígonos em tamanho A4, cujos ângulos foram previamente coloridos pelos alunos (durante a visita ao IFRS), permitindo uma fácil identificação. Nessa impressão, também estão os valores das medidas de cada ângulo, como mostra a figura 50, a seguir.

Figura 50 - *Impressão de um polígono com ângulos já coloridos pelos alunos*



Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

O professor iniciou a aula explicando o propósito da atividade: explorar e validar a soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos para descobrir como essa soma se relaciona com outras propriedades geométricas. Esta exploração não apenas reforça o aprendizado anterior, mas também prepara o terreno para conceitos mais complexos.

Os alunos, organizados nas mesmas duplas das atividades anteriores, receberam a impressão do polígono do GeoGebra. Com o material em mãos, foi solicitado que os alunos calculassem a soma das medidas dos ângulos internos do seu polígono.

Após essa etapa inicial de cálculo, o professor promoveu uma discussão mais ampla em sala de aula. Os alunos foram incentivados a compartilhar os resultados obtidos e debater as possíveis variações. Questões motivadoras como "Todos obtiveram o mesmo resultado? Por que sim ou por que não?" e "Como a quantidade de lados do polígono influencia a soma dos ângulos internos?" ajudaram a guiar a discussão, incentivando os alunos a aplicar seu raciocínio lógico e a entender melhor as relações matemáticas envolvidas.

Observou-se que a grande maioria dos alunos escreveu a expressão da soma dos valores de todos os ângulos internos e efetuou o cálculo utilizando a calculadora. O Aluno 16, por exemplo, respondeu que a soma referente ao seu polígono era 1080° e apresentou a seguinte expressão nos cálculos realizados: 89 + 160 + 110 + 137 + 144 + 147 + 132 + 161. Por outro lado, o Aluno 8 apresentou o cálculo da soma das medidas de todos os 10 ângulos internos, obtendo o valor de 1440°, como apresentado no esquema abaixo:

Figura 51 - Reprodução da resposta do Aluno 8 ao item 3.3 da atividade 6

137	842
+ 150	+ 162
287	1004
+ 146	+ 150
433	1154
+ 163	+ 153
596	1307
+ 123	+ 133
719	1440
+ 123	
842	

Fonte: Apostila do Aluno 8 (2023)

A professora circulou pela sala conferindo se os valores encontrados pelos alunos estavam corretos. Em um caso, um grupo encontrou um valor que não poderia representar a soma buscada pelo grupo, pois não era múltiplo de 180°. Diante disso, foi solicitado que refizessem os cálculos. Observando essa situação, outros grupos pediram para a professora conferir se seus valores estavam corretos. Surgiu então, a pergunta de como a professora sabia se o valor estava correto se nem estava fazendo cálculo, e a professora respondeu que isso seria descoberto durante as próximas atividades.

Alguns alunos esperavam que a soma dos ângulos internos fosse um valor fixo para todos os polígonos, assim como a soma dos ângulos externos, questionando a professora ao perceberem que o valor do colega era diferente do seu, perguntando: “Quem está errado?”. Percebendo essa situação, a professora se dirigiu à frente da turma e perguntou o valor encontrado e o número de lados do polígono de cada grupo. Como esperado, alguns grupos encontraram o mesmo valor. Seguindo essa linha de raciocínio, a professora questionou: “Existe uma relação entre o número de lados e o valor da soma obtida?”. Como ninguém respondeu, perguntou-se: “Quem fez um polígono de 6 lados, encontrou qual valor para a soma das medidas dos ângulos internos?". Assim que os grupos responderam 720°, a professora perguntou: "Mais alguém encontrou esse mesmo valor de 720°?", e a resposta foi negativa. Então, indagou se seria coincidência que os grupos que fizeram polígonos de 6 lados encontraram o mesmo valor, ou se existiria uma relação com a quantidade de lados. Neste momento, um aluno comentou que achava que com mais lados a soma seria maior. A professora fez uma tabela na lousa, com o número de lados e valor da soma encontrada, onde escreveu os valores ditos pelos alunos, representado no quadro 2:

Quadro 2 - Reprodução dos resultados do item 3.3 da atividade 6

Número de lados do polígono	Valor da soma das medidas dos ângulos internos
6	720°
7	900°
8	1080°
9	1260°
10	1440°
12	1620°

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Ao analisar a tabela, os alunos confirmaram a teoria do colega de que quanto maior a quantidade de lados maior seria o valor da soma. A pesquisadora convidou os alunos para a próxima atividade, em que essa questão seria explorada.

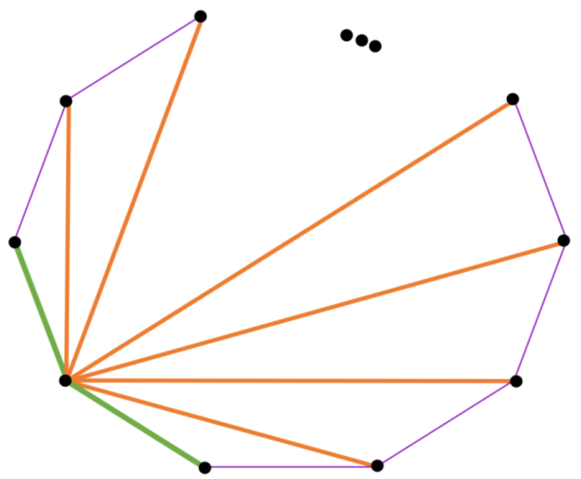
4.7.4 Atividade 6.4: explorando a soma dos ângulos internos do polígono através de triângulos

Nesta atividade, o objetivo é explorar valores para a soma dos ângulos internos de cada polígono através do traçado de todas as diagonais que partem de um vértice fixado, observando que esse procedimento resulta na partição do polígono em triângulos. Para tanto, utilizando o mesmo material impresso anteriormente, os alunos devem calcular o valor da soma das medidas dos ângulos internos do polígono e explicar como chegaram a esse resultado, usando o fato de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Por fim, devem comparar o valor encontrado nesta atividade com aquele da atividade anterior. Eles devem explicar se obtiveram o mesmo valor e justificar suas descobertas. Essa atividade permite que os alunos explorem as diagonais de um polígono e façam conexões com as propriedades dos triângulos internos formados.

Iniciou-se a atividade explicando aos alunos que deveriam traçar as diagonais de um polígono a partir de um vértice escolhido por eles, e que as diagonais são segmentos de reta que conectam vértices não adjacentes de um polígono. Ao observar o traçado dessas diagonais, os alunos teriam a oportunidade de descobrir propriedades interessantes sobre os ângulos internos do polígono, inclusive que o procedimento realizado resultou na partição do polígono em triângulos internos.

Para melhor compreensão, a professora fez a construção de um polígono usando o recurso do projetor para que os alunos pudessem visualizar o que estava sendo pedido. O polígono foi desenhado com pontos pretos para representar os vértices e seus lados, por segmentos roxos. Como cada grupo poderia ter um número variável de lados, a professora representou um polígono genérico, com uma abertura entre dois vértices não interligados, permitindo a adição de outros vértices e lados. Foi explicado que, do vértice escolhido, traça-se todas as diagonais interligadas aos outros vértices, representadas pelos segmentos de cor laranja na figura 52.

Figura 52 - Esquema representativo do traçado das diagonais que partem de um vértice de um polígono de n lados



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

A professora destacou o motivo de não interligar o vértice escolhido com os vértices adjacentes (em verde), conforme mostra a figura 52. A docente esclareceu que dois vértices adjacentes interligados representam os lados do polígono, e não diagonais. Depois dessa apresentação, os alunos deveriam traçar as diagonais e responder às seguintes perguntas presentes na apostila:

a) Quantos vértices tem o seu polígono?
b) Quantas diagonais partindo do vértice escolhido você conseguiu traçar?
c) Note que ao traçar essas diagonais dividimos o polígono em triângulos. Quantos triângulos você obteve?

Neste item c, surgiram muitas dúvidas. Inicialmente, a professora percorreu as mesas onde havia questionamentos, tentando responder às perguntas dos alunos e, ao mesmo tempo, tomando cuidado para deixá-los livres para refletir sobre o que estava sendo apresentado. Um aluno questionou a professora, acerca dos triângulos que seriam obtidos ao traçar as diagonais partindo dos demais vértices, se deveriam ser contabilizados e imaginando que daria muito trabalho. A professora esclareceu ao aluno que os triângulos deveriam ser formados apenas pelas diagonais e lados que estavam presentes no desenho, ou seja, deveria utilizar apenas os lados do polígono e as diagonais traçadas a partir de um único vértice.

O próximo item tinha o seguinte enunciado:

d) Tente explicar com suas palavras porque foi esse o número de triângulos obtidos por ti? Dica: observe como cada triângulo ficou determinado, considerando os lados do polígono e as diagonais que você traçou!

Os alunos ficaram bastante confusos e não conseguiram formular uma resposta para a questão. Em um primeiro momento não chegaram a nenhuma conclusão sobre a pergunta, o que levou alguns a ignorar a atividade e simplesmente dizer que não sabiam ou que não tinham entendido. Outros alunos pediram ajuda para entender a relação entre o número de triângulos, o número de diagonais e o número de lados.

Para esclarecer, a professora solicitou que os alunos olhassem para a lousa, onde ela fez um esquema (representado no quadro 3) e perguntou ao grupo com o polígono correspondente àquela quantidade de lados o que haviam respondido em relação à quantidade de diagonais traçadas a partir de um vértice e à quantidade de triângulos formados. Esta tabela ajudou a turma a visualizar melhor a relação entre os elementos, facilitando a compreensão do problema.

Quadro 3 - Reprodução do esquema usado no item 4.4 (d) da atividade 6

número de lados do polígono	número de diagonais traçadas partindo de um vértice	número de triângulos formados
6	3	4
7	4	5
8	5	6
9	6	7
10	7	8
12	9	10

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Em seguida, foi solicitado que os alunos observassem e verificassem se encontravam alguma relação entre os valores da tabela. Quase imediatamente, o Aluno 2 disse que o número de triângulos é sempre um a mais que o número de diagonais. A professora pediu que o Aluno 2 explicasse para a turma, e ele mostrou que, somando 1 ao número de diagonais traçadas, obteve o mesmo número de triângulos formados para o mesmo polígono, usando os valores da tabela como exemplo.

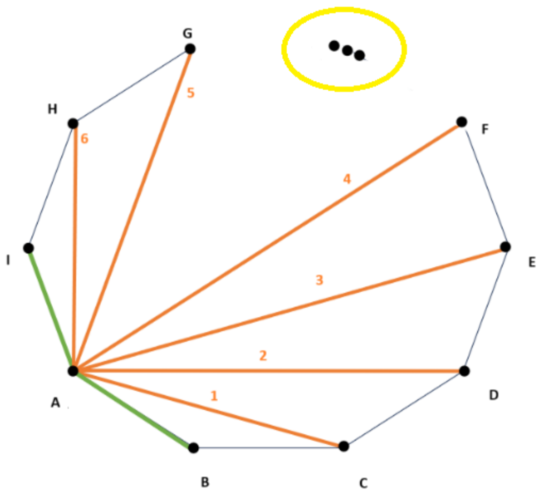
Depois, foi solicitado que os alunos observassem novamente a tabela para que encontrassem outras relações. Esse processo foi demorado, pois houveram algumas tentativas frustradas, como por exemplo a conjectura de que a segunda coluna seria metade da primeira, o que só vale para a primeira linha e indica que a afirmação é falsa. Novamente, o Aluno 2 conjecturou que o número de diagonais traçadas a partir de um vértice era igual ao número de lados daquele polígono menos 3. A professora verificou juntamente com a turma que de fato essa conjectura valia para todos os casos apresentados naquele esquema.

A professora combinou que as diagonais seriam representadas pela letra D e os lados pela letra L, estabelecendo a relação D = L - 3. Ela solicitou que os alunos refletissem sobre esses valores, tentando encontrar uma justificativa para essa relação. A professora deu a dica de observarem o que ocorria ao traçarem as diagonais a partir do vértice escolhido. No entanto, o desafio de dialogarem para explicar essa relação não foi bem-sucedido. Os alunos, sem encontrar uma explicação, pediram à professora que esclarecesse a questão. Voltou-se à figura 52 e a professora foi conduzindo os alunos fazendo perguntas tais como:

- Quantas diagonais foram traçadas ali e quantos vértices há?
- Há mais vértices que poderiam ser acrescentados naquele espaço (indicado na cor amarela na figura 53). No caso se acrescentamos 10 vértices, quantas diagonais vão ser adicionadas?
- Ao desenhar cada uma dessas diagonais estamos ligando o vértice A aos outros vértices. Por que não traçamos uma diagonal a cada um dos vértices adjacentes ao A, ou seja, aos vértices I e B?
- Podemos perceber que no vértice C existe uma única diagonal conectando-o ao vértice A. E o mesmo ocorre com os vértices D, E, F, G, H. De quais vértices não parte nenhuma diagonal até o A?

Para responder a essas perguntas, foi utilizada a figura projetada na lousa, que havia sido montada anteriormente. Inicialmente, os alunos contaram o número de diagonais (representadas em laranja na figura 53). Em seguida, discutiu-se sobre os vértices que poderiam estar presentes no espaço vazio entre os vértices F e G (destacado em amarelo na figura 53), direcionando-os à próxima questão. Foi explicado que o número de vértices acrescentados nesse espaço seria equivalente ao número de diagonais que também seriam adicionadas. Assim, evidenciou-se uma relação biunívoca entre a quantidade de vértices novos e o número de diagonais partindo do vértice A, que surgiriam em função desses novos vértices.

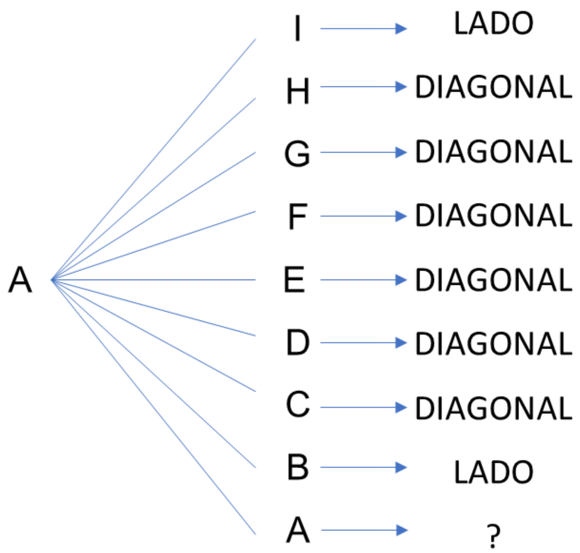
Figura 53 – Contagem das diagonais que partem de um único vértice de um polígono de n lados



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Na terceira pergunta alguns alunos começaram a participar de forma mais ativa, falando com entusiasmo que estavam começando a entender. Os alunos 2, 15 e 19 foram os primeiros a concluir que não são traçadas diagonais ligando o vértice A ao vértice B nem ao vértice I, pois AB e AI são lados desse polígono. Inclusive perguntaram se era por isso que a professora havia representado em verde esses lados. Então encontraram 2 vértices com os quais não podiam traçar diagonais. Restava encontrar mais um, para explicar a relação D = L - 3. Então foi questionado “existem 9 vértices, de A à I, e como 2 desses vértices são adjacentes, não formando diagonais, qual outro vértice não originará uma diagonal com A?”. Apesar de estarem engajados nessa procura, não houveram respostas. Até que a pesquisadora foi apontando para cada vértice da figura, de forma contrária à alfabética, ou seja, iniciando por I, e questionou se havia uma diagonal que ligava o vértice A a este vértice. Formando o seguinte esquema da figura 54:

Figura 54 - Esquema de verificação de diagonais e lados



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Os alunos então concluíram que, entre os nove vértices, seis formariam diagonais, enquanto dois formaram lados do polígono, e um desses vértices (o próprio vértice A) de onde partiam as diagonais e os lados, não poderia se conectar a si mesmo. Essa análise ajudou a explicar a relação entre quantidades de diagonais e de lados (ou vértices) do polígono.

As duas informações registradas na tabela foram transcritas no quadro: o número de diagonais (D) é igual ao número de lados (L) menos 3 (D = L - 3), e o número de triângulos (T) é sempre um a mais do que o número de diagonais (T = D + 1). Em seguida, os alunos foram incentivados a encontrar uma relação entre o número de triângulos e o número de lados do polígono. O Aluno 8 e o Aluno 14 foram os primeiros a substituir o valor de D na expressão anterior (D = L - 3), mostrando aos colegas como fazer o mesmo. A relação obtida pela turma foi a seguinte:

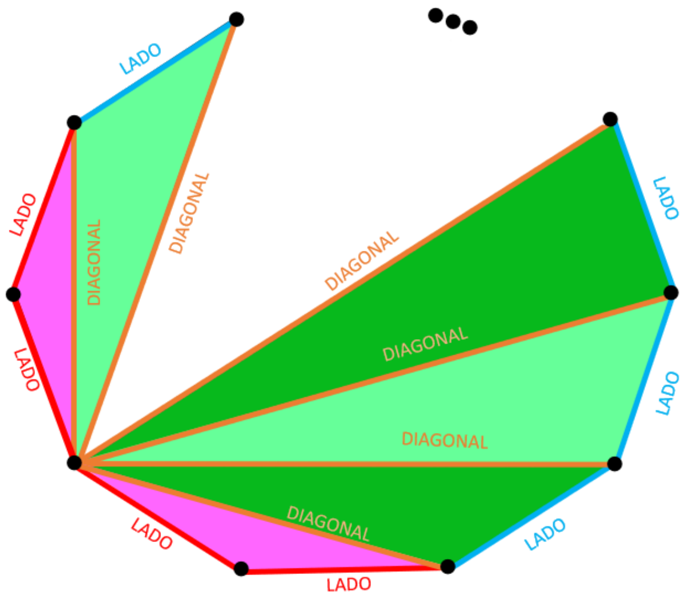
$$T = D + 1$$

$$T = L - 3 + 1$$

$$T = L - 2$$

Os alunos verificaram que a relação algébrica acima se aplicava corretamente tanto ao polígono que estavam analisando quanto aos polígonos dos colegas, conforme os dados apresentados no quadro 3. O Aluno 19 perguntou se seria possível visualizar essa relação e se haveria uma explicação para ela. Como o sinal para o intervalo já havia tocado, a professora mencionou que montaria uma figura para discutir essa relação após o intervalo. Quando a turma retornou, a questão foi retomada perguntando “alguém sabe ou tem um palpite sobre o motivo pelo qual há sempre dois triângulos a menos do que o número de lados?”. Alguns alunos expressaram curiosidade, questionando se isso acontecia sempre e qual seria a razão. Em resposta, a professora apresentou a figura 55, que ilustra em tons de verde os triângulos formados por duas diagonais e um lado e em rosa os triângulos formados por dois lados e uma diagonal.

Figura 55 - Triângulos formados pelos lados e diagonais traçadas a partir de um vértice fixo



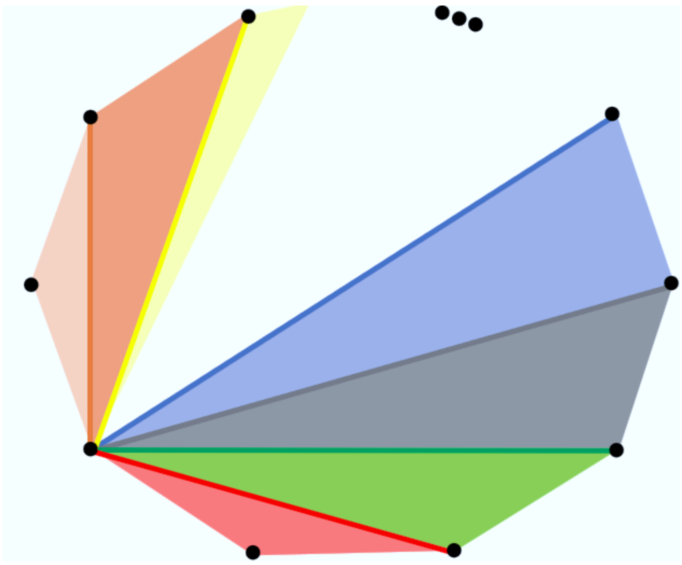
Fonte: Elaborado pela autora (2023)

A pesquisadora perguntou: “Quantos lados em azul estão presentes na figura?” e, após a resposta, “Quantos triângulos em verde há?”. Como o número de lados azuis e triângulos verdes foi o mesmo em ambas as respostas, discutiu-se que cada lado em azul determina exatamente um triângulo formado por duas diagonais e um lado. A pesquisadora então questionou: “Se acrescentarmos mais dois lados, quantos triângulos seriam formados?” Mais uma vez, observou-se que o número de lados e de triângulos permaneceu igual. Com isso, estabeleceu-se que o número de triângulos formados por duas diagonais e um lado é sempre igual ao número de lados azuis.

Na continuidade da discussão, foram destacados os triângulos em rosa, formados por dois lados e uma diagonal. Nesse caso, dois lados geram apenas um triângulo, ou seja, dos quatro lados em vermelho, apenas dois triângulos foram determinados. Assim, concluiu-se que, traçando todas as diagonais que partem de um vértice, são obtidos sempre dois triângulos a menos do que o número total de lados do polígono.

De forma complementar ao realizado, a docente buscou apresentar, sob outra perspectiva, essa relação. A proposta era contar cada triângulo formado à medida que se traçava cada diagonal. A Figura 56 ilustra esse processo, começando com a primeira diagonal, em vermelho, que forma um triângulo da mesma cor. O mesmo acontece com as diagonais subsequentes, em verde, cinza, azul e amarelo (sendo este último triângulo formado por um lado, pela diagonal anteriormente traçada, e pela nova diagonal amarela). No espaço em branco previamente discutido, cada novo lado acrescentaria uma diagonal, resultando na formação de mais um triângulo. A última diagonal a ser traçada, em laranja, forma dois triângulos (também em tons de laranja). Conclui-se, portanto, que o número de triângulos sempre será um a mais que o número de diagonais. Dado que o número de diagonais é igual ao número de lados menos três, o número total de triângulos será o número de lados menos dois.

Figura 56 - Processo de formação de triângulos a partir do traçado das diagonais de um polígono



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

É interessante notar que estes polígonos genéricos não estão limitados a apenas 9 vértices ou 6 diagonais, pois, ao adicionar mais vértices e lados, a relação D = L - 3 permaneceria válida. Isso ocorre porque, para cada vértice ou lado acrescentado, o mesmo número de novas diagonais seria gerado.

Após a discussão, os alunos que ainda não haviam respondido puderam retomar os tópicos da apostila. No item *d*, o Aluno 12 escreveu: "Foi possível traçar apenas cinco diagonais a partir dos oito vértices, pois não se conta o vértice à esquerda, à direita, e nem o próprio vértice escolhido. E haverá sempre um triângulo a mais do que o número de diagonais". O Aluno 2 respondeu: “Esse número de triângulos é obtido através do traço de diagonais e o número de triângulos sempre será um a mais que de diagonais”. O Aluno 3 explicou: “É porque os vértices se conectam com todas, menos ela mesma e os dos lados delas”. Por fim, o Aluno 8 colocou: “Pois os vértices são sempre 3 a mais que as diagonais, e as diagonais sempre são 1 a menos que os triângulos formados e a última diagonal forma dois triângulos”.

A próxima questão (item 4.4(e) da atividade 6) solicitava o cálculo da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono com base na divisão em triângulos realizada e os alunos demonstraram uma boa compreensão. Os alunos responderam prontamente que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°. Quando solicitado a cada grupo que utilizasse esse dado para obter a soma dos ângulos internos do seu polígono, foi possível observar o impacto da discussão anterior. O Aluno

1 respondeu: "180x4=720. A gente notou que o número de triângulos dá dois a menos que o número de lados. De qualquer forma nós estamos somando a mesma coisa". O Aluno 3 escreveu: "Eu fiz 180 vezes 5 e deu 900, e eu notei que o número de triângulos é sempre dois a menos que o número do polígono". O Aluno 8 afirmou: "1440°, cheguei a esta conclusão multiplicando o ângulo do triângulo pelo número de triângulos, e notamos que o número de triângulos é o número de lados menos 2". Por fim, o Aluno 14 respondeu: "8 . 180 = 1440. Eu multipliquei a quantidade de triângulos pelo grau dos triângulos. A quantidade de triângulos é a quantidade de lados menos dois, sempre em qualquer caso". Essas respostas refletem uma compreensão da relação entre a quantidade de lados do polígono e a soma das medidas dos seus ângulos internos.

O último questionamento (item 4.4(f) dessa atividade 6) perguntava se os alunos tinham obtido o mesmo valor que obtido somando as medidas de cada ângulo do polígono construído no GeoGebra e impresso. As respostas dos alunos refletiram a compreensão de que, independentemente do método utilizado, os resultados permaneceram os mesmos. O Aluno 1 respondeu: “Sim, já que estamos somando a mesma coisa”. O Aluno 2 colocou: “Não importa os métodos que se utiliza para chegar nos resultados, os resultados serão sempre os mesmos”. O Aluno 8 escreveu: “Encontrei o mesmo resultado pois estamos somando os mesmos ângulos só que de forma diferente”. Por fim, o Aluno 14 explicou: “Sim, porque nós utilizamos uma forma diferente de calcular, mas o resultado é o mesmo”.

As perguntas feitas pela pesquisadora no início da atividade foram fundamentais para que os alunos percebessem a relação entre o número de diagonais e o número de lados. Ao perceber que os alunos estavam se dispersando e desmotivados por não conseguirem responder a algumas questões, a professora utilizou sua intuição para redirecionar a turma e trazê-los de volta à atividade. A intenção era estimular o pensamento crítico e a discussão entre os alunos, sem fornecer as respostas diretamente. Embora o diálogo esperado não tenha surgido de imediato, essa intervenção foi bem-sucedida, resultando no retorno dos alunos à participação ativa, inclusive com novas perguntas e sugestões vindas deles mesmos.

Com o debate e os questionamentos levantados pelos próprios alunos, foi possível aprofundar e explorar a relação entre diagonais, ângulos, vértices e lados. É interessante notar que os alunos não se limitaram a constatar que, considerando um polígono de L lados, o número de diagonais traçadas partindo de um vértice fixado é igual a L-3, ou que o número de triângulos assim obtidos é L-2. Eles revelaram curiosidade em compreender os porquês dessas relações.

4.7.5 Atividade 6.5: explorando polígonos e suas propriedades

O objetivo desta atividade é consolidar o conhecimento dos alunos sobre a soma das medidas dos ângulos internos e externos de um polígono, explorando as relações entre o número de lados, a soma das medidas dos ângulos internos e dos externos, o número de diagonais traçadas a partir de um vértice e o número de triângulos formados por essas diagonais. Além disso, busca-se que os alunos identifiquem padrões e regularidades nas propriedades dos polígonos.

Inicialmente, foi solicitado que cada grupo preenchesse o item 5.1 da atividade 6 na apostila (Figura 57) com base nas construções e cálculos das atividades anteriores. Em seguida, a professora explicou a proposta de criar um cartaz colaborativo com essas respostas. Assim, cada grupo trouxe os dados já discutidos e calculados para compartilhar com os outros grupos, com o intuito de promover a análise dos resultados obtidos e identificar padrões e regularidades que os auxiliassem a generalizar resultados.

Figura 57 - Item 5.1 da atividade 6 da apostila

6.5.1. Use os dados que coletamos nas atividades anteriores para preencher a tabela abaixo com as informações do seu polígono:

Número de lados do polígono	Soma das medidas dos ângulos externos (Se)	Soma das medidas dos ângulos internos (Si)	Número de diagonais traçadas a partir de um vértice	Número de triângulos formados a partir do traçado das diagonais que partem de um vértice do polígono

Fonte: Apostila de atividades (2023)

Os alunos se organizaram em meio círculo, ao redor de uma mesa central onde a docente havia colocado duas cartolinas unidas, formando um único cartaz que já estava preenchido com o cabeçalho. Em seguida, ela preencheu com a turma, como exemplo, os dados referentes aos polígonos de 3 e 4 lados, facilitando o entendimento dos alunos. Esse exemplo preparou o terreno para que os alunos continuassem o preenchimento da tabela com os polígonos que haviam estudado.

Os alunos foram chamados, em ordem crescente do número de lados dos polígonos, para preencherem o cartaz[16]. O quadro 4 traz uma reprodução do cartaz construído de forma coletiva.

Quadro 4 - Representação do cartaz coletivo

Número de lados do polígono	Soma dos ângulos externos (Se)	Soma dos ângulos internos (Si)	Número de diagonais traçadas a partir de um vértice	Número de triângulos formados por diagonais adjacentes
3	360°	180°	0	1
4	360°	360°	1	2
5	360°	540°	2	3
6	360°	720°	3	4
6	360°	720°	3	4
6	360°	720°	3	4
7	360°	900°	4	5
8	360°	1080°	5	6
9	360°	1260°	6	7
10	360°	1440°	7	8
12	360°	1800°	9	10

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Ao ser solicitado o preenchimento do cartaz pelos grupos, alguns demonstraram receio, mencionando que tinham vergonha e temiam que suas letras não fossem compreendidas. No entanto, a empolgação da maioria foi evidente, com muitos perguntando se poderiam usar a caneta de quadro da professora e se seriam eles ou a docente que escreveriam no cartaz. Nesse momento, surgiu um debate sobre quem teria a responsabilidade de escrever. Nos grupos onde havia mais de uma pessoa interessada, foi sugerido que revezassem a escrita nas colunas da tabela.

Recomendou-se que os alunos observassem os valores preenchidos na tabela, promovendo um debate para que compartilhassem suas observações e trocassem informações. Ao analisarem os dados, os alunos perceberam que os grupos que trabalharam com polígonos de mesmo número de lados apresentaram os mesmos resultados. Além disso, os alunos observaram que apareciam todos os números inteiros, em ordem, de zero até nove na coluna das diagonais traçadas a partir de um

[16] O cartaz elaborado pelos alunos foi perdido na enchente de maio de 2024, que atingiu a cidade de Canoas. O material estava na casa da pesquisadora no momento do desastre.

vértice e de um até dez na coluna referente aos triângulos formados. Já o valor da soma da medida dos ângulos externos permaneceu constante.

O item 5.2 pergunta se existe alguma relação do número de triângulos com a soma das medidas dos ângulos internos. As respostas dos alunos ao item indicam uma compreensão da relação entre o número de triângulos formados pela divisão de um polígono e a soma das medidas dos ângulos internos. O Aluno 3 reconheceu que: “estão relacionados porque o polígono foi dividido em triângulos e todos os triângulos têm 180°”. O Aluno 8 observou que: “sim, se fossem 180° a menos teria um triângulo a menos e também que os ângulos internos foram calculados usando o número de triângulos”. O Aluno 12 destacou que multiplicar o número de triângulos por 180° resulta na soma total dos ângulos internos, enquanto o Aluno 14 reafirmou que: “sim é possível calcular a soma dos ângulos internos utilizando quantidade de triângulos”. O Aluno 19 completou dizendo que “sim, pois os ângulos internos foram divididos em triângulos cada um com 180 ° que somamos e deu o mesmo resultado dos ângulos internos”.

No item 5.3, os alunos copiaram os dados do tabela do cartaz para suas apostilas. Foi possível notar que faltavam linhas na tabela da apostila, assim os alunos não copiaram as informações duplicadas, nem os dados do polígono de três lados. Além disso, eles precisaram adicionar uma linha extra abaixo da tabela para incluir as informações que seus colegas haviam preenchido no cartaz. A figura 58 mostra a tabela copiada na apostila de um aluno.

Figura 58 - Respostas do Aluno 5 ao item 5.3 da atividade 6

Número de lados do polígono	Soma das medidas dos ângulos externos (Se)	Soma das medidas dos ângulos internos (Si)	Número de diagonais traçadas a partir de um vértice	Número de triângulos formados a partir do traçado das diagonais que partem de um vértice do polígono
4	360°	360°	1	2
5	360°	540°	2	3
6	360°	720°	3	4
7	360°	900°	4	5
8	360°	1.080°	5	6
9	360°	1.260°	6	7
10	360°	1.440	7	8
12	360°	1800	9	10

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Logo após a construção acima, os alunos questionaram qual seria a soma dos ângulos internos de um polígono de 11 lados, já que os outros dados das colunas eles conseguiam deduzir com base no padrão apresentado na tabela. O Aluno 19 argumentou que seria 200 graus a mais que o polígono de 10 lados, o que gerou um debate entre os colegas sobre o cálculo correto dessa soma. A professora usou a tabela para demonstrar que não eram exatamente 200 graus acrescidos nas linhas anteriores, mas um valor próximo disso. Quando o sinal do recreio tocou, os alunos 7, 17 e 19 permaneceram na sala por alguns instantes, discutindo sobre o valor exato que aumentava de uma linha para outra na soma das medidas dos ângulos internos e concluíram que esse valor era menor que 200 graus. Eles fizeram várias estimativas, até que o Aluno 19, com auxílio da calculadora observou que a diferença entre a soma dos ângulos internos de um polígono de quatro lados em relação a um de três lados era de 180 graus, e o mesmo acontecia entre um polígono de cinco e um de quatro lados. A professora, então, sugeriu que eles verificassem se esse padrão se mantinha para todos os polígonos e disse que, após o intervalo, discutiriam mais sobre o assunto.

Após o intervalo, a professora retomou o debate sobre a soma dos ângulos internos de um polígono de 11 lados. O trio que havia permanecido na sala argumentou que a diferença entre a soma dos ângulos dos dois primeiros polígonos era de 180°. A professora, então, questionou se esse valor realmente representava a constante de acréscimo de um polígono para outro, incentivando os alunos a verificarem se essa relação se mantinha para todos os polígonos que estavam presentes no cartaz. Esse questionamento gerou uma nova rodada de cálculos, durante a qual os alunos confirmaram que, de fato, a soma das medidas dos ângulos internos de cada polígono aumentava em 180° em relação ao polígono anterior. O Aluno 19 argumentou que, para descobrir a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer outro polígono, bastava somar 180° sucessivamente até alcançar o número de lados do polígono, preenchendo a tabela dessa forma.

A professora trouxe um novo questionamento, perguntando por que a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono aumentava em 180° quando a quantidade de lados era acrescida de uma unidade. Rapidamente, os alunos responderam que esse é o valor da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Em seguida, a docente perguntou qual seria a explicação para isso e se é coincidência ser exatamente o valor da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, desafiando os alunos a refletirem sobre o motivo por trás dessa relação.

Alguns alunos argumentaram que a cada polígono, ao adicionar mais um lado, formava-se também mais um triângulo, mas essa observação foi algo pontual. Para explorar melhor a ideia, a professora retornou à figura 55, projetando-a no quadro e acrescentando mais um lado ao polígono. Retomando que ao acrescentar um lado, também adiciona-se um triângulo, evidenciando a relação direta entre o aumento no número de lados e a adição de um novo triângulo, o que justifica o acréscimo de 180° na soma das medidas dos ângulos internos.

Na apostila, havia um espaço destinado para que os alunos anotassem suas percepções e conclusões sobre as atividades realizadas, com base nas discussões e na análise dos dados disponibilizados no cartaz. Quando questionados sobre o que deveriam escrever, os alunos perguntaram à professora o que ela esperava como resposta. A docente explicou que a resposta seria pessoal, já que tratava das percepções e conclusões de cada aluno sobre a atividade. Eles poderiam escrever sobre o que haviam aprendido, o que mais chamou sua atenção, ou algo que perceberam durante a atividade.

A seguir, estão alguns exemplos do que os alunos responderam:

- Aluno 7: "Os polígonos com o mesmo número de lados sempre terão o mesmo resultado, independente do formato. E a soma dos ângulos vai aumentar em 180° repetidamente."
- Aluno 8: "Achei interessante quando dividimos nosso polígono em triângulos e calculamos o mesmo ângulo de antes."
- Aluno 14: "Dá para perceber que a soma das medidas dos ângulos internos é sempre a soma do polígono anterior mais 180°."
- Aluno 17: "Eu e uma colega usamos a calculadora e percebemos que cada valor na tabela é somado assim: 360 + 180 = 540. Na nossa tabela faltava um, e nós fizemos a soma e descobrimos qual era o número. Eu achei muito interessante."

A partir das respostas dos alunos, pode-se perceber que houve uma compreensão dos padrões envolvidos. Os alunos identificaram que, independentemente do formato, polígonos com o mesmo número de lados terão os mesmos resultados para a soma das medidas dos ângulos internos. Além disso, os alunos observaram o aumento constante de 180° na soma das medidas dos ângulos internos ao se adicionar um lado ao polígono, utilizando uma soma recursiva, baseando-se no polígono anterior. Nota-se a habilidade de relacionar a divisão dos polígonos em triângulos e perceber que são duas formas distintas de calcular a soma das medidas dos ângulos internos e que, portanto, possuem a mesma medida. E a utilização de cálculos para completar os dados do polígono de 11 lados que não foi inicialmente preenchido na tabela, evidenciando o entendimento dos conceitos geométricos abordados, bem como a aplicação prática desses conceitos.

Os alunos, de forma animada, perguntaram se o cartaz poderia ser deixado exposto na sala de aula e a professora confirmou que essa era a intenção. Esse momento demonstrou o quanto os alunos se sentiram envolvidos e orgulhosos de suas produções.

4.8 Atividade 7: abordagem algébrica para a obtenção da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo

Nesta atividade o objetivo é possibilitar que os estudantes consigam obter uma expressão algébrica que forneça a soma das medidas dos ângulos internos em função do número de lados do polígono. Para tanto, tomando o polígono trabalhado em cada grupo, observa-se a necessidade de renomear os vértices por "vértice n", ângulos internos por "i_n" e ângulos externos por "e_n", em que n representa o índice de cada vértice, para poder fazer relação entre seus elementos. Essa notação se faz necessária para possibilitar a generalização que se deseja alcançar, a qual abrangerá polígonos de qualquer número de lados. Deseja-se que o aluno conclua essas relações a partir das atividades e dos debates guiados pelo professor.

O item 1.1 da atividade 7 propunha que os alunos preenchessem uma tabela em que cada linha apresentava o vértice a ser explorado, a medida de cada ângulo interno e externo, assim como a soma desses dois últimos, todos relacionados ao mesmo vértice. Na última linha da tabela, era solicitado que os alunos calculassem a soma das medidas dos ângulos internos e a dos ângulos externos. Esses valores foram obtidos com base no polígono construído pelos próprios alunos. Os alunos preencheram a tabela considerando essa notação e observando a quantidade de índices necessários de acordo com o polígono que cada grupo estava trabalhando, conforme exemplificado na figura 59.

Figura 59 - Respostas do Aluno 14 ao item 1.1 da atividade 7[17]

7.1.1. Preencha o quadro abaixo, seguindo o modelo, de acordo com o número de vértices do seu polígono:

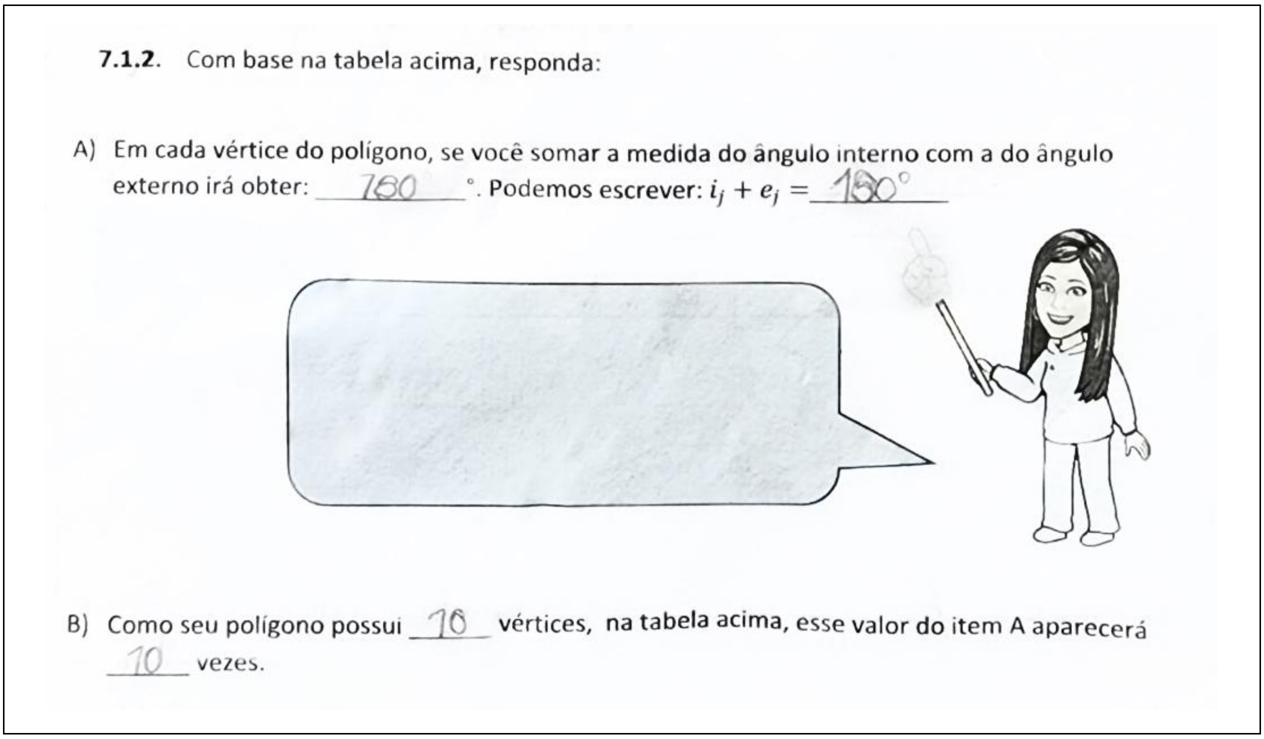
VÉRTICE	MEDIDA DO ÂNGULO INTERNO	MEDIDA DO ÂNGULO EXTERNO	SOMA DAS MEDIDAS DO ÂNGULO INTERNO E EXTERNO NESTE VÉRTICE
Vértice 1	i_1 = 130°	e_1 = 50°	180°
Vértice 2	i_2 = 150°	e_2 = 30°	180°
Vértice 3	i_3 = 150°	e_3 = 30°	180°
Vértice 4	i_4 = 163°	e_4 = 17°	180°
Vértice 5	i5 = 123°	e5 = 57°	180°
vértice 6	i6 = 123°	e6 = 57°	180°
vértice 7	i7 = 162°	e7 = 18°	180°
vértice 8	i8 = 150°	e8 = 30°	180°
vértice 9	i9 = 150°	e9 = 30°	180°
vértice 10	i10 = 139°	e10 = 41°	180°
	SOMA DAS MEDIDAS DE TODOS ÂNGULOS INTERNOS: 1440°	SOMA DAS MEDIDAS DE TODOS ÂNGULOS EXTERNOS: 360°	

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Ao preencherem a tabela, alguns alunos indagaram-se sobre a soma da medida do ângulo interno com a do ângulo externo em cada vértice ser 180 graus em "diversos casos". A professora confirmou a veracidade dessa afirmação e orientou os alunos a utilizarem essa informação para responder aos questionamentos do item 1.2 dessa atividade. Com base nisso, os alunos preencheram no item (A) que a soma da medida do ângulo interno com a do ângulo externo em cada vértice de um polígono é 180°. A figura 60 traz as respostas do Aluno 14 a este item.

[17] As apostilas atingidas pela enchente ficaram manchadas em tom amarronzado, e as imagens do verso da página tornaram-se evidentes, transparecendo na folha. Além disso, o sticker acompanhado de um balão com fundo azul teve suas instruções dissolvidas pela água, comprometendo a legibilidade. No entanto, as respostas dos alunos permanecem visíveis, permitindo a compreensão do conteúdo apresentado. A partir desse ponto da pesquisa, as fotos refletem as mesmas condições, repetindo-se nas imagens seguintes e não se tratando de um caso isolado. As imagens foram editadas com contraste aumentado para melhor visualização. As imagens foram editadas com contraste aumentado para melhor visualização.

Figura 60 - Respostas do Aluno 14 ao item 1.2 (A) da atividade 7



7.1.2. Com base na tabela acima, responda:

A) Em cada vértice do polígono, se você somar a medida do ângulo interno com a do ângulo externo irá obter: 180°. Podemos escrever: $i_j + e_j =$ 180°

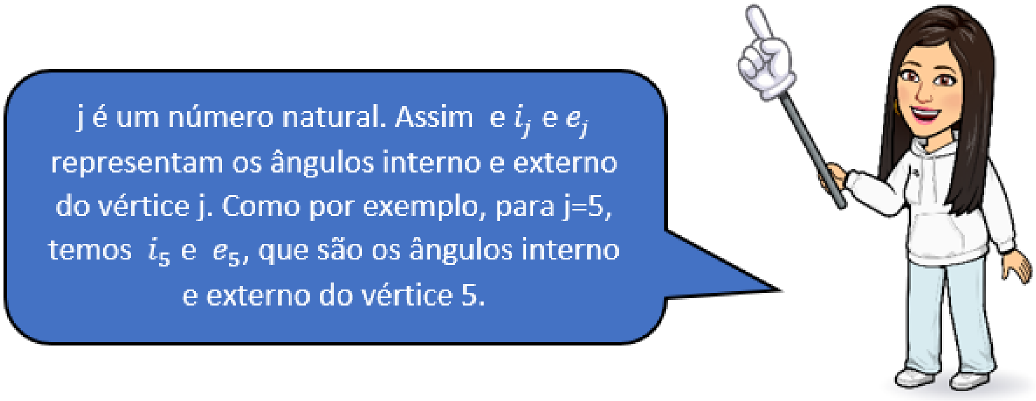
B) Como seu polígono possui 10 vértices, na tabela acima, esse valor do item A aparecerá 10 vezes.

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Surgiu o questionamento sobre o motivo dessa soma ser sempre 180° e, para explicar, a professora utilizou o GeoGebra para desenhar um polígono, recordando aos alunos como foi feita a construção do ângulo externo. Os alunos lembraram o processo e ditaram os passos a serem seguidos. A professora, então, prolongou uma semirreta a partir de um dos lados do polígono, mostrando que o ângulo externo suplementa o ângulo interno, já que ambos estão sobre a mesma semirreta. Dessa forma, pela própria construção, a soma da medida do ângulo interno com a do ângulo externo em um mesmo vértice resulta em 180°.

Nesta mesma questão, para responder à relação que solicitava a conclusão do valor de i_j + e_j, a professora leu juntamente com a turma o balão presente na apostila, que trazia uma explicação acompanhada de uma figura ilustrativa sobre o papel da letra j. O balão esclareceu que j é um número natural e que i_j e e_j representam, respectivamente, os ângulos interno e externo do vértice j. Como exemplo, indicava que, para $j = 5$ os correspondentes aos ângulos interno e externo do vértice 5 serão i_5 e e_5, conforme figura 61.

Figura 61 - Figura ilustrativa que aparece no item 1.2 da atividade 7

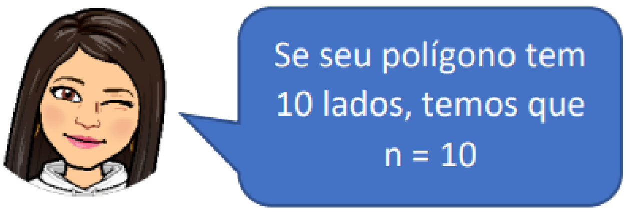


Fonte: Apostila de atividades (2023)

No item (B), a apostila solicitava que o aluno preenchesse o número de vértices que seu polígono possuía e quantas vezes apareceria na tabela do 7.1.1 o valor da soma $i_j + e_j$. Indicando que a soma da medida do ângulo interno com a do respectivo ângulo externo ocorre n vezes em um polígono de n lados.

No item (C), foi solicitado o cálculo da soma dos ângulos externos: $e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n$. Após essa questão, uma figura foi incluída para ilustrar que o "n" na expressão representa o número de lados do polígono. A professora questionou a turma sobre o motivo de se utilizar a letra "n" nessa expressão. Prontamente, o Aluno 2 respondeu que o número de lados variava entre os grupos da turma, e, por essa razão, não havia um valor único a ser colocado na apostila, o que justificava o uso da letra "n", que representa esse valor.

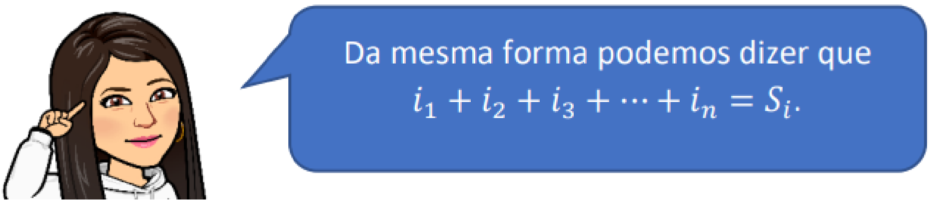
Figura 62 - Figura e Explicação do n



Fonte: Apostila de atividades (2023)

No item (D), a apostila explicou que a expressão mencionada no item anterior seria denominada "S_e", solicitando que os alunos preenchessem esse valor. Durante a execução da atividade, a professora circulava pela sala para identificar eventuais dúvidas e observar se os alunos estavam acompanhando corretamente os exercícios. Nesse momento, ficou evidente um avanço no entendimento por parte dos alunos, tanto na leitura dos exercícios quanto na interpretação da apostila. Eles demonstraram maior independência, pois já compreendiam como a atividade funcionava, necessitando menos intervenção da professora. Após o item (D) a apostila trouxe outra ilustração seguida da explicação sobre a soma das medidas dos ângulos internos (Figura 63).

Figura 63 - Figura e Explicação ângulos internos



Fonte: Apostila de atividades (2023)

No item (E), solicitava-se que os alunos completassem a frase: "Para o seu polígono de ____ vértices (e lados), temos Si + Se = ______ × 180°". Nesse item, alguns alunos ficaram com dúvida sobre qual valor preencher no segundo espaço. Para auxiliá-los, a professora perguntou qual seria o valor de S_i + S_e. A professora explicou que esse valor era um múltiplo de 180, e que a questão estava pedindo qual número deveria ser multiplicado por 180 para se obter Si + Se.

O item (F) teve como objetivo generalizar o que foi discutido no item anterior. Dessa forma, para um polígono de n vértices, o item questionava o valor de Si + Se. A figura 64 ilustra a manipulação realizada durante o processo e já apresenta o valor esperado pré-preenchido ao final da análise. Cabia a cada aluno refletir sobre a relação apresentava e completar o espaço que faltava, consolidando o conceito trabalhado.

Figura 64 - Esquema apresentado na apostila pelo item (F) para Si + Se

$$S_i + S_e = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n + e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n$$

$$S_i + S_e = i_1 + e_1 + i_2 + e_2 + i_3 + e_3 + \cdots + i_n + e_n$$

$$S_i + S_e = \_\_\_\_\_\_ \times 180°$$

Fonte: Apostila de atividades (2023)

Na figura 64, em cor laranja, foi representada a soma das medidas dos ângulos internos, enquanto em azul, foi simbolizada a soma das medidas dos ângulos externos. Na segunda igualdade, os ângulos foram reorganizados de modo que o ângulo interno e o ângulo externo de cada vértice fossem agrupados (grifados em cinza). A soma das medidas do ângulo interno e externo de um mesmo vértice já era conhecida pelo seu valor (item A). Na última igualdade, foi solicitado que o aluno preenchesse quantas vezes o valor de 180 graus aparecia na soma apresentada. A docente pediu que os estudantes tentassem resolver a questão utilizando apenas as instruções da apostila. Como esperado, muitos apresentaram dúvidas. Após oferecer um tempo para que os alunos debatessem com seus colegas sobre o que estava sendo apresentado, a professora detalhou no quadro cada passo do processo apresentado. Um ponto interessante foi quando a pesquisadora perguntou se algum ângulo interno ou externo poderia ficar sem seu par, ao que o Aluno 2 respondeu com outra pergunta: "Algum ângulo interno não tem ângulo externo?". Para aprofundar essa dúvida, a professora solicitou que os alunos observassem os polígonos que haviam construído e perguntou se haveria algum ângulo interno sem seu correspondente externo, e vice-versa. Complementando a discussão, o Aluno 19 comentou que, nos polígonos convexos, os pares de ângulos internos e externos são bem definidos, o que não seria garantido se o polígono fosse côncavo.

No item (G), considerando que o valor de Se é o mesmo para todos os polígonos, a expressão do item (F) foi reescrita da seguinte forma: Si + _________ = ______ × 180°. A intenção aqui era que o aluno percebesse que a soma dos ângulos externos (Se) é uma constante para todos os polígonos, o que permite reescrever a equação de maneira simplificada, destacando o fator que multiplica 180° e ajudando a consolidar o conceito de soma das medidas dos ângulos internos e externos em diferentes polígonos convexos.

No item (H), foi solicitado que os alunos tentassem isolar Si na expressão fornecida anteriormente. O objetivo era que, ao reorganizar a equação, o aluno compreendesse como expressar a soma das medidas dos ângulos internos (Si) em função de “n”. Para auxiliar nesse processo, foi disponibilizada uma figura ilustrativa, que trazia a observação de que 360° é equivalente a duas vezes 180°.

Figura 65 - Figura ilustrativa que aparece no item (H)

Fonte: Apostila de atividades (2023)

A expectativa era que o aluno substituísse o valor de 360° pela expressão fornecida e colocasse em evidência o fator comum presente na equação. É importante mencionar que, antes dessa pesquisa, os alunos já haviam trabalhado com produto de polinômios e fatoração, e isso lhes proporcionou as ferramentas matemáticas necessárias para obter e compreender a fórmula da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo.

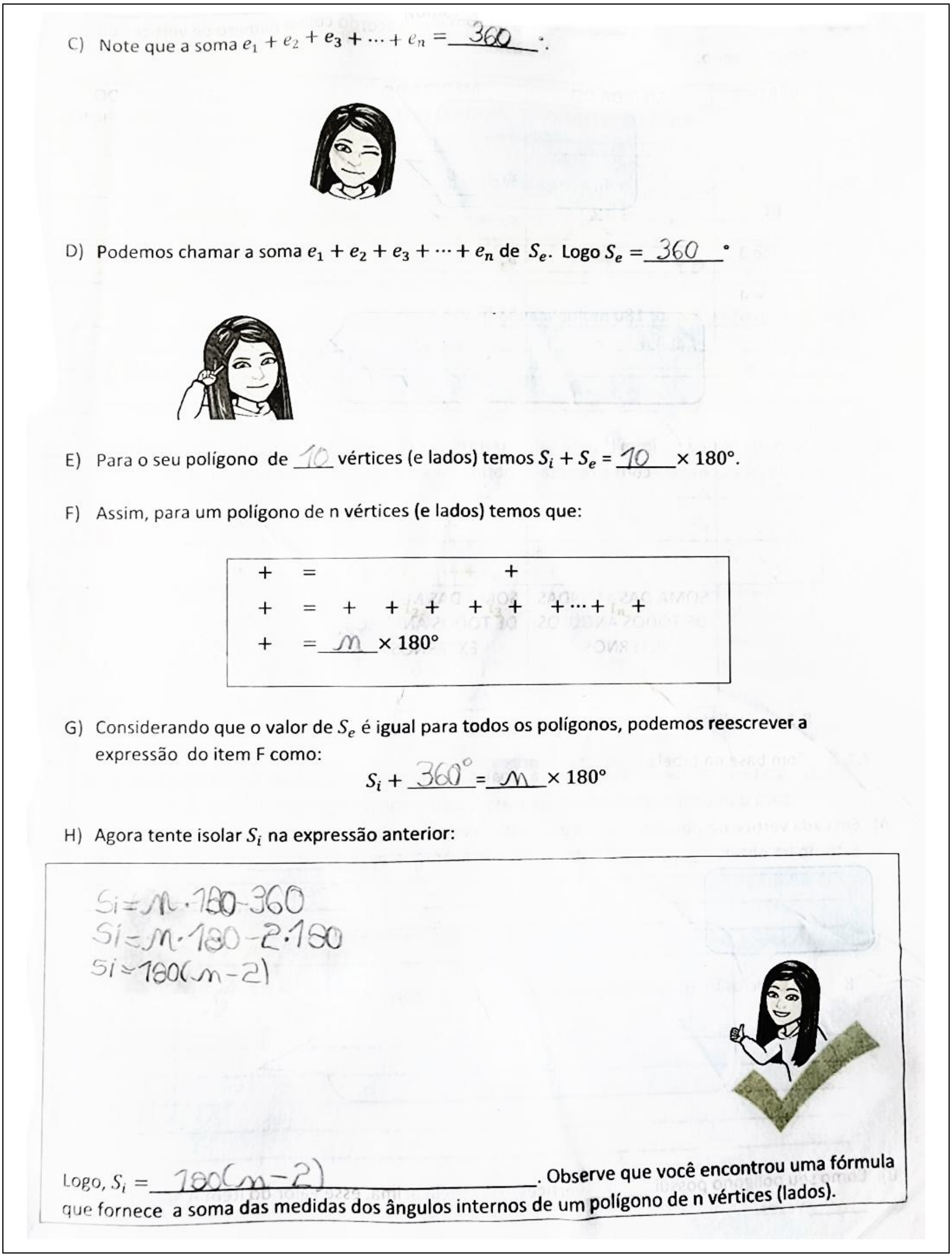
Alguns alunos apresentaram dificuldades em isolar o valor de Si. Antes de interferir diretamente, a professora solicitou que os estudantes discutissem com seus pares, relendo o que havia sido solicitado na apostila. No entanto, percebeu-se que a turma estava ficando desanimada e frustrada por não entender o que era necessário fazer, com vários alunos perguntando à professora o que exatamente era esperado.

Nesse ponto, a pesquisadora copiou a equação no quadro, circulando o valor de Si e explicando que o objetivo era encontrar uma expressão que permitisse calcular esse valor. A professora então percebeu que a dificuldade estava relacionada ao fato de que, no ano anterior, os alunos não haviam consolidado o conteúdo sobre equações. Consequentemente, eles não compreendiam o conceito de "isolar" o valor desejado. Para facilitar, a professora fez uma pequena retomada de equações de primeiro grau no quadro, utilizando o termo "isolar" a incógnita, com a finalidade de ajudar os alunos a progredirem na atividade.

Após um momento de reflexão e discussões entre os alunos, começaram a surgir algumas tentativas, como Si = 180(n - 2) + 360. Foi destacado que estavam muito próximos, mas havia um erro. Aos poucos, a resposta correta começou a aparecer, sinalizando que os alunos estavam compreendendo o conceito. Outro erro observado foi que alguns alunos substituíram 360 por 2 × 180, mas realizaram a multiplicação novamente, retornando ao valor inicial. Dessa forma, não identificaram que 180 seria um fator comum. Para esses casos, a professora solicitou que os alunos evitassem a multiplicação e assim percebessem a existência de um fator comum a ambas parcelas. Além disso, foi sugerido que aplicassem os conceitos de fatoração que haviam estudado recentemente, permitindo que a expressão fosse reescrita de outra forma.

A Figura 66 mostra o desenvolvimento do Aluno 14 nos itens de (C) a (H). O grupo deste aluno foi o primeiro a concluir o item (H), realizando com facilidade a fatoração e colocando-se em evidência o fator comum 180. Já para outros grupos, que não apresentaram tanta facilidade, a pesquisadora apresentou exemplos de fator comum no quadro, para que os alunos pudessem seguir o modelo e aplicar o mesmo raciocínio em suas resoluções.

Figura 66 - Respostas do Aluno 14 ao item 1.2 do (C) à (H) da atividade 7[18]



C) Note que a soma $e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n$ = 360 .

D) Podemos chamar a soma $e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n$ de S_e. Logo S_e = 360 °

E) Para o seu polígono de 10 vértices (e lados) temos $S_i + S_e$ = 10 $\times$ 180°.

F) Assim, para um polígono de n vértices (e lados) temos que:

+ = +

+ = + + + + + + ⋯ + +

+ = n × 180°

G) Considerando que o valor de S_e é igual para todos os polígonos, podemos reescrever a expressão do item F como:

S_i + 360° = n × 180°

H) Agora tente isolar S_i na expressão anterior:

Si = n · 180 - 360
Si = n · 180 - 2 · 180
Si = 180(n - 2)

Logo, S_i = 180(n - 2). Observe que você encontrou uma fórmula que fornece a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n vértices (lados).

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

[18] Os balões explicativos ao lado dos stickers não estão presentes na imagem acima devido à enchente que afetou as apostilas, causando descoloração e danos. No entanto, o conteúdo permanece legível, com ajustes de contraste aplicados para melhorar a visualização.

Após a conclusão da atividade do item (H), houve um debate com a turma sobre a fórmula deduzida para a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono. A professora destacou que, com essa fórmula, os alunos poderiam calcular esse valor para qualquer polígono convexo de “n” lados. Nesse momento, o Aluno 12 questionou se n poderia assumir o valor -1. A professora ressaltou que n representa a quantidade de lados de um polígono e devolveu a pergunta à turma: "Existe um polígono de -1 lados?". Em uníssono, a turma respondeu que não, confirmando que n não pode assumir esse valor. Seguindo essa linha de raciocínio, a professora perguntou se n poderia assumir o valor 1, e a maioria dos alunos novamente afirmou que não, embora alguns hesitaram. A professora então questionou o porquê dessa resposta e os alunos explicaram que um polígono não pode ter apenas um lado. Com base nesse mesmo argumento, a docente indagou se n poderia ser igual a 2. Desta vez, a turma respondeu de forma unânime que não, demonstrando que haviam compreendido o conceito. Para finalizar a discussão, a professora perguntou a partir de quais valores de *n* a fórmula faria sentido. A turma concluiu que o menor número de lados de um polígono é 3 e, portanto, n deve ser um número natural maior ou igual a 3, ou simplesmente maior que 2, garantindo que a fórmula tenha uma aplicação válida.

A pergunta (L) afirmava que o aluno já conhecia essa fórmula e perguntava em qual atividade ela apareceu. O Aluno 14 (Figura 67) mencionou que havia utilizado essa fórmula para calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono na página 22 da apostila, onde havia traçado as diagonais a partir de um mesmo vértice, dividindo o polígono em triângulos. Já na pergunta (J), foi questionado o significado geométrico do termo (n - 2). Como essa questão foi amplamente discutida em sala de aula, os alunos associaram essa expressão à quantidade de triângulos formados pelas diagonais de um polígono.

Por fim, a pergunta (K) questionava o motivo do valor 180 multiplicar (n - 2). De maneira objetiva, o Aluno 14 explicou que isso ocorre porque a soma das medidas dos ângulos internos de cada triângulo é igual a 180°. A última parte da atividade pediu que os alunos utilizassem a fórmula para calcular a soma das medidas dos ângulos internos do polígono do projeto inicial. Quando os alunos finalizaram a atividade, a professora solicitou que comparassem o resultado obtido com o valor calculado anteriormente. Como esperado, os alunos conseguiram obter o mesmo valor, confirmando a correção de seus cálculos.

Figura 67 - Respostas do Aluno 14 ao item 1.2 do (I) à (L) da atividade 7

I) Você já conhecia essa fórmula, não é mesmo? Em qual atividade anterior essa fórmula já apareceu?

na página 22 onde descobrimos que o núme-
ro de lados é dois a mais que o de triângulos,

J) Você consegue explicar o significado geométrico do termo (n-2)?

É a quantidade de triângulos formados.

K) E por que aparece o valor 180 multiplicando (n-2)?

Porque todos os triângulos valem 180°.

L) Use a fórmula obtida no item H para calcular a soma dos ângulos internos do polígono do seu projeto inicial e compare com o resultado obtido na segunda coluna da tabela inicial.

$Si = (10-2) \cdot 180$

ou

$SI = 180.(10-2)$

$SI = 180.8$

$SI = 1440°$

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Essa atividade foi particularmente interessante, pois os alunos construíram, de modo gradual, a fórmula que fornece a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados, utilizando os conhecimentos adquiridos ao longo da apostila. Essa abordagem permitiu que eles compreendessem profundamente esse resultado, ao invés de simplesmente memorizá-lo.

4.9 Atividade 8: polígonos regulares

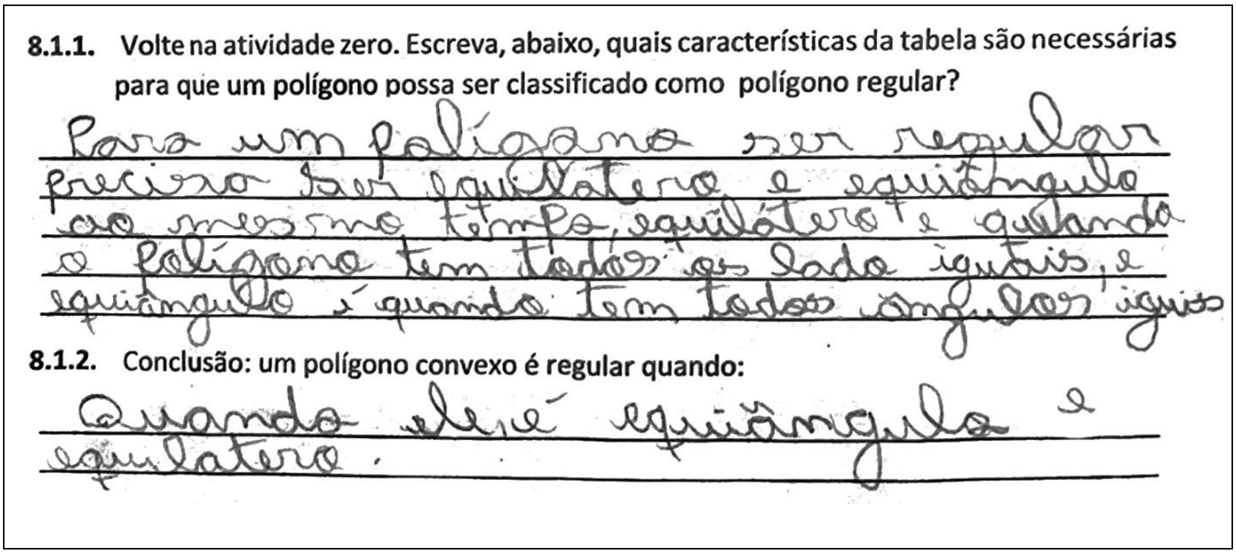
Nessa atividade o foco voltou-se ao estudo de polígonos regulares procurando sistematizar os conceitos estudados anteriormente, mas de modo a analisar diferentes estratégias para o cálculo das medidas dos seus ângulos internos.

4.9.1 Atividade 8.1: definição e construção 1

Essa atividade teve como objetivo revisitar e aprofundar o entendimento sobre as propriedades que definem um polígono regular, reforçando as características necessárias para um polígono ser classificado dessa forma. Para isso os alunos deveriam retomar a atividade inicial, em que concluíram que um polígono convexo regular deve ser equilátero e equiângulo.

A primeira pergunta feita foi: "Volte na atividade zero. Escreva, abaixo, quais características da tabela são necessárias para que um polígono possa ser classificado como polígono regular?". A pergunta do item 1. 2 traz uma conclusão: "Um polígono convexo é regular quando..." e busca que os alunos identifiquem as duas características essenciais para essa classificação: equilátero e equiângulo.

Figura 68 - Respostas do Aluno 8 aos itens 1.1 e 1.2 da atividade 8


8.1.1. Volte na atividade zero. Escreva, abaixo, quais características da tabela são necessárias para que um polígono possa ser classificado como polígono regular?

Para um polígono ser regular preciso ser equilátero e equiângulo ao mesmo tempo, equilátero é quando o polígono tem todos os lado iguais, e equiângulo é quando tem todos ângulos iguais

8.1.2. Conclusão: um polígono convexo é regular quando:

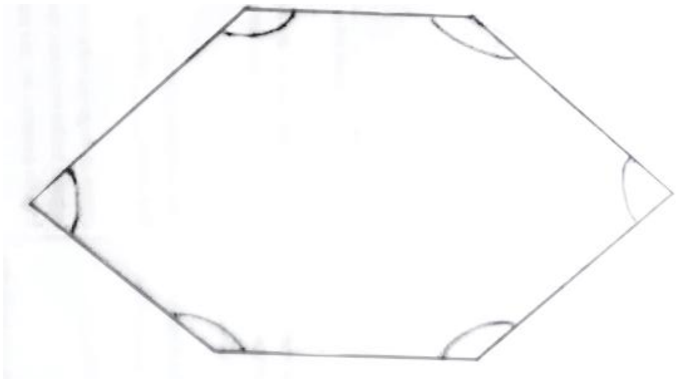
Quando ele é equiângulo e equilatero.

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

A atividade 1.3 apresenta um desafio final: "Usando régua e transferidor, construa um polígono regular com o mesmo número de vértices do seu polígono da atividade 1. Escreva o passo a passo da sua construção e seu raciocínio". Nessa etapa, os alunos são incentivados a aplicar os conhecimentos adquiridos anteriormente para construir um polígono regular de forma precisa.

Percebeu-se que alguns alunos, ao realizar suas construções, concentraram-se principalmente em garantir que os lados fossem congruentes, mas não deram a devida atenção às medidas dos ângulos. Como resultado, obtiveram polígonos equiláteros, porém não equiângulos e, portanto, esses polígonos não poderiam ser classificados como regulares. A Figura 69 mostra o polígono construído pelo Aluno 7 que exemplifica a situação descrita.

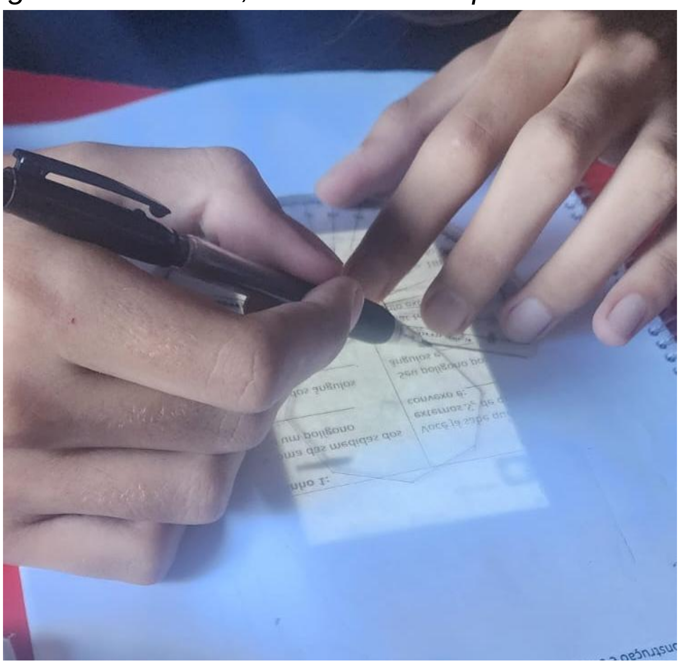
Figura 69 - Respostas do Aluno 7 ao item 1.3 da atividade 8



Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Alguns alunos perceberam que não estavam conseguindo construir um polígono regular, pois suas diversas tentativas resultaram em polígonos irregulares. Diante dessa dificuldade, um dos grupos recorreu a um truque: pesquisaram o polígono desejado em seus celulares e colocaram a folha sobre a tela para copiá-lo. Embora essa estratégia não fosse esperada, ela demonstrou a criatividade dos alunos na resolução de uma situação-problema, adaptando-se rapidamente às ferramentas disponíveis para atingir o objetivo proposto.

Figura 70 - Estratégia dos alunos 4, 12 e 16 em resposta ao item 1.3 da atividade 8

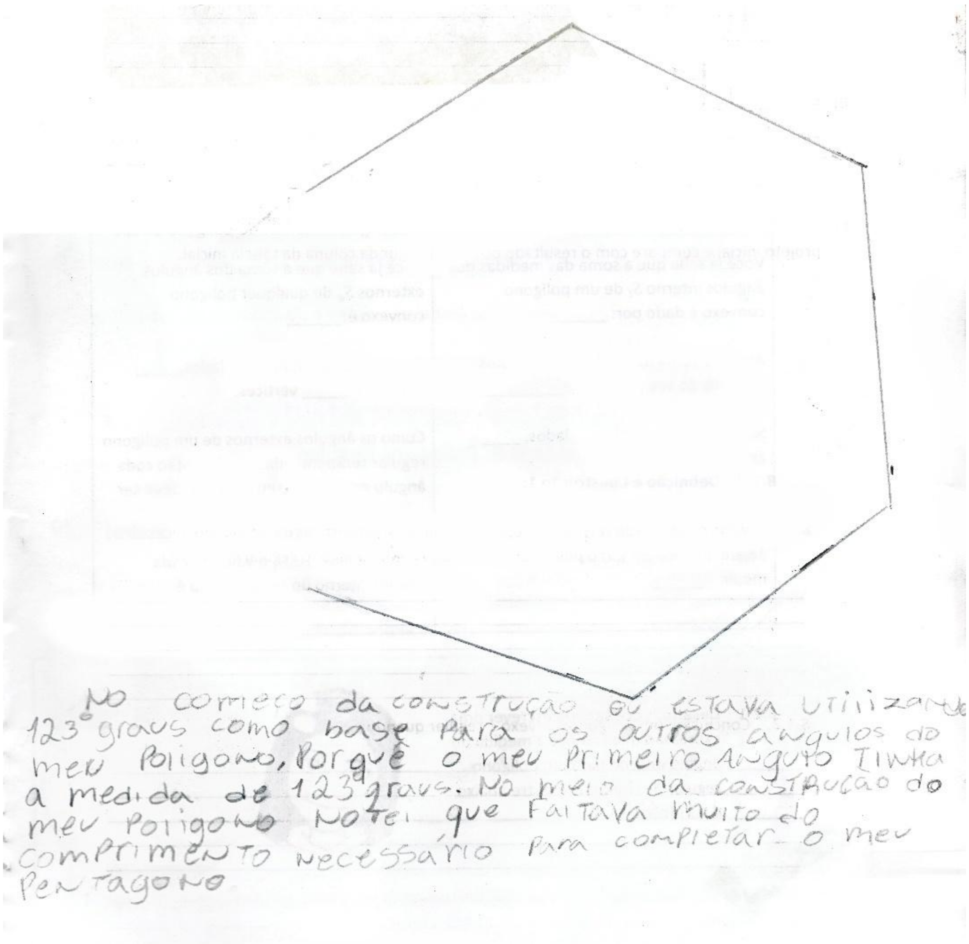


Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

A docente questionou o motivo pelo qual os alunos estavam utilizando tal estratégia e eles explicaram que já haviam tentado construir o polígono diversas vezes, mas não conseguiram que ele se encaixasse da forma esperada. A pesquisadora, então, perguntou por que seu desenho não estava resultando em um polígono regular. Os alunos responderam que escolheram uma medida para o lado, mas não sabiam o valor do ângulo interno e, apesar de tentar várias medidas de ângulos diferentes, não conseguiram obter sucesso na construção de um polígono regular.

O Aluno 2 apresentou seu polígono com lados medindo 7 cm e ângulos de 123°. Seu objetivo era construir um pentágono regular, porém, como ele observou em sua própria resposta, com essas medidas não foi possível. Isso evidenciou a importância de utilizar medidas corretas na construção do polígono para que seja classificado como regular.

Figura 71 - Resposta[19] do Aluno 2 ao item 1.3 da atividade 8



Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

---

[19] No começo da construção eu estava utilizando 123° como base para os outros ângulos do meu polígono, por que o meu primeiro ângulo tinha a medida de 123 graus. Notei que faltava muito do comprimento necessário para completar o meu pentágono.

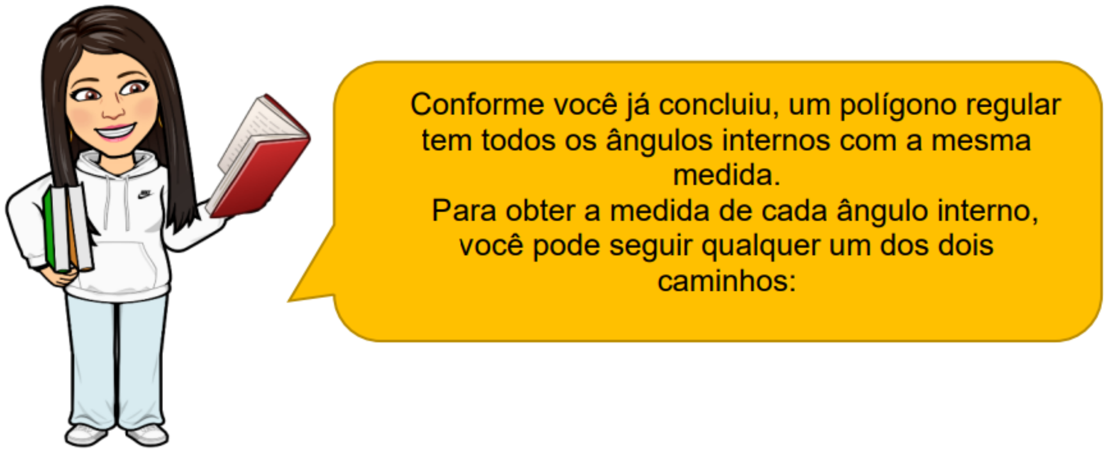
Muitos alunos solicitaram a ajuda da professora ao perceberem que as medidas escolhidas por eles não resultaram em um polígono regular, como desejavam. A professora, então, explicou que a atividade era justamente a tentativa de construção, e que não haveria problema caso houvesse alguma falha no processo. No entanto, ela incentivou os alunos a se dedicarem, refletindo sobre estratégias que viabilizassem a construção de um polígono regular, sugerindo que pensassem cuidadosamente nas relações entre lados e ângulos para atingir o objetivo.

Após a execução do item 1.3, a turma participou de um debate sobre as dificuldades encontradas na construção de um polígono regular. Como esperado, os alunos concluíram que as medidas dos lados e ângulos determinavam o formato do polígono. Durante a discussão, ficou claro que, para alcançar sucesso na construção de um polígono regular, era essencial calcular corretamente a medida do ângulo interno, pois ela garantiria que o polígono atendesse aos critérios de regularidade, além da medida do lado.

4.9.2 Atividade 8.2: refletindo sobre ângulos internos de um polígono regular

O item 2 da atividade 8 propôs uma reflexão sobre a obtenção da medida do ângulo interno de um polígono regular, oferecendo dois caminhos para os alunos calcularem essa medida, partindo do conhecimento do número de lados do polígono. Esses dois caminhos permitiam que os alunos explorassem diferentes abordagens para chegar ao mesmo resultado, aprofundando o entendimento sobre a relação entre o número de lados e a medida de cada ângulo interno de polígonos regulares.

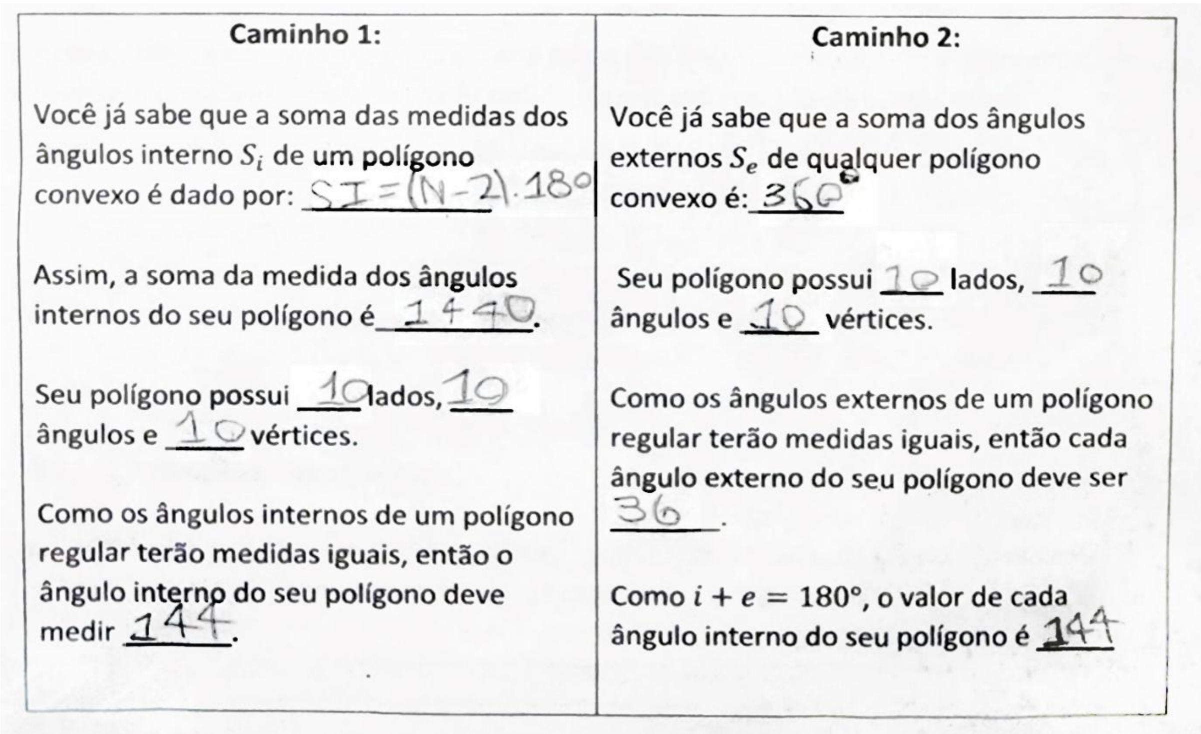
Figura 72 - Figura ilustrativa que aparece no item 2 da atividade 8



Fonte: Apostila de atividades (2023)

O primeiro caminho utiliza a soma das medidas dos ângulos internos, associando essa medida ao número de ângulos que o polígono possui. Ou seja, sabendo a soma das medidas dos ângulos internos e o fato de que todos os ângulos de um polígono regular são congruentes, é possível calcular a medida de cada ângulo interno. Já o segundo caminho se baseia na soma das medidas dos ângulos externos, que é sempre 360° para polígonos convexos. Ao dividir essa medida pelo número de ângulos (lados ou vértices), obtemos a medida de cada ângulo externo e, como o ângulo interno é suplementar ao ângulo externo, podemos descobrir a medida do ângulo interno. Esses dois métodos fornecem diferentes abordagens para obter o valor buscado nessa atividade, conforme ilustrado na figura 59, por meio das respostas do Aluno 8.

Figura 73 - Respostas do Aluno 8 ao item 2 da atividade 8

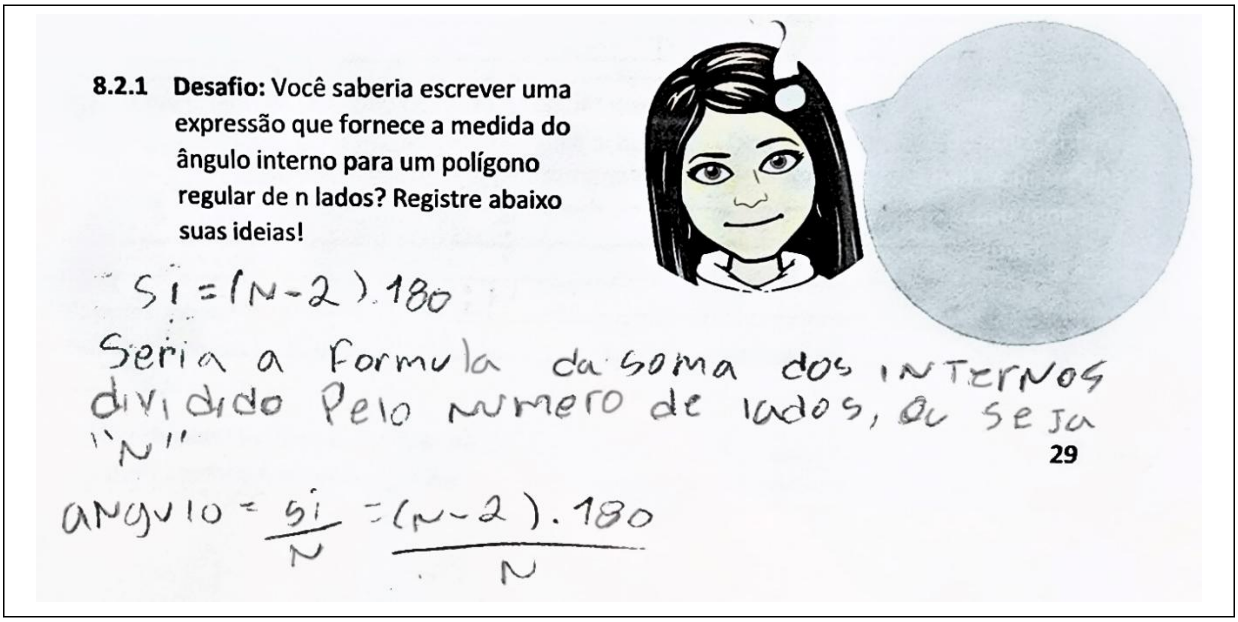


Caminho 1:	Caminho 2:
Você já sabe que a soma das medidas dos ângulos interno S_i de um polígono convexo é dado por: SI = (N-2).180°	Você já sabe que a soma dos ângulos externos S_e de qualquer polígono convexo é: 360°
Assim, a soma da medida dos ângulos internos do seu polígono é 1440.	Seu polígono possui 10 lados, 10 ângulos e 10 vértices.
Seu polígono possui 10 lados, 10 ângulos e 10 vértices.	Como os ângulos externos de um polígono regular terão medidas iguais, então cada ângulo externo do seu polígono deve ser 36.
Como os ângulos internos de um polígono regular terão medidas iguais, então o ângulo interno do seu polígono deve medir 144.	Como $i + e = 180°$, o valor de cada ângulo interno do seu polígono é 144

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

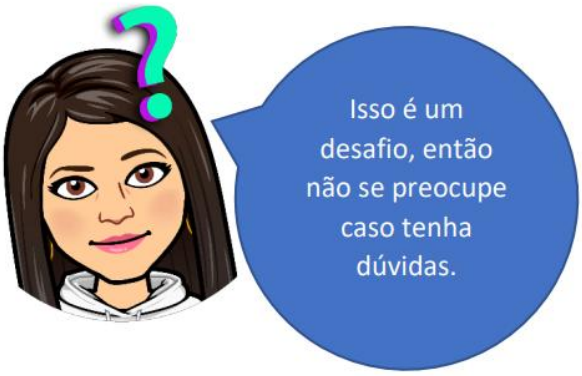
No item 2.1, foi proposto um desafio solicitando que os alunos encontrassem uma expressão que fornecesse a medida do ângulo interno para um polígono regular de n lados. Os alunos optaram por utilizar a estratégia fornecida no primeiro caminho, que consistia em dividir a expressão da soma dos ângulos internos (Si) pelo número de lados n. A figura 74 mostra o desenvolvimento do Aluno 2 nesta questão, onde ele aplicou corretamente a estratégia para calcular a medida do ângulo interno de um polígono regular.

Figura 74 - Respostas do Aluno 2 ao item 2.1 da atividade 8



Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Figura 75 - Figura ilustrativa que aparece no item 2.1 da atividade 8



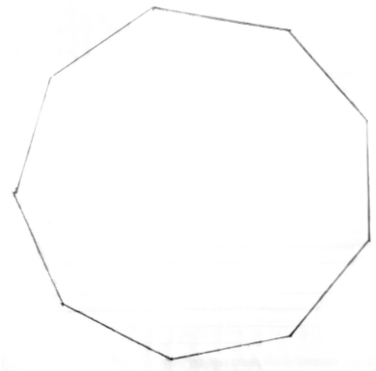
Fonte: Apostila de atividades (2023)

O sticker que ficou apagado na figura 74 está sendo apresentado na figura 75. Ele traz um reforço sobre o caráter desafiador da atividade. No entanto, apesar de tratar-se de um desafio, a maioria da turma conseguiu responder à questão com relativa facilidade, demonstrando que estavam compreendendo bem os conceitos relacionados aos ângulos internos de polígonos regulares.

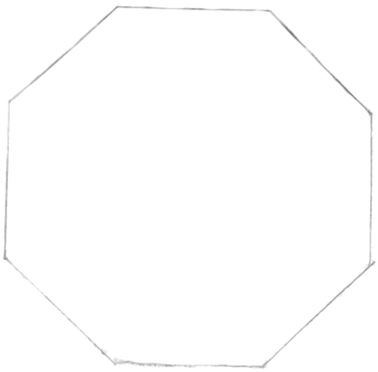
4.9.3 Atividade 8.3: 2° construção

A atividade proposta no item 1.3 da atividade 8 solicitava a construção de um polígono regular, mas sem que os alunos soubessem a medida exata do ângulo interno. Agora, tendo descoberto a medida de cada ângulo interno do seu polígono regular, a tarefa do item 3.1 pediu que os alunos refizessem a construção. Essa nova etapa exige a aplicação das conclusões obtidas na atividade anterior para garantir que o polígono construído fosse regular, com lados e ângulos congruentes. A figura 76 exemplifica algumas respostas obtidas neste item.

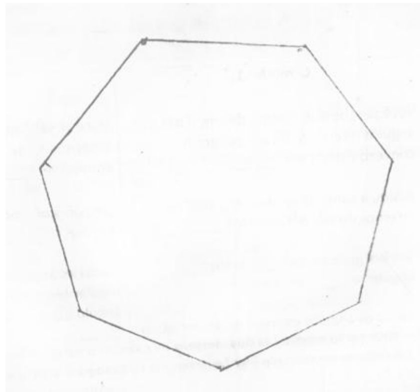
Figura 76 - Respostas ao item 3.1 da atividade 8



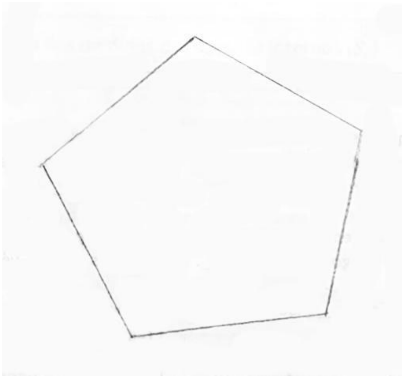
Aluno 19



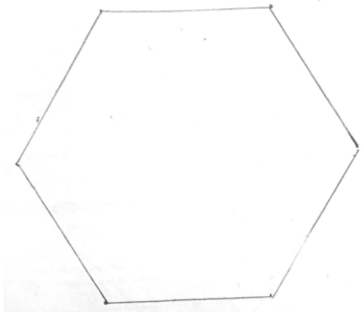
Aluno 12



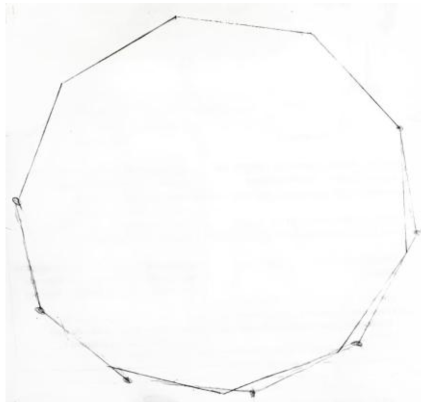
Aluno 3



Aluno 2



Aluno 5

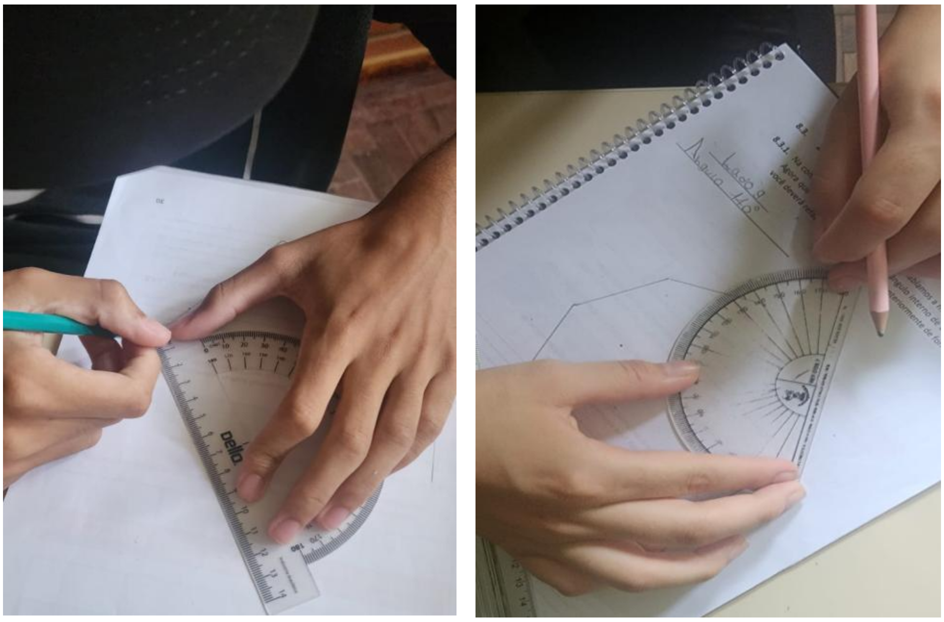


Aluno 14

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Sabendo da importância da medida do ângulo interno, os alunos iniciaram a atividade calculando sua medida com precisão. A figura 77 mostra os alunos manuseando o transferidor com mais familiaridade, evidenciando o progresso na execução das construções geométricas. Durante a atividade, foi perceptível que os alunos demonstraram maior confiança e habilidade no uso do instrumento, aplicando os conceitos de forma eficiente e rápida, o que reforça o desenvolvimento das habilidades práticas associadas ao conteúdo teórico.

Figura 77 - Alunos 10 e 19 manuseando o transferidor

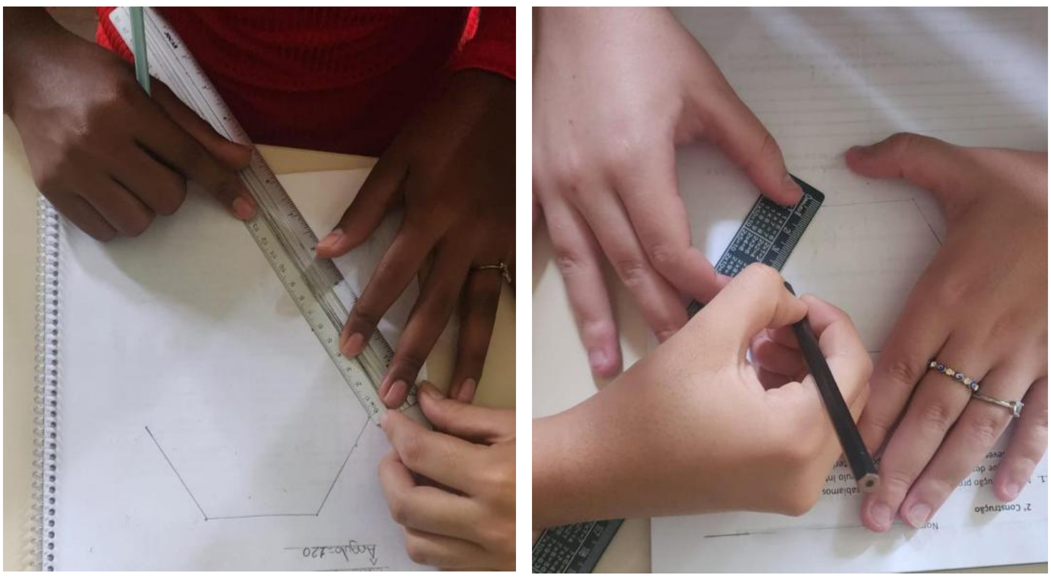


Aluno 10 *Aluno 19*

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

As imagens na figura 78 ilustram a colaboração entre os alunos, onde é possível ver a dinâmica de "três mãos" em ação: enquanto um aluno segura a régua, o outro traça as linhas, demonstrando um esforço conjunto para encontrar as soluções. Esse trabalho em equipe foi fundamental durante a atividade, promovendo uma ajuda mútua constante, em que os colegas compartilhavam ideias, verificavam as medidas e ajustavam suas construções geométricas juntos. A colaboração fortaleceu a compreensão coletiva dos conceitos criando um ambiente de aprendizado cooperativo.

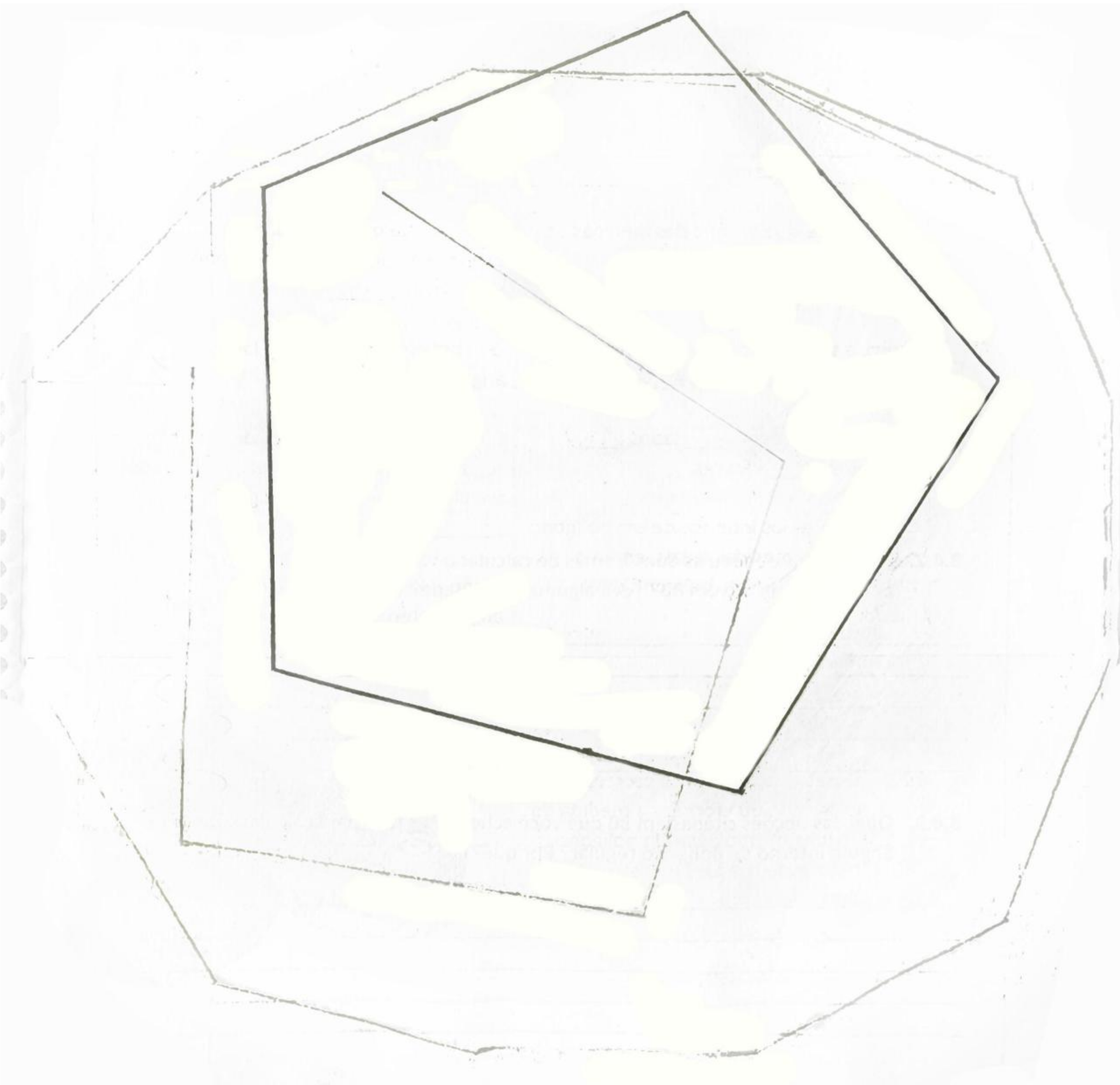
Figura 78 - Trabalho em equipe na construção geométrica



Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Alguns grupos enfrentaram dificuldades na construção da última medida de lado e ângulo do polígono, pois não se ajustava exatamente como esperado, apresentando pequenas discrepâncias. A professora abordou a questão com os alunos, explicando que, em muitos casos, pequenos erros de posicionamento da régua ou do transferidor podem ocorrer, e essas pequenas imprecisões, quando somadas, podem gerar um erro maior (perceptível) na última medida, dificultando o fechamento exato do polígono. Essa explicação ajudou os alunos a entenderem que tais variações são comuns em construções manuais.

Figura 79 - Respostas do Aluno 9 ao item 1.3 da atividade 8



Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

A professora observou que algumas construções foram apagadas devido a discrepâncias nas medidas dos ângulos e dos comprimentos dos lados, que não permitiram o fechamento correto do polígono. A figura 79 ilustra o trabalho do Aluno 9, que inicialmente tentou construir um polígono de 12 lados, mas acabou apagando o desenho. No entanto, devido à força dos traços, o polígono ainda pode ser parcialmente visualizado. Como o grupo era responsável por dois polígonos, decidiram refazer a construção, optando por um polígono com um menor número de lados: um pentágono, que aparece na parte central da figura.

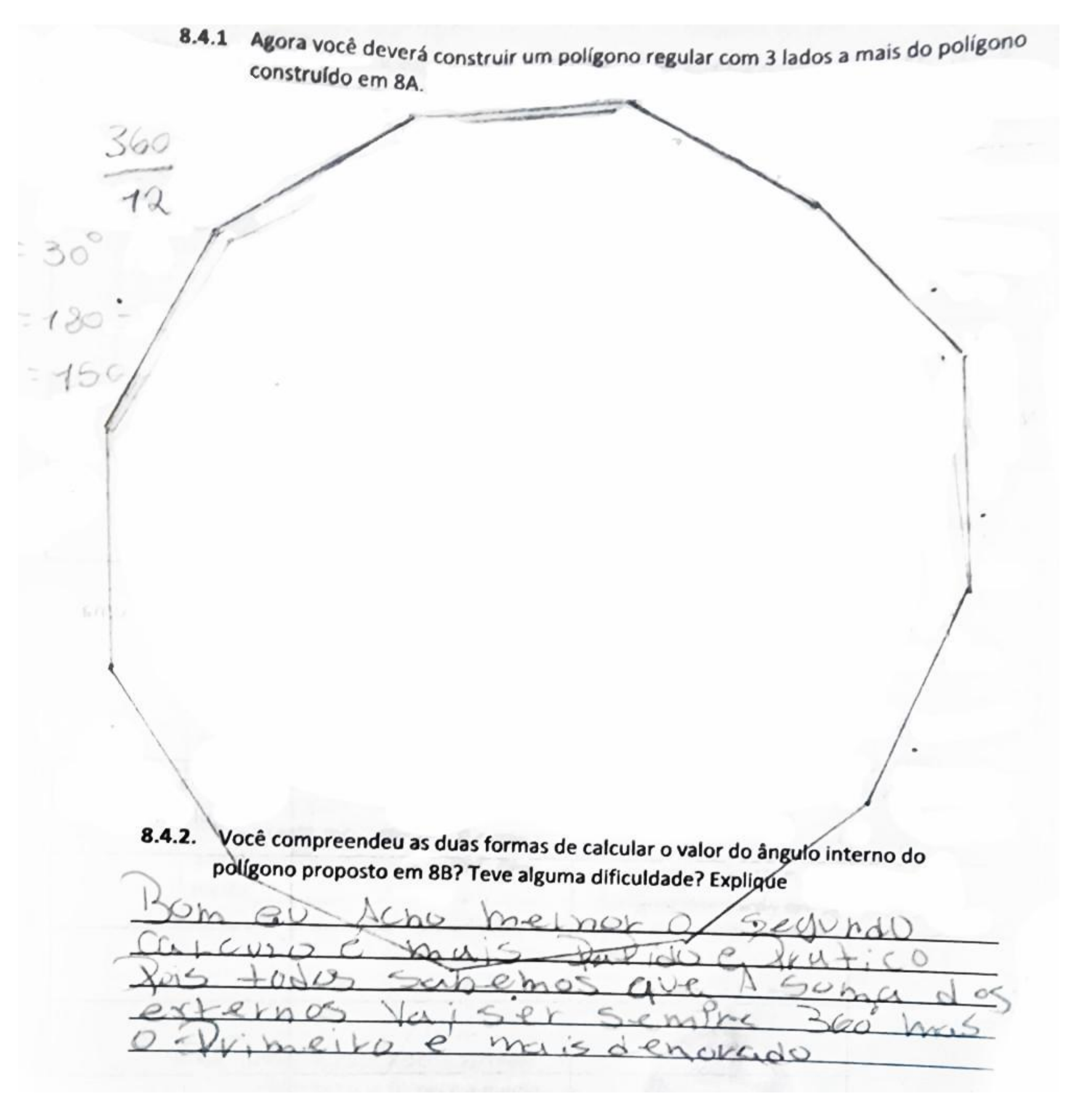
4.9.4 Atividade 8.4: 3ª construção

A atividade propõe uma terceira construção: um polígono regular com três lados a mais do que o polígono anterior. O objetivo dessa etapa era que os alunos utilizassem o conhecimento adquirido até o momento para solucionar o problema apresentado. Além disso, a atividade buscava observar o método que cada aluno empregaria para calcular os ângulos internos desse novo polígono. A intenção era verificar como os alunos aplicariam as fórmulas e estratégias aprendidas nas atividades anteriores, consolidando a compreensão sobre a relação entre o número de lados e os ângulos internos de um polígono regular.

Um problema observado durante a execução desta atividade foi que os polígonos de oito e dez lados, durante o processo de construção, acabaram se transformando em polígonos de 11 e 13 lados, respectivamente. Como resultado, as medidas dos ângulos internos e externos se tornaram não inteiras, o que aumentaria a dificuldade de realizar a construção com precisão utilizando régua e transferidor. Para estes casos a professora propôs outra quantidade de lados (10 e 12 respectivamente), com a finalidade de facilitar a construção.

Por fim, o espaço reservado para a execução dessa construção poderia ter sido maior, já que, em algumas situações, os desenhos ultrapassaram os limites designados. Um exemplo disso foi o caso do Aluno 19, conforme ilustrado na figura 80, em que a construção acabou extrapolando o espaço disponível, dificultando a visualização e a organização.

Figura 80 - Respostas do Aluno 19 ao item 4.1 da atividade 8



8.4.1 **Agora você deverá construir um polígono regular com 3 lados a mais do polígono construído em 8A.**

360
12
= 30°
= 180 -
= 150

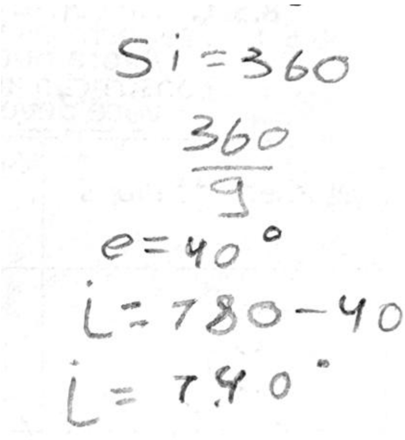
8.4.2. **Você compreendeu as duas formas de calcular o valor do ângulo interno do polígono proposto em 8B? Teve alguma dificuldade? Explique**

Bom eu Acho melhor o segundo calculo e mais Rapido e pratico pois todos sabemos que A soma dos externos vai ser sempre 360 mas o primeiro e mais demorado

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Durante essa construção, os alunos demonstraram maior familiaridade com o conteúdo abordado, mostrando mais confiança e agilidade na execução da atividade. A professora solicitou que, ao lado do desenho, os alunos indicassem o cálculo utilizado para descobrir a medida do ângulo interno. Foi comum observar cálculos bem elaborados, nos quais os alunos apresentaram um bom desenvolvimento do raciocínio utilizado. A figura 81 exemplifica o cálculo apresentado por um dos alunos nessa construção, evidenciando o entendimento progressivo do conceito trabalhado.

Figura 81 - Respostas do Aluno 13 ao item 4.1 da atividade 8



Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

A pergunta do item 4.2 buscava verificar se os alunos haviam compreendido as duas formas apresentadas para calcular o valor do ângulo interno do polígono proposto no item 2 da atividade 8. Além disso, a pergunta procurava identificar possíveis dificuldades enfrentadas pelos alunos durante o processo e incentivá-los a explicar suas respostas, promovendo uma reflexão sobre os métodos utilizados e seu entendimento.

Para essa pergunta, muitos alunos relataram que não tiveram dificuldades em entender ambos os caminhos. O Aluno 12 afirmou: "Entendi bem, só tive um pouco de dificuldade em lembrar de todas as fórmulas e em aprender no começo." O Aluno 13 escreveu: "Eu entendi os dois jeitos, mas o 2° jeito é mais fácil". Já o Aluno 17 destacou: "Sim, eu tive mais dificuldade no primeiro caminho, ele é muito complicado. Já o segundo caminho é mais prático, é só pegar 360 ÷ 6 = 60 e depois 180 - 60 = 120”. O Aluno 18 comentou: "Sim, eu tive mais dificuldade no 1º porque a divisão era maior e mais complicada".

A pergunta do item 4.3 da atividade 8 tinha como objetivo entender qual das duas opções apresentadas os alunos consideraram mais fácil para calcular a medida do ângulo interno de um polígono regular. Ao pedir que os alunos justificassem suas escolhas, a atividade buscava incentivar uma reflexão sobre os métodos utilizados e o raciocínio por trás da preferência por um deles, permitindo que a pesquisadora identificasse qual abordagem foi mais intuitiva ou eficiente para os alunos.

Ao todo, 17 alunos responderam a essa pergunta, sendo que 14 deles afirmaram que o segundo caminho era o mais fácil, enquanto 3 preferiram o primeiro caminho. O Aluno 2 escreveu: "Achei que as duas opções têm o mesmo nível de dificuldade, porém eu prefiro o caminho 2 por ser mais rápido". O Aluno 10 respondeu: "Eu achei o caminho 2 mais fácil, já que é só dividir 360 (360 ÷ n) pelo número de lados". Já o Aluno 12 afirmou: "O caminho 2, já que é mais prático, rápido e mais fácil de lembrar". Esses comentários destacam que a simplicidade e a rapidez do segundo método foram os fatores decisivos para a maioria dos alunos.

4.9.5 Atividade 8.5: generalização

Nesta atividade, os alunos são convidados a preencher as tabelas com base nas medidas obtidas na construção do polígono regular realizada anteriormente. O objetivo é levar o aluno a observar e generalizar as relações entre o número de lados e as medidas dos ângulos internos dos polígonos regulares. A intenção é que, ao completar a tabela, os alunos identifiquem padrões que possam ser generalizados.

Em cada item são apresentadas duas tabelas: uma com o cabeçalho representado na cor azul e outra na cor laranja. Nestas tabelas, utiliza-se as mesmas estratégias apresentadas no item 2 da atividade 8, assim o aluno obterá a generalização de ambas.

O item 5.1 da atividade 8 solicitava que os alunos preenchessem as tabelas utilizando os dados da última construção que fizeram. A figura 82 exemplifica uma das respostas obtidas na pesquisa.

Figura 82 - Respostas do Aluno 5 ao item 5.1 da atividade 8

8.5.1 Preencha as tabelas a seguir de acordo com as medidas do polígono proposto na construção anterior :

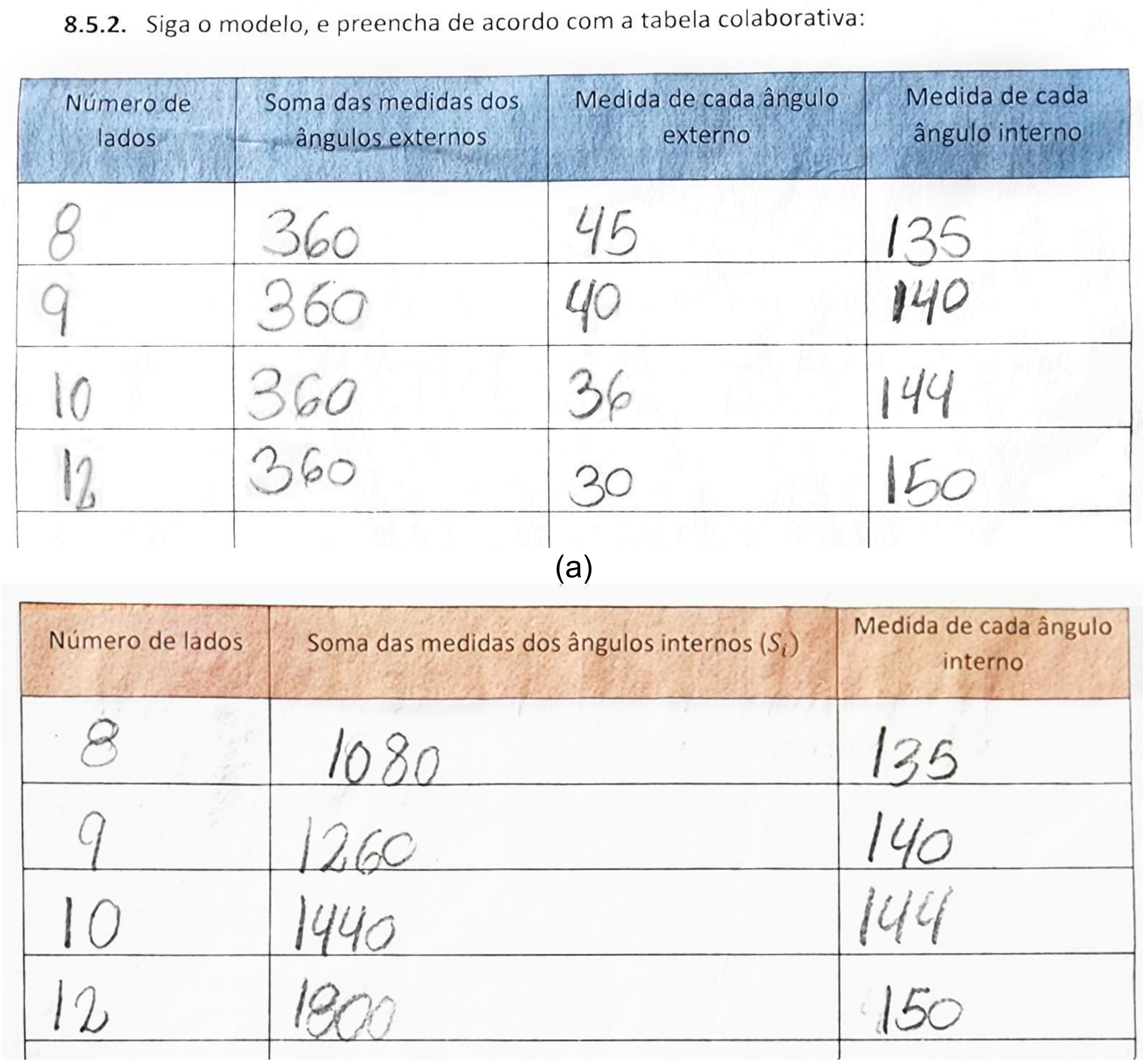
Número de lados	Soma das medidas dos ângulos externos	Medida de cada ângulo externo	Medida de cada ângulo interno
9	360	40	140

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno
9	1.260	140

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Assim como feito anteriormente, os alunos foram convidados a preencher outras duas tabelas colaborativas com os dados obtidos na questão anterior, debatendo e dialogando com seus colegas. Posteriormente, eles copiaram os dados dos demais grupos em suas apostilas, como mostra a figura 83.

Figura 83 - Respostas do Aluno 5 ao item 5.2 da atividade 8



8.5.2. Siga o modelo, e preencha de acordo com a tabela colaborativa:

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos externos	Medida de cada ângulo externo	Medida de cada ângulo interno
8	360	45	135
9	360	40	140
10	360	36	144
12	360	30	150

(a)

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno
8	1080	135
9	1260	140
10	1440	144
12	1800	150

(b)

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

Como o processo de obter os dados que completavam as tabelas já era familiar aos alunos para um número determinado de lados, foi proposto que generalizassem esses conceitos para um polígono com *n* lados. O item 5.3 desafiava os alunos a aplicar o que já haviam aprendido sobre a soma das medidas dos ângulos externos, a medida de cada ângulo externo e a medida de cada ângulo interno, mas agora utilizando *n* como uma variável. Esse exercício de generalização permitiu a extrapolação dos casos particulares para uma abordagem mais ampla. A figura 84 mostra as respostas do Aluno 5 neste item.

Figura 84 - Respostas do Aluno 5 ao item 5.3 da atividade 8

8.5.3. O que acontece com as tabelas acima para um número de lados n?

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos externos	Medida de cada ângulo externo	Medida de cada ângulo interno
n	360	$\frac{360}{n}$	$180 - \frac{360}{n}$

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno
n	$180(n-2)$	$\frac{180(n-2)}{n}$

Fonte: Dados obtidos na pesquisa (2023)

O item 5.4 da atividade 8 solicitava que os alunos explicassem, com suas próprias palavras, como foi possível chegar às expressões gerais das tabelas anteriores. O objetivo é que os alunos refletissem sobre o processo de generalização, destacando os passos seguidos para deduzir as fórmulas a partir de casos específicos. Eles deveriam mencionar como, a partir da observação dos padrões nos polígonos regulares com um número determinado de lados, foi possível estender esses conceitos para n lados, utilizando o raciocínio lógico e matemático aprendido durante as atividades. Essa pergunta verificou se os alunos compreenderam a transição de exemplos aritméticos e geométricos para uma generalização algébrica.

As respostas dos alunos à pergunta 5.4 mostraram como eles utilizaram diferentes abordagens para calcular a medida dos ângulos internos dos polígonos. O Aluno 1 explicou que “em uma a gente usou a fórmula e trocou n pelo número de lados e fez. Na segunda a gente pegou 360 e dividiu pelo número de lados”. O Aluno 2 mencionou que “no caminho 1 nós apenas dividimos 360 pelo número de lados, pegamos o resultado e subtraímos de 180, o resultado são os ângulos internos”. O Aluno 7 afirmou: “a gente usou fórmulas passadas e dividimos depois. A segunda parte é mais complicada pois deveríamos lembrar da fórmula, o que é difícil”. O Aluno 14 escreveu: “utilizando a expressão 180.(n - 2) para resolver a tabela laranja, já o azul foi utilizado 360”. Já o Aluno 17 mencionou que “a gente usou a fórmula passada na segunda-feira e a gente dividiu por n, já na primeira a gente usou a outra fórmula e ao invés da gente usar o número utilizamos o n”. Por fim, o Aluno 19 comentou que “na tabela azul já sabíamos que a soma dos externos era 360 graus então dividimos por n e depois fizemos o 180 menos 360 dividido por n e no laranja a mesma coisa o que muda é fazer (n - 2) e dividir por n".

Observa-se que, embora o Aluno 7, tenha apontado dificuldade em lembrar a fórmula $(n-2).180$, utilizada no primeiro caminho, em geral, os alunos se mostraram confiantes na utilização de fórmulas e operações com n lados, diferenciando claramente os métodos aplicados, com o uso de 360 para a soma das medidas dos ângulos externos e 180.(n - 2) para a soma das medidas dos ângulos internos. Isso demonstra um bom entendimento das estratégias envolvidas, apesar das dificuldades em memorização mencionadas.

O item 5.5 da atividade 8 buscou que os alunos refletissem sobre qual das formas apresentadas para calcular a medida do ângulo interno de um polígono regular é mais simples de ser lembrada. Eles deveriam explicar sua escolha com base na clareza, facilidade de uso ou eficiência do método, considerando qual abordagem foi mais intuitiva para eles. Ao responder, os alunos poderiam comparar os dois caminhos abordados anteriormente (o uso da soma dos ângulos internos dividida pelo número de lados ou a dedução a partir dos ângulos externos), justificando qual processo seria mais fácil de memorizar e aplicar.

As respostas dos alunos ao item 5.5 revelaram uma preferência geral em partir da soma das medidas dos ângulos externos para obter a medida do ângulo interno de um polígono regular. O Aluno 7 comentou que "a primeira pois apenas dividimos e não é necessário lembrar da fórmula. Acho mais fácil". O Aluno 10 destacou que "a primeira porque é ela é mais lógica do que a segunda, a laranja". O Aluno 17 também preferiu a primeira abordagem, segundo ele: "eu achei a primeira fórmula mais fácil porque tem menos divisão e se alguém perguntar é mais fácil de explicar". De forma semelhante, o Aluno 18 escreveu: "eu acho que a primeira é mais fácil. Porque a segunda você tem que lembrar de toda fórmula e na minha opinião é mais complicado". Já o Aluno 19 comentou: "bom, achei o azul porque todos sabemos que é 360 graus e é divisão e somar menos 180 graus é mais prático do que o outro, em minha opinião".

De acordo com as respostas dos alunos, percebeu-se uma preferência pela forma que utiliza o ângulo externo para encontrar o ângulo interno. Ao todo, 12 alunos optaram por esse método de cálculo, enquanto apenas 2 preferiram a outra abordagem, e 5 não responderam ou não expressaram preferência por um dos métodos. Nas respostas, a preferência pelo cálculo a partir do ângulo externo foi associada à sua simplicidade, envolvendo uma “divisão mais direta” e eliminando a necessidade de memorizar uma fórmula específica, além de se mostra mais lógica e fácil de explicar.

Esse exercício serviu como fechamento da sequência de atividades, consolidando o raciocínio de que, independentemente do número de lados, existem expressões algébricas que fornecem a medida de cada ângulo interno que se aplicam a qualquer polígono regular. Dessa forma, a obtenção dessas expressões para um polígono de n lados reforçou a capacidade dos alunos de generalizar as fórmulas e relações matemáticas aprendidas durante esta sequência didática que explorou a integração de atividades aritméticas, geométricas e algébricas como possibilidade para a construção de generalizações em matemática.

5 CONCLUSÕES

Esta pesquisa teve como objetivo geral analisar de que forma uma sequência didática pautada na integração de atividades aritméticas, geométricas e algébricas pode favorecer a construção de generalizações em matemática. Para tanto, foi desenvolvida uma sequência didática com atividades de caráter aritmético, geométrico e algébrico para o estudo de polígonos e de relações associadas aos seus ângulos internos e externos. A sequência foi aplicada a uma turma de estudantes do 8º ano no ensino fundamental de uma escola no município de Canoas. O intuito da aplicação da sequência didática foi avaliar o seu impacto na dinâmica da sala de aula especialmente no que se refere à construção de generalizações acerca dos conteúdos propostos.

Essa experiência revelou desafios significativos na busca por equilíbrio entre orientar os alunos e incentivá-los a serem autônomos e protagonistas no processo de aprendizagem. A abordagem adotada buscou criar um ambiente propício ao aprendizado ativo, promovendo o desenvolvimento de habilidades cognitivas e socioemocionais, de autoconfiança dos alunos ao realizarem cada atividade proposta. Essa experiência destaca a importância de estratégias pedagógicas que estimulem a participação dos alunos e os inspirem a superar suas inseguranças. Além disso, apontou também para a carência no ensino de geometria ao longo do ensino fundamental, conforme trazido ao longo do referencial teórico deste texto. Portanto, a atividade representou uma oportunidade de aprendizagem e não apenas de retomada.

Ainda, o desenvolvimento da sequência didática evidenciou os benefícios de desenvolver uma prática pedagógica pautada na investigação com, ao incentivar as discussões e fazer perguntas direcionadas, o professor ajudando os alunos a explorar, descobrir e a chegar à compreensão dos conceitos em questão. O objetivo é criar um ambiente propício para a reflexão e o pensamento crítico, tornando o aprendizado mais significativo e permitindo que os alunos se sintam mais engajados e envolvidos na descoberta dos conceitos matemáticos. O professor desempenha um papel fundamental ao fazer perguntas que estimulem os alunos a pensar criticamente e a fazer conexões entre os conceitos matemáticos.

Uma dificuldade observada ao longo das atividades foi o fato de muitos alunos não estarem acostumados a ler os enunciados de forma independente. Inicialmente, os estudantes demonstraram uma tendência a querer tudo "mastigado", solicitando explicações detalhadas e diretas sobre cada etapa da atividade, sem se dedicarem à leitura e compreensão individual dos textos. No entanto, ao longo do processo, houve um esforço consciente para que eles percebessem a importância de ler e refletir sobre o que estava sendo proposto. Aos poucos, os alunos começaram a aceitar a necessidade de desenvolver essa autonomia, realizando a leitura atenta dos enunciados, o que é essencial para a construção de um raciocínio crítico. Esse aprendizado foi sendo gradualmente incorporado, com os estudantes passando a encarar os enunciados não apenas como instruções, mas como parte importante do desenvolvimento das atividades. A experiência mostrou que, ao incentivá-los a ler e interpretar por conta própria, eles foram adquirindo maior confiança e independência em suas aprendizagens.

Observou-se a importância da escrita em matemática, tanto como estímulo para o raciocínio dos estudantes quanto como uma ferramenta para o professor acompanhar o processo de aprendizagem. Quando os alunos são incentivados a escrever sobre seus raciocínios, eles passam a organizar melhor suas ideias, articulando os conceitos matemáticos de forma mais clara e compreensível. Isso também permite que o professor obtenha informações detalhadas sobre o progresso de cada aluno, identificando onde estão as dificuldades e os avanços, além de possibilitar um acompanhamento mais individualizado do processo de aprendizagem. Esta habilidade é algo que pode (e deve) ser mais desenvolvida nos estudantes, afinal percebe-se que ainda é necessário aprimorar a capacidade de expressar seus raciocínios matemáticos de forma compreensível e estruturada.

Além disso, ao longo das atividades, foi possível observar que entender o conceito por trás das fórmulas e estratégias é essencial, em vez de simplesmente confiar no que é dito por outra pessoa. Esse pensamento crítico aplicado à matemática pode ser associado à importância de não acreditar cegamente em informações recebidas, algo que ressoa diretamente com a questão das fake news. Assim como na matemática, em que é necessário verificar e entender os cálculos e conceitos, no dia a dia, é importante que os estudantes desenvolvam o hábito de questionar, verificar e refletir sobre as informações que recebem, promovendo um aprendizado mais consciente e uma postura crítica frente à desinformação. Como dito anteriormente o cenário para investigação (Skovsmose, 2000) oferece essa oportunidade, pois ensina os alunos a não apenas resolverem problemas matemáticos, mas também a questionarem as informações e a buscarem explicações consistentes para os fenômenos. Destaca-se que é importante caminhar entre os diferentes ambientes de aprendizagem, nesse trabalho pode-se explorar desde o ambiente do exercício na atividade zero da sequência didática e avançar até os cenários para investigação nas demais atividades, ambos no contexto da matemática pura.

Ainda nas atividades exploratórias, observou-se que os silêncios, as perguntas e as mudanças de rota durante as aulas revelaram um envolvimento autêntico dos alunos no processo de investigação, o que já era esperado segundo o referencial teórico. Esses momentos de pausa e questionamento não foram meras interrupções, mas sim sinais de que os alunos estavam ativamente refletindo e internalizando os conceitos abordados. A mudança de rota, quando necessária, demonstrou a flexibilidade e adaptabilidade da abordagem investigativa, permitindo que o ensino se ajustasse ao ritmo e às necessidades do grupo. Além disso trouxe para a professora o desafio de se adaptar as atividades propostas que pelo seu caráter aberto exigiram flexibilidade na condução das atividades, o que também apresentou um momento de aprendizado docente.

Essas atividades exploratórias vão além da simples memorização de fórmulas matemáticas. Através da experimentação, exploração e investigação, os alunos podem ser protagonistas de seu aprendizado, desenvolvendo uma maior compreensão dos conceitos e se tornando aprendizes ativos e autônomos. Com essa abordagem, busca-se prepará-los para enfrentar desafios matemáticos futuros com confiança e habilidade. Logo, essas atividades são uma maneira interativa de ensinar matemática, cultivando a curiosidade, a autonomia e o pensamento crítico. Através da exploração matemática, os alunos preparam-se para enfrentar novos desafios e para continuarem sua jornada de aprendizado ao longo da vida.

Durante o trabalho em grupos, surgiram desafios intrigantes relacionados a conceitos matemáticos que estimularam os alunos a questionarem suas próprias interpretações. Diante dessas dúvidas, a pesquisadora adotou uma postura orientadora, em vez de fornecer respostas diretas, incentivando a autonomia e o engajamento ativo dos estudantes. Essa abordagem pedagógica promoveu o desenvolvimento do pensamento crítico, pois os alunos foram desafiados a validar suas próprias soluções e explorar diferentes caminhos para compreender os conceitos. Além disso, o trabalho colaborativo permitiu o fortalecimento de habilidades sociais, como a cooperação e o respeito às ideias do outro, bem como a prática de competências cognitivas, como a argumentação e a resolução conjunta de problemas. Essa experiência reforça o papel do professor como facilitador do aprendizado, criando um ambiente investigativo onde os alunos se tornam protagonistas de sua aprendizagem.

No município de Canoas, além das avaliações já citadas, como o ENEM e o SAEB, existem o SAERS (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Rio Grande do Sul) e o Canoas Avalia (parte do Sistema de Avaliação Municipal de Canoas - SAEM), que trazem expectativas em relação aos conteúdos a serem abordados, o que pode tornar a implementação de práticas investigativas um pouco mais complexa (principalmente devido ao tempo de preparação que essas práticas exigem dos professores e à sua natureza, que demanda mais tempo para ser explorada pelos alunos em vez de simplesmente apresentada). Ainda assim, cabe ressaltar que essas práticas promovem competências como o pensamento crítico, a resolução de problemas e a autonomia, habilidades valorizadas na BNCC, cabendo ao professor buscar um equilíbrio entre as exigências curriculares e uma abordagem que incentive essas competências.

Acredita-se que esta proposta colaborou para o desenvolvimento do pensamento lógico e da capacidade de justificar respostas com base em evidências e argumentos sólidos. Ao analisar, comparar e fazer novas conexões, os alunos se tornaram mais independentes e preparados para enfrentar desafios matemáticos variados. Encorajá-los a experimentar, levantar dúvidas e fazer conjecturas é fundamental para o desenvolvimento de habilidades de pensamento crítico e de resolução de problemas. Ao criar um ambiente que estimula a curiosidade e o pensamento criativo, espera-se que os alunos se sintam mais motivados a investigar e aprofundar seus conhecimentos em matemática. Isso será facilitado pelo compartilhamento de descobertas e ideias em um ambiente colaborativo, onde todos têm a oportunidade de aprender uns com os outros.

Um exemplo desse processo foi o exercício que solicitou aos estudantes a definição e representação do ângulo externo sem explicá-lo previamente, estimulando o raciocínio criativo dos alunos com base na nomenclatura “ângulo externo”. A atividade gerou questionamentos, como “por que a professora solicita algo sem explicar antes?”, refletindo a angústia dos alunos pela “resposta certa”. A pesquisadora os tranquilizou, incentivando-os a explorar o conceito por conta própria. Após a definição ser trabalhada pela docente, um estudante perguntou à professora se ela já sabia, ao fazer a pergunta, qual seria a resposta dos alunos. Esse momento revelou duas coisas importantes: nem sempre o que acreditamos é correto, e a sala de aula é um espaço de aprendizado —

e, por que não, de erros também. Afinal, é comum que alunos permaneçam em silêncio por receio de errar, e essa experiência mostrou que permitir-se arriscar e errar faz parte do processo, inclusive é uma oportunidade da turma discutir e investigar a validade de conjectura.

Observou-se um maior envolvimento dos alunos durante a aplicação da proposta didática em comparação com outras aulas ministradas pela pesquisadora. Alunos considerados medianos tiveram a oportunidade de se destacar, demonstrando momentos de muita autoconfiança e satisfação pessoal. Um exemplo marcante foi o do Aluno 2, que, ao explicar e debater com o colega, afirmou: “eu sou de exatas”, seguida de gargalhadas. Enquanto anteriormente, este mesmo aluno demonstrava baixo desempenho e pouco interesse nas aulas.

O Aluno 19 apresentou uma série de respostas e perguntas que não haviam sido previstas pela professora, como a questão sobre o ângulo externo de um polígono côncavo. Demonstrou ainda uma curiosidade genuína em compreender, mesmo após diversas atividades realizadas, por que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°. Embora ele tivesse entendido o conceito ao perceber que o ‘encaixe dos ângulos’ dos triângulos de MDF e dos triângulos construídos pelos colegas formavam semicírculos, além de ter somado os valores e explorado o recurso de geometria interativa do GeoGebra (onde movimentou os vértices do triângulo), ele continuava questionando: ‘Mas por que 180°? Foi Deus que inventou isso?’ Esse envolvimento e curiosidade destacam como o aluno pôde se conectar com a matemática de uma maneira exploratória, enxergando a beleza e a profundidade dos conceitos matemáticos.

Durante as atividades, os alunos 4, 5 e 16 cujas especificidades foram trazidas ao longo da metodologia do trabalho demonstraram avanços significativos em relação ao seu desenvolvimento e maior envolvimento nas tarefas propostas. O Aluno 4 apresentou maior comprometimento, buscando realizar as atividades de forma mais independente, chegando a abrir a apostila sozinho. A professora adotou uma abordagem mais flexível, permitindo que o aluno tivesse a liberdade de participar ou não das atividades. Embora o aluno ainda escrevesse frases curtas, foi a primeira vez que ele conseguiu completar tantos exercícios. Na atividade em que precisou recortar um triângulo e separar os ângulos, o aluno necessitou da ajuda da docente para fazer os recortes, mas mostrou interesse e disposição para concluir a tarefa sozinho. Esse avanço demonstra como a abordagem investigativa, ao dar espaço para o aluno explorar o conteúdo no seu ritmo, pode incentivar uma participação mais autônoma e engajada.

O Aluno 5, por sua vez, não apenas desenvolveu suas habilidades na língua portuguesa, mas também deu passos importantes na comunicação com os colegas, especialmente por precisar trabalhar em grupo. Esse progresso na interação social refletiu diretamente em seu desempenho nas atividades de matemática, em que ele fez avanços significativos. A visita ao campus do IFRS foi um momento especial para ele, trazendo uma sensação de alegria e motivação, o que contribuiu para seu envolvimento com o conteúdo. Já o Aluno 16, com diagnóstico de TDAH, mostrou disposição e interesse em completar as atividades de maneira independente, especialmente nas tarefas práticas, como o recorte e encaixe de polígonos. Esses exemplos destacam como a abordagem investigativa proporciona um espaço de aprendizado inclusivo e significativo, permitindo que cada aluno avance de acordo com suas necessidades e fortaleça suas habilidades cognitivas e socioemocionais.

Durante o planejamento das atividades, um dos objetivos pessoais da professora foi proporcionar aos alunos uma visita ao campus Canoas do IFRS (Instituto Federal do Rio Grande do Sul), aproveitando essa oportunidade para utilizar a cortadora a laser na confecção, em MDF, dos polígonos projetados pelos próprios alunos. Embora o IFRS esteja próximo da escola onde a pesquisa foi realizada, ele ainda é pouco conhecido pela comunidade escolar. Nos últimos quatro anos, apenas um aluno da escola conseguiu ingressar no IFRS, e a visita teve como um de seus objetivos despertar a curiosidade e o interesse dos estudantes, aproximando-os do campus e de suas possibilidades educacionais. O instituto oferece diversas oportunidades, permitindo que os alunos desenvolvam o ensino médio integrado a um curso técnico, como reforça o slogan do IFRS: "Ensino público, gratuito e de qualidade".

A cortadora a laser facilitou significativamente o processo de criação dos polígonos, garantindo um encaixe perfeito das peças. No entanto, na ausência desse equipamento, a confecção poderia ser realizada em materiais como papel de maior gramatura, cartolina ou papelão, sem comprometer significativamente as atividades desenvolvidas. O uso de outros materiais ainda possibilitaria a execução das tarefas planejadas, mantendo o foco no aprendizado e na construção de generalizações em matemática, partindo da integração de atividades aritméticas, geométricas e algébricas.

Um ponto importante a destacar é a variedade de abordagens que foram apresentadas para chegar ao mesmo resultado. Por exemplo, a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono pode ser obtida de duas formas: obtendo individualmente a medida de cada ângulo e somando-as, ou dividindo o polígono em triângulos, cuja soma dos ângulos internos é conhecida. Essa diversidade de caminhos mostra que há diferentes formas de pensar e resolver problemas matemáticos, cada uma com suas particularidades e informações específicas, o que enriquece a compreensão do tema.

A observação de padrões é outro aspecto relevante nessa abordagem. Por exemplo, ao aumentar um lado em um polígono, a soma dos ângulos internos aumenta sempre 180°. Essa regularidade pode ser discutida e compreendida ao longo das atividades, incentivando os alunos a questionarem o porquê dessas relações matemáticas. Ao formular hipóteses e buscar explicações, eles desenvolvem um entendimento maior dos conceitos matemáticos, alimentando sua motivação para aprender e investigar, proporcionando aos alunos uma base sólida para a construção de generalizações matemáticas. Esse processo de generalização permitiu que os alunos não apenas memorizassem fórmulas, mas também entendessem o raciocínio subjacente, capacitando-os a aplicar esses conhecimentos em novos problemas e situações. A capacidade de generalizar ideias matemáticas promove uma aprendizagem de modo que os alunos passam a ver a matemática como um sistema de relações e não apenas como um conjunto de regras isoladas, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento abstrato e crítico.

A sequência didática mostrou-se eficaz ao permitir que os alunos estudassem por meio de atividades que foram estruturadas inicialmente com conceitos geométricos, passando a explorar a aritmética investigando padrões, finalizando com a álgebra em busca de formalizar generalizações. Esse percurso permitiu que os alunos construíssem novas ideias de forma gradual, criando pontos de conexão entre os conteúdos. A abordagem integrada reforçou o entendimento individual de cada área e também destacou relações entre elas.

Os estudantes apresentaram problemas de interpretação de alguns enunciados, dificuldades para expressar seus pensamentos e, em alguns casos específicos, desânimo, com alguns optando por deixar a atividade em branco ou copiando do colega, em vez de tentar concluí-la por si. Para enfrentar essas dificuldades de compreensão, foram realizados ajustes na apostila, incluindo modificações nos enunciados. Conforme descrito ao longo do texto, esses ajustes foram feitos com base nas observações e respostas dos alunos durante o desenvolvimento das atividades, visando aprimorar a clareza e a efetividade das instruções e garantir que cada etapa do processo investigativo fosse plenamente compreendida. Além disso, foram ampliados os espaços nas atividades de construção e adicionadas linhas à tabela que antes estava incompleta. A versão final, disponível no apêndice, já incorpora essas modificações, apresentando uma estrutura mais acessível e alinhada às necessidades identificadas durante a intervenção. Essa versão revisada reflete um material didático mais robusto e adaptado, capaz de oferecer suporte pedagógico aprimorado para futuros trabalhos em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ANGELUCCI, C.B.; KALMUS, J.; PAPARELLI, R.; PATTO, M.H.S. **O estado da arte da pesquisa sobre o fracasso escolar (1991-2002):** um estudo introdutório. Educação e Pesquisa, São Paulo, v.30, n.1, p. 51-72, jan./abr. 2004. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n1/a04v30n1.pdf. Acesso em: 02 fev. 2024.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica, 2017.

CALDATTO, M.; PAVANELLO, R. **Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais**. Quadrante, [S. l.], v. 24, n. 1, p. 103–128, 2015. DOI: 10.48489/quadrante.22913. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/22913. Acesso em: 6 ago. 2024.

CIPRIANI, Flávia M.; MOREIRA, Antônio Flávio B.; CARIUS, Ana Carolina. **Atuação docente na educação básica em tempo de pandemia**. Educação & Realidade, Porto Alegre, v. 46, n. 2, 2021.

D’AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM, Brasília, ano II, n. 2, p. 15-19,1989.

DAMIANI, Magda Floriana. **Sobre pesquisas do tipo intervenção**. In: XVI Encontro nacional de didática e práticas de ensino, 2012, Campinas. Anais do XVI ENDIPE. Campinas: Junqueira e Marins Editores, 2012. Livro 3.

DAMIANI, M. F., Rochefort, R. S., Castro, R. F. de, Dariz, M. R., & Pinheiro, S. S. (1). **Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica**. Cadernos de educação, n. 45, p. 57-67, 2013.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. Coleção Magistério 2 Grau. Série Formação Magistério. São Paulo: Cortez, 1994.

LORENZATO, Sergio Apparecido. **Por que não ensinar Geometria?** In: A Educação Matemática em Revista. Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, 1995, p. 3-13.

LORENZATO, Sérgio. **Para aprender matemática**. 3 ed. Campinas, SP. Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de professores).

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, Â. **Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?** Pró-Posições, Campinas, v. 3, n. 1, p.39-54, 1992.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Geometria**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM: Rio de Janeiro, 2013.

UNICEF. **Cenário da exclusão escolar no Brasil: um alerta sobre os impactos da Pandemia de Covid-19 sobre a educação no Brasil**, 2021. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/media/14026/file/cenario-da-exclusao-escolar-no-brasil.pdf . Acesso em: 20 jul. 2023.

PATTO, Maria Helena Souza. **O fracasso escolar como objeto de estudo: anotações sobre as características de um discurso**. Cadernos de Pesquisa , São Paulo, n. 65, 1988.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono de ensino de geometria: uma visão histórica**. 1989. 196f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: https://hdl.handle.net/20.500.12733/1576649. Acesso em: 13 ago. 2023.

PEREZ. G. **A realidade sobre o ensino de Geometria no 1º e 2º graus, no estado de São Paulo**. São Paulo: Educação Matemática em Revista. SBEM, n. 4, 1995, p. 54-62.

SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para investigação**. Bolema. Rio Claro, n 14, 2000. Disponível em: < https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635/7022 > Acesso em: 20 ago. 2023.

TEIXEIRA, L. A.; BONI, K. T.; KIRNEV, D. C. B. **Metodologia do ensino da matemática**. Londrina: Editora e distribuidora educacional S. A, 2017.

APÊNDICE A- TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL – IFRS

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO – PROPPI
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – CEP

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PAIS OU RESPONSÁVEIS

Prezado (a) Senhor (a):

Seu filho(a) está sendo convidado(a) para participar do projeto de pesquisa intitulado: "APRENDER E ENSINAR GEOMETRIA DE MODO INTEGRADO À ARITMÉTICA E À ÁLGEBRA: POSSIBILIDADE PARA A CONSTRUÇÃO DE GENERALIZAÇÕES EM MATEMÁTICA". Este projeto está vinculado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da instituição IFRS Campus Canoas. Nessa pesquisa pretendemos investigar e implementar uma abordagem participativa no ensino de geometria, onde os alunos desempenham um papel ativo e protagonista na construção do conhecimento geométrico.

A pesquisa será feita no/a [redacted], e deverá durar em torno de 9 aulas, através de atividades semelhantes às que já são realizadas em aula. Para a coleta de dados será utilizada os registros acerca das estratégias de resolução adotadas, de suas dúvidas ou dificuldades enfrentadas, serão coletados de forma escrita. As atividades realizadas e entregues para a professora/pesquisadora poderão ser divulgadas junto à dissertação produzida como relatório da pesquisa, porém, a identidade do aluno será preservada.

Os **riscos** aos participantes são mínimos, pois será solicitado que, durante as aulas de matemática, os estudantes realizem atividades e respondam a questionamentos contidos em uma apostila, onde irão registrar respostas e procedimentos utilizados ao longo da resolução ou na(s) tentativa(s) de resolução de cada atividade proposta. Os estudantes também irão realizar atividades coletivas compartilhando informações registradas em suas apostilas a fim de possibilitar à turma a sistematização das atividades propostas e a continuidade do trabalho. Esclarecemos que os procedimentos inerentes da aplicação da sequência didática não se tratam de avaliação e que não será atribuída nota ou conceito a partir das respostas fornecidas.

Destaca-se que as pesquisadoras estarão à disposição para conversar e esclarecer dúvidas, em qualquer momento, como estratégia para minimizar eventuais incômodos ou constrangimentos oriundos da participação dos estudantes nesse estudo. Caso isto não seja suficiente, o seu representado poderá procurar atendimento no Setor de Orientação Escolar. Além disso, diante de qualquer tipo de questionamento ou dúvida sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato imediato com o pesquisador responsável pelo estudo.

A participação na pesquisa poderá ter benefício direto aos participantes, como maior apreciação pela Matemática e desenvolvimento de uma compreensão mais profunda dos usos dos conteúdos escolares em sua vida cotidiana. Este enriquecimento em sua aprendizagem pode ter um impacto positivo duradouro em sua jornada educacional e na maneira como o estudante se relaciona com a geometria. Além disso, esperamos que futuramente os resultados deste estudo sejam usados em benefício de outras pessoas (professores e alunos) que poderão utilizar do modelo da sequência didática que será desenvolvido, por isso a importância da participação do seu representado.

Ao participar desta pesquisa, saiba que você tem direito:
- de retirar o seu consentimento, a qualquer momento, sem que isso traga qualquer prejuízo ao seu representado;
- a não ser identificado e que as informações relacionadas à privacidade são confidenciais;
- de ter acesso às informações em todas as etapas do estudo, bem como aos resultados, ainda que isso possa afetar seu interesse em continuar participando da pesquisa;
- de não ter despesas ou ônus financeiro relacionado à participação nesse estudo;
- de que, caso tenha despesas (e de seu acompanhante, se aplicável) relacionadas à participação na pesquisa, terá direito a compensação material das mesmas;
- de se recusar a responder qualquer pergunta que julgar constrangedora ou inadequada.
- de que serão mantidos todos os preceitos ético-legais durante e após o término da pesquisa, de acordo com a Resoluções 466/2012, 510/2016 e outras do Conselho Nacional de Saúde relacionadas à ética em pesquisa.

Concordo em autorizar a participação do meu representado na pesquisa intitulada: “APRENDER E ENSINAR GEOMETRIA DE MODO INTEGRADO À ARITMÉTICA E À ÁLGEBRA: POSSIBILIDADE PARA A CONSTRUÇÃO DE GENERALIZAÇÕES EM MATEMÁTICA”.
Recebi uma via assinada e rubricada deste termo de consentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Canoas, ____de outubro de 2023.

Nome e Assinatura do(a) participante	Nome e Assinatura do(a) pesquisador(a)

Contato do pesquisador:
Nome: Isaura Cardoso Linde
Instituição: IFRS – Campus Canoas
Telefone:51 98432-4944
e-mail: isauralinde@gmail.com

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, por favor consulte o **Comitê de Ética em Pesquisa (CEP)** responsável pela avaliação. Um CEP é um colegiado interdisciplinar e independente, de relevância pública, de caráter consultivo, deliberativo e educativo, que tem como objetivo defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos.

CEP/IFRS
E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br
Endereço: Rua General Osório, 348, Centro, Bento Gonçalves, RS, CEP: 95.700-000
Telefone: (54) 3449-3340

APÊNDICE B - TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL – IFRS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO – PROPPI
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – CEP

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) para participar do projeto de pesquisa intitulado: “APRENDER E ENSINAR GEOMETRIA DE MODO INTEGRADO À ARITMÉTICA E À ÁLGEBRA: POSSIBILIDADE PARA A CONSTRUÇÃO DE GENERALIZAÇÕES EM MATEMÁTICA”. Seus pais/responsáveis concordaram com a sua participação. Se você quiser participar, vamos te explicar como será essa pesquisa. Se você não quiser participar, não tem problema, não vai ter nenhum prejuízo para você ou para os seus pais.

Este projeto está vinculado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da instituição IFRS Campus Canoas. Nessa pesquisa pretendemos investigar e implementar uma proposta didática no ensino de geometria, onde os alunos desempenham um papel ativo na construção do conhecimento geométrico e algébrico.

A pesquisa será feita na [redacted], e deverá durar em torno de 9 aulas, através de atividades semelhantes às que já são realizadas em aula. Para a coleta de dados serão utilizados os registros acerca das estratégias de resolução adotadas, de suas dúvidas ou dificuldades enfrentadas, que serão coletados de forma escrita. As atividades realizadas e entregues para a professora/pesquisadora poderão ser divulgadas junto à dissertação produzida como relatório da pesquisa, porém, sua identidade será preservada.

Os **riscos** aos participantes são mínimos, pois será solicitado que, durante as aulas de matemática, os estudantes realizem atividades e respondam a questionamentos contidos em uma apostila, onde irão registrar respostas e procedimentos utilizados ao longo da resolução ou na(s) tentativa(s) de resolução de cada atividade proposta. Os estudantes também irão realizar atividades coletivas compartilhando informações registradas em suas apostilas a fim de possibilitar à turma a sistematização das atividades propostas e a continuidade do trabalho. Esclarecemos que os procedimentos inerentes da aplicação da sequência didática não se tratam de avaliação e que não será atribuída nota ou conceito a partir das respostas fornecidas.

Destaca-se que as pesquisadoras estarão à disposição para conversar e esclarecer dúvidas, em qualquer momento, como estratégia para minimizar eventuais incômodos ou constrangimentos oriundos da participação dos estudantes nesse estudo. Caso isto não seja suficiente, o estudante ainda poderá procurar atendimento no Setor de Orientação Escolar.

Sua contribuição é voluntária e pode ser interrompida em qualquer tempo sem nenhum prejuízo. Todos os cuidados serão tomados para garantir o sigilo e a confidencialidade das informações, preservando a identidade dos participantes bem como das instituições envolvidas.

A participação na pesquisa poderá ter benefício direto aos participantes, como maior apreciação pela Matemática e desenvolvimento de uma compreensão mais profunda dos usos dos conteúdos escolares em sua vida cotidiana. Este enriquecimento em sua aprendizagem pode ter um impacto positivo duradouro em sua jornada educacional e na maneira como o estudante se relaciona com a geometria. Além disso, esperamos que futuramente os resultados deste estudo sejam usados em benefício de outras pessoas (professores e alunos) que poderão utilizar do modelo da sequência didática que será desenvolvido, por isso a importância da sua participação.

Ao participar desta pesquisa, o estudante terá direito:
- de retirar o seu consentimento, a qualquer momento, sem que isso lhe traga qualquer prejuízo;
- a não ser identificado e à confidencialidade acerca das informações relacionadas à sua participação;
- de ter acesso às informações relativas a sua participação no estudo, bem como aos resultados, ainda que isso possa afetar seu interesse em continuar participando da pesquisa;
- de não ter despesas ou ônus financeiro relacionado à participação neste estudo;
- de que, caso tenha despesas relacionadas à participação na pesquisa, terá direito a compensação material das mesmas;
- de se recusar a responder qualquer pergunta que julgar constrangedora ou inadequada.
- de que serão mantidos todos os preceitos ético-legais durante e após o término da pesquisa, de acordo com a Resoluções 466/2012, 510/2016 e outras do Conselho Nacional de Saúde relacionadas à ética em pesquisa.

As informações e os dados que você informar para esta pesquisa serão mantidos confidenciais, não haverá nenhuma identificação sua ou de sua família. A pesquisadora se responsabiliza pelos cuidados em preservar a sua identidade e os seus dados.
Os resultados da pesquisa vão ser publicados em uma dissertação. A previsão da divulgação dos resultados é abril de 2024.

Concordo em participar da pesquisa intitulada: "APRENDER E ENSINAR GEOMETRIA DE MODO INTEGRADO À ARITMÉTICA E À ÁLGEBRA: POSSIBILIDADE PARA A CONSTRUÇÃO DE GENERALIZAÇÕES EM MATEMÁTICA".
Recebi uma via assinada e rubricada deste termo de consentimento.

Canoas, ____de outubro de 2023.

Nome e Assinatura do(a) participante	Nome e Assinatura do(a) pesquisador(a)

Contato do pesquisador:
Nome: Isaura Cardoso Linde
Instituição: IFRS – Campus Canoas
Telefone:[redacted]
e-mail: isauralinde@gmail.com

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, por favor consulte o **Comitê de Ética em Pesquisa (CEP)** responsável pela avaliação. Um CEP é um colegiado interdisciplinar e independente, de relevância pública, de caráter consultivo, deliberativo e educativo, que tem como objetivo defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos.

CEP/IFRS
E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br
Endereço: Rua General Osório, 348, Centro, Bento Gonçalves, RS, CEP: 95.700-000
Telefone: (54) 3449-3340

APÊNDICE C - PRODUTO DIDÁTICO [20]

ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL

PREFEITURA MUNICIPAL DE CANOAS

Apostila de Matemática

Nome:______________________________

Turma: 8°_____

Professora: Isaura Linde

3° Trimestre

[20] O produto didático completo será disponibilizado no repositório digital EDUCAPES, um ambiente especializado em objetos de aprendizagem e materiais didáticos, de acesso público e gratuito.

ATIVIDADE ZERO: Introdução aos polígonos

1. Preencha a tabela a seguir de acordo com cada polígono:

	Qual o número de lados?	Qual o número de ângulos?	Qual o número de vértices?	É equiângulo?	É equilátero?	É côncavo ou convexo?	É regular?	O que te levou a concluir se o polígono é regular ou não?
pol.A								
pol.B								
pol.C								
pol.D								
pol.E								
pol.F								
pol.G								
pol.H								
pol.I								

	Qual o número de lados?	Qual o número de ângulos?	Qual o número de vértices?	É equiângulo?	É equilátero?	É côncavo ou convexo?	É regular?	O que te levou a concluir se o polígono é regular ou não?
pol.J								
pol.K								
pol.L								
pol.M								
pol.N								
pol.O								
pol.P								
pol.Q								
pol.R								
pol.S								
pol.T								

2. Relacione o nome do polígono com seu número de lados

a) Triângulo	( ) 6 lados
b) Quadrilátero	( ) 8 lados
c) Pentágono	( ) 17 lados
d) Hexágono	( ) 20 lados
e) Heptágono	( ) 11 lados
f) Octógono	( ) 14 lados
g) Eneágono	( ) 3 lados
h) Decágono	( ) 10 lados
i) Undecágono	( ) 16 lados
j) Dodecágono	( ) 12 lados
k) Tridecágono	( ) 7 lados
l) Tetradecágono	( ) 18 lados
m) Pentadecágono	( ) 4 lados
n) Hexadecágono	( ) 13 lados
o) Heptadecágono	( ) 19 lados
p) Octadecágono	( ) 15 lados
q) Eneadecágono	( ) 5 lados
r) Icoságono	( ) 9 lados

3. Pergunta: o que foi novidade nessa aula, ou seja, o que você aprendeu? Explique com suas palavras.

____
____
____
____
____
____
____

ATIVIDADE 1: Construção de um Polígono Convexo

1. Siga as etapas a seguir:

1.1 Faça dupla com um colega. Vocês receberão uma folha de tamanho 20 cm x 20 cm. Vocês deverão construir um polígono convexo, com o número de lados definido pela professora.

1.2 Lembrando do que foi discutido na atividade anterior, qual o nome do polígono que você construiu (de acordo com o número de lados)? ___________________________

1.3 Nomeie cada vértice (com letras maiúsculas e consecutivas, iniciando em A, no sentido anti-horário) .

1.4 Utilizando régua e transferidor, meça cada um dos lados e dos ângulos do seu polígono e preencha o quadro abaixo utilizando a quantidade de linhas e a notação adequada à sua construção.

Medida do lado	Medida do ângulo
$\overline{AB} =$	$A\hat{B}C =$
$\overline{BC} =$	$B\hat{C}D =$
$\overline{CD} =$	$C\hat{D}E =$

1.5 Algum ângulo interno do seu polígono é maior ou igual a 180°? Por quê?

____
____
____
____

1.6 Explique com suas próprias palavras como você fez para obter a medida de um lado (por exemplo, o lado $\overline{BC}$) do seu polígono.

____
____
____
____
____

1.7 Explique com suas próprias palavras como você fez para obter a medida de um ângulo (por exemplo, o ângulo $A\hat{B}C$) do seu polígono.

____
____
____
____
____

No espaço abaixo, um aluno da dupla deverá guardar o polígono.

O polígono realizado pela dupla:

☐ Ficará guardado nesta apostila.

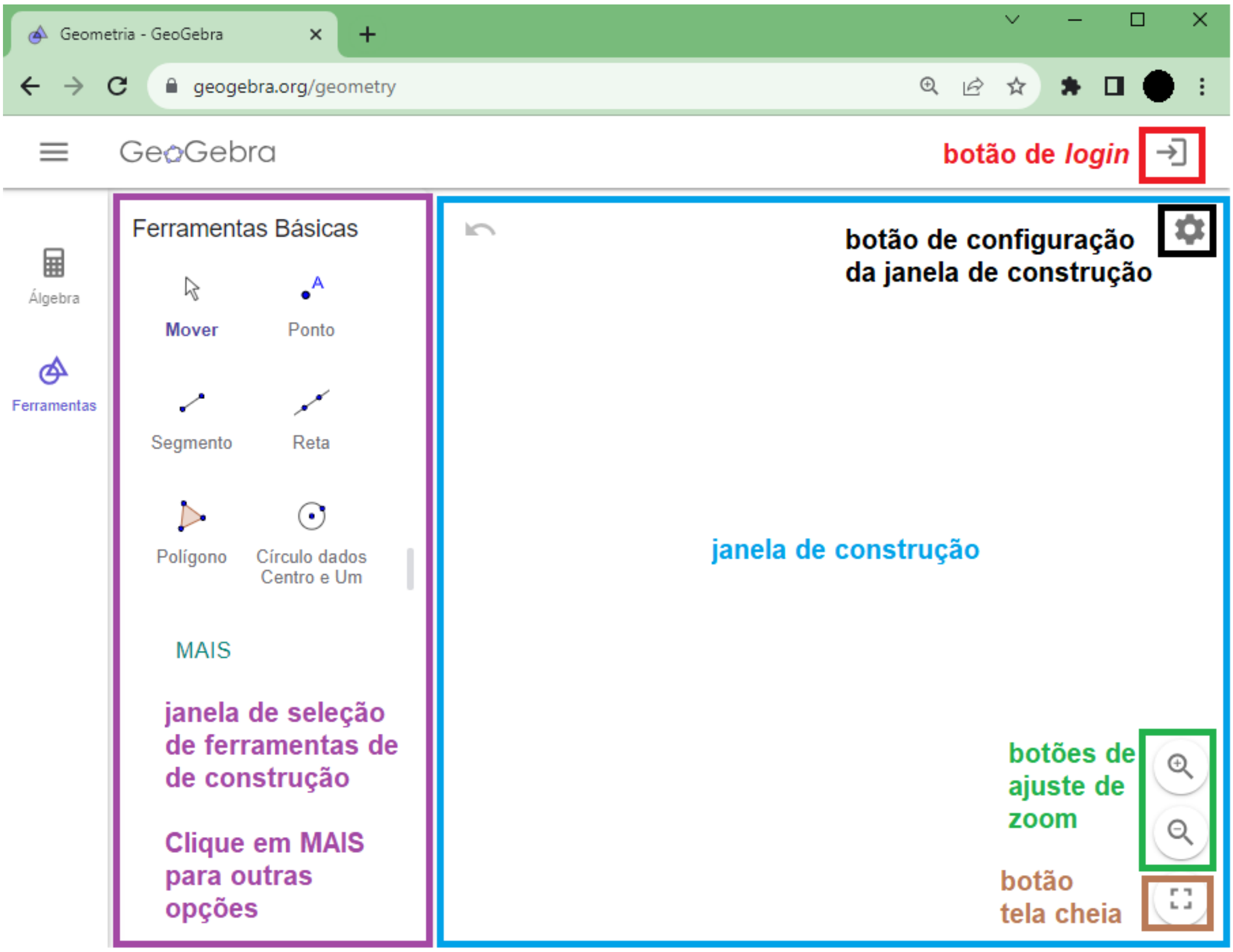
☐ Ficará guardado na apostila do colega ______________________

(Nome do colega)

ATIVIDADE 2: Construção do polígono convexo no GeoGebra

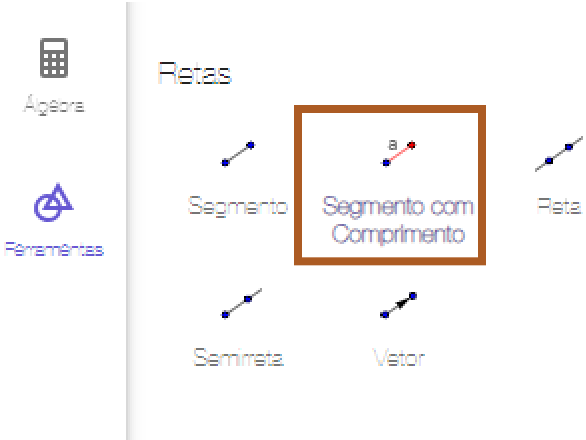
2.1. Faça o login no Chromebook e siga as etapas a seguir:

2.1.1. Acesse o site: https://www.geogebra.org/geometry



2.1.2. No canto superior direito, clique em entrar e acesse com a sua conta google institucional.

2.1.3. Na lateral esquerda, clique em **ferramentas**, e depois em **MAIS** para exibir todas as ferramentas disponíveis e, em seguida, selecione a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo**:



i. Clique em algum ponto na sua janela de construção (onde deseja iniciar sua construção) e irá abrir a seguinte janela:

ii. Digite a medida do $\overline{AB}$ da sua construção. O GeoGebra criará os pontos A e B de forma que o segmento tenha o comprimento informado.

Note que podemos mover esses pontos, mas a medida do segmento será mantida.

Vá em **Mover**:

2.1.4. Responda:

a. Tente mover o ponto A. O que acontece com sua construção?

____
____
____
____

b. Mantenha o ponto A fixo e agora mova o ponto B. Explique com suas palavras a trajetória que é percorrida pelo ponto B em relação ao ponto A.

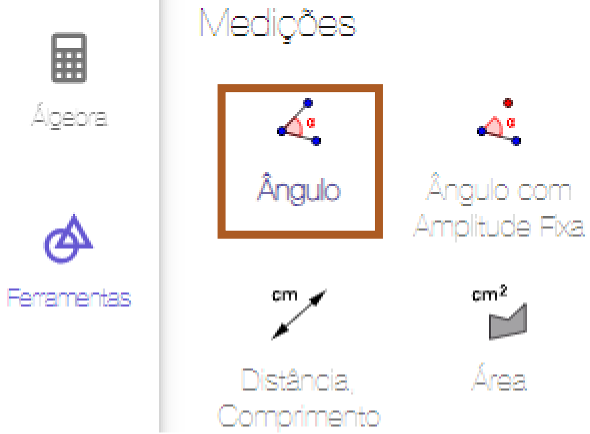
____
____
____
____

Para saber mais e explorar esse assunto vá para a página 34

2.1.5. Novamente em **Segmento com Comprimento Fixo**, clicamos em B e indicamos o tamanho do segmento $\overline{BC}$. O GeoGebra criará o ponto C seguindo as recomendações.

2.1.6. No canto direito, clique no ícone de **engrenagem** e clique em **configurações**. Como na figura abaixo, clique na **engrenagem** e selecione **0 casas decimais** em **arredondamento**:

2.1.7. Na lateral esquerda, clique em **Ângulo**



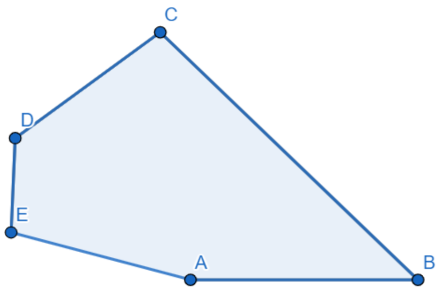
Clique no ponto C, depois no B e por último, no ponto A. O GeoGebra vai mostrar o valor do ângulo $A\hat{B}C$.

2.1.8. Em ferramentas, vá em **mover**

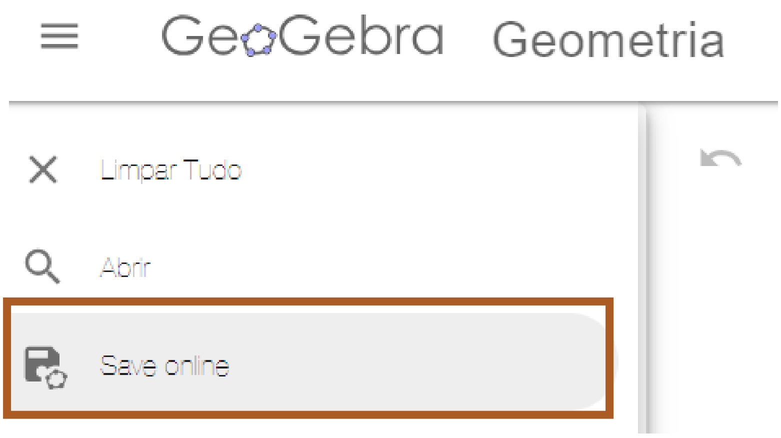
Agora mova o ponto C, até encontrar o valor do ângulo $A\hat{B}C$ do polígono

2.1.9. Repetimos os passos 3, 6 e 7, criando todos os vértices, com as devidas medidas dos ângulos e dos lados do projeto que você e sua dupla elaboraram no papel.

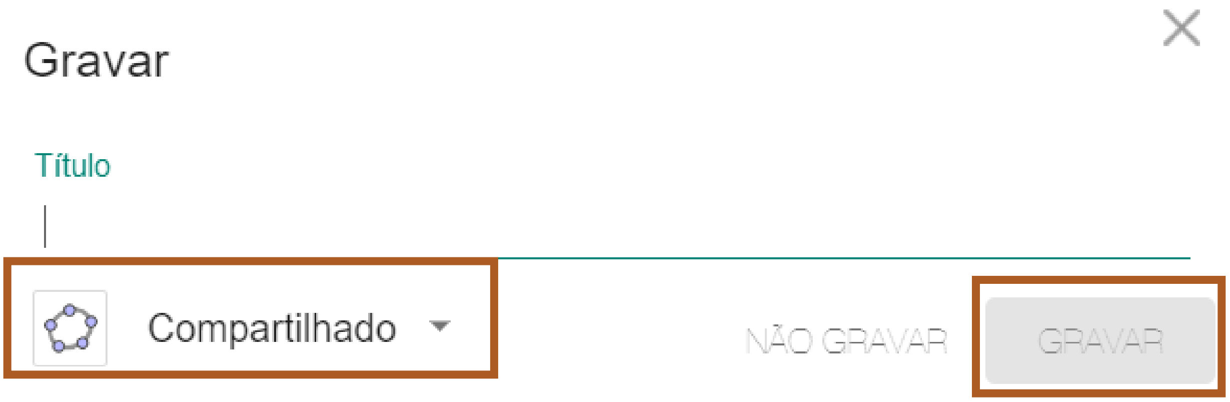
2.1.10. Vamos traçar nosso polígono, idêntico ao da atividade 1. Vá na ferramenta Polígono e clique, de forma consecutiva, em todos os vértices da sua construção, iniciando no ponto A e finalizando nele também, para "fechar" seu polígono. Em outras palavras, selecione a ferramenta polígono e clique no ponto A, depois no ponto B, e assim por diante. Depois de selecionar o último vértice, clique novamente no vértice A.



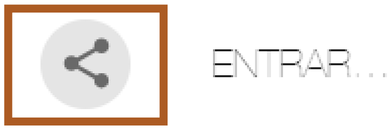
2.1.11. Vamos salvar o arquivo. Clique sobre as três barras no canto superior esquerdo, e em seguida **save online**:



Coloque os nomes da dupla para nomear arquivo, deixando a opção **Compartilhado** selecionada, e por fim, clique em **gravar**.



2.1.12. No canto superior direito, clique sobre o símbolo de compartilhar:



Abrirá uma janela com um link do seu arquivo. Envie o link no Google Classroom.

2.2. Perguntas:

2.2.1. O último segmento do polígono do papel tem comprimento ________.

2.2.2. O último segmento do polígono do GeoGebra tem comprimento ________.

2.2.3. O primeiro e o último ângulos do polígono do papel medem, respectivamente, _______ e _______.

2.2.4. O primeiro e o último ângulos do polígono do GeoGebra medem, respectivamente, ______ e ______.

2.2.5. Você identificou diferenças entre as medidas do polígono do papel e do GeoGebra? Descreva quais são.

____
____
____
____
____

2.2.6. Se houver diferenças nas medidas dos dois polígonos, o que você acha que pode ter causado essa discrepância?

____
____
____
____
____

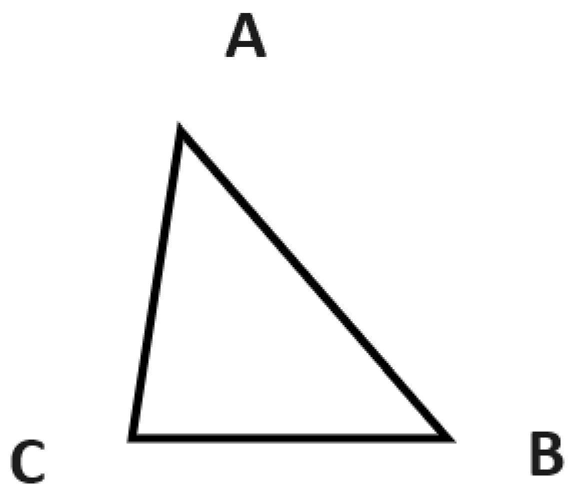
Atividade 3: Ângulos externos

3.1. Explorando o conceito de ângulo externo

3.1.1. O que vocês acreditam que seja ângulo externo?

____
____
____
____
____

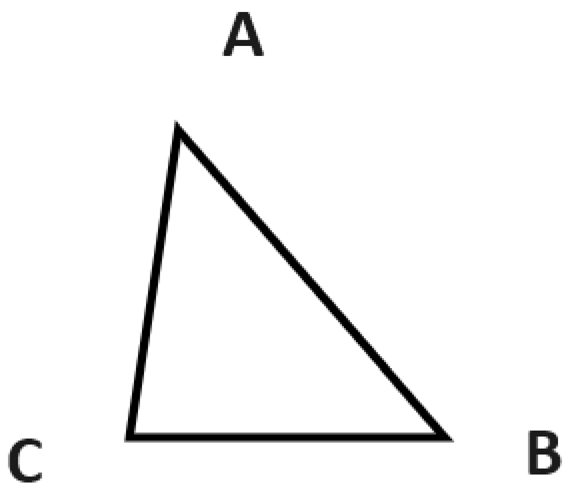
3.1.2. De acordo com a definição que você escreveu acima, desenhe os ângulos externos do triângulo ABC:



3.2. Apresentando o conceito de ângulo externo.

Preste atenção na explicação da professora que irá projetar exemplos de ângulos externos em um triângulo, e em um quadrilátero, mostrando como encontrar os ângulos externos de cada vértice.

3.2.1. Agora, vamos refazer a atividade anterior. Desenhe os ângulos externos do triângulo abaixo. Use as semirretas suportes.

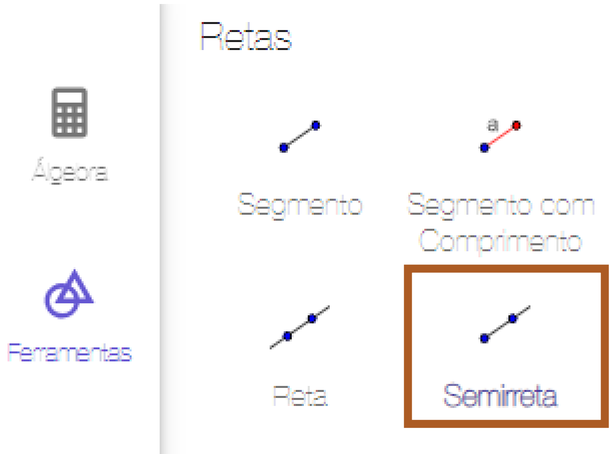


3.3. Construindo os ângulos externos do polígono no GeoGebra

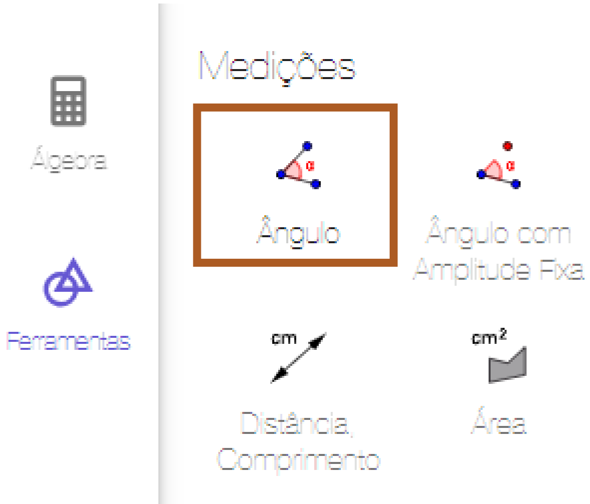
3.3.1. Abra o GeoGebra e localize o arquivo da atividade anterior que contém o polígono desenhado.

3.3.2. Clique em “Arquivo” no menu superior e escolha “Salvar como...” ou “Salvar uma cópia como...” para criar uma cópia do arquivo. Dê um novo nome para a cópia e clique em “Salvar”.

3.3.3. Trace uma semirreta com origem em A e passando por B.



3.3.4. Clique em ângulo, e depois selecione a semirreta criada no passo anterior e o lado $\overline{BC}$.



O GeoGebra vai criar o ângulo externo de $\hat{B}$

3.3.5. Repita os passos 3 e 4 do processo acima, criando todos ângulos externos do polígono.

3.4. Responda

3.4.1. De acordo com os vértices do seu polígono, complete a tabela com as medidas dos ângulos internos e externos. Por fim, faça o cálculo da soma do ângulo interno com o ângulo externo de cada um dos vértices.

	Medida do ângulo interno	Medida do ângulo externo	Soma do ângulo interno com o externo
$\hat{A}$			
$\hat{B}$			
$\hat{C}$			
$\hat{D}$			
$\hat{E}$			

3.4.2. O que você pode afirmar sobre a soma dos ângulos internos e externos (os resultados encontrados na última coluna da tabela)?

____

____

____

____

3.4.3. Verifique se seus colegas também concluíram o mesmo:

3.4.4. Será que isso acontece para qualquer polígono?

3.4.5. Por que isso acontece?

Atividade 4: Reprodução em MDF

4.1. Nesta etapa, você utilizará uma cortadora a laser para criar peças de MDF que representam os polígonos que desenhamos anteriormente no GeoGebra. Além disso, você também cortará peças de MDF para representar os ângulos externos que medimos no passo anterior.

4.1.2. Para facilitar a identificação dos ângulos externos e internos, você pintará cada par de ângulos, interno e externo, que compartilham o mesmo vértice, com cores correspondentes. Utilizaremos uma cor específica para cada vértice, de forma que os ângulos externos e internos do mesmo vértice tenham cores iguais. Diferentes vértices terão cores distintas, o que tornará a análise visual mais intuitiva para você.

4.1.3. Cada aluno receberá o polígono que criou no GeoGebra, impresso em papel. Agora, sua tarefa é pintar cada ângulo interno e externo do mesmo vértice com as mesmas cores que foram utilizadas no passo 2. Por exemplo, se você pintou os ângulos externo e interno do vértice A de rosa no passo 2, faça exatamente o mesmo aqui, pintando ambos os ângulos do vértice A de rosa.

4.1.4. Deixe suas peças secando.

Lembre-se de manusear a cortadora a laser com cuidado e seguir todas as orientações de segurança fornecidas pelos professores e instrutores responsáveis. A precisão na identificação dos ângulos será fundamental para o sucesso das próximas atividades e sua compreensão dos conceitos geométricos envolvidos.

Divirta-se explorando os polígonos em MDF e descobrindo algumas de suas propriedades!

Atividade 5: Dedução da soma dos ângulos externos

5.1. Nesta atividade, iremos explorar os ângulos externos dos polígonos que desenhamos no GeoGebra usando as peças de MDF cortadas. Siga os passos abaixo:

5.1.1. Sente-se junto com sua dupla. Não se esqueça que a dupla deverá trabalhar em conjunto. Você e seu colega deverão revezar na manipulação das peças e no registro das descobertas, incentivando o diálogo e a colaboração entre os membros da dupla.

5.1.2. Deixe sua mesa livre: permanecerá apenas esta apostila, lápis e borracha.

5.1.3. Receba suas peças de MDF e coloque sobre sua mesa, para que você possa manipulá-las facilmente.

5.1.4. Posicione os ângulos externos, de acordo com sua cor, conferindo se você recebeu todas as peças corretamente. Certifique-se de alinhar cada ângulo externo de forma que eles se encaixem perfeitamente com os ângulos internos do polígono.

5.1.5. Retire o polígono, deixando apenas os ângulos externos sobre a mesa.

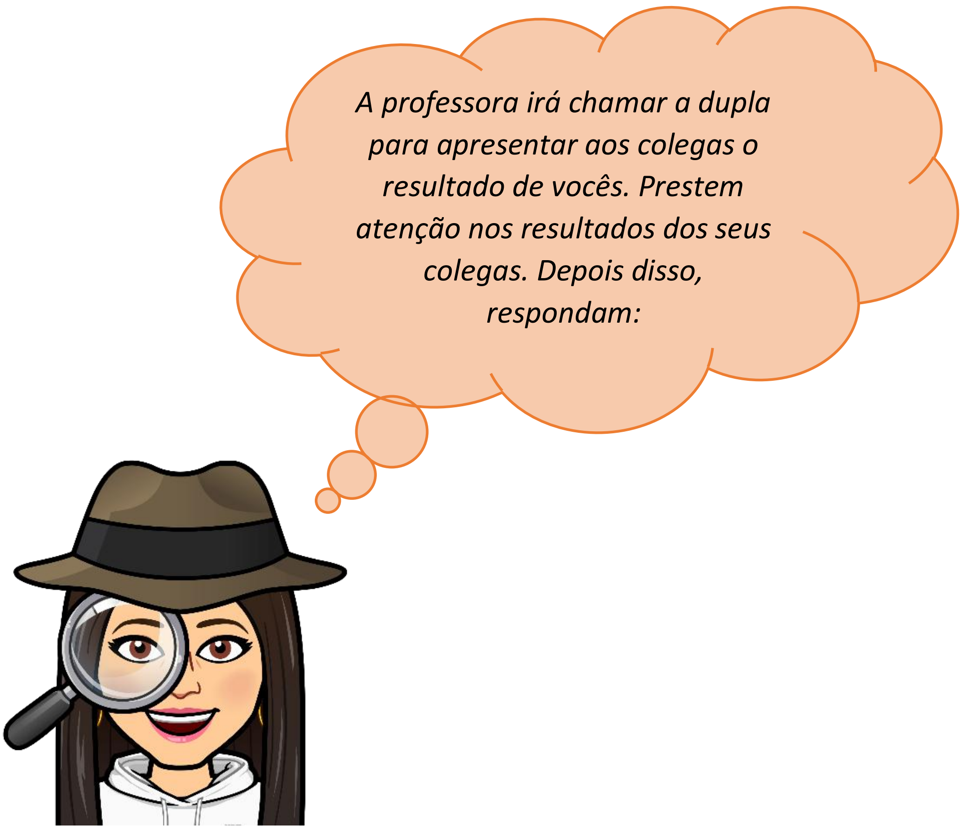
5.1.6. Agora tente encaixar todos os ângulos externos unindo todos os vértices desses ângulos.

5.1.7. Dialogue com sua dupla e tentem descobrir o que formam esses ângulos. Estou animada para ver suas descobertas!

5.2 EXERCÍCIOS

5.2.1 Complete:

Os ângulos externos se alinham formando um ___________________. A soma dos ângulos externos do seu polígono é __________ graus.



5.2.2 Os resultados da outra dupla que fez o polígono de mesma quantidade de lados foram iguais? Por quê?

____
____
____
____
____

5.2.3 E em relação aos outros colegas, vocês percebem alguma semelhança nos resultados obtidos por eles?

____
____
____
____
____

5.2.4 O que vocês podem concluir sobre a soma dos ângulos externos de polígonos convexos?

____
____
____
____
____

Atividade 6: Dedução da soma dos ângulos internos

6.1. Descobrindo a Soma das Medidas dos Ângulos Internos de um Triângulo

A professora irá apresentar um triângulo em MDF cujos ângulos internos podem ser destacados. Nosso objetivo é debater e descobrir qual a soma dos ângulos internos desse triângulo. Traga suas ideias e vamos debater sobre essa questão. Depois dessa conversa, responda:

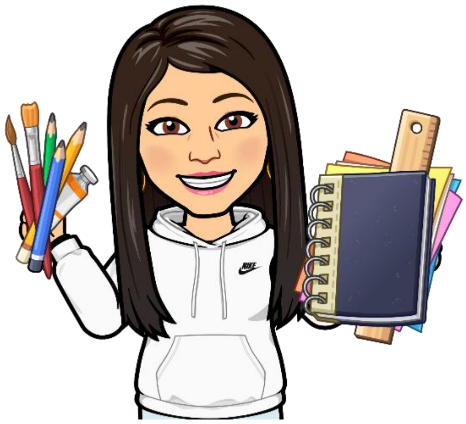
6.1.1. A soma dos ângulos internos desse triângulo é _______ graus.

6.1.2. Explique, com suas palavras, como você chegou à conclusão do valor preenchido no item anterior. Justifique detalhadamente e apresente uma argumentação que sustente o valor atribuído.

____
____
____
____
____
____
____

6.1.3. Será que outros triângulos terão o mesmo valor para a soma das medidas dos seus ângulos internos? Explique:

Lembre-se de que o objetivo dessa atividade é estimular a curiosidade, a reflexão e o pensamento crítico. Divirta-se explorando os ângulos e suas propriedades geométricas.



6.2. Descobrindo a Soma das medidas dos Ângulos internos de outros Triângulos

Nesta atividade, você irá explorar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer. Materiais necessários:

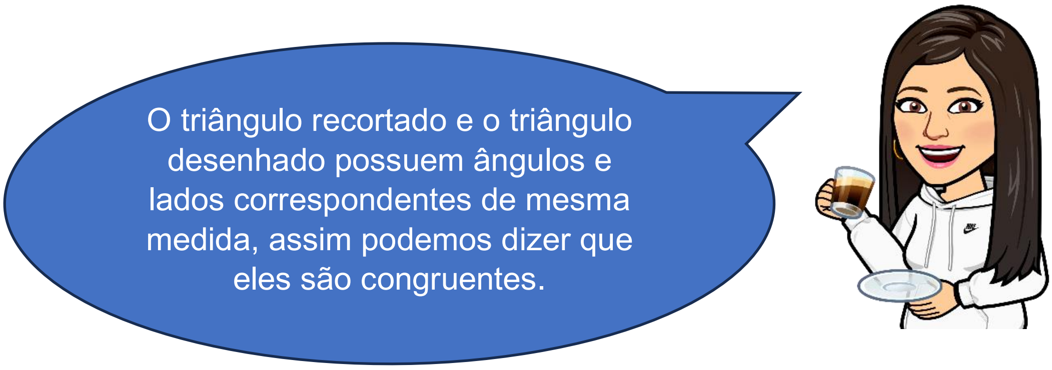
- Régua
- Tesoura
- Cola
- Lápis de cor ou canetas coloridas

Passo a passo:

6.2.1. Recorte um triângulo: Comece desenhando um triângulo com auxílio de uma régua e depois o **recorte** cuidadosamente. Note que este triângulo deve ser menor que o retângulo da página 20. Se necessário, peça ajuda ao professor.

6.2.2. Agora, desenhe o contorno desse triângulo no ESPAÇO 1 reservado na página 20.

6.2.3. Pinte cada ângulo de uma cor diferente: use lápis de cor ou canetas coloridas para pintar cada ângulo com uma cor **diferente.** Pinte também os ângulos do triângulo contornado utilizando as mesmas cores do triângulo recortado.

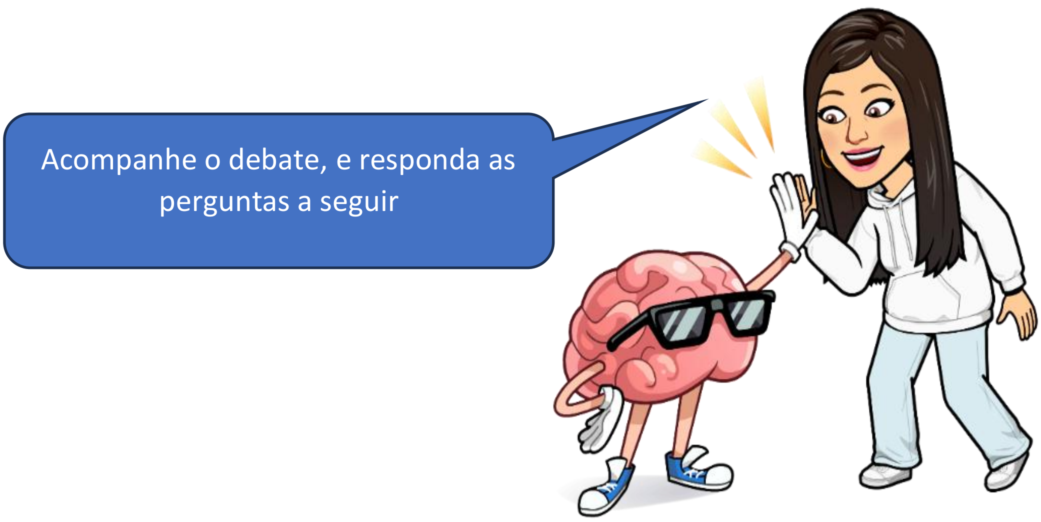


6.2.4. Recorte o triângulo em três partes: Nesta etapa, você irá dividir o triângulo em três partes, cada uma contendo um dos ângulos pintados previamente. Para fazer isso, você pode escolher um dos lados do triângulo como base e fixá-la. Em seguida, trace dois segmentos iniciando próximo ao ponto médio da base e finalizando em cada um dos pontos médios dos outros lados. Veja o passo a passo mostrado pelo professor no projetor.

6.2.5. Analise as partes recortadas: Após recortar o triângulo em três pedaços, observe atentamente as três partes separadas. Cada uma contém um dos ângulos que você pintou previamente.

6.2.6. Vamos encaixar os três ângulos previamente pintados, lado a lado, posicionando os três vértices sobre o mesmo ponto. Para tanto, escolha um dos ângulos, localize o seu vértice sobre o ponto marcado no ESPAÇO 2 (próxima página) e alinhe um de seus lados com uma das semirretas de origem nesse ponto. Em seguida, escolha outro pedaço do seu triângulo. Posicione o vértice no mesmo ponto e alinhe o lado desse ângulo com o lado do ângulo anterior, como se fosse juntar os dois ângulos, um na sequência do outro. Faça o mesmo com o terceiro pedaço do triângulo recortado, considerando agora que o lado desse deve alinhar-se na sequência do segundo ângulo posicionado por você. (Tente fazer essa construção lendo as orientações e você poderá confirmar se entendeu aguardando a projeção no quadro que será realizada pela professora na sequência).

6.2.7. Após a explicação da professora, cole a montagem realizada acima no espaço a seguir, na próxima página.

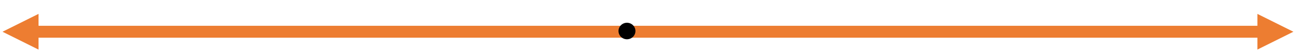


Contorne do seu triângulo no espaço abaixo antes do recorte:

ESPAÇO 1

Cole abaixo a montagem sobre a reta:

ESPAÇO 2



6.2.8. Perguntas:

a) A soma das medidas dos três ângulos internos do seu triângulo é igual a _______ graus.
b) Essa descoberta se aplica a todos os triângulos, independentemente do tamanho ou tipo? Explique.

____
____
____
____
____

6.3. Explorando a Soma das medidas dos Ângulos Internos de um Polígono Convexo

Nesta atividade, iremos explorar a soma dos ângulos internos do polígono construído no GeoGebra. Materiais necessários:

- Impressão do polígono feito no GeoGebra, com os ângulos coloridos.

- Régua e lápis.

6.3.1. Junte-se a sua dupla.

6.3.2. Vocês receberão a impressão do polígono construído por vocês no GeoGebra, que já está colorido para facilitar a identificação dos ângulos.

6.3.3. Agora calcule a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono. Registre abaixo como você fez.

Cálculos realizados:

A soma das medidas dos ângulos internos do meu polígono é __________°.

6.4. Explorando a Soma das medidas dos Ângulos Internos do Polígono Através de triângulos

Nesta atividade, iremos explorar as diagonais de um polígono a partir de um vértice específico. Utilizaremos a impressão do polígono que você recebeu na atividade anterior.

Materiais necessários:

- Impressão do polígono feito no GeoGebra, com os ângulos coloridos.
- Régua e lápis.

Passo a passo:

6.4.1. Introdução: Nessa atividade iremos explorar as diagonais de um polígono a partir de um de seus vértices.

6.4.2. Selecionando um Vértice: Escolha um vértice do polígono para iniciar a atividade.

6.4.3. Traçando as Diagonais: Com a régua e o lápis, trace as diagonais do polígono a partir do vértice escolhido. Eles deverão conectar esse vértice aos demais vértices do polígono que não sejam adjacentes a ele.

6.4.4. Agora você deve responder:

a. Quantos vértices tem o seu polígono?

b. Quantas diagonais partindo do vértice escolhido você conseguiu traçar?

c. Note que ao traçar essas diagonais dividimos o polígono em triângulos. Quantos triângulos você obteve? ____

d. Tente explicar com suas palavras porque foi esse o número de triângulos obtidos por ti? Dica: observe como cada triângulo ficou determinado, considerando os lados do polígono e as diagonais que você traçou!

____
____
____
____

e. Você já sabe que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre __________°. Com essa informação e observando a quantidade de triângulos que você obteve do seu polígono podemos calcular a soma das medidas dos ângulos internos do seu polígono.

Calcule o valor da soma dos ângulos internos do seu polígono, utilizando agora essa ideia da divisão do polígono em triângulos, e explique com suas palavras como você pensou:

____
____
____
____
____

f. Você encontrou o mesmo valor que encontramos na atividade anterior? Explique

____
____
____
____

6.5. Explorando Polígonos e Suas Propriedades

A professora apresentará uma tabela cujo objetivo é preenchê-la com o número de lados do seu polígono, a soma das medidas dos ângulos internos e externos, o número de diagonais traçadas e o número de triângulos formados a partir das diagonais adjacentes. Vocês irão compartilhar esses dados com os colegas por meio de um cartaz e a partir daí vamos tentar generalizar os conceitos envolvidos.

Responda:

6.5.1. Use os dados que coletamos nas atividades anteriores para preencher a tabela abaixo com as informações do seu polígono:

Número de lados do polígono	Soma das medidas dos ângulos externos (Se)	Soma das medidas dos ângulos internos (Si)	Número de diagonais traçadas a partir de um vértice	Número de triângulos formados a partir do traçado das diagonais que partem de um vértice do polígono

Após o preenchimento da tabela acima vocês estarão preparados para escrever no cartaz colaborativo suas descobertas.

6.5.2. Será que existe alguma relação do número de triângulos com a soma dos ângulos internos?

____
____
____
____

6.5.3. Agora siga o modelo do cartaz e preencha a tabela a seguir

Número de lados do polígono	Soma das medidas dos ângulos externos (Se)	Soma das medidas dos ângulos internos (Si)	Número de diagonais traçadas a partir de um vértice	Número de triângulos formados a partir do traçado das diagonais que partem de um vértice do polígono

Neste espaço você pode anotar suas percepções, anotações e conclusões sobre as atividades realizadas hoje, a partir das discussões realizadas em aula e da análise dos dados disponibilizados no cartaz da turma.

____

____

____

____

____

Atividade 7: Soma das medidas dos Ângulos Internos de um polígono convexo (Abordagem Algébrica)

7.1. Nesta atividade, propomos um diálogo sobre a soma dos ângulos internos de um polígono convexo e sua interligação com outros elementos do triângulo.

7.1.1. Preencha o quadro abaixo, seguindo o modelo, de acordo com o número de vértices do seu polígono:

VÉRTICE	MEDIDA DO ÂNGULO INTERNO	MEDIDA DO ÂNGULO EXTERNO	SOMA DAS MEDIDAS DO ÂNGULO INTERNO E EXTERNO NESTE VÉRTICE
Vértice 1	$i_1 =$	$e_1 =$	
Vértice 2	$i_2 =$	$e_2 =$	
Vértice 3	$i_3 =$	$e_3 =$	
Vértice 4	$i_4 =$	$e_4 =$	
	SOMA DAS MEDIDAS DE TODOS ÂNGULOS INTERNOS:	SOMA DAS MEDIDAS DE TODOS ÂNGULOS EXTERNOS:	

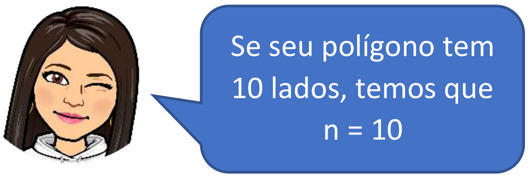
7.1.2. Com base na tabela acima, responda:

A) Em cada vértice do polígono, se você somar a medida do ângulo interno com a do ângulo externo irá obter: ___________°. Podemos escrever: $i_j + e_j =$___________

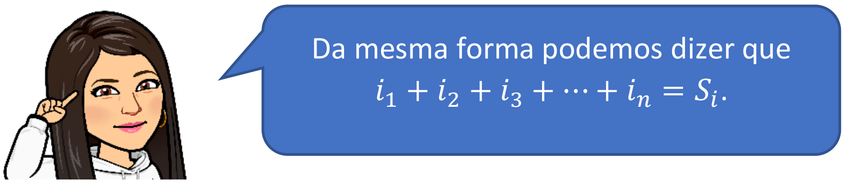
j é um número natural. Assim e i_j e e_j representam os ângulos interno e externo do vértice j. Como por exemplo, para j=5, temos i_5 e e_5, que são os ângulos interno e externo do vértice 5.

B) Como seu polígono possui _______ vértices, na tabela acima, esse valor do item A aparecerá _______ vezes.

C) Note que a soma $e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n =$__________°.



D) Podemos chamar a soma $e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n$ de S_e. Logo $S_e =$_________°



E) Para o seu polígono de _____ vértices (e lados) temos $S_i + S_e$ = _______$\times$ 180°.

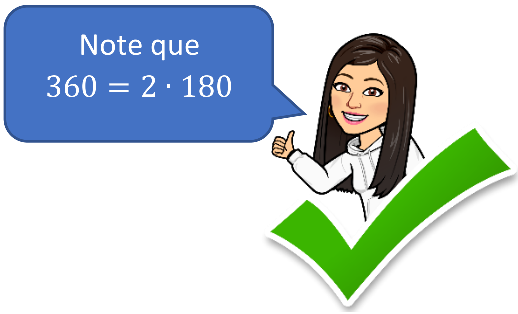
F) Assim, para um polígono de n vértices (e lados) temos que:

$$S_i + S_e = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n + e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n$$
$$S_i + S_e = i_1 + e_1 + i_2 + e_2 + i_3 + e_3 + \cdots + i_n + e_n$$
$$S_i + S_e = \_\_\_\_\_\_\_ \times 180°$$

G) Considerando que o valor de S_e é igual para todos os polígonos, podemos reescrever a expressão do item F como:

$$S_i + \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_ \times 180°$$

H) Agora tente isolar S_i na expressão anterior:



Logo, $S_i =$____. Observe que você encontrou uma fórmula que fornece a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n vértices (lados).

I) Você já conhecia essa fórmula, não é mesmo? Em qual atividade anterior essa fórmula já apareceu?

____
____
____

J) Você consegue explicar o significado geométrico do termo (n-2)?

____
____
____

K) E por que aparece o valor 180 multiplicando (n-2)?

____
____
____

L) Use a fórmula obtida no item H para calcular a soma dos ângulos internos do polígono do seu projeto inicial e compare com o resultado obtido na segunda coluna da tabela inicial.

Atividade 8: Polígonos Regulares

8.1. Definição e Construção 1:

8.1.1. Volte na atividade zero. Escreva, abaixo, quais características da tabela são necessárias para que um polígono possa ser classificado como polígono regular?

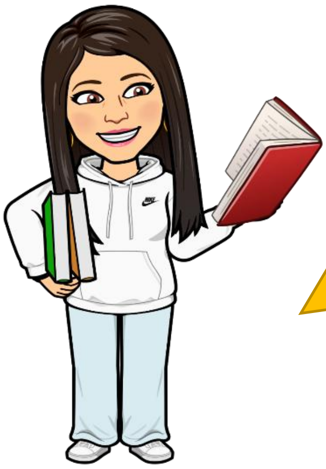
____
____
____
____
____

8.1.2. Conclusão: um polígono convexo é regular quando:

____
____
____
____
____

8.1.3 Desafio final: Usando régua e transferidor construa um polígono regular com o mesmo número de vértices do seu polígono da atividade 1. Escreva o passo a passo da sua construção e seu raciocínio.

8.2. Refletindo Sobre Ângulos Internos de um Polígono Regular



Conforme você já concluiu, um polígono regular tem todos os ângulos internos com a mesma medida.
Para obter a medida de cada ângulo interno, você pode seguir qualquer um dos dois caminhos:

Caminho 1:	**Caminho 2:**
Você já sabe que a soma das medidas dos ângulos interno S_i de um polígono convexo é dado por: _____________ Assim, a soma da medida dos ângulos internos do seu polígono é___________. Seu polígono possui ____ lados, ____ ângulos e _____ vértices. Como os ângulos internos de um polígono regular terão medidas iguais, então o ângulo interno do seu polígono deve medir ________.	Você já sabe que a soma dos ângulos externos S_e de qualquer polígono convexo é:_______ Seu polígono possui ____ lados, ____ ângulos e _____ vértices. Como os ângulos externos de um polígono regular terão medidas iguais, então cada ângulo externo do seu polígono deve ser ________. Como $i + e = 180°$, o valor de cada ângulo interno do seu polígono é _____

8.2.1 Desafio: Você saberia escrever uma expressão que fornece a medida do ângulo interno para um polígono regular de n lados? Registre abaixo suas ideias!

Isso é um desafio, então não se preocupe caso tenha dúvidas.

8.3. 2° Construção

8.3.1. Na construção proposta em 8.1.3 não sabíamos a medida do ângulo interno. Agora que descobrimos o valor de cada ângulo interno de um polígono regular, você deverá refazer a construção proposta anteriormente de forma precisa.

8.4. 3° Construção

8.4.1 Agora você deverá construir um polígono regular com 3 lados a mais do polígono construído na etapa anterior.

8.4.2. Você compreendeu as duas formas de calcular o valor do ângulo interno do polígono proposto em 8.2? Teve alguma dificuldade? Explique

____
____
____
____
____

8.4.3. Qual das opções citadas em 8.2 que você achou mais fácil para calcular o valor do ângulo interno do polígono regular? Por quê?

____
____
____
____
____

8.5. Generalização

8.5.1 Preencha as tabelas a seguir de acordo com as medidas do polígono proposto na construção anterior :

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos externos	Medida de cada ângulo externo	Medida de cada ângulo interno

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno

Assim como já fizemos anteriormente, a professora irá chamá-lo para preencher uma tabela colaborativa com os dados acima.

8.5.2. Siga o modelo, e preencha de acordo com a tabela colaborativa:

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos externos	Medida de cada ângulo externo	Medida de cada ângulo interno

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno

8.5.3. O que acontece com as tabelas acima para um número de lados n?

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos externos	Medida de cada ângulo externo	Medida de cada ângulo interno

Número de lados	Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)	Medida de cada ângulo interno

8.5.4. Explique com suas palavras como foi possível obter as expressões gerais das tabelas acima?

____

____

____

____

____

____

8.5.5. Qual forma você acredita ser mais simples de ser lembrada para obter a medida do ângulo interno de um polígono regular? Explique

____

____

____

____

____

____

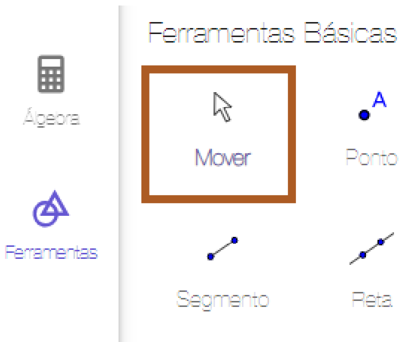
Saiba Mais

No terceiro passo da atividade, criamos o segmento de reta $\overline{AB}$ com um comprimento fixo. Agora, vamos explorar o movimento do ponto B e entender qual é a trajetória que ele percorre quando o movemos. Para isso, siga as seguintes instruções:

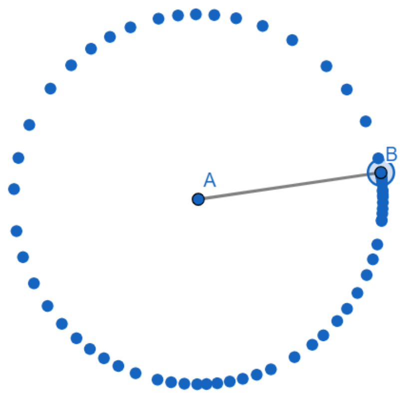
1) Clique com o botão esquerdo do mouse (ou com dois dedos sobre o touchpad) no ponto B.

2) Uma janela será aberta e você deve selecionar a opção "Exibir Rastro".

3) Agora, na barra de ferramentas do menu esquerdo, vá até a opção "Mover".

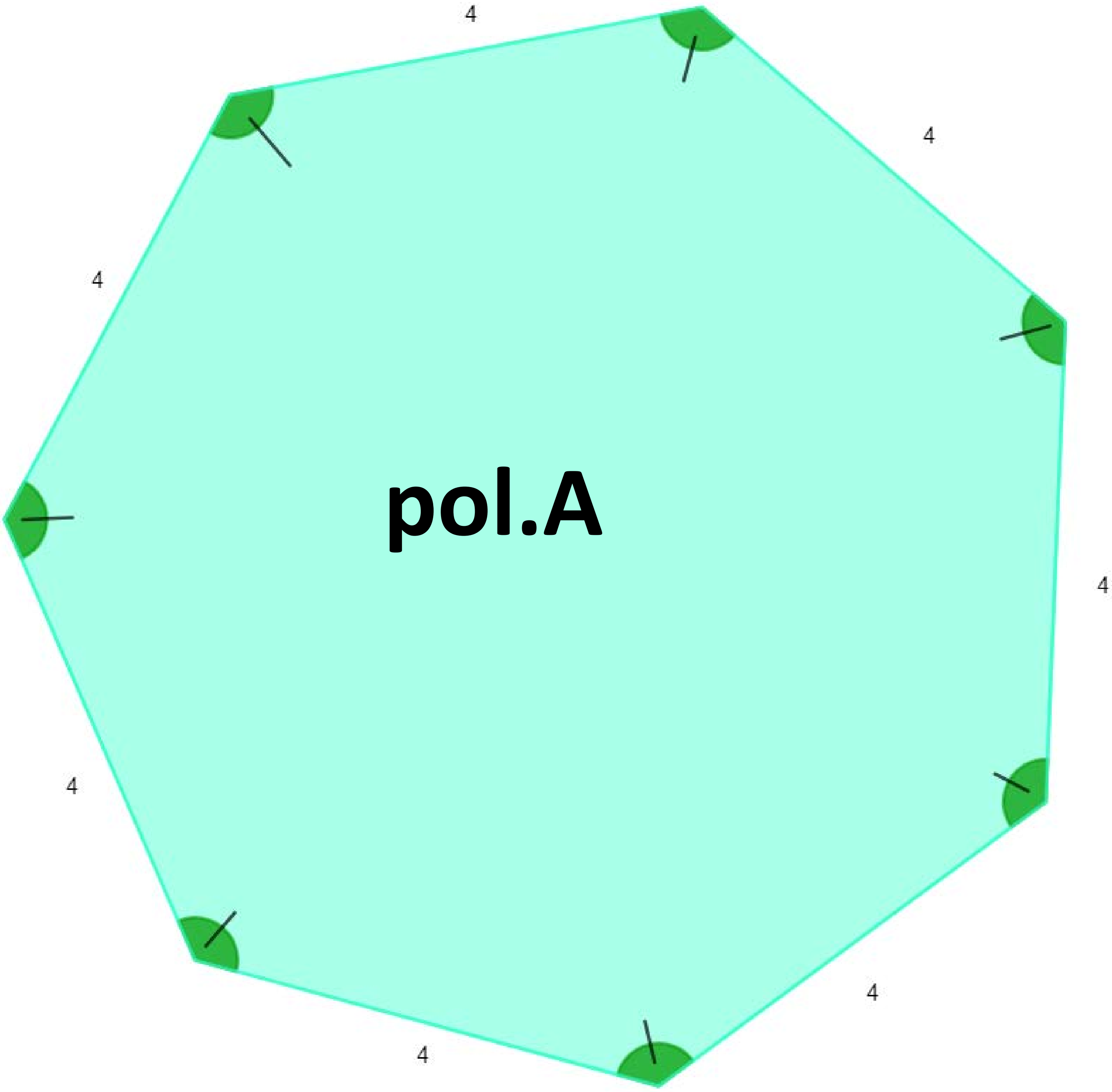


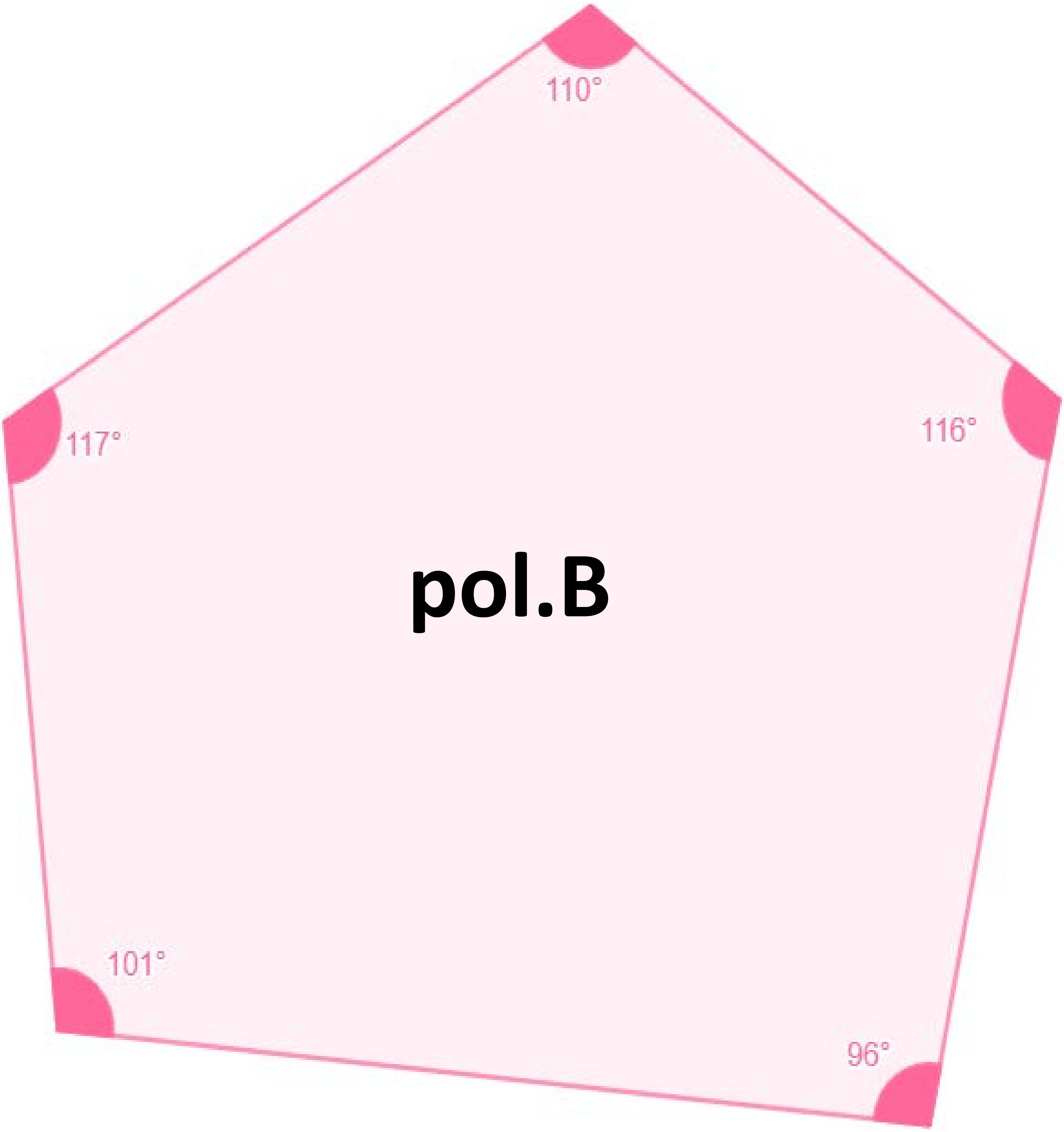
4) Arraste o ponto B e mova-o para diferentes posições. Você notará que é possível dar uma volta completa em torno do ponto A.

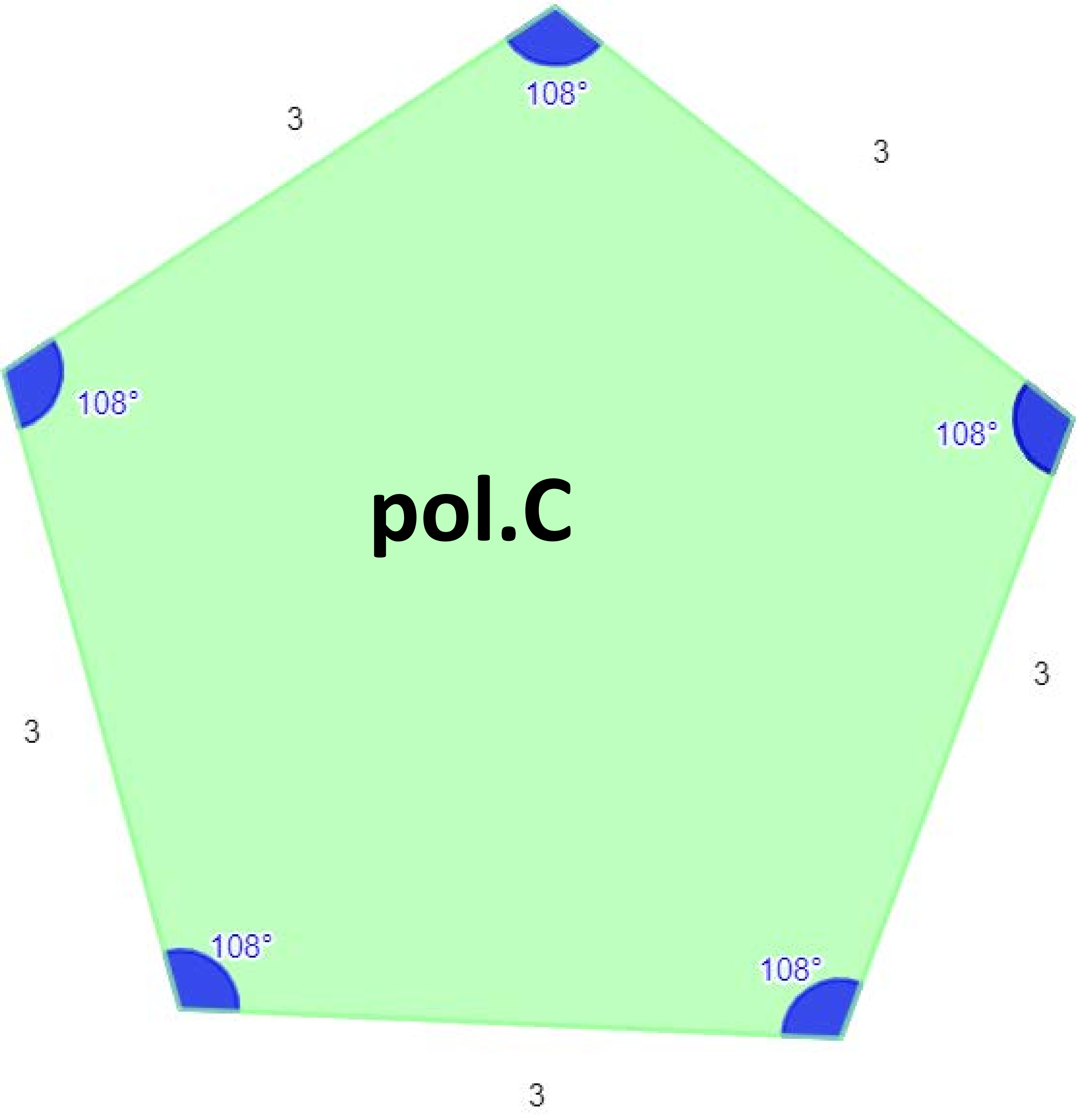


Através dessa observação, podemos perceber que o conjunto de pontos que equidistam em relação ao ponto A forma uma circunferência. Essa constatação nos permite compreender a relação geométrica entre o segmento $\overline{AB}$, o ponto A e a circunferência que o envolve.

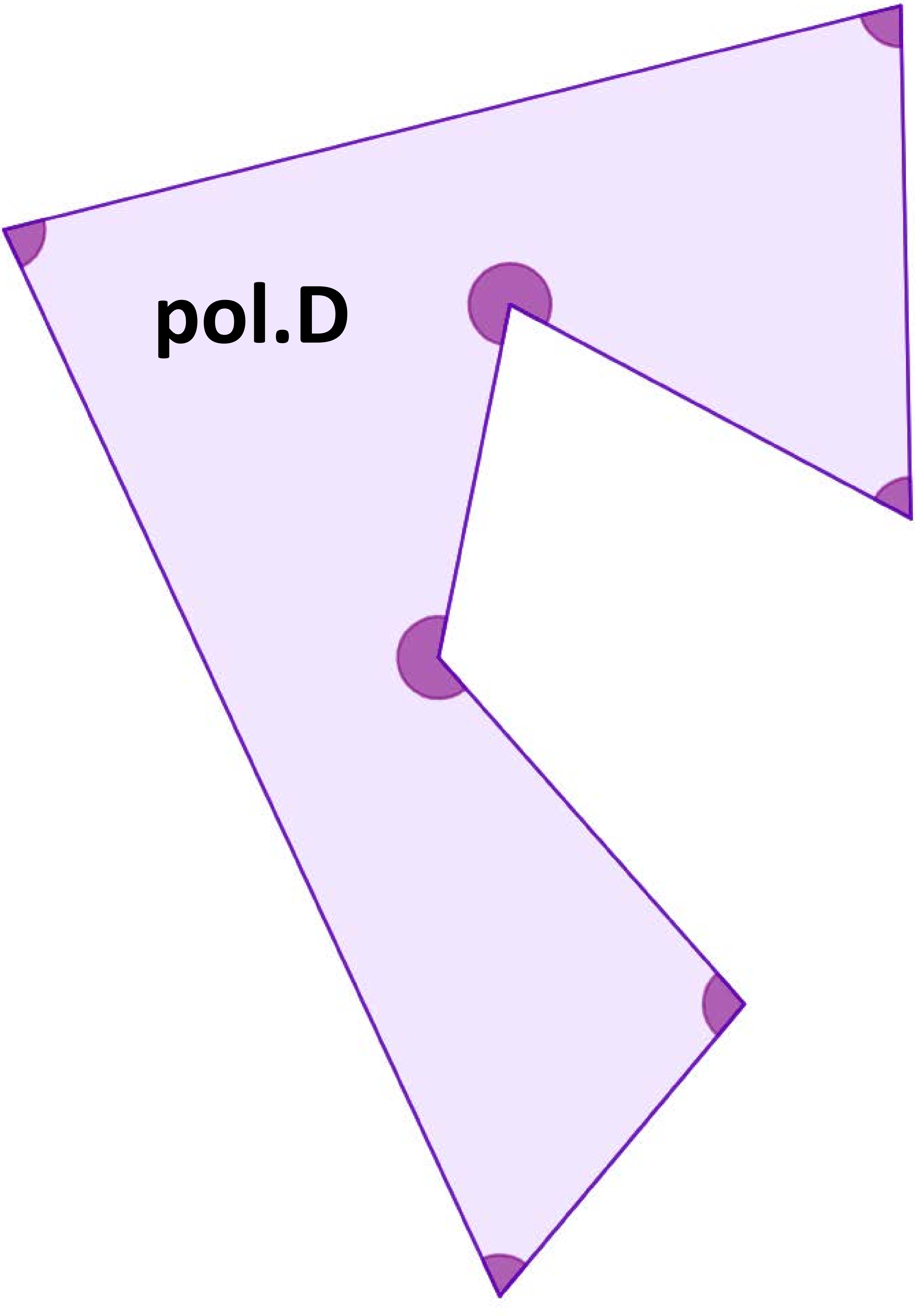
APÊNDICE D- MODELO DE POLÍGONOS USADOS

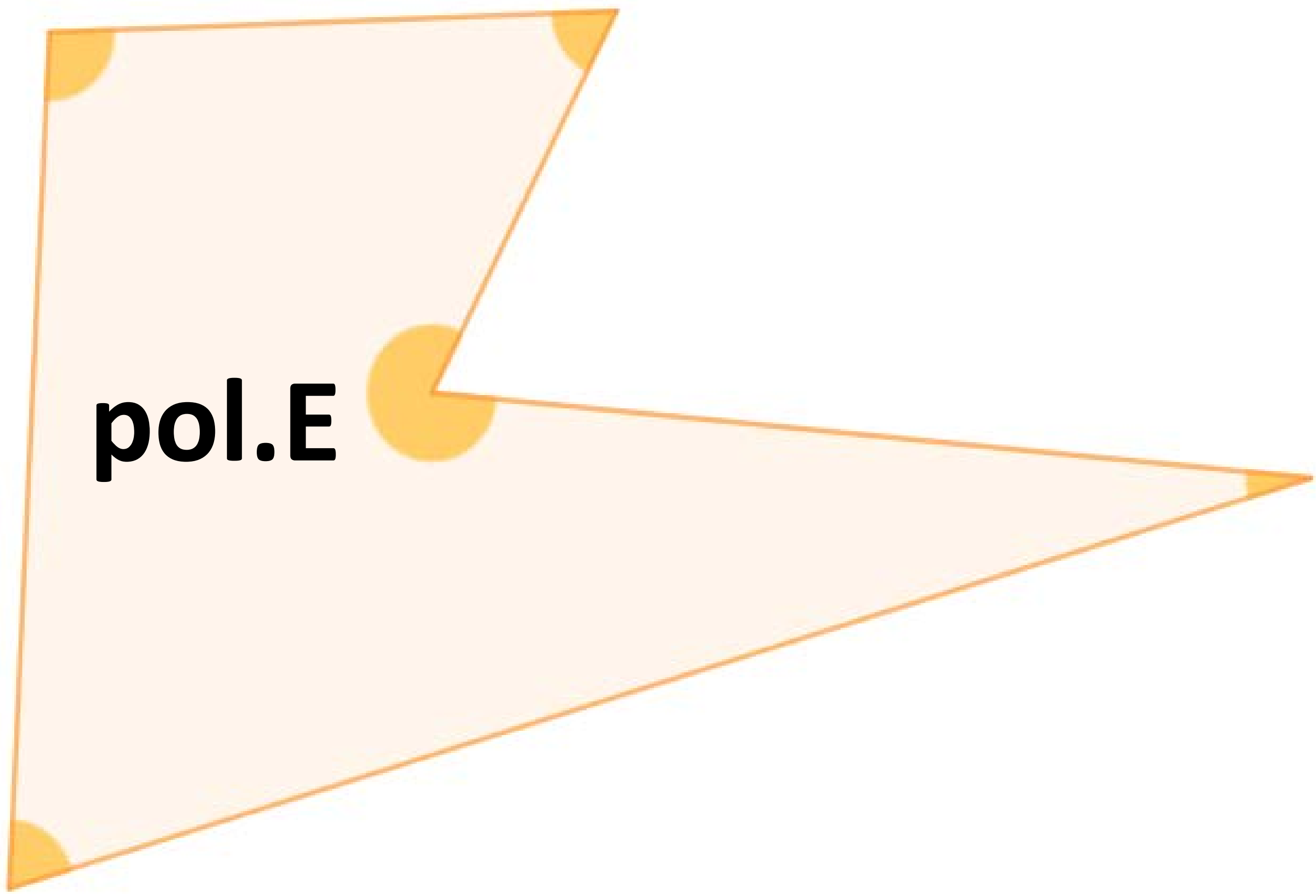


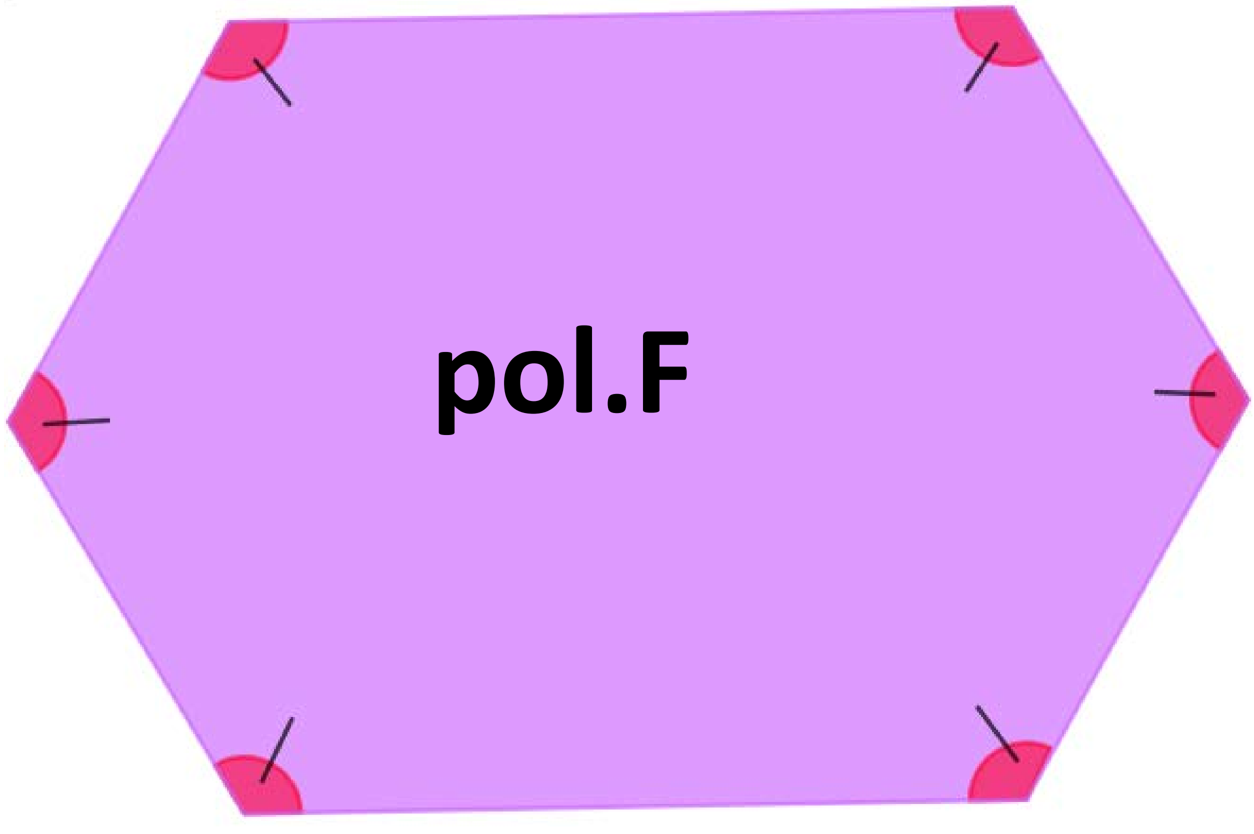

110°
117°
116°
pol.B
101°
96°

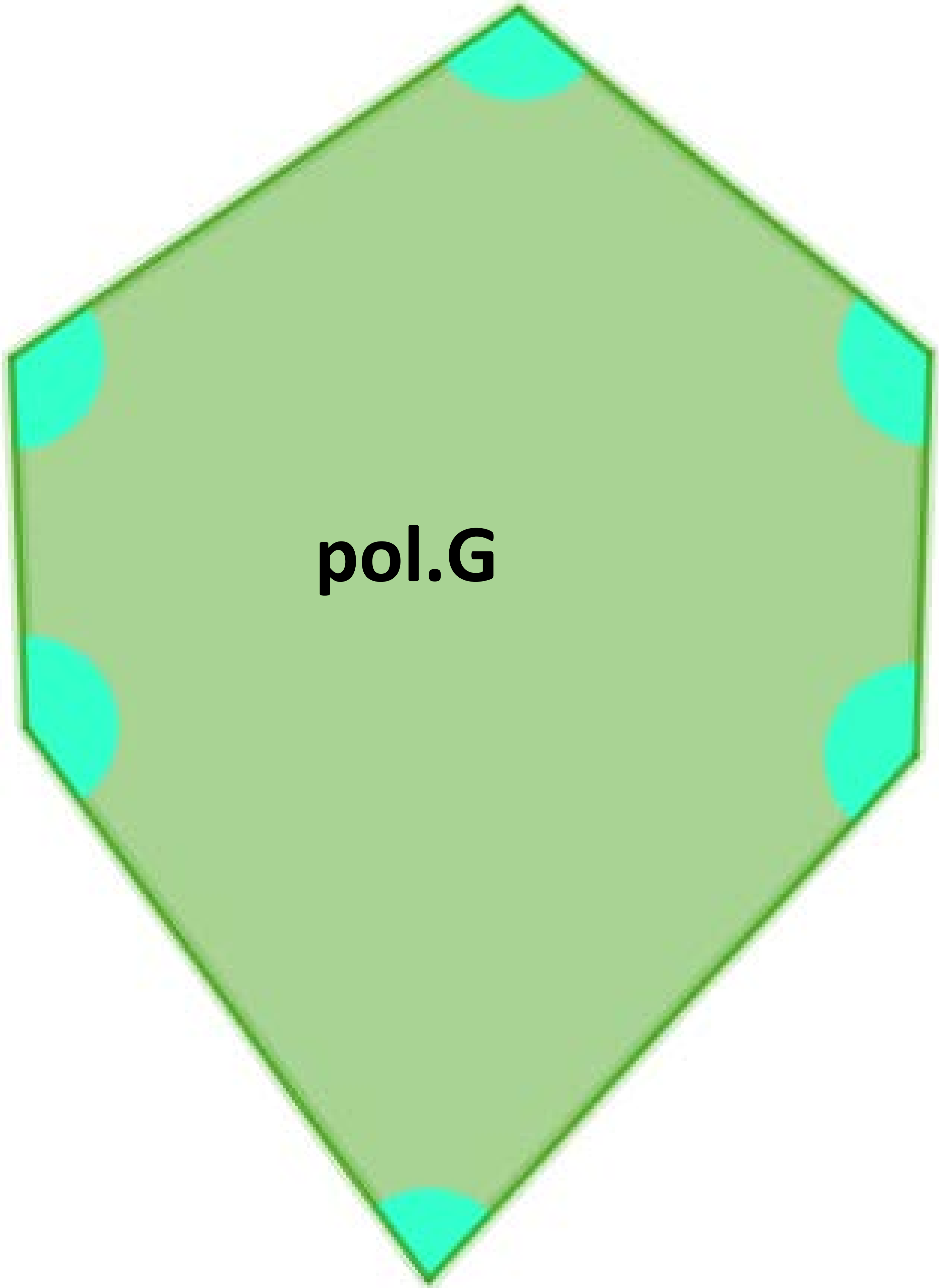


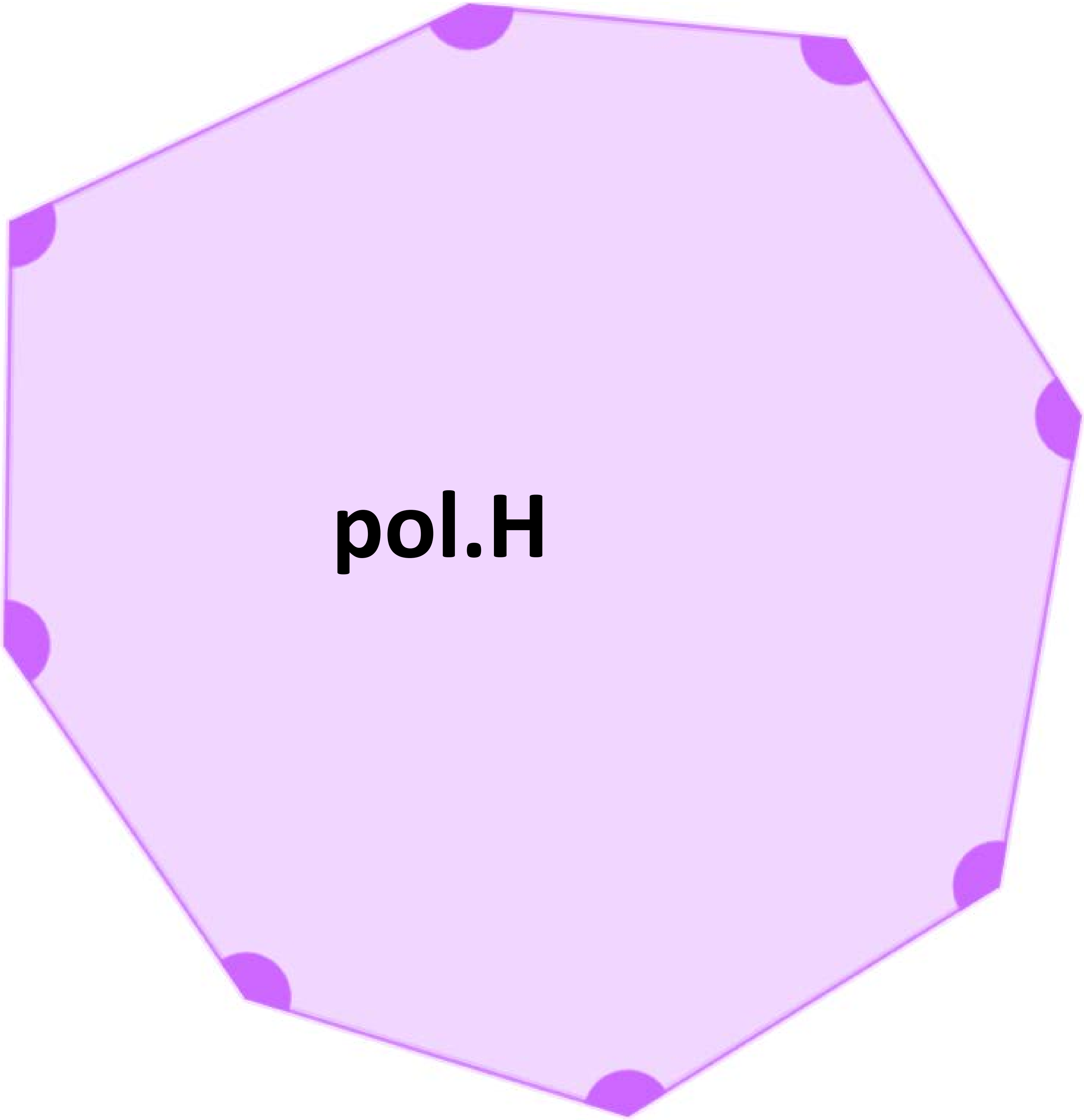
3
108°
3
108°
108°
pol.C
3
3
108°
108°
3

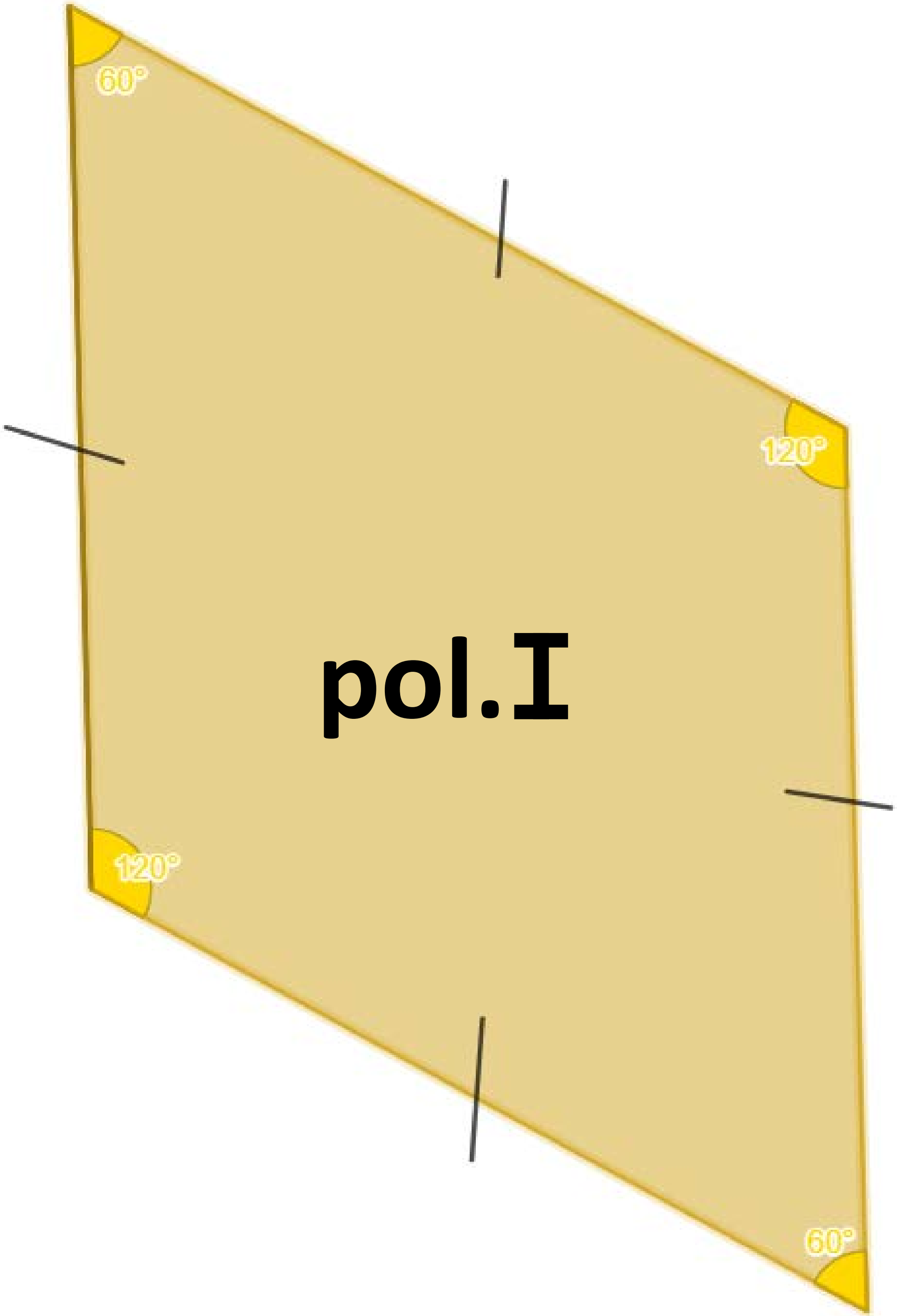

pol.D

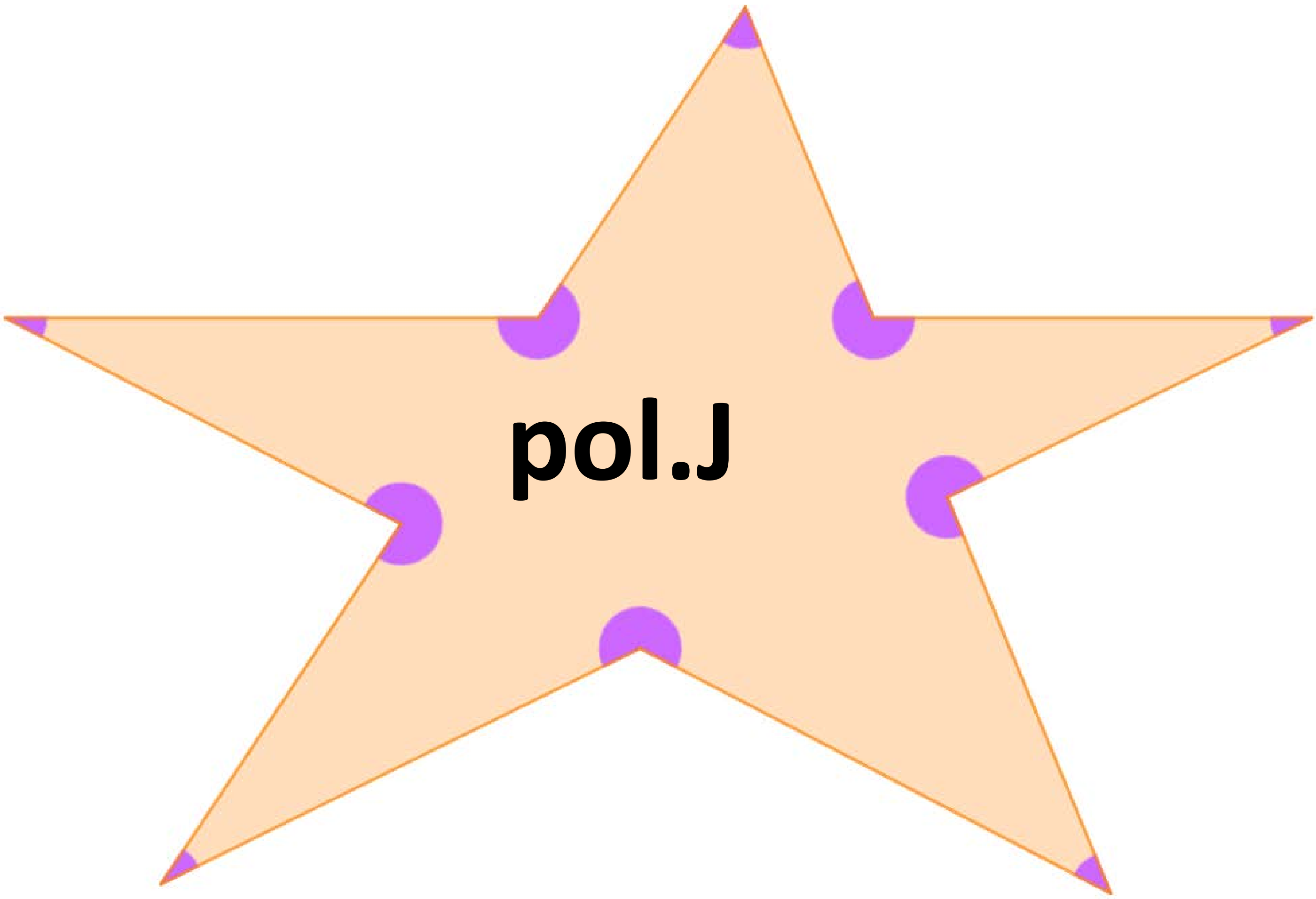

pol.E

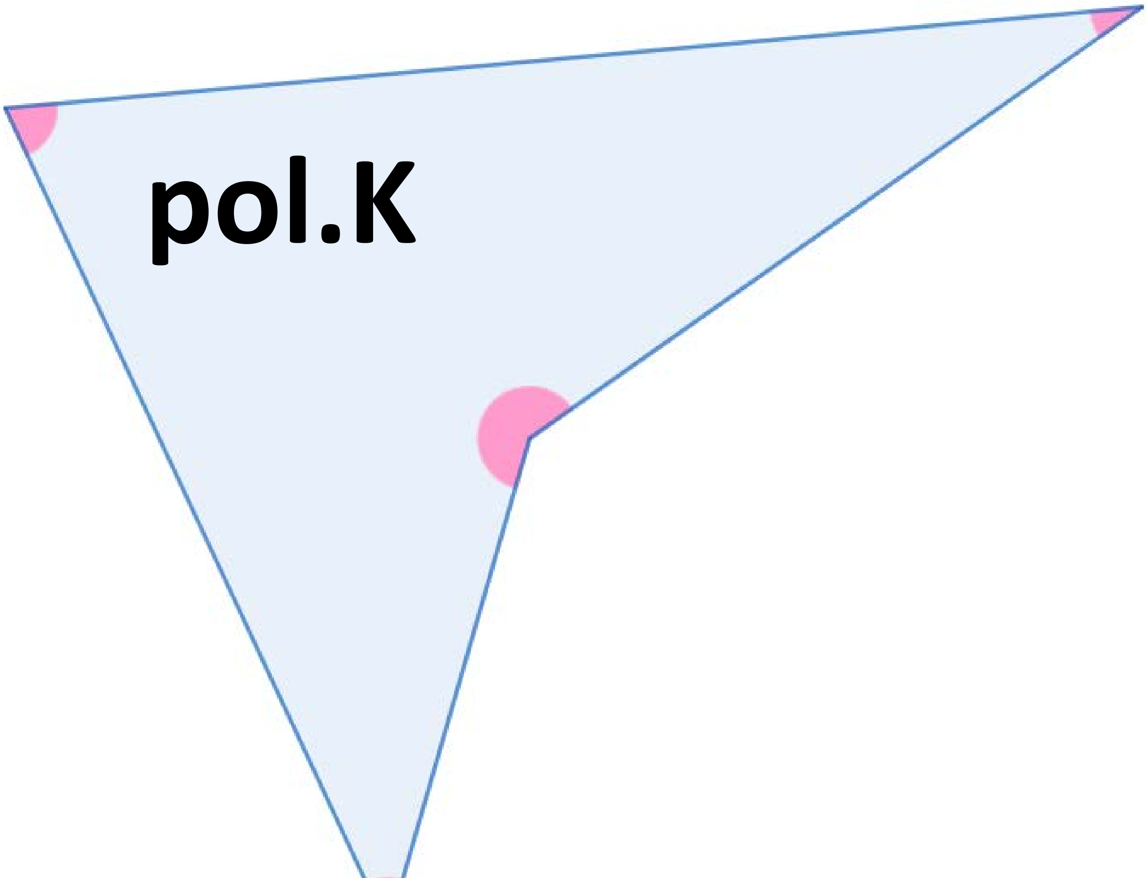

pol.F

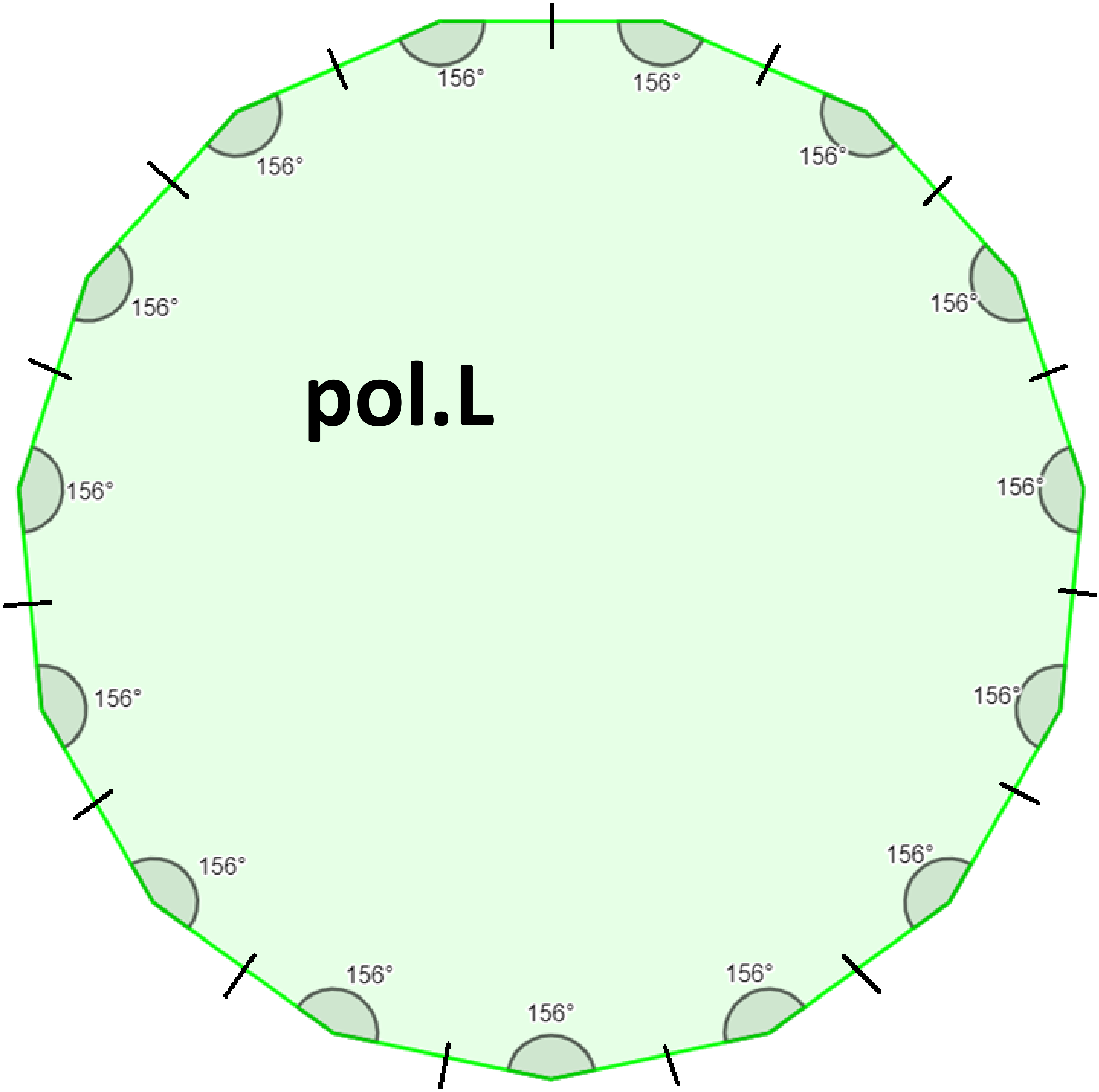

pol.G

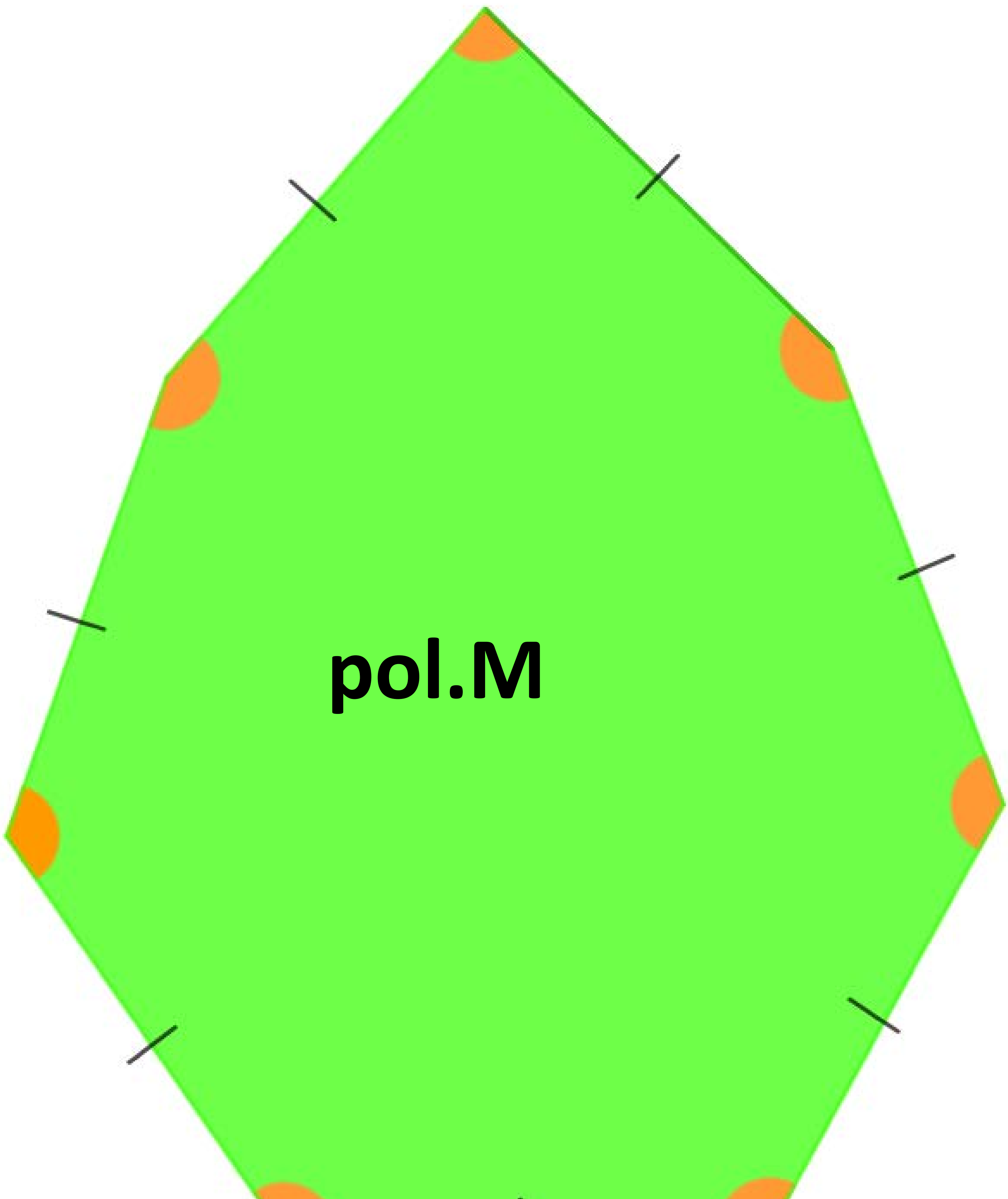

pol.H


60°
120°
pol.I
120°
60°

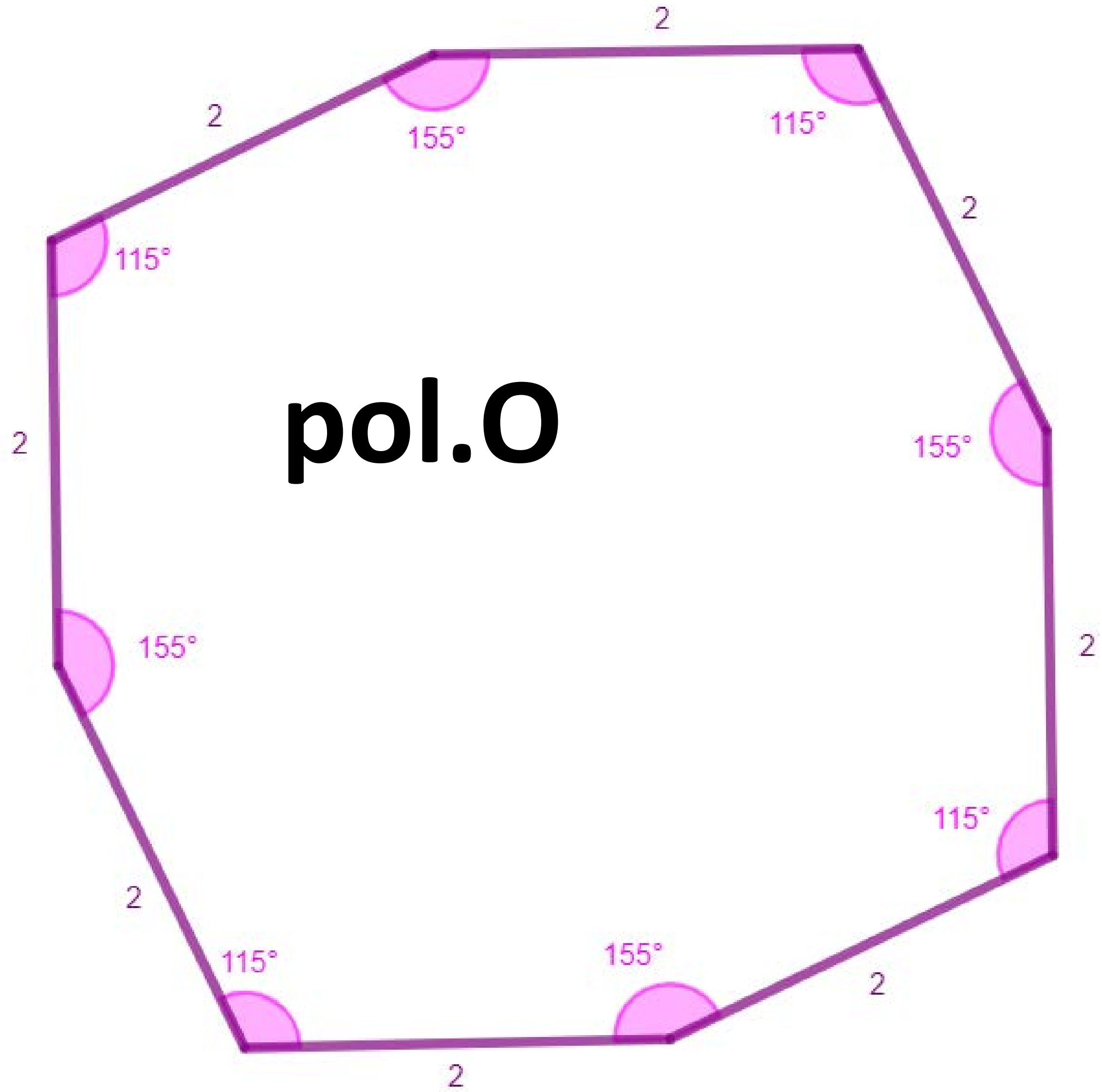

pol.J

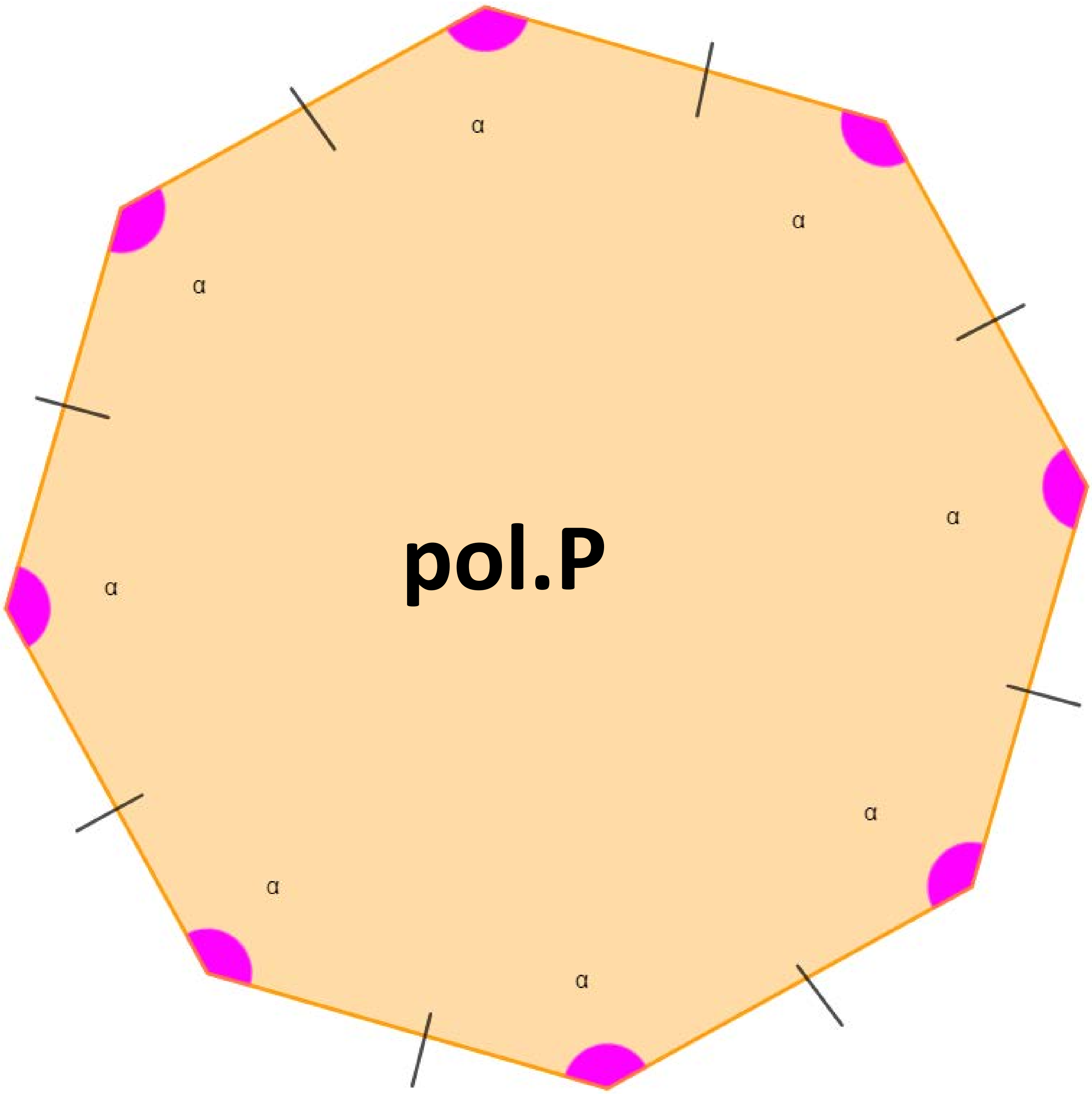

pol.K

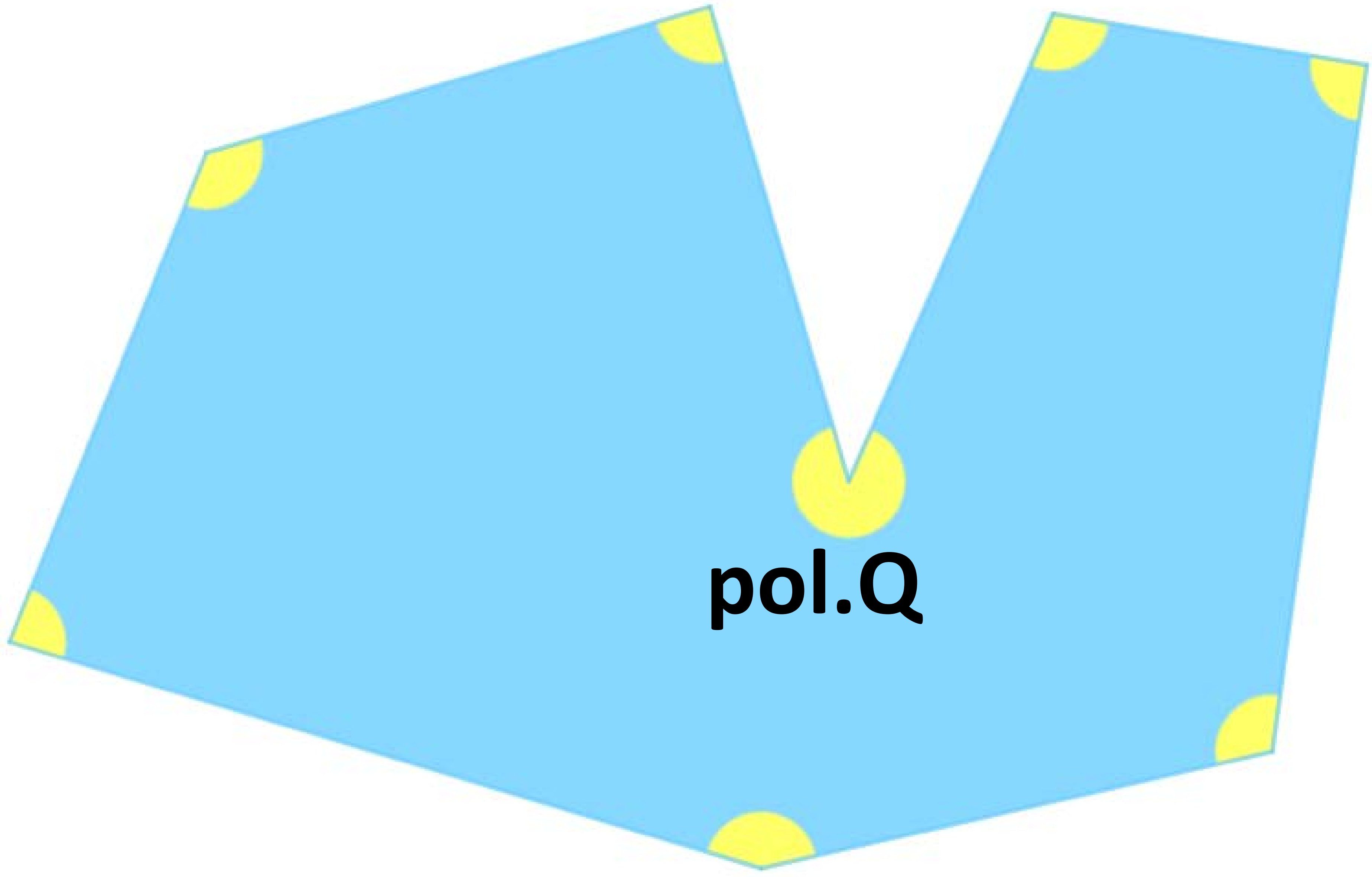

pol.L
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°
156°

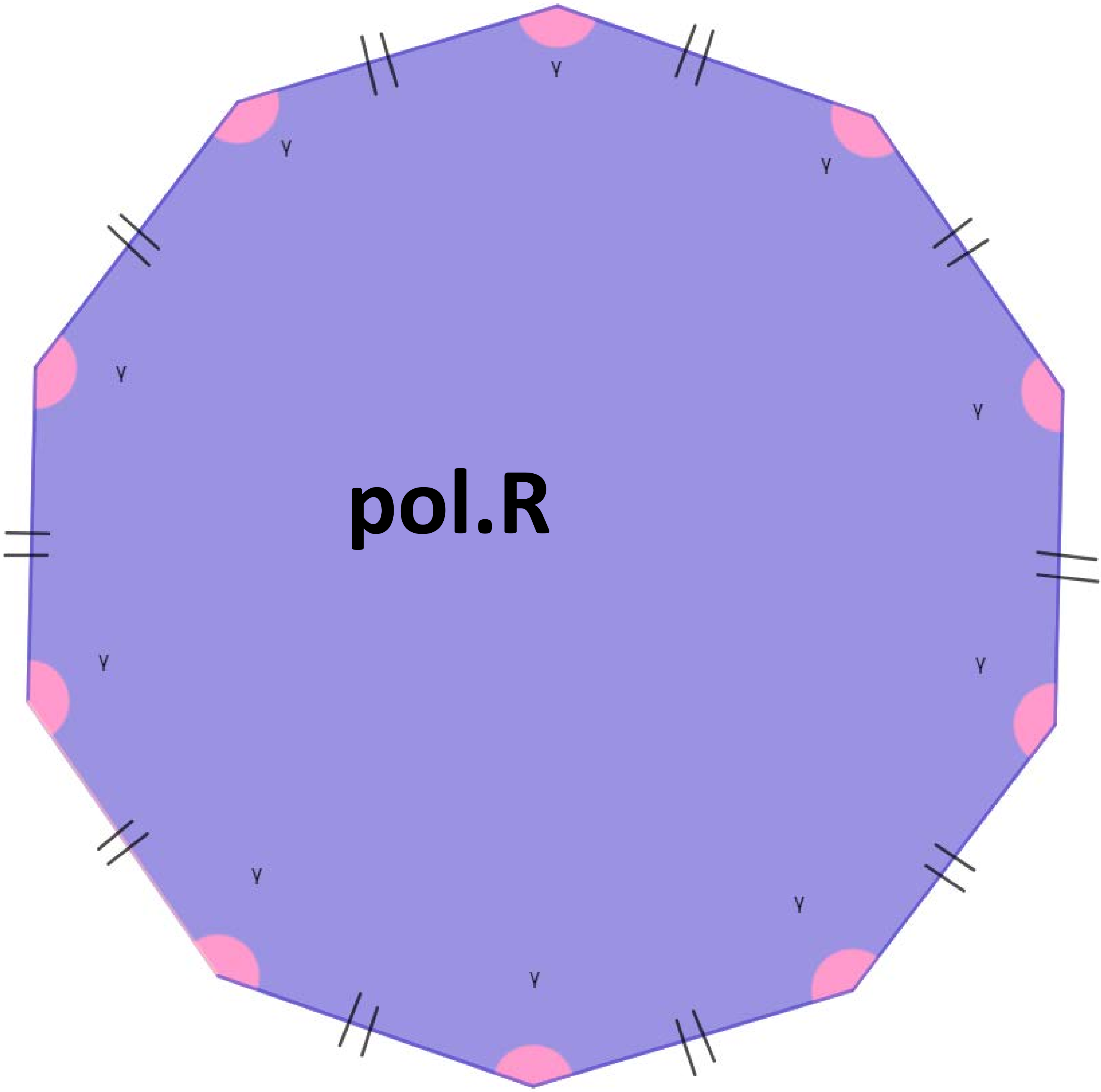

pol.M


pol.N

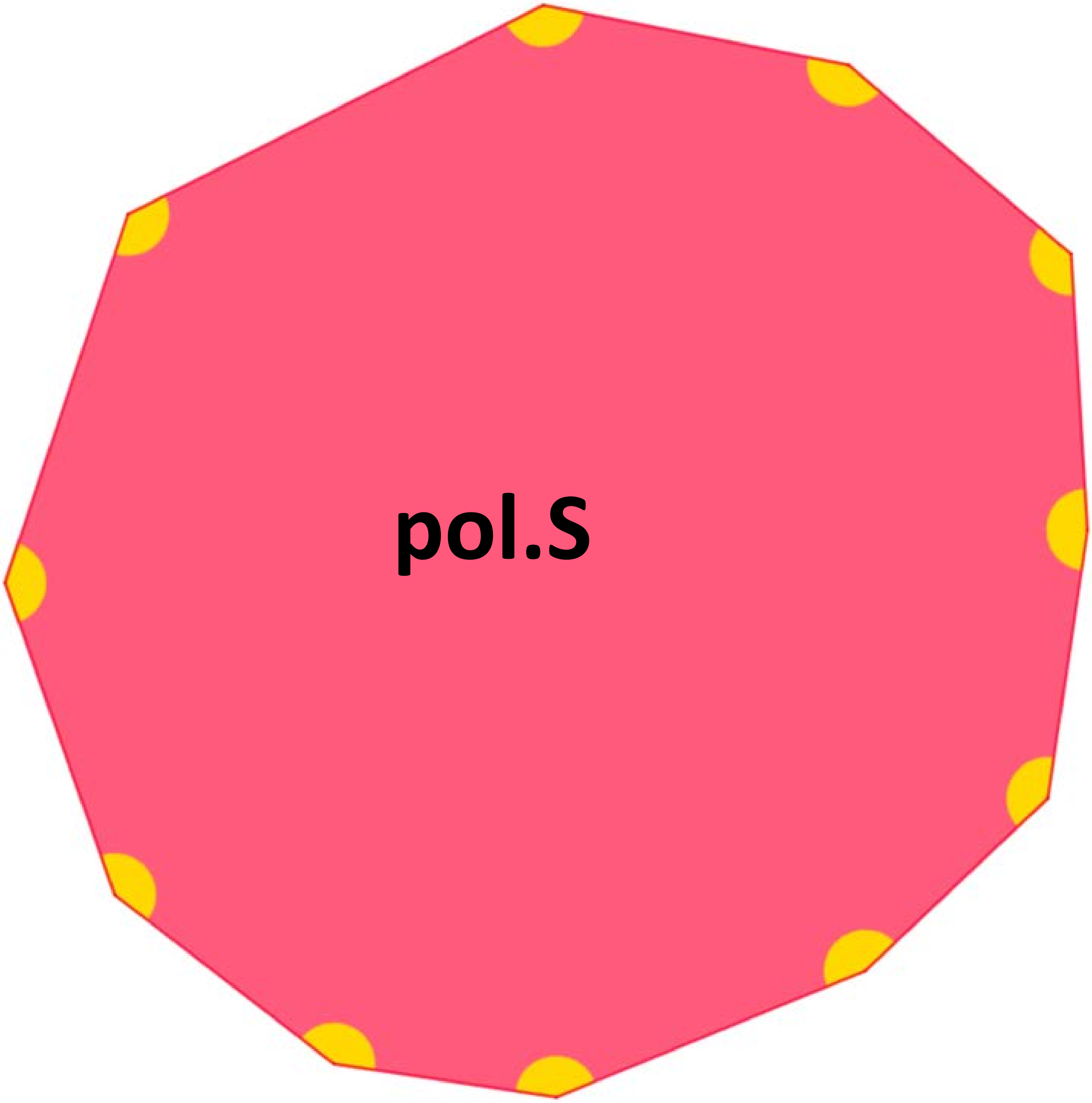

pol.O
2
2
2
2
2
2
2
2
155°
115°
115°
155°
155°
115°
115°
155°

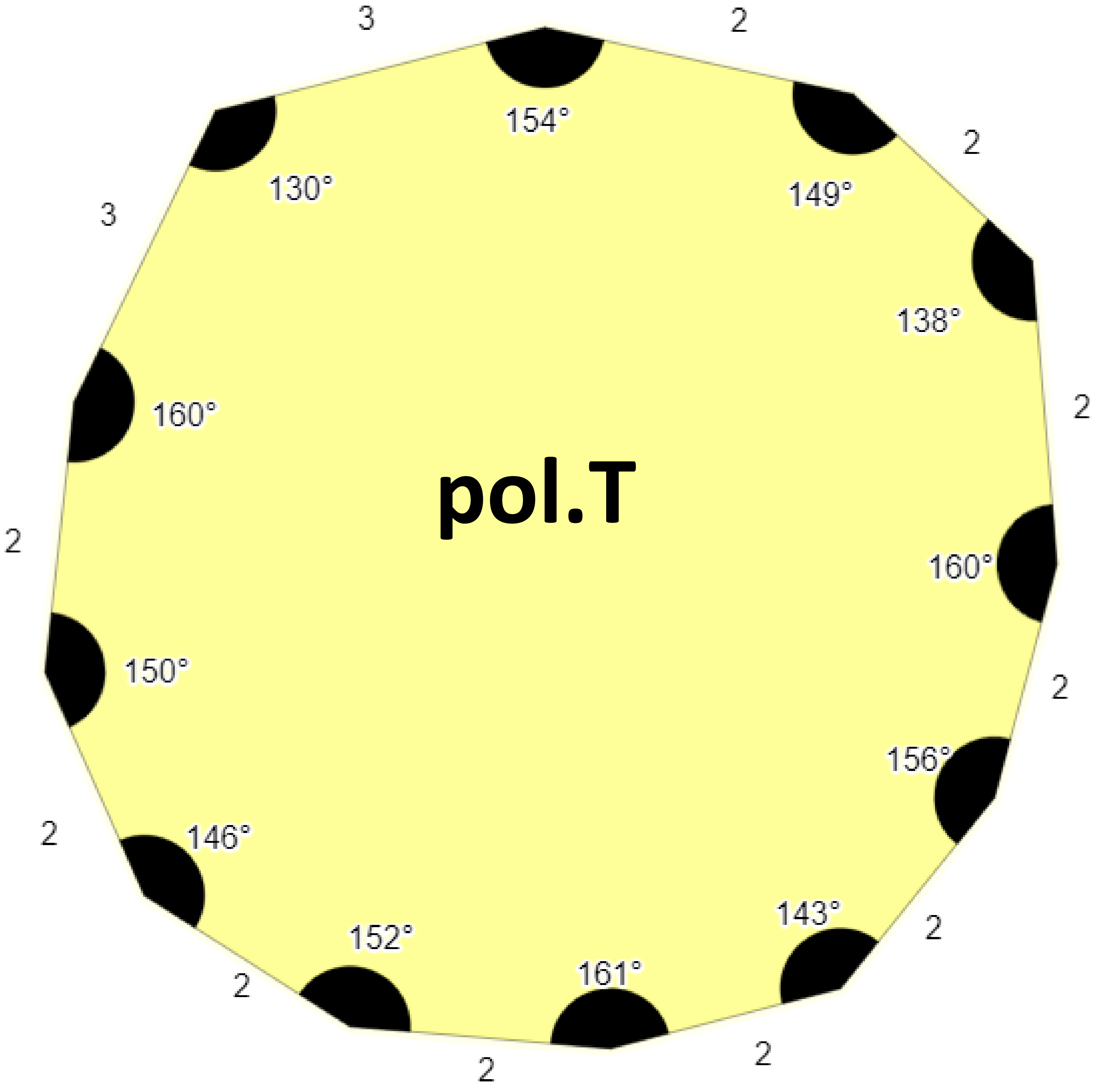

α
α
α
α
α
α
α
α
α
pol.P


pol.Q



γ
γ
γ
γ
γ
pol.R
γ
γ
γ
γ
γ
γ
γ


pol.S


pol.T
154°
130°
149°
138°
160°
160°
150°
156°
146°
143°
152°
161°
3
2
2
3
2
2
2
2
2
2
2
2
2