

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO
GRANDE DO SUL - CAMPUS CANOAS**

**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT**

**UMA PROPOSTA DE ANÁLISE DAS QUESTÕES DE LÓGICA DA OBMEP PARA
USO NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Marcelo Rodrigo Kasper

Canoas – RS

2025

MARCELO RODRIGO KASPER

**UMA PROPOSTA DE ANÁLISE DAS QUESTÕES DE LÓGICA DA OBMEP PARA
USO NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Produto Educacional produzido no âmbito do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) - Campus Canoas.

Orientador: Dr. Gabriel Goldmeier

Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Canoas – RS

2025

CIP - Catalogação na publicação

Kasper, Marcelo Rodrigo

UMA PROPOSTA DE ANÁLISE DAS QUESTÕES DE
LÓGICA DA OBMEP PARA USO NA EDUCAÇÃO BÁSICA /
Marcelo Rodrigo Kasper. -- 2025.

160 f.

Orientador: Gabriel Goldmeier.

Dissertação (Mestrado) -- Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Canoas,
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT, Canoas, BR-RS, 2025.

1. Ensino de Lógica. 2. Proposta didática. 3. Resolução
de Problemas. I. Goldmeier, Gabriel. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica do SIBIFRS
com dados fornecidos pelo(a) autor(a).

AGRADECIMENTOS

Sou grato a várias pessoas que me acompanharam na trajetória de todo esse curso de mestrado.

Sou grato ao Cleber, à Liliana e ao Murphy por tumultuarem e alegrarem meus dias. Amo vocês.

Sou extremamente grato às caronas e à boa companhia oferecidas pelos colegas Renato e Wagner da turma de 2022, e pela colega Gislaine da turma de 2024.

Sou igualmente grato às conversas construtivas com os colegas Josadaque, Joelmir e Thaís da turma de 2022, e com os colegas Cássio, Leandro e Gustavo da turma de 2023.

Sou grato aos professores que procuraram me auxiliar nessa jornada, em especial ao professor Nicolau, coordenador do curso, e ao meu orientador Gabriel.

Sou grato ao café que tomamos para afastar o sono, bem como às pizzas e às guloseimas que dividíamos para afastar a fome e alegrar as noites. Não são pessoas, mas foram “entidades” onipresentes ao longo do curso.

Sou grato à minha família e a meus amigos, que me apoiaram e compreenderam minhas ausências nesse período.

Sou grato ao meu querido amigo e colega Arthur, da turma de 2023, que infelizmente veio a falecer... nunca esquecerei os chocolates que me presenteava ou nosso amor comum a Magic: The Gathering (nosso jogo predileto). Um dia nos encontraremos para uma partida de Commander.

Por fim, sou grato à resiliência insuspeita que descobri possuir; motivo de não ter desistido no caminho.

RESUMO

A dissertação tem como objetivo dar foco à possibilidade curricular do ensino de Lógica, tomando como inspiração as questões da OBMEP que não necessitam do uso de conhecimento matemático específico, ou seja, questões que apelam somente para o uso do raciocínio lógico na sua resolução. Em termos de currículo, a BNCC aponta o raciocínio lógico como uma competência importante a ser desenvolvida, porém, não explicita o ensino de Lógica (vista aqui como a habilidade que orienta o “bem pensar”) no currículo de Matemática ou nos de outras disciplinas. Com isso em mente, foi construída uma proposta didática que busca tomar as questões da OBMEP como referência para o ensino de Lógica Formal, explorando conceitos através da metodologia de Resolução de Problemas. Para tanto, a análise das questões de Lógica da OBMEP foi determinante para que se verificasse esse potencial, mas, também, para pensar como a diversificação dessas questões poderiam ampliar a discussão para conceitos de Lógica ainda inexplorados, de modo a se tornar um referencial ainda mais rico a cada nova edição das Olimpíadas.

Palavras-chave: Raciocínio lógico; Ensino de Lógica; Proposta didática; Resolução de problemas.

ABSTRACT

This dissertation aims to focus on the curricular possibilities of teaching Logic, drawing inspiration from OBMEP questions that do not require the use of specific mathematical knowledge, that is, questions that rely solely on logical reasoning. In terms of curriculum, the BNCC identifies logical reasoning as an important skill to be developed; however, it does not explicitly include the teaching of Logic (seen here as the skill that guides "good thinking") in the Math curriculum or in other disciplines. With this in mind, a teaching proposal was developed that seeks to use the OBMEP questions as a reference for teaching Formal Logic, exploring concepts through the Problem-Solving methodology. To this end, the analysis of the OBMEP Logic questions was crucial to verifying this potential, but also to consider how diversifying

these questions could broaden the discussion to yet unexplored Logic concepts, thus becoming an even richer reference for each new edition of the Olympiads.

Keywords: Logical reasoning; Logic teaching; Didactic proposal; Problem-solving.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – validando silogismo (i)	26
Figura 2 - validando silogismo (ii)	27
Figura 3 - validando silogismo (iii)	27
Figura 4 - validando silogismo (iv)	27
Figura 5 - validando silogismo (v)	28
Figura 6 - validando silogismo (vi)	28
Figura 7 – Quadrado Lógico	42
Figura 8 – Exemplo de atividade de classificação envolvendo a noção de conjunto	62
Figura 9 – Carta do jogo Magic: The Gathering que retrata o Dilema dos Prisioneiros	86
Figura 10 – Questão 18 da II Olimpíada Pernambucana de Raciocínio Lógico (2011)	100
Figura 11 – Resolução da questão 18/2011 (i)	101
Figura 12 - Resolução da questão 18/2011 (ii)	101
Figura 13 - Resolução da questão 18/2011 (iii)	102
Figura 14 - Resolução da questão 18/2011 (iv)	102
Figura 15 – Questão 11 da prova de 2009	105
Figura 16 – Questão 15 da prova de 2023	106
Figura 17 – Questão 20 da prova de 2015	108
Figura 18 – Resolução da questão 20/2015 (i)	108
Figura 19 – Resolução da questão 20/2015 (ii)	109
Figura 20 – Resolução da questão 20/2015 (iii)	109
Figura 21 – Questão 19 da prova de 2013	110
Figura 22 – Questão 14 da prova de 2016	111
Figura 23 – Questão 14 da prova de 2014	114
Figura 24 – Questão 8 da prova de 2007	116
Figura 25 – Questão 14 da prova de 2011	117
Figura 26 – Questão 10 da prova de 2018	118
Figura 27 – Questão 6 da prova de 2022	128
Figura 28 – Questão 19 da prova de 2008	133
Figura 29 – Questão 11 da prova de 2021	134

Figura 30 – Questão 6 da prova de 2016	135
Figura 31 – Questão 19 da prova de 2024	136
Figura 32 – Questão 20 da prova de 2010	137
Figura 33 – Questão 8 da prova de 2007	149
Figura 34 – Questão 19 da prova de 2008.....	150
Figura 35 – Questão 11 da prova de 2009	150
Figura 36 – Questão 20 da prova de 2010	151
Figura 37 – Questão 14 da prova de 2011	151
Figura 38 – Questão 15 da prova de 2012	152
Figura 39 – Questão 19 da prova de 2013	152
Figura 40 – Questão 14 da prova de 2014	153
Figura 41 – Questão 20 da prova de 2015	153
Figura 42 – Questão 14 da prova de 2016	154
Figura 43 – Questão 6 da prova de 2016	155
Figura 44 – Questão 16 da prova de 2017	155
Figura 45 – Questão 20 da prova de 2018	156
Figura 46 – Questão 8 da prova de 2019	156
Figura 47 – Questão 18 da prova de 2019	157
Figura 48 – Questão 11 da prova de 2021	157
Figura 49 – Questão 15 da prova de 2022	158
Figura 50 – Questão 6 da prova de 2022.....	158
Figura 51 – Questão 19 da prova de 2023	159
Figura 52 – Questão 19 da prova de 2024	160

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Comparação: noção lógica e noção gramatical	21
Quadro 2 – Comparação: linguagem matemática e linguagem natural (português).....	23
Quadro 3 – Relação entre proposições	45
Quadro 4 – Tabela verdade para a negação	46
Quadro 5 – Tabela verdade para “\wedge”	46
Quadro 6 – Tabela verdade para “\vee”	46
Quadro 7 – Tabela verdade para “\rightarrow”	47
Quadro 8: Resumo da sessão 2.5	55
Quadro 9 – Questão de Lógica na OBMEP e suas respectivas classificações .	70
Quadro 10 – Programa sobre Lógica para 40 períodos do 1º ano do Ensino Médio	92
Quadro 11 - Resolução da questão 18/2011	102
Quadro 12 – Resolução da questão 14/2016	111
Quadro 13 – Resolução da questão 14/2014	114
Quadro 14 – Resolução da questão 19/2008	133

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
1.1. Justificativa	13
1.1.1. A importância e os desafios da valorização da racionalidade	15
1.1.2. O alcance da prova da OBMEP e a inserção de questões de lógica	16
1.2. Pergunta e objetivos da pesquisa	17
2. CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA LÓGICA	19
2.1. A interrelação entre Matemática, Linguagens e Lógica	19
2.2. Definição de Lógica como a estrutura do bem pensar	23
2.3. Diferenciando verdade de validade e entendendo as ideias de regras de inferência dedutiva	29
2.4. Lógica dedutiva vs. Lógica (?) indutiva	34
2.5. Lógica Proposicional, Lógica de Predicados e Lógica Modal	39
2.5.1. Os silogismos de Aristóteles	40
2.5.2. A Lógica de Boole	44
2.5.3. A formalização da Lógica por Frege	48
2.5.4. O sistema lógico-formal contemporâneo (a Lógica de Predicados de Primeira Ordem)	51
2.5.5. A Lógica Modal como ampliação da Lógica de Predicados de Primeira Ordem	53
2.5.6. Quadro-resumo	55
3. REFERENCIAL TEÓRICO E LEGAL	56
3.1. Como o ensino de Lógica é mencionado na BNCC (na Matemática, nas Linguagens e mesmo nas Ciências)	56
3.2. Da necessidade de se aliar a Linguagem à Matemática (ou “A Lógica como campo de interdisciplinaridade”)	58
3.3. A relação entre a Lógica e a abstração	60
3.4. O desenvolvimento do raciocínio lógico nas crianças e adolescentes ...	61
3.5. Sobre as metodologias de ensino e de avaliação escolhidas para a proposta didática	64
4. ANÁLISE DAS QUESTÕES DE LÓGICA DA OBMEP	69
4.1. Os diferentes tipos de questões de Lógica observados	69
4.1.1. Mentira vs Falsidade	72
4.2. Relação entre os tipos de questões e a Lógica (Proposicional e de Predicados)	73

4.3. Como expandiremos essa ideia	75
4.3.1. Expandindo os tipos de questão de Lógica Proposicional	75
4.3.2. Expandindo os tipos de questão de Lógica de Predicados	79
4.3.3. Expandindo os tipos de questão de Lógica Modal	82
5. A PROPOSTA DIDÁTICA	87
5.1. Esboço de como trabalhar com Lógica durante toda a Educação Básica	87
5.1.1. Educação Infantil, dos 2 ao 5 anos: Primeiros contatos com a Lógica Informal	88
5.1.2. Ensino Fundamental I (Anos Iniciais), dos 6 aos 10 anos: Fundamentos do Raciocínio	88
5.1.3. Ensino Fundamental II (Anos Finais), dos 11 aos 14 anos: Formalizando o Pensamento Lógico	89
5.1.4. Ensino Médio (15-17 anos): Lógica Avançada e Aplicações	90
5.2. Esboço preliminar de um programa didático para 40 semanas do 1º ano do Ensino Médio	91
5.3. Planejamento para a Proposta Didática	93
5.3.1. Sobre o público-alvo	94
5.3.2. Tema	94
5.3.3. Competências e Habilidades	94
5.3.4. Duração	95
5.1.5. Objetivos	95
5.3.6. Recursos didáticos	95
5.3.7. Metodologia a ser aplicada	96
5.3.8. Avaliação da aprendizagem	97
5.3.9. Descrição dos encontros	97
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	142
7. REFERÊNCIAS	145
8. ANEXO: ANÁLISE DAS QUESTÕES DA OBMEP	149

1. INTRODUÇÃO

Para um melhor entendimento do que se pretende apresentar ao longo desta dissertação, ela foi dividida em algumas sessões. Nesse capítulo introdutório, serão trazidas as justificativas para sua realização, incluindo as motivações pessoais, à pergunta que se procura responder, bem como os objetivos traçados para buscar resolver essa pergunta.

O segundo capítulo procura abordar considerações em relação à Lógica, como os conceitos que serão trazidos ao longo do trabalho. Tal abordagem mostra-se necessária, pois alguns conceitos de Lógica podem ser desconhecidos mesmo entre professores de Matemática.

No terceiro capítulo serão elencadas as teorias que servem de referência a esse trabalho. Nele mostramos a visão curricular sobre o ensino de Lógica, bem como o que as teorias de aprendizagem dizem sobre isso. Igualmente, lança-se um olhar sobre a metodologia de aprendizagem e de avaliação que se levará em conta no desenvolvimento de uma proposta didática.

O quarto capítulo traz a análise das questões de Lógica das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). As questões foram classificadas em diferentes tipos, o que pode auxiliar quanto a estratégia a ser adotada no método de resolução. Além disso, aponta-se sugestões para se expandir a abrangência de temas ligados à Lógica nessas questões.

Já no quinto capítulo, apresenta-se uma ideia superficial de como ficaria uma grade curricular que considerasse o ensino de lógica. Também neste capítulo, será elaborada uma proposta didática tomando-se as questões da OBMEP como referência. Tal proposta segue a linha metodológica apontada no capítulo 3.

Por fim, serão realizadas as considerações a respeito do que se elaborou ao longo desse trabalho.

1.1. Justificativa

A Matemática é, *“por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados”* (BRASIL, 2018, p.265). Por conta disso, é impossível dissociar a Matemática da Lógica, pois, em última análise, qualquer problema matemático é, por definição, um problema lógico. Para além das regras que aprendemos na Aritmética, na Álgebra, na Geometria, etc, o que estrutura tudo em um corpo coerente de conhecimento e de técnicas é a Lógica. Entender, ainda que superficialmente, como as estruturas lógicas se dão é de fundamental importância para que se busque sentido nas construções abstratas da Matemática.

Desde sua terceira edição, no ano de 2007, as provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) trazem pelo menos uma “questão de Lógica”, entre as vinte que compõem as provas da primeira fase, em pelo menos um dos seus níveis¹. Por “questão de Lógica”, descrevemos as questões que não tenham no seu processo de resolução a aplicação de conhecimentos matemáticos específicos. Questões como essas são comuns em provas de concursos públicos das principais bancas do país.

A motivação para abraçar esse tema surgiu com as aplicações das provas da OBMEP, mais precisamente do espanto dos alunos ao perceberem ali escondidas questões que não envolviam nenhum cálculo ou uso de conteúdos aprendidos em aula. Essas questões eram as que, geralmente, os estudantes mais comentavam após o término da prova. Em um burburinho entre os colegas, conversavam sobre qual resposta seria a correta e discutiam sobre as estratégias usadas por cada um, visivelmente intrigados.

Em certa ocasião, trouxe aos meus alunos um desafio de Lógica, desses em que se completa uma tabela relacionando informações. Há várias revistinhas com *puzzles* desse tipo em bancas de jornal/revista. Obviamente, nem todos eles se interessaram, afinal de contas lidamos com pessoas com gostos heterogêneos. Entretanto, os alunos que participaram da atividade, sentiram-se instigados e

¹ Os níveis da OBMEP compreendem os diferentes níveis escolares; A saber: 1º nível (6º e 7º anos do Ensino Fundamental), 2º nível (8º e 9º anos do Ensino Fundamental) e 3º nível (1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio).

divertiram-se ao conseguir desvendar a relação correta entre os componentes do desafio.

O raciocínio lógico é algo que deve ser praticado para ser desenvolvido. Fazer relações, suposições, inferências, chegar a conclusões, é como um músculo que precisa ser exercitado para aquisição de força e resistência. Nesse sentido, o ensino de Lógica pode ser um importante aliado para que esse almejado desenvolvimento do raciocínio ocorra de forma mais eficaz. Sobre a importância da Lógica e a forma de cultivá-la, Steven Pinker (2021, p.32) afirma, em seu livro *Racionalidade*, que:

A lógica é uma realização sublime do conhecimento humano. Ela organiza nosso raciocínio no trato com temas abstratos ou pouco familiares, como as leis do governo e as da ciência; e, quando aplicada ao silício, transforma a matéria inerte em máquinas pensantes. Mas o que a mente humana não instruída maneja não é uma ferramenta de uso genérico, independente de conteúdos, com fórmulas como “[SE P, ENTÃO Q]” é equivalente a NÃO [P E NÃO Q]”, nas quais qualquer P e qualquer Q podem ser inseridos. Ela maneja um conjunto de ferramentas mais especializadas que associa o conteúdo pertinente ao problema às regras da lógica (sem essas regras, as ferramentas não funcionariam). Não é fácil para as pessoas separarem as regras para empregá-las em problemas novos, abstratos ou aparentemente desprovidos de significado. É para isso que serve a educação e outras instituições voltadas para aperfeiçoar a racionalidade.

Em concordância com o autor, o presente trabalho procura estreitar a relação entre os educandos e essa importante ferramenta.

Sobre o ensino de Lógica, vale inicialmente destacar que a segmentação contemporânea dos conteúdos abordados nos Ensinos Médio e Superior de várias áreas costuma colocar a Lógica como um dos ramos da Filosofia. Contudo, é interessante perceber que, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio, a Lógica não é descrita como um dos objetos de conhecimento a serem trabalhados nas aulas de Filosofia. Tal disciplina acaba sendo diluída na área das Ciências Sociais, que inclui também História, Geografia e Sociologia. Ao ser colocada nessa categoria, a Filosofia não é entendida a partir de suas particularidades associadas à Lógica.

Com isso, deixa-se de lado a oportunidade de se investir num conhecimento que teria profunda relação com os itinerários formativos (do Novo Ensino Médio) ligados à programação. Como Pinker menciona na citação abordada anteriormente, a Lógica serve como base para a programação de computadores, um conhecimento que não pode ser ignorado num mundo cada vez mais tecnológico. Ao olhar para a

Lógica dessa forma, podemos pensar na associação entre Matemática, Filosofia e tecnologia, o que faz parte das competências apontadas na própria BNCC, como tendência para um futuro que passará a exigir a alfabetização digital.

1.1.1. A importância e os desafios da valorização da racionalidade

Sob o olhar de Steven Pinker, como visto, a Lógica é um pilar fundamental no qual se apoia o desenvolvimento pessoal e coletivo da racionalidade. Enquanto humanidade, vivemos um momento histórico de incríveis conquistas em praticamente todas as dimensões das nossas experiências. Nossa expectativa de vida aumenta ano após ano, estamos diminuindo o analfabetismo e a pobreza extrema, minorias têm tido mais voz etc. Pinker (2018) atribui tal progresso ao sucesso do Iluminismo, um olhar para o mundo que valoriza a razão, a ciência e o humanismo, e que, desde o final do século XVIII, tem lentamente se consolidado. Tal ideia passou a fazer ainda mais sentido com a popularização da internet, com a era da hiperconectividade. Entre muitas outras coisas, a revolução tecnológica em curso abriu espaço para a proliferação das mídias sociais e propulsionou movimentos sociais de valorização das liberdades individuais.

Contudo, principalmente nos últimos dez anos, uma onda de movimentos reacionários tem se espalhado pelo mundo e apontado na direção contrária a essas mudanças. A defesa das liberdades e da democracia que avançava globalmente tem sofrido a resistência de fortes movimentos nacionalistas de viés autoritário. A esperança em uma mídia cada vez mais livre e, ao mesmo tempo, fiscalizada mais de perto pelos cidadãos tem se transformado em desconfiança sobre tudo o que é compartilhado, na acusação feita por todos os espectros políticos de que seus adversários apelam de forma contumaz às famosas *fake news*. Compartilhamentos de ideias feitos muitas vezes de forma irresponsável e estimulados pela cultura dos *likes* têm acirrado os ânimos e polarizado o debate político, o que dificulta o espaço de consensos fundamentais para o avanço da democracia. Em paralelo a isso, um avanço sem precedentes na capacidade de acumulação e processamento de dados tem criado um ambiente de extrema preocupação em relação aos usos da tecnologia, em especial sobre como ela será regulamentada e sobre como desenvolveremos habilidades para nos proteger de quem a controla.

Essa dicotomia entre um mundo que progride, mas que parece estar enfrentando delicados desafios fez Harari (2019) declarar que “*as coisas para os humanos estão melhores do que nunca, ainda estão um tanto ruins, e podem ficar muito, muito piores*”. Em seus últimos livros, *21 Lições para o século XXI* (2018) e *Nexus* (2024), ele olha com preocupação para o futuro próximo, em especial para o desenvolvimento desordenado das Inteligências Artificiais (IAs). Para ele, ainda que tragam muitos ganhos, o desenvolvimento das IAs tem um potencial enorme de diminuir os empregos, de concentrar ainda mais a renda em poucos países e de servir para que empresas e líderes autoritários controlem ainda mais os indivíduos. Mirando nessas questões, Harari abre *21 Lições* afirmando: “*Em um mundo inundado de informações irrelevantes, clareza é poder*” (2018, página 11).

Com uma preocupação semelhante, depois de escrever o otimista *O Novo Iluminismo*, Pinker lança *Racionalidade* (2021). Tal obra mapeia as diferentes dimensões do pensamento racional com o intuito de defender uma urgente promoção do letramento racional dos cidadãos das sociedades democráticas contemporâneas. Em seu entendimento, tanto para florescermos como indivíduos como para trabalharmos e sermos cidadãos melhores, precisamos dominar algumas habilidades como noções de lógica, de probabilidade e de estatística, do método científico, de pensamento crítico, de pensamento de longo prazo e de teoria dos jogos. Com o aumento da complexidade das relações sociais e profissionais cada vez mais mediadas pelos algoritmos computacionais, tais habilidades são fundamentais para entendermos e interagirmos com o mundo de forma proativa. Nossas escolhas individuais e profissionais, bem como a nossa participação livre, não manipulada, no debate democrático baseado no conhecimento compartilhado dependem disso.

1.1.2. O alcance da prova da OBMEP e a inserção de questões de lógica

A OBMEP teve sua primeira edição no ano de 2005 e, desde então, se consolidou como a maior olimpíada científica do país, mobilizando atualmente mais de 18 milhões de estudantes. Desenvolvida pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), a OBMEP tem como objetivo o estímulo ao ensino de matemática na educação básica e a identificação de talentos na área.

Para além da própria olimpíada, os organizadores da OBMEP produzem materiais didáticos auxiliares, como banco de questões que podem ser acessados no site da OBMEP. O IMPA oferece cursos de capacitação para professores que pretendem dedicar esforços junto aos seus alunos, com foco em desempenhos que rendam medalhas olímpicas. O incentivo maior para os estudantes premiados são as bolsas do Programa de Iniciação Científica Jr (PIC), financiadas pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), garantindo auxílio financeiro aos estudantes.

Na terceira edição da OBMEP, em 2007, tivemos a inserção da primeira questão de Lógica nas provas da olimpíada. Ao menos uma questão de Lógica vem sendo incluída em algum dos três níveis a partir de então. Com isso, a olimpíada, que a priori já auxiliava a orientar o ensino da Matemática, passou a indicar a Lógica como uma possibilidade curricular, ainda que esta nunca fora abordada explicitamente no currículo da educação básica.

1.2. Pergunta e objetivos da pesquisa

Tendo em vista o potencial que as questões da OBMEP oferecem para o ensino de Lógica, como abordado acima na justificativa, a seguinte pergunta foi elaborada:

Como utilizar e melhorar as questões de Lógica da OBMEP a fim de qualificar o ensino de raciocínios lógico-matemáticos nos Ensinos Fundamental e Médio?

A partir desse questionamento, foram estabelecidos objetivos que orientarão o que se pretende trazer nesta dissertação em termos de conteúdo.

Objetivo geral:

* Propor melhorias às questões de Lógica da OBMEP, pensando em como usá-las como referência no ensino de Lógica na Educação Básica.

Objetivos específicos:

- * Verificar como a BNCC trata o ensino de Lógica Formal, apontando eventuais lacunas;
- * Analisar as questões de Lógica da OBMEP, propondo melhorias;
- * Desenvolver uma proposta didática associada às questões de Lógica da OBMEP.
- * Propor formas de desenvolver o raciocínio lógico na Educação Básica, incentivando o ensino de conceitos de Lógica.

A análise da BNCC tem por finalidade evidenciar como o ensino de Lógica Formal é tratado e como poderia ser encaixado entre os conteúdos curriculares a serem trabalhados. Já a análise das questões de Lógica da OBMEP se faz necessária para que se possa pensar inicialmente a viabilidade do objetivo seguinte. Definida a possibilidade de utilização das questões da OBMEP e de como o currículo oficial lida sobre o assunto, será desenvolvida uma proposta didática que se utiliza da resolução de problemas, uma metodologia que conquista protagonismo desde o final do século XX.

O último objetivo é o que mais se destacará ao longo dessa dissertação, visto que nela a proposição de sugestões de melhoria são diversas. Pode soar arrogante propor melhorias a materiais e documentos criados por tantos profissionais capacitados, mas esperamos torná-los mais ricos ao contribuir com estes dois centavos.

2. CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA LÓGICA

No presente capítulo, serão abordadas considerações acerca da forma com que a Lógica se desenvolveu ao longo da história e se estrutura hoje enquanto área do saber. Tal reflexão é importante, pois a Lógica não é suficientemente conhecida e ensinada por professores de Matemática, e vários dos conceitos desenvolvidos nesse capítulo aparecerão posteriormente na proposta didática.

2.1. A interrelação entre Matemática, Linguagens e Lógica

Como visto no capítulo introdutório, apelarmos à razão, é fundamental para progredirmos enquanto sociedade. Entretanto, temos dificuldades naturais com o desenvolvimento da racionalidade. Assim, educar para o bem pensar, para pensar respeitando as regras da Lógica, é (ou deveria ser) tarefa central da escola. Curiosamente, mesmo estando a Lógica no cerne da racionalidade, tal “área do conhecimento” não ganha destaque nos currículos escolares brasileiros. Não temos uma disciplina exclusiva de Lógica. Não há, como comentado anteriormente, menções ao ensino de Lógica Proposicional ou de Lógica de Predicados (muito menos de Lógica modal) na BNCC. É claro, como veremos, a BNCC defende que o “raciocínio lógico” seja ensinado nas diferentes áreas como na Matemática, nas Linguagens e na Ciência, mas sem se preocupar com o “como?”.

Nesse sentido, aqui, destacaremos alguns pontos de contato um tanto óbvios entre a Lógica, a Matemática e as Linguagens. Uma primeira pergunta que faz sentido colocarmos poderia ser: Como a Lógica participa da estruturação tanto da “linguagem” matemática como a das linguagens naturais (português, inglês, francês, etc)?

Para começar a responder a essa pergunta, partamos da observação de que, enquanto os demais animais usam a linguagem essencialmente para fins práticos de transmissão de informações (avisar seus pares sobre onde se encontra o alimento ou o perigo, qual é o momento de acasalar etc.), com muito mais frequência, nós utilizamos a linguagem com propósitos distintos dessas trocas de informações. Sem dúvida, assim como os outros animais, descrevemos o mundo que nos cerca através da linguagem. Todavia, também fazemos uso da linguagem escrita, corporal etc. para expressar sentimentos e para fazer arte a partir dela (escrevendo romances ou

poemas, dançando etc.). Além disso, usamos a linguagem para fins práticos mais elaborados. Na verdade, muitas vezes antes de realizarmos ações práticas, através da linguagem construímos hipóteses e, também através da linguagem, articulamos essas hipóteses e descrições do mundo para formularmos outras hipóteses e apresentarmos outras descrições.

Utilizamos as linguagens para muitos distintos fins. Alec Fisher faz uma lista, certamente não exaustiva, desses diferentes usos da linguagem. Para ele, as linguagens são usadas pelos humanos para *“relatar eventos, contar piadas, realizar convites, narrar histórias, fazer promessas, dar ordens, fazer perguntas, comunicar instruções, evocar emoções, descrever objetos etc”* (Fisher, 2008, p.23). Segundo Pascal Ide (1995, p.23), *“há três grandes tipos de faculdades no homem (sic): a inteligência (cujo ato é saber), a vontade (cujo ato é mover) e a afetividade (cujo ato é comover)”*. Assim, podemos dizer que, através da linguagem, sempre procuramos atingir a inteligência, a vontade ou a afetividade de nosso interlocutor. Dividiremos, pois, os usos da linguagem, respectivamente, em informativo, diretivo e expressivo.

O uso informativo da linguagem se dirige à inteligência (intelecto) do interlocutor. É o uso que fazemos quando queremos dizer como são as coisas, quais eventos acontecerão, o que implica o que, o que é verdadeiro, o que é certo etc. O uso diretivo, por sua vez, se dirige à vontade do interlocutor. São bons exemplos as ordens e os pedidos. Trata-se de um uso muito comum cujo objetivo é fazer com que as pessoas ajam de certo modo, que façam certas coisas. Logo, voltam-se às ações das pessoas. Já o uso expressivo se dirige à sensibilidade (afetividade) do interlocutor. Ou seja, tem por fim produzir sentimentos naquele com quem falamos ou para quem escrevemos. Exemplos clássicos são a poesia e o romance; mas, também, a linguagem corporal da dança, além de muitas outras coisas.

O manifesto de um general dizendo a seus soldados *“É chegada a hora da vitória, vamos atacar!”*, ou um cartão de alguém dizendo a sua amada *“Tu és a mulher mais linda do mundo!”*, pretendem, respectivamente, mover e comover. Os momentos em que elas são usadas não parecem ser apropriados a uma avaliação intelectual. Já tanto o texto filosófico como o científico, sem dúvida, têm um objetivo diferente dos dois últimos exemplos. Eles pretendem dizer como a realidade é (no caso da Filosofia ou da Ciência teórica), ou o que é certo fazer (no caso da Filosofia ou da Ciência

prática). Logo, apelam à inteligência tendo função informativa. (Cabe notar a diferença entre dizer o que é certo e dar uma ordem. A frase "É certo ir à escola." transmite algo distinto de "Vá à escola!". A primeira apela à inteligência; a segunda, à vontade, pois a primeira pede uma justificação, a segunda, não.)

Essa diferenciação é importante, pois marca um caráter peculiar da linguagem voltada à inteligência. Uma ordem, uma pergunta ou uma frase metafórica não têm valor de verdade. Ou seja, não faz sentido dizer que "Vá à escola!", "Qual é seu nome?" ou "Que lindo!" sejam frases verdadeiras ou falsas. Contudo, quando dizemos como é a realidade, ou o que é certo fazer, podemos tanto acertar como errar: o que dizemos pode ser verdadeiro ou falso. A essas frases, que têm a característica de serem ou verdadeiras ou falsas, damos o nome de proposições. O uso informativo da linguagem lida, portanto, com proposições.

Como aqui a proposta é refletir sobre o uso informativo das linguagens, a seguir, investigaremos os elementos que compõem as proposições, os conceitos, bem como o resultado da articulação lógica das proposições, a construção de argumentos. Definimos conceitos, enunciaremos proposições e utilizamos conjuntos de proposições organizados em premissas e conclusões para argumentar. Dados esses três elementos constituintes fundamentais da linguagem informativa, é interessante perceber o paralelo que o Ide (1995) estabelece entre esses termos e a gramática: aproxima os conceitos das palavras; as proposições das frases; e os argumentos dos parágrafos. Essas aproximações têm imperfeições, mas transmitem uma boa ideia das intenções da organização gramatical. O quadro abaixo facilita a visualização de tal relação:

Quadro 1 – Comparação: noção lógica e noção gramatical

<i>Noção lógica</i>	<i>Noção gramatical</i>
Conceito	Palavra
Proposição	Frase
Argumento	Parágrafo

Fonte: autor.

Refletindo sobre cada uma dessas correlações com a Lógica, podemos dizer que, dentre todas elas, a mais importante é a enunciação de proposições. São as

proposições os correlatos lógicos de nossas crenças teóricas ou práticas acerca do mundo. As crenças teóricas pretendem descrever como o mundo é; as crenças práticas, o que é correto fazer. Serão verdadeiras se descreverem de forma acertada os fatos da realidade ou as ações corretas. Logo, como é através da enunciação de proposições que expressamos o que entendemos ser a verdade de nossas crenças, é ela a mais importante operação lógica da inteligência. Conforme o que será apresentado nos parágrafos abaixo, as outras duas operações lógicas da inteligência (a definição de conceitos e a argumentação) lhes são subordinadas.

A fim de buscar verdade ou correção de nossas crenças, argumentamos. Argumentar é associar proposições chamadas "premissas" a partir de critérios racionais, com o intuito de produzir uma proposição chamada "conclusão" que seja consequência dessas premissas. Uma conclusão será consequência de um conjunto de premissas se a verdade das premissas "levar" à verdade da conclusão.

Para afirmarmos a verdade das premissas (e, assim, através de argumentos, afirmarmos a verdade das conclusões), precisamos saber o que os termos utilizados nessas proposições significam. Tais termos são os conceitos e é através das definições dos mesmos que buscamos entender os seus significados. Toda proposição é composta por conceitos que, associados, são ou não correspondentes aos fatos da realidade (proposições teóricas) ou ao que é correto (proposições práticas). Tomemos como exemplo a proposição teórica que enuncia "todos os corvos são negros": para afirmarmos que a mesma é verdadeira (ou falsa), temos antes que compreender o significado dos conceitos de "corvo" e de "negro" (é claro, também precisamos compreender a relação lógica estabelecida entre esses conceitos e expressa pelos termos "todos" e "são"). Logo, a definição de um conceito é temporalmente a operação primeira da razão, pois é impossível compreendermos a verdade (ou correção) das proposições se não compreendermos os termos que as compõem.

É claro, cada uma dessas operações lógicas pode ser identificada também no fazer da Matemática. Podemos, por exemplo, perceber uma aproximação interessante entre os elementos constituintes das linguagens da Matemática e do Português.

Quadro 2 – Comparação: linguagem matemática e linguagem natural (português)

<i>Matemática</i>	<i>Português</i>
Algarismo	Letra
Número	Palavra
Expressão	Frase
Demonstração	Texto

Fonte: autor.

Ao refletirmos sobre esses diferentes pontos de contato, acreditamos ficar bastante óbvia a conexão entre Lógica, Matemática e Linguagens. Sem dúvida, assim como a própria BNCC tangencia, o ensino de Lógica ganha espaço nas aulas de matemática. E, mais do que isso, se apresenta como um campo fértil para a construção de atividades interdisciplinares (para muitos, improváveis) aproximando as áreas da Matemática e das Linguagens.

Ainda em relação ao debate sobre a inserção de estudos mais sistemáticos de Lógica Formal nas aulas de Matemática, vale destacar o que motiva a escrita dessa dissertação: o fato de a OBMEP, ano após ano, inserir uma questão de Lógica na sua primeira fase. No capítulo 4, exporemos e analisaremos essas questões e proporemos formas de associar a reflexão sobre os processos de ensino-aprendizagem relacionados a elas às aulas de Matemática.

2.2. Definição de Lógica como a estrutura do bem pensar

Há um dos ramos da Filosofia que tem por objetivo estudar as possibilidades do conhecimento, estudar como podemos ter certeza de que algo que afirmamos é verdadeiro. A ele damos o nome de Teoria do Conhecimento ou Epistemologia. No desenvolvimento desse estudo, defrontamo-nos com duas posições extremas. Uma, defendida pelos céticos, afirma não ser possível acessarmos a verdade acerca das coisas do mundo. A outra, a posição relativista, toma a opinião de cada um como sendo a verdade relativa àquele sujeito. Contrapostas a esses dois extremos, acreditando na possibilidade de acessarmos a verdade acerca das coisas do mundo

(ao menos de algumas), e diferenciando o conhecimento da mera opinião, muitas teorias têm se desenvolvido ao longo dos séculos.

Platão (s.d.), em sua obra Teeteto, sugere que para chegarmos ao conhecimento de algo (para se ter ciência de algo – no sentido mais livre, para “fazermos” ciência), devemos ter atendidos três pressupostos:

- i) ter uma *crença (opinião)*;
- ii) *verdadeira*;
- iii) *corretamente justificada*.

O primeiro dos pressupostos é bastante óbvio. Não podemos ter ciência de uma ideia que não tomamos por verdadeira, ou seja, que não acreditemos que assim seja. Imagine que alguém faça a seguinte afirmação: “Eu sei que o Sol não é um planeta, mas eu acredito que é”. Provavelmente duvidaríamos da sanidade mental do indivíduo.

O segundo afasta a teoria platônica do relativismo. Quando Platão diz que o saber é uma crença verdadeira, sua intenção é distingui-lo da crença falsa, dado que ele admite, assim como o senso comum o faz, que as opiniões podem ser verdadeiras ou falsas (podemos ter a crença falsa de que o Sol é um planeta). Contudo, para que uma crença seja considerada saber (conhecimento), ela deve, necessariamente, ser verdadeira (jamais poderíamos dizer que tínhamos o saber falso de que o Sol é um planeta; o que tínhamos era a crença falsa de que o Sol é um planeta).

Mas Platão, para dar a uma opinião o estatuto de saber, exige da opinião, além da sua verdade, que a mesma tenha sido obtida “pelos meios corretos”, que tenha sido “corretamente” justificada. As aspas da frase anterior sem dúvida indicam uma dificuldade na definição do conceito de justificação correta. Mas, como esse não é um texto sobre Teoria do Conhecimento, não irei muito longe com essa discussão. De qualquer forma, podemos ao menos observar dois exemplos que, penso, dão uma pista do que Platão pretende ao exigir do conhecimento que seja uma crença, além de verdadeira, corretamente justificada.

Em primeiro lugar, imaginemos que tenhamos a seguinte crença verdadeira:

“Marte é um planeta”.

Contudo, que tenhamos chegado a essa conclusão a partir de duas crenças falsas:

- i) “todas as coisas que giram ao redor da Terra são planetas”;
- ii) “Marte gira ao redor da Terra”.

Nitidamente, nossa crença só é verdadeira, pois tivemos *sorte* ao derivarmos a mesma de duas crenças falsas (ainda que tenhamos feito uso de um *raciocínio correto* – algo que discutiremos a seguir). Afirmamos isso, pois, quem está comprometido com a ideia de que a verdade da afirmação “Marte é um planeta” decorre das duas afirmações acima, chegará à seguinte crença falsa:

“a Lua é um Planeta”,

derivando a mesma das afirmações (uma verdadeira e outra falsa):

- i) “todas as coisas que giram ao redor da Terra são planetas” (a afirmação falsa tomada por verdadeira anteriormente);
- ii) “a Lua gira ao redor da Terra” (uma afirmação, de fato, verdadeira).

Logo, não diremos que os meios para chegarmos à crença de que “Marte é um planeta” são corretos, pois, apesar de ela ser uma crença verdadeira, ela foi justificada com base em crenças falsas, crenças que em outras circunstâncias (como na do exemplo imediatamente posterior), podem levar a conclusões falsas. E isso, sem dúvida, não é ciência.

É claro que a busca por uma justificação que seja sempre derivada de crenças verdadeiras gera muitas dificuldades. Podemos nos questionar: o que garante que as crenças que justificam a crença em questão sejam verdadeiras? Não é difícil remetermos à situação corriqueira das crianças com seus eternos porquês (o que garante que as crenças que justificam as crenças que justificam a crença em questão sejam verdadeiras?). Esse, sem dúvida, é um grande problema, talvez até insolúvel, de regresso ao infinito. Todavia, ele também diz respeito à Teoria do Conhecimento e não à Lógica, logo não estenderei aqui a discussão.

Contudo, o problema da justificação correta também tem ligação com a Lógica. Imaginemos que a mesma crença verdadeira:

“Marte é um planeta”.

Pensem que ela seja “derivada” de outras duas crenças também verdadeiras:

- i) “nenhum planeta gira ao redor da Terra”
- ii) “Marte não gira ao redor da Terra”.

Aqui, ao contrário do exemplo anterior, a incorreção da justificação não está no fato de se partir de crenças falsas para se chegar ao conhecimento de algo. Na verdade, parte-se de crenças verdadeiras e se chega a uma crença verdadeira, mas de uma forma incorreta. Isso porque, quem aceita que a afirmação “Marte é um planeta” derivada das duas afirmações (verdadeiras) acima, também deverá aceitar, fazendo uso do mesmo raciocínio, a seguinte crença:

“meu cachorro é um planeta”.

Isso, porque, ela é derivada das duas afirmações verdadeiras apresentadas abaixo e similares às afirmações do argumento anterior:

- i) “nenhum planeta gira ao redor da Terra”;
- ii) “meu cachorro não gira ao redor da Terra”.

Também nesse último exemplo, não diremos que os meios para se chegar à crença de que “Marte é um planeta” são corretos. Aqui, contudo, o problema com a justificação é de outra natureza. Em primeiro lugar, podemos pensar que, em relação às qualidades citadas (“ser planeta” e “gitar ao redor da Terra”), as coisas do mundo podem ser, em princípio, separadas em quatro grupos distintos: a) as coisas que são planetas e giram ao redor da Terra; b) as coisas que são planetas e não giram ao redor da Terra; c) as coisas que não são planetas e giram ao redor da Terra; d) as coisas que não são planetas e não giram ao redor da Terra. Talvez uma figura facilite a compreensão do que foi acima referido.

Imaginemos, em primeiro lugar um diagrama representando o conjunto de todas as coisas existentes. Chamarei o mesmo de U (de Universo):

Figura 1 – validando silogismo (i)

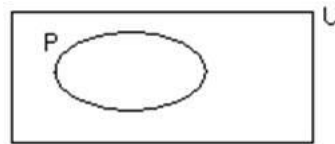


Fonte: autor.

Imaginemos agora que dividimos esse conjunto U em duas partes, promovendo inserção de um outro conjunto no mesmo. O conjunto inserido é o conjunto de todas

as coisas que são planetas (que representarei por P). E a divisão referida é entre o conjunto de todas as coisas existentes que são planetas (e que, portanto, estão no interior de P) e todas as coisas existentes que não são planetas (e que, portanto, estão fora de P).

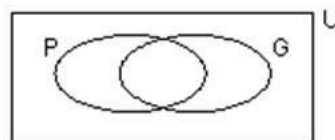
Figura 2 - validando silogismo (ii)



Fonte: autor.

Por fim, imaginemos o conjunto de todas as coisas existentes que giram ao redor da Terra (que representarei por G). Com, em princípio, nada proíbe que o que gira ao redor da Terra seja um planeta, terei que fazer o desenho permitindo, insisto – em princípio –, a intersecção.

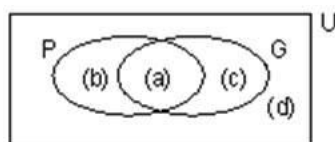
Figura 3 - validando silogismo (iii)



Fonte: autor.

Isso talvez facilite que se perceba os quatro cortes no universo com representando o que acima foi descrito por (a), (b), (c) e (d):

Figura 4 - validando silogismo (iv)

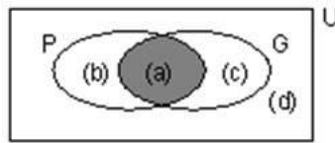


Fonte: autor.

Feito isso, podemos voltar à análise do raciocínio. A primeira afirmação proíbe corretamente que existam coisas no mundo que pertençam a (a). Já a segunda afirmação diz que Marte pertence a (b) ou (d). Contudo, a proibição de pertencer a (a) e a garantia de que pertence a (b) ou a (d), não garante que deva obrigatoriamente pertencer a (a) ou a (b) – os dois grupos aos quais Marte poderia pertencer para garantir a verdade da conclusão –, pois, como foi dito, há além de (b), a possibilidade de que Marte pertença a (d).

Usando mais uma vez o recurso do desenho, o que a primeira afirmação (“nenhum planeta gira ao redor da Terra”) garante é:

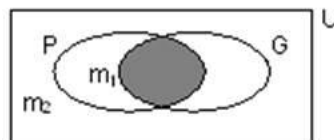
Figura 5 - validando silogismo (v)



Fonte: autor.

Como o que a segunda afirmação garante apenas que Marte (representado no próximo desenho por “m”), está fora de “G”, ainda não podemos ter certeza (apesar de, de fato, ser verdade), que “m” está dentro de P, pois, pela descrição, tanto poderia estar dentro (“m₁”) quanto fora (“m₂”):

Figura 6 - validando silogismo (vi)



Fonte: autor.

Vemos, pois, que nesse último raciocínio é a estrutura do pensamento que falha. A opinião verdadeira não estava corretamente justificada por uma falha estrutural do nosso pensamento, logo, não havia conhecimento. Assim, para garantir que a estrutura do nosso pensamento não falhe, logo, para que haja a possibilidade de uma justificação correta (que, por sua vez, possibilitará o conhecimento), é importante que se desenvolva uma técnica que possibilite a organização do bem pensar. A essa técnica damos o nome de Lógica.

Encerramos esse tópico apenas com uma menção histórica. Seria no mínimo desrespeitoso com, talvez o maior pensador de todos os tempos, falarmos sobre a arte do bem pensar sem mencionar o nome de Aristóteles. Cabe, pois, dizer que foi ele o primeiro a sistematizar, em seu *Organum*, as primeiras regras de inferência dedutiva que se tem notícia. As regras são distintas das exploradas no tópico a seguir e hoje ganharam uma nova roupagem. Ainda assim, é consenso considerar Aristóteles o pai da Lógica.

2.3. Diferenciando verdade de validade e entendendo as ideias de regras de inferência dedutiva

Vimos acima que uma afirmação não justificada ou mal justificada, mesmo que verdadeira, não passa de uma opinião. Contudo, como disse Aristóteles em sua *Metafísica*, “*todos os homens, por natureza, desejam conhecer*”. Ou seja, queremos mais do que simplesmente emitir opiniões, desejamos que nossas opiniões sejam verdadeiras e corretamente justificadas. Vimos também que um dos problemas de uma má justificação está na forma de estruturar a mesma. Assim, se desejamos desenvolver uma técnica que nos proteja dos perigos de estruturarmos mal nossos pensamentos, devemos, antes de mais nada, procurar identificar quais são os elementos constituintes da mesma.

Argumentamos com vistas a justificar uma afirmação dada. Logo, duas coisas se evidenciam em um argumento. Aquilo que queremos justificar e o que iremos usar para tal. Por exemplo, quando digo:

“amanhã irá chover”,

estou simplesmente emitindo uma opinião. Já, se digo:

“amanhã irá chover, pois meu joelho está doendo e sempre que meu joelho doi chove no dia seguinte”,

estou construindo um argumento.

Podemos notar que não basta que se construa um argumento para transformar uma mera opinião em conhecimento. Ainda precisamos que as afirmações que justifiquem o mesmo sejam verdadeiras (como vimos, esse não é um problema de lógica) e que a estrutura do argumento não apresente problemas (veremos que é para fazer essa análise que desenvolvemos a Lógica).

A fim de prosseguir na investigação sobre a estrutura de um argumento, fixemo-nos no argumento acima. Vemos que há duas afirmações:

- i) “meu joelho está doendo”;
- ii) “sempre que meu joelho dói chove no dia seguinte”;

que pretendem justificar uma terceira:

“amanhã irá chover”.

O que acabamos de apresentar acima é um argumento. Agora, analisando um segundo argumento, apresentaremos uma característica fundamental da Lógica Formal:

Ana é ansiosa ou Bruna é bipolar. Se Carla for calma, então Bruna não será bipolar. Carla é calma e Daniela é determinada. Portanto, Ana é ansiosa.

Observemos que o argumento acima possui três premissas:

P1: “Ana é ansiosa ou Bruna é bipolar”;

P2: “Se Carla for calma, então Bruna não é bipolar”;

P3: “Carla é calma e Daniela é determinada”

E uma conclusão:

“Ana é ansiosa”.

Agora, analisando essas proposições, podemos perceber que cada uma das premissas é composta por duas outras proposições mais simples. No total, temos quatro proposições simples nesse argumento:

A: “Ana é ansiosa”;

B: “Bruna é bipolar”;

C: “Carla é calma”;

D: “Daniela é determinada”.

Podemos observar que, para o raciocínio fazer sentido, há a necessidade de que essas proposições simples estejam conectadas. É isso o que fazem as conjunções “ou”, “se... então”, “e” e “portanto” (ainda há a expressão “não” que nega a proposição associada a ela). As três primeiras têm por função conectar duas proposições simples formando uma composta (por exemplo, a expressão “ou” conecta as afirmações “Ana é ansiosa” e “Bruna é bipolar” formando uma nova proposição: “Ana é ansiosa ou Bruna é bipolar”). Já o “portanto” transmite a ideia de que a última das proposições do parágrafo (Ana é ansiosa) é a conclusão das premissas apresentadas anteriormente.

Podemos perceber que tomaremos essas premissas por verdadeiras, isto é, assumiremos que são verdadeiras, mas não provaremos que são verdadeiras. A única

tarefa do raciocínio lógico que empregaremos é a de mostrar que, se considerarmos as premissas verdadeiras, somos obrigados a também considerar a conclusão verdadeira. De fato, o que determina a verdade de uma proposição é uma relação entre esta afirmação e como as coisas são, trata-se de uma relação entre linguagem e algo externo à linguagem: o mundo, as coisas. Cabe à ciência (no argumento acima, à psicologia) o papel de mostrar a verdade ou a falsidade das proposições (no caso, se Ana é ou não ansiosa, se Bruna é ou não bipolar, se Carla é ou não calma e se Daniela é ou não determinada).

Mas, se dizemos de uma proposição que ela é verdadeira ou falsa, de um argumento dizemos que é dedutivamente válido ou inválido. Um argumento será dito dedutivamente válido (bom, correto) se, ao tomarmos as premissas por verdadeiras, isso “obrigar” a verdade da conclusão. Assim como a avaliação sobre a verdade de uma proposição é função da ciência, a avaliação sobre a validade do argumento é tarefa da Lógica.

Podemos notar que a ideia de validade é completamente diferente da de verdade. A validade é uma propriedade interna do discurso. Lembremos, pois, do argumento com uma forma incorreta (argumento inválido) e que, mesmo assim, permite que concluamos a afirmação verdadeira de que “Marte é um planeta” a partir de outras duas crenças também verdadeiras (“nenhum planeta gira ao redor da Terra” e “Marte não gira ao redor da Terra”). Essa incorreção se evidencia, pois, se o tomássemos por correto, ficaríamos “obrigados” a aceitar a conclusão falsa de que “meu cachorro é um planeta” a partir de duas afirmações também verdadeiras (“nenhum planeta gira ao redor da Terra” e “meu cachorro não gira ao redor da Terra”). Quando avaliamos a validade de um argumento, afirmações são comparadas com afirmações, independente da sua verdade ou falsidade, para determinar se, caso as premissas fossem verdadeiras, isso seria ou não garantia da verdade da conclusão. A verificação da validade de um argumento passa pelo desenvolvimento das regras de inferência dedutivas que apresentaremos a seguir.

Uma vez mais, cabe destacar que a tarefa da Lógica não é avaliar se as proposições são verdadeiras ou falsas, mas sim, avaliar se é legítimo derivar uma afirmação (qualquer que seja o seu teor) de um conjunto de outras afirmações. Assim, observando uma vez mais o argumento acima, para analisar sua validade (legitimidade), devemos nos focar na forma do mesmo e não no conteúdo das

proposições. Para tal, desconsideramos o conteúdo de cada uma das quatro proposições representando cada uma delas por uma letra maiúscula (A, B, C e D, respectivamente). A forma do argumento fica representada como se segue:

A ou B. Se C, então não B. C e D. Portanto, A.

Agora, para mostrar que, partindo das três premissas do argumento, provamos logicamente a sua conclusão, precisamos desenvolver a ideia de regras de inferência dedutiva.

As regras de inferência dedutiva são regras que, dada a verdade de um conjunto de proposições (as premissas), obrigam a verdade de outra proposição (a conclusão) de algum modo conectada às primeiras. Por exemplo, se for verdadeira a proposição “Eduardo é estudante (E) e Fábio é fraco (F)”, dado o sentido do conectivo “e” (que diz que *ambas* as afirmações são verdadeiras), é claro que, obrigatoriamente, a proposição “Eduardo é estudante (E)” será verdadeira, bem como também a proposição “Fábio é fraco (F)”. Aqui acabo de exprimir duas regras de inferência que, de tão simples, passam até despercebidas. Assim, de uma proposição composta ligada pelo “e” (E e F), sempre se pode derivar cada uma das afirmações. Logo, temos aqui duas regras de inferência dedutiva (RID):

RID1: X e Y. Logo, X;

RID2: X e Y. Logo, Y.

Já o mesmo não vale para a proposição “Eduardo é estudante (E) ou Fábio é fraco (F)”. Dado o sentido do conectivo “ou” (que diz que *pelo menos uma* das afirmações é verdadeira), não podemos concluir que a proposição “Eduardo é estudante (E)” é verdadeira, nem que a proposição “Fábio é fraco (F)” é verdadeira. Isso também não quer dizer que possamos concluir que qualquer uma delas é falsa. Simplesmente, nesse caso, nada poderemos concluir a respeito de cada uma isoladamente.

Mas a situação se altera ao tomarmos por verdadeiras as seguintes proposições: “Eduardo é estudante (E) ou Fábio é fraco (F)” e “Fábio não é fraco (não-F)”. Agora sim, ao adicionarmos uma segunda afirmação (não-F), concluiremos que a proposição “Eduardo é estudante (E)” deverá também ser tomada por verdadeira.

Afirmo isso, pois, como citei antes, a ideia transmitida pelo “ou” da primeira premissa é a de que pelo menos uma das proposições simples que a compõem (“E” ou “F”) é verdadeira. Como a segunda premissa afirma que uma das proposições simples que compõe a primeira premissa é falsa (“F” é falso), Eduardo deverá, obrigatoriamente, ser estudante.

No argumento acima, o que o torna válido é, portanto, a sua *estrutura*:

RID3: X ou Y. não-X. Logo, Y.

O que acabamos de apresentar acima é uma das regras de inferência ligadas à ideia da conjunção “ou”.

Agora, voltando ao argumento acima, quando tomamos por verdadeira a proposição “Carla é calma (C) e Daniela é determinada (D)”, estamos tomando por verdadeiras ambas as proposições simples que a compõem. Logo – lembrando da regra de inferência ligada ao “e” –, posso derivar da proposição “C e D” a proposição C.

Estamos, pois, autorizados a tomar a proposição C por verdadeira. Como também tomamos a premissa “Se C, então não-B” (Se Carla for calma, então Bruna não será bipolar) como verdadeira, ao aplicar uma nova regra de inferência ligada à implicação (se... então) podemos passar a tomar a proposição “não-B” também como verdadeira. Isso se segue do fato de que quando afirmamos que “se Carla for calma, então Bruna não será bipolar”, o que estamos dizendo é que, se o antecedente for verdadeiro (se Carla for calma), então o conseqüente (Bruna não ser bipolar) será também obrigatoriamente verdadeiro. Como, além disso, afirmamos que Carla é calma, podemos concluir que Bruna obrigatoriamente não é bipolar. Simbolizamos essa regra como se segue:

RID4: Se X, então Y. X. Logo, Y.

Passamos, portanto, a também a estar autorizados a tomar a proposição não-B como verdadeira (ou seja, a proposição B como falsa). Assim, como, pela primeira premissa do argumento, tomo “A ou B” (ou seja, pelo menos uma das proposições é verdadeira) por verdadeiro (lembrando da regra de inferência ligada ao “ou”) sou obrigado a concluir que A (Ana é ansiosa) é uma proposição verdadeira.

O que acabamos de apresentar é uma análise do argumento apresentado no primeiro parágrafo. Vimos então que, se tomarmos as premissas por verdadeiras, a conclusão obrigatoriamente será verdadeira. É justamente isso que comprova a validade do argumento. E a estrutura do argumento, que garante a sua validade está apresentada a seguir:

$$P3 : C \text{ e } D \Rightarrow C$$

$$\left. \begin{array}{l} C \\ P2 : C, \text{ então não-B} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{não-B}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{não-B} \\ P1 : A \text{ ou } B \end{array} \right\} \Rightarrow A$$

2.4. Lógica dedutiva vs. Lógica (?) indutiva

Desenvolvemos acima a ideia de que a Lógica, definida de uma forma um tanto imprecisa, poderia ser considerada a arte do bem pensar. Em um segundo momento, ao introduzirmos as ideias de validade e de inferência dedutiva, afirmamos que um argumento é dedutivamente válido se, ao tomarmos/supormos as premissas verdadeiras, somos obrigados a tomar/supor a conclusão também verdadeira. Dito de outro modo, em um argumento dedutivamente válido, a conclusão se segue necessariamente do conjunto de premissas. Sendo ainda mais preciso, segundo o Dicionário Oxford de Filosofia, a Lógica (dedutiva) é a “ciência geral da inferência”, ou seja, seu objetivo “é tornar explícitas as regras através das quais as inferências podem se realizar”.

Mas, ainda que essa seja a definição técnica, há muitas pessoas que entendem como “lógico” um raciocínio “ponderado”, isto é, segundo uma das definições do Dicionário Houaiss, “conforme o bom senso”. É nesse sentido que utilizamos o termo “lógico” na sentença “é lógico que, já que ele caiu do décimo andar de um prédio, e então morreu”. Mas, como podemos entender a ideia de bom senso, de raciocínio ponderado? Será que podemos tomar o bom senso como o pensamento da maioria, como o senso comum, como aquilo que a psicologia do ser humano médio toma como correto? Parece que não, pois, às vezes, o senso comum nos leva a conclusões

equivocadas. Por exemplo, observemos um interessante problema de Matemática básica apresentado a seguir:

Uma determinada população de bactérias duplica de volume a cada minuto. Às 9 horas uma pequena quantidade é colocada em um recipiente que, às 10 horas, fica completamente cheio. Nessas condições, em que instante as bactérias ocupavam $1/4$ da capacidade do recipiente?

Tal problema tem informações suficientes para chegarmos a uma solução única, isto é, para concluirmos que, às 9h58min a quantidade de bactérias era $1/4$ do total. Isso porque, depois de um minuto (às 9h59min), a quantidade dobra, ocupando metade do recipiente; e, novamente depois de outro minuto (exatamente às 10h), a quantidade novamente dobra, ocupando todo o recipiente. Contudo, é interessante nesse problema que ele, apesar de bem determinado, faz a maioria dos que tentam resolvê-lo pensar que a resposta é 9h15min, pois, em geral, é comum às pessoas imaginarem um crescimento aritmético, ao invés de imaginarem um crescimento geométrico, aquele que conduz à resposta certa (elas então acabam pensando que a metade da quantidade foi ocupada na metade do tempo e $1/4$ da quantidade foi ocupada em $1/4$ do tempo, ou seja, às 9h15min).

Logo, se dissermos que um "raciocínio lógico" é equivalente ao raciocínio da maioria, teremos que admitir que, às vezes, uma resposta "lógica" pode estar errada, o que parece ser um total contrassenso. Isso porque, como dito no início, associamos a ideia de "lógica" à de "certeza". Alguns, no entanto, procurarão diferenciar o bom senso do pensamento da maioria chamando a atenção para o fato de que a maioria, em relação a muitas coisas, não tem condições de apresentar "boas" opiniões. Esse seria o caso da opinião da maioria em relação a questões da Matemática. Dado que a maioria apresenta dificuldades de compreensão dessa disciplina, devemos apenas dar importância às opiniões dos especialistas.

Nesse sentido, seria lógico aceitarmos as opiniões ponderadas dos especialistas (quando referentes às suas especialidades, é óbvio). Mas, sendo isso correto, podemos continuar afirmando que a Lógica pode estar errada, pois há uma infinidade de opiniões de especialistas que, ao longo da história, se mostraram erradas. Um dos exemplos mais claros desse tipo de erro está ligado às opiniões

ponderadas dos astrônomos anteriores a Copérnico que afirmavam, e tinham boas razões para isso, ser o Sol que girava ao redor da Terra.

Mas, sendo assim, será que somente podemos dizer que um raciocínio lógico é aquele amparado por regras formais como as apresentadas acima? A fim de problematizar esse ponto, coloco a seguinte questão: é lógico dizer que o quarto termo “x” da sequência (0, 2, 4, x) é 6? Se é lógico, qual a regra formal que garante isso? Ou esse raciocínio é lógico em outro sentido?

Alguns dirão que o quarto termo é 6, pois a sequência tem uma regra de formação implícita em que o próximo termo é sempre igual ao anterior acrescido de 2. Contudo, ao se dizer isso, está se fazendo apelo a uma noção psicológica comum à maioria, e não a uma regra implícita que obrigue tal conclusão. Isso porque outros poderiam fazer uso de uma regra implícita distinta e afirmar, por exemplo, que o quarto termo é 5. Poderiam, por exemplo, argumentar que a sequência tem por regra de formação a fórmula “ $a_n = -\frac{n^3}{6} + n^2 + \frac{n}{6} - 1$ ”, e que, portanto, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ e $a_4 = 5$.

É claro, a grande maioria pensaria que o quarto termo da sequência é 6. Contudo, ainda assim, é somente o apelo à opinião da maioria que nos faz tomar como “certa” a primeira resposta. Assim, se esperamos que os indivíduos respondam que o quarto termo da sequência é igual a 6, na verdade não estamos esperando que ele faça uso de sua capacidade de raciocínio lógico-dedutivo, mas sim que suas capacidades psicológicas sejam similares às da maioria das pessoas.

Por essa razão, um teste que pergunte qual é o quinto termo da sequência (1, 3, 5, 7, x) não deve ser classificado como um teste lógico-dedutivo, mas sim um teste psicológico ou psicotécnico. E o pior, uma pessoa, que tenha sua psique distinta da maioria, e não por isso menos “certa”, pode marcar uma resposta distinta de 9 (Como veremos, muitos testes de concursos que se dizem testes de Lógica medem esse olhar padrão, não a capacidade de raciocínio lógico do aplicante. É claro, o teste pode querer exatamente testar se a pessoa tem padrões psicológicos comuns à maioria.)

Em relação ao ponto exposto acima, alguns poderiam afirmar que, ainda que necessitemos do apelo a um padrão psicológico para concluirmos que o quarto termo da sequência (0, 2, 4, x) é 6, devemos aceitar esse apelo como identificando algo

constitutivo do saber humano. Logo, devemos incorporá-lo às regras formais. Esse é o esforço daqueles que buscam desenvolver uma “Lógica” chamada de “Lógica Indutiva”.

Podemos entender por raciocínios indutivos aqueles obtidos a partir da observação de um grande número de objetos ou situações de um mesmo “tipo” em que se pode notar uma “característica” comum que permite que se conclua que todos os demais objetos ou situações desse “tipo” preservam essa “característica”. No caso acima, podemos observar que cada número da sequência tem a característica de ser igual ao anterior acrescido de dois. Logo concluímos que o objeto desconhecido da sequência mantém esse padrão.

Contudo, há casos em que esse tipo de raciocínio nos conduz ao erro. Observemos a curiosa afirmativa a seguir:

‘ $n^2 - n + 41$ ’ é um número primo, para todos n pertencentes aos números naturais.

Podemos tentar verificar se essa afirmativa é verdadeira testando diferentes números naturais em sequência. Fazendo isso, confirmaremos a afirmação para $n = 1, n = 2, \dots, n = 40$. Na verdade, muitos, ao testar o vigésimo número natural e obter um primo como resposta, julgariam a afirmação verdadeira. Contudo, se seguissem no teste e substituíssem n por 41, perceberiam que a resposta é 41^2 , isto é, um número composto (com mais de dois divisores e, portanto, não-primo).

O matemático Abramo Hefez, em *Indução Matemática*, cita uma anedota utilizada pelo filósofo Bertrand Russell para debochar das “certezas” dos raciocínios indutivos.

Havia uma galinha nova no quintal de uma velha senhora. Diariamente, ao entardecer, a boa senhora levava milho às galinhas. No primeiro dia, a galinha, desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, a galinha, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, a galinha, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar a senhora, a galinha, por indução, foi ao encontro dela para reclamar o seu milho. Qual não foi a sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intenção de pô-la na panela. (Hefez, 2009, p.8)

Assim, postos esses problemas do apelo a padrões psicológicos na construção do conhecimento, será que devemos abandonar o raciocínio indutivo como um elemento de busca pelo saber? Certamente não, pois boa parte do que conhecemos só pode ser descoberto a partir desse tipo de raciocínio. Todas as ciências naturais

(Física, Química, Biologia, etc.) e sociais (Psicologia, Sociologia, Pedagogia etc.) se desenvolvem, em boa parte, a partir de observações empíricas que permitem o avanço no conhecimento. Por exemplo, a constante de gravitação universal, que serve para calcular a força de atração gravitacional entre dois corpos a uma certa distância, foi descoberta por incontáveis observações da atração entre corpos, ou seja, por raciocínios indutivos (é claro, a admissão da verdade dessa constante permite o cálculo da força da gravidade, esse sim, realizado a partir de um raciocínio dedutivo). Assim como o exemplo acima, existem infindáveis outros que mostram a importância fundamental dos raciocínios indutivos para o desenvolvimento das ciências empíricas. Sem apelo às induções, essas ciências simplesmente não poderiam se desenvolver.

Contudo, certamente há uma diferença entre os raciocínios baseados apenas em deduções e os raciocínios indutivos. Os primeiros permitem um grau de certeza absoluto enquanto os últimos não. Em um interessantíssimo livro de divulgação científica chamado *O último teorema de Fermat*, mais especificamente, de divulgação da Matemática, Simon Singh, sem usar especificamente os termos "dedução" e "indução", marca com clareza a diferença entre as formas com que esses dois tipos de raciocínios são usados no desenvolvimento do conhecimento humano. Para tal, mostra ser a Matemática o paradigma de raciocínio dedutivo e as ciências empíricas os paradigmas do raciocínio indutivo:

A ideia de demonstração matemática clássica começa com uma série de axiomas, declarações que julgamos serem verdadeiras ou que são verdades evidentes. Então, através da argumentação lógica, passo a passo, é possível chegar a uma conclusão. Se os axiomas estiverem corretos e a lógica for impecável, então a conclusão será inegável. Esta conclusão é o teorema.

Os teoremas matemáticos dependem desse processo lógico, e uma vez demonstrados serão considerados verdade até o final dos tempos. A prova matemática é absoluta. Para apreciar o valor de tais provas, devemos compará-las com sua prima pobre, a prova científica. Na ciência, apresenta-se uma hipótese para explicar um fenômeno físico. Se as observações do fenômeno são favoráveis à hipótese, então elas se tornam evidências em favor dela. Além disso, a hipótese não deve meramente descrever um fenômeno conhecido, mas também prever o resultado de outros fenômenos. Experiências podem ser feitas para testar a capacidade da hipótese em prever resultados, e se o resultado for bem-sucedido teremos mais evidências para apoiar a hipótese. Por fim, a soma das evidências pode ser tão grande que a hipótese passará a ser aceita como teoria científica.

Contudo, uma teoria científica nunca pode ser provada do mesmo modo absoluto quanto um teorema matemático. Ela é meramente considerada como altamente provável, com base nas evidências disponíveis. A assim chamada prova científica depende da observação e da percepção, e ambas são falíveis, fornecendo somente aproximações em relação à verdade. Como disse certa vez Bertrand Russell: "Embora isto possa parecer um paradoxo, toda ciência exata é dominada pela ideia de aproximação." Até mesmo as "provas" científicas mais aceitas contêm um pequeno elemento de dúvida dentro delas. Às vezes essa dúvida diminui, mas nunca desaparece completamente. E em outras ocasiões descobre-se que a prova estava errada. Esta fraqueza das provas científicas leva às revoluções na ciência, quando uma teoria

que se considerava correta é substituída por outra, a qual pode ser meramente um aperfeiçoamento da teoria original, ou pode ser uma completa contradição. (Singh, 1997, p. 41)

Singh deixa então claro que o grau de certeza baseado em deduções é absoluto enquanto que o baseado em induções aumenta na medida em que são feitas mais observações que confirmam a hipótese. Contudo a “certeza” indutiva nunca é absoluta.

Deste modo, se entendermos a Lógica como a técnica que nos permite chegar a certezas absolutas, somente a Lógica dedutiva, totalmente construída a partir de regras formais garantidoras da transmissão da verdade, pode receber tal título. Os raciocínios indutivos, que são falíveis, nunca permitirão tal grau de certeza. Assim, falar em uma “Lógica indutiva”, por mais importante que as induções sejam para o desenvolvimento do conhecimento, parece fazer com que o termo “Lógica” perca um pouco de sua força. Por essa razão, para muitos, as expressões “Lógica” e “Lógica dedutiva” significam a mesma coisa.

2.5. Lógica Proposicional, Lógica de Predicados e Lógica Modal

Postas essas distinções entre raciocínios dedutivos e indutivos, vale destacar que, na prática, ambos são utilizados de maneira complementar. Raciocínios indutivos permitem formular hipóteses e teorias com base em observações empíricas, enquanto que raciocínios dedutivos possibilitam extrair consequências testáveis dessas teorias. O método hipotético-dedutivo, por exemplo, combina elementos de ambas as abordagens. Karl Popper (2002) argumentou que o avanço científico ocorre principalmente através da formulação de hipóteses (que podem envolver indução) seguida de tentativas de refutação por meio de deduções e testes empíricos. A compreensão das distinções e inter-relações entre estes dois modos de raciocínio é fundamental para o pensamento crítico e para a metodologia científica.

Voltando ao aspecto discutido acima que interessa à presente reflexão, vale reforçar que a Lógica dedutiva sistematiza os tipos de raciocínio que se preocupam com a relação de consequência entre afirmações, com o que se segue do quê. Assim, enquanto as Ciências Empíricas se preocupam em descobrir a verdade sobre o mundo usando pesquisas empíricas estruturadas a partir de raciocínios indutivos, a Lógica dedutiva se preocupa em determinar quais estruturas argumentativas

preservam a verdade. Da frase acima, podemos dizer, pois, que a virtude de um argumento lógico-dedutivo é a preservação da verdade.

2.5.1. Os silogismos de Aristóteles

Aristóteles, como uma de suas grandes contribuições para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio da humanidade, foi quem, pela primeira vez, apresentou uma teoria sistemática desse tipo de raciocínio que busca preservar a verdade. Inclusive por isso, ele é considerado o pai da Lógica. Em vários livros, mas especialmente em *De Interpretatione*, o filósofo discute as relações entre diferentes tipos de proposições categóricas.

Tais proposições afirmam ou negam que todos ou alguns membros de uma categoria estão incluídos em outra. Por exemplo, “*Algum estrelense que não é gremista.*” nega que todos os membros da categoria “estrelenses” estejam incluídos na categoria “gremistas”. A seguir, são apresentados os quatro tipos de proposições categóricas aristotélicas:

A = proposição universal afirmativa: Todo estrelense é gremista.

E = proposição universal negativa: Nenhum estrelense é gremista.

I = proposição particular afirmativa: Algum estrelense é gremista.

O = proposição particular negativa: Algum estrelense não é gremista.

Como mencionado acima, essas proposições podem ser relacionadas. Entre essas relações está, por exemplo, a relação de contraditoriedade entre as proposições “Todo estrelense é gremista.” e “Algum estrelense que não é gremista.”. A seguir, são apresentados os quatro tipos de relações entre as categóricas aristotélicas:

* Proposições contrárias: São proposições universais com qualidades (negação ou afirmação) distintas.

* Proposições subcontrárias: São proposições particulares com qualidades distintas.

* Proposições subalternas: São proposições afirmativas ou negativas com quantidades (número de indivíduos que estão sendo relacionados) distintas.

* Proposições contraditórias: São proposições com qualidades e quantidades distintas.

Como mencionado acima, Aristóteles e seus seguidores medievais, destacaram a existência de uma série de regras entre as proposições relacionadas acima:

I. Regra das contraditórias: Duas proposições contraditórias não podem ser nem ambas verdadeiras, nem ambas falsas, ao mesmo tempo. OBS: Note que as proposições ligadas pela ideia de contradição (A-O e E-I) são justamente a proposição e a sua negação. Logo, se uma for verdadeira, a outra será falsa (e vice-versa).

II. Regra das contrárias: Duas proposições contrárias não podem ser ambas verdadeiras ao mesmo tempo.

III. Regra das subcontrárias: Duas proposições subcontrárias não podem ser ambas falsas ao mesmo tempo.

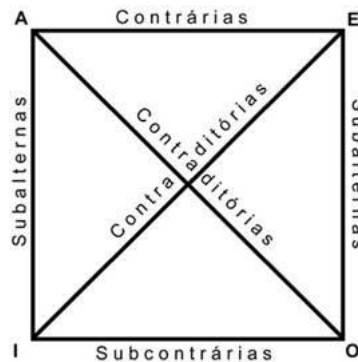
IV. Regra das subalternas: se a universal for verdadeira, então obrigatoriamente sua particular subalterna também será verdade (e, conseqüentemente, se a particular subalterna for falsa, então obrigatoriamente a sua universal será falsa).

OBS: Essas últimas três regras valem para a lógica aristotélica, mas não para a lógica fregeana (utilizada contemporaneamente e apresentada a seguir). Isso porque, na Lógica aristotélica, os termos gerais (estrelenses, gremistas) estão por alguma coisa (não são conjuntos vazios). Em outras palavras, quando dizemos “todo estrelense é gremista”, estamos considerando que exista ao menos um estrelense que, portanto, também é gremista. Analisando, por exemplo, a regra das contrárias, da verdade da proposição “todo estrelense é gremista” se segue a falsidade da proposição “nenhum estrelense gremista”. Já, na lógica fregeana – toda fundamentada a partir da teoria dos conjuntos – os termos gerais podem não estar por algo (podem ser conjuntos vazios). Assim, tal sistema considera que a proposição “todo estrelense é gremista” é verdadeira mesmo que não haja estrelenses. Assim em casos em que o conjunto dos estrelenses é vazio, por exemplo, a regra das contrárias não vale. Isso porque, nesses casos, as proposições “todo estrelense é gremista” e “nenhum estrelense gremista”

são ambas verdadeiras. (raciocínios similares valem para as regras das subcontrárias e das subalternas)

Entre muitas outras coisas, tal discussão serviu de base para que os lógicos medievais construíssem as relações básicas entre proposições afirmativas e negativas, universais e particulares representadas pelo famoso Quadrado Lógico:

Figura 7 – Quadrado Lógico



Fonte: <https://concursos.estrategia.com/public/questoes/Quadrado-Oposica602a96fed1/> (adaptada).

OBS: A, E, I e O estão definidos acima.

Postas essas percepções, podemos agora explorar outra ideia fundamental da Lógica aristotélica: a *silogística*. Explicadas as proposições e as relações entre elas, Aristóteles também criou uma teoria para definir as diferentes formas corretas de se passar da verdade de duas proposições (premissas) para a verdade de uma terceira (conclusão). Em outras palavras, ele iniciou a teoria do bem raciocinar, do bem pensar. Esses são os silogismos aristotélicos. Começemos apresentando um exemplo simples:

Premissa 1: Todos os humanos são mortais.

Premissa 2: Todos os atenienses são humanos.

Conclusão: Portanto, Todos os atenienses são mortais.

Esse talvez seja o silogismo mais simples de ser entendido. Mas há outros um pouco mais complicados. Por exemplo:

Premissa 1: Nenhuma criança compreende raciocínios abstratos.

Premissa 2: Alguns poetas compreendem raciocínios abstratos.

Conclusão: Portanto, alguns poetas não são crianças.

As duas regras acima são válidas, o que quer dizer que, supondo a verdade das premissas, obrigatoriamente a conclusão deve ser verdadeira. No total, existem 256 formas diferentes de se construir argumentos combinando duas premissas e uma conclusão e fazendo uso de três categorias arranjadas a partir dos quatro tipos acima apresentados. Contudo, somente 24 dessas formas são válidas. Um exemplo de argumento inválido é:

Premissa 1: Todos os atenienses são mortais.

Premissa 2: Todos os humanos são mortais.

Conclusão: Portanto, todos os atenienses são humanos.

Repare que, mesmo que, na realidade, todas as premissas e a conclusão sejam verdadeiras, o argumento é mal estruturado, o raciocínio é incorreto. O exemplo abaixo mostra que a mesma estrutura de raciocínio permitiria que fôssemos de duas premissas verdadeiras para uma conclusão falsa:

Premissa 1: Todos os gaúchos são brasileiros.

Premissa 2: Todos os paulistas são brasileiros.

Conclusão: Portanto, todos os gaúchos são paulistas.

Sobre essa questão, Aristóteles desenvolveu uma teoria sofisticada que destacava algumas regras de validade dos seus silogismos:

- * O termo médio deve estar distribuído pelo menos uma vez
- * Nenhum termo pode ter maior extensão na conclusão do que nas premissas
- * Se uma premissa for negativa, a conclusão deve ser negativa
- * Se ambas as premissas forem particulares, não é possível tirar uma conclusão universal

Não iremos aqui investigar essas regras, dado que esse tópico tem por objetivo apenas apresentar uma visão geral da teoria aristotélica. Também não iremos nos debruçar sobre os posteriores avanços na sistematização dessa teoria realizados pelos medievais. Vale, contudo, mencionar que, ainda que não tenham revolucionado o que foi proposto por Aristóteles, os muitos pensadores medievais que se debruçaram sobre a lógica desenvolveram técnicas mais sofisticadas para analisar silogismos, refletir sobre a ideia de consequência lógica e interpretar a semântica relacionada ao significado dos termos.

2.5.2. A Lógica de Boole

Como dito anteriormente, os estudos realizados pelos lógicos da Idade Média agregaram elementos importantes à teoria proposta por Aristóteles. Contudo, o pensamento medieval era mais interpretativo do que construtivo. Assim, a Lógica de Aristóteles era muito comentada, mas não expandida. De algum modo, mesmo com as muitas mudanças na forma de se entender a ciência na Europa durante o período da Renascença, mudanças essas que culminaram na Revolução Científica, a teoria que fundamentava o pensamento lógico não sofreu grandes mudanças até o século XIX. No entanto, esse novo caldo cultural de crescente valorização da ciência, do pensamento racional e da matematização do conhecimento prepararam o terreno para uma mudança radical na abordagem na forma com que passamos a entender a Lógica.

Sendo mais específico, o desenvolvimento da Matemática na Modernidade fez com os matemáticos do século XIX passassem a possuir ferramentas algébricas muito mais avançadas e métodos mais rigorosos de prova que permitiram a ampliação da compreensão de sistemas simbólicos e o desenvolvimento de pensamentos abstratos muito mais sofisticados. Junto a isso, o desenvolvimento tecnológico associado à Revolução Industrial passou a demandar mais métodos lógicos para, entre outras coisas, permitir a análise de sistemas complexos e a ampliação do processamento de informações. Nesse contexto, George Boole (1815-1864) e Gottlob Frege (1848-1925), dois pensadores com formação matemática sólida, trouxeram contribuições fundamentais que acabaram por revolucionar nosso entendimento e prática da Lógica. Esta evolução representou uma ruptura fundamental com modelos medievais de pensamento, abrindo caminho para a Lógica moderna e, posteriormente, para desenvolvimentos como a computação digital.

Inicialmente, apresentaremos as contribuições de Boole, hoje conhecida como Álgebra (ou Lógica) Booleana. Foram duas as suas grandes contribuições. Em primeiro lugar, no que podemos classificar como processo de “matematização da Lógica”, transformou a linguagem lógica em sistema algébrico através da introdução de operadores lógicos “e” (\wedge), “ou” (\vee) e “não” (\neg) permitindo a manipulação lógica através de equações matemáticas. Além disso, desenvolveu a ideia de “Lógica Binária”, que transforma problemas lógicos complexos em operações binárias

simples, algo fundamental para o estabelecimento da computação digital moderna, através da criação de um sistema de valores “falso ou verdadeiro” (“0 ou 1”) para cada proposição lógica. A seguir, apresentamos alguns elementos de sua Álgebra.

Isto posto, é importante compreender que, diferentemente da Álgebra Convencional, que trabalha com números reais, a Álgebra Booleana opera com apenas dois valores números, 0 e 1, ou falso e verdadeiro, desligado e ligado. Assim, da mesma forma que, por exemplo, na Álgebra Convencional, a operação “3 + 5” leva em “8”, na Álgebra Booleana, a operação “0 \wedge 1” leva em “0” e a operação “1 \wedge 1” leva em “1”. A semântica por trás desse “leva” é explicada abaixo.

Tal explicação está associada às tabelas de verdade do “não” (\neg), “e” (\wedge), “ou” (\vee) e “se... então” (\rightarrow), que representam todos os possíveis valores de verdade dessas operações lógicas. Reflitamos sobre essas combinações de variáveis e operadores lógicos imaginando duas proposições “A” e “B” significando, respectivamente, “Sílvia é estrelense” (A) e “Sílvia é gremista” (B). Além disso, notemos que existem quatro combinações possíveis dos valores de verdade dessas duas proposições: caso 1: A e B são verdadeiras; caso 2: A é verdadeira e B é falsa; caso 3: A é falsa e B é verdadeira; caso 4: A é falsa e B é falsa. Assim, podemos representar os quatro casos no que chamaremos de tabela de verdade.

Quadro 3 – Relação entre proposições

	A	B
Caso 1	V	V
Caso 2	V	F
Caso 3	F	V
Caso 4	F	F

Agora observemos como os conectivos acima (\neg , \wedge , \vee e \rightarrow) funcionam como operadores que transformam relações entre proposições verdadeiras (V, 1, ligado) e falsas (F, 0, desligado) em outras proposições.

Começemos com o operador “ \neg ” (não). Tal operador leva o verdadeiro no falso e o falso no verdadeiro. Isto é, se A é verdadeiro, $\neg A$ é falso, bem como, se A é falso, $\neg A$ é verdadeiro. A tabela abaixo mostra isso.

Quadro 4 – Tabela verdade para a negação

	A	$\neg A$
Caso 1	V	F
Caso 2	F	V

Já o operador “ \wedge ” (e) significa “somente se ambos forem verdadeiros, a operação é verdadeira”. Assim, apenas o caso 1 expressa uma situação que torna a proposição obtida a partir da operação verdadeira, enquanto os demais expressam situações que tornam a proposição falsa.

Quadro 5 – Tabela verdade para “ \wedge ”

	A	B	$A \wedge B$
Caso 1	V	V	V
Caso 2	V	F	F
Caso 3	F	V	F
Caso 4	F	F	F

O operador “ \vee ” (ou), por sua vez, significa “se pelo menos uma for verdadeira, a operação é verdadeira”. Assim, os casos 1, 2 e 3 expressam situações que tornam a proposição obtida a partir da operação verdadeira, enquanto apenas o caso 4 expressa uma situação que torna a proposição falsa.

Quadro 6 – Tabela verdade para “ \vee ”

	A	B	$A \vee B$
Caso 1	V	V	V
Caso 2	V	F	V
Caso 3	F	V	V
Caso 4	F	F	F

Por fim, o operador “ \rightarrow ” (*Se... então*) tem uma semântica bem mais complexa. Seu significado é: “se a primeira for verdadeira, a segunda necessariamente é verdadeira”. Isso significa que, “somente se a primeira for verdadeira e a segunda for falsa, a operação ‘leva’ a um resultado falso”. Assim, os casos 1, 3 e 4 expressam situações que tornam a proposição obtida a partir da operação verdadeira, enquanto apenas o caso 2 expressa uma situação que torna a proposição falsa (sabemos que tal entendimento é muito menos palatável e merece muito mais discussão, mas o objetivo aqui é apenas mostrar que existe um cálculo bem determinado com cada um desses operadores).

Quadro 7 – Tabela verdade para “ \rightarrow ”

	A	B	$A \rightarrow B$
Caso 1	V	V	V
Caso 2	V	F	F
Caso 3	F	V	V
Caso 4	F	F	V

A partir dessa sistematização, Boole criou um "cálculo do raciocínio humano", transformando a Lógica aristotélica em um sistema matemático preciso. Em outras palavras, ele criou uma abordagem revolucionária transformando proposições lógicas em equações algébricas para permitir manipulações matemáticas de argumentos lógicos. Nessa abordagem, incluiu no raciocínio lógico, ideias amplamente utilizadas na matemática: (i) comutatividade: $A \wedge B = B \wedge A$; $A \vee B = B \vee A$. (ii) associatividade $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$; $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$. (iii) distributividade: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Também matematizou: (iv) a Lei da Identidade: $A \wedge 1 = A$; $A \vee 0 = A$. (v) a Lei do Complemento: $(A \wedge (\neg A)) = 0$; $(A \vee (\neg A)) = 1$.

Desde sua publicação, o trabalho revolucionário de Boole recebeu muitas contribuições. Algumas delas teóricas, como o desenvolvimento da Lógica das relações, por Charles Sanders Peirce (1839-1914) e Ernst Schröder (1841-1902), e a criação de um sistema axiomático por Edward Huntington (1874-1952). Outras contribuições foram práticas, como a conexão entre essa teoria abstrata e a engenharia elétrica, base para o design de circuitos digitais, por Claude Shannon (1916-2001), e o design das linguagens de programação dos computadores modernos, por, entre muitos outros, John von Neumann (1903-1957). Esse impacto direto da Álgebra Booleana, uma teoria lógico-matemática aparentemente abstrata, na programação destaca uma das mais impressionantes aplicações da matemática no desenvolvimento de soluções práticas com implicações diretas nas vidas das pessoas. Hoje, todo hardware de computador moderno é baseado em circuitos digitais implementando operações booleanas. Além disso, os softwares e cada código programado também estão diretamente associados a essa Álgebra. Basicamente, é impossível programar sem ter um amplo conhecimento da teoria proposta por Boole.

2.5.3. A formalização da Lógica por Frege

Algumas décadas depois de Boole, Gottlob Frege (1848-1925) propôs uma expansão da Lógica booleana introduzindo uma notação mais sofisticada com quantificadores e variáveis. Ao fazer isso, estabeleceu o que hoje conhecemos como Lógica de Predicados ou Lógica de Primeira Ordem. Essa adição de quantificadores e variáveis garantiu uma formalização radical dessa linguagem, uma incrível expansão da representação de proposições da nossa linguagem ordinária em linguagem formal. Por exemplo, na Lógica de Boole, que passaremos a chamar de Lógica Proposicional, a afirmação “Sócrates é mortal” é representada por “A” e nada tem a ver com a proposição “Todo ser humano é mortal”, representada por “B”. Já, no sistema proposto por Frege, a primeira proposição é representada por “Ms”, em que “M” significa “é mortal” e “s” significa “Sócrates”, enquanto a segunda é representada por “ $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ ”, em que “H” significa “é humano”, “M” significa “é mortal” e “ \forall ” significa “todo”. Vemos, pois, que, no sistema de Frege (Lógica de Predicados), ainda que as proposições signifiquem, por óbvio, coisas distintas, elas compartilham alguns símbolos que, como a teoria depois explora, garante uma relação entre elas.

Foi mencionado anteriormente que a sistematização da Lógica aristotélica ganhou uma estruturação mais sofisticada com os medievais. Ainda assim, tal sistematização apresentava uma série de limitações em comparação à Lógica contemporânea. Em primeiro lugar, ainda que abstraísse e generalizasse estruturas de pensamento preservadoras da verdade, utilizava a linguagem natural e não uma linguagem simbólica para representar esses raciocínios. Além disso, focava na interpretação de silogismos que se estruturam em premissas e conclusões categóricas, isto é, proposições que envolvem apenas quantificadores como “todo”, “nenhum” e “algum” (mesmo sem simbolizá-los apropriadamente, como feito contemporaneamente) e categorias como “ateniense”, “humano” e “mortal” (o que hoje chamamos de predicados), mas não incluía objetos como “Sócrates”, “Totó” e “esta cadeira”.

Como visto no tópico anterior, foi somente com Boole e, como veremos aqui, posteriormente, com Frege que uma série de inovações na forma de simbolizar a Lógica foram introduzidas. Em primeiro lugar, Boole deu um tratamento algébrico à Lógica. Adicionalmente, a aproximação entre as linguagens lógica e matemática, mais

especificamente, a aproximação entre a Lógica e a Teoria dos Conjuntos, consolidou um sistema simbólico/formal preciso que permitiu representações mais exatas dos argumentos lógicos. Associada a essa questão da formalização da linguagem lógica está a introdução, por Frege, dos quantificadores universal (\forall) e existencial (\exists). Também associado ao desenvolvimento do formalismo, Frege ampliou o escopo daquilo que a Lógica poderia investigar. Ao criar o conceito de função proposicional e ao separar claramente sujeito, predicado e quantificadores, a Lógica de Predicados de Frege passou a ser capaz de analisar proposições mais complexas e abstratas.

Contudo, ao iniciar esse projeto, Frege acabou criando uma linguagem que, ainda que tenha servido de base para o desenvolvimento de toda a Lógica contemporânea, por ter símbolos e regras excessivamente sofisticados, era de difícil compreensão. Foi necessário o trabalho de outros lógicos para que chegássemos à linguagem lógica hoje consolidada. De todo modo, podemos dizer que foi Frege quem preparou o terreno para que, por exemplo, a proposição “Todo humano (H) é mortal (M)” fosse escrita simbolicamente como se segue: “ $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ ”.

Ainda que, desde Aristóteles, houvesse uma preocupação com a estrutura interna da proposição, são muito diferentes as formas com que Aristóteles e Frege fazem a análise dessa estrutura. Quando Aristóteles, a partir das premissas “Todo o animal é mortal.” e “Todo o humano é animal”, conclui que “Todo o humano é mortal.”, ele está utilizando nas premissas, ora o conceito “animal” como sujeito, ora como predicado. Isso, em princípio, não acarreta nenhum problema (de fato a linha de raciocínio do problema é perfeita), porém em certas circunstâncias alguma ambiguidade pode surgir dessa divisão da proposição em sujeito e predicado. Um bom exemplo disso está nas diferentes interpretações de “Todos os homens amam uma mulher”. Lendo essa sentença, alguns poderiam concluir que cada um dos homens do mundo ama uma mulher, não necessariamente a mesma, enquanto outros poderiam concluir que todos os homens do mundo nutrem um amor por uma mesma mulher.

Frege, com o intuito de matematizar a Lógica desenvolveu o seu sistema baseado em um artifício matemático e passou a utilizar a ideia de função para formar suas proposições. Assim como a função matemática “ $x^2 + 1$ ” transforma o número 2 no número 5, a função lógica “x é humano” transforma Sócrates em verdadeiro e Totó

em falso. Fazendo isso e desenvolvendo o conceito de conectivos lógicos (constantes e quantificadores) ele passa a conseguir expressar a validade das inferências baseadas apenas em predicados em suas relações estabelecidas pelos conectivos. Para Frege o argumento anterior seria lido de uma maneira diferente:

Premissa 1: $\forall x(Ax \rightarrow Mx)$

Premissa 2: $\forall x(Hx \rightarrow Ax)$

Conclusão: $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$

(Onde $Hx = x$ é homem, $Ax = x$ é animal e $Mx = x$ é mortal).

Percebe-se que a estratégia de Frege é a de utilizar as proposições compostas de função e argumento. No caso de “Hs”, em que “H” significa “é homem” e “s” significa “Sócrates”, dizemos que “H” é a função e “s” é o argumento. Nesse caso, ainda dizemos que a imagem da função é “o verdadeiro” (no caso da função “H” com o argumento “c”, sendo “c” o cachorro Caramelo, sua imagem seria “o falso”). Tal entendimento é similar ao entendimento de que em “ $f(x) = 3x + 1$ ”, “ $3x + 1$ ” é a função e, se “2” é o argumento, então a imagem é “7”.

Frege, através desse sistema também consegue eliminar a ambiguidade da frase “Todos os homens amam uma mulher.”. Para tal, precisaremos imaginar um predicado que se relaciona a dois sujeitos. Para expressar simbolicamente “João ama Maria.”, devo escrever “jAm”, ou, mais usualmente, “Ajm” (“Axy” significando “x ama y”, “j” significando “João” e “m” significando “Maria”). Abaixo colocamos, respectivamente, a expressão simbólica de “Todos os homens amam a mesma mulher.” e “Cada um dos homens amam alguma mulher, não necessariamente a mesma.”:

$\exists y(My \wedge (\forall xHx \rightarrow Axy))$ – Existe uma mulher y e, para todo homem x, x ama y.

$\forall x(Hx \rightarrow (\exists yMy \wedge Axy))$ – Para todo x que é homem, existe pelo menos uma mulher y e esse homem x ama essa mulher y.

Logo, se já era evidente a ampliação da linguagem proposta por Frege em relação à proposta por Boole, fica evidente a vantagem da teoria moderna dos quantificadores sobre o silogismo aristotélico, dado que a teoria de Frege amplifica o escopo de linguagem contemplada por seus símbolos além de eliminar ambiguidades.

2.5.4. O sistema lógico-formal contemporâneo (a Lógica de Predicados de Primeira Ordem)

Contemporaneamente, utilizamos amplamente um sistema de Lógica de Predicados Primeira Ordem. Para entendermos em linhas gerais o que esse sistema significa, de início, distinguiremos a lógica proposicional (desenvolvida por Boole) e a Lógica de Predicados (desenvolvida por Frege), que apresentam diferentes níveis de expressividade e complexidade.

A Lógica Proposicional trabalha com proposições completas que podem ser verdadeiras ou falsas. Ela usa conectivos lógicos como e (\wedge), ou (\vee), não (\neg), se-então (\rightarrow) e se e somente se (\leftrightarrow) para formar expressões complexas. Por exemplo: "Está chovendo" (P) e "O chão está molhado" (Q) podem ser combinadas como "Se está chovendo, então o chão está molhado" ($P \rightarrow Q$).

Já a Lógica de Predicados (ou Lógica de Primeira Ordem) é mais expressiva por incluir e estender a Lógica Proposicional. Ela permite:

- * Análise interna das proposições, dividindo-as em predicados e termos
- * Uso de quantificadores "para todo" (\forall) e "existe" (\exists)
- * Uso de variáveis, constantes, funções e relações

A partir do uso de quantificadores e de uma estrutura mais rica, a Lógica de Predicados, portanto, permite que superemos a principal limitação da Lógica Proposicional: não conseguir expressar afirmações sobre conjuntos de objetos ou relações entre eles. Por exemplo, enquanto na Lógica Proposicional "Todos humanos são mortais" seria simplesmente uma proposição "P", na Lógica de Predicados podemos expressar essa afirmação como " $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ ".

Desse novo olhar, contemporaneamente, a Lógica de Predicados é desenvolvida a partir da definição de vários elementos fundamentais, que incluem:

1. Símbolos (ou Alfabeto): Estes são os elementos básicos do sistema, que podem incluir variáveis, conectivos lógicos (como "e", "ou", "não", "implica"), quantificadores (como "para todo" e "existe") e outros símbolos que representam proposições e operações lógicas.

1. *Termos*: São os objetos sobre os quais falamos
 - * Constantes: representam objetos específicos (a, b, c)
 - * Variáveis: representam objetos não especificados (x, y, z)

2. *Predicados*: Expressam propriedades ou relações entre termos
 - Ex: $P(x)$ pode significar "x é primo"
 - Ex: $Ama(x,y)$ pode significar "x ama y"

3. *Quantificadores*: em linhas gerais, expressam quantos termos tornam uma proposição verdadeira.
 - Universal (\forall): "para todo" ou "qualquer que seja"
 - Existencial (\exists): "existe" ou "existe pelo menos um"

4. *Conectivos lógicos*: palavras ou símbolos que ligam duas proposições formando uma nova proposição (com exceção do "não", que atua sobre apenas uma proposição)
 - Negação (\neg): "não"
 - Conjunção (\wedge): "e"
 - Disjunção (\vee): "ou"
 - Implicação (\rightarrow): "se... então"
 - Bi-implicação (\leftrightarrow): "se e somente se"

5. *Símbolos auxiliares de pontuação*: parênteses (), colchetes [] etc.

II. Fórmulas (e suas regras de formação): As fórmulas são expressões formadas a partir dos símbolos do sistema. Elas podem ser proposições simples ou combinações mais complexas de proposições usando conectivos lógicos. Por exemplo, " $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ ", que pode significar "Todo homem é mortal", é uma fórmula (bem formada) com um valor de verdade (imagem) verdadeiro ou falso a depender de como os objetos do seu sistema se comportam, enquanto " Hx ", que pode significar "x é homem" é uma fórmula incompleta e não é, nem verdadeira, nem falsa. Por sua vez, as regras de formação das fórmulas determinam como os símbolos (alfabeto) acima podem ser combinados para formar fórmulas bem-formadas. Por exemplo, conectivos obrigatoriamente conectam proposições e não outros conectivos.

III. Axiomas: Os axiomas são proposições que são aceitas como verdadeiras sem necessidade de prova dentro do sistema. Eles servem como a base sobre a qual outras proposições podem ser derivadas. Os axiomas são, portanto, fórmulas bem

formadas que servem de ponto de partida para a construção de outras fórmulas. Os cinco axiomas da Lógica são:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$
4. $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$
5. $\forall xA \rightarrow A$

IV. Regras de inferência: Já as regras de inferência são as regras que permitem derivar novas fórmulas a partir de fórmulas já existentes. Elas definem como se pode passar de premissas verdadeiras a conclusões também verdadeiras.

1. Modus ponens: $A, A \rightarrow B \vdash B$
2. Generalização universal: $A \vdash \forall xA$

Esses elementos trabalham juntos para criar um sistema que pode ser usado para formalizar raciocínios e argumentos, permitindo a análise lógica de proposições e suas relações.

2.5.5. A Lógica Modal como ampliação da Lógica de Predicados de Primeira Ordem

A Lógica de Predicados de primeira ordem tem sido a espinha dorsal da Lógica matemática, permitindo-nos expressar e raciocinar sobre relações entre objetos e propriedades. Contudo, por lidar com verdades factuais, tem suas limitações quando se trata de conceitos como necessidade, possibilidade, crença ou tempo. Foi essa lacuna que impulsionou o desenvolvimento da Lógica Modal, uma extensão da Lógica de Predicados que busca capturar a riqueza das nuances presentes em nosso pensamento e linguagem natural. Enquanto a primeira foca no que é verdadeiro, a segunda nos permite explorar o que poderia ser ou deve ser verdadeiro (Priest, 2008).

Ainda que possamos dizer que, de algum modo, Aristóteles já explorava noções de necessidade e possibilidade em seus silogismos, o desenvolvimento formal moderno da Lógica Modal começou no século XX, impulsionado por trabalhos de pensadores como C. I. Lewis, que na década de 1910 buscou uma maneira de formalizar as noções de implicação estrita para evitar os “paradoxos da implicação

material” presentes na Lógica clássica. Posteriormente, Saul Kripke, na década de 1950, revolucionou o campo com a introdução da semântica de mundos possíveis, fornecendo uma estrutura matemática rigorosa para interpretar as fórmulas modais e solidificando a Lógica Modal como um ramo vital da Lógica (Hughes e Cresswell, 1996).

Dito isso, podemos definir a lógica modal como um sistema formal que lida com diferentes modos de verdade. Diferente da Lógica clássica, que se preocupa apenas com o valor de verdade (verdadeiro ou falso) de uma proposição, a Lógica Modal introduz operadores que modificam o sentido de uma proposição, indicando se ela é necessariamente verdadeira, possivelmente verdadeira, ou verdadeira em um determinado contexto. Ela nos permite analisar conceitos como obrigação, permissão, conhecimento, crença e tempo, tornando-a uma ferramenta poderosa em diversas áreas, da Filosofia à Ciência da Computação (Hughes e Cresswell, 1996).

Os operadores modais são os elementos chave que distinguem a Lógica Modal da Lógica de Predicados de Primeira Ordem. Os mais comuns são o operador de necessidade (\Box) e o operador de possibilidade (\Diamond). O símbolo $\Box P$ pode ser lido como “é necessário que P”, “é obrigatório que P”, ou “é sempre o caso que P”, dependendo do tipo de Lógica Modal (alética, deontica, temporal, etc.). Já $\Diamond P$ significa “é possível que P”, “é permitido que P”, ou “às vezes é o caso que P”. Esses operadores não são definidos em termos de verdade factual, mas sim em termos de sua validade em “mundos possíveis” ou “estados de coisas” alternativos, uma ideia central na semântica kripkeana (Hughes e Cresswell, 1996).

A Lógica Modal amplia a Lógica de Predicados de Primeira Ordem ao adicionar essa capacidade de raciocinar sobre as modalidades. Enquanto a Lógica de Predicados nos permite dizer, por exemplo, “todos os corvos são negros”, “nem todos os corvos são negros”, “alguns corvos são negros” ou “alguns corvos não são negros”, a Lógica Modal nos permite explorar se “é possível que existam corvos não negros” ou se “é necessário que $2 + 2 = 4$ ”. Assim a Lógica Modal complementa a Lógica de Predicados, oferecendo um arcabouço mais expressivo para lidar com conceitos que envolvem contingência, potencialidade e diferentes estados de conhecimento ou tempo.

2.5.6 Quadro-resumo

Como forma de facilitar o entendimento de tudo que foi discutido na sessão 2.5, criou-se o seguinte quadro-resumo:

Quadro 8: Resumo da sessão 2.5

Fase	Características	Avanços sobre a fase anterior
Lógica Aristotélica (Silogística)	Lógica de termos e predicados: validação de silogismos sem formalização simbólica.	Introdução da Lógica como disciplina sistemática de argumentação.
Lógica Proposicional (Boole)	Representação simbólica de conectivos (“e”, “ou”, “não”) e do valor lógico (falso = 0 ; verdadeiro = 1).	Algebrização da Lógica: permitia traduzir proposições compostas em símbolos e definir valor lógico através de operações.
Lógica de Predicados (Frege)	Representação simbólica dos quantificadores das proposições categóricas (“todo”, “existe”), uso de variáveis e distinção entre sujeito e predicado nas proposições.	Transição para a Lógica Formal com o uso de operadores de quantidade, superando limitações da Lógica Aristotélica e da Lógica Proposicional.
Lógica Modal (Kripke)	Semântica de mundos possíveis. Introdução dos operadores modais (“necessário” e “possível”).	Ampliação para raciocínios sobre modalidades da verdade.

Fonte: autor.

3. REFERENCIAL TEÓRICO E LEGAL

Neste capítulo abordaremos aspectos teóricos e legais sobre o ensino e a aprendizagem de Lógica. Destaca-se aqui a sessão 3.5, na qual se aborda as metodologias de ensino e de avaliação escolhidas para a criação da proposta didática.

3.1. Como o ensino de Lógica é mencionado na BNCC (na Matemática, nas Linguagens e mesmo nas Ciências)

Ainda que, como vimos, a racionalidade tenha uma importância fundamental no desenvolvimento individual e coletivo das sociedades e possua sua mais precisa expressão de excelência na Lógica, os saberes relacionados a esta são pouco compreendidos e ensinados. Sobre esse ponto, é curioso percebermos como o raciocínio lógico é entendido pelos especialistas que desenham os currículos.

A BNCC traz como uma competência desejável “*Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo*” (BRASIL, 2018, p.267). O raciocínio lógico é referido constantemente não só no capítulo que trata da área da Matemática e suas tecnologias, mas também nas demais áreas, como Língua Portuguesa e Ciências. Todavia, apesar deste ser um tema transversal, multidisciplinar, não há nenhum apontamento explícito sobre como esse desenvolvimento do raciocínio lógico deva ocorrer.

Não há menção alguma ao ensino de conceitos da Lógica enquanto conteúdo específico, nem na Matemática (Ensino Fundamental e Médio), nem na Filosofia (Ensino Médio). O mais próximo que se chega de conceitos da Lógica ocorre de forma indireta. Na disciplina de Língua Portuguesa, por exemplo, procura-se compreender a estrutura textual ao interpretar e criar textos argumentativos. Isso passa por fazer o uso correto das conjunções (aditivas, adversativas, alternativas, conclusivas e explicativas), que são trabalhadas em maior profundidade a partir do 8º ano do Ensino Fundamental. Já na disciplina de Ciências, temos um princípio de aplicação do Método Científico (elaboração de hipóteses a partir da observação; experimentação / testagem da hipótese criada; ratificação ou refutação da hipótese). Na Matemática, o mais próximo que temos de conceitos da Lógica é a Teoria dos Conjuntos, que não é

citada na BNCC, porém, aparece em livros didáticos de 8º ano do Ensino Fundamental, ao se introduzir conjuntos numéricos, e no 1º ano do Ensino Médio, ao retomar esse assunto em preparação para o estudo das funções.

Particularmente, creio ser uma lástima um tópico tão relevante como a Teoria dos Conjuntos, ainda que sobreviva nos livros didáticos, não ser mencionado de forma explícita na BNCC, contrariando a importância que já teve em outros tempos:

Com o movimento de reforma chamado Matemática Moderna, vigente nos anos sessenta e setenta do século XX, o mundo foi influenciado por recomendações de ensinar Matemática apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, enfatizando a teoria dos conjuntos. (Onuchic e Alevatto, 2011, p.78)

A seguir, temos um trecho dos conteúdos programáticos do equivalente ao 1º ano do Ensino Médio (10th grade), no condado de Ontário, Canadá, país que ocupa a 6ª colocação geral no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), segundo a avaliação mais recente da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE):

10.MPM2D.1.2 Raciocínio e Demonstração

10.MPM2D.1.2.1 desenvolver e aplicar habilidades de raciocínio (p. ex., reconhecimento de relações, generalização por meio de raciocínio indutivo, uso de contraexemplos) para formular conjecturas matemáticas, avaliar conjecturas e justificar conclusões, além de planejar e construir argumentos matemáticos organizados;

Identificar hipóteses e conclusões (10-V.1)

Contraexemplos (10-V.2)

Condicionais (10-V.5)

Negações (10-V.6)

Conversas, inversas e contrapositivas (10-V.7)

Bicondicionais (10-V.8) (*Ontario, s.d., s.p., tradução própria*)

É notório o cuidado em aproximar os estudantes da Lógica ao se explicitar isso na grade curricular. Além disso, o currículo de Ontário apresenta uma preocupação com o ensino de programação, que serve como campo de integração da Lógica e da tecnologia. Nesse sentido, a BNCC carece de aprimoramento, pois suas lacunas reforçam a ausência de engajamento com o ensino de Lógica. Nas palavras de Souza (2020, p. iii do prefácio):

Uma das razões para se estudar Lógica é que ela nos confere a capacidade de análise crítica dos argumentos mentais utilizados na organização das ideias e dos processos criativos. Ao estudar Lógica, o indivíduo toma consciência dos elementos fundamentais à capacidade de argumentar e expor suas ideias. Obtendo essa habilidade, essa consciência, esse metaconhecimento, o indivíduo se torna mais capaz na racionalização e organização de suas ideias. Nesse contexto, é importante enfatizar que na Lógica não tentamos dizer como as coisas são, ou como as pessoas efetivamente raciocinam. Na Lógica estudamos como as pessoas devem raciocinar. Em suma, para saber raciocinar

adequadamente e concretizar os sonhos, o primeiro passo é ter consciência da natureza do raciocínio, como devemos raciocinar, o que pode ser obtido estudando Lógica.

Por essa perspectiva, parece contraditório um currículo que incentiva o desenvolvimento do raciocínio lógico, mas ignora as potencialidades do ensino da Lógica para este fim, não a mencionando entre os seus objetos de conhecimento. De fato, um assunto que sequer é citado nunca será visto com a importância que merece.

3.2. Da necessidade de se aliar a Linguagem à Matemática (ou “A Lógica como campo de interdisciplinaridade”)

Na proposição 5.6 de seu *Tractatus Logico-Philosophicus* (1968, s.p.), Ludwig Wittgenstein diz: “*Os limites de minha linguagem denotam os limites de meu mundo*”. Tal frase transmite a ideia de que nossa capacidade de expressar experiências através da linguagem se relaciona diretamente à nossa compreensão do mundo. Ou seja, aquilo que podemos descrever através da linguagem define a forma como experienciamos algo. Não obstante, adotamos expressões como “não tenho palavras para descrever” quando o nosso conhecimento lexical, bem como o próprio léxico, é insuficiente para garantir a tradução de sentimentos e sensações. O povo inuíte, que habita regiões árticas do Canadá, Alasca e Groenlândia, possui mais de uma dezena de formas diferentes para se referir à neve, pois, dado onde vivem, faz sentido existirem diversas denominações que transmitam de modo mais preciso o que querem expressar.

Essa ideia é usada na distopia “1984”, de George Orwell, na qual o regime totalitário de Oceania cria a Novalíngua. Ao minimizar o vocabulário e simplificar a gramática, a Novalíngua procura restringir a expressão e o pensamento individual e crítico, impedindo o surgimento de ideias dissidentes que desafiem o status quo e a ideologia imposta pelo Partido do Grande Irmão. Essa ideia aparece mesmo na Bíblia: “*No princípio era a Palavra, e a Palavra estava com Deus, e a Palavra era Deus.*” (João, 1:1). Antes disso temos que “*Deus disse: ‘Faça-se a luz!’ E a luz se fez*” (Gênesis, 1:3). Como não interpretar que é pela palavra que a realidade à nossa volta é forjada? As religiões pagãs colocam esse mesmo peso no poder das palavras, através das quais os feitiços são usados para moldar a realidade. Não à toa, em inglês, a palavra “spell”, pode significar tanto “feitiço” como “soletrar”.

Dongo-Montoya (2021) nos lembra que Vygotsky, em suas obras, fala do papel crucial que a linguagem possui no desenvolvimento cognitivo e social, por ser o instrumento que possibilita a estruturação, a organização e a expressão do pensamento, sendo a base para compreender o mundo e formar conceitos.

Dito isso, observe algumas questões que já usei em atividades de sala de aula com turmas de 6º ano:

> Usando os algarismos 1, 2 e 3, José formou todas as combinações possíveis de números com três dígitos e algarismos distintos. Qual a soma entre todos os números que José formou?

> Um fazendeiro semeou $\frac{3}{4}$ de sua fazenda com soja e $\frac{1}{6}$ com milho. Que fração representa a parte da fazenda que foi semeada?

Estas duas questões possuem em comum o fato de que os alunos disseram não saber responder por não conhecerem as palavras “distintos” e “semeou”/“semeada”. Estas palavras não faziam parte do seu conhecimento lexical e, portanto, impediam que sua compreensão da questão fosse possível. Isto será válido, também, para a proposta didática que se pretende apresentar adiante: sem um vocabulário mínimo que possibilite a compreensão sobre o que se lê, os alunos que venham a participar da aplicação desta proposta talvez não apresentem um bom rendimento. Leitura e interpretação de texto, portanto, são requisitos essenciais para que os fundamentos da Lógica que procuraremos abordar nesta proposta sejam assimilados.

Para além de achar que somente cérebros privilegiados conseguem organizar o raciocínio de forma a encontrar respostas para questões da Matemática (ou da Lógica), devemos lembrar que expandir nosso repertório linguístico é importante para que consigamos acessar formas mais sofisticadas de pensamento, como nos fala Bondía (2002, p.21):

As palavras determinam nosso pensamento porque não pensamos com pensamentos, mas com palavras, não pensamos a partir de uma suposta genialidade ou inteligência, mas a partir de nossas palavras. E pensar não é somente “raciocinar” ou “calcular” ou “argumentar”, como nos tem sido ensinado algumas vezes, mas é sobretudo dar sentido ao que somos e ao que nos acontece. E isto, o sentido ou o não-sentido, é algo que tem a ver com as palavras. E, portanto, também tem a ver com as palavras o modo como nos colocamos diante de nós mesmos, diante dos outros e diante do mundo em que vivemos. E o modo como agimos em relação a tudo isso.

Assim sendo, não é possível dissociar a linguagem da aprendizagem. Logo, não há como dissociar a linguagem da aprendizagem matemática. Nesse sentido, a Lógica pode ser o elo que une esses campos, servindo de mediadora entre conhecimentos que são vistos como antagônicos.

3.3. A relação entre a Lógica e a abstração

Uma das definições que a palavra abstração apresenta no dicionário online Michaelis² é a de “*consideração das qualidades, independente dos objetos a que pertencem*”. Aristóteles acreditava que a Lógica seria a ferramenta que conduziria ao conhecimento verdadeiro, através da coerência de pensamento. Desde que ele indicou quais seriam os princípios fundamentais da Lógica ou procurou enaltecer as qualidades da boa argumentação através de silogismos válidos, já tínhamos aí processos mentais que permitiam o isolamento de uma propriedade universal, como com as expressões “todo”, “nenhum”, “algum”. Com essas expressões, não se falava de um indivíduo ou objeto específico, pois o propósito era evidenciar alguma característica, enfatizando uma qualidade.

Segundo Cassirer (1965), o pensamento abstrato seria uma força ativa capaz de superar a mera intuição e a partir do qual se constrói estruturas simbólicas. São essas estruturas que servem de base para que o pensamento lógico se constitua e opere (esse símbolo, por exemplo, podem ser as palavras, necessárias para construir o raciocínio, como vimos na sessão anterior). Contudo, o pensamento lógico não é direto, mas um processo que envolve etapas e intercessões que dependem de conceitos abstratos e de suas representações simbólicas para organizar a realidade³. Portanto, a ligação entre a abstração e o pensamento lógico formal é indissociável.

Como visto no capítulo 2, ao tomar símbolos para organizar o pensamento lógico, Boole acabou por emancipar a Lógica da concretude. As proposições “A primavera iniciou” (p) e “O jardim está florescendo” (q), podem ser conectadas e representadas simplesmente por “ $p \rightarrow q$ ”. Por essa perspectiva, pode-se dizer que a

² <https://michaelis.uol.com.br/busca?id=mdq>

³ No exemplo dado na sessão anterior sobre o livro 1984, a escassez simbólica gerada com a Novalíngua é capaz de estreitar a noção de realidade.

Lógica acabou, ao longo da história, se desprendendo da necessidade da realidade, sendo analisada conceitualmente (com símbolos e regras próprios). Assim, a Lógica não apenas se utiliza da abstração, mas serve como uma estrutura simbólica que gera a abstração em seu próprio funcionamento.

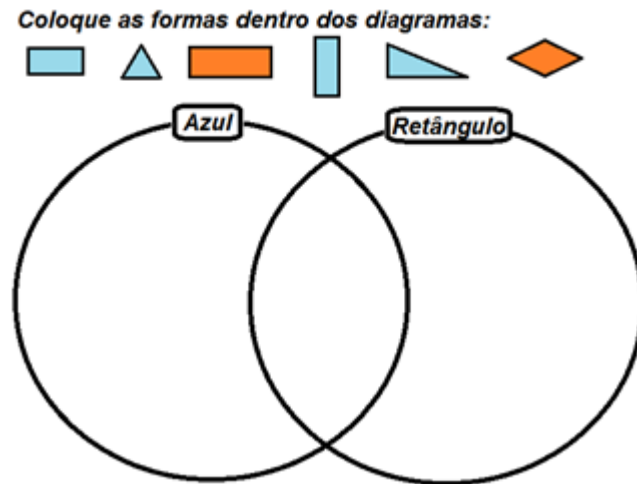
3.4. O desenvolvimento do raciocínio lógico nas crianças e adolescentes

Como mencionado na sessão anterior, a Lógica exige pensamento abstrato. Nesse contexto, é interessante que, à luz das teorias de aprendizagem, avaliemos qual a fase mais propícia para que o ensino de Lógica possa ser efetivo.

O biólogo e psicólogo suíço Jean Piaget fez diversas contribuições sobre as fases do desenvolvimento cognitivo nas crianças e adolescentes. Tais contribuições foram bastante relevantes para que a estruturação curricular entrasse em sintonia com o que se pode esperar de um estudante em termos de aprendizagem de acordo com a sua idade. As idades em que essas fases ocorrem podem variar de indivíduo para indivíduo, sendo as faixas etárias observadas nas pesquisas de Piaget uma média. Entretanto, as fases descritas pelo pesquisador costumam ocorrer numa determinada ordem em que o processo de desenvolvimento cognitivo avança, não sendo possível pular alguma dessas fases.

Por volta dos seis anos de idade, no início do Ensino Fundamental, a criança está saindo da fase pré-operatória e adentrando a fase operatória concreta, de acordo com as teorias piagetianas (Garcia, 1998). Nessa fase, ela estará apta a compreender o conceito de conservação de quantidade, a classificar objetos e a resolver problemas matemáticos simples, como com as quatro operações básicas. Isso pode ser potencializado com pelo uso da ludicidade e com a utilização de material concreto, ou seja, algo que possa ser manuseado para facilitar a aprendizagem. Atividades como a da figura a seguir, poderiam ser utilizadas para promover um contato inicial com o conceito de conjunto, enquanto trabalham as habilidades relacionadas à classificação de objetos.

Figura 8 – Exemplo de atividade de classificação envolvendo a noção de conjunto



Fonte: autor.

Também nessa fase, os alunos já poderiam ser estimulados a relacionar premissas simples que os levem a refletir sobre objetos de tipos distintos, mas com similaridades, de modo a alcançar conclusões a partir de deduções, como em:

I) Todos os cachorros possuem quatro patas. Senhor Cócegas é um cachorro. O que podemos concluir sobre ele?

Resposta esperada: Senhor Cócegas possui quatro patas.

II) Todos os cachorros possuem quatro patas. Meu gato possui quatro patas. Podemos concluir que ele é um cachorro?

Resposta esperada: Não, pois os gatos também são animais com quatro patas.

Espera-se que, aos onze anos, os alunos cheguem ao 6º ano do Ensino Fundamental. É por volta dessa idade que costuma iniciar a quarta e última fase proposta por Piaget, que é a fase operacional formal. Nessa fase, a criança começará a desenvolver a abstração, que possibilita compreender conceitos e resolver operações sem o uso de material concreto.

As operações “formais” assinalam [...] uma terceira etapa em que o conhecimento ultrapassa o próprio real para inserir-se no possível e para relacionar diretamente o possível ao necessário, sem a mediação indispensável do concreto: ora, o possível cognitivo, tal como, por exemplo, a sequência infinita de números inteiros, a potência do contínuo ou simplesmente as dezesseis operações resultantes das combinações de duas proposições p e q e de suas negações, é essencialmente extemporâneo. (Piaget, apud Munari, 2010, p.138)

Também nessa fase, a criança desenvolve a capacidade de formular hipóteses para a resolução de problemas e a fazer deduções a partir de proposições.

Com efeito, a primeira característica das operações formais é a de poder recair sobre hipóteses e não mais apenas sobre os objetos [...] [C]omo as hipóteses não são objetos, são proposições, e seu conteúdo consiste em operações intraproposicionais de classes, relações etc, do que se poderia oferecer a verificação direta; o mesmo se pode dizer das consequências tiradas delas pela via inferencial; por outro lado, a operação dedutiva que leva das hipóteses às suas conclusões não é mais do mesmo tipo, mas é interproposicional e consiste em uma operação efetuada sobre operações [...]. Ora, esta é uma característica muito geral das operações que devem atingir este último nível para se constituir, desde que se trate de utilizar as implicações etc, a lógica das proposições ou de elaborar relações entre relações (proporções, distributividade etc), de coordenar dois sistemas de referência etc. É este poder de formar operações sobre operações que permite ao conhecimento ultrapassar o real e que lhe abre a via indefinida dos possíveis por meio da combinatória, libertando-se então das elaborações por aproximação, às quais permanecem submetidas as operações concretas. (Piaget, apud Munari, 2010, p.138-139)

Tópicos relacionados à Teoria dos Conjuntos podem (e devem) continuar sendo introduzidos nessa fase. Como, por exemplo, a noção de que o “tipo” de número com o qual os alunos vêm trabalhando até então são os números naturais, que surgiram da necessidade humana de realizar contagens. Se agruparmos esses números como elementos de um conjunto, teremos um conjunto infinito. Esse conjunto pode ser separado em dois subconjuntos, também infinitos: pares e ímpares. Com isso, utiliza-se um conhecimento com o qual os alunos já possuem familiaridade, complexificando-o sob uma nova ótica.

A proposta didática, que será elaborada adiante, terá como público-alvo alunos do Ensino Médio. Nessa etapa, os estudantes já dispõem de um arcabouço teórico sólido em Língua Portuguesa e Matemática, bem como cognição familiarizada com o pensamento abstrato. Entretanto, os conceitos de Lógica poderiam ser introduzidos a partir do sexto ano do Ensino Fundamental, de forma gradual.

Garcia (1998, p.22) destaca que:

Desde o início de suas reflexões teóricas, Piaget afirmava que o ato de conhecer provém da ação do sujeito sobre o objeto de conhecimento [...]. Por sua vez o sujeito conhece os objetos, porque os insere numa estrutura mental que possui no momento da interação. Essas estruturas, [...] vão sendo construídas pela interação, ou seja, na simultaneidade da ação da criança sobre o mundo e a ação do mundo sobre a criança.

Por esse prisma, temos que o desenvolvimento cognitivo (e, portanto, do raciocínio lógico), é incentivado por meio do uso de metodologias que aproximem o sujeito do objeto do conhecimento, promovendo a criação de novos esquemas mentais.

3.5. Sobre as metodologias de ensino e de avaliação escolhidas para a proposta didática

A famosa citação “Cogito ergo sum” ou “Penso, logo existo” de René Descartes (s.d., s.p.), é precedida pela dúvida. O filósofo coloca em xeque a própria existência e deduz (através da Lógica) que o fato de duvidar, e de pensar sobre a dúvida, faz com que exista um ente (o “eu”) que pensa e que duvida. Esta citação curta, poderia ilustrar perfeitamente a metodologia de ensino que se escolheu para a proposta didática que se seguirá: a resolução de problemas. O ato de pensar nasce da dúvida. O problema é o que gera essa dúvida. Uma vez que o pensamento se forma, se elabora, se estrutura, ele modifica o ente pensante. O pensamento se torna saber no ente racional, pela necessidade desse ente alcançar a verdade.

A Lógica costuma ser apresentada ao grande público através de conceituação e de exemplificação, ou seja, calcada no ensino tradicional, com mera exposição teórica. Por esse viés, explica-se um conceito, apresentando a simbologia associada a ele, e faz-se o uso de exemplos que demonstrem o que se está explicando. É o que teremos, por exemplo, em praticamente todo e qualquer livro/apostila que se proponha a ensinar esse assunto. A metodologia nos livros é essencialmente expositiva. Não se costuma investir no diálogo com o leitor. Paulo Freire (2019) nos aponta que esta é a base da educação bancária, em que o professor deposita o conteúdo enquanto o aluno absorve de modo passivo. Por isso, segundo ele, a sala de aula constitui um espaço privilegiado de troca de saberes entre professor e aluno, possibilitando formas de contato mais profundas com o objeto de conhecimento que a mera exposição não alcança.

Existem outras formas de acessar os conceitos lógicos que podem ser exploradas. Algumas das possibilidades incluem o uso da ludicidade (através de jogos) ou o uso da robótica/programação (através da construção de algo que cumpra uma finalidade). Entretanto, a forma escolhida para proposta didática desta dissertação, envolve o fato de que os conceitos de Lógica podem ser construídos através de padrões observados em enunciados de situações-problemas. Procura-se com isso fazer com que os alunos possam aprimorar seu raciocínio ao identificarem relações fundamentais dentro de enunciados, destacando o que é relevante e simplificando as ideias sem que se percam em distrações. Uma vez que esses

padrões sejam formalizados como conceitos, facilita-se a generalização, com a aplicação das regras lógicas a outros casos. Além disso, a Lógica auxilia a traduzir ideias em símbolos ($\neg p$, \forall , \exists , etc) o que permite relacionar informações e pensar em soluções através de manipulação algébrica.

Essa aproximação que se faz do aluno com o objeto de conhecimento por meio da resolução de problemas coloca o aluno como protagonista do processo. Na sua concepção sobre o construtivismo, Piaget (apud Garcia, 1998, p.18) ressalta que:

o conhecimento resultaria de interações que se produzem a meio caminho entre os dois [sujeito e objeto] dependendo, portanto dos dois ao mesmo tempo, mas em decorrência de uma indiferenciação completa, e não de intercâmbio entre as formas distintas. De outro lado e por conseguinte, se não há, no início, nem sujeito no sentido epistemológico do termo, nem objetos concebidos como tais, nem sobretudo, instrumentos invariantes de troca, o problema inicial do conhecimento será, pois, o de elaborar tais mediadores.

Ou seja, caberia ao professor estabelecer essa mediação e a resolução de problemas pode ser um caminho interessante para que esse contato aconteça.

A resolução de problemas é o foco do clássico livro de George Polya “*A arte de resolver problemas*”. Nesse livro, Polya estrutura etapas que auxiliam os alunos a organizar a resolução:

Primeiro temos que *compreender o problema*, temos que perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos que ver como os diversos itens estão inter-relacionados, [...] para termos uma ideia da resolução, para estabelecermos *um plano*. Terceiro, *executamos o plano*. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. (Polya, 1995, p.3-4)

As etapas do método criado por Polya não devem ser vistas como uma simples habilidade para resolver listas de exercícios repetitivos. Seu método serve para desenvolver o pensamento investigativo e criativo ao lidar com situações novas, por meio de perguntas estratégicas e reflexão consciente sobre o processo de resolução. Ainda assim, o foco de Polya era a organização da resolução.

Dando seguimento aos passos de Polya, diversos autores expandiram, a partir de seu método, toda uma metodologia de ensino, baseada na aprendizagem através da resolução de problemas. Entre esses autores, temos Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato, que contribuíram para a construção e divulgação dessa metodologia aqui no Brasil. Segundo elas, ao resolver problemas,

o aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre a construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é

consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. (Onuchic e Alevatto, 2011, p.81)

Para elas, “o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo” (Onuchic e Alevatto, 2011, p.80). Ou seja, o professor deve atuar como mediador e planejador de um ambiente investigativo, utilizando problemas para instigar a construção do saber. Por essa ótica, o problema se torna o meio, não o fim, pelo qual o conteúdo nasce. Isso conversa com o papel de mediador que o professor deve assumir na relação sujeito-objeto, na perspectiva construtivista do conhecimento de Piaget.

Para a proposta didática criada para esta dissertação haverá a sugestão para que se aplique a grupos (preferencialmente trios). Piaget aponta que a interação entre pares é benéfica para o desenvolvimento cognitivo, pois, ao confrontar perspectivas diferentes, o indivíduo é forçado a revisar seus esquemas mentais. O trabalho coletivo também é incentivado por Philippe Perrenoud (1999, p. 65) ao se optar por uma metodologia alinhada com o desenvolvimento de competências:

Em uma pedagogia das situações-problema, o papel do aluno é implicar-se, participar de um esforço coletivo para elaborar um projeto e construir, na mesma ocasião, novas competências. Ele tem direito a ensaios e erros e é convidado a explicitar suas dúvidas, a explicitar seus raciocínios, a tomar consciência de suas maneiras de aprender, de memorizar e de comunicar-se. [...] O aluno é convidado para um exercício constante de metacognição e metacomunicação.

Esse contrato exige uma maior coerência e continuidade de uma aula para outra, além de um constante esforço de explicitação e de ajuste das regras do jogo. Também passa por uma ruptura com a competição e com o individualismo. Isso remete a improvável cooperação entre adultos e ao possível contraste entre a cultura profissional individualista dos professores e o convite feito aos alunos para trabalharem juntos.

Assim como as potencialidades desta metodologia, vale citar suas limitações, como a possível resistência dos alunos ao se depararem com uma nova proposta didática, que rompe com o modelo de aula expositiva. Sobre isso, Perrenoud (1999, p.68) ressalta que:

Para os professores que aderem a uma abordagem por competências surge outro desafio: convencer seus alunos a trabalhar e a aprender de outra maneira. [...] [Os alunos] dificilmente podem tornar-se verdadeiros parceiros de uma reforma escolar que costuma ser lançada antes de sua chegada e desenvolve-se após sua saída. Em contrapartida, podem, geralmente sem sabê-lo, dificultar a implementação das reformas que afetam seu *ofício*.

Professores que queiram aplicar a resolução de problemas podem se deparar com alunos que se sintam frustrados com questões muito abertas, por estarem acostumados com modelos mais tradicionais de ensino, o que pode acabar levando à perda de interesse pelas atividades. Um único problema pode exigir uma carga de tensão cognitiva muito grande, principalmente se o aluno não faz ideia de por onde deve começar (ou se a própria interpretação do aluno para o problema está comprometida). Justamente para quebrar essa tensão, que se faz necessária a intervenção do professor com questionamentos que guiem o aluno para o que se procura fazer com que reflitam. Meneguelli (et al, 2018, p.219) ressalta que:

durante a resolução do problema, ao ser questionado, é importante que o professor indique o caminho por meio de perguntas secundárias, sem fornecer respostas prontas, levando os estudantes a construir suas próprias estratégias e, também, avaliá-las conforme progride na resolução.

Assim, circular entre os grupos de trabalho, direcionando (ou redirecionando) os alunos com perguntas que os façam pensar sobre suas conclusões é fundamental. A formalização dos conceitos que foram elaborados superficialmente, a priori, é essencial para dar sentido e profundidade ao que se busca evidenciar. A proposta é pensada levando-se isso em conta.

Dentro da abordagem por competências proposta por Perrenoud, presente em metodologias como a resolução de problemas ou a baseada em projetos, a avaliação formativa tornasse uma forma mais coerente de se avaliar. Nessa forma de avaliação, procura-se avaliar o processo, não só o resultado final. A avaliação é constante, não focada somente em uma prova para medir o quanto o aluno aprendeu. De fato, Meneguelli (et al, 2018, p. 222) comenta que:

convém salientar que o processo de avaliação da resolução não pode considerar apenas o resultado final, sendo a nota atribuída perante um contexto de certo ou errado, mas sim, deve se pautar a partir do empenho, questionamentos, discussões, raciocínio utilizado, dentre outros aspectos que permeiam o desenvolvimento da resolução.

Essa avaliação formativa pode ser feita com diferentes maneiras de acompanhamento dos alunos (e de seus grupos), como por exemplo:

i) no diálogo com os alunos nos grupos, durante a resolução dos problemas propostos (tomar notas e dar *feedback* sobre os potenciais e dificuldades detectados);

ii) pelos registros dos raciocínios de suas resoluções, que serão guardados em portfólios, para que se possa perceber a evolução ao longo do período de aplicação da proposta;

iii) pela apresentação do raciocínio de resolução junto ao grande grupo;

iv) pela correção do seu raciocínio ao comparar com os demais grupos, percebendo possíveis erros ou identificando caminhos melhores de chegar ao resultado;

v) pelas contribuições individuais ao esquematizar os conceitos por trás dos problemas;

vi) pela construção de um problema, verificando se os conceitos trabalhados foram contemplados;

vii) por autoavaliação e avaliação por pares, para que os alunos discorram sobre o que aprenderam e como auxiliaram seu grupo (bem como seus colegas o fizeram) na realização das tarefas.

Segundo Hoffmann (2009, p32), é importante que se observe

a ação avaliativa como interpretação cuidadosa e abrangente das respostas do educando frente a qualquer situação proposta, assim como a visão de acompanhamento, não como um caminho de certezas do professor, mas uma trajetória de entendimento, troca de ideias por ambos os elementos da ação educativa.

Sendo assim, uma visão holística do processo é melhor contemplada dentro da proposta da avaliação formativa. Além disso, Hoffmann (assim como Perrenoud) vê na avaliação mediadora uma ferramenta que organiza a práxis pedagógica, reorientando os caminhos que se tomam rumo ao objetivo da aprendizagem.

4. ANÁLISE DAS QUESTÕES DE LÓGICA DA OBMEP

No capítulo anterior, vimos que a abstração geralmente se desenvolve nos indivíduos na faixa dos onze anos, idade em que costumam a começar a frequentar os anos finais do Ensino Fundamental. Não à toa, temos os alunos que ingressam no 6º ano tendo seu primeiro contato com as provas da OBMEP, nas quais, como mencionado na introdução, há a presença das questões de Lógica.

A OBMEP sempre apresenta questões que forcem o uso do raciocínio lógico dos participantes. Nenhuma resposta é alcançada sem que se faça pelo menos dois ou três passos para que se chegue a ela. Dentre essas questões, destacam-se as de Lógica por não exigirem conhecimento matemático específico. São sobre essas questões que se criou a ideia de que fosse possível trazer o ensino de Lógica Formal para dentro de sala de aula, afinal, é através dela que se demonstram várias proposições na Matemática. Como provar que $\sqrt{2}$ não é um número racional sem que se use redução ao absurdo? Como provar que, se o resultado de uma raiz quadrada for um inteiro par, o radicando dessa raiz também deve ser um inteiro par, sem que se use contrapositiva? Enfim, a Matemática depende da Lógica para suas demonstrações, então seria natural que alguns conceitos dela fossem ensinados na Educação Básica.

4.1. Os diferentes tipos de questões de Lógica observados

Ao serem analisadas todas as questões de Lógica da OBMEP já lançadas até o presente momento, foi criada para esta dissertação uma classificação que toma como base quatro diferentes tipos. A saber:

* **Mentira (M)**: Nas questões do tipo mentira, pelo menos uma das proposições apresentadas é falsa⁴. Nestas questões, geralmente se toma uma das proposições como verdadeira e se verifica se isto não contradiz alguma das demais proposições. Constatada alguma contradição, testa-se as demais proposições da mesma forma. É importante notar que não há necessidade de negar a proposição falsa, logo, não se

⁴ Vale destacar que, ainda que muitas pessoas o façam, não deveríamos considerar falsidade e mentira como sinônimos, como veremos adiante.

faz necessário estabelecer relação de equivalência. Durante a análise, esse tipo de questão foi o primeiro a se destacar dos demais, dadas suas características.

* **Dedução (D)**: Nas questões de dedução, as proposições feitas no enunciado são todas verdadeiras. Justamente por conta disso, diferenciam-se das questões do tipo mentira. Nestas questões, a resposta deve ser obtida ao comparar as informações de modo a fazê-las se encaixar sem que as proposições apresentadas se contradigam.

* **Sequenciamento (S)**: Assim como nas questões de dedução, as questões de sequenciamento apresentam proposições todas verdadeiras, porém nestas questões, a resposta pode ser obtida organizando as informações numa determinada ordem (cronológica, posicional, etc).

* **Equivalência (E)**: Nessa questão (há somente uma desse tipo) é fácil perceber que a resposta passa por estabelecer uma relação de equivalência com uma proposição do enunciado. Essa relação deve ser a negação de tal proposição (uma proposição categórica que usa o quantificador universal afirmativo “todos”). Se diferencia do tipo mentira, pois a estratégia de resolução é diferente, mas foi inicialmente categorizada como mentira por conta do enunciado trazer a informação de que o personagem mentia, entretanto, não é necessário determinar qual proposição é falsa.

No quadro a seguir, procuramos deixar essa classificação evidente, muito embora seja possível que algumas das questões apresentem mais de um tipo. Por exemplo, questões de “Sequenciamento” que exigem relações mais elaboradas das informações, foram classificadas também como “Dedução”. Além disso, sempre que uma questão fizer o uso de algum conectivo lógico (e, ou, se/então, não) ou quantificador lógico (todo, nenhum, algum, algum não), etc, isso será registrado junto ao tipo, conforme a legenda logo abaixo do quadro:

Quadro 9 – Questão de Lógica na OBMEP e suas respectivas classificações

Quadro das questões de Lógica da OBMEP (1ª fase)				
Ano	1º nível	2º nível	3º nível	Tipos Conect./Quantif.
2005	X	X	X	-
2006	X	X	X	-
2007	X	V	V	D134

2008	V	V	V	D3
2009	V	V	V	S1
2010	V	V	V	M12
2011	X	V	V	M23
2012	V	V	V	S14
2013	V	V	V	M14
2014	V	V	V	M6
2015	V	V	V	DS1
2016	V	VV	V	M / DS
2017	V	V	V	DS
2018	V	V	V	M
2019	VV	V	V	S1 / DS1
2020*	-	-	-	-
2021 **	X	V	-	M124
2022	V	V	VV	D1 / E5
2023	V	V	V	M
2024	V	V	V	D14
2025	V	V	V	MS247

Fonte: autor.

X – não teve questão de lógica para este nível.

V – teve uma questão de lógica para este nível.

VV – tiveram duas questões de lógica para este nível.

* Não teve edição da OBMEP neste ano.

** Consta na Olimpíada Carioca de Matemática (sem equivalente ao 3º nível)

TIPOS DE QUESTÃO:

D – Dedução.

S – Sequenciamento.

M – Mentira.

E – Equivalência.

USO DE CONECTIVOS / QUANTIFICADORES / OPERADORES:

- 1 – Conjunção (e)
- 2 – Disjunção (ou)
- 3 – Condicional (se/então)
- 4 – Negação (não)
- 5 – Universal (todo/nenhum)
- 6 – Particular (algum/algum não)
- 7 – Necessário (deve)
- 8 – Possível (pode)

A análise de cada uma das questões segue em anexo, com comentários.

4.1.1. Mentira vs Falsidade

A confusão que se faz entre mentira e falsidade é algo comum. Como exemplo, temos a questão da OBMEP de 2014, na qual 5 alunas divergem sobre o dia da prova de matemática. Ela foi classificada como “Mentira”, embora as personagens do enunciado não estivessem mentindo de fato. Na lógica, proposições que não sejam verdadeiras são ditas falsas. Mas estaria a verdade também em oposição à mentira?

Em “Alice no País dos Enigmas” (Smullyan, 1984), a protagonista tem uma longa conversa com a Duquesa, que diz que metade das pessoas dali são loucas. Essas pessoas loucas possuem crenças deturpadas, acreditando ser verdadeiro tudo o que for falso e acreditando ser falso tudo o que for verdadeiro. Sendo assim, uma pessoa louca, porém franca, não estaria mentindo se dissesse que “dois e dois são cinco”, pois crê piamente que essa afirmação é verdadeira.

Agora, vejamos a situação de Fulano, que foi questionado sobre o nome do rapaz que faria a entrega de uma encomenda. Fulano não recordava o nome correto do entregador e resolveu contar uma mentira, só para que parassem de lhe atormentar com perguntas. Então, ele dá um nome qualquer, dizendo: “O nome do entregador é Beltrano”. Fulano mentiu, mas, depois, constatou-se que o nome do entregador era, de fato, Beltrano, logo, sua declaração foi verdadeira.

Em ambos os exemplos, a mentira e a falsidade não se alinham como sinônimos, tendo sentidos contrários à verdade. Seria correto afirmar, portanto, que,

assim como a falsidade se opõem a verdade, temos que a mentira se opõem à sinceridade (ou à franqueza). Apesar disso, como na maioria das questões da OBMEP que foram tipificadas como “Mentira” existe a intenção de enganar⁵ por parte das personagens do enunciado, a declaração mentirosa é aceita como falsa. A exceção é a questão da prova de 2014, sobre a data correta da prova de Matemática. A discussão sobre tal diferenciação é válida ao se trabalhar essa questão, pois, a despeito de se tipificá-la como “Mentira”, as personagens do enunciado divergem sobre a data, mas não na tentativa de enganar alguém: algumas delas simplesmente possuem uma ou mais informações incorretas entre as que detêm.

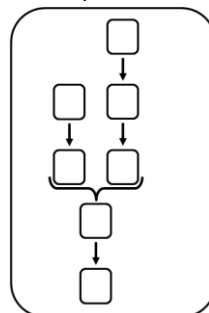
4.2. Relação entre os tipos de questões e a Lógica (Proposicional e de Predicados)

Os diferentes conectivos e quantificadores vistos na Lógica Proposicional e na Lógica de Predicados não estão atrelados a um tipo específico de questão, entre os propostos, mas determinados tipos costumam “flertar” mais com uma ideia ou com outra. Por exemplo, podemos dizer que o conectivo de negação está conectado de

⁵ Em uma prova sobre argumentação, o prof^o Gabriel Goldmeier, orientador da presente dissertação, apresentou a seguinte questão justamente inserindo a discussão sobre a diferenciação entre “mentir” e “dizer algo falso”:

DESAFIO: Fazendo uso das numerações associadas às afirmações apresentadas no texto, preencha os espaços em branco do diagrama de acordo com a estrutura argumentativa desenvolvida.

(1) “Existem mentiras verdadeiras”. (2) Baseio tal afirmação na seguinte ideia. (3) Dizer a verdade é o oposto de dizer o que é falso, pois (4) o verdadeiro e o falso se referem, respectivamente, ao acordo ou ao desacordo da afirmação com a realidade. Por outro lado, (5) mentir é o oposto de ser sincero, dado que (6) esses dois conceitos estão ligados à intenção do agente. Digo isso por entender (7) a mentira como um ato que *visa a* enganar o interlocutor e a sinceridade como a atitude que *objetiva* transmitir a verdade. Dessa diferenciação, conclui-se que, (8) se uma pessoa pensasse ser dez horas quando, na verdade, fossem nove horas e, querendo enganar o seu interlocutor, naquele momento, lhe dissesse “são nove horas”, ela estaria dizendo a verdade, porém mentindo.



Aqui não interessa a resolução da questão, isto é, a colocação dos números nas caixas, apenas a reflexão sobre a diferença entre os conceitos examinados.

forma implícita com as questões do tipo “Mentira”, pois, uma vez que determinamos quem mente, temos (ainda que isso seja problemático, como acabamos de ver) que o valor lógico da proposição feita na declaração do mentiroso é falso, logo, a negação dessa proposição será verdadeira. Como vimos no quadro da sessão anterior, algumas das questões de um tipo específico sequer trazem conectivos ou quantificadores, trabalhando somente com proposições simples nos seus enunciados.

A estratégia que se costuma adotar para resolver questões do tipo “Mentira”, mencionada anteriormente, lembra o uso da redução ao absurdo. Apesar de não serem exatamente a mesma coisa, a estratégia consiste em tomar uma proposição como verdadeira e verificar se isso implica em uma ou mais contradições.

Já nas questões do tipo “Dedução”, todas as proposições apresentadas no enunciado são verdadeiras. A resolução passa por relacionar tais proposições, a partir das quais se chega a uma conclusão (que não conflite com alguma dessas proposições iniciais). Em termos de Lógica, isso tem proximidade com o que chamamos de demonstrações diretas, muitas delas através da aplicação de silogismos. Por exemplo, na questão dos bolos, da prova de 2007: a instrução “Se colocar ovos, não coloque creme” invalida a alternativa C que diz que o bolo pode ser feito com “ovos e creme, mas sem laranja”. Nesse caso específico, o raciocínio poderia ser estruturado com o seguinte silogismo hipotético (que faz uso de condicionais):

- * Premissa 1: Se colocar ovos, não coloque creme.
- * Premissa 2: Há ovos.
- * Conclusão: Não colocar creme.

Existem outros tipos de silogismos, como os categóricos e os disjuntivos. Todos esses silogismos seguem regras específicas para que se chegue em conclusões válidas. Não necessariamente haja silogismos intrínsecos às questões de “Dedução”, ainda que o objetivo também seja obter uma conclusão válida ao relacionar informações.

A tipificação que se procurou estabelecer serve mais à estratégia de resolução que será adotada. Entre as etapas de resolução de problemas propostas por Polya, temos que a segunda etapa é a da “elaboração de um plano”. É nessa etapa que se costuma comparar o problema, com o qual nos deparamos, com problemas que já

foram resolvidos anteriormente. Nesse sentido, encontrar similaridades entre os problemas, pode indicar o melhor caminho para se alcançar o resultado. Isso ressoa também com a Aprendizagem Significativa proposta por Ausubel, fazendo que o aluno relacione um novo problema com seu conhecimento prévio.

4.3. Como expandiremos essa ideia

As questões de Lógica apresentadas na OBMEP parecem um ótimo ponto de partida para que sejam trabalhados conceitos da Lógica em sala de aula. É, inclusive, um esforço louvável dos idealizadores desta prova que problemas assim tenham sido inseridos e conquistado seu espaço, tendo pelo menos uma questão de Lógica acrescentada, ano após ano, a esse banco específico de questões.

A “crítica” que se pretende fazer às questões de Lógica dessa prova ocorre no sentido de trazer sugestões que visem aprimorá-las, para seu uso como um material de referência no ensino de Lógica. Portanto, seguem abaixo alguns aspectos que poderiam ser levados em conta no desenvolvimento de futuras avaliações.

4.3.1. Expandindo os tipos de questão de Lógica Proposicional

As questões da OBMEP abordam Lógica Proposicional em níveis variados. Temos uma boa gama de questões que trazem o uso de conectivos, mas valem algumas ressalvas:

→ O conectivo “ou” é sempre trabalhado como sendo uma disjunção exclusiva, como na questão da prova de 2011, sobre os biscoitos da tia Geralda. Nessa questão, Bruno declara: “O culpado é Eduardo ou Daniela”. Como sabemos que há somente um culpado, fica evidente que ou foi Eduardo ou foi Daniela que pegou os doces, ou seja, a disjunção é exclusiva. Seria interessante acrescentar questões que explorem a ideia de disjunção inclusiva, possibilitando que haja dois culpados, por exemplo. Nesse caso, seria verdadeira a proposição de Bruno ainda que ambos, Eduardo e Daniela, tivessem comido os doces, como na seguinte reformulação:

*Tia Geralda sabe que **exatamente dois** de seus sobrinhos (entre Ana, Bruno, Cecília, Daniela e Eduardo) comeram todos os seus biscoitos. Ela também sabe que*

todos os culpados mentem e que os inocentes dizem a verdade. Seus sobrinhos fazem a ela as seguintes declarações:

- * Daniela: “Não fui eu quem comeu os biscoitos”.*
- * Bruno: “Eduardo ou Daniela comeram os biscoitos”.*
- * Eduardo: “Ana e Daniela comeram os biscoitos”.*
- * Ana: “Se Eduardo comeu, então Bruno não comeu”.*
- * Cecília: “Eduardo está mentindo”.*

Afinal, quais dois sobrinhos de Tia Geralda comeram os biscoitos?

- A) Ana e Eduardo.*
- B) Bruno e Daniela.*
- C) Bruno e Cecília.*
- D) Eduardo e Daniela.*
- E) Bruno e Eduardo.*

>>> Resolução:

Temos dez combinações (combinação de 5 dois a dois) de duplas de culpados que poderiam ter comido os biscoitos, porém, mais fácil do que testar todas as dez, é testar somente combinações que aparecem entre as alternativas.

* Se considerarmos Ana e Eduardo culpados, teríamos uma contradição quanto ao enunciado, que indica que há dois culpados e esses dois mentem. Isso ocorre, pois com exceção da declaração de Eduardo, todas as demais seriam verdadeiras, incluindo a declaração de Ana.

* Se considerarmos Bruno e Daniela culpados, teríamos contradições nas declarações de Eduardo (teria mentido), Cecília (teria mentido) e do próprio Bruno (falou a verdade).

* Se considerarmos Bruno e Cecília culpados, novamente teríamos contradição com a declaração de Eduardo (pois não seria verdade).

* Se Bruno e Eduardo fossem culpados, teríamos contradição com a declaração de Ana (pois não seria verdade).

* Por fim, a única alternativa válida é a D, pois se considerarmos Daniela e Eduardo culpados, as demais declarações são todas verdadeira.

Comentário: Note que a declaração de Bruno pode gerar dúvida, uma vez que os alunos possam não vislumbrar que o “ou” inclua a possibilidade de que ambos tenham comido os biscoitos.

→ Não consta nenhuma questão que utilize bicondicional. Proposições com bicondicionais só serão verdadeiras se ambas as proposições compostas que à compõem forem verdadeiras, ou se ambas forem falsas. A dupla implicação proposta pelas bicondicionais são corriqueiras em vários teoremas matemáticos, como a seguinte proposição aritmética: um número é positivo se e somente se ele for maior do que zero.

No exemplo abaixo temos o uso de uma proposição com bicondicional.

Hugo, José e Luiz são irmãos e possuem TOC quanto ao uso da cor amarela em suas camisas.

** Ou José ou Luiz deve usar camisa amarela, mas não ambos.*

** Hugo usa camisa amarela **se e somente se** José usa.*

** Se Luiz usar camisa amarela, então Hugo também usa.*

Nessa situação, quando os três saem juntos:

A) José nunca usa camisa amarela, mas Hugo e Luiz sempre usam.

B) Hugo sempre usa, mas José e Luiz nunca usam.

C) Luiz sempre usa, mas Hugo e José nunca usam.

D) Hugo, José e Luiz nunca usam.

E) Luiz nunca usa, mas Hugo e José sempre usam.

>>> Resolução:

Pela condicional da terceira proposição, se Luiz usar camiseta amarela, então Hugo também usará. Se isso ocorrer, então José também usará (segunda proposição), porém, isso contradiz a primeira proposição, pois somente Luiz ou somente José podem usar amarelo, não ambos.

Entretanto, se Luiz não usar amarelo, a terceira proposição continuaria verdadeira, ainda que Hugo usasse essa cor. Na verdade, Hugo seria obrigado a usar amarelo, pois, uma vez que Luiz não esteja usando amarelo, José deve usar (primeira proposição), logo, Hugo também (segunda proposição). Portanto, a alternativa correta é a E.

Comentário: note que essa questão nos coloca a necessidade de que ou Luiz ou José devam usar camisas amarelas. Temos aqui uma pitada de Lógica Modal, pois, na linguagem natural, expressões como “deve” indicam que é necessário que algo

aconteça em todos os cenários (“necessário” é um operador modal, como vimos no capítulo 2).

→ Poderiam ser abordadas questões em que há equivalência lógica como a contrapositiva, ou relações de negação como as leis de De Morgan. A única questão que traz elementos de equivalência é a questão do Pinóquio na prova de 2022, que pede a negação de um quantificador lógico da Lógica de Predicados. Ainda que alguém não saiba o que é uma contrapositiva, a questão a seguir, apresenta alternativas que podem ser eliminadas ao se refletir sobre sua veracidade.

Se uma pessoa nasce no Rio Grande do Sul (RS), ela é brasileira.

Se uma pessoa nasce no Rio Grande do Norte (RN), ela é brasileira.

Segundo as afirmações acima, é correto afirmar que:

A) Se uma pessoa não nasce no RS ou no RN, ela não é brasileira.

B) Se um brasileiro não nasce no RS, ele nasce no RN.

C) Se uma pessoa não é brasileira, ela não nasceu no RS nem no RN.

D) Se uma pessoa não é brasileira, ou ela não nasceu no RS ou não nasceu no RN.

E) Se um brasileiro não nasce no RN, ele não nasce no RS.

>>> Resolução:

Aqui, a Teoria dos Conjuntos pode auxiliar a organizar a informação. Sejam 3 conjuntos B (de quem é brasileiro), N (de quem nasce no RN) e S (de quem nasce no RS), temos que N e S são disjuntos e estão contidos em B. Temos que $B - (N \cup S)$ é não vazio, pois existem pessoas brasileiras nascidas em outros estados, o que elimina as alternativas A e B. Considerando o complementar de N em relação a B, temos que um elemento pode estar em S, o que elimina a alternativa E. Considerando o complementar de B, ou seja, não brasileiros, temos elementos que pertencem a B que ou estão no complementar de R ou no complementar de S, logo eliminamos a alternativa D. De fato, a única afirmação que faz sentido é na qual o complementar de B está contido nos complementares de N e de S, ou seja, a alternativa correta é C.

Comentário: No livro-base “Números e Funções Reais”, de Elon Lages Lima, utilizado na disciplina de mesmo nome do PROFMAT, algumas ideias associadas à lógica

proposicional são trazidas com uma roupagem de Teoria dos Conjuntos pelo autor, incluindo a ideia de contrapositiva.

A questão a seguir, adaptada de “Alice no País dos Enigmas” (Smullyan, 1984, p.22, tradução própria), também deve ser resolvida utilizando uma equivalência. No caso, a negação da conjunção, que constitui uma das leis de De Morgan.

Em um encontro entre Alice e a Duquesa, esta revela que metade das criaturas dali são totalmente loucas, sendo que tudo que é verdadeiro essas criaturas acreditam ser falso e tudo que é falso acreditam ser verdadeiro.

Acompanhe um trecho do diálogo entre as duas:

– Bem - respondeu a duquesa -, considere, por exemplo, a Lagarta e Bill, o Lagarto. A Lagarta acredita que ambos são loucos.

– Qual deles é realmente louco? - perguntou Alice.

– Eu não deveria precisar lhe responder isso! - retrucou a Duquesa. Dei-lhe informação suficiente para que você deduz a resposta.

Qual a solução? A Lagarta é louca ou são? E o Lagarto?

>>> Resolução:

Se a lagarta acredita que ela e Bill são loucos, podemos deduzir que ela não pode ser são, pois, se fosse, sua afirmação seria verdadeira, o que contradiria a própria afirmação de que ela e Bill são loucos. Assim, a lagarta é louca e, portanto, sua declaração é falsa, o que implica que a negação de sua declaração é verdadeira. A negação de “a lagarta e Bill são loucos” é, pelas leis de De Morgan, “a lagarta não é louca ou Bill não é louco”, logo, Bill é são.

4.3.2. Expandindo os tipos de questão de Lógica de Predicados

Como abordado no capítulo 2, os quantificadores lógicos vistos na Lógica de Predicados (todos, nenhum, algum e algum não) são uma forma de “expandirmos” a Lógica Proposicional. Eles são citados em duas questões. A primeira é a questão da prova de 2015, na qual se fala que “pelo menos uma” das informações que cada menina dá está correta (a expressão “pelo menos um” é equivalente a “algum”). A

segunda, é uma das questões de 2022, na qual Pinóquio fala que “todos os meus chapéus são verdes”.

A questão do Pinóquio é bastante interessante, pois além desses quantificadores lógicos, traz a equivalência lógica ao indicar que se quer a negação da proposição. Outras questões como a que se segue poderiam deixar ainda mais rica a discussão sobre essas relações.

Cassandra é uma poderosa vidente, mas recai sobre ela uma maldição que faz com que ninguém acredite no que ela diz. Ela previu que um dos cálices servidos aos convidados de uma festa dada pelo seu pai, o rei troiano Príamo, estaria envenenado. Como ela está ciente dessa maldição, de que forma ela poderia avisar os convidados sobre o cálice envenenado?

- A) “Algum dos cálices está envenenado.”
- B) “Nenhum dos cálices está envenenado.”
- C) “Algum dos cálices não está envenenado.”
- D) “Todos os cálices estão envenenados.”

>>> Resolução:

Como todos creem que Cassandra mente, para se fazer acreditar ela deve declarar a negação do quealaria normalmente. Logo, a forma de anunciar que algum dos cálices contem veneno, que é uma proposição particular afirmativa, é com a declaração encontrada na alternativa B, que é uma proposição universal negativa.

Comentário: a questão foi criada com base na questão de Pinóquio. Note que também é do tipo “Equivalência”. Novamente, sabemos que a declaração deve ser uma mentira, pois é a única forma que Cassandra tem para que acreditem nela, então não faz sentido avaliar se o que ela diz é ou não mentira.

Abaixo, temos outra questão adaptada de “Alice no País dos Enigmas” (Smullyan, 1984, p.23, tradução própria):

Em um encontro entre Alice e a Duquesa, esta revela que metade das criaturas dali são totalmente loucas, sendo que tudo que é verdadeiro essas criaturas acreditam ser falso e tudo que é falso acreditam ser verdadeiro.

Acompanhe uma das falas da Duquesa: “Há também minha cozinheira e o Gato de Cheshire. A Cozinheira acredita que pelo menos um dos dois é louco”.

Que pode você deduzir sobre a Cozinheira e o Gato?

>>> Resolução:

Se a cozinheira fosse louca, sua afirmação de que pelo menos um deles dois é louco seria falsa. Assim, a negação de tal afirmação seria verdadeira. Tal negação seria “nenhum dos dois (cozinheira e gato) é louco”, o que contradiz tomarmos a cozinheira como louca. Logo, a cozinheira é sã e sua afirmação é verdadeira, portanto, o gato é louco.

Comentário: é interessante ressaltar que, por termos somente dois elementos a serem comparados, poderia-se utilizar tão somente conectivos da Lógica Proposicional. Veja que, nessa situação, “pelo menos um dos dois é louco” equivale a “um ou outro é louco”, sendo essa disjunção inclusiva. A negação “nenhum dos dois é louco” equivale a “nem um nem outro são loucos”. De fato, ao invés da negação de uma proposição categórica (particular afirmativa em universal negativa), poderíamos utilizar a negação da disjunção (lei de De Morgan).

Quantificadores lógicos como os que temos na Lógica de Predicados, poderiam ser explorados, também, em questões envolvendo silogismos categóricos. Como em:

Todo quadrado é um retângulo.

Todo quadrado é um losango.

Retângulos e losangos são paralelogramos.

A partir dessas premissas, qual conclusão abaixo é válida?

A) Nenhum paralelogramo é um quadrado.

B) Um paralelogramo é sempre um retângulo ou um losango.

C) Nenhum losango é um retângulo.

D) Todo quadrado é um paralelogramo.

>>> Resolução:

Essa questão pode ser resolvida tendo bons conhecimentos em Geometria, mas se esse não for o caso, a Lógica nos indica aqui um silogismo categórico com três proposições universais (apesar da terceira premissa não usar o quantificador “todo”,

ele fica subentendido). Nem haveria a necessidade da primeira ou da segunda premissa aparecerem juntas, somente uma sendo suficiente para que se faça a dedução. Se todo quadrado é um retângulo (ou losango) e todos retângulos (ou losangos) são paralelogramos, então deduz-se que todo quadrado será um paralelogramo, como afirma a alternativa D. Pode-se fazer uso de diagramas de Venn para visualizar essa relação mais facilmente.

4.3.3. Expandindo os tipos de questão de Lógica Modal

A ideia de Lógica Modal foi trazida de forma implícita na recente questão da OBMEP de 2025, sobre o vencedor do prêmio na fila com 5 pessoas. Como não se abre possibilidade de falar outras frases, cada pessoa na fila deve optar em falar ou uma frase ou outra das duas que aparecem no enunciado. Caso essa questão não tivesse sido lançada, estaríamos falando aqui sobre “introduzir” questões de Lógica Modal ao invés de expandi-las. O problema citado trabalha com o contexto da necessidade, ou seja, ainda há margem para se explorar o contexto da possibilidade.

A Lógica Modal, como visto no capítulo 2, tem como preocupação os modos que a verdade pode assumir. Algumas proposições são necessariamente verdadeiras, enquanto outras são possivelmente verdadeiras. São com esses dois novos operadores que ela trabalha: “necessário” e “possível”, estendendo as noções que possuímos das Lógicas Proposicional e de Predicados. Em termos de linguagem, nos deparamos com expressões como “deve”, “precisa”, “pode”, etc.

Seguem, abaixo, três exemplos que envolvem Lógica Modal que exploram o contexto de possibilidade.

Eram três prisioneiros; um deles, cego. Eles podiam obter sua liberdade se resolvessem o seguinte problema:

*O carcereiro trouxe cinco chapéus: três brancos e dois vermelhos. No escuro, ele colocou um chapéu na cabeça de cada prisioneiro. Os prisioneiros foram então levados para um lugar iluminado onde, com exceção do cego, **podiam** ver de que cor eram os chapéus dos outros – mas não a cor do seu próprio chapéu. O jogo consistia em que pelo menos um prisioneiro adivinhasse a cor do acessório que ele próprio usava.*

** O carcereiro perguntou a um dos homens com visão normal se ele sabia a cor do próprio chapéu, e o prisioneiro respondeu que não.*

** O outro homem com visão normal disse que não sabia.*

** Já o homem cego, na sua vez, adivinhou corretamente a cor do chapéu que estava usando, libertando a si mesmo e aos companheiros de prisão.*

Qual era a cor do chapéu do cego e como ele adivinhou?

>>> Resolução:

** Se o primeiro prisioneiro diz não saber a cor do seu chapéu, isso só pode significar que os outros dois prisioneiros usam chapéus de cores diferentes ou ambos usam chapéus brancos, pois se visse ambos colegas de prisão com chapéus vermelhos, saberia que seu chapéu é branco.*

** O segundo prisioneiro também diz não saber a cor do seu chapéu, então ele também não está vendo ambos seus colegas com chapéus vermelhos. Contudo, se ele visse o terceiro prisioneiro (cego) com um chapéu vermelho, já seria capaz de deduzir que seu chapéu é branco, pois o primeiro prisioneiro havia ficado em dúvida e, portanto, ou seu chapéu e o do cego eram brancos, ou o do cego é vermelho e o dele é branco. Porém, ele diz não saber a cor do seu chapéu, logo o terceiro prisioneiro (cego) usa um chapéu branco.*

** O prisioneiro cego chega a essa mesma conclusão e consegue identificar a cor do próprio chapéu (branco).*

Arnaldo, parado em frente à casa de Bernardo, desafia este a descobrir a idade de seus três filhos. Arnaldo faz a seguinte afirmação: o produto das idades de meus filhos é igual a 36 e a soma de suas idades é igual ao número de tua casa. Bernardo, que é habilidoso com questões lógicas, após ouvir a proposição enunciada por Arnaldo afirma: “Faltam dados para resolver essa questão”. Arnaldo então diz: “O meu filho mais velho toca violão”. Bernardo, satisfeito com a última pista, resolve o problema. Assim, sabendo-se que o único dado diferenciador de idades seja o número de anos completos, qual é a idade de cada um dos filhos?

>>> Resolução:

Se o produto entre as idades é 36, temos as seguintes possibilidades de idades:

1, 1 e 36, cuja soma é 38.

- 1, 2 e 18, cuja soma é 21.
- 1, 4 e 9, cuja soma é 14.
- 1, 6 e 6, cuja soma é 13.
- 1, 3 e 12, cuja soma é 16.
- 2, 2 e 9, cuja soma é 13.
- 3, 3 e 4, cuja soma é 10.

Bernardo, obviamente sabe o número de sua própria casa, mas como ficou em dúvida, significa que as possibilidades se limitam a (1,6,6) e (2,2,9), nas quais a soma é a mesma (13). Com a dica final de Arnaldo, sabe-se que há um filho mais velho, descartando a possibilidade de que seja (1,6,6) na qual havia dois com a mesma idade. Assim, as idades dos três filhos de Arnaldo são 2, 2 e 9 anos.

(Enigma para..., 2015, s.p.) Albert e Bernard acabam de conhecer Cheryl e querem saber qual é a data do aniversário dela. Cheryl dá a eles uma lista com 10 datas possíveis:

<i>maio</i>	<i>junho</i>	<i>julho</i>	<i>Agosto</i>
15	17	14	14
16	18	16	15
19			17

Cheryl conta então, para Albert, o mês e, para Bernard, o dia.

- * Albert: "Não sei quando é o aniversário de Cheryl, mas sei que Bernard também não sabe."*
- * Bernard: "A princípio não sabia quando era o aniversário de Cheryl, mas agora já sei."*
- * Albert: "Então eu também sei quando é o aniversário dela."*

Então quando é o aniversário de Cheryl?

>>> Resolução:

Albert começa dizendo que não sabe a data, mas tem certeza que Bernard também não sabe. Bernard só poderia saber a data correta, mesmo sem saber o mês, se Cheryl tivesse lhe dito o número 18 ou o número 19. Como Albert sabe o mês, e tem certeza que Bernard não sabe a data, significa que o aniversário não ocorre nem em maio, nem em junho, do contrário, Albert não teria essa certeza, pois existiria a

possibilidade de Cheryl ter revelado um dos números citados. Com isso, sobram os meses de julho e agosto para que o aniversário ocorra. Como Bernard diz ter descoberto a data, então, elimina-se o dia 14 de julho e 14 de agosto, que são as datas nas quais ele poderia confundir o mês. Como Albert diz também ter descoberto, elimina-se os dias 15 e 17 de agosto, pois ele sabe o mês e ficaria em dúvida caso fosse um desses dias no mês de agosto. Assim, o aniversário de Cheryl é no dia 16 de julho.

Como dito, os exemplos acima trabalham no campo das possibilidades, o que é alimentado graças à dúvida que surge ao se desenvolver as questões. A dúvida aqui é o que permite que pensemos sobre tais possibilidades, verificando quais delas podem ou não ser verdadeiras.

Para a Matemática, a Lógica Modal apresenta relevância mais em umas áreas do que em outras (fora da Matemática, ela auxilia em áreas como o Direito e a Economia). Como lida com possibilidades, pode ser usada como base para explicar problemas da Teoria dos Jogos, como o famoso “Dilema dos Prisioneiros”:

Dois suspeitos, A e B, são presos pela polícia. Como não existem provas suficientes para condená-los, eles são presos em celas diferentes e é oferecido a ambos o mesmo acordo:

** Se um deles confessar o crime (ou seja, trair o comparsa) e o outro permanecer em silêncio, quem confessou sai livre enquanto o cúmplice silencioso cumpre dez anos.*

** Se ambos ficarem em silêncio (colaborarem um com o outro), a polícia só pode condenar cada um dos suspeitos a um ano de prisão.*

** Se ambos confessarem (traírem o comparsa), cada um ficará cinco anos na cadeia. Cada prisioneiro toma a decisão sem saber da escolha do outro (eles não podem conversar entre si). Como os prisioneiros vão reagir? Existe alguma decisão racional a tomar?*

>>> Resolução:

Presumindo que cada prisioneiro é racional e pensa apenas em seu próprio benefício, é fácil concluir que trair é a melhor estratégia, independentemente da escolha do outro suspeito. Se o outro cooperar, a traição garante a liberdade. Se o outro trair, a traição minimiza a pena. Como ambos chegam a mesma conclusão, a tendência é que os dois suspeitos traiam um ao outro. A pena seria menor se ambos cooperassem entre si, porém, cooperar seria arriscado, pois eles não possuem garantias.

Figura 9 – Carta do jogo Magic: The Gathering que retrata o Dilema dos Prisioneiros



Fonte: Ligamagic, 2025⁶.

⁶ Disponível em: <https://www.ligamagic.com.br/?view=cards/card&card=Prisoner%27s%20Dilemma>. Acesso em: junho/2025.

5. A PROPOSTA DIDÁTICA

Dada a reflexão do capítulo anterior sobre de que forma diferentes tópicos de Lógica poderiam ser abordados nas provas da OBMEP a fim de aumentar ainda mais o seu impacto no ensino desse assunto, passemos agora a pensar sobre como seria um currículo associado ao seu ensino. Para tal, serão apresentados três tipos de propostas sobre o ensino-aprendizagem de Lógica. Primeiramente, será proposta uma lista bastante generalizada (um “zoom-out”) sobre o ensino-aprendizagem de Lógica na Educação Básica. Depois, serão apenas elencados tópicos de uma “disciplina de Lógica” para o primeiro ano do Ensino Médio. Finalmente, será estabelecido um olhar detalhado (um “zoom-in”), sobre algumas poucas aulas.

5.1. Esboço de como trabalhar com Lógica durante toda a Educação Básica

Apenas como uma provocação que sirva ao menos para que essa dissertação não se esquive do debate sobre a apresentação de um currículo abrangente que pense em formas de fazer conteúdos, competências e habilidades associadas à Lógica perpassarem toda a Educação Básica, de uma forma muito singela são aqui colocadas ideias de como isso poderia ser desenvolvido. Muitas dessas ideias provavelmente já são colocadas em prática pelos professores, porém, é necessário evidenciar sua importância para a construção do raciocínio lógico nos estudantes. Aqui então, é apresentada uma abordagem gradual e integrada dos processos de ensino-aprendizagem de Lógica do início da Educação Infantil ao final do Ensino Médio. Para tal, são respeitados os estágios de desenvolvimento cognitivo dos alunos vistos no capítulo 3. Além disso, tal processo de ensino-aprendizagem é pensado de forma interdisciplinar incluindo as quatro grandes áreas do conhecimento. A proposta é bastante simples e genérica, mas, como dito, serve como disparador do debate sobre o tema. Vale destacar que, seguindo as orientações da BNCC, o objetivo dessa proposta inicial é desenvolver o pensamento crítico, a capacidade de argumentação e a resolução de problemas, habilidades essenciais para a formação integral dos estudantes.

5.1.1. Educação Infantil, dos 2 ao 5 anos: Primeiros contatos com a Lógica Informal

Nesta fase inicial de aprendizado, a sugestão é focar na Lógica Informal através de atividades lúdicas e do dia-a-dia, visando o desenvolvimento da percepção de padrões, classificação e sequências. A lista a seguir ajuda a exemplificar esse processo:

- * Atividades de seriação e classificação: Organizar brinquedos por cor, tamanho, forma. Agrupar objetos com características em comum.
- * Identificação de padrões simples: Sequências de cores, sons, movimentos. "O que vem depois?"
- * Relações de causa e efeito em situações cotidianas: "Se chover, preciso de guarda-chuva."
- * Jogos de encaixe e quebra-cabeças: Estimulam a percepção das partes e do todo.
- * Narrativas e contação de histórias: Identificação de sequências de eventos e relações simples.

5.1.2. Ensino Fundamental I (Anos Iniciais), dos 6 aos 10 anos: Fundamentos do Raciocínio

Nesse segundo momento, a sugestão é seguir desenvolvendo a Lógica Informal, mas, em paralelo, começar a apresentar noções intuitivas de raciocínio dedutivo e indutivo por meio de exemplos concretos e atividades práticas. Da mesma forma, a lista a seguir exemplifica o processo:

- * Jogos de lógica e charadas: Estimular a busca por pistas e a inferência.
- * Identificação de contradições em pequenas narrativas: "Essa história não faz sentido porque..."
- * Classificação e organização de informações mais complexas: Tabelas simples, gráficos de barras.
- * Inferências simples a partir de observações: "As folhas estão caindo, então é outono" (raciocínio indutivo).

- * Resolução de problemas do cotidiano que envolvam pequenas deduções: "Se todos os cachorros latem e o Totó é um cachorro, então o Totó late." (dedutivo, de forma simplificada).
- * Lógica na Matemática (inicial): Identificação de padrões numéricos, sequências lógicas em operações básicas.
- * Lógica nas Linguagens (inicial): Entendimento de instruções, sequência de eventos em histórias, uso de conectivos simples (e, ou, se...então).

5.1.3. Ensino Fundamental II (Anos Finais), dos 11 aos 14 anos: Formalizando o Pensamento Lógico

Nessa importante etapa de início do desenvolvimento sistemático da abstração matemática, a sugestão é que os conceitos de raciocínio dedutivo e indutivo sejam aprofundados, e a Lógica Proposicional seja introduzida de forma mais sistemática. Inicia-se a conexão da lógica com outras áreas do conhecimento. Novamente, uma lista para ilustrar o processo:

- * Análise de argumentos simples: Identificar premissas e conclusões em textos curtos e falas.
- * Introdução aos conectivos lógicos: "e" (conjunção), "ou" (disjunção), "não" (negação), "se... então" (implicação) com exemplos concretos e tabelas verdade intuitivas.
- * Construção de pequenas tabelas verdade para proposições simples.
- * Identificação de falácias informais comuns: Argumento *ad hominem*, apelo à autoridade (em exemplos simples).
- * Lógica na Matemática: Demonstrações simples (geometria básica, propriedades dos números), uso de símbolos lógicos em conjuntos e equações.
- * Lógica nas Linguagens: Análise da estrutura lógica de frases e parágrafos, ambiguidade.

* Lógica nas Ciências Exatas (introdução): Formulação de hipóteses e testes experimentais simples (lógica indutiva), análise de resultados.

5.1.4. Ensino Médio (15-17 anos): Lógica Avançada e Aplicações

Nessa última etapa, a sugestão é trabalhar de forma mais detalhada e aprofundada com conceitos associados à Lógica Proposicional, e também de introduzir, e porque não dizer, também aprofundar as Lógica de Predicados e Modal. Além disso, é uma oportunidade de explorar as diversas aplicações da Lógica em áreas como a Matemática, Linguagens, Ciências, Programação e Inteligência Artificial.

* Revisão e aprofundamento das tabelas verdade e regras de inferência da Lógica Proposicional.

* Introdução à Lógica de Predicados: Quantificadores ("para todo", "existe"), predicados e suas aplicações.

* Noções básicas de Lógica Modal: Possibilidade, necessidade (exemplos simples e intuitivos).

* Lógica na Matemática: Demonstrações mais complexas (indução matemática), lógica em conjuntos, funções, limite.

* Lógica nas Linguagens: Análise de argumentos complexos em textos filosóficos, literários e jornalísticos; Retórica e persuasão.

* Lógica nas Ciências Exatas: Metodologia científica (dedução e indução), formulação de leis e teorias, raciocínio lógico em resolução de problemas de física e química.

* Lógica nas Ciências Humanas: Análise da argumentação em textos históricos, sociológicos, filosóficos. Compreensão da lógica de sistemas sociais e políticos.

* Lógica na Programação:

- Algoritmos e fluxogramas: Construção de sequências lógicas de passos para resolver problemas.
- Estruturas condicionais (se...então...senão) e de repetição (enquanto, para).
- Operadores lógicos (AND, OR, NOT) em linguagens de programação.

- Noções de depuração (*debugging*): Encontrar e corrigir erros lógicos em códigos simples.

* Lógica e Inteligência Artificial:

- Conceitos básicos de IA: O que é IA, como a lógica é usada em sistemas de IA (regra-baseados).
- Sistemas especialistas e árvores de decisão (exemplos simples).
- Debate ético: Implicações da Lógica e IA na sociedade.

5.2. Esboço preliminar de um programa didático para 40 semanas do 1º ano do Ensino Médio

Esse esboço preliminar foi pensado para se trabalhar assuntos que seriam interessantes de se abordar em Lógica, utilizando um período semanal das aulas de Matemática do 1º ano do Ensino Médio para tal finalidade. Todavia, esse programa poderia ser trabalhado na disciplina de Língua Portuguesa (ou mesmo Filosofia), pois, como colocado no capítulo 3, a Lógica é por excelência um campo de interdisciplinaridade. Poderia também ser trabalhado somente parte dele, não a sua totalidade. Trata-se de mais uma proposição/sugestão, estando longe de ser uma imposição de regra.

Apesar da proposta dessa dissertação ser o uso das questões da OBMEP como material de referência, este ainda é um instrumento recente que, como apontado, tornar-se-á ainda mais rico em edições futuras com o acréscimo de campos ainda não explorados da Lógica. Portanto, faz sentido o uso de outras referências, sobretudo dos assuntos que foram trabalhados superficialmente na OBMEP (como os quantificadores lógicos da Lógica de Predicados) ou ainda não trabalhados (como a Lógica Modal).

Também na proposta dessa dissertação instiga-se o uso da “resolução de problemas” como a metodologia para introduzir tais assuntos. Isso pode fazer parte de todo o desenvolvimento do programa ou de partes dele. Metodologias ativas são caminhos interessantes, mas não cabe aqui a demonização das aulas expositivas. Uma aula expositiva bem executada, com um público receptivo, pode ser tão

proveitosa quanto uma que utilize metodologias mais inovadoras. Nesse sentido, o “roteiro” do programa no quadro abaixo serve somente como sequência de assuntos a serem abordados, sendo o formato decidido pelo professor, incluindo a forma de avaliação.

Quadro 10 – Programa sobre Lógica para 40 períodos do 1º ano do Ensino Médio

Aula	Assunto abordado
1	Os princípios básicos da Lógica aristotélica (identidade, não contradição, terceiro excluído).
2	O que são e o que não são proposições.
3	As proposições simples e suas negações (tabela-verdade).
4	As relações de equivalência (lei da dupla negação).
5	As proposições compostas e a conjunção (tabela-verdade).
6	As proposições compostas e a disjunção inclusiva (tabela-verdade).
7	As proposições compostas e a disjunção exclusiva (tabela-verdade).
8	As relações de equivalência (1ª lei de De Morgan: negação da conjunção).
9	As relações de equivalência (2ª lei de De Morgan: negação da disjunção).
10	Silogismos disjuntivos.
11	As proposições compostas e a condicional (tabela-verdade).
12	As proposições compostas e a bicondicional (tabela-verdade).
13	As relações de equivalência (negação da condicional).
14	As relações de equivalência (negação da bicondicional).
15	As relações de equivalência (contrapositiva).
16	Silogismos hipotéticos (modus ponens).
17	Silogismos hipotéticos (modus tollens).
18	O que é um paradoxo.
19	Paradoxos auto referenciáveis e sua relação com a Teoria dos Conjuntos.
20	Como funciona a redução ao absurdo (exemplos).
21	Discussão filosófica: mentira é equivalente à falsidade?
22	Discussão filosófica: sobre o que não é Lógica (sequências lógicas – “lógica” indutiva).
23	Quadrado lógico (quantificadores categóricos: universais / particulares).

24	Quadrado lógico (quantificadores categóricos: positivos / negativos).
25	As relações contrárias, subcontrárias e subalternas entre os quantificadores categóricos.
26	As relações de equivalência (negações dos quantificadores categóricos); Contraexemplos.
27	Silogismos categóricos (termo maior, termo menor e termo médio).
28	Regras gerais para os silogismos categóricos.
29	A Lógica e a boa argumentação: como utilizar a Lógica na elaboração de produções textuais coerentes / análise de textos.
30	Lógica de Predicados: identificando sujeito e predicado nas proposições.
31	Lógica de Predicados: expressando proposições através do uso de variáveis (funções) como expansão da Lógica Proposicional.
32	Lógica de Predicados: ressignificando os silogismos com uso de funções.
33	Lógica Modal (operadores modais: necessidade, possibilidade).
34	As relações de equivalência (negações dos operadores modais).
35	A Lógica Deontológica como derivação da Lógica Modal (operadores deontológicos: permitido, proibido, obrigado).
36	As relações de equivalência (negações dos operadores deontológicos).
37	A Lógica Deontológica e a legislação: reconhecendo padrões lógicos em códigos legais.
38	A lógica booleana e a programação (conectivos, simbologia e correspondência com a lógica proposicional).
39	Circuitos lógicos utilizando lógica booleana (Scratch).
40	Circuitos lógicos e o pensamento computacional.

Fonte: autor.

5.3. Planejamento para a Proposta Didática

Antes de apresentarmos esse olhar detalhado, vale dizer que a proposta didática produzida procurou extrair ao máximo os conceitos de Lógica Proposicional e de Lógica de Predicados das questões da OBMEP. Como já dito, procura-se com isso usar as questões da OBMEP como ponto de partida para o ensino-aprendizagem de Lógica. Contudo, algumas inclusões de fora desse material são necessárias para

se dar sentido à construção dos conceitos que se busca realizar. Imagina-se que, com o acréscimo de questões a cada nova edição, esse repertório se torne ainda mais rico, possibilitando a criação de propostas cada vez mais robustas, talvez incluindo alguma das sugestões de expansão do capítulo anterior.

Os pontos em comum no planejamento para cada um dos encontros estão elencados a seguir. Os pontos específicos são discutidos separadamente, logo após. Como esta proposta é interdisciplinar, poderia ser trabalhada conjuntamente entre professores da área da Matemática, Língua Portuguesa e/ou Filosofia.

5.3.1. Sobre o público-alvo

A proposta didática a seguir foi pensada para aplicação em turmas de Ensino Médio, visto que, em tese, já apresentam boa compreensão em leitura e em conceitos básicos de matemática. Nada impede, no entanto, que adaptações sejam realizadas para que a proposta seja aplicada ainda no Ensino Fundamental. Para alguém interessado em aplicar este plano dentro em breve, atente para o fato de que turmas que estejam iniciando o Ensino Médio ainda podem apresentar defasagens de aprendizagem em decorrência da pandemia. Essas lacunas educacionais podem ser um complicador para a apreensão dos conceitos que se pretende abordar na proposta, pois, como mencionado anteriormente, a linguagem, a compreensão de mundo e a forma como expressamos nossos pensamentos estão intimamente conectados.

5.3.2. Tema

Lógica Proposicional e de Predicados a partir de técnicas de Resolução de Problemas.

5.3.3. Competências e Habilidades

A BNCC traz a seguinte competência como algo desejável de ser adquirido no Ensino Fundamental: “2. *Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos*

matemáticos para compreender e atuar no mundo” (BRASIL, 2018, p.267). Porém, não existe menção alguma sobre habilidades ligadas à Lógica, enquanto objeto de conhecimento. A Lógica sequer é citada entre os objetos de conhecimento, tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio. Outro objeto de conhecimento que não é citado de forma explícita é a Teoria dos Conjuntos, que poderia ser usada para explicar alguns conceitos de Lógica, apesar de ser abordada em livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio.

5.3.4. Duração

Dois períodos com (cerca de) 50 minutos para cada encontro/aula. Estão previstos oito encontros ao todo.

5.1.5. Objetivos

→ Gerais:

- * Reconhecer conceitos de lógica proposicional e de predicados em situações-problema;

- * Estimular o desenvolvimento de estratégias de resolução para tais problemas.

→ Específicos:

- * Instigar nos alunos o interesse por questões de lógica;

- * Estruturar a resolução de problemas, sugerindo como base as etapas de Polya.

- * Compreender os conceitos de lógica abordados.

- * Conseguir relacionar tais conceitos, buscando um melhor entendimento sobre a linguagem.

5.3.6. Recursos didáticos

- * Projetor / Tela interativa (para projetar slides sobre os conteúdos abordados e questões de lógica a serem resolvidas);

- * Material impresso (com as questões que serão resolvidas, para otimização do tempo);

* Quadro e giz/caneta (para eventual explicação do processo de resolução, bem como a formalização dos conceitos).

5.3.7. Metodologia a ser aplicada

A metodologia adotada é a de Resolução de Problemas, com os conceitos sendo construídos a partir de situações-problema em pequenos grupos de trabalho e posterior formalização. A formalização não deve ser entendida como aula expositiva, mas como um momento de sistematizar os conceitos por meio do diálogo durante a própria resolução de problemas, em colaboração com os alunos.

Aparecerá seguidamente na proposta a expressão “pretende-se, com essa pergunta, que os alunos ...”, mas nem sempre as conclusões que esperamos que eles alcancem são um caminho curto e/ou linear. É necessário frisar que os questionamentos servem para conduzir os alunos à resposta, entretanto, ao planejar, é impossível antecipar todas as dúvidas que podem surgir. Perguntas muito abertas podem ser contraproducentes, pois algumas colocações dos alunos acabam direcionando os esforços para longe do que se está debatendo, criando parênteses que nunca são fechados para, por fim, resultar em nada. Isso esfria a discussão e os alunos começam a se desinteressar. Porém, perguntas muito fechadas podem limitar e acabar por não valorizar as respostas dos alunos. As perguntas têm como objetivo dar foco sobre o que eles devem refletir, mas as conclusões devem partir deles. Nas palavras de Polya (1995, p.1):

O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho.

Essa dosimetria do auxílio prestado deve ocorrer tanto na resolução dos problemas, quanto nas discussões acerca dos conceitos que se pretende evidenciar com a formalização.

5.3.8. Avaliação da aprendizagem

Procurar-se-á realizar uma avaliação formativa, que acompanhe o processo de cada aluno e de cada grupo de trabalho, levando-se em conta os seguintes critérios:

- * Participação dos alunos nos pequenos grupos durante a realização das atividades de resolução de problemas, fazendo o registro do raciocínio empregado na resolução.

- * Discussão no grande grupo sobre as estratégias adotadas pelos pequenos grupos na resolução dos problemas, expressando de forma clara para os demais colegas a linha de raciocínio utilizada para encontrar determinado resultado.

- * Construção coletiva da formalização dos conceitos, a partir das percepções dos alunos instigadas pelos questionamentos do professor.

- * Produção de questões que abordem conceitos de lógica, avaliando coletivamente a clareza da escrita e a relação entre argumentos válidos.

Serão criados portfólios, nos quais estarão presentes os registros das resoluções das questões dos alunos, suas anotações sobre os conceitos formalizados, a questão produzida por eles, bem como sua autoavaliação e avaliação por seus pares.

Para além da avaliação do aluno, o professor deve ficar atento em avaliar a própria prática pedagógica. Ao constatar que algum assunto deve ser enfatizado, vale lembrar que há outras questões da OBMEP que podem ser trazidas para dentro da proposta didática caso julgue necessário (as questões comentadas podem ser encontradas em anexo a esse trabalho).

5.3.9. Descrição dos encontros

Abaixo, segue o que foi planejado em termos de conteúdo para cada encontro. Seguem, também, dicas de como encaminhar a aula.

Primeiro encontro

Objetivos desse encontro:

- * *Compreender o que são (e o que não são) proposições lógicas.*
- * *Especular quais são os princípios aristotélicos básicos.*

Utilizar os 10 min iniciais para enfatizar com os alunos que os conhecimentos sobre Lógica, abordados nessa proposta didática, servem como base para uma habilidade que será cada vez mais valorizada: ela ajuda a nos comunicarmos melhor, fazendo com que nossas ideias sejam transmitidas e decodificadas com a mesma intenção de quando as expressamos. Isso fica evidente até na linguagem de programação de softwares, que usa uma lógica própria para “se comunicar” com as máquinas (Lógica Booleana). Segue uma piada clichê que se conta entre programadores:

A esposa dá as seguintes instruções para o marido programador que vai ao supermercado: “Compre 6 ovos. Se tiver batatas, compre 10”. O programador volta para casa com 10 ovos e a esposa pergunta: “Por que você fez isso?”, ao que ele responde: “Porque tinha batatas”.

A Lógica, como veremos, é uma ferramenta extremamente útil não só para comprar ovos e batatas.

Após essa pequena introdução, separar a turma preferencialmente em trios. Em seguida, apresentar a seguinte atividade aos grupos:

>>> Quais das frases a seguir podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas?

- 1) *O sol nasce no leste.*
- 2) *Alcance o saleiro, por favor.*
- 3) *Que susto!*
- 4) $1 + 1 = 3$
- 5) *Eu estou mentindo.*
- 6) *Jorge não mora no Bairro Centro.*
- 7) *x é um número natural.*
- 8) *Você gosta de pizza?*
- 9) *Bom dia.*

Compartilhar com o grande grupo as conclusões a que os trios chegaram. Espera-se que os alunos tenham classificado as frases da seguinte forma (sim ou não):

- 1) Sim. 2) Não. 3) Não. 4) Sim. 5) Não.
6) Sim. 7) Não. 8) Não. 9) Não.

Questionar os alunos sobre o porquê de terem classificado algumas das frases como “não”. Pretende-se verificar se os alunos chegaram às seguintes conclusões:

- 2) frase imperativa / comando / solicitação.
- 3) frase exclamativa / expressão de emoção.
- 5) frase paradoxal / contradição.
- 7) frase vaga / sentença aberta / informação insuficiente.
- 8) frase interrogativa / pergunta / questionamento.
- 9) frase declarativa sem a presença de verbo / cumprimento / saudação.

Questionar os alunos sobre o que as frases 1, 4 e 6, classificadas como “sim”, possuem em comum. Pretende-se com isso perceber se entenderam se tratar de **frases declarativas que possuam verbo (mesmo a operação matemática pode ser lida como “um mais um é igual a três”, na qual o verbo “ser” está presente), afirmações que se faz sobre algo (mesmo uma declaração negativa, como na frase 6), ou seja, que expressam uma informação sobre um ente específico.**

Se os alunos conseguirem entender essa relação, a formalização do conceito é concluída anotando-se a definição no quadro. Explicar aos alunos que frases como estas são conhecidas na Lógica como “proposições” e que são o principal objeto de estudo da Lógica Proposicional (daí o nome). Este campo da Lógica tem como foco a verificação do valor lógico de afirmações, isto é, da veracidade ou da falsidade destas. Ressalta-se a importância de trazer o conhecimento informal para o formal (o que pode ocorrer em etapas), fazendo uso da terminologia apropriada. O conceito já foi compreendido, só resta chamá-lo pela nomenclatura correta.

Imagina-se que esta primeira atividade leve cerca de 50 min, entre discussões nos pequenos grupos, grande grupo e formalização coletiva.

Em seguida, será entregue aos trios uma cópia (bem como exposta no projetor/tela) a seguinte questão, a qual os alunos terão cerca de 20 min para resolverem:

Figura 10 – Questão 18 da II Olimpíada Pernambucana de Raciocínio Lógico (2011)

QUESTÃO 18

Um agente de viagens atende três amigas. Uma delas é loura, outra é morena e a outra é ruiva. O agente sabe que uma delas se chama Bete, outra se chama Elza e a outra se chama Sara. Sabe, ainda, que cada uma delas fará uma viagem a um país diferente da Europa: uma delas irá à Alemanha, outra irá à França e a outra irá à Espanha. Ao agente de viagens, que queria identificar o nome e o destino de cada uma, elas deram as seguintes informações: A loura: "Não vou à França nem à Espanha". A morena: "Meu nome não é Elza nem Sara". A ruiva: "Nem eu nem Elza vamos à França". O agente de viagens concluiu, então, acertadamente, que:

- a) A loura é Sara e vai à Espanha.
- b) A ruiva é Sara e vai à França.
- c) A ruiva é Bete e vai à Espanha.
- d) A morena é Bete e vai à Espanha.
- e) A loura é Elza e vai à Alemanha.

Fonte: II Olimpíada Pernambucana de Raciocínio Lógico, 2011.

Comentar com os alunos que eles podem usar a grade que acompanha a questão para relacionar as informações dadas no enunciado, pois isto facilitará a resolução. Orientá-los para que utilizarem os símbolos "V" (quando as informações coincidirem) e "X" (quando não coincidirem). Deixar que pensem estratégias de como organizar as informações. Circular entre os trios questionando sobre as estratégias adotadas sempre que se perceber que a formulação estiver estranha.

>>> Resolução:

1ª dica:

Figura 11 – Resolução da questão 18/2011 (i)

		Nome			Cabelo		
		Bete	Elza	Sara	loura	ruiva	morena
País	Alemanha				✓	✗	✗
	França				✗		
	Espanha				✗		
Cabelo	loura						
	ruiva						
	morena						

Fonte: autor.

2ª dica:

Figura 12 - Resolução da questão 18/2011 (ii)

		Nome			Cabelo		
		Bete	Elza	Sara	loura	ruiva	morena
País	Alemanha				✓	✗	✗
	França				✗		
	Espanha				✗		
Cabelo	loura	✗					
	ruiva	✗					
	morena	✓	✗	✗			

Fonte: autor.

3ª dica:

Figura 13 - Resolução da questão 18/2011 (iii)

		Nome			Cabelo		
		Bete	Elza	Sara	loura	ruiva	morena
País	Alemanha				✓	✗	✗
	França		✗		✗	✗	
	Espanha				✗		
Cabelo	loura	✗					
	ruiva	✗	✗				
	morena	✓	✗	✗			

Fonte: autor.

A partir disso, é possível deduzir a seguinte conclusão:

Figura 14 - Resolução da questão 18/2011 (iv)

		Nome			Cabelo		
		Bete	Elza	Sara	loura	ruiva	morena
País	Alemanha	✗	✓	✗	✓	✗	✗
	França	✓	✗	✗	✗	✗	✓
	Espanha	✗	✗	✓	✗	✓	✗
Cabelo	loura	✗	✓	✗			
	ruiva	✗	✗	✓			
	morena	✓	✗	✗			

Fonte: autor.

Ou seja:

Quadro 11 - Resolução da questão 18/2011

Nome	Cabelo	País
Bete	Morena	França
Elza	Loura	Alemanha
Sara	Ruiva	Espanha

Fonte: autor.

Portanto, a única alternativa possível é a “E”.

Certos aspectos da resolução devem ser enfatizados através dos seguintes questionamentos:

** Qual foi a estratégia utilizada pelo grupo para completar a tabela com “V”s e com “X”s?*

Pretende-se com essa pergunta constatar se os alunos perceberam que colocar mais de um “V” numa mesma linha ou coluna de um dos quadrantes levaria a uma contradição nas informações, pois cada elemento de um grupo de informações está associado a um único elemento de outro grupo, numa relação biunívoca.

** Podemos colocar ambos os símbolos (“V” e “X”) dentro de um mesmo quadradinho?*

Pretende-se verificar se os alunos chegaram à conclusão de que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Explicar a eles que esse é justamente um dos princípios básicos da Lógica e já havia sido definido há muito pelo filósofo grego Aristóteles (“princípio da não-contradição”). Portanto, cada um dos quadradinhos deve ter ou um “V” ou um “X”, não podendo haver um meio termo entre os dois.

** Haveria a necessidade de se utilizar um terceiro símbolo além de “V” ou de “X” na montagem desta tabela?*

Pretende-se notar se os alunos entenderam que não faria sentido atribuir um terceiro valor lógico diferente de “verdadeiro” ou “falso” a cada uma das proposições. Explicar a eles que outro dos princípios básicos da Lógica, definido por Aristóteles, é o “princípio do terceiro excluído”, que fala justamente de não haver uma terceira possibilidade de valorar uma proposição. Portanto, os quadradinhos devem ser preenchidos somente ou com “V” ou com “X”, não fazendo sentido a inclusão de “Y”, que se sabe lá o que representaria.

Terminada as reflexões acerca desse problema, anotar no quadro sobre os conceitos dos dois princípios aristotélicos básicos apresentados. Entre as reflexões e o registro deve-se levar cerca de 15 min. Encerrar o encontro (5 min finais) pedindo que eles reflitam sobre as seguintes expressões que encontramos na nossa língua:

>>> Leia e reflita sobre as expressões idiomáticas abaixo:

“Acordo é acordo.”

“Uma coisa é uma coisa, outra coisa é outra coisa.”

“Guerra é guerra.”

“O que é, é.”

Nessas expressões, qual o objetivo que se pretende alcançar ao anunciar que algo é igual a si mesmo?

O questionamento acima pretende fazer os alunos refletirem sobre o princípio aristotélico da identidade, como veremos no início do segundo encontro.

Avaliação desse encontro: *Será avaliada a participação dos alunos na resolução das atividades e na elaboração dos conceitos. O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno.*

Segundo encontro

Objetivos desse encontro:

- * Especular quais são os princípios aristotélicos básicos.*
- * Organizar uma estrutura em etapas para a resolução de questões.*

Inicia-se o segundo encontro questionando a turma sobre quais conclusões eles chegaram sobre as expressões idiomáticas que se pediu para que refletissem. É possível que os alunos tenham chegado a uma ou mais dessas conclusões (ou a outras, ainda):

- * Deixar claro que algo deve ser respeitado independentemente das circunstâncias.*
- * Estabelecer uma relação que não pode ser contestada.*
- * Enfatizar que a essência de algo não se altera.*
- * Não especular sobre algo para além daquilo que esse algo é de fato.*

Explicar a eles que na Lógica esse tipo de proposição é o que chamamos de “tautologia” e que elas são sempre verdadeiras. Para além de falar uma obviedade, podemos ressaltar aspectos culturais da linguagem com elas. Além disso, a ideia de que uma coisa é sempre igual a si mesma é nada mais do que o terceiro dos três

princípios básicos estabelecidos por Aristóteles (“princípio da identidade”). Vale a pena lembrar os outros dois princípios com a turma, vistos no encontro anterior.

Essa parte inicial do encontro deve levar cerca de 15 min.

Após essa análise sobre a aula anterior, fazer que atentem para o fato de que nem todas as questões de Lógica apresentam um mecanismo como o da grade da questão trabalhada no primeiro encontro, que permite uma fácil organização e cruzamento das informações do enunciado. Nosso material de estudo serão questões que fogem disso. Questões como as da OBMEP. Questioná-los se recordam de questões desse tipo nas provas da OBMEP. Caso sim, será ótimo que já tenham se dado conta desse tipo de questão se destacando em meio as demais nas provas da Olimpíada. Caso não, as duas questões a seguir ajudarão a recordar.

Novamente em trios, os alunos se reunirão para resolver as questões. É importante pedir para que anotem o raciocínio utilizado na resolução, para que compartilhem posteriormente com os demais grupos. Os alunos terão cerca de 30 min para tal. Nesse meio tempo, o professor deve circular entre os grupos, reorientando sua resolução com novos questionamentos à medida que os trios cheguem a resultados errôneos ou que travem na organização da informação. As questões seguem com uma possibilidade de se chegar ao resultado, mas isso não deve ser compartilhado com os alunos. Note que as questões selecionadas foram classificadas (no quadro do capítulo 4) como sendo do tipo “Sequenciamento” e “Dedução”, respectivamente. Na fonte da figura, segue o ano da publicação na OBMEP.

Figura 15 – Questão 11 da prova de 2009

11. Arnaldo, Beto, Celina e Dalila formam dois casais. Os quatro têm idades diferentes. Arnaldo é mais velho que Celina e mais novo que Dalila. O esposo de Celina é a pessoa mais velha. É correto afirmar que:



- A) Arnaldo é mais velho que Beto e sua esposa é Dalila.
- B) Arnaldo é mais velho que sua esposa Dalila.
- C) Celina é a mais nova de todos e seu marido é Beto.
- D) Dalila é mais velha que Celina e seu marido é Beto.
- E) Celina é mais velha que seu marido Arnaldo.

Fonte: OBMEP, 2009.

>>> Uma possível solução:

Como o esposo de Celina é o mais velho de todos, este não pode ser Arnaldo, pois ele é mais novo que Dalila. Logo, Beto e Celina são um casal, bem como Arnaldo e Dalila também são. Por conta de Arnaldo ser mais velho que Celina, temos que a ordem crescente das idades é: Celina, Arnaldo, Dalila e Beto. Dentre as alternativas, a única que respeita a formação dos casais e a ordem correta das idades é a alternativa C.

Figura 16 – Questão 15 da prova de 2023

15. Ana, Cláudia, Joaquim, Pedro e Fabiana se esconderam durante uma brincadeira. Nessa brincadeira,

- havia exatamente duas crianças na casa da árvore;
- Pedro, que nasceu em São Paulo, se escondeu junto com Fabiana;
- uma menina se escondeu sozinha;
- Ana não estava sozinha em seu esconderijo;
- O menino pernambucano estava na casa da árvore.

Quem estava na casa da árvore?

- (A) Pedro e Fabiana.
- (B) Joaquim e Cláudia.
- (C) Ana e Joaquim.
- (D) Pedro e Ana.
- (E) Cláudia e Fabiana.

Fonte: OBMEP, 2023.

>>> Uma possível solução:

Segundo a última dica, o menino que se escondeu na casa da árvore é pernambucano. Logo, Pedro e Fabiana que se esconderam juntos, não foram para a casa da árvore, pois Pedro é paulista (segunda dica). Sabe-se ainda que uma das meninas se escondeu sozinha (terceira dica), mas esta não foi Ana (quarta dica). Logo, Joaquim é o menino pernambucano que, junto de Ana, se escondeu na casa da árvore. Portanto, a alternativa correta é a alternativa C.

Ao fim do tempo estipulado, os grupos anunciarão as alternativas que marcaram. Os trios serão convidados a compartilhar seus resultados no grande grupo. Após os alunos apresentarem a forma como organizaram o raciocínio para chegar ao

resultado (cerca de 20 min) serão levantados alguns questionamentos sobre o *modus operandi* de cada grupo. Segue-se abaixo as perguntas que lhe serão direcionadas:

- * *O grupo se organizou para iniciarem a resolução de que forma?*
- * *Qual(ais) estratégia(s) foi(foram) adotada(s) e por quê?*
- * *A estratégia escolhida se mostrou eficaz?*
- * *Após chegarem a um resultado, foi feita uma revisão para encontrar algum possível erro?*
- * *Em que “etapas” seu grupo dividiria cada passo dado na resolução?*

Anotar no quadro as respostas que os grupos deram para cada pergunta, trazendo para o debate junto ao grande grupo se as etapas de resolução adotadas pelos outros grupos são eficazes ou precisam ser repensadas. Procurar estabelecer paralelos entre as etapas definidas pelos grupos que responderam corretamente os problemas propostos. Uma vez que essa análise inicial foi feita com o grande grupo, questioná-los sobre qual seria uma organização de resolução eficaz entre as que os grupos citaram em suas respostas.

Após, com projetor ou tela interativa, apresentar o seguinte resumo das etapas sugeridas por George Polya:

Etapas para Resolução de Problemas (George Polya):

- * **Compreensão do problema:** *ler com atenção; verificar se os dados são suficientes, redundantes ou contraditórios; destacar as informações mais relevantes.*
- * **Criação de uma estratégia:** *criar uma ou mais estratégias, discutindo qual a melhor em caso de haver mais de uma; comparar com problemas similares já conhecidos.*
- * **Execução da estratégia:** *chegar, através da estratégia escolhida, a uma das alternativas de resposta.*
- * **Revisão final:** *verificar se não houve algum furo no raciocínio ou se informações relevantes foram deixadas de lado; refletir sobre a coerência do resultado encontrado.*

Comparar com a turma as etapas de resolução construídas por eles com as sugeridas por Polya. Elas possuem semelhanças? Se complementam? Há ideias entre as etapas sugeridas por Polya que não foram pensadas? Quais entre as etapas de Polya eles consideram acréscimos úteis a sua forma de organizar a resolução?


Pedir que os alunos tomem notas das conclusões que o grande grupo chegou. Essa reflexão sobre as etapas de resolução deve levar cerca de 30 min.

Agora que já estarão com um olhar mais atento sobre como organizar as etapas de resolução, é interessante trazer um novo problema (outro de “Sequenciamento”), o qual, possivelmente, será visto sob uma nova perspectiva de como elaborá-lo. Este problema será dado em uma folha impressa e ficará como um desafio para ser resolvido em casa.

Figura 17 – Questão 20 da prova de 2015

20. Daniel e mais quatro amigos, todos nascidos em estados diferentes, reuniram-se em torno de uma mesa redonda. O paranaense sentou-se tendo como vizinhos o goiano e o mineiro. Edson sentou-se tendo como vizinhos Carlos e o sergipano. O goiano sentou-se tendo como vizinhos Edson e Adão. Bruno sentou-se tendo como vizinhos o tocantinense e o mineiro. Quem é o mineiro?

A) Adão
B) Bruno
C) Carlos
D) Daniel
E) Edson

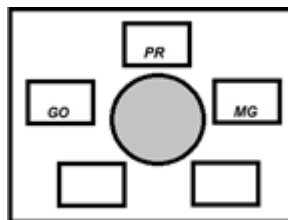


Fonte: OBMEP, 2015.

>>> Uma possível solução:

Começamos marcando no desenho as posições conforme a primeira dica.

Figura 18 – Resolução da questão 20/2015 (i)

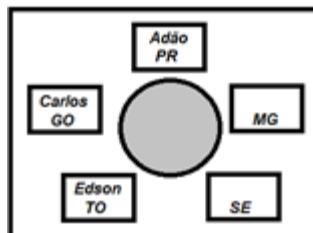


Fonte: autor.

Conforme a terceira dica, o goiano tem como vizinhos Edson e Adão, porém, Edson não pode ser o paranaense, pois se fosse, a segunda dica, que diz que Edson tem como vizinhos Carlos e o sergipano, seria inválida.

Logo, o sergipano está entre Edson e o mineiro, Edson é o tocantinense e Carlos é o goiano, pois é vizinho de Edson.

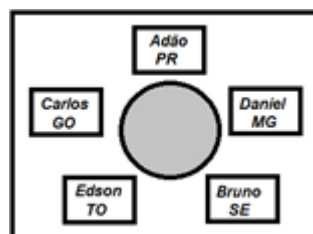
Figura 19 – Resolução da questão 20/2015 (ii)



Fonte: autor.

Como a última dica diz que Bruno está entre o tocantinense e o mineiro, então, Bruno é sergipano e o mineiro é Daniel.

Figura 20 – Resolução da questão 20/2015 (iii)



Fonte: autor.

Portanto, alternativa D.

Agradecer a presença dos participantes e solicitar que se dediquem a encontrar a solução do desafio.

Avaliação desse encontro: Será avaliada a participação dos alunos na resolução das atividades e na elaboração dos conceitos. O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno.

Terceiro encontro

Objetivos desse encontro:

- * Identificar diferentes tipos de questões.
- * Comparar as estratégias utilizadas na resolução de cada tipo.


Dar os primeiros 10 min de aula para que os alunos troquem ideias sobre a resolução do problema deixado como desafio no final do encontro anterior. Após, divididos em trios novamente, pedir que anunciem a alternativa de resposta que marcaram. Depois, convidar alguns dos alunos para explicar no quadro qual foi sua estratégia. Questionar se as etapas de resolução de elaboradas pela turma foram úteis para que chegassem ao resultado. Isso deve ocupar cerca de 15 min de aula.

Após o compartilhamento da questão que ficou como desafio, será entregue aos alunos, bem como exposto no projetor/tela, as questões que seguem abaixo. Os trios terão cerca de 30 min para pensarem a resolução destas questões. Insistir com eles na utilização das etapas de resolução definidas por eles.

Figura 21 – Questão 19 da prova de 2013

19. Durante a aula, dois celulares tocaram ao mesmo tempo. A professora logo perguntou aos alunos: "De quem são os celulares que tocaram?" Guto disse: "O meu não tocou", Carlos disse: "O meu tocou" e Bernardo disse: "O de Guto não tocou". Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira?

A) O celular de Carlos tocou e o de Guto não tocou.
 B) Bernardo mentiu.
 C) Os celulares de Guto e Carlos não tocaram.
 D) Carlos mentiu.
 E) Guto falou a verdade.



Fonte: OBMEP, 2013.

>>> Uma possível solução:

Como um dos garotos falou a verdade e os outros dois mentiram, podemos fazer algumas suposições:

* Se Guto e Carlos mentiram, então Bernardo disse a verdade, mas as declarações de Guto e de Bernardo entrariam em contradição.

* Se Carlos e Bernardo mentiram, então Guto disse a verdade, mas novamente, as declarações de Guto e de Bernardo seriam contraditórias.

* Se Guto e Bernardo mentiram, então Carlos disse a verdade. De fato, essa é a única suposição que parece fazer com que as afirmações não se contradigam.

Portanto, a única alternativa que está de acordo é a alternativa B.

Figura 22 – Questão 14 da prova de 2016

14. Em uma brincadeira, a mãe de João e Maria combinou que cada um deles daria uma única resposta correta a três perguntas que ela faria.

Ela perguntou:

- Que dia da semana é hoje?
- Hoje é quinta, disse João.
- É sexta, respondeu Maria.

Depois perguntou:

- Que dia da semana será amanhã?
- Segunda, falou João.
- Amanhã será domingo, disse Maria.

Finalmente ela perguntou:

- Que dia da semana foi ontem?
- Terça, respondeu João.
- Quarta, disse Maria.



Em que dia da semana a brincadeira aconteceu?

- A) Segunda-feira
- B) Terça-feira
- C) Quarta-feira
- D) Quinta-feira
- E) Sexta-feira

Fonte: OBMEP, 2016.

>>> Uma possível solução:

Quadro 12 – Resolução da questão 14/2016

	1ª) Hoje é?	2ª) Amanhã será?	3ª) Ontem foi?
João	Quinta	Segunda	Terça
Maria	Sexta	Domingo	Quarta

Fonte: autor.

Se João disse a verdade na primeira pergunta, significa que Maria **ou** disse a verdade sobre o dia seguinte (falso, pois Domingo) **ou** sobre o dia anterior (verdadeiro, pois quarta).

Se João disse a verdade na segunda pergunta, significa que Maria teria mentido ao responder as 3 perguntas, o que não pode acontecer segundo a regra criada pela mãe das crianças.

Se João disse a verdade na terceira pergunta, significa que Maria teria, novamente, mentido ao responder as 3 perguntas, o que não pode acontecer.

Logo, conclui-se que João falou a verdade ao responder a primeira pergunta, sendo o dia em que ocorreu essa brincadeira uma quinta-feira. Portanto, alternativa D.

Ao fim do tempo estipulado, os grupos anunciarão as alternativas que marcaram. Os trios serão convidados a compartilhar seus resultados no grande grupo. Após os alunos apresentarem a forma como organizaram o raciocínio para chegar ao resultado (cerca de 20 min) serão levantados alguns questionamentos sobre o tipo de questão que resolveram. Segue-se abaixo as perguntas que lhe serão direcionadas:

** O que vocês enxergam de similar entre as questões que foram trabalhadas na aula de hoje?*

Pretende-se com essa pergunta perceber se que os alunos identificaram que em ambas as questões temos que lidar com afirmações que são mentiras, as quais se tomam por proposições falsas. De fato, as questões usadas aqui foram classificadas como sendo do tipo “Mentira”.

** As questões trabalhadas nas aulas anteriores, incluindo a questão da tabela do primeiro encontro, possuíam essa característica? O que isso acaba fazendo na forma como compreendemos a questão?*

Pretende-se fazê-los perceber que nas questões das aulas anteriores todas as proposições são tomadas como verdadeiras, o que não ocorre nas questões do tipo “Mentira”.

** O que diferencia a forma de resolver cada um desses tipos de questão?*

Pretende-se que os alunos compreendam que, enquanto nas questões do tipo “Sequenciamento” ou de “Dedução” o que buscamos é a forma ideal de organizar e relacionar as informações para que possamos tirar nossas conclusões, nas questões do tipo “Mentira” a melhor estratégia é supor que uma das afirmações é verdadeira e então ver como isso se relaciona com as demais informações. Se alguma outra proposição acabar sendo contradita por conta dessa suposição, é porque estamos no caminho errado.

** Vocês recordam da frase “Eu estou mentindo.”, utilizada no primeiro encontro? Por que mesmo ela não é considerada uma proposição?*

Os alunos podem utilizar as anotações em seus portfólios para consultarem, caso não recordem. A frase citada contradiz ela mesma, ou seja, um paradoxo. Podemos estabelecer uma relação entre esta frase e as questões do tipo “Mentira”.

** Você concorda que ao os paradoxos podem ser úteis para verificarmos a falsidade de certas proposições?*

Pretende-se notar com essa pergunta se os alunos, ao suporem verdadeira certa proposição, enxergaram no paradoxo uma forma de mostrar que a suposição estava errada. Explicar à turma que na matemática é comum o uso de um recurso chamado “redução ao absurdo”, usado, por exemplo, para provar que o número $\sqrt{2}$ (raiz quadrada de dois) é um número irracional. A redução ao absurdo usa essa mesma tática de supor que uma proposição (condicional) é verdadeira e constatar que se chegou a um paradoxo, tornando a proposição, que se supôs verdadeira, falsa; logo, a negação dessa proposição é verdadeira.

Esse momento de reflexão sobre as questões deve ocupar os 20 min finais da aula. É importante formalizar os conceitos trabalhados anotando as conclusões no quadro: diferenciação entre tipos de questões (Sequenciamento e Dedução de Mentira), a tática para resolver questões de cada tipo, a utilização dos paradoxos para verificação de determinadas proposições.

Para registrar melhor esses conceitos, é interessante trazer um novo problema (Também de “Mentira”? Isso poderá ser questionado em aula), o qual será dado em uma folha impressa nos 5 min finais do encontro e ficará como um desafio para ser resolvido em casa. Lembrá-los de utilizar as etapas de resolução de definidas pela turma em aula.

Figura 23 – Questão 14 da prova de 2014

14. Cinco meninas não estão totalmente de acordo sobre a data da prova de Matemática.

- Andrea diz que será em agosto, dia 16, segunda-feira;
- Daniela diz que será em agosto, dia 16, terça-feira;
- Fernanda diz que será em setembro, dia 17, terça-feira;
- Patrícia diz que será em agosto, dia 17, segunda-feira;
- Tatiane diz que será em setembro, dia 17, segunda-feira.

Somente uma está certa, e as outras acertaram pelo menos uma das informações: o mês, o dia do mês ou o dia da semana. Quem está certa?

- A) Andrea
- B) Daniela
- C) Fernanda
- D) Patrícia
- E) Tatiane

Fonte: OBMEP, 2014.

>>> Uma possível solução:

Essa questão poderia ser classificada no tipo “Mentira”, pois sabemos que somente uma das afirmações é totalmente verdadeira. Começaremos organizando as informações dadas:

Quadro 13 – Resolução da questão 14/2014

Menina	Data (dia, mês, dia da semana)
<i>Andrea</i>	<i>16 de agosto, segunda</i>
<i>Daniela</i>	<i>16 de agosto, terça</i>
<i>Fernanda</i>	<i>17 de setembro, terça</i>
<i>Patrícia</i>	<i>17 de agosto, segunda</i>
<i>Tatiane</i>	<i>17 de setembro, segunda</i>

Fonte: autor.

Lembrando que somente uma tem as 3 informações sobre a data correta e as demais acertaram pelo menos um dos itens dessa informação, podemos supor que:

** Se Andrea está correta sobre a data, então Fernanda teria errado todas as informações, o que não pode acontecer.*

* Se Fernanda está correta sobre a data, então Andrea teria errado todas as informações, o que não pode acontecer.

* Se Daniela está correta sobre a data, então Tatiane teria errado todas as informações, o que não pode acontecer.

* Se Tatiane está correta sobre a data, então Daniela teria errado todas as informações, o que não pode acontecer.

* Se Patrícia está correta sobre a data, então as demais acertaram pelo menos uma das informações.

Portanto, alternativa D.

Agradecer a presença dos participantes e solicitar que se dediquem a encontrar a solução do desafio.

Avaliação desse encontro: Será avaliada a participação dos alunos na resolução das atividades (verificar se estão fazendo uso das etapas de resolução construídas pela turma) e na elaboração dos conceitos. O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno.

Quarto encontro

Objetivo desse encontro:

* Resolver diferentes tipos de questão, utilizando uma estrutura de resolução.

Os encontros 4 e 5 funcionam como se fossem um único encontro, pois a análise sobre as questões não caberia num espaço de tempo tão limitado.

Iniciará sendo dado os primeiros 10 min de aula para que os alunos troquem ideias sobre a resolução do problema deixado como desafio no final do encontro anterior. Após, divididos em trios novamente, pedir que anunciem a alternativa de resposta que marcaram. Depois, convidar alguns dos alunos para explicar no quadro qual foi sua estratégia. Isso deve ocupar cerca de 20 min de aula. Durante essa resolução, questionar a turma se este é um problema do tipo “Mentira”. Espera-se que os alunos apontem que, apesar das meninas da questão não estarem necessariamente mentindo, as informações que elas dispõem não são confiáveis e, portanto, a forma de resolução é a mesma de questões do tipo “Mentira”. Pode-se

abrir uma pequena reflexão sobre a distinção entre mentira e falsidade, como exposto no capítulo 4.

Em seguida, as questões abaixo serão trazidas para que os alunos procurem resolver. Aos trios se disponibilizará cópia impressa das questões, bem como no projetor/tela. Os grupos terão cerca de 40 min realizar essa tarefa.

Figura 24 – Questão 8 da prova de 2007

8. A mãe de César deu a ele as seguintes instruções para fazer um bolo:

- se colocar ovos, não coloque creme.
- se colocar leite, não coloque laranja.
- se não colocar creme, não coloque leite.

Seguindo essas instruções, César pode fazer um bolo com

- A) ovos e leite, mas sem creme.
- B) creme, laranja e leite, mas sem ovos.
- C) ovos e creme, mas sem laranja.
- D) ovos e laranja, mas sem leite e sem creme.
- E) leite e laranja, mas sem creme.



Fonte: OBMEP, 2007.

>>> Uma possível solução:

A primeira instrução, elimina a alternativa C. A segunda instrução, elimina as alternativas B e E. A terceira instrução, elimina a alternativa A, pois se o bolo não tem creme, não deve ter leite. Portanto, alternativa D.

Figura 25 – Questão 14 da prova de 2011

14. Tia Geralda sabe que um de seus sobrinhos Ana, Bruno, Cecília, Daniela ou Eduardo comeu todos os biscoitos. Ela também sabe que o culpado sempre mente e que os inocentes sempre dizem a verdade.



- Bruno diz: "O culpado é Eduardo ou Daniela."
- Eduardo diz: "O culpado é uma menina."
- Por fim, Daniela diz: "Se Bruno é culpado então Cecília é inocente."

Quem comeu os biscoitos?

- A) Ana
- B) Bruno
- C) Cecília
- D) Daniela
- E) Eduardo

Fonte: OBMEP, 2011.

>>> Uma possível solução:

Como não temos declarações de Ana e de Cecília, podemos presumir que não sejam culpadas, pois não disseram nenhuma mentira, embora também não tenham dito nenhuma verdade. As declarações dos outros 3 sobrinhos de dona Geralda apontam para algum entre eles. É notório que Daniela diz a verdade, pois só pode haver um culpado. Note que ela não afirma que Bruno é o culpado, mas, no caso de ter sido ele, obviamente não poderia ter sido Cecília. Por ter dito algo que é verdade, Daniela é inocente. Sendo assim, ou o culpado é Bruno ou é Eduardo. Se Bruno estivesse mentindo, ele seria o culpado, e Eduardo estaria dizendo a verdade, porém, isso seria uma contradição, pois Eduardo aponta como culpada uma das meninas. Logo, quem está mentindo é Eduardo (de fato, Bruno teria apontado corretamente o culpado) e foi ele quem comeu os biscoitos. Alternativa E.


Figura 26 – Questão 10 da prova de 2018

20. Vovó Vera quis saber qual de suas cinco netinhas tinha feito um desenho na parede de sua sala. As netinhas fizeram as seguintes declarações:

- Emília: Não fui eu.
- Luísa: Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.
- Marília: Não foi a Rafaela nem a Vitória.
- Rafaela: Não foi a Luísa.
- Vitória: Luísa não está dizendo a verdade.

Se apenas uma das netinhas mentiu, quem fez o desenho?

A) Emília
B) Luísa
C) Marília
D) Rafaela
E) Vitória



Fonte: OBMEP, 2018.

>>> Uma possível solução:

Como somente uma mentiu, faremos algumas suposições:

** Se Emília tivesse desenhado, ela teria mentido, porém, algumas das afirmações das demais netas também seriam mentira, como a de Luísa ou a de Vitória. Logo, não foi Emília quem desenhou.*

** Se Luísa tivesse desenhado, ela teria mentido, porém, isso faria com que Rafaela também estivesse mentindo. Portanto, não foi Luísa quem desenhou. De fato, se Luísa diz a verdade, sabemos que quem mentiu foi Vitória, que afirmou que Luísa não disse a verdade. Isso faz com que as afirmações de Marília e Rafaela sejam verdadeiras.*

Assim, temos que Marília ou Rafaela fizeram o desenho (pela afirmação de Luísa) e que não foi Rafaela quem fez (pela afirmação de Marília), portanto, quem fez o desenho só pode ter sido Marília. Alternativa C.

Ao fim do tempo estipulado, os grupos anunciarão as alternativas que marcaram. Os trios serão convidados a compartilhar seus resultados no grande grupo. Após os alunos apresentarem a forma como organizaram o raciocínio para chegar ao resultado (cerca de 30 min) será solicitado que, como atividade de casa, pensem sobre as instruções e alternativas de respostas dadas na primeira questão desse

encontro, bem como nas declarações dadas pelos personagens da segunda e terceira questões. Como as proposições aparecem nessas questões?

Avaliação desse encontro: *Será avaliada a participação dos alunos na resolução das atividades (verificar se estão fazendo uso das etapas de resolução construídas pela turma). O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno.*

Quinto encontro

Objetivos desse encontro:

- * *Compreender o que são proposições compostas.*
- * *Identificar os conectivos lógicos que unem diferentes proposições compostas.*
- * *Verificar corretamente a veracidade (ou falsidade) em proposições compostas.*

O quinto encontro iniciará com os alunos falando as impressões que tiveram sobre as questões do encontro anterior. Caso tenham tido alguma percepção que possa ser aproveitada como questionamento posterior, faça uso disso, trazendo as construções dos próprios alunos para dentro da formalização do conceito. Porém, isso pode não acontecer, pois é bem abstrato para os estudantes pensar sobre esse assunto. Assim, segue uma lista de questionamentos que podem ser usados para que eles reflitam com mais profundidade sobre o que viram nos problemas. Acredita-se que os questionamentos e a formalização dos conceitos devam levar cerca de 60 min.

* *Algumas das proposições negam uma possibilidade ou descartam uma situação?*

Pretende-se perceber se os alunos conseguem apontar corretamente alguma das instruções na primeira questão, como “Se não colocar creme, não coloque leite”, ou a declaração de Rafaela, “Não foi a Luísa”, na terceira questão.

* *Se a proposição “Luísa está dizendo a verdade.” é verdadeira, então, que proposição, “derivada” dessa, poderíamos afirmar ser falsa?*

Imagina-se que os alunos dirão que uma proposição obviamente falsa que deriva desta seja “Luísa não está dizendo a verdade.”. Pretende-se com isso fazer com que percebam que a negação de uma proposição verdadeira é sempre falsa,

como uma decorrência do princípio da não-contradição. Se, segundo esse princípio, uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo, temos, também que uma proposição e sua negação devem ter necessariamente (pelo princípio do terceiro excluído) valores lógicos opostos, não podendo ambas serem verdadeiras ao mesmo tempo.

** Caso a declaração “Não fui eu.” seja verdadeira, qual seria sua negação?*

A negação de tal proposição seria “Fui eu.”, que por óbvio é falsa. Com isso, espera-se que os alunos se atentem para o fato de que a negação de uma proposição negativa é sempre uma proposição afirmativa. Para fins de didática comparativa, seria interessante fazer uso da teoria dos conjuntos. Dado um conjunto não-nulo A , formado por todos os elementos que possuem a propriedade p , todos os elementos que não estejam em A estarão no complementar de A (A'), ou seja, os elementos que não possuem a propriedade p (“não- p ”) pertencem a A' . Se um elemento não pertence a A' , então temos que ele não é um elemento “não- p ”, o que significa que ele possui tal propriedade e necessariamente pertence a A . (Utilize diagramas de Venn para facilitar a visualização).

** Alguma das partes de um dos problemas apresentava mais de uma opção possível? Você chegou a pensar que “ou isso ou aquilo acontece”?*

Espera-se que os alunos apontem para as declarações “O culpado é Eduardo ou Daniela” e “Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.”.

** Nessas declarações, você percebeu que podem ser “quebradas” em mais de uma proposição? Saberá indicar quais tomando uma como exemplo?*

Pretende-se verificar se os alunos notarão que, por exemplo, “Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela” poderia ser reescrita como sendo “quem desenhou foi a Marília ou quem desenhou foi a Rafaela”, em que temos a proposição “quem desenhou foi a Marília” e “quem desenhou foi a Rafaela”, ditas simples, unidas pelo conectivo “ou”. Explicar para os alunos que na Lógica, sempre que duas ou mais proposições simples se conectam, temos uma proposição composta. Existem outras formas de conectar proposições, mas aqui vemos um exemplo de disjunção, que faz uso do conectivo “ou”.

** Para a declaração “O culpado é Eduardo ou Daniela” ser considerada verdadeira, é necessário que ambas as proposições (“O culpado é Eduardo” / “A culpada é Daniela”) sejam verdadeiras?*

Pretende-se notar se os alunos concluirão que basta que um dos dois (Eduardo ou Daniela) seja culpado para que toda a declaração faça sentido e, portanto, seja considerada verdadeira.

** A declaração seria verdadeira se ambos fossem culpados?*

Pretende-se perceber se os alunos notaram que para a questão em si, não faria sentido ambos serem culpados, pois é dito que Tia Geralda sabe que somente um deles comeu os biscoitos.

** Se houvesse a possibilidade de ter mais de um culpado, a declaração seria verdadeira se ambos o fossem?*

Caso algum dos alunos disser que sim, peça para ele explicar a ideia. Ao lidarmos com disjunções podemos nos deparar com dois tipos distintos. Caso isso não ocorra, para facilitar a compreensão desses dois tipos, traga os questionamentos a seguir.

** Considere a seguinte condição para se participar de um jogo entre as pessoas do grupo X, formado por quem gosta de balas, e as pessoas do grupo Y, formado por quem gosta de bombons: “Só pode participar do jogo quem gosta de bala ou de bombom”. As pessoas que gostam de ambos os doces poderiam participar desse jogo?*

Pretende-se constatar se os alunos se convencerão de que, tanto as pessoas que gostam somente de um dos doces, quanto as que gostam de ambos os doces (e portanto, fazem parte de ambos os grupos) estariam aptas a participar desse jogo, ou seja, se for verdade que um indivíduo goste de balas e de bombons, faz sentido que ele participe do jogo. Explicar aos alunos que temos aqui um exemplo do que chamamos de disjunção inclusiva, na qual se admite a proposição composta como verdadeira se pelo menos uma das proposições simples que a compõem é verdadeira, incluindo o caso em que ambas são. Fazendo analogia com a Teoria dos Conjuntos, pode-se dizer que dados dois conjuntos não-nulos A (formado pelos elementos que possuem a propriedade p) e B (formado pelos elementos que possuem a propriedade

q), temos que os elementos que possuem a propriedade p ou a propriedade q pertencem ao conjunto $A \cup B$, incluindo os elementos que possuam p e q simultaneamente.

** Caso a condição para participar do jogo fosse: “Só pode participar do jogo quem gosta ou de bala ou de bombom”. As pessoas que gostam de ambos os doces poderiam participar desse jogo?*

Pretende-se verificar se os alunos perceberão que nesse caso só se admite uma das possibilidades, não fazendo sentido a participação no jogo para quem gosta de ambos os doces. Explicar aos alunos que nesta situação temos o que chamamos de disjunção exclusiva, na qual se admite a proposição composta como verdadeira se somente uma das proposições simples que a compõem for verdadeira, excluindo o caso em que ambas são. Fazendo analogia com a Teoria dos Conjuntos, pode-se dizer que dados dois conjuntos não-nulos A (formado pelos elementos que possuem a propriedade p) e B (formado pelos elementos que possuem a propriedade q), temos que os elementos que possuam ou somente a propriedade p ou somente a propriedade q, pertencerão ou ao conjunto $A - B$ (no qual estão os elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B) ou ao conjunto $B - A$ (no qual estão os elementos que pertencem a B, mas não pertencem a A).

Na linguagem natural, o conectivo “ou” costuma ser ambíguo, podendo representar tanto uma disjunção inclusiva quanto exclusiva. No geral, a repetição do conectivo “ou” (**ou** isso **ou** aquilo acontece) costuma indicar uma disjunção exclusiva. Entretanto, o que determina com clareza o tipo de disjunção é o contexto do enunciado. Nos *exemplos encontrados nas questões* (“O culpado é Eduardo ou Daniela” e “Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela”), apesar de ser usado somente um “ou” nas declarações, elas são interpretadas como disjunções exclusivas, pois deixam claro que só há um culpado em ter comido os biscoitos de tia Geralda e em ter desenhado na parede da vovó Vera. Nesse sentido, é bom estar atento ao se deparar com o conectivo “ou”.

** Em algum dos problemas teve uma parte em que duas ou mais condições precisavam acontecer juntas? Você chegou a pensar que a declaração só poderia ser verdadeira “se isso e aquilo acontecesse”?*

Pretende-se verificar se os alunos notaram que há nas questões trabalhadas um exemplo disso numa das declarações da terceira questão: “Não foi a Rafaela nem a Vitória.”.

** Você percebeu que a declaração “Não foi a Rafaela nem a Vitória.” pode ser “quebrada” em mais de uma proposição? Saberá indicar quais?*

Pretende-se constatar se os alunos notaram que a declaração como um todo é formada por duas proposições, portanto, é uma proposição composta. Essa declaração poderia ser reescrita como sendo “Não foi a Rafaela e não foi a Vitória.”. Explicar para os alunos que temos aqui um exemplo de conjunção, que faz uso do conectivo “e” (mesmo que esse “e” apareça nas entrelinhas na forma da contração “nem”).

** O que aconteceria se somente uma dessas proposições fosse verdadeira?*

Pretende-se perceber se os alunos compreenderam que se somente uma das proposições simples fosse verdadeira a proposição composta formada por elas seria falsa. Para que uma proposição composta por conjunção seja verdadeira, é necessário que ambas as proposições simples que a compõem também o sejam. Fazendo analogia a Teoria dos Conjuntos, pode-se dizer que dados dois conjuntos não-nulos A (formado pelos elementos que possuam a propriedade p) e B (formado pelos elementos que possuam a propriedade q), temos que os elementos, que simultaneamente possuem as propriedades p e q, pertencem ao conjunto $A \cap B$.

** Em algum dos problemas vocês identificaram uma parte que dependia de outra, sugerindo uma consequência? Você chegou a pensar “se isso acontece, aquilo também deve acontecer”?*

Pretende-se verificar se os alunos identificaram as construções que envolvem condicional. Essa ideia aparece na declaração de Daniela (“Se Bruno é culpado, então Cecília é inocente”), na segunda questão, bem como nas instruções do bolo (“Se colocar ovos, não coloque creme”), na primeira questão.

** Na declaração “Se Bruno é culpado, então Cecília é inocente.” vocês perceberam que podemos “quebrá-la” em mais de uma proposição?*

Pretende-se constatar se os alunos concluíram que a declaração de Daniela é uma proposição composta formada pelas proposições simples “Bruno é culpado” e “Cecília é inocente”. Explicar para os alunos que este é um exemplo de condicional, que faz uso do conectivo “se/então”.

** Na resolução da segunda questão faz sentido concluir que se é verdade que Bruno é o culpado, então é verdade que Cecília é inocente, pois o enunciado aponta que somente uma das crianças é culpada por comer os biscoitos. Porém, se admitíssemos que pode haver mais de um culpado, isso não excluiria Cecília como suspeita. Que relação devemos ter entre a primeira proposição (“se”) e a segunda proposição (“então”) para reconhecermos a composta como verdadeira?*

Possivelmente os alunos apresentarão dificuldade em avaliar essa pergunta. Nesse caso, apresentar os questionamentos que se seguem.

* Estamos no Rio Grande do Sul que é um dos estados da República Federativa do Brasil. Reflita: É correto afirmar que “se uma pessoa nasce no RS, então ela é brasileira”?

Dada a obviedade, os alunos concordarão facilmente com essa ideia. Pretende-se fazer com que notem que ambas as proposições são verdadeiras, o que torna a composta verdadeira também.

* É correto afirmar que “se uma pessoa nasce no RS, então ela não é brasileira”?

Os alunos facilmente discordarão do que foi posto, uma vez que não faz sentido. Pretende-se fazer que notem que se a primeira proposição (“se”) for verdadeira e a segunda (“então”) for falsa, teremos uma composta falsa.

* Faz sentido afirmar que “se uma pessoa não nasce no RS, então ela é brasileira”?

Pretende-se fazê-los perceber que essa possibilidade existe. Para ser brasileira, bastaria que tal pessoa tivesse nascido em algum outro estado federativo do Brasil. Espera-se que notem que se a primeira proposição (“se”) for falsa e a segunda (“então”) for verdadeira, teremos uma composta verdadeira.

* Faz sentido afirmar que “se uma pessoa não nasce no RS, então ela não é brasileira”?

Novamente, pretende-se fazê-los perceber que essa possibilidade existe. Para não ser brasileira, bastaria que tal pessoa não tivesse nascido em algum dos estados federativos do Brasil, incluindo o RS. Ora, se uma pessoa não nasce no RS, é possível que ela não seja brasileira também, afinal há outros países para se nascer, ou mesmo num navio em águas internacionais. Espera-se que notem que se a primeira (“se”) e a segunda (“então”) proposições forem falsas, teremos uma composta verdadeira.

Ao relacionarmos com a Teoria dos Conjuntos, podemos dizer que dados dois conjuntos não-nulos A (formado pelos elementos que possuem a propriedade p) e B (formado pelos elementos que cumprem a condição q), com $A \neq B$ e ainda com A sendo subconjunto de B ($A \subset B$), temos que os elementos que possuem a propriedade p , necessariamente possuem a propriedade q . Temos também que se um elemento não possui a propriedade p , ele pode possuir a propriedade q ou não. Isso se deve ao complementar de A possuir interseção tanto com o conjunto B quanto com o complementar de B . Entretanto, um elemento que possui a propriedade p e não possui a propriedade q , não faria sentido, pois contradiz $A \subset B$.

O interessante das condicionais é que elas não afirmam que uma coisa vai acontecer, mas no caso de acontecerem, uma consequência desse acontecimento sucede. Assim, só teremos que uma proposição com este conectivo será falsa se a proposição antecedente for verdadeira e implicar numa proposição consequente falsa.

Após esses conceitos serem processados e formalizados anotando-os no quadro (o que são proposições compostas, quais os principais conectivos, em que situações as proposições compostas são tidas como verdadeiras ou falsas – o ensino da tabela verdade como recurso para organização do raciocínio é opcional, mas caberia nesse ponto), serão distribuídas cópias impressas das seguintes questões para os alunos trabalharem em trios, como de praxe. Os alunos terão cerca de 20 min para resolverem as questões.

(MPE-RJ/FGV/2019) Considere as proposições a seguir:

- I. 30% de 120 = 36 e 25% de 140 = 36.
- II. 30% de 120 = 36 ou 25% de 140 = 36.
- III. Se 25% de 140 = 36, então 30% de 120 = 36.

É correto concluir que:

- a) apenas a proposição I é verdadeira.
- b) apenas a proposição II é verdadeira.
- c) apenas as proposições II e III são verdadeiras.
- d) todas são verdadeiras.
- e) nenhuma é verdadeira.

>>> Uma possível solução:

Todas as proposições são compostas.

* Na proposição I, temos que 30% de 120 é igual a 36 (V) e 25% de 140 é igual a 36 (F, pois o valor resulta em 35). Isso faz com que a proposição I seja falsa, pois, para ser verdadeira, ambas proposições deveriam ser verdadeiras.

* Na proposição II, temos que 30% de 120 é igual a 36 (V) ou 25% de 140 é igual a 36 (F). Isso faz com que a proposição II seja verdadeira, pois basta que uma das proposições que a compõem seja verdadeira.

* Na proposição III, temos que se 25% de 140 é igual a 36 (F), então 30% de 120 é igual a 36 (V). Isso faz com que a proposição III seja verdadeira, pois uma condicional só é falsa se o antecedente verdadeiro implicar num consequente falso.

Portanto, alternativa C.

Tome as premissas abaixo como verdadeiras:

Premissa 1: Ana é ansiosa ou Bruna é bipolar.

Premissa 2: Se Carla for calma, então Bruna não será bipolar.

Premissa 3: Carla é calma e Daniela é determinada.

Conclusão: Portanto, Ana é ansiosa.

Sobre a conclusão, podemos afirmar que:

- a) é válida.
- b) não é válida.

>>> Uma possível solução:

Como as premissas são verdadeiras, a premissa 3 afirma que Carla é calma e, portanto, segundo a premissa 2, Bruna não é bipolar. Como a premissa 1 afirma que Ana é ansiosa ou Bruna é bipolar, e sabemos que Bruna não é bipolar, então Carla é ansiosa. Sendo assim, a conclusão é válida. Alternativa A.

Ao fim do tempo estipulado, os grupos anunciarão as alternativas que marcaram. Os trios serão convidados a compartilhar seus resultados no grande grupo. Após os alunos apresentarem a forma como organizaram o raciocínio para chegar ao resultado (cerca de 15 min) será encerrado o encontro.

Avaliação desse encontro: *Será avaliada a participação dos alunos na resolução das atividades (verificar se estão fazendo uso das etapas de resolução construídas pela turma) e na elaboração dos conceitos (pedir que fiquem atentos ao registrarem os conceitos que foram formalizados nesse encontro sobre os conectivos). O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno.*

Sexto encontro

Objetivos desse encontro:

- * *Identificar os quantificadores lógicos nas proposições categóricas.*
- * *Elaborar relações de negação de proposições categóricas.*

O sexto encontro será iniciado com as percepções dos alunos acerca da segunda questão trabalhada no encontro anterior. A estrutura que é apresentada na questão é conhecida como “silogismo”, que apresenta proposições, denominadas “premissas”, que se tomam por verdadeiras para que se chegue a uma nova proposição, chamada “conclusão”.

Os silogismos são a base do pensamento lógico-dedutivo que teve início em Aristóteles, na busca pela validade do discurso. Questões do tipo “Dedução” seguem uma linha similar. Nelas, temos proposições que tomamos como verdadeiras (premissas) e, a partir destas, usamos de inferência para chegarmos às conclusões. Obviamente que, se as premissas forem falsas, chegaríamos a uma conclusão errônea. Ainda assim, mesmo com premissas verdadeiras podemos não chegar a uma

conclusão satisfatória ou deduzirmos algo totalmente descabido. Explicar rapidamente sobre a validade do argumento, como visto no capítulo 2.

Diferente de uma proposição que se diz “verdadeira” ou “falsa”, um silogismo aponta para um argumento que se diz “válido” ou “inválido”, embora haja outras formas de argumentar que não seja por meio de silogismos.

Apresentar para a turma as seguintes premissas:

Premissa 1: “Todas as proparoxítonas devem ser acentuadas.”

Premissa 2: “A palavra ‘lógica’ é uma proparoxítona.”

Questioná-los: “Qual a conclusão que podemos chegar a partir destas duas premissas?”

Ao que se espera que respondam que a conclusão que chegamos é: “A palavra ‘lógica’ deve ser acentuada.”.

Depois dessa reflexão inicial sobre silogismos, que deve levar cerca de 20 min, será apresentada a questão logo abaixo. Os trios terão 20 min para resolvê-la.

Figura 27 – Questão 6 da prova de 2022

- 6.** Admita que sejam válidas ambas as seguintes sentenças:
- Pinóquio sempre mente;
 - Pinóquio diz: “Todos os meus chapéus são verdes”.
- Podemos concluir dessas duas sentenças que:
- (A) Pinóquio tem pelo menos um chapéu.
 - (B) Pinóquio tem apenas um chapéu verde.
 - (C) Pinóquio não tem chapéus.
 - (D) Pinóquio tem pelo menos um chapéu verde.
 - (E) Pinóquio não tem chapéus verdes.

Fonte: OBMEP, 2022.

>>> Uma possível solução:

Como Pinóquio sempre mente, a proposição dita por ele é falsa. Logo, a negação dessa proposição deve ser verdadeira. Para que se tenha a negação de uma proposição universal afirmativa, deve-se usar uma proposição particular negativa. Assim, existe pelo menos um chapéu de Pinóquio que não é verde, portanto, é correto afirmar que Pinóquio possui pelo menos um chapéu. Então, a alternativa correta é a alternativa A.

É possível que os alunos fiquem com certa dificuldade ao responder essa questão. É compreensível, pois trata-se de uma questão que lida com proposição universal, e pode ser contraintuitivo fazer a negação desse tipo de proposição. Caso sinta que a turma está muito perdida, fazer uma pequena pausa na resolução desse problema para levantar alguns questionamentos que podem ajudá-los a refletir sobre a resposta.

** Com base na proposição: “Todos os patos possuem penugem branca.”. O que poderia ser feito para mostrar que essa afirmação é falsa?*

Espera-se que os alunos, depois de algumas possíveis respostas desconstruídas (como apontar que a negação dessa afirmação seria dizer que “nenhum pato possui penugem branca”, o que é falso, pois existem patos com penugem branca), consigam compreender que basta mostrar que existe um único pato que não possua penugem branca para provar que tal afirmação é falsa (pode-se dizer que se usa o mesmo princípio da “falseabilidade” ou da “refutabilidade” proposto por Karl Popper para resolver o problema da indução na filosofia da ciência). A partir dessa constatação, deixar que voltem ao problema dos chapéus de Pinóquio.

Assim que o tempo estipulado acabar, pedir que os trios que tenham chegado ao resultado correto, compartilhem com o restante da turma qual foi seu raciocínio para a resolução (cerca de 10 min). Após, trazer alguns questionamentos que façam os alunos refletirem sobre a questão:

** O que o silogismo das proparoxítonas e a questão apresentada possuem em comum?*

Pretende-se fazer os alunos perceberem que em ambas situações temos uma proposição que usa a palavra “todos(as)”.

** O que a questão entregue como desafio no final do 3º encontro e a questão apresentada possuem em comum? (Apresentar a questão 14 da OBMEP de 2014 no projetor / tela)*

Pretende-se verificar se os alunos notaram que ambas usam a expressão “pelo menos um(a)”.

** Qual a relação entre a questão do Pinóquio e o questionamento sobre a penugem dos patos? Como foi resolvida cada questão?*

Pretende-se constatar se os alunos notaram que, assim como o questionamento dos patos, para negar uma proposição do tipo “Todos são”, devemos usar uma proposição do tipo “algum não é”, “existe um que não é” ou “pelo menos um não é”. Explicar para eles que essas expressões “todos” e “pelo menos um não” são o que chamamos de quantificadores lógicos. O quantificador “todos” é dito universal afirmativo, enquanto o quantificador “pelo menos um não” é dito particular negativo.

** Inicialmente, seu grupo pensou em usar como negação para a questão do Pinóquio que “nenhum dos chapéus é verde”?*

Provavelmente, muitos alunos dirão que sim, especialmente antes de se levantar o questionamento sobre os patos. Contudo, após a reflexão sobre a pergunta dos patos, é possível que tenha se tornado simples de resolver a questão do Pinóquio por analogia.

** Como “todos” é um quantificador universal afirmativo, o que seria um quantificador universal negativo?*

Espera-se que os alunos entendam que a expressão “nenhum” cumpra esse papel.

** Se Pinóquio tivesse dito que “Nenhum dos meus chapéus é vermelho”, saberíamos que se trata de uma mentira, pois ele sempre mente. A negação dessa proposição, portanto, seria verdadeira. Como seria a negação dessa declaração de Pinóquio?*

Pretende-se fazer com que os alunos suponham, em analogia com a pergunta dos patos, que bastaria que um único chapéu de Pinóquio fosse vermelho para negar tal afirmação. Logo, a negação da proposição seria “Pelo menos um dos meus chapéus é vermelho”. Vale ressaltar que esta negação faria uso de um quantificador particular afirmativo.

Explicar aos alunos que proposições que usem quantificadores lógicos (“todos”, “nenhum”, “algum”, “existe” etc) são chamadas de proposições categóricas e são o foco da lógica de predicados. Essas proposições são amplamente utilizadas na

Matemática em definições e para a argumentação em demonstrações. Anotar no quadro a formalização desses conceitos, como os tipos de proposições categóricas (universal, particular, afirmativa e negativa) e como negá-las. Vale a pena aqui diferenciar a negação de uma proposição simples de uma proposição categórica. A reflexão sobre os questionamentos e sua formalização deve levar cerca de 25 minutos.

Após essa formalização acerca das proposições categóricas, trazer as questões abaixo que abordam esse assunto, como forma de os alunos reforçarem o que viram até então. Estima-se que para a resolução das questões e o compartilhamento das ideias com o grande grupo leve em torno de 15 minutos.

(Instituto AOCF 2016 - adaptada) Qual a negação da frase “Nenhum homem é alto?”?

- a) “Nenhum homem é baixo”.
- b) “Não existe homem alto”.
- c) “Todo homem é alto”.
- d) “Existe homem alto”.
- e) “Qualquer homem é baixo”.

>>> Uma possível solução:

A proposição dada é universal negativa e, portanto, sua negação é uma particular positiva. Logo, a negação é que pelo menos um homem que seja alto exista. Alternativa D.

(Vunesp, 2018) Considere falsa a afirmação (I) e verdadeira a afirmação (II).

- I. Todos os alunos estudam.
- II. Alguns professores estudam.

Sendo assim, é correto concluir que:

- a) os alunos que estudam são professores.
- b) qualquer professor que estuda é aluno.
- c) existe aluno que não estuda.
- d) todos os professores estudam.
- e) qualquer aluno estuda.

>>> Uma possível solução:

Como a afirmação (I) é falsa, sua negação é verdadeira. Então, há algum aluno que estuda (ou mesmo mais de um, mas não a totalidade dos alunos, pois isto tornaria a afirmação (I) verdadeira). Logo existem, também, alunos que não estudam, que é justamente a afirmação feita na alternativa C. De fato, as conclusões das alternativas A e B não são válidas, pois nada sugere que há ligação entre ser aluno e ser um professor que estuda. Já as conclusões das alternativas D e E não estão de acordo com as afirmações (I) e (II).

Assim que o tempo estipulado acabar, pedir que os trios compartilhem com o restante da turma qual foi seu raciocínio para a resolução (cerca de 10 min). Com isso, o tempo deste 4º encontro terá acabado.

Agradecer a presença dos participantes e solicitar que não deixem de comparecer ao próximo encontro.

Avaliação desse encontro: *Será avaliada a participação dos alunos na resolução das atividades (verificar se estão fazendo uso das etapas de resolução construídas pela turma) e na elaboração dos conceitos (pedir que fiquem atentos ao registrarem os conceitos que foram formalizados nesse encontro sobre os quantificadores lógicos e proposições categóricas). O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno.*

Sétimo encontro

Objetivo desse encontro:

** Identificar as questões entre os diferentes tipos e resolvê-las levando-se em conta os conectivos (preferencialmente utilizando uma estrutura de resolução).*

Nesse encontro serão trazidas mais algumas questões que sintetizam um pouco do que foi trabalhado ao longo dos encontros anteriores. Os alunos, separados em trios, receberão cópia impressa das questões, que também serão exibidas no projetor/tela. Como de costume o professor passará entre os grupos para tirar possíveis dúvidas, reconduzindo os alunos através de questionamentos rumo ao resultado correto. É importante lembrá-los de coisas que foram vistas e que os

auxiliarão na resolução, como as etapas de resolução definidas pela turma em aula, os tipos de questão e sua forma de resolução, se as questões fazem uso de conectivos, etc, bem como anotar o raciocínio de sua resolução. Imagina-se que essa tarefa levará cerca de 50 min.

Figura 28 – Questão 19 da prova de 2008

19. Ari, Bruna e Carlos almoçam juntos todos os dias e cada um deles pede água ou suco.

- Se Ari pede a mesma bebida que Carlos, então Bruna pede água.
- Se Ari pede uma bebida diferente da de Bruna, então Carlos pede suco.
- Se Bruna pede uma bebida diferente da de Carlos, então Ari pede água.
- Apenas um deles sempre pede a mesma bebida.

Quem pede sempre a mesma bebida e que bebida é essa?

- (A) Ari; água
- (B) Bruna; água
- (C) Carlos; suco
- (D) Ari; suco
- (E) Bruna; suco



Fonte: OBMEP, 2008.

>>> Uma possível solução:

Como eles pedem água ou suco, existem 8 possibilidades de como eles fazem seus respectivos pedidos:

Quadro 14 – Resolução da questão 19/2008

	1	2	3	4	5	6	7	8
Ari	Água	Água	Suco	Suco	Água	Água	Suco	Suco
Bruna	Água	Suco	Água	Suco	Água	Suco	Água	Suco
Carlos	Água	Água	Água	Água	Suco	Suco	Suco	Suco

Fonte: autor.

Levando em conta a primeira dica, eliminamos as possibilidades 2 e 8. Com a segunda dica, eliminamos a possibilidade 3. Com a terceira dica, eliminamos as possibilidades 4 e 7. Como as únicas possibilidades válidas são a 1, a 5 e a 6, e pela última dica, um deles pede sempre a mesma bebida, temos que Ari é quem pede sempre água. Portanto, alternativa A.

Figura 29 – Questão 11 da prova de 2021

11. Amélia, Beatriz, Camila e Débora são amigas que combinaram uma brincadeira: a partir de um certo momento cada uma delas passa a falar só verdades ou só mentiras. Depois desse momento,

Amélia disse: "Beatriz diz a verdade";

Beatriz disse: "Camila mente";

Camila disse: "Amélia e Débora, ambas dizem a verdade ou ambas são mentirosas";

Débora disse: "Amélia não fala a verdade".

Quantas das 4 amigas mentem?

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4



Fonte: OBMEP, 2021.

>>> Uma possível solução:

Uma estratégia interessante é iniciarmos as suposições a partir da declaração de Débora, pois a declaração de Camila é uma proposição composta (disjunção exclusiva), o que pode dificultar a organização das ideias. Assim, se Débora fala a verdade, então Amélia mente, Beatriz mente e Camila diz a verdade. Porém, isso gera uma contradição, pois Amélia e Débora não estão ambas dizendo a verdade ou ambas mentindo. Por outro lado, se Débora está mentindo, então Amélia diz a verdade, Beatriz diz a verdade e Camila mente. De fato, a afirmação de Camila é falsa, pois novamente temos que Amélia e Débora não estão ambas falando a verdade ou ambas mentindo. Temos então que duas das amigas falam a verdade e duas mentem, portanto, a alternativa correta é a alternativa C.

Figura 30 – Questão 6 da prova de 2016

6. A figura mostra os cartões com as respostas de Ana, Beatriz e Cecília para uma prova de múltipla escolha, com cinco questões e alternativas A, B, C, D e E. Ana acertou quatro questões, Beatriz acertou uma e Cecília acertou três. Qual foi a questão que Ana errou?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

	1	2	3	4	5
Ana					
A →	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
B →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
C →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
E →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Beatriz					
A →	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
B →	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
C →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
Cecília					
A →	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
B →	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
C →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Fonte: OBMEP, 2016.


>>> Uma possível solução:

Começaremos supondo que a questão 1 esteja errada. Se isso ocorrer, então Ana acertou as outras 4 questões e Beatriz acertou pelo menos uma das demais questões. Porém, nenhuma das demais respostas (questões 2, 3, 4 e 5) coincidem entre as respostas de Ana e Beatriz. Isso indica que a questão 1 está correta. Sendo assim, todas as 3 meninas acertaram a questão 1 e Beatriz errou as questões 2, 3, 4 e 5.

Entre as questões 2, 3, 4 e 5, Ana errou uma e Cecília duas. É fácil perceber que Cecília errou as questões 2 e 4, pois suas respostas coincidem com as de Beatriz (que as errou). Isso indica que Cecília acertou as questões 1, 3 e 5. Destas, a única questão em que as respostas dadas por Ana e Cecília não coincide é a questão 3. Portanto, Ana errou a questão 3 e a alternativa correta é a C.

Figura 31 – Questão 19 da prova de 2024

19. Ana, Bia e Carla visitaram a floricultura de seu bairro. O vendedor separou as 5 flores mostradas na figura e disse que iria presentear cada uma com uma dessas flores.








Carla escutou a seguinte conversa entre Bia e Ana:

— Bia disse: “Oi Ana, eu e Carla sabemos a cor de cada uma das flores que vamos ganhar, mas nem eu nem ela sabemos as quantidades de pétalas das flores que cada uma de nós irá ganhar”.

— Ana disse: “Eu sei a quantidade de pétalas da flor que vou ganhar, mas não sei a cor”.

A partir dessa conversa, Carla descobriu a flor que Ana vai ganhar. Qual é essa flor?

(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

Fonte: OBMEP, 2024.

>>> Uma possível solução:

Como Ana diz saber a quantidade de pétalas da sua flor, mas não a cor, isso significa que ela irá ganhar alguma das flores com 3 pétalas, pois se ela fosse ganhar uma flor com qualquer outra quantidade de pétalas, não restaria dúvidas sobre a cor (as flores de 4, 5 e 6 pétalas possuem cores específicas). Quanto as flores que Bia e Carla receberão, elas sabem as cores que cada uma irá receber, o que limita às seguintes possibilidades: ambas recebem flores amarelas, ambas recebem flores roxas, ou uma recebe uma flor amarela e a outra uma flor roxa. Se ambas recebessem flores amarelas, Carla seria incapaz de definir qual a flor de Ana. O mesmo vale se Carla e Bia recebessem flores de cores diferentes. A dedução de Carla só é possível se

ambas receberem flores roxas, sobrando assim a flor amarela de 3 pétalas para Ana. Logo, a alternativa correta é a alternativa A.

Figura 32 – Questão 20 da prova de 2010

20. Adriano, Bruno, Carlos e Daniel participam de uma brincadeira na qual cada um é um tamanduá ou uma preguiça. Tamanduás sempre dizem a verdade e preguiças sempre mentem.

- Adriano diz: "Bruno é uma preguiça".
- Bruno diz: "Carlos é um tamanduá".
- Carlos diz: "Daniel e Adriano são diferentes tipos de animais".
- Daniel diz: "Adriano é uma preguiça".

Quantos dos quatro amigos são tamanduás?

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

Fonte: OBMEP, 2010.

>>> Uma possível solução:

Uma estratégia interessante é iniciarmos as suposições a partir da declaração de Daniel, pois a declaração de Carlos é uma proposição composta (disjunção exclusiva... ou Daniel é tamanduá e Adriano é preguiça, ou Daniel é preguiça e Adriano é tamanduá), o que pode dificultar a organização das ideias.

Assim, se Daniel mente (preguiça), então Adriano fala a verdade (tamanduá), Bruno mente (preguiça) e Carlos mente (preguiça). Porém, isso gera uma contradição, pois se Carlos mente, Daniel e Adriano deveriam ser de um mesmo tipo de animais, mas não são (Daniel é preguiça e Adriano tamanduá).

Contudo, se Daniel fala a verdade (tamanduá), então Adriano mente (preguiça), Bruno diz a verdade (tamanduá) e Carlos diz a verdade (tamanduá). Isso faz sentido, visto que Daniel e Adriano devem ser diferentes tipos de animais.

Logo, 3 amigos são tamanduás, e a alternativa correta é a D.

Ao fim do tempo estipulado, os grupos anunciarão as alternativas que marcaram. Os trios serão convidados a compartilhar com o restante da turma a forma como organizaram o raciocínio para chegar aos seus resultados, o que deve levar cerca de 40 min.

Nos 10 min finais, trazer o seguinte questionamento ao grupo:

** Com esse último bloco de questões de lógica, os conceitos que abordamos ao longo dos encontros (sobre como estruturar a resolução de problemas, bem como conhecimentos sobre lógica proposicional e de predicados) foram úteis para que vocês conseguissem resolver com maior desenvoltura esse tipo de questão?*

Pretende-se verificar se os alunos sentiram que houve contribuição efetiva na forma como eles encaram a resolução de problemas como um todo, mas especificamente de questões de Lógica.

** Acreditam que, após essa proposta didática, ficaram mais atentos à forma com a qual expressam suas ideias, fazendo-o de maneira mais clara e aprimorando sua argumentação?*

Pretende-se perceber se, munidos de ferramentas que os façam enxergar a estrutura por trás dos enunciados e para além de fazer uma leitura mais atenta destes, o que foi trabalhado nesses encontros teve como benefício os alunos tornarem-se “leitores de si mesmos”, procurando ler suas próprias produções com olhos mais críticos e, com isso, melhorando sua argumentação.

Justamente para testar essa melhora na forma como eles se expressam e não só na forma como compreendem as perguntas é que será proposta a seguinte atividade para o encontro 8:

>>> Para o próximo encontro, cada trio deverá criar uma questão de lógica, na qual haja alternativas de resposta. Neste encontro, os grupos trocarão entre si suas perguntas (definido por sorteio). Após o tempo para que resolvam, os trios serão chamados para lerem, resolverem e analisarem as questões que receberam dos seus colegas.

Explicar aos alunos que eles podem se basear nos tipos de questões que viram (como as questões de “Mentira”, por exemplo), podem utilizar silogismos, conectivos, quantificadores, enfim, coisas que foram vistas nos encontros. A originalidade será incentivada, evidenciando que não se recomenda apenas fazer uma cópia das questões trabalhadas, alterando alguns elementos. Como exemplo disso, apontar a segunda e a quinta questões propostas nesse 7º encontro. As questões são muito

próximas na ideia, mas houve uma reestruturação para que não ficassem idênticas (na verdade, a segunda questão que se baseia na quinta, pois a segunda foi lançada depois).

Na BNCC, várias habilidades são descritas com “resolver e elaborar problemas”. Esta última atividade foi pensada para que os alunos manipulem os conceitos aprendidos de modo a elaborarem eles mesmos um problema de Lógica e demonstrem de forma prática se lhe compreenderam de fato.

Agradecer a todos os participantes e pedir que se empenhem na criação da questão.

Avaliação desse encontro: *Será avaliada a participação dos alunos na resolução das atividades (verificar se estão fazendo uso das etapas de resolução construídas pela turma). O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno.*

Oitavo encontro

Objetivos desse encontro:

* *Analisar junto à turma as questões formuladas pelos grupos, sugerindo melhorias.*

* *Realizar uma autoavaliação sobre o empenho e sobre o desempenho (ao resolver problemas) nos encontros dessa proposta didática.*

Esse último encontro tende a ser caótico e, em termos de planejamento é o mais simples, pois se apoia no que será trazido pelos alunos. Não se tem um controle sobre os tipos de questões que podem surgir, se estão bem elaboradas, se são fáceis, difíceis, se são cópias óbvias de questões que foram trazidas anteriormente, se baseiam-se nos conceitos de lógica trabalhados em aula, etc.

Os trios se reunirão e, por sorteio, será feita a troca de questões entre eles (enumerar os grupos e sortear papezinhos para saber qual grupo pega a questão de qual, trocando o papel caso um grupo pegue seu próprio número no sorteio). Os grupos terão 30 minutos para responder à questão sorteada. Para além de encontrarem a resposta correta, eles farão a análise crítica da questão, verificando os

seguintes critérios: i) Foi escrita com clareza? ii) Os conceitos de lógica foram abordados? iii) Está num nível muito difícil ou muito fácil? iv) Possui alguma incongruência que não leve ao resultado esperado? v) Há ambiguidade em alguma informação? vi) Cabe alguma alteração no enunciado para facilitar seu entendimento? vii) A pergunta é original ou foi inspirada em alguma questão trabalhada nos encontros?

Os 50 min seguintes da aula serão usados para que cada trio comente a questão que pegou no sorteio (é possível anotá-la em um editor de texto de computador e projetar a imagem para o restante da turma). Se houver muitos trios, podem ser sorteados cinco desses grupos para que as questões sejam trabalhadas junto ao grande grupo. Os comentários que os grupos anotaram serão compartilhados com os demais colegas da turma e será aberta a discussão para que os outros colegas comentem.

Após a análise das questões, os 20 min finais serão utilizados para responder o questionário abaixo, que serve para autoavaliação e avaliação por pares do trabalho realizado nos trios.

Questionário Formativo:

1) Acredita que você e seu grupo tiveram aprendizagens significativas com esse projeto de resolução de questões de lógica? Se sim, o que você mais achou importante daquilo que aprenderam? Caso não, quais suas sugestões para melhoria desse projeto?

Com essa pergunta, pretende-se verificar se o aluno conseguiu compreender sobre o que se tratou essa proposta didática. Ao fazê-lo perceber quais foram as aprendizagens que teve, coloca-se o aluno a refletir sobre seu processo de aprendizagem e sobre os conhecimentos que adquiriu (ou não).

2) Qual foi sua principal dificuldade ao resolver questões de lógica? Você e seus colegas de grupo procuraram seguir as etapas de resolução sugeridas em aula?

Complemento da pergunta anterior, esta pergunta especula se as etapas de de resolução foram consideradas e se isso levou o grupo a alcançar os resultados

corretos. É possível que os alunos percebam e indiquem aqui suas limitações quanto a interpretação textual como fator para a dificuldade.

3) *Quais foram suas contribuições para com o seu grupo durante este projeto? Colaborou oferecendo seu ponto de vista durante a resolução dos problemas? Participou ativamente do planejamento e da execução? Auxiliou na elaboração do registro dos raciocínios de resolução? Que nota você se daria de 0 a 10?*

Como o papel do aluno é de suma importância dentro da metodologia de resolução de problemas, cabe a ele avaliar-se dentro desse processo, tanto quanto ao seu desempenho, quanto ao seu empenho.

4) *E seus colegas de grupo, como contribuíram (fale um pouco sobre cada outro membro do grupo)? O auxílio deles foi importante para que você conseguisse entender melhor os conceitos trabalhados? Que nota de 0 a 10 você atribuiria a cada um deles?*

Abrindo espaço para a avaliação por seus pares, este espaço serve para que o aluno se expresse sobre o empenho de seus colegas, se houve colaboração dos demais na construção do raciocínio durante a resolução das questões.

5) *Como você avalia o problema criado pelo grupo para a tarefa final neste último encontro? Acredita que tenha ficado bom, fazendo uso correto dos conceitos abordados no projeto? Caso não tenha ficado, o que poderia ser melhorado?*

Esta pergunta foi pensada para que o aluno avalie o produto feito por seu grupo, indicando potenciais melhorias que pensa serem importantes de serem consideradas.

Ao final, agradecer o empenho dos alunos ao longo da aplicação dessa proposta didática.

Avaliação desse encontro: *Serão avaliadas as questões produzidas pelos grupos, a participação dos alunos na resolução das atividades e na crítica às questões produzidas, e a autoavaliação que cada aluno fez de si em seu processo de construção do saber nesses encontros. O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno. Ao finalizar essa proposta, recolher os portfólios e analisar o conjunto de todas as atividades realizadas, junto aos registros do professor sobre a participação individual de cada aluno durante os encontros.*

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação traz em seu bojo diversas considerações acerca do ensino e da aprendizagem de Lógica. Em meio a tanto que já foi dito neste trabalho, procuraremos ser breves nas considerações finais, focando em retomar se os objetivos para responder a pergunta problematizadora foram alcançados.

As necessidades educacionais para a formação dos sujeitos na nossa sociedade passam pela aquisição de habilidades que orientem o bem pensar. Muito se fala em desenvolver o raciocínio lógico dos estudantes, mas sem apontar o “como fazer”. Nesse sentido, o ensino de Lógica Formal poderia constituir uma ferramenta significativa para que os alunos realizem uma melhor leitura do mundo, compreendendo-o em suas entrelinhas, bem como organizar e expressar suas ideias com maior clareza, argumentando com coerência.

No capítulo 3, ao verificarmos a BNCC, percebeu-se que essa possibilidade não é vislumbrada no nosso currículo, pois nela não é apresentada qualquer menção ao ensino de Lógica. Mesmo assuntos diretamente relacionáveis, como a Teoria dos conjuntos, não são contemplados, sendo o mais próximo de uma relação com este assunto o estudo das conjunções na Língua Portuguesa (que se relacionam com os conectivos lógicos das proposições compostas). O mundo vive em mudança constante e faz sentido que os instrumentos curriculares sejam atualizados de tempos em tempos, refletindo as necessidades que surgem com essas mudanças. A BNCC completa sete anos e a inclusão explícita do ensino de Lógica Formal como parte do currículo de Matemática (ou mesmo de Filosofia) seria um grande acerto. Caminhamos para uma realidade na qual a programação de softwares, o uso consciente das IAs e a preocupação com cibersegurança acabarão sendo anexados ao rol dos conhecimentos que constituem a grade curricular. Quando esse futuro não tão distante for alcançado, os conhecimentos de Lógica serão parte inerente desse novo paradigma educacional.

A contribuição das questões da OBMEP para o propósito de se abordar a Lógica na Educação Básica é de grande importância. Alunos que, sem a OBMEP, nunca teriam contato com questões de Lógica, percebem que a Matemática está para além de somente fazer cálculos. Toda a discussão, que se procura fazer nessa

dissertação, sobre adicionar o ensino de Lógica ao currículo, sequer seria uma possibilidade sem a existência dessas questões na OBMEP, pois foi por meio delas que surgiu a motivação para criá-la. Por conta disso, a Olimpíada se mostra como um elo relevante entre o que o ensino de Matemática é e o que ele poderia ser, incluindo novos pontos de vista sobre o que é Matemática.

A análise que se fez das questões de Lógica da OBMEP, no capítulo 4 e no material em anexo, foi essencial para que fosse notado seu potencial como material de referência. Nessa análise, observou-se que as questões poderiam ser classificadas em diferentes tipos, que foram definidos como forma de auxiliar na elaboração de estratégias de resolução, pois questões de um mesmo tipo costumam apontar para resoluções semelhantes. Ela também permitiu que fossem percebidas as questões que apresentavam elementos da Lógica Formal, como conectivos e quantificadores lógicos. Graças a tal análise, foi possível identificar o que não foi abordado de conceitos relacionados à Lógica, como as disjunções inclusivas, as bicondicionais, as relações de equivalência como a contrapositiva, etc. Isso possibilitou que se propusessem melhorias a esse material, sugerindo questões que trabalhassem essas ausências.

As questões de Lógica da OBMEP são, por óbvio, um material ainda um pouco limitado, mas também ainda em construção. A cada nova edição da Olimpíada, esse material se torna mais robusto, com o acréscimo de novas questões. Para demonstrar que as questões apresentadas até agora constituem uma interessante fonte de referência, foi construída uma proposta didática no capítulo 5. Essa proposta faz uso da resolução de problemas como uma metodologia que incentiva o envolvimento do educando com as questões de Lógica. Com isso, pretende-se fugir do modelo de aula expositiva, buscando fazer com que os conceitos sejam formalizados a partir das percepções dos alunos ao resolverem problemas, ao invés de reforçar conceitos ensinados com mera aplicação em listas de exercícios. Nesse mesmo capítulo, para além da proposta didática, também são trazidos elementos que poderiam se entrelaçar com o ensino de Lógica ao longo de toda a Educação Básica, em algo que seja uma construção multidisciplinar, transcendendo a matemática como uma área de conhecimento isolada.

Algo que deve ser abordado é o fato de que a proposta didática apresentada é um estudo teórico de exploração e de proposição. Como não foi aplicada, por mais que possa estar teoricamente bem elaborada, vale ressaltar suas limitações em não se ter dados empíricos que comprovem sua eficácia no engajamento ou no desenvolvimento cognitivo dos alunos. A ausência de dados sobre dificuldades específicas, percentuais de erros ou barreiras práticas, como a escassez de recursos didáticos, dificulta que se aponte melhorias. A idealização de condições possivelmente não encontraria eco em situações reais, como um domínio mínimo de vocabulário dos estudantes para uma interpretação mais aguçada das estruturas lógicas presentes nos enunciados. Contudo, penso que essa dissertação tem seu mérito em trazer para o debate um tema tão rico de possibilidades, como com o que se apresentou no capítulo 2, contribuindo para a divulgação dos conceitos de lógica para professores que não tenham mantido contato com esse assunto em sua formação acadêmica.

Pessoalmente, a maior aprendizagem com essa dissertação foi a tomada de consciência de que a linguagem matemática se conecta intimamente com a linguagem natural. A percepção de que a Lógica é um convite para a interdisciplinaridade fez com que esse trabalho ganhasse corpo e se manifestasse como algo digno de atenção. Se esta mesma percepção surgir para outrem, através da leitura desse material, tudo o que foi construído aqui terá sido justificado.

7. REFERÊNCIAS

Bíblia. Português. Bíblia Sagrada. 49ª edição. Petrópolis-RJ: Editora Vozes, 2004.

Bondía, Jorge Larossa. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. Revista Brasileira de Educação. Nº 19, ano 2002 (p.20-28).

Brasil. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

Cassirer, Ernst. The Philosophy of symbolic forms. Volume three: the phenomenology of knowledge. Yale University Press, 1965.

Descartes, René. Discurso do Método. Tradução: Enrico Corvisieri. Digitalização: membros do grupo de discussão Acrópolis. Disponível em: https://www.eniopadilha.com.br/documentos/descartes_discurso_do_metodo.pdf. Acesso em: junho/2025.

Dongo-Montoya, Adiran Oscar. Pensamento e linguagem: Vygotsky, Wallon, Chomsky e Piaget. São Paulo: Editora Unesp Digital, 2021.

Enigma para estudantes de Cingapura faz mundo quebrar a cabeça. BBC, 15 de abril de 2015. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2015/04/150415_matematica_pergunta_lk . Acesso em: junho/2025.

Fisher, Alec. A lógica dos verdadeiros argumentos. São Paulo: Novo Conceito, 2008.

Freire, Paulo. Pedagogia do oprimido - 71ed. Rio de Janeiro/São Paulo: Paz e Terra, 2019.

Garcia, Sonia Maria dos Santos. A construção do Conhecimento segundo Jean Piaget. Ensino em Re-vista, 6(1):17-28, jul.97/jun.98.

Harari, Yuval Noah. 21 lições para o século XXI. Rio de Janeiro: Companhia das Letras, 2018.

Harari, Yuval Noah. Yuval Noah Harari and Steven Pinker in conversation, moderated by Dr. Maksym Yakovlyev. Youtube, 07 de setembro de 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=qHSzeijQ95I&t=7s> . Acesso em junho/2025.

Harari, Yuval Noah. Nexus: Uma breve história das redes de informação, da Idade da Pedra à inteligência artificial. Rio de Janeiro: Companhia das Letras, 2024.

Hefez, Abramo. Indução Matemática. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf> . Acesso em: maio/2025.

Hoffmann, Jussara Maria Lerch. Avaliação: mito e desafio: uma perspectiva construtivista. Porto Alegre: Mediação, 2009.

Hughes, George Edward; Cresswell, Maxwell John. A new introduction to modal logic. New York: Routledge, 1996.

Ide, Pascal. A arte de pensar. São Paulo: Martins Fontes, 1995.

Meneguelli, Juliana; et al. Metodologia de resolução de problemas: concepções e estratégias de ensino. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia. Ponta Grossa, v. 11, n. 3, p. 211-231, set./dez. 2018.

Munari, Alberto. Jean Piaget. Tradução e organização: Daniele Saheb. Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010.

OBMEP. Provas e Soluções. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: agosto/2024.

Ontario. Skills available for Ontario grade 10 math curriculum. Disponível em: https://ca.ixl.com/standards/ontario/math/grade-10?_gl=1*yji8dn*_up*MQ..*_gs*MQ..&gclid=Cj0KCQjws4fEBhD-ARIsACC3d2-

YKKXaaCyWTzJnLul6OVek2q_O1I2T79vjR-TbzRM-tRKjycJ5ZeYaAoGyEALw_wcB&gbraid=0AAAAADp4qSJUeloBdySdhtlg05r9SR0dE.
Acesso em: maio/2025.

Onuchic, Lourdes De La Rosa; Allevato, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 25, n. 41, p. 73- 98, 2011.

Perrenoud, Philippe. Construir as competências desde a escola. Tradução: Bruno Charles Magne. Porto Alegre: Arte Médicas Sul, 1999.

Pinker, Steven. O Novo Iluminismo: Em defesa da Razão, da Ciência e do Humanismo. Rio de Janeiro: Companhia das Letras, 2018.

Pinker, Steven. Racionalidade: o que é, por que parece estar em falta, por que é importante. Rio de Janeiro: Editora Intrínseca, 2021.

Platão. Teeteto. Tradução: Carlos Alberto Nunes. Digitalização: Membros do grupo de discussão Acrópolis. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cv000068.pdf> . Acesso em: maio/2025.

Polya, George. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Tradução e Adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

Popper, Karl Raimund. The logic of scientific discovery. New York: Routledge, 2002.

Priest, Graham. An introduction to non-classical logic: from if to is. Cambridge University Press, 2008.

Singh, Simon. O último teorema de Fermat. Rio de Janeiro: Editora Record, 1997.

Smullyan, Raymond. Alice in puzzle-land: A Carrollian entertaining math book. New York: Penguin Books, 1984.

Souza, João Nunes de. Lógica para ciência da computação e áreas afins: Uma introdução concisa sobre os fundamentos da lógica. 2020. Disponível em: <https://facom.ufu.br/system/files/conteudo/logicajoaonunes.pdf> . Acesso em: maio/2025.

Wittgenstein, Ludwig. Tractatus Logico-Philosophicus. Tradução: José Arthur Giannotti. Versão digital da obra publicada por Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1968. Disponível em: [https://www.wittgensteinproject.org/w/index.php/Tractatus_Logico-Philosophicus_\(portugu%C3%AAs\)#5](https://www.wittgensteinproject.org/w/index.php/Tractatus_Logico-Philosophicus_(portugu%C3%AAs)#5) . Acesso em: maio/2025.

8. ANEXO: ANÁLISE DAS QUESTÕES DA OBMEP

Abaixo, temos a análise de cada uma das questões de Lógica da OBMEP, com comentários nos quais se cita sua classificação entre os quatro tipos apresentados (Mentira, Dedução, Sequenciamento e Equivalência), bem como a presença de conectivos, quantificadores e demais operadores lógicos. Em alguns desses comentários fala-se da relevância da questão, seu nível de dificuldade, se ela é bem elaborada, etc. Esses critérios são um tanto subjetivos, podendo o leitor não concordar sobre o nível de alguma questão citada como “fácil” ou sobre algum outro aspecto mencionado. Interpretações divergentes a parte, espero que essa análise possa ser útil ao leitor que, assim como eu, vê o potencial dessas questões como material de referência.

A questão abaixo é do tipo “Dedução”. Apresenta os conectivos “se/então”, “não” e “e”. Ótima questão para se analisar o uso desse conectivo em proposições compostas, por fazer uso de várias delas.

Figura 33 – Questão 8 da prova de 2007

8. A mãe de César deu a ele as seguintes instruções para fazer um bolo:

- se colocar ovos, não coloque creme.
- se colocar leite, não coloque laranja.
- se não colocar creme, não coloque leite.

Seguindo essas instruções, César pode fazer um bolo com

- A) ovos e leite, mas sem creme.
- B) creme, laranja e leite, mas sem ovos.
- C) ovos e creme, mas sem laranja.
- D) ovos e laranja, mas sem leite e sem creme.
- E) leite e laranja, mas sem creme.



Fonte: OBMEP, 2007.

A próxima questão é do tipo “Dedução”. Fica evidente o uso do conectivo “se/então”. Essa questão parece simples, mas é de uma complexidade relativamente alta, pois a resolução exige que se analise todas as combinações. Ideal para se aumentar o grau de dificuldade entre as questões trabalhadas.

Figura 34 – Questão 19 da prova de 2008.

19. Ari, Bruna e Carlos almoçam juntos todos os dias e cada um deles pede água ou suco.

- Se Ari pede a mesma bebida que Carlos, então Bruna pede água.
- Se Ari pede uma bebida diferente da de Bruna, então Carlos pede suco.
- Se Bruna pede uma bebida diferente da de Carlos, então Ari pede água.
- Apenas um deles sempre pede a mesma bebida.

Quem pede sempre a mesma bebida e que bebida é essa?

- (A) Ari; água
- (B) Bruna; água
- (C) Carlos; suco
- (D) Ari; suco
- (E) Bruna; suco



Fonte: OBMEP, 2008.

A questão a seguir é do tipo “Sequenciamento”. Basta definir a ordem crescente entre as idades e quem faz par com quem entre os casais. Temos o uso do conectivo “e” tanto no enunciado quanto nas alternativas. Simples, mas divertida. Ótima para introduzir questões desse tipo.

Figura 35 – Questão 11 da prova de 2009

11. Arnaldo, Beto, Celina e Dalila formam dois casais. Os quatro têm idades diferentes. Arnaldo é mais velho que Celina e mais novo que Dalila. O esposo de Celina é a pessoa mais velha. É correto afirmar que:



- A) Arnaldo é mais velho que Beto e sua esposa é Dalila.
- B) Arnaldo é mais velho que sua esposa Dalila.
- C) Celina é a mais nova de todos e seu marido é Beto.
- D) Dalila é mais velha que Celina e seu marido é Beto.
- E) Celina é mais velha que seu marido Arnaldo.

Fonte: OBMEP, 2009.

A questão seguinte é do tipo “Mentira”, pois um ou mais dos amigos podem apresentar afirmações falsas em suas declarações. O enunciado faz uso do conectivo “ou”. A declaração de Carlos traz o conectivo “e”. Muito bem elaborada. Exige atenção ao resolver, analisando as possíveis contradições entre as declarações de cada um.

Figura 36 – Questão 20 da prova de 2010

20. Adriano, Bruno, Carlos e Daniel participam de uma brincadeira na qual cada um é um tamanduá ou uma preguiça. Tamanduás sempre dizem a verdade e preguiças sempre mentem.

- Adriano diz: “Bruno é uma preguiça”.
- Bruno diz: “Carlos é um tamanduá”.
- Carlos diz: “Daniel e Adriano são diferentes tipos de animais”.
- Daniel diz: “Adriano é uma preguiça”.

Quantos dos quatro amigos são tamanduás?

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

Fonte: OBMEP, 2010.

A próxima questão é do tipo “Mentira”, pois a declaração do culpado há de ser falsa. Temos os conectivos “ou” e “se/então” sendo empregados nas declarações dos sobrinhos. Questão muito rica quanto ao uso de conectivos, podendo ser o alicerce na construção sobre esse assunto.

Figura 37 – Questão 14 da prova de 2011

14. Tia Geralda sabe que um de seus sobrinhos Ana, Bruno, Cecília, Daniela ou Eduardo comeu todos os biscoitos. Ela também sabe que o culpado sempre mente e que os inocentes sempre dizem a verdade.



- Bruno diz: “O culpado é Eduardo ou Daniela.”
- Eduardo diz: “O culpado é uma menina.”
- Por fim, Daniela diz: “Se Bruno é culpado então Cecília é inocente.”

Quem comeu os biscoitos?

- A) Ana
- B) Bruno
- C) Cecília
- D) Daniela
- E) Eduardo

Fonte: OBMEP, 2011.

A questão seguinte é do tipo “Sequenciamento”. Basta definir a ordem, indo de quem é a mais nova para quem é a mais velha. Perceba o uso dos conectivos “e” e “não”, bem como a junção destes na contração “nem” (que equivale a “e + não”). Seria uma ótima questão a ser trabalhada se trouxesse uma quarta (ou quinta) personagem, como na questão dos casais. Assim, como é apresentada, não é propriamente desafiadora.

Figura 38 – Questão 15 da prova de 2012

15. Amanda, Bianca e Carolina são amigas e têm idades diferentes. Sabe-se que, das sentenças a seguir, exatamente uma é verdadeira.

- I. Amanda e Carolina são mais jovens que Bianca.
- II. Amanda é mais velha que Bianca.
- III. Amanda é mais velha que Bianca e Carolina.
- IV. Amanda não é nem a mais nova nem a mais velha das amigas.

Qual das alternativas mostra o nome das três amigas em ordem crescente de idade?


- A) Amanda, Bianca, Carolina
- B) Carolina, Bianca, Amanda
- C) Bianca, Carolina, Amanda
- D) Carolina, Amanda, Bianca
- E) Amanda, Carolina, Bianca

Fonte: OBMEP, 2012.

A questão abaixo é do tipo “Mentira”. Note a presença do conectivo “não” tanto no enunciado quanto entre as alternativas. Entre as alternativas temos ainda a presença do conectivo “e”. É interessante introduzir questões de “Mentira” com essa questão, por não ser extremamente desafiadora.

Figura 39 – Questão 19 da prova de 2013

19. Durante a aula, dois celulares tocaram ao mesmo tempo. A professora logo perguntou aos alunos: “De quem são os celulares que tocaram?” Guto disse: “O meu não tocou”, Carlos disse: “O meu tocou” e Bernardo disse: “O de Guto não tocou”. Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira?



- A) O celular de Carlos tocou e o de Guto não tocou.
- B) Bernardo mentiu.
- C) Os celulares de Guto e Carlos não tocaram.
- D) Carlos mentiu.
- E) Guto falou a verdade.

Fonte: OBMEP, 2013.

A questão abaixo pode ser classificada como sendo do tipo “Mentira”. Na verdade, as meninas não estão mentindo, porém, elas detêm informações equivocadas sobre a data da prova. Uma ótima questão para se refletir sobre “Mentira vs Falsidade”. Pode ser evidenciado o uso da expressão “pelo menos uma” que equivale ao quantificador lógico “alguma”. Enfim, uma excelente questão para debater com os alunos.

Figura 40 – Questão 14 da prova de 2014

14. Cinco meninas não estão totalmente de acordo sobre a data da prova de Matemática.

- Andrea diz que será em agosto, dia 16, segunda-feira;
- Daniela diz que será em agosto, dia 16, terça-feira;
- Fernanda diz que será em setembro, dia 17, terça-feira;
- Patrícia diz que será em agosto, dia 17, segunda-feira;
- Tatiane diz que será em setembro, dia 17, segunda-feira.

Somente uma está certa, e as outras acertaram pelo menos uma das informações: o mês, o dia do mês ou o dia da semana. Quem está certa?

- A) Andrea
- B) Daniela
- C) Fernanda
- D) Patrícia
- E) Tatiane

Fonte: OBMEP, 2014.

A questão a seguir é do tipo “Dedução”, mas também do tipo “Sequenciamento” (embora seja um sequenciamento não convencional, no qual a posição se dá em relação a um círculo). Temos uso do conectivo “e” nas dicas do enunciado. Possivelmente, a questão mais interessante desse tipo.

Figura 41 – Questão 20 da prova de 2015

20. Daniel e mais quatro amigos, todos nascidos em estados diferentes, reuniram-se em torno de uma mesa redonda. O paranaense sentou-se tendo como vizinhos o goiano e o mineiro. Edson sentou-se tendo como vizinhos Carlos e o sergipano. O goiano sentou-se tendo como vizinhos Edson e Adão. Bruno sentou-se tendo como vizinhos o tocantinense e o mineiro. Quem é o mineiro?

- A) Adão
- B) Bruno
- C) Carlos
- D) Daniel
- E) Edson



Fonte: OBMEP, 2015.

A seguinte questão é do tipo “Mentira”. Não é feito uso de conectivos ou de quantificadores. Apesar de trazer somente proposições simples, essa questão pode ser bem desafiadora caso não se faça a organização dos dados para verificar a sua relação.

Figura 42 – Questão 14 da prova de 2016

14. Em uma brincadeira, a mãe de João e Maria combinou que cada um deles daria uma única resposta correta a três perguntas que ela faria.

Ela perguntou:

- Que dia da semana é hoje?
- Hoje é quinta, disse João.
- É sexta, respondeu Maria.

Depois perguntou:

- Que dia da semana será amanhã?
- Segunda, falou João.
- Amanhã será domingo, disse Maria.

Finalmente ela perguntou:

- Que dia da semana foi ontem?
- Terça, respondeu João.
- Quarta, disse Maria.



Em que dia da semana a brincadeira aconteceu?

- A) Segunda-feira
- B) Terça-feira
- C) Quarta-feira
- D) Quinta-feira
- E) Sexta-feira

Fonte: OBMEP, 2016.

A questão abaixo foi classificada como sendo do tipo “Dedução”, mas traz também uma ideia de “Sequenciamento”, dada a disposição das respostas nos cartões. Apesar de não usar conectivos, a forma como foi elaborada é bem engenhosa, o que a deixa mais complexa e interessante.

Figura 43 – Questão 6 da prova de 2016

6. A figura mostra os cartões com as respostas de Ana, Beatriz e Cecília para uma prova de múltipla escolha, com cinco questões e alternativas A, B, C, D e E. Ana acertou quatro questões, Beatriz acertou uma e Cecília acertou três. Qual foi a questão que Ana errou?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

	1	2	3	4	5
Ana					
A →	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
B →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
C →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
E →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Beatriz					
A →	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
B →	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
C →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
Cecília					
A →	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
B →	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
C →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E →	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Fonte: OBMEP, 2016.

A questão a seguir é do tipo “Dedução”, mas é também de “Sequenciamento”, pois obriga a refletir sobre a disposição geométrica das letras nos cubos. Essa questão é excelente, porém, foge um pouco do que se procura nessa dissertação, que é fazer a análise semântica das proposições nos enunciados.

Figura 44 – Questão 16 da prova de 2017

16. Zequinha tem três dados iguais, com letras O, P, Q, R, S e T em suas faces. Ele juntou esses dados como na figura, de modo que as faces em contato tivessem a mesma letra. Qual é a letra na face oposta à que tem a letra T?

- A) S
- B) R
- C) Q
- D) P
- E) O



Fonte: OBMEP, 2017.

A questão a seguir é do tipo “Mentira”. Boa utilização dos conectivos lógicos “não”, “ou” e “e” (implícito na contração nem = e + não). Essa questão é muito boa para se trabalhar conectivos, incluindo fazer perceber conectivos onde eles aparentemente não estão.


Figura 45 – Questão 20 da prova de 2018

20. Vovó Vera quis saber qual de suas cinco netinhas tinha feito um desenho na parede de sua sala. As netinhas fizeram as seguintes declarações:

- Emília: *Não fui eu.*
- Luísa: *Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.*
- Marília: *Não foi a Rafaela nem a Vitória.*
- Rafaela: *Não foi a Luísa.*
- Vitória: *Luísa não está dizendo a verdade.*

Se apenas uma das netinhas mentiu, quem fez o desenho?

A) Emília
B) Luísa
C) Marília
D) Rafaela
E) Vitória



Fonte: OBMEP, 2018.

A seguinte questão é do tipo “Sequenciamento”, procurando estabelecer a ordem de chegada das netas à casa da vó. Utilização do conectivo “e”. Não é particularmente complicada. Apesar de apresentar cinco personagens, é fácil deduzir quem chegou primeiro, não sendo necessária uma esquematização que exija anotar em papel.

Figura 46 – Questão 8 da prova de 2019

8. Ana, Beatriz, Cláudia, Daniela e Érica foram visitar a vovó Margarida. Beatriz chegou antes de Ana e depois de Daniela. Já Cláudia, Daniela e Érica chegaram uma em seguida da outra, nessa ordem. Quem foi a primeira a chegar?

- A) Ana
B) Beatriz
C) Cláudia
D) Daniela
E) Érica



Fonte: OBMEP, 2019.

A pergunta abaixo é do tipo “Dedução”, mas também de “Sequenciamento”, uma vez que se define a ordem de quem olha para quem e quem está ou não de óculos. Uso do conectivo “e”. Como as alternativas devem ser verificadas uma por uma, pode gerar certa confusão, caso não se procure criar um esquema inicial que auxilie essa verificação.

Figura 47 – Questão 18 da prova de 2019

- 18.** Uma fotografia mostra três pessoas: Armando, Benedita e Carlitos. Nessa foto, Armando está olhando para Benedita, e Benedita está olhando para Carlitos. Armando está de óculos, e Carlitos está sem óculos. Qual das alternativas abaixo é, com certeza, verdadeira?
- A) Há uma pessoa de óculos olhando para uma pessoa sem óculos.
 - B) Há apenas uma pessoa sem óculos, e ela está olhando para uma pessoa de óculos.
 - C) Há apenas uma pessoa de óculos, e ela está olhando para uma pessoa sem óculos.
 - D) Carlitos está sendo olhado por uma pessoa sem óculos.
 - E) Carlitos está sendo olhado por uma pessoa de óculos.

Fonte: OBMEP, 2019.

A questão abaixo é do tipo “Mentira”. Ela saiu na *Olimpíada Carioca de Matemática*, pois em 2021 ainda estávamos em tempos de pandemia. Uso interessante dos conectivos “não”, “e” e “ou”. Muito semelhante à questão dos tamanduás e preguiças. Interessante trabalhar ambas as questões, para que os alunos se deem conta da similaridade.

Figura 48 – Questão 11 da prova de 2021

11. Amélia, Beatriz, Camila e Débora são amigas que combinaram uma brincadeira: a partir de um certo momento cada uma delas passa a falar só verdades ou só mentiras. Depois desse momento,

Amélia disse: “Beatriz diz a verdade”;

Beatriz disse: “Camila mente”;

Camila disse: “Amélia e Débora, ambas dizem a verdade ou ambas são mentirosas”;

Débora disse: “Amélia não fala a verdade”.

Quantas das 4 amigas mentem?

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4



Fonte: OBMEP, 2021.

A seguinte questão é do tipo “Dedução”. Há um uso implícito do conectivo “e” aqui na afirmação “Pedro, que nasceu em São Paulo, se escondeu junto com Fabiana”, que poderia ser reescrito como “Pedro nasceu em São Paulo **e** se escondeu junto com Fabiana”. Novamente, uma questão interessante para se debater com a turma sobre conectivos que estão “escondidos” no enunciado.

Figura 49 – Questão 15 da prova de 2022

- 15.** Ana, Cláudia, Joaquim, Pedro e Fabiana se esconderam durante uma brincadeira. Nessa brincadeira,
- havia exatamente duas crianças na casa da árvore;
 - Pedro, que nasceu em São Paulo, se escondeu junto com Fabiana;
 - uma menina se escondeu sozinha;
 - Ana não estava sozinha em seu esconderijo;
 - O menino pernambucano estava na casa da árvore.
- Quem estava na casa da árvore?
- (A) Pedro e Fabiana.
 (B) Joaquim e Cláudia.
 (C) Ana e Joaquim.
 (D) Pedro e Ana.
 (E) Cláudia e Fabiana.

Fonte: OBMEP, 2022.

A questão abaixo é do tipo “Equivalência”, pois claramente a resposta passa por verificar a negação de uma proposição categórica com o quantificador “todos”. Essa questão não foi incluída no tipo “Mentira”, pois, a despeito de Pinóquio estar falando uma mentira, não precisamos especular sobre ele estar ou não mentindo. Sabemos que ele mente, pois é dado no problema essa informação.

Figura 50 – Questão 6 da prova de 2022.

- 6.** Admita que sejam válidas ambas as seguintes sentenças:
- Pinóquio sempre mente;
 - Pinóquio diz: “Todos os meus chapéus são verdes”.
- Podemos concluir dessas duas sentenças que:
- (A) Pinóquio tem pelo menos um chapéu.
 (B) Pinóquio tem apenas um chapéu verde.
 (C) Pinóquio não tem chapéus.
 (D) Pinóquio tem pelo menos um chapéu verde.
 (E) Pinóquio não tem chapéus verdes.

Fonte: OBMEP, 2022.

A questão a seguir é do tipo “Mentira”. Não há uso de conectivos nem quantificadores aqui. Não é propriamente desafiadora, podendo ser resolvida sem uso de um esquema que organize as informações.

Figura 51 – Questão 19 da prova de 2023

19. As idades de três crianças são 7, 8 e 9 anos. Na figura, vemos a resposta de cada uma delas, quando perguntadas sobre suas idades. A criança com 8 anos foi a única que mentiu.



A criança mais velha e a criança mais nova são, nessa ordem,

(A)  e 

(B)  e 

(C)  e 

(D)  e 


(E)  e 

Fonte: OBMEP, 2023.

A questão abaixo é do tipo “Dedução”, pois aponta para a comparação entre as informações dadas nas declarações e as opções de flores. Os conectivos aparecem disfarçados aqui. A fala de Bia poderia ser reescrita como “Eu e Carla sabemos a cor de cada uma das flores que vamos ganhar, e eu não sei e ela não sabe quantas pétalas terão as flores que ganharemos”. Já a declaração de Ana poderia ser reescrita como “Eu sei a quantidade de pétalas da flor que vou ganhar, e não sei a cor. Interessante notar aqui que em termos de conectivos lógicos a conjunção adversativa “mas” cumpre o papel de “e”. Ótima questão para debater com a turma.

Figura 52 – Questão 19 da prova de 2024

19. Ana, Bia e Carla visitaram a floricultura de seu bairro. O vendedor separou as 5 flores mostradas na figura e disse que iria presentear cada uma com uma dessas flores.








Carla escutou a seguinte conversa entre Bia e Ana:

— Bia disse: “Oi Ana, eu e Carla sabemos a cor de cada uma das flores que vamos ganhar, mas nem eu nem ela sabemos as quantidades de pétalas das flores que cada uma de nós irá ganhar”.

— Ana disse: “Eu sei a quantidade de pétalas da flor que vou ganhar, mas não sei a cor”.

A partir dessa conversa, Carla descobriu a flor que Ana vai ganhar. Qual é essa flor?

(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

Fonte: OBMEP, 2024.

A questão da prova de 2025 não consta oficialmente no site da OBMEP e, portanto, não aparece como figura. Esta questão está presente nas provas de todos os três níveis. O problema em si é claramente do tipo “Mentira”, embora também de “Sequenciamento”, dada a relação das posições entre quem mente e quem fala a verdade. Note o uso dos conectivos “não” e “ou” entre as frases ditas pelas cinco pessoas. Está implícito no texto do enunciado que cada pessoa na fila “deve” dizer uma das frases citadas, pois não se aponta outra possibilidade (ou seja, se “necessariamente p”, então “não possivelmente não p”), portanto, essa questão envolve Lógica Modal.

Questão/2025: Um prêmio foi dado a uma de cinco pessoas, dispostas em fila. Cada uma delas disse uma das seguintes frases:

- * “Eu não ganhei o prêmio”;
- * “Quem ganhou o prêmio está na minha frente ou atrás de mim”.

Somente uma delas disse a verdade. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:

- (A) A pessoa que ganhou o prêmio foi a primeira ou a quinta.
- (B) Qualquer pessoa pode ter ganho o prêmio.
- (C) A terceira pessoa ganhou o prêmio.
- (D) É possível que três pessoas tenham dito “Eu não ganhei o prêmio”.
- (E) A pessoa que ganhou o prêmio foi a segunda ou a quarta.