Abraão Moisés Matos Gama

O Ensino de Números Binários na Educação Básica através de Jogos

Vitória

2025

Abraão Moisés Matos Gama

O Ensino de Números Binários na Educação Básica através de Jogos

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Orientador: Profa. Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo

Vitória
2025

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Gama, Abraão Moisés Matos, 1996-
G184e O ensino de números binários na educação básica através de jogos / Abraão Moisés Matos Gama. - 2025.
62 p. : il.

Orientadora: Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Sistema binário (Matemática). I. Ccoyllo, Rosa Elvira Quispe. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“O Ensino de Números Binários na Educação Básica através de Jogos”

Abraão Moisés Matos Gama

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 28/08/2025 por:

Profa. Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo
Orientadora – UFES

Profa. Dra. Tiane Marcarini Pinto
Examinador interno – UFES

Profa. Dra. Maria Clara Schuwartz Ferreira Caliman
Examinador externo – IFES

Datas e horários baseados em Brasília, Brasil
Sincronizado com o NTP.br e Observatório Nacional (ON) em 29/08/2025 às 18:44:23

folha_de_assinaturas_abraao_moises_matos_gama

Data e Hora de Criação: 27/08/2025 às 10:58:34

Documentos que originaram esse envelope:
- folha_de_assinaturas_abraao_moises_matos_gama.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 027038dfdcce830a80cda749d796e73a7015c1faefb112d72b9454d010723de8
[SHA512]: ee2e46047cbb7ace178a787e912b4881aa61335b1b1438661383c037f5943982c70d5cb534712181669412181d04f260da534377d6d1279852f67268dead837a

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - Maria Clara Schuwartz Ferreira Caliman (mclarascferreira@gmail.com)
Data/Hora: 28/08/2025 - 17:28:05, IP: 138.99.33.41, Geolocalização: [-20.281982, -40.301388]
[SHA256]: 09ce349d981c76f961e704d4552541a5fe8f0f6645c2d96d4e91b031309e1dde
Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

ASSINADO - Rosa Elvira Quispe Ccoyllo (rosa.ccoyllo@ufes.br)
Data/Hora: 28/08/2025 - 19:38:12, IP: 200.137.65.103
[SHA256]: 51d220d0bfb468c987a5c59242b69b6febc545b7a1a368cc4634c372cf1ddaa1
Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

ASSINADO - Tiane Marcarini Pinto (tiane.pinto@ufes.br)
Data/Hora: 29/08/2025 - 18:44:23, IP: 179.102.129.101
[SHA256]: 9ff98d6f5026ff721e869abfc4ac28a763f09344b101e548b1125326615bb3ba
Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

Histórico de eventos registrados neste envelope

29/08/2025 18:44:23 - Envelope finalizado por tiane.pinto@ufes.br, IP 179.102.129.101
29/08/2025 18:44:23 - Assinatura realizada por tiane.pinto@ufes.br, IP 179.102.129.101
29/08/2025 18:44:16 - Envelope visualizado por tiane.pinto@ufes.br, IP 179.102.129.101
28/08/2025 19:38:12 - Assinatura realizada por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.103
28/08/2025 19:37:57 - Envelope visualizado por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.103
28/08/2025 17:28:05 - Assinatura realizada por mclarascferreira@gmail.com, IP 138.99.33.41
28/08/2025 17:27:41 - Envelope visualizado por mclarascferreira@gmail.com, IP 138.99.33.41
28/08/2025 07:00:21 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br
28/08/2025 07:00:20 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br
27/08/2025 10:58:35 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.109

Agradecimentos

Tenho plena convicção de que não chegaria onde estou hoje sem o apoio de pessoas essenciais em minha vida. Para mim não há sentido em conquistas acadêmicas sem ter com quem celebrar o privilégio que é o “saber”. Sou grato primeiramente a Deus por me proporcionar a dádiva de estar rodeado de pessoas que me amam e tanto bem me querem.

Quero agradecer de todo o meu coração ao meu marido Nailton Domingos Cabral, que em nenhum momento me deixou desistir e me incentivou a realizar este trabalho apesar de todas as dificuldades. Se hoje sou mestre é porque você pegou bastante no meu pé e me fez enxergar em mim o meu potencial, por tanto tempo escondido até de mim mesmo. Te amo pra sempre.

Agradeço à minha querida sogrinha Ana Maria, que com seu jeitinho simples de ser sempre me apoiou e se orgulhou de cada pequena conquista minha. Tia Maria, tio Manel, Carlin, vocês são muito especiais para mim. Obrigado por serem minha família.

Agradeço aos meus pais que têm para si o mérito de sempre terem investido na minha educação. Muito obrigado por todos os anos que fizeram o possível e o impossível para que eu tivesse acesso à uma educação de qualidade. Sem vocês não seria o profissional que sou hoje. Agradeço também ao meu irmão Pedro pela amizade e companheirismo de sempre.

Agradeço também aos meus queridos amigos professores que me proporcionaram momentos de diversão, mas também de reflexão a respeito da grande responsabilidade que é o lecionar. Vocês são, para mim, exemplos de professores que vão além do mero saber, mas sim vivenciar uma educação plena e humanizada.

Agradeço à minha orientadora Prof. Dr. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo, que para mim, é um exemplo de força e resiliência. Ser a única mulher do programa é mais do que mera estatística, é um símbolo de resistência e empoderamento. Muito obrigado por cada conselho e cada orientação, você foi fundamental para que este trabalho fosse concluído.

Agradeço à UFES e a todos os professores por me proporcionarem este curso, do qual levarei para a minha vida inteira muitos ensinamentos.

Agradeço à turminha do 8º ano do Colégio Integral Cenecista de Resplendor, que tão gentilmente aceitou participar da aplicação da minha atividade prática. Vocês são excelentes, tenho orgulho de ser professor de vocês!

E gostaria também de agradecer a todos os motoristas da viação Águia Branca, cujos nomes eu não sei, mas que são responsáveis por me trazer em segurança todas as quintas-feiras para a faculdade. Vocês também são heróis por detrás da cortina.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é conceituar o Sistema de Numeração Binário, bem como apresentar estratégias de metodologias ativas na forma de jogos para a aplicação deste conteúdo na sala de aula da educação básica. Esta pesquisa é fundamentada na revisão bibliográfica de livros e artigos publicados, bem como na própria vivência docente do autor. Serão elencadas aplicações práticas dos números binários em situações do cotidiano e, ao final do trabalho, serão apresentados os resultados da aplicação dos jogos em sala de aula, bem como uma reflexão a respeito destes resultados.

Palavras-chave: números binários, sistemas de numeração, gamificação

Abstract

The main goal of this work is to conceptualize the Binary Number System, as well as present active methodology strategies, in the form of games, for the enforcement of this content in the basic education's classroom. This research will be substantiated in literature review of published books and articles, as well as the author's own teaching experience. Practical applications of the binary numbers in everyday situations will be cast and, by the end of the work, the results of the games' enforcement in the classroom are going to be presented, as well as an observation of these results.

Keywords: binary numbers, number systems, gamification

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

No exercício efetivo da função de professor de Matemática na educação básica, não são raras as ocasiões em que nos deparamos com alunos levantando a seguinte questão: "para que serve a Matemática?". Embora para alguns professores essa pergunta possa ser motivo de desconforto, é importante que nós, docentes, tenhamos conhecimento da aplicabilidade dos temas trabalhados na educação básica em situações do nosso cotidiano.

Assuntos como a Matemática Financeira ou Geometria são mais facilmente assimilados pelos alunos já que a sua conexão com o mundo real é naturalmente perceptível. Já alguns temas como a Álgebra são de mais difícil compreensão por parte dos discentes por se tratar de algo mais abstrato, embora seja também uma área dotada de aplicações práticas.

Um dos temas pouco trabalhados na educação básica é o sistema de numeração binário. Embora pareça ser um tema de difícil compreensão, os números binários desempenham um papel fundamental na base da computação e da eletrônica digital. Eles são uma representação numérica composta por apenas dois dígitos, 0 e 1, e formam a espinha dorsal de todos os sistemas digitais modernos. Compreender os números binários é crucial para quem deseja explorar os meandros da tecnologia digital, programação, engenharia de hardware e muitas outras áreas relacionadas.

Os jogos desempenham um papel valioso no ensino da matemática, proporcionando uma abordagem envolvente e eficaz para o aprendizado. Eles oferecem diversos benefícios que vão além da simples memorização de fórmulas e conceitos. Jogos tornam a matemática mais envolvente e divertida, promovem a aprendizagem ativa e incentivam a utilização do raciocínio lógico e habilidades matemáticas.

Ao analisar as dissertações do PROFMAT foi possível observar a ausência de propostas lúdicas voltadas à abordagem dos números binários na educação básica. Ao introduzir estes conceitos com a utilização dos jogos e atividades que estimulem a ludicidade, espera-se que o aluno consiga visualizar com mais clareza a teoria estudada e suas aplicações em outras áreas.

A metodologia utilizada para a realização deste trabalho foi de revisão bibliográfica de artigos, dissertações do programa PROFMAT, livros e monografias, além da proposição e implementação em sala de aula de atividades lúdicas referentes ao tema em estudo. O Texto está dividido em seis capítulos: após esta introdução, no segundo capítulo são apresentados dados históricos dos sistemas de numeração, a estrutura do sistema de numeração binário, bem como suas operações básicas; no terceiro capítulo, impactos dos números binários nas áreas de Matemática, Computação e suas Tecnologias; no quarto capítulo, o ensino dos números binários na educação Básica Brasileira de acordo com a proposta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e sua real implementação nas escolas; no quinto capítulo são propostas e executadas em sala de aula algumas atividades lúdicas envolvendo conceitos dos números binários e no sexto capítulo é apresentado a Conclusão Geral.

O objetivo geral deste estudo é fornecer um guia abrangente sobre números binários para o Ensino Básico, destinado a simplificar o entendimento e a aplicação desse sistema numérico, de modo que os leitores adquiram um conhecimento sólido e possam aplicá-lo em contextos práticos e educacionais. Com o intuito de atender a esse propósito geral, estabelecem-se os seguintes objetivos específicos:,

1. Explorar a base e a estrutura dos números binários, incluindo a relação com o sistema decimal.
2. Enumerar aplicações práticas dos números binários em campos como programação, eletrônica e criptografia.
3. Fornecer exemplos práticos e exercícios para consolidar o conhecimento adquirido.
4. Apresentar atividades lúdicas que possuam fundamentos do sistema de numeração binário.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Um Breve Histórico dos Sistemas de Numeração

Desde os primórdios da humanidade, a necessidade de contar levou à formalização de diversos mecanismos que pudessem atender a essa demanda. Por exemplo, os egípcios, por volta de 3.000 a.C., utilizavam um sistema numérico de base 10, onde cada potência de 10 possuía um símbolo específico para sua representação, símbolos estes que podemos ver na Figura 1. Já os romanos desenvolveram um sistema numérico criado na Roma Antiga há cerca de 2.000 anos, o qual utilizava as letras I, X, C e M para representar, também num sistema numérico de base 10, os valores de 10^0, 10^1, 10^2 e 10^3, além de V, L e D para 5, 50 e 500, respectivamente (EVES; DOMINGUES, 2011).

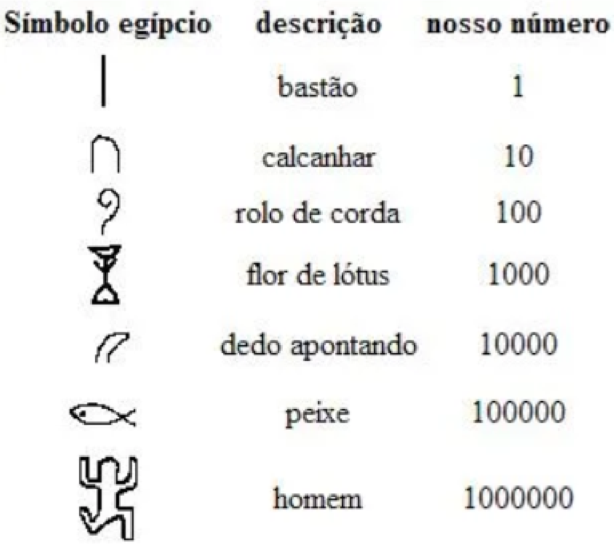

Figura 1 – Algarismos Egípcios. Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-egipcios.htm

Um outro exemplo seria o sistema sexagesimal, que é o sistema de numeração que utiliza como base o número 60. Embora seu surgimento seja incerto, para Eves e Domingues (2011), "os babilônios antigos desenvolveram, em algum momento entre 3000 e 2000 a.C., um sistema sexagesimal que empregava o princípio posicional". Por ser um sistema de alta complexidade, não obteve grande adesão. Imagine, por exemplo, a confusão em uma sala de aula em que os alunos tivessem uma tabuada de $59 \cdot 59$. Apesar disso, ainda nos restam hoje o minuto e o segundo, utilizados tanto como medidas de tempo e de ângulos, que são herdados desse sistema.

Já os maias, por volta dos séculos III ou IV a.C., na América Central, adotavam o sistema de base 20. Alguns estudiosos relacionam esse fato ao costume de contar usando os dedos das mãos e dos pés. Uma característica central da matemática dos maias era que, embora divididos em classes, eram extremamente ligados ao calendário com a finalidade de controlar os ciclos de cultivo e colheita, a tributação, rituais e etc. (IFRAH, 1947)

O sistema de numeração que utilizamos atualmente é o sistema de numeração indo-arábico. Este nome se deve aos hindus, aos quais é atribuida a invenção, e também aos árabes, que foram os responsáveis pela sua difusão na Europa Ocidental. Segundo Eves e Domingues (2011),

> Os mais antigos exemplos de nossos atuais símbolos numéricos encontram-se em algumas colunas de pedra erigidas na Índia por volta do ano 250 a.C. pelo rei Açoka. Outros exemplos primitivos na Índia, se corretamente interpretados, encontram-se em registros talhados por volta do ano 100 a.C. nas paredes de uma caverna numa colina perto de Poona e em algumas inscrições por volta do ano 200 d.C., gravadas nas cavernas de Nasik.

2.2 Sistemas de Numeração Posicionais

Ao longo da história, os números naturais foram representados de inúmeras maneiras. Hoje, a maneira utilizada é a representação decimal posicional.

> Apesar das evidências [na Babilônia e no Antigo Egipto] não permitirem um conhecimento linear dos registros numéricos, pode-se conjecturar que o sistema evoluiu de um estágio no qual um único contador era impresso várias vezes a uma fase mais econômica, na qual era possível diminuir a quantidade de impressões dos contadores de tamanhos e formas diferentes. Esta é a essência do sistema posicional: um mesmo símbolo serve para representar diferentes números, dependendo da posição que ocupa na escrita. Este é o caso do símbolo em forma de cunha, que serve para 1, 60 e 3600. Uma simplificação análoga é usada em nosso sistema de numeração, no qual o símbolo 1 também serve para representar os números 10 e 100. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012)

Esse sistema deriva do sistema sexagimal, desenvolvido na Índia e na China e utilizado pelos babilônios há cerca de 1700 anos a.C. Neste sistema, todo número natural pode ser escrito utilizando os combinações dos algarismos

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

> Uma grande vantagem dos sistemas posicionais, que é utilizada em nosso sistema decimal, é que os mesmos símbolos são suficientes para escrever qualquer número, inteiro ou fracionário. Os chamados “algarismos”, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, nos permitem escrever qualquer número (...) Os egípcios, os gregos e os romanos, por exemplo, não adotavam sistemas posicionais. Seus sistemas eram “aditivos”, isto é, somavam-se os valores de cada símbolo usado na representação de um número para se ter este número (o sistema romano era aditivo-subtrativo, com uma regra que especificava quando somar e quando subtrair valores). Outra grande vantagem de um sistema posicional, como o nosso, é que neles é possível

> desenvolver algoritmos eficientes para realizar operações. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012)

O nome decimal deriva do fato de serem dez os algarismos utilizados para representar os números. Chamamos também o sistema de posicional porque cada algarismo possui um peso específico de acordo com sua posição dentro da sequência dos algarismos. (HEFEZ, 2015)

No sistema decimal, o peso utilizado é uma potência de 10 e varia da seguinte forma: o algarismo da direita tem peso $10^0 = 1$; o que se encontra à sua esquerda tem peso $10^1 = 10$; o próximo tem peso $10^2 = 100$, e assim sucessivamente. É curioso o fato de que usarmos um sistema decimal, isto é, de base 10, se deve basicamente ao fato de possuírmos dez dedos nas mãos. Segundo Ifrah (1947), a mão é a primeira máquina de contar a que temos acesso.

Este peso é o que conhecemos como base do sistema numérico. Segundo Domingues (1991), o conceito de base pode ser compreendido da seguinte forma: seleciona-se um número natural $b > 1$ como base. A partir daí, tem-se que a cada b unidades de primeira ordem tem-se uma unidade de segunda ordem; a cada b unidades de segunda ordem tem-se uma unidade de terceira ordem, e assim sucessivamente. Por exemplo, sabemos que uma dezena é composta por dez unidades, uma centena é composta por dez dezenas, e assim por diante.

No sistema de numeração posicional decimal, SNPD, que é o que utilizamos, todo número n pode ser escrito na forma do polinômio (HEFEZ, 2016):

$$n = a_r \cdot 10^r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \tag{2.1}$$

onde $r \geqslant 0$ e os $a_i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, para $i = 1, 2, ..., r$, estão univocamente determinados. O numeral representado por n é escrito da seguinte forma:

$$a_r a_{r-1} ... a_1 a_0 \tag{2.2}$$

Exemplo 2.2.1. *O número* 2375 *pode ser escrito da seguinte maneira:*

$$2375 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5$$

Porém, conforme mostra o teorema a seguir, essa regra não se limita apenas à base 10:

Teorema 2.2.2. *Seja b um número inteiro maior que 1 e seja $M = \{0, 1, 2, ..., b-1\}$. Então todo número inteiro $n \geqslant 0$ pode ser representado univocamente da seguinte maneira:*

$$n = a_r \cdot b^r + a_{r-1} \cdot b^{r-1} + ... + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \tag{2.3}$$

onde $r \geqslant 0,\ a_i \in M;\ \ i = 1, 2, ..., r.$

Demonstração. 1. A existência será provada por indução sobre $n \in \mathbb{N}$. Se $n < b$, então $n \in M$ e $n = n$ é a representação pretendida. Agora, se $n \geqslant b$, admitamos como hipótese (indutiva) que para todo m, $1 \leqslant m < n$, essa representação seja possível. Aplicando o Algoritmo da Divisão Euclidiana (HEFEZ, 2016), para n e b obtém-se q, a_o, inteiros, tal que:

$$n = bq + a_0;\ \ a_0 \in M \tag{2.4}$$

Note-se que não pode ocorrer $q \geqslant n$. De fato, como $b > 1$, então $bq > q$ e essa hipótese levaria a, $bq > q \geqslant n$ e portanto, $n = bq + a_0 \geqslant bq > n$, o que é uma contradição. Logo, $1 \leqslant q < n$ e pela hipótese de indução existem $r \geqslant 0$ e $a_1, a_2, ..., a_{r-1}$, tal que:

$$q = a_r b^{r-1} + ... + a_2 b + a_1;\ \ a_i \in M, a_r \neq 0 \tag{2.5}$$

Consequentemente,

$$n = b(a_r b^{r-1} + ... + a_2 b + a_1) + a_0 = a_r b^r + ... + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 \tag{2.6}$$

Sendo satisfeita a hipótese do Príncipio de Indução Completa (HEFEZ, 2016), concluímos a existência de representação na base b de todo número inteiro, $n \geqslant 0$.

2. A unicidade também será provada por indução sobre $n \in \mathbb{N}$. Primeiramente para $n < b$ a unicidade é trivial. Agora para $n \geqslant b$, suponhamos que a unicidade se verifique para todo m, $1 \leqslant m < n$ (hipótese indutiva) e suponhamos ainda que:

$$n = a_0 + a_1 b + ... + a_r b^r = a'_1 b + ... + a'_s b^s \tag{2.7}$$

onde, $a_0, a_1, ..., a_s, a'_0, a'_1, ..., a'_s \in M$. Então:

$$n = b(a_1 + a_2 b + ... + a_r b^{r-1}) + a_0 = b(a'_1 + a'_2 b + ... + a'_s b^{s-1}) + a'_0 \tag{2.8}$$

Como $b > a_0$ e $b > a'_0$, o Algoritmo da Divisão Euclidiana garante que o resto e o quociente da divisão de n por b, são únicos, isto é, $a_0 = a'_0$ e $a_1 + a_2 b + ... + a_r b^{r-1} = a'_1 + a'_2 b + ... + a'_s b^{s-1} = q$. Como $q < n$, então, pela hipótese de indução, $r - 1 = s - 1$, $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2$, ..., $a_r = a'_r$, concluindo que, $r = s$ e $a_0 = a'_0, a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2$, ..., $a_r = a'_r$.

□

2.3 O Sistema de Numeração Binário

De acordo com o Teorema 2.2.2, todo número inteiro $n \geqslant 0$, pode ser representado no sistema de numeração binária, isto é, todo n pode ser representado da seguinte maneira

$$n = a_r \cdot 2^r + a_{r-1} \cdot 2^{r-1} + ... + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \tag{2.9}$$

onde $r \geqslant 0$ e $a_i \in M = \{0, 1\}$, para $i = 0, 1, ..., r$.

Por se tratar de um sistema de numeração de base 2, para a representação de todos os números inteiros são utilizados apenas dois algarismos: o zero e o um. Neste trabalho manteremos como foco apenas a representação dos números positivos.

Segundo Gomes (2021), determinar a expansão de um número qualquer a com relação à base b, consiste em aplicar a divisão euclidiana sucessivamente, como segue:

$$\begin{array}{rcll} a & = & q_0 \cdot b + r_0 & \text{com} \quad r_0 < b \\ q_0 & = & q_1 \cdot b + r_1 & \text{com} \quad r_1 < b \\ q_1 & = & q_1 \cdot b + r_2 & \text{com} \quad r_2 < b \end{array}$$

e assim sucessivamente.

Como $a > q_0 > q_1 > ..$, em um certo momento teremos que $q_{n-1} < b$ e, assim, de $q_{n-1} = b \cdot q_n + r_n$ com $r_n < b$, decorre que $q_n = 0$, o que implica $0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = ...$, e portanto, $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = ...$

Logo, teremos

$$a = r_n \cdot b^n + r_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + r_1 \cdot b + r_0$$

e o número a será representado pela sequência

$$r_0 r_1 r_2 r_3 ... r_{n-1} r_n$$

e escrito da forma:

$$(r_n r_{n-1} r_{n-2} ... r_2 r_1 r_0)_b$$

Assim sendo, para realizar a expansão de um número escrito na base 10 para a base 2, devemos efetuar a divisão inteira desse número por 2, "guardar" o resto, pegar o novo quociente e dividir novamente por 2, repetindo esse processo até que o quociente obtido seja 0. Ao final da última divisão, a representação binária deste número será formada pelos restos, de trás para frente, de todas as divisões efetuadas. (GOMES, 2021)

Exemplo 2.3.1. *Efetuar a conversão do número* $(75)_{10}$ *para a base* 2.

Utilizando o algoritmo da divisão euclidiana:

$$\begin{aligned}
75 &= 37 \cdot 2 + 1 \\
37 &= 18 \cdot 2 + 1 \\
18 &= 9 \cdot 2 + 0 \\
9 &= 4 \cdot 2 + 1 \\
4 &= 2 \cdot 2 + 0 \\
2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\
1 &= 0 \cdot 2 + 1
\end{aligned}$$

Coletando os restos encontrados, do último ao primeiro, temos,

$$(75)_{10} = (1001011)_2$$

Ou, simplesmente,

$$75 = (1001011)_2$$

Para fazer a conversão no sentido contrário, ou seja, de base 2 para base 10, basta lançar mão do exposto no Teorema 2.2.2.

Exemplo 2.3.2. *Efetuar a conversão do número* $(1001011)_2$ *para base* 10*.*

De acordo com o Teorema 2.2.2, temos que:

$$\begin{aligned}
(1001011)_2 &= 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \\
&= 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \\
&= 64 + 8 + 2 + 1 \\
&= 75
\end{aligned}$$

Logo,

$$(1001011)_2 = (75)_{10}$$

Ou simplesmente,

$$(1001011)_2 = 75$$

2.4 Operações Básicas no Sistema Binário

Nesta seção, iremos ver de forma bem resumida as operações aritméticas básicas no sistema de numeração binário. Segundo Martines (2019), as regras que regem as operações aritméticas em um sistema de numeração posicional de base b são análogas às utilizadas no sistema de base 10.

Sendo a aplicação deste trabalho restrita aos números inteiros não negativos, logo, para as operações de adição e multiplicação definidas nos números naturais $\mathbb{N} =$

$\{0, 1, 2, 3, ...\}$, são satisfeitas as seguintes propriedades (HEFEZ, 2006), para quaisquer a, b, c em $\mathbb{N}$:

(i) Comutatividade: $a + b = b + a \quad \text{e} \quad a \cdot b = b \cdot a$

(ii) Asociatividade: $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{e} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(iii) Distribuitividade da multiplicação com respeito à adição: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

(iv) Existência do 0, neutro aditivo e do 1, neutro multiplicativo tal que: $a + 0 = a \quad \text{e}$ $a \cdot 1 = a$

2.4.1 Adição

Sabe-se que a adição possui o mesmo fundamento seja qual for o sistema de numeração: unir quantidades. Porém, realizar adições com os mesmos algarismos mas com bases diferentes resultará em somas diferentes. Por exemplo, $5 + 4 = 9$ na base dez, mas na base oito, $(5)_8 + (4)_8 = (11)_8$. No sistema de numeração decimal, no qual temos **dez** algarismos, sabe-se que é possível representar com apenas um deles todas as quantidades até o número nove, e para uma quantidade maior que isso é necessário lançar mão de uma ordem superior. No sistema binário são utilizados apenas dois algarismos, logo o número 10, que seria o resultado da operação $1 + 1$, representa uma unidade da ordem seguinte.

Exemplo 2.4.1. *Adicionar* $(11011)_2$ *a* $(10010)_2$

Temos que:

$$(11011)_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \tag{2.10}$$

e

$$(10010)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \tag{2.11}$$

Adicionando 2.10 e 2.11, membro a membro, temos:

$$\begin{aligned}
(11011)_2 + (10010)_2 &= (1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1) + (1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + \\
&\quad 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0) \\
&= (1 + 1) \cdot 2^4 + (1 + 0) \cdot 2^3 + (0 + 0) \cdot 2^2 + (1 + 1) \cdot 2^1 + \\
&\quad (1 + 0) \\
&= 2 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^1 + 1 \\
&= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \\
&= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + (0 + 1) \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \\
&= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \\
&= (101101)_2
\end{aligned}$$

Essa mesma adição pode ser feita utilizando o algoritmo básico da adição que aprendemos na escola. Para os algarismos 0 e 1 do Sistema Binário, existem apenas quatro possibilidades de adição:

$$\begin{aligned} 0+0 &= 0 \\ 0+1 &= 1 \\ 1+0 &= 1 \\ 1+1 &= 10 \end{aligned}$$

Neste último caso, basta lembrar sempre de que a soma $1 + 1 = 10$ de uma determinada ordem, resulta em 1 unidade a mais na ordem imediata superior.

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & \Lsh & & 1 & \Lsh & \\ & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ + & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

2.4.2 Subtração

Como este trabalho manterá foco apenas nos números binários positivos, apenas iremos efetuar subtrações nas quais o minuendo é maior que o subtraendo.

Exemplo 2.4.2. *Efetuar a diferença entre* $(101001)_2$ *e* $(100010)_2$

Temos que:

$$(101001)_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \tag{2.12}$$

e

$$(100010)_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \tag{2.13}$$

Subtraindo 2.12 e 2.13 membro a membro, nesta ordem, temos:

$$
\begin{aligned}
(101001)_2 - (100010)_2 &= (1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1) - (1 \cdot 2^5 + \\
&\quad 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0) \\
&= (1-1) \cdot 2^5 + (0-0) \cdot 2^4 + (1-0) \cdot 2^3 + (0-0) \cdot 2^2 + \\
&\quad (0-1) \cdot 2^1 + (1-0) \\
&= 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + (-1) \cdot 2^1 + 1 \\
&= 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^2 + (-1) \cdot 2^1 + 1 \\
&= 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + (2+0) \cdot 2^2 + (-1) \cdot 2^1 + 1 \\
&= 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + (-1) \cdot 2^1 + 1 \\
&= 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2 + (-1) \cdot 2^1 + 1 \\
&= 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^1 + (-1) \cdot 2^1 + 1 \\
&= 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + (2-1) \cdot 2^1 + 1 \\
&= 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \\
&= (111)_2
\end{aligned}
$$

De maneira análoga ao algoritmo da subtração que é aplicado no sistema decimal, quando for necessário efetuar uma subtração que não está definida para os números naturais, a saber, $0 - 1$, então é preciso "pegar emprestado" na casa à esquerda mais próxima na qual o dígito for 1. Assim sendo, temos quatro possibilidades de subtração nos algarismos 0 e 1 do Sistema Binário:

$$
\begin{aligned}
0 - 0 &= 0 \\
1 - 0 &= 1 \\
1 - 1 &= 0 \\
10 - 1 &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 0 & \cancel{10} & 10 & \\
 & 1 & 0 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & 1 \\
- & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

2.4.3 Multiplicação

Para a multiplicação também é possível utilizar o algoritmo utilizado para os números decimais, ou seja, da direita para a esquerda, e cada algarismo do segundo fator multiplica cada algarismo do primeiro fator. Existem quatro possibilidades de multiplicação nos binários:

$$\begin{aligned} 0.0 &= 0 \\ 0.1 &= 0 \\ 1.0 &= 0 \\ 1.1 &= 1 \end{aligned}$$

Exemplo 2.4.3. *Efetuar o produto entre* $(11011)_2$ *e* $(110)_2$

Temos que:

$$(11011)_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1 \tag{2.14}$$

e

$$(110)_2 = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0 \tag{2.15}$$

Multiplicando 2.14 e 2.15 membro a membro, temos:

$$\begin{aligned}
(11011)_2\cdot(110)_2 &= (1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1)\cdot(1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0) \\
&= (1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1)\cdot 2^2 + (1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + \\
&\quad 1\cdot 2^1 + 1)\cdot 2^1 + (1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1)\cdot 0 \\
&= (1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1)\cdot 2^2 + (1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + \\
&\quad 1\cdot 2^1 + 1)\cdot 2^1 \\
&= (1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2) + (1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + \\
&\quad 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1) \\
&= 1\cdot 2^6 + (1+1)\cdot 2^5 + (0+1)\cdot 2^4 + (1+0)\cdot 2^3 + (1+1)\cdot 2^2 + \\
&\quad 1\cdot 2^1 \\
&= 1\cdot 2^6 + 2\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 \\
&= 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^1 \\
&= (1+1)\cdot 2^6 + 1\cdot 2^4 + (1+1)\cdot 2^3 + 1\cdot 2^1 \\
&= 2\cdot 2^6 + 1\cdot 2^4 + 2\cdot 2^3 + 1\cdot 2^1 \\
&= 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^1 \\
&= 1\cdot 2^7 + (1+1)\cdot 2^4 + 1\cdot 2^1 \\
&= 1\cdot 2^7 + 2\cdot 2^4 + 1\cdot 2^1 \\
&= 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^1 \\
&= 1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0 \\
&= (10100010)_2
\end{aligned}$$

E utilizando o algoritmo da multiplicação:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & \times & & 1 & 1 & 0 \\
\cline{4-8}
 & & & {}^{\color{red}1}0 & {}^{\color{red}1}0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & {}^{\color{red}1}1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
{\color{blue}+} & {}^{\color{red}1}1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

2.4.4 Divisão

O algoritmo da divisão euclidiana também funciona para números binários. Do dividendo, separa-se a parte que for maior ou igual ao divisor e inicia-se a divisão, multiplicando o quociente obtido pelo divisor e, em seguida, subtraindo este produto da parte escolhida do dividendo. Este processo é repetido sucessivamente até que não seja mais possível dividir. Como estamos tratando apenas de números inteiros positivos, apenas será abordada a divisão inteira, podendo ter resto igual a ou diferente de zero, mas sem parte racional.

Exemplo 2.4.4. *Efetuar o quociente entre* $(1101110)_2$ *e* $(101)_2$

Utilizando o algoritmo da divisão euclidiana, temos:

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
 & 1 & \overset{\color{red}0}{\cancel{1}} & \overset{\color{red}10}{\cancel{0}} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\ 0\ 1 \\
\cline{9-9}
{\color{blue}-} & 1 & 0 & 1 & & & & & 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \\
\cline{2-4}
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & {\color{blue}-} & 1 & 0 & 1 & & & \\
\cline{4-6}
 & & & 0 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & & & {\color{blue}-} & 1 & 0 & 1 & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 & 0 &
\end{array}
$$

3 Impacto dos números binários nas áreas de Matemática, Computação e suas tecnologias

Os números binários desempenham um papel central no avanço da computação e da tecnologia da informação, sendo a base para a representação, processamento e armazenamento de dados digitais. Esse sistema, baseado em dois estados distintos, 0 e 1, oferece simplicidade estrutural e eficiência operacional, características indispensáveis para o desenvolvimento de dispositivos computacionais modernos.

Para Vieira (2000), a lógica binária é essencial para o funcionamento de redes de computadores, possibilitando a codificação e transmissão de dados de forma segura e eficiente, o que evidencia sua relevância em um cenário global cada vez mais interconectado. O uso de números binários em redes de computadores permite a troca de informações entre dispositivos de maneira confiável e organizada. A eficiência dos números binários em redes de comunicação reforça sua importância para o desenvolvimento de tecnologias baseadas em conectividade, como a Internet das Coisas (IoT) e as redes 5G. Outro impacto significativo dos números binários está na segurança digital, especialmente em criptografia, que utiliza operações binárias para proteger informações sensíveis.

> "A segurança digital depende fortemente do tratamento e da proteção das informações em seu formato mais elementar: o código binário. É nesse nível fundamental que dados são criptografados, transmitidos e armazenados, tornando o domínio dos sistemas binários essencial para garantir a integridade e a confidencialidade das informações." — (Adaptado de (STALLINGS, 2016))

Conforme Salviato (2018), algoritmos criptográficos, como AES (Advanced Encryption Standard) e RSA (Rivest-Shamir-Adleman), dependem de cálculos binários complexos para codificar dados, garantindo que apenas usuários autorizados possam acessá-los. A aplicação de sistemas como esse é fundamental em setores como comércio eletrônico, onde a proteção de transações financeiras e dados pessoais é uma prioridade. A combinação entre lógica binária e algoritmos avançados demonstra a interseção entre matemática, computação e segurança cibernética. Além disso, os números binários são essenciais para a inteligência artificial (IA), onde são utilizados para processar grandes volumes de dados e executar cálculos complexos em alta velocidade. De acordo com Santos e Oliveira (2016), redes neurais artificiais, um dos pilares da IA, operam com representações binárias para realizar análises e tomar decisões. Essa aplicação tem permitido avanços em áreas como reconhecimento de voz, visão computacional e aprendizado de máquina, destacando o impacto do sistema binário no desenvolvimento de tecnologias inovadoras que transformam diversos setores econômicos e sociais.

Área de Aplicação	**Como as Redes neurais usam Representações binárias**	**Exemplos de Avanços e/ou Impactos**	**Referência Acadêmica**
Reconhecimento de Voz	Sinais de áudio são convertidos em dados binários e processados por redes neurais para identificar padrões vocais.	Assistentes virtuais (Siri, Alexa), legendas automáticas.	Hinton et al. (2012); Graves, Mohamed e Hinton (2013)
Visão Computacional	Imagens são convertidas em matrizes de pixels (valores binários/digitais) analisadas por redes convolucionais.	Reconhecimento facial, diagnóstico médico por imagem.	LeCun, Bengio e Hinton (2015); Krizhevsky, Sutskever e Hinton (2012)
Aprendizado de Máquina	Dados de entrada são representados em vetores binários para treinamento e inferência de modelos.	Previsão de tendências, recomendações personalizadas.	Goodfellow, Bengio e Courville (2016)
Setores Econômicos e Sociais	Processamento de grandes volumes de dados binários para automação e tomada de decisões.	Indústria 4.0, carros autônomos, análise de dados sociais.	Schmidhuber (2015); Silver et al. (2016)

Tabela 1 – Redes neurais e algumas áreas de aplicação. Fonte: O Autor

A influência dos números binários também se estende ao armazenamento de dados, onde eles possibilitam a criação de dispositivos capazes de armazenar grandes volumes de informações em um espaço reduzido. Segundo Grando (2000), tecnologias como discos rígidos e unidades de estado sólido utilizam combinações binárias para codificar e recuperar dados, garantindo eficiência e confiabilidade. A miniaturização e a evolução dessas tecnologias estão diretamente ligadas à otimização do sistema binário, que viabiliza o armazenamento de informações com alta densidade e custo acessível.

Na área de desenvolvimento de softwares, os números binários são utilizados para criar linguagens de programação que servem como intermediárias entre o hardware e os desenvolvedores. Para Steffenon e Guarnieri (2016), linguagens de baixo nível, como Assembly, permitem que programadores controlem diretamente o hardware, utilizando instruções binárias para realizar tarefas específicas. Essa capacidade de manipulação detalhada é essencial em sistemas embarcados e dispositivos com recursos limitados, demonstrando como o sistema binário possibilita a criação de soluções tecnológicas personalizadas.

O impacto dos números binários também pode ser observado na computação quântica, que utiliza conceitos binários para realizar operações em níveis subatômicos. Conforme Salviato (2018), a computação quântica combina estados binários tradicionais com superposições quânticas, permitindo a execução de cálculos exponencialmente mais rápidos do que os sistemas tradicionais. Essa abordagem representa uma evolução significativa na computação, com potencial para resolver problemas complexos em áreas como criptografia, modelagem molecular e previsão de padrões climáticos.

> "A análise de situações climáticas modernas depende fortemente do processamento digital de dados, onde informações atmosféricas complexas são convertidas em números binários para armazenamento, transmissão e modelagem computacional. Assim, os sistemas binários tornam-se essenciais para a previsão e o monitoramento do clima em escala global." (Adaptado de (LORENZ, 1993))

Os números binários ainda desempenham um papel crucial no design e fabricação de microprocessadores, que são os componentes centrais de dispositivos computacionais. Segundo Vieira (2000), microprocessadores modernos utilizam milhões de transistores que operam com estados binários para realizar cálculos e controlar operações. A eficiência desses componentes depende diretamente da capacidade do sistema binário de processar informações de maneira rápida e precisa, possibilitando avanços contínuos na performance de computadores, smartphones e dispositivos embarcados. Na computação em nuvem, os números binários são usados para gerenciar recursos de hardware e software em ambientes virtuais.

Por fim, o sistema binário continua a ser a base para inovações futuras em computação e tecnologia da informação. Conforme Bell, Fellows e Witten (2011), avanços em algoritmos, redes e dispositivos dependem da eficiência e versatilidade do sistema binário. A capacidade de representar informações de maneira simples e muitas vezes eficiente permite que novas tecnologias sejam desenvolvidas, expandindo ainda mais o impacto da computação na sociedade contemporânea. Essa interconexão entre números binários e progresso tecnológico demonstra como a lógica binária permanece central para o avanço da humanidade no século XXI.

4 O Ensino dos Números Binários na Educação Básica Brasileira

Apesar da relevância dos números binários para a tecnologia e a computação, sua presença na educação básica brasileira ainda é restrita e, muitas vezes, tratada de forma superficial. O ensino da matemática, de modo geral, enfrenta desafios históricos no país, especialmente quanto à motivação e ao engajamento dos estudantes.

> "A matemática, historicamente, tem sido vista por muitos alunos como uma disciplina árida e distante de sua realidade, o que contribui para a falta de motivação e o baixo engajamento. Superar esse desafio exige metodologias inovadoras e contextualizadas, que aproximem o conteúdo matemático do cotidiano dos estudantes." (FLORES, 2012)

Muitos alunos desenvolvem resistência à disciplina por não perceberem a conexão entre os conceitos matemáticos e o mundo real, o que dificulta a compreensão da aplicabilidade prática dos conteúdos. Soma-se a isso o predomínio de métodos tradicionais de ensino, nos quais o estudante assume um papel passivo, sendo mero reprodutor de procedimentos, sem espaço para a experimentação, a construção do conhecimento e o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Entre as fragilidades do ensino de matemática na educação básica, destaca-se a falta de dinamicidade nas aulas e a dificuldade dos professores em tornar o conteúdo mais significativo para os alunos. Muitas vezes, a formação docente não contempla abordagens alternativas ou recursos didáticos inovadores, o que limita a capacidade do professor de adaptar sua prática quando os alunos não compreendem o conteúdo em um primeiro momento. Por outro lado, é importante reconhecer o potencial dos professores que buscam constantemente se atualizar, dominando profundamente o conteúdo e buscando sempre saber além do que será lecionado, a fim de oferecer diferentes caminhos para a aprendizagem.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), implementada a partir de 2017, propõe uma abordagem transversal para os números binários, especialmente nos componentes de Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC). No entanto, esses conteúdos ainda não constituem um eixo sistematizado e obrigatório no currículo do Ensino Fundamental. Tal ausência dificulta a consolidação do tema, que acaba restrito a situações pontuais, muitas vezes desconectadas das demandas tecnológicas da sociedade contemporânea. A seguir, a Tabela 2 apresenta um quadro comparativo com algumas habilidades matemáticas propostas para o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio, evidenciando a ausência de uma abordagem estruturada sobre o sistema de numeração binário.

Nível de Ensino	**Habilidades Relacionadas**	**Exemplos de ligação com o Sistema de Numeração Binário**
Ensino Fundamental II	• Identificar e utilizar diferentes sistemas de numeração (decimal, romano, etc.) • Resolver problemas de contagem e representação de números em diferentes contextos.	Possibilidade de introduzir o sistema binário ao abordar diferentes sistemas de numeração; resolução de problemas que envolvam lógica e codificação simples.
Ensino Médio	• Compreender e aplicar conceitos de funções, lógica matemática e linguagens formais. • Utilizar conhecimentos matemáticos para resolver problemas em áreas como informática, eletrônica e robótica.	Consolidação do sistema binário em contextos de lógica, programação, eletrônica digital e algoritmos; aplicação prática em projetos interdisciplinares.

Tabela 2 – Quadro Comparativo: Habilidades Matemáticas - Ensino Fundamental II x Ensino Médio. Fonte: BNCC.

Ao analisar as habilidades propostas, nota-se que, no Ensino Fundamental II, há abertura para apresentar diferentes sistemas de numeração, mas o binário raramente é explorado de forma sistemática. No Ensino Médio, espera-se a consolidação de competências relacionadas à lógica e à resolução de problemas em áreas tecnológicas, mas, sem uma base sólida construída nos anos anteriores, muitos estudantes chegam ao Ensino Médio sem o domínio necessário para compreender o sistema binário e suas aplicações.

> "A ausência de uma formação matemática consistente nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental compromete significativamente o desenvolvimento de competências no Ensino Médio, especialmente aquelas relacionadas ao pensamento lógico, à resolução de problemas e à compreensão de sistemas numéricos como o sistema binário. Esse vácuo formativo impede que muitos estudantes desenvolvam habilidades essenciais para o mundo digital contemporâneo, como a compreensão de algoritmos, lógica computacional e estruturas de dados, limitando sua inserção em áreas tecnológicas e científicas." (LIMA; SILVA, 2019)

Isso gera um vácuo formativo, dificultando o desenvolvimento de competências essenciais para o mundo digital, como a compreensão de algoritmos, lógica computacional e estrutura de dados.

Na prática, o contato dos estudantes com o sistema binário ocorre, principalmente, no Ensino Médio, por meio de disciplinas eletivas, projetos de robótica, clubes de programação ou em itinerários formativos ligados à área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, conforme apresenta a tabela 3. Em cursos técnicos integrados ao Ensino Médio, como os ofertados pelos Institutos Federais, o ensino dos números binários é mais frequente, sobretudo em disciplinas de Lógica de Programação, Eletrônica Digital, Informática e Sistemas de Informação. Nesses contextos, os estudantes têm a oportunidade de compreender não apenas a conversão entre sistemas numéricos (decimal, binário, hexadecimal), mas também a aplicação prática dos números binários em circuitos, codificação de dados e programação de computadores.

Modalidade/ Contexto	**% de Escolas Ofertando**	**Exemplos de Disciplinas e/ou Atividades**	**Conteúdos Relacionados ao Sistema Binário**
Disciplinas Eletivas (Ensino Médio Regular)	18%	Programação, Robótica, Matemática Aplicada	Conversão de bases, lógica binária, aplicações simples
Projetos de Robótica/Clubes de Programação (Ensino Médio Regular)	12%	Oficinas, Feiras de Ciência, Olimpíadas	Codificação binária, circuitos digitais, lógica de portas
Itinerário Formativos - Ciências da Natureza e suas Tecnologias	22%	Trilhas de Computação, Tecnologia e Inovação	Algoritmos, sistemas numéricos, lógica computacional
Cursos Técnicos Integrados (Institutos Federais)	100%	Lógica de Programação, Eletrônica Digital	Conversão de bases, circuitos digitais, programação, redes
Cursos Técnicos Integrados (Outras Redes)	76%	Informática, Sistemas de Informação	Estrutura de dados, codificação, manipulação de bits

Tabela 3 – Contato dos estudantes com o sistema binário no Ensino Médio (2023). Fonte: MEC/INEP, Censo Escolar 2023; Relatórios dos Institutos Federais (2023).

Outro desafio significativo é a escassez de recursos bibliográficos e materiais didáticos sobre o sistema binário, especialmente voltados para a Educação Básica. Muitos professores relatam a inexistência de livros didáticos ou materiais complementares fornecidos pelo Estado que abordem o tema de maneira didática e contextualizada.

> "A carência de materiais didáticos e bibliográficos específicos sobre o sistema binário para a educação básica é um dos principais obstáculos enfrentados pelos professores. Grande parte dos livros didáticos não aborda o tema de forma aprofundada ou contextualizada, dificultando o trabalho docente e limitando as possibilidades de aprendizagem significativa por parte dos estudantes." (SILVA, 2022)

A ausência de materiais escritos dificulta tanto o planejamento das aulas quanto a aprendizagem dos alunos, limitando as possibilidades de experimentação e aprofundamento do conteúdo.

Tendo em vista essa demanda, pesquisadores da educação básica, organizações civis e o magistério dialogaram para uma nova grade que fosse efetiva e aplicável aos novos cenários envolvendo o ensino da Matemática e suas Tecnologias, conforme apresenta a tabela 4. Ela deixa de ser apenas uma disciplina isolada e passa a integrar uma área de conhecimento, podendo ser aprofundada de acordo com os interesses dos alunos nos itinerários formativos. Assim, valoriza a aplicação prática, a resolução de problemas do cotidiano, projetos e integração com outras áreas. O estudante tem mais autonomia para escolher parte dos conteúdos, tornando o ensino mais significativo e conectado ao seu projeto de vida.

Além disso, é importante destacar a questão do letramento digital dos alunos. Embora o acesso à internet e a dispositivos digitais tenha avançado, especialmente em regiões urbanas, o uso dessas tecnologias ainda é, em grande parte, restrito ao entretenimento, redes sociais e jogos. O domínio de ferramentas básicas, como o pacote Office, a navegação crítica na internet e o uso de softwares educacionais, permanece limitado para muitos estudantes – e, em alguns casos, também para professores, conforme apresenta a figura 2. Essa limitação acarreta um distanciamento entre a escola e as demandas do século XXI, dificultando a integração efetiva dos conteúdos matemáticos com as tecnologias digitais.

A falta de letramento digital também impacta diretamente o ensino de conteúdos como o sistema binário, que está intrinsecamente ligado ao funcionamento dos computadores e das linguagens de programação. Sem uma compreensão mínima sobre o funcionamento das máquinas e os princípios da computação, os alunos têm dificuldade em perceber a importância do sistema binário, o que compromete não apenas o aprendizado desse conteúdo específico, mas também sua inserção no universo digital de forma crítica e criativa.

Pesquisas educacionais, como as de Grando (2000) e Vieira (2000), apontam que a abordagem dos números binários na educação básica contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da compreensão de algoritmos e da iniciação à cultura digital. No entanto, desafios persistem quanto à formação de professores, à disponibilidade de materiais didáticos contextualizados e à integração efetiva do tema ao cotidiano escolar. Muitas vezes, o ensino do sistema binário é restrito a exercícios de conversão numérica, sem a

Aspecto	Matriz Antiga (Tradicional)	Nova Matriz (Novo Ensino Médio)
Estrutura Curricular	Disciplinas, com foco em Matemática.	Área de conhecimento: Matemática e suas Tecnologias.
Carga Horária	Média de 800h anuais, com cerca de 240h para Matemática.	1.800h para Formação Geral Básica (todas as áreas) + 1.200h para Itinerários Formativos (parte flexível).
Conteúdos	Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria, Estatística, Funções, Probabilidade, Matemática Financeira.	Conteúdos essenciais + aprofundamento em Itinerários Formativos integrando projetos, eletivas e temas contemporâneos.
Abordagem	Predominantemente teórica, fragmentada.	Interdisciplinar, contextualizada, com foco em resolução de problemas e aplicação prática.
Avaliação	Provas tradicionais, foco no conteúdo.	Avaliação diversificada: projetos, portfólios, autoavaliação, provas e atividades práticas.
Flexibilidade	Baixa: todos os alunos cursam os mesmos conteúdos.	Alta: parte do currículo é escolhida pelo aluno conforme seus interesses e projeto de vida.
Objetivo	Preparação para vestibulares e ENEM.	Desenvolvimento de competências e habilidades para vida, trabalho e cidadania, além do acesso ao ensino superior.

Tabela 4 – Ensino Médio Tradicional x Novo Ensino Médio. Fonte: Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Resolução CNE/CP nº 3/2018).

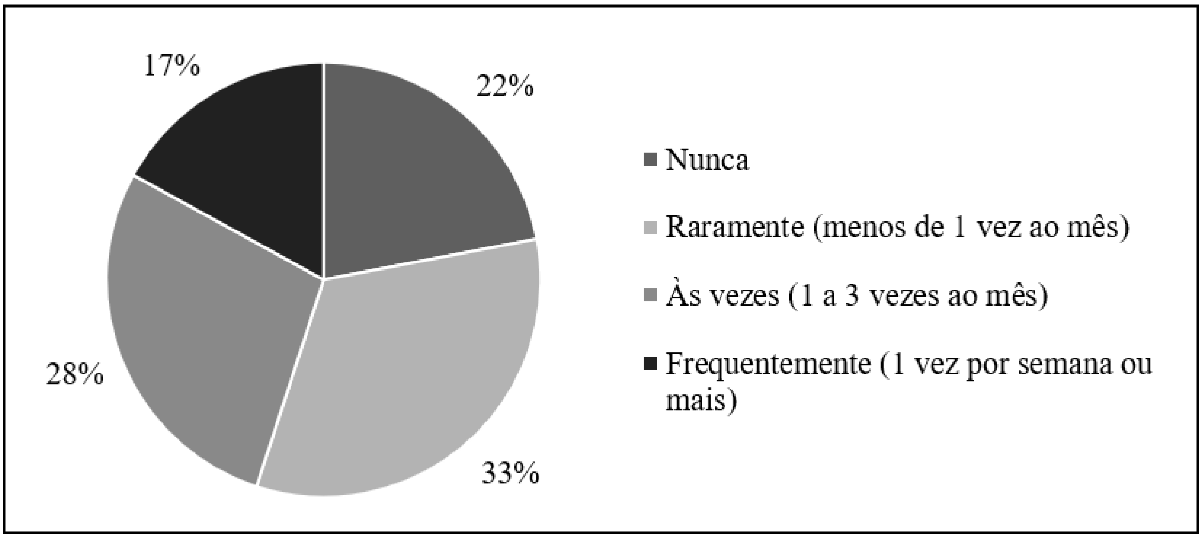

Figura 2 – Frequência do uso de recursos digitais para ensinar Matemática (Ensino Fundamental II. Fonte: TIC Educação 2022 - Cetic.br/NIC.br devida conexão com suas aplicações práticas e tecnológicas, o que pode limitar o interesse e a compreensão dos alunos.

A perspectiva de Vygotsky sobre o ensino da matemática ressalta a importância da linguagem e da leitura como ferramentas fundamentais para a formação do pensamento lógico e matemático. Segundo o autor, a aprendizagem "é um processo social, mediado pela linguagem, sendo essencial que os alunos desenvolvam a capacidade de interpretar problemas, compreender enunciados e aplicar conceitos em situações variadas". A leitura, nesse contexto, não se limita à decodificação de símbolos, mas envolve a construção de significados, a análise crítica e a resolução de situações-problema. (VYGOTSKY, 1934)

Muitos professores relatam que a maior dificuldade dos alunos em matemática está relacionada à interpretação dos problemas, e não ao cálculo em si. Houve uma queda contínua no desempenho médio em matemática nos últimos ciclos avaliados, indicando desafios importantes na consolidação das habilidades matemáticas ao final do Ensino Fundamental.

Ano	Proficiência Média
2015	265,3
2017	263,1
2019	258,6
2021	254,7

Tabela 5 – Proficiência Média em Matemática - 9º Ano (SAEB/Prova Brasil).

Não tão distante, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), através da análise das últimas edições, retrata que a nota média de Matemática e suas Tecnologias no ENEM oscilou pouco nos últimos anos, com um leve aumento em 2021, mas voltou a cair em 2022 e 2023, o que indica desafios persistentes na aprendizagem matemática no Ensino Médio.

Ano	Nota Média
2019	520,7
2020	520,9
2021	537,5
2022	523,9
2023	515,6

Tabela 6 – Notas Médias ENEM - Matemática e suas Tecnologias.

Isso evidencia a necessidade de trabalhar a leitura e a compreensão textual de forma integrada ao ensino da matemática. Apresentar aos alunos situações cotidianas onde seja possível aplicar os conteúdos aprendidos estimula o pensamento crítico, a criatividade e a autonomia intelectual, promovendo uma aprendizagem mais significativa e duradoura.

A articulação entre leitura, matemática e formação social/cotidiana da mente é fundamental para a construção de cidadãos críticos e capazes de atuar de forma consciente na sociedade. Ao promover a leitura de textos matemáticos, problemas contextualizados e desafios lógicos, o professor contribui para o desenvolvimento de habilidades cognitivas essenciais, como a análise, a síntese, a argumentação e a tomada de decisão. Essas competências são indispensáveis não apenas para o sucesso escolar, mas também para a vida em sociedade e para o exercício pleno da cidadania.

> "A matemática está em toda parte. Nas estrelas que brilham no céu, nas flores que enfeitam os jardins, nos mercados, nas estradas, nas casas. Tudo em nossa vida depende, de algum modo, dos números e dos cálculos." (TAHAN, 2001)

É importante ressaltar que a integração entre linguagem, matemática e tecnologia deve ser um objetivo central da educação básica, especialmente em um contexto marcado pela rápida evolução tecnológica e pela valorização do pensamento computacional. O ensino do sistema binário, quando contextualizado e articulado com as demandas do mundo contemporâneo, pode ser uma poderosa ferramenta para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia intelectual e da capacidade de resolver problemas complexos como foi provado durante essa pesquisa nas experimentações em sala de aula.

5 Jogos Envolvendo Números Binários

5.1 Por que utilizar jogos?

O uso de jogos na escola não é uma prática recente e já é amplamente reconhecido seu potencial para contribuir com o ensino e a aprendizagem em diversas áreas do conhecimento. No contexto das aulas de matemática, a introdução dos jogos representa uma transformação significativa nos processos de ensino e aprendizagem, pois permite romper com o modelo tradicional, frequentemente centrado no livro didático e em exercícios padronizados. Quando bem planejado e orientado, o trabalho com jogos em matemática favorece o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, formulação de hipóteses, busca de soluções, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, todas diretamente relacionadas ao raciocínio lógico.

Essas habilidades são estimuladas porque, ao participar dos jogos, os alunos têm a oportunidade de resolver problemas, investigar possibilidades e identificar as melhores estratégias; além disso, refletem e analisam as regras, estabelecendo conexões entre os elementos do jogo e os conceitos matemáticos envolvidos. Dessa forma, o jogo proporciona um ambiente prazeroso e uma aprendizagem significativa durante as aulas de matemática.

Ademais, o uso de jogos é um recurso que contribui para o desenvolvimento da linguagem, de diferentes formas de raciocínio e da interação entre os alunos, já que, durante o jogo, cada participante pode acompanhar o desempenho dos demais, defender seus pontos de vista e aprender a ser crítico e confiante em suas próprias ideias. (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2007)

A utilização de jogos pode ser extremamente eficaz para a aprendizagem do sistema de numeração binário, especialmente porque esse conteúdo costuma ser abstrato e desafiador para muitos alunos. Ao transformar o estudo do sistema binário em uma atividade lúdica, os jogos tornam o processo mais concreto, dinâmico e envolvente, facilitando a compreensão dos conceitos fundamentais.

Jogos que envolvem a conversão de números decimais para binários, desafios de formação de sequências ou até mesmo jogos digitais que utilizam códigos binários para avançar de fase, por exemplo, permitem que os alunos pratiquem e internalizem o funcionamento do sistema de base dois de forma significativa. Nessas atividades, os estudantes precisam identificar padrões, realizar operações matemáticas e tomar decisões rápidas, o que contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de resolução de problemas.

Além disso, ao jogar em grupo, os alunos podem discutir estratégias, explicar suas ideias e aprender uns com os outros, o que favorece a construção coletiva do conhecimento e o desenvolvimento de habilidades de comunicação. O erro, no contexto do jogo, é visto como parte do processo de aprendizagem, o que reduz a ansiedade e aumenta a motivação dos estudantes para explorar e experimentar diferentes soluções.

A seguir, neste capítulo serão apresentadas algumas atividades lúdicas que utilizem conceitos do sistema de numeração binário, bem como relatos de suas aplicações em salas de aula nas quais trabalhei.

5.2 Calendários Mágicos

Esta atividade, bem como as atividades das seções 5.3 e 5.4, foram adaptadas a partir de um vídeo disponibilizado no canal de YouTube do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, no qual o professor João Sampaio, da Universidade Federal de São Carlos, apresenta esses jogos como parte de sua palestra "Matemágicas", realizada no Evento de Lançamento do Congresso Internacional de Matemáticos ICM 2018, no Rio de Janeiro. (IMPA, 2015)

O objetivo do jogo é que o professor adivinhe a data de aniversário do aluno com base em algumas perguntas básicas. Para realizar essa atividade, é necessário que o professor tenha consigo os cinco calendários mágicos para fazer as perguntas ao aluno escolhido. Além disso, é bom que tenha também a referência dos signos do zodíaco e os períodos nos quais ocorrem, já que isso não é de conhecimento de todos. As figuras 3 e 4 são os slides utilizados para realização dessa atividade em uma turma de 8º ano.

Figura 3 – Calendários Mágicos. Fonte: O Autor

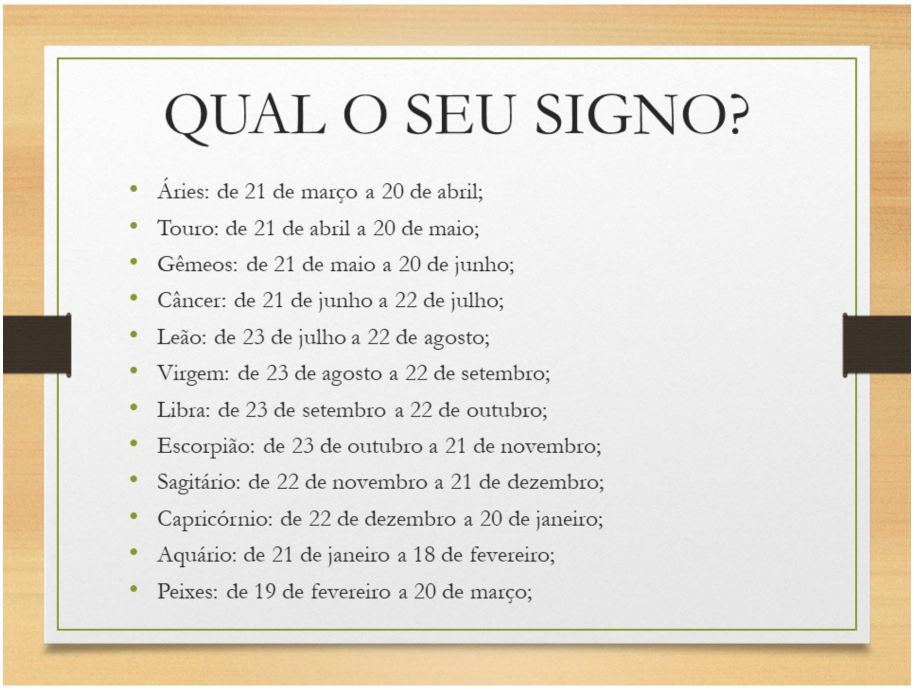

Figura 4 – Signos do Zodíaco. Fonte: O Autor

Para iniciar, o professor seleciona um aluno e pede que ele mentalize o seu dia e mês de aniversário, mas não o diga em voz alta. Então, o professor mostra ao aluno os calendários mágicos, um a um, e em cada um ele pergunta ao aluno se o dia de seu aniversário aparece em destaque, neste caso, em escala de cinza. Após os cinco calendários, o professor pergunta ao aluno qual é o seu signo do Zodíaco. Com esta resposta, o professor é capaz de afirmar qual é a data de aniversário do aluno.

Em um primeiro momento os alunos ficam surpresos com a "mágica" feita pelo professor, mas o que para os alunos é visto como um truque de mágica, nada mais é do que a aplicação da representação de um número qualquer em base binária.

No primeiro calendário estão em destaque os números que possuem em sua representação binária a potência 2^0. Se o aluno responde **SIM**, então o professor entende que o dia de aniversário deste aluno possui essa potência em sua representação. Caso a resposta seja **NÃO**, então esta potência não está presente na representação deste número.

Já no segundo calendário estão em destaque os números que possuem em sua representação binária a potência 2^1. Da mesma forma, se o aluno responde **SIM**, a potência está presente, mas se responde **NÃO**, a potência não está presente. Esta dinâmica se repete para os três calendários seguintes, os quais apresentam em destaque os números que possuem em sua representação binária as potências 2^2, 2^3 e 2^4, respectivamente.

Ao finalizar as cinco perguntas, o professor consegue então afirmar qual é o dia do aniversário do aluno, e o faz somando mentalmente as potências de 2 presentes neste número. Na tabela 7 estão representadas todas as 31 possibilidades de representação das datas de aniversários utilizando potências de 2.

Número Decimal	**Soma de Potências de 2**	**Número Binário**
1	1	00001
2	2	00010
3	1+2	00011
4	4	00100
5	1+4	00101
6	2+4	00110
7	1+2+4	00111
8	8	01000
9	1+8	01001
10	2+8	01010
11	1+2+8	01011
12	4+8	01100
13	1+4+8	01101
14	2+4+8	01110
15	1+2+4+8	01111
16	16	10000
17	1+16	10001
18	2+16	10010
19	1+2+16	10011
20	4+16	10100
21	1+4+16	10101
22	2+4+16	10110
23	1+2+4+16	10111
24	8+16	11000
25	1+8+16	11001
26	2+8+16	11010
27	1+2+8+16	11011
28	4+8+16	11100
29	1+4+8+16	11101
30	2+4+8+16	11110
31	1+2+4+8+16	11111

Tabela 7 – Representação binária dos números decimais até 31

Após a descoberta do dia, ainda resta saber qual é o mês. É aí que entram os signos do zodíaco: baseado no signo do aluno, é possível que o professor infira qual é o mês de aniversário do aluno. É importante ressaltar que existem dois casos em que apenas essa pergunta não é suficiente.

Por exemplo, o período do signo de Câncer tem início em 21 de junho e término em 22 de julho. Caso o dia do aniversário do aluno participante fosse 21 ou 22 e o signo fosse Câncer, ainda permaneceria a dúvida entre os dois meses possíveis: junho ou julho. Para sanar essa dúvida, pode ser feita uma pergunta simples para ao aluno, como “então você faz aniversário nas férias?”. Como o período de recesso escolar geralmente compreende parte do mês de julho, espera-se que essa resposta seja suficiente para escolher um destes dois meses.

O outro caso em que o mês é incerto mesmo com a resposta do aluno é o signo de Peixes, que se inicia em 19 de fevereiro e termina em 20 de março. Caso a data escolhida seja dia 19 ou 20, é necessária mais uma pergunta para determinar o mês do aniversário. Um exemplo de pergunta que pode ser feita seria "então você faz aníversário logo que voltam as aulas?", já que 19 ou 20 de fevereiro são datas próximas ao retorno às aulas,

5.3 Adivinhar a Figura

Este jogo possui o mesmo fundamento do primeiro, porém agora utilizando figuras. Em um primeiro slide, aqui apresentado na figura 5, são apresentados para o aluno 31 figuras dispostas em cinco linhas: quatro com seis figuras e uma última com sete figuras. O professor pede que o aluno escolha uma das figuras mas não revele a figura escolhida. Em seguida, o professor pergunta para o aluno se a figura que ele escolheu está presente em cada um dos cinco slides que serão apresentados em seguida. Ao fim das perguntas, o professor deverá saber qual é a figura que o aluno escolheu.

Figura 5 – Adivinhar a Figura. Fonte: O Autor

Neste caso não temos números, no entanto, consideramos que cada figura representa um número na ordem em que estão posicionadas. A primeira figura seria o número 1, a segunda figura o número 2, a terceira o número 3, e assim por diante. A disposição das figuras de seis em seis nas quatro primeiras fileiras é feita de forma conveniente, para facilitar a localização da figura da parte do professor.

Nos slides que seguem, apresentados na figura 6, a lógica é a mesma utilizada nos calendários mágicos, mas a ordem dos slides foi invertida. No primeiro slide estão presentes todas as figuras que estão em posições nas quais o número possui em sua representação binária a potência 2^4. No segundo slide estão presentes todas as figuras que estão em posições nas quais o número possui em sua representação binária a potência 2^3, e assim por diante. No terceiro slide a potência é 2^2, no quarto slide a potência é 2^1 e no quinto e último slide a potência é 2^0.

Figura 6 – Adivinhar a Figura - Quadros. Fonte: O Autor

O professor então pergunta ao aluno se a sua figura de escolha está presente em cada slide. Ao responder **SIM** ou **NÃO**, o aluno está, de fato, respondendo se cada uma dessas potências está presente no número que representa a posição da figura escolhida.

Por exemplo, suponhamos que o aluno tenha escolhido o picolé. No primeiro quadro, que representa a potência 2^4, o picolé está presente, logo a resposta do aluno será **SIM**. No segundo quadro, que representa a potência 2^3, o picolé não está presente, logo a resposta do aluno será **NÃO**. No terceiro quadro, que representa a potência 2^2, a resposta seria **SIM**, no quarto quadro, que representa a potência 2^1 a resposta seria **SIM**, e no quinto e último quadro, que representa a potência 2^0, a resposta seria **NÃO**.

Sendo assim, no slide da figura 5, a representação decimal da posição na qual está localizada a figura que o aluno escolheu seria $16 + 4 + 2 = 22$, ou seja, na ordem de cima para baixo e da esquerda para a direita, a figura escolhida pelo aluno seria a 22^a. Isso nos leva à quarta fileira, quarta coluna, que se trata realmente do picolé.

5.4 Adivinhar a Idade

Esta é mais uma variação da atividade "Calendários Mágicos". Trata-se de descobrir um número, neste caso, a idade, de uma certa pessoa baseado em seis perguntas. Nesta atividade, serão utilizadas as seis cartelas mostradas na 7, contendo 32 números cada, na ordem indicada. Na primeira cartela, estão escritos os números que na representação binária possuem a potência 2^0, ou seja, o número 1. Na segunda cartela, os números que possuem a potência 2^1, ou seja, o número 2, ate que se tenha seis cartelas, cada uma contendo todos os números que possuem as potências de 2: 2^2, 2^3, 2^4 e 2^5.

1ª

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

3ª

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

5ª

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

2ª

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

4ª

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

6ª

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

Figura 7 – Cartelas do jogo "Adivinhar a Idade". Fonte: O Autor

As cartelas, conforme apresentadas na figura 7, compreendem todos os números de 1 a 63, que possui em sua representação todas as potências binárias até 2^5. Da mesma forma, pergunta-se para a pessoa que está participando do jogo se o número em questão está presente ou não em cada uma dessas cartelas. Se a resposta for **SIM**, então adiciona-se o número base daquela cartela, e se a resposta for **NÃO**, nada é adicionado.

Tomemos como exemplo uma pessoa de 57 anos de idade. Pergunta-se para a pessoa se o número em questão, no caso a sua idade, está presente em cada uma das cartelas. Na primeira cartela há o número 57, logo a resposta é **SIM** e a potência 2^0 está presente nesse número. Na segunda cartela o número 57 não está presente, logo a resposta é **NÃO** e nada é adicionado. Para as cartelas seguintes, as respostas são: **NÃO**, **SIM**, **SIM** e **SIM**. Logo, o número buscado será $1 + 8 + 16 + 32 = 57$.

5.5 Estudo de caso: adivinhações com números binários - aula do dia 6 de dezembro de 2023

Como parte da minha pesquisa, apliquei no dia 6 de dezembro de 2023 estas três atividades em uma turma de 8º ano do Colégio Integral Cenecista de Resplendor, uma escola da rede privada localizada no município de Resplendor/MG. Conforme mencionado anteriormente, para a aplicação da atividade "Calendários Mágicos", foram utilizados os slides apresentados nas figuras 3 e 4.

Iniciei a aula pedindo que os alunos participassem da atividade, fizessem perguntas e expressassem suas impressões. Apresentei aos alunos a atividade "Calendários Mágicos", e disse que iria, naquela atividade, adivinhar seus aniversários. Como primeiro voluntário, escolhi uma aluna que disse ter conhecimentos prévios sobre signos. Aqui a chamaremos de "aluna 1".

Para começar a brincadeira, apresentei à aluna 1 os cinco calendários mágicos e pedi que a mesma identificasse se o dia de seu aniversário estava escrito em azul nos mesmos. As respostas obtidas, nesta ordem, foram: "**SIM, NÃO, SIM, SIM, NÃO**". Em seguida, perguntei à aluna qual era o seu signo, ao que a mesma respondeu: "Câncer". E então, com base nessas respostas, afirmei corretamente que o aniversário da mesma seria no dia 13 de julho, para o espanto da aluna e da turma. Seguiram-se aplausos.

Em seguida, escolhi outro aluno para participar, o qual identificaremos como "aluno 2". O aluno 2 observou os cinco calendários, e para as cinco perguntas as respostas foram: "**SIM, SIM, SIM, SIM, SIM**". Ao perguntar o signo, o aluno respondeu que seu signo era "Leão". A partir daí, afirmei que o aniversário do aluno seria no dia 31 de julho. Mais uma vez acertei e os alunos ficaram muito surpresos.

Escolhi uma terceira aluna, aqui identificada como "aluna 3". Procedi da mesma forma com esta aluna e, ao apresentar os calendários, as respostas obtidas foram: "**SIM, SIM, NÃO, NÃO, SIM**, e em seguida, a aluna disse que seu signo era "Leão". Assim, cheguei à conclusão que o aniversário da mesma seria no dia 19 de agosto. Mais uma vez, adivinhei corretamente.

Após realizar estas três rodadas com os alunos, então questionei os alunos: "alguém percebeu algo de particular?".

Um aluno, aqui chamado de "aluno 4" fez a seguinte colocação: "se o número da pessoa aparece nos dois últimos, essa pessoa nasceu do dia 10 ao dia 20, e se aparece nos cinco, do dia 20 ao dia 30, mas não prestei atenção no último quadro". Um outro colega, o qual chamaremos de "aluno 5" então questiona: "mas como ele faz para descobrir o dia certinho?"

Um outro aluno, que identificaremos como "aluno 6" sugeriu que o professor tivesse decorado as posições dos números em destaque em todos os calendários, o que seria muito improvável. O aluno 5 pergunta se há alguma interferência caso o dia de seu aniversário fosse exatamente o início ou fim de um determinado signo", ao que o professor responde que não.

Em seguida, outro aluno, o qual chamaremos de "aluno 7" constatou que no primeiro calendário mágico, todos os números em azul são números ímpares, o que realmente é verdade. Isso pode ser explicado pelo fato de que todos os números ímpares possuem em sua representação binária a potência 2^0.

A aluna 3, que participou da brincadeira, observou algo interessante: "no primeiro calendário tinha um número azul seguido de um preto, outro azul e outro preto; no segundo foi um preto, dois azuis, dois pretos, dois azuis, e assim por diante." Embora a lógica por detrás da brincadeira não seja exatamente essa, essa colocação não é totalmente sem sentido.

Isso se deve ao fato de que cada uma das potências apresenta um certo tipo de regularidade ao aparecer nos números. A potência 2^0, por exemplo, sempre "pula" de um em um a partir do próprio 1; a potência 2^1 sempre "pula" de dois em dois a partir do número 2, a potência 2^2 sempre "pula" de quatro em quatro a partir do número 4, e assim por diante, sempre a partir do próprio número da potência.

Por fim, uma aluna, aqui "aluna 8", me indagou a respeito de um padrão na formação dos calendários, ao que respondi que realmente existe um padrão, mas a aluna não soube me dizer qual era. Então os alunos me pediram que fizesse a brincadeira mais uma vez para que eles tentassem captar a lógica por detrás do jogo. Escolhi, assim, uma outra aluna, a qual chamaremos de "aluna 9".

Ao observar os cinco calendários, as respostas da aluna 9 foram: **NÃO, SIM, NÃO, NÃO, NÃO** e o signo de "Câncer". A data encontrada então foi 2 de julho, e a aluna confirmou.

Então, convidei os alunos para analisar os calendários junto comigo. Ao analisar o primeiro calendário, eles perceberam que apenas os números ímpares estavam destacados no mesmo. Ao seguir para o segundo calendário, eles perceberam então o que a aluna 3 havia constatado: os números estavam destacados "de dois em dois". Pedi que os alunos prestassem atenção exclusivamente ao primeiro número em destaque no calendário, ao que eles me responderam em uníssono: 2. Seguimos então para o terceiro calendário.

No terceiro calendário, perguntei aos alunos qual era o primeiro número em destaque, ao que eles responderam: 4; no quarto calendário eles disseram que era o número 8 e no quinto calendário, 16. Antes de finalizarmos, alguns alunos já haviam percebido que, em suas próprias palavras, "vai multiplicando por 2". Analisados todos os calendários, perguntei aos alunos o que esses números representam: $1, 2, 4, 8$ e 16.

O aluno 7 respondeu, erroneamente, que se tratavam de múltiplos. A aluna 3 disse que "$1 + 1 = 2$, $2 + 2 = 4$, $4 + 4 = 8$, $8 + 8 = 16$", o que está realmente correto. Mas o que eu buscava era uma definição mais formal do que estes números são. Um aluno, que chamaremos de "aluno 10" mencionou a palavra **EXPOENTE**, ao que respondi: "é por aí", então ele conseguiu elaborar melhor: "é aquele que tem um número elevado a outro", e completei dizendo: "potências!".

Sabendo agora que se tratavam de potências, perguntei então: "mas são potências de que número?", ao que todos responderam prontamente: "são potências de 2". Seguimos então para a observação de que todos aqueles números eram resultado de uma potência de 2: $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$ e $16 = 2^4$.

Após essa constatação, chamei novamente a atenção dos alunos para os calendários. Ao apresentar o primeiro calendário, perguntei aos alunos o que todos aqueles números destacados em azul tinham a ver com o número 1. Disse para eles, então, que todos aqueles números destacados, com exceção do próprio 1, poderiam ser escritos como a soma do número 1 com mais alguma potência de 2. Por exemplo, que o número 5 é a mesma coisa que $1 + 4$, ou que o número 11 é o mesmo que $1 + 2 + 8$.

Feito isso, perguntei aos alunos se eles concordam que o número 1 está presente em todos aqueles números destacados no primeiro calendário, ao que todos responderam "sim". Seguindo para o segundo calendário, mostrei para os alunos que todos os números destacados neste calendário teriam "dentro deles" a potência 2^1, ou seja, o número 2. A partir daí eles começaram a perceber o padrão. Entenderam que no terceiro calendário estão destacados os números que possuem a potência 2^2, ou seja, 4; no quarto calendário estão destacados os números que possuem a potência 2^3, ou seja, 8; e, por fim, no quinto calendário estão destacados os números que possuem a potência 2^4, ou seja, 16.

Então parti para explicar aos alunos a lógica da brincadeira: apresentando o calendário 5, que é o do número 16, perguntei: "então, se eu pergunto para você se o seu aniversário está destacado aqui, quanto eu preciso somar?", ao que o aluno 4 respondeu: "16". Continuei então, "e se o número não estiver destacado, o que eu somo?". Responderam então: "nada".

Para que eles compreendessem melhor, resolvi fazer mais uma rodada da brincadeira, mas nessa todos nós saberíamos o dia do aniversário do aluno escolhido de antemão, e faríamos juntos todos os cálculos necessários. Escolhido o "aluno 11", perguntei a ele qual era o dia do seu aniversário, e então ele me disse que era dia 21. Partimos então para a análise dos calendários.

Analisamos em conjunto o primeiro calendário. Percebemos que o número 21 estava em destaque no primeiro calendário. Logo, o número 1, que é o número base do primeiro calendário, faz parte do dia do aniversário, somamos então 1. Seguindo para o segundo calendário, percebemos que o número 21 não estava destacado, logo não adicionamos o número 2, que é o número base do segundo calendário. No terceiro calendário o número 21 estava em destaque, então somamos ao número 1 o número 4. No quarto calendário o número 21 não estava em destaque, então não somamos 8, e, por fim, no quinto calendário, o número 21 estava em destaque, então somamos o número 16. Finalizamos então com: $1 + 4 + 16 = 21$.

Em síntese, na tabela 8 estão as respostas de todos os alunos que participaram desta primeira atividade, com as respostas que foram dadas em cada um dos calendários. Conforme mencionado anteriormente, cada um dos calendários apresenta em destaque os números que possuem uma das potências de 2: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 e 2^4, respectivamente. Quando o aluno responde **SIM**, somamos essa potência mentalmente, e quando o aluno responde **NÃO**, nada é adicionado.

ALUNO	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	**DIA DO ANIVERSÁRIO**
1	SIM	NÃO	SIM	SIM	NÃO	$1+4+8=13$
2	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM	$1+2+4+8+16=31$
3	SIM	SIM	NÃO	NÃO	SIM	$1+2+16=19$
9	NÃO	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	2
11	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	$1+4+16=21$

Tabela 8 – Respostas dos alunos na atividade "Calendários Mágicos". Fonte: O Autor

Neste momento, desafiei os alunos a tentarem descobrir a data do meu aniversário. O aluno 6 tomou a frente e me fez as perguntas dos calendários, para os quais as respostas foram: "**NÃO, NÃO, SIM, SIM, SIM**. Feitas as cinco perguntas, diversos alunos já afirmaram com convicção: "dia 28!". O dia estava realmente correto. Os informei, em seguida, que o meu signo é "Virgem". Então alguns já haviam "matado a charada": "o aniversário do professor é dia 28 de agosto".

Finalizamos então essa primeira atividade. Chamei a atenção dos alunos para o significado do termo "número decimal". Na escola, estamos muito acostumados a chamar de números decimais os famosos "números quebrados", ou "números com vírgula", mas mesmo os números inteiros, que utilizamos, são chamados de números decimais, e isso se deve a uma característica em particular. Expliquei para eles que chamamos os números de decimais porque a base do nosso sistema de numeração é 10, já que de 10 em 10 a gente "pula para uma nova casa".

Tomando ainda como exemplo o dia 28, que é o dia do meu aniversário, mostrei para eles que esse número é 28 na base 10 porque se trata de 2 dezenas, ou seja, $2 \cdot 10^1$, mais 8 unidades, ou seja, $8 \cdot 10^0$. Completei dizendo a eles que podemos representar o número 28 em qualquer base, e que a base utilizada na nossa atividade é a base 2, que é a base dos números binários. Ao questioná-los se alguém já havia ouvido falar a respeito de números binários, todos disseram que não. Quando disse que se tratava daqueles números que são formados apenas por zeros e uns, o aluno 4 afirmou saber do que se tratava.

Mostrei para eles que poderíamos escrever o número 28 na forma de número binário da seguinte maneira: como o sistema de numeração binário só possui 2 algarismos, a saber, zero e um, teremos sempre uma potência de 2 multiplicada por um desses algarismos. Partimos então para a representação do número 28 em base 2.

Voltando para o primeiro calendário, relembramos que o número 28 não está em destaque neste calendário, ou seja, que a potência 2^0 não faz parte desse número. Ora, se essa potência não faz parte desse número, então devemos multiplicá-la por **ZERO**. No segundo calendário a mesma coisa: o número 28 também não está em destaque, logo a potência 2^1 será multiplicada também por **ZERO**. Já no terceiro calendário, o número 28 está destacado, ou seja, a potência 2^2 está presente nesse número. Logo, a potência 2^2 ficará multiplicada, nesse caso, por **UM**. No quarto calendário, o número 28 está presente, então teremos a potência 2^3 multiplicada por **UM** e, por fim, no quinto calendário, o número 28 também está presente, logo, a potência 2^4 fica multiplicada por **UM**. Temos então:

$$28 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Aqui, abro um parênteses para explicar que inverti o sentido das operações (iniciei com o 2^4 e finalizei com o 2^0) para que o aluno conseguisse visualizar com mais facilidade como é formado o número binário. Mostrei para os alunos que para escrever um determinado número em forma de número binário, bastava pegar esses "zeros e uns" e escrevê-los em sequência: Sendo assim, o número 28 representado em base binária seria:

$$(28)_{10} = (11100)_2$$

Após esta explicação, o aluno 5 me pediu que voltasse na parte dos signos. Ao apresentar novamente a imagem com os signos, ele me questionou: "e o que acontece se cair, por exemplo, 20 e 'Peixes'?". Este seria um dos dois casos já citados nos quais a pergunta do signo não é suficiente para identificar com certeza o mês do aniversário do aluno. Expliquei para ele que seria necessária uma pergunta a mais para conseguir sair dessa "saia justa". Aproveitando esse gancho, mostrei para eles que os casos nos quais isso acontece são os dos dias 19 e 20 de "Peixes", e os dias 21 e 22 de "Câncer".

Partimos então para a segunda atividade, que é a de adivinhar a figura. Expliquei que agora o aluno selecionado para participar deveria escolher uma figura dentre as apresentadas no slide da figura 5, sem dizer qual é, e responder as perguntas feitas pelo professor, se a figura está ou não em cada um dos slides da figura 6, apresentados um a um em seguida.

Escolhido um novo aluno, o qual chamaremos de "Aluno 12", pedi a ele que escolhesse uma figura aleatória, sem dizer qual é. Após a escolha, passei o primeiro slide e o perguntei se sua figura estava presente, ao que ele respondeu **SIM**. No segundo slide, sua resposta foi **NÃO**; no terceiro, **SIM**; no quarto, **SIM**; e no quinto e último, **SIM**. Após retornar para a figura original, afirmei que a figura escolhida pelo aluno foi a dos **DADOS**, o que estava correto.

Selecionei mais uma aluna, que chamaremos de "Aluna 13", e pedi a ela que escolhesse uma das figuras. Escolhida a figura, segui para os slides e fiz as perguntas, para as quais as respostas foram: **SIM**, **SIM**, **NÃO**, **NÃO** e **SIM**. Após as cinco respostas, perguntei à aluna se ela havia escolhido o par de **ÓCULOS**, o que ela confirmou.

A aluna 8 pediu para participar também, então pedi que ela escolhesse a sua figura. Após a escolha da figura, passei os slides, fiz as perguntas e as respostas obtidas foram: **SIM**, **SIM**, **SIM**, **SIM** e **NÃO**. Após as respostas foi possível afirmar que a figura escolhida por essa aluna foi a caixa de **LÁPIS DE COR**. Mais uma vez, estava correto.

Para fechar essa atividade, fizemos uma última vez, agora com o "Aluno 14". Pedi que escolhesse a figura e em seguida fiz as perguntas, para as quais obtive as respostas: **SIM**, **NÃO**, **SIM**, **NÃO** e **NÃO**, e então deduzi que a figura escolhida pelo aluno era o **DONUT**. O aluno confirmou.

Em síntese, na tabela 9 estão as respostas de todos os alunos que participaram desta segunda atividade até então, com as respostas que foram dadas em cada um dos quadros. Conforme mencionado anteriormente, cada um dos calendários apresenta em destaque os números que possuem uma das potências de 2: 2^4, 2^3, 2^2, 2^1 e 2^0, respectivamente. Quando o aluno responde **SIM**, somamos essa potência mentalmente, e quando o aluno responde **NÃO**, nada é adicionado.

Após a realização da segunda atividade, pedi os alunos que relatassem o que pensavam ser a lógica por detrás deste truque de mágica. O aluno 5 disse pensar se tratar

ALUNO	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	**POSIÇÃO DA FIGURA**	**FIGURA ESCOLHIDA**
12	SIM	NÃO	SIM	SIM	SIM	$16+4+2+1=23$	Dados
13	SIM	SIM	NÃO	NÃO	SIM	$16+8+1=25$	Óculos
8	SIM	SIM	SIM	SIM	NÃO	$16+8+4+2=30$	Lápis de Cor
14	SIM	NÃO	SIM	NÃO	NÃO	$16+4=20$	Donut

Tabela 9 – Respostas dos alunos na atividade “Adivinhar a Figura”. Fonte: O Autor

de um padrão na forma como as imagens estão dispostas. Já o aluno 10 perguntou se essa atividade também teria algo a ver com as potências, ao que respondi que sim. O aluno 4 complementou dizendo que cada um dos quadros teria uma potência associada a ele.

Perguntei aos alunos qual seria a minha referência para essa atividade, que seria a figura a ser utilizada como guia em cada um dos quadros. A aluna 13 pensou se tratar do “cachorro quente”, por ser a primeira figura. Já o aluno 4 chutou o “lápis de cor”, sem motivo aparente. Após alguns palpites, disse para os alunos que passaria novamente os slides e eles deveriam identificar qual era. O aluno 14 perguntou se seria uma figura aparecendo em todos os cinco quadros, ao que não dei resposta no momento.

Ao passar os três primeiros quadros, alguns alunos já começaram a perceber de que figura se tratava. Ao fim dos cinco quadros, ao perguntá-los novamente, todos disseram que se tratava do **LAPTOP**, que é a única figura que aparece em todos os quadros. Confirmei, e pedi que nesse momento, ao rever cada um dos quadros, que prestassem atenção na posição em que se encontra o “laptop” em cada um deles.

Ao mostrar o primeiro quadro, perguntei aos alunos onde se encontrava o “laptop”. O aluno 10 disse que estava na quarta fileira e quarta coluna, e o aluno 4 complementou dizendo que se tratava da posição de número 16. Após essa resposta, perguntei aos alunos do que se tratava o número 16, ao que eles responderam: “é 2^4!”.

Passando para o segundo quadro, identificaram agora que o “laptop” se encontrava na posição 8, que é a potência 2^3; no terceiro quadro estava na posição 4, que é a potência 2^2; no quarto quadro estava na posição 2, que é a potência 2^1; e no quinto quadro estava na posição 1, que é a potência 2^0. Expliquei então que a premissa do jogo é basicamente a mesma: onde a resposta é **SIM**, eu somo a potência referente àquele quadro, e quando a resposta é **NÃO**, nada é adicionado.

Por fim, perguntei aos alunos como faria para identificar qual é a figura com base nesse número, ao que responderam prontamente que seria necessário apenas “contar” as posições das figuras. Para que todos compreendessem melhor como funciona a brincadeira, escolhemos em conjunto uma figura, analisamos os quadros um a um e fizemos a operação. Pedi o aluno 5 que fosse escrevendo no quadro os números que deveriam ser somados.

A figura escolhida foi o **VENTILADOR**, que se encontra na posição 21. Para as perguntas, obtivemos as respostas **SIM**, **NÃO**, **SIM**, **NÃO**, e **SIM**. Com base nessas respostas, as potências a serem somadas seriam 2^4, 2^2 e 2^0, logo, $16 + 4 + 1 = 21$, que é exatamente a posição do "ventilador" na figura inicial. Na oportunidade, mostrei a eles que não seria necessário contar as figuras uma a uma, já que estão dispostas em fileiras de 6. Poderíamos contar utilizando as fileiras: $6, 12, 18$ nas três primeiras fileiras, e em seguida, $19, 20, 21$.

Neste momento, ofereci aos alunos a oportunidade de fazer a brincadeira com os seus colegas. O aluno 2 pediu para tentar adivinhar, e escolheu o aluno 6 para pensar em uma figura. Escolhida a figura, fiquei responsável por passar os slides para que o aluno pudesse se concentrar apenas nas perguntas e na soma mental. As respostas do aluno 6 foram: **NÃO**, **SIM**, **SIM**, **NÃO** e **SIM**. Por fim, o aluno 2 se confundiu na soma e não conseguiu responder, mas os colegas estavam atentos e perceberam que se tratava da **LUA**, localizada na posição 13.

Agora, o aluno 7 seria o adivinhador e quem escolheria a figura seria o "Aluno 15", que até o momento ainda não havia participado. Mas o aluno 15 se confundiu e acabou falando, por um impulso, a figura escolhida antes da hora: "Livro!". Sendo assim, escolhemos outro aluno, a saber, o aluno 4. Escolhida a figura, as respostas foram: **SIM**, **SIM**, **SIM**, **SIM** e **SIM**. O aluno 7 pensou se tratar do **QUEIJO**, na posição 29, mas o aluno 4 o corrigiu, dizendo se tratar, na realidade, do **LAPTOP**, que está na posição 31. Neste momento, alguns colegas comentaram: "ele falou sim pra todos!". Então, o aluno 7 percebeu que teria feito algum cálculo errado.

Em seguida, foi a vez do aluno 10 adivinhar a figura escolhida pelo aluno 11. Após a escolha da figura, as respostas foram: **NÃO**, **NÃO**, **NÃO**, **SIM** e **NÃO**. O aluno 10 concluiu facilmente então que se tratava do **TROFÉU**, que está localizado na posição 2. O aluno 11 confirmou, sendo assim o aluno 10 o primeiro a acertar.

Agora, a aluna 13 iria adivinhar a figura escolhida pelo "Aluno 16", que também não havia participado ainda. O aluno 16 escolheu a figura e, ao fazer as perguntas, as respostas obtidas foram: **SIM**, **SIM**, **SIM**, **NÃO** e **NÃO**. A aluna 13 também se confundiu nos cálculos e não conseguiu responder, então o aluno 4 afirmou que se tratava da **NUVEM**, que se localiza na posição 16, o que está correto.

Para finalizar esse momento, a aluna 9 pediu para adivinhar a figura escolhida pela aluna 1. Após a escolha, a aluna 9 procedeu para as perguntas e as respostas foram: **SIM**, **NÃO**, **SIM**, **NÃO** e **NÃO**. A aluna 9, então, afirmou se tratar do **DONUT**, localizado na posição 20, o que estava correto.

Além desses cinco alunos mencionados acima, outros três participaram, dos quais um adivinhou corretamente, enquanto os outros dois não. Aqui, faço uma análise pessoal: o fato de alguns alunos não terem conseguido acertar a figura do colega não se deve ao fato do jogo ter um fundamento complicado, ou que eles não entenderam como funciona, mas sim que a dificuldade maior era de fazer os cálculos mentalmente e em pouco tempo.

Segundo Berticelli e Zancan (2021),

> Estimular o cálculo mental é uma forma de desenvolver o senso numérico dos alunos, a flexibilidade com os números, de modo que os estudantes não fiquem presos a procedimentos de contagem. No entanto, na perspectiva do professor como mediador do processo educativo, é necessário que ele compreenda a importância do cálculo mental e, tendo domínio das estratégias, esteja preparado para estimular seus alunos.

Voltando à atividade, o aluno 5 perguntou se nos Calendários Mágicos existia algum número base nos calendários, como há o "laptop" nos quadros com as figuras, ao que respondi que não, e que o "laptop" está presente em todos os quadros única e exclusivamente porque o número 31 é o único que possui todas as potências de 2 até 2^4, e a sua posição em cada um dos quadros serve como uma referência de que potência está sendo analisada em cada quadro.

Perguntei aos alunos como seria a representação binária do número 32, que seria o próximo da sequência. O aluno 14 logo respondeu que não seria possível representar com as potências vistas até então, porque o resultado máximo seria 31. O aluno 10 então finalizou dizendo que o 32 se tratava da potência seguinte, 2^5.

Já chegando ao fim da aula, apresentei rapidamente para os alunos o jogo de "Adivinhar a idade". Expliquei que se tratava do mesmo fundamento, e que a única diferença é que aqui incluiríamos uma potência a mais: o 2^5, e logo, teríamos um quadro a mais para analisar, fazendo então seis perguntas em vez de cinco, e com um resultado máximo de 63.

O aluno 2 percebeu que o jogo poderia ser utilizado em um contexto de apenas "adivinhar o número que a pessoa está pensando", sem mencionar idade. Então, fizemos uma rodada rapidamente. O aluno 10 escolheu um número e então fiz as perguntas. As respostas foram: **SIM**, **NÃO**, **SIM**, **SIM**, **SIM** e **SIM**. O número escolhido foi 61, que se trata de $1 + 4 + 8 + 16 + 32$.

Como ainda restavam alguns minutos de aula, o aluno 7 pediu para participar também. Escolhido o número, suas respostas foram: **SIM**, **SIM**, **NÃO**, **SIM**, **NÃO** e **NÃO**. Logo, o número escolhido seria $1+2+8 = 11$, o que o aluno confirmou. Em seguida, o aluno 14 também escolheu um número, e as respostas foram: **SIM**, **SIM**, **NÃO**, **SIM**, **NÃO** e **SIM**. Assim, o número escolhido seria $1 + 2 + 8 + 32 = 43$, o que estava correto.

O aluno 4 disse que achou este jogo mais fácil porque se trata basicamente de somar o primeiro número de cada cartela em que a resposta for **SIM**, o que é verdade. E assim, chegamos ao fim da aula. Os alunos disseram ter gostado bastante das atividades e pediram os slides utilizados para replicar em casa com seus familiares.

Na tabela 5.5 estão feedbacks de alguns alunos que participaram da aula. Pedi que me enviassem por escrito, via WhatsApp, suas considerações a respeito do que foi visto.

ALUNO	FEEDBACK
5	Eu gostei muito do projeto já que deu pra ver que essa "mágica" não se tratava de mágica em si , mas matemática depois que foi explicado como que ele conseguia adivinhar a data de nascimento ou a figura tudo se encaixou.
6	Abraão gostei muito da suas pesquisas, achei muito interessante e curioso ao mesmo tempo.
7	Gostei muito da mágica que vc fez aquele dia na multimídia, ainda usando a matemática e gostei tanto que até fiz na minha casa com meus pais.
8	Foi uma ótima atividade, me inspirou a tentar criar atividades que usam a matemática
10	Eu entendi que não é uma mágica ou a pessoa tentar adivinhar, são lógicas que você descobre por meio da matemática que é certeiro.
14	Eu achei uma atividade muito legal e diferente que no inicio eu pensei que era apenas um chute ou algo assim, mas so depois eu entendi que tinha cálculo a ser feito para chegar no resultado. Eu fiz em casa com a minha mãe e irmã e elas ficaram sem entender nada.

5.6 Estudo de caso: códigos ASCII - aula do dia 9 de maio de 2024

ASCII, que significa "Código Padrão Americano para Intercâmbio de Informações", é um código de caracteres que atribui um número a letras, números e símbolos básicos. Ele permite que computadores se comuniquem e troquem dados usando um formato padronizado. Essencialmente, é uma forma de representar texto para máquinas, onde cada caractere é convertido em um valor numérico único.

Esse valor numérico único é codificado na forma de um número binário. Estes códigos compõem a tabela ASCII, que é formada por 128 sinais, dos quais, 95 são caracteres gráficos - letras do alfabeto latino, algarismos arábicos, sinais de pontuação e símbolos matemáticos - e 33 caracteres de controle, utilizando 7 bits para representar todo o conjunto. Como um byte possui 8 bits, este oitavo bit não utilizado pode ser empregado de diversas maneiras. Numa delas, esse bit adicional é utilizado para representar caracteres adicionais. Estes caracteres são apresentados na tabela como uma "extensão" da tabela ASCII. Uma tabela ASCII estendida pode ser vista na figura 8.

Assim sendo, cada caractere, que possui tamanho de 1 byte, pode ser representado na forma de 8 bits, estes que podem assumir valor 0 ou 1. Por exemplo, a palavra **LIVRO** (com todas as letras maiúsculas) pode ser representada da seguinte maneira:

- L: $(76)_{10} = (01001100)_2$
- I: $(73)_{10} = (01001001)_2$
- V: $(86)_{10} = (01010110)_2$
- R: $(82)_{10} = (01010010)_2$
- O: $(79)_{10} = (01001111)_2$

Logo, a palavra **LIVRO** é codificada utilizando os seguintes bytes:

01001100 01001001 01010110 01010010 01001111

ASCII control characters

DEC	HEX	Simbolo ASCII	
00	00h	NULL	(carácter nulo)
01	01h	SOH	(inicio encabezado)
02	02h	STX	(inicio texto)
03	03h	ETX	(fin de texto)
04	04h	EOT	(fin transmisión)
05	05h	ENQ	(enquiry)
06	06h	ACK	(acknowledgement)
07	07h	BEL	(timbre)
08	08h	BS	(retroceso)
09	09h	HT	(tab horizontal)
10	0Ah	LF	(salto de linea)
11	0Bh	VT	(tab vertical)
12	0Ch	FF	(form feed)
13	0Dh	CR	(retorno de carro)
14	0Eh	SO	(shift Out)
15	0Fh	SI	(shift In)
16	10h	DLE	(data link escape)
17	11h	DC1	(device control 1)
18	12h	DC2	(device control 2)
19	13h	DC3	(device control 3)
20	14h	DC4	(device control 4)
21	15h	NAK	(negative acknowle.)
22	16h	SYN	(synchronous idle)
23	17h	ETB	(end of trans. block)
24	18h	CAN	(cancel)
25	19h	EM	(end of medium)
26	1Ah	SUB	(substitute)
27	1Bh	ESC	(escape)
28	1Ch	FS	(file separator)
29	1Dh	GS	(group separator)
30	1Eh	RS	(record separator)
31	1Fh	US	(unit separator)
127	20h	DEL	(delete)

ASCII printable characters

DEC	HEX	Simbolo	DEC	HEX	Simbolo	DEC	HEX	Simbolo
32	20h	espacio	64	40h	@	96	60h	`
33	21h	!	65	41h	A	97	61h	a
34	22h	"	66	42h	B	98	62h	b
35	23h	#	67	43h	C	99	63h	c
36	24h	$	68	44h	D	100	64h	d
37	25h	%	69	45h	E	101	65h	e
38	26h	&	70	46h	F	102	66h	f
39	27h	'	71	47h	G	103	67h	g
40	28h	(	72	48h	H	104	68h	h
41	29h	)	73	49h	I	105	69h	i
42	2Ah	*	74	4Ah	J	106	6Ah	j
43	2Bh	+	75	4Bh	K	107	6Bh	k
44	2Ch	,	76	4Ch	L	108	6Ch	l
45	2Dh	-	77	4Dh	M	109	6Dh	m
46	2Eh	.	78	4Eh	N	110	6Eh	n
47	2Fh	/	79	4Fh	O	111	6Fh	o
48	30h	0	80	50h	P	112	70h	p
49	31h	1	81	51h	Q	113	71h	q
50	32h	2	82	52h	R	114	72h	r
51	33h	3	83	53h	S	115	73h	s
52	34h	4	84	54h	T	116	74h	t
53	35h	5	85	55h	U	117	75h	u
54	36h	6	86	56h	V	118	76h	v
55	37h	7	87	57h	W	119	77h	w
56	38h	8	88	58h	X	120	78h	x
57	39h	9	89	59h	Y	121	79h	y
58	3Ah	:	90	5Ah	Z	122	7Ah	z
59	3Bh	;	91	5Bh	[	123	7Bh	{
60	3Ch	<	92	5Ch	\	124	7Ch	|
61	3Dh	=	93	5Dh	]	125	7Dh	}
62	3Eh	>	94	5Eh	^	126	7Eh	~
63	3Fh	?	95	5Fh	_			
						theASCIIcode.com.ar		

Extended ASCII characters

DEC	HEX	Simbolo	DEC	HEX	Simbolo	DEC	HEX	Simbolo	DEC	HEX	Simbolo
128	80h	Ç	160	A0h	á	192	C0h	└	224	E0h	Ó
129	81h	ü	161	A1h	í	193	C1h	┴	225	E1h	ß
130	82h	é	162	A2h	ó	194	C2h	┬	226	E2h	Ô
131	83h	â	163	A3h	ú	195	C3h	├	227	E3h	Ò
132	84h	ä	164	A4h	ñ	196	C4h	─	228	E4h	õ
133	85h	à	165	A5h	Ñ	197	C5h	┼	229	E5h	Õ
134	86h	å	166	A6h	ª	198	C6h	ã	230	E6h	µ
135	87h	ç	167	A7h	º	199	C7h	Ã	231	E7h	þ
136	88h	ê	168	A8h	¿	200	C8h	╚	232	E8h	Þ
137	89h	ë	169	A9h	®	201	C9h	╔	233	E9h	Ú
138	8Ah	è	170	AAh	¬	202	CAh	╩	234	EAh	Û
139	8Bh	ï	171	ABh	½	203	CBh	╦	235	EBh	Ù
140	8Ch	î	172	ACh	¼	204	CCh	╠	236	ECh	ý
141	8Dh	ì	173	ADh	¡	205	CDh	═	237	EDh	Ý
142	8Eh	Ä	174	AEh	«	206	CEh	╬	238	EEh	¯
143	8Fh	Å	175	AFh	»	207	CFh	¤	239	EFh	´
144	90h	É	176	B0h	░	208	D0h	ð	240	F0h	
145	91h	æ	177	B1h	▒	209	D1h	Ð	241	F1h	±
146	92h	Æ	178	B2h	▓	210	D2h	Ê	242	F2h	‗
147	93h	ô	179	B3h	│	211	D3h	Ë	243	F3h	¾
148	94h	ö	180	B4h	┤	212	D4h	È	244	F4h	¶
149	95h	ò	181	B5h	Á	213	D5h	ı	245	F5h	§
150	96h	û	182	B6h	Â	214	D6h	Í	246	F6h	÷
151	97h	ù	183	B7h	À	215	D7h	Î	247	F7h	¸
152	98h	ÿ	184	B8h	©	216	D8h	Ï	248	F8h	°
153	99h	Ö	185	B9h	╣	217	D9h	┘	249	F9h	¨
154	9Ah	Ü	186	BAh	║	218	DAh	┌	250	FAh	·
155	9Bh	ø	187	BBh	╗	219	DBh	█	251	FBh	¹
156	9Ch	£	188	BCh	╝	220	DCh	▄	252	FCh	³
157	9Dh	Ø	189	BDh	¢	221	DDh	¦	253	FDh	²
158	9Eh	×	190	BEh	¥	222	DEh	Ì	254	FEh	■
159	9Fh	ƒ	191	BFh	┐	223	DFh	▀	255	FFh	

Figura 8 – Tabela ASCII estendida. Fonte: <https://www.ufrgs.br/wiki-r/index.php?title=Raw>

No dia 9 de maio de 2024, apliquei em duas turmas de primeiro ano da Escola Estadual Comendador Nascimento Nunes Leal, localizada em Resplendor/MG uma atividade que consistia em escrever o próprio nome do aluno utilizando o código ASCII. A atividade foi aplicada como parte da avaliação processual da disciplina Lógica de Programação, da qual sou o professor regente neste ano de 2024. Interessante notar que estas duas turmas são de ensino médio profissionalizante, técnico em informática.

Pontua-se que o conteúdo de números binários já havia sido explicado anteriormente à data desta atividade. Já havia sido trabalhado também o fato de que cada caractere textual equivale a 1 byte, que é um conjunto de 8 bits. Ou seja, cada caractere deveria corresponder a um número binário contendo 8 dígitos.

Para esta atividade utilizamos como referência uma tabela extendida ASCII, contendo cada caractere e sua correspondência decimal. Esta tabela pode ser vista na figura 8. Além disso, cada aluno recebeu uma ficha para preencher com o seu nome, uma tabela para relacionar cada caractere com sua representação ASCII na forma decimal e binária e, por fim, um espaço para escrever o seu nome utilizando a representação binária em ASCII.

Dei um exemplo com o nome “ANA”. Juntamente com os alunos verifiquei na tabela que a letra ‘A’, que em ASCII corresponde ao decimal 65. Efetuando a conversão do número 65 para decimal, por meio da divisão euclidiana, encontrou-se 01000001. Em seguida, verificou-se que a letra ‘N’ corresponde ao decimal 78, que no sistema binário é 01001110. Para a letra ‘A’ do final utilizou-se o mesmo valor da primeira, ou seja 01000001 . Neste momento, um aluno perguntou se havia diferenciação entre letras minúsculas e maiúsculas, ao que respondi que sim, e dei o exemplo da letra A, que maiúscula corresponde ao número 65 e minúscula corresponde ao número 97. Encontramos, por fim, que a representação binária do nome “ANA” ficaria: 01000001 01001110 01000001.

Para iniciar a realização da atividade, pedi que os alunos procurassem nas tabelas de referência a representação decimal que corresponde a cada caractere de seus nomes. Em seguida, cada aluno teve que fazer a conversão desses números decimais em binários, utilizando o método da divisão euclidiana. Ao efetuar as divisões, os alunos perceberam que os números binários encontrados possuíam apenas sete dígitos, mas como se trata de um dado literal, ou seja, caracteres textuais, cada um deles deveria ser composto de oito dígitos. Então, adicionamos um zero à frente de cada número.

Durante a realização da atividade, alguns alunos utilizaram aplicativos de conversão online para conferir suas respostas, enquanto outros preferiram fazer a conversão manualmente, reforçando o aprendizado do sistema binário. Circulando pela sala, ajudei os que estavam com dificuldade, principalmente na hora de completar os números binários para 8 bits.

Em uma das mesas que visitei, uma aluna me perguntou se havia diferenciação entre letras normais e acentuadas, ao que respondi que sim. Expliquei que a tabela ASCII padrão pode não conter caracteres acentuados já que contempla apenas os caracteres básicos do inglês, mas que a tabela ASCII estendida possibilita a utilização de acentos e caracteres especiais.

Ao final da aula, pedi que alguns voluntários escrevessem seus nomes em binário no quadro. A turma se divertiu tentando adivinhar qual nome correspondia a cada sequência. Aproveitei para reforçar a importância do código binário na comunicação entre computadores e como a linguagem humana é transformada em linguagem de máquina.

Quando pedi que os alunos dessem um feedback à respeito do que foi visto em aula, um deles disse que achou muito interessante ver como seu nome poderia virar uma sequência de números e que não imaginava que as letras eram guardadas assim no computador. Outra aluna disse que no começo achou difícil fazer as conversões para binário, mas que depois que entendeu o método ficou mais fácil. Outra aluna disse que gostou de aprender algo que é realmente usado na informática, e, por fim, um aluno disse que achou bacana realizar uma atividade prática, já que geralmente só veem teoria.

Em suma, a atividade foi bem recebida, despertou a curiosidade dos alunos e proporcionou uma vivência concreta do uso do sistema binário e do código ASCII, fundamentais para o funcionamento dos computdores. O envolvimento e o feedback positivo indicaram que a aula atingiu seu objetivo de aproximar a teoria da prática.

5.7 Jogo de NIM

O jogo de Nim é um dos jogos matemáticos mais antigos e conhecidos, com origens que remontam à antiguidade. Embora a origem exata seja incerta, acredita-se que o Nim tenha sido inspirado por jogos tradicionais de retirada de objetos, praticados em diversas culturas ao redor do mundo. A versão moderna do Nim foi formalmente descrita pelo matemático Charles Leonard Bouton em 1901, que também desenvolveu a teoria matemática que explica como vencer o jogo utilizando o conceito de soma binária (ou operação XOR).

O Nim tornou-se um marco nos estudos de teoria dos jogos e combinatória, sendo frequentemente utilizado como exemplo introdutório em livros de matemática recreativa e lógica. No Brasil, diversos autores, como (VIEIRA et al., 2016) e (FREDERICO; COSTA, 2022), abordam o Nim em obras sobre jogos matemáticos, destacando sua importância para o desenvolvimento do raciocínio lógico e estratégico.

O jogo se inicia com várias pilhas, cada uma contendo uma quantidade específica de objetos. Os jogadores se revezam para remover qualquer quantidade de objetos de uma única pilha durante sua vez. Eles devem remover pelo menos um objeto, mas podem remover quantos objetos quiserem desde que sejam da mesma pilha. Vence a partida o jogador que retirar o último objeto.

Por exemplo, seja uma partida contendo três pilhas com sete objetos em cada uma. O primeiro jogador (P1) retira quatro objetos da primeira pilha, restando então três objetos. Em seguida, o segundo jogador (P2) retira dois objetos da terceira pilha, restando então cinco objetos. Na rodada seguinte, P1 retira cinco objetos da segunda pilha, restando então dois objetos. Em seguida, P2 então retira os três objetos restantes da primeira pilha. Dando continuidade, P1 retira três objetos da terceira pilha, restando dois objetos. P2 retira os dois últimos objetos da segunda pilha e, em seguida, P1 retira os dois últimos objetos da terceira pilha, sendo assim, vitória do P1 por ter retirado os dois últimos objetos. Um esquema representativo desta partida pode ser observado na figura 9.

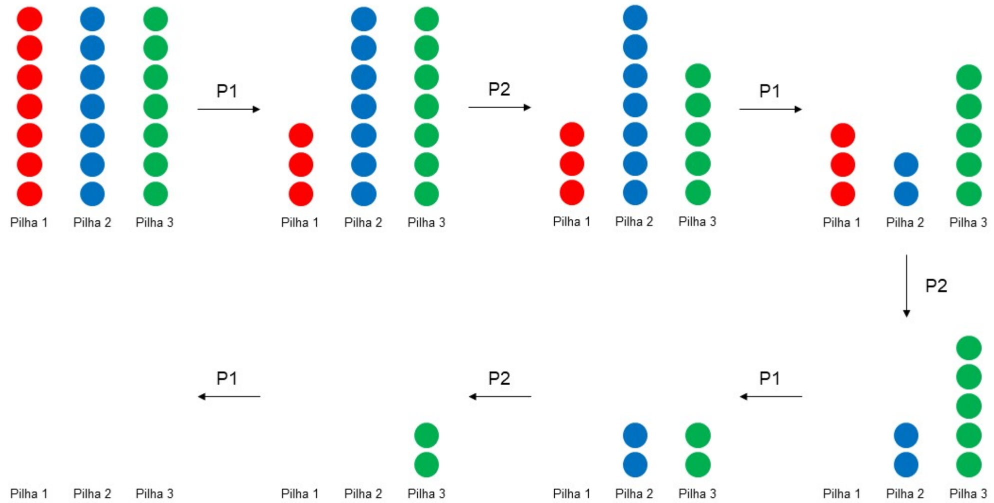

Figura 9 – Uma partida do "Jogo de NIM". Fonte: O Autor

A teoria do jogo de NIM está intimamente ligada à teoria dos números e à aritmética binária. Bouton (1901-1902) demonstrou que a estratégia vencedora está relacionada ao conceito de "soma NIM", que é a soma exclusiva (ou soma XOR) dos números de objetos em cada pilha, expressos em binário. A operação XOR (ou soma exclusiva) é uma operação binária que resulta em 1, se os bits correspondentes dos operandos forem diferentes, e 0, se forem iguais. Por exemplo:

3(binário 011) **XOR** 4(binário 100) = 7(binário 111)

A estratégia vencedora do Jogo de NIM se baseia em entregar ao seu oponente uma configuração em que a soma NIM das quantidades de objetos de cada pilha seja **zero**. Sendo assim, o primeiro passo é calcular a soma NIM no início de cada turno. Caso a soma NIM encontrada seja zero, você está em uma posição desfavorável se o oponente jogar corretamente. Caso contrário, é possível performar uma jogada que torne essa soma zero. Para isso, basta identificar uma pilha onde, ao remover um certo número de objetos, a soma NIM da configuração resultante se torne zero e, em seguida, retirar os objetos dessa pilha conforme necessário.

Vamos tomar como base a partida apresentada na figura 9. No início do jogo, estão presentes sete objetos em cada pilha. Sendo assim, para as três pilhas a representação binária é $(111)_2$. Efetuando a soma NIM, temos em binário:

111 **XOR** 111 **XOR** 111 = 111

Ou também,

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Em seguida, o jogador 1 retira quatro objetos da primeira pilha. Logo, a representação binária da primeira fila passa a ser $(011)_2$. Sendo assim, efetuando a soma NIM, temos:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Percebe-se que, ao efetuar esta jogada, o jogador 1 falhou em repassar à seu oponente uma soma NIM igual a zero. Sendo assim, caberia ao jogador 2 efetuar uma jogada que resultasse nesta soma desejada. Porém, isso não acontece. Veja que o jogador 2 retirou dois objetos da terceira pilha, sendo assim a nova representação binária desta pilha de $(101)_2$. Efetuando a soma NIM, temos:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Novamente, foi feita uma jogada que não resultou na soma NIM desejada, e passa-se a vez para o jogador 1. Visto que na soma NIM obteve-se o dígito 1 apenas no primeiro bit, uma jogada interessante para seguir o jogo seria retirar um objeto de qualquer uma das três pilhas. Por exemplo, caso o jogador 1 tivesse retirado um objeto da segunda pilha, teríamos a seguinte configuração:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Desta forma, caberia ao jogador 2 realizar uma jogada visando a manutenção desta mesma soma, para então vencer o jogo.

É de suma importância pontuar que, novamente, o exercício do cálculo mental é imprescindível para que as estratégias vencedoras sejam aplicadas neste jogo. É necessário, em primeiro lugar, identificar quais as representações binárias das quantidades de objetos de cada pilha; em seguida, efetuar a soma NIM, para somente então, realizar uma jogada que seja favorável. São muitas operações para ser realizadas "de cabeça" e, na grande maioria das vezes, percebe-se que os alunos não estão preparados para este tipo de tarefa.

Em um determinado dia, propus aos alunos de uma turma de 1° ano do ensino médio da Escola Estadual Comendador Nascimento Nunes Leal um modelo do Jogo de NIM. Iniciei a aula explicando brevemente o que é o jogo e, em seguida, escrevi no quadro: "O jogo de NIM é um jogo de estratégia para dois jogadores. Começamos com um certo número de objetos organizados em uma ou mais pilhas. Em cada jogada, o participante pode retirar qualquer quantidade de objetos de uma única pilha. Ganha quem retirar o último objeto." Fiz questão de enfatizar que o objetivo era pensar em estratégias para vencer, e que o jogo envolve muito raciocínio lógico.

Perguntei se algum aluno gostaria de ser voluntário para jogar uma partida comigo no quadro, ao que uma determinada aluna se ofereceu. Organizamos três pilhas de palitos desenhadas no quadro (com 3, 5 e 7 palitos, respectivamente) e começamos a jogar. Enquanto jogávamos, fui explicando cada jogada, perguntando à turma quais seriam as melhores opções e incentivando-os a pensar em possíveis estratégias.

Durante a partida, a aluna retirou dois palitos da terceira pilha. Perguntei à turma: "Se vocês estivessem no lugar da Ana, teriam feito a mesma escolha? Por quê?" Alguns alunos responderam que sim, outros sugeriram retirar de outra pilha, o que gerou um breve debate sobre as possibilidades do jogo.

Após a demonstração, dividi a turma em grupos de quatro alunos e entreguei palitos de picolé para cada grupo. Expliquei que cada grupo deveria organizar três pilhas com quantidades diferentes de palitos e jogar entre si, revezando os jogadores. Pedi para que observassem as estratégias utilizadas e anotassem quem ganhou cada partida.

Enquanto circulava pela sala, alguns alunos fizeram perguntas sobre o funcionamento do jogo:

- "Professor, posso tirar palitos de mais de uma pilha na mesma vez?"
- "Existe uma quantidade mínima ou máxima de palitos que posso pegar?"
- "Se sobrar só um palito, quem pega, ganha ou perde?"

Respondi a todos os questionamentos reforçando as regras: só é permitido retirar palitos de uma única pilha por vez, pode-se retirar quantos quiser, desde que seja de uma só pilha, e quem pegar o último palito vence.

Ao final da aula, pedi para que cada grupo compartilhasse rapidamente suas impressões e estratégias. Perguntei se alguém havia percebido algum padrão ou tática que ajudasse a ganhar o jogo. Alguns alunos notaram que, às vezes, era possível "forçar" o adversário a perder, dependendo de como as pilhas ficavam organizadas.

Encerrando a aula, perguntei aos alunos o que eles haviam achado da atividade. A maioria dos alunos relatou ter gostado da experiência, mencionando que o jogo tornou a aula mais divertida e desafiadora. Alguns disseram que nunca tinham pensado em matemática dessa forma e que gostariam de repetir atividades semelhantes. Outros comentaram que, apesar de parecer simples, o jogo exigiu bastante atenção e raciocínio.

Na aula da semana seguinte, retomei o tema do jogo de NIM com os alunos da mesma turma escrevendo a seguinte pergunta no quadro: "Como vencer sempre no jogo de NIM?". Perguntei aos alunos quais haviam sido suas percepções sobre o jogo. Um aluno disse que percebeu que havia um "jeito garantido de ganhar", enquanto outro aluno disse que "certos movimentos obrigavam o oponente a perder". Usei esses comentários como gancho para explicar que existe, sim, uma estratégia matemática perfeita.

No quadro, montei um esquema de jogo com três pilhas contendo 3, 5 e 6 palitos, respectivamente. Pedi aos alunos para traduzi-los para binário. Alguns alunos se lembravam de como fazer a conversão. Reforcei:

- $3_{10} = 011_2$
- $5_{10} = 101_2$
- $6_{10} = 110_2$

Em seguida, apresentei aos alunos o conceito da operação **XOR**, ou soma binária. Expliquei que, nesta soma, dois bits de mesmo valor resultam em 0 e dois bits de valores diferentes resultam em 1. Assim sendo, efetuei com os alunos a soma XOR das quantidades de palitos das três pilhas do jogo.

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Após finalizar a soma, apresentei aos alunos o resultado-chave: "Se a soma NIM (XOR de todas as pilhas) for 0, quem vai jogar está em posição perdedora; se for diferente de 0, há um movimento que leva a 0 e garante a vitória" (LOPES, 2017). A maioria dos alunos ficaram confusos então propus um novo exemplo, desta vez com três pilhas contendo 4, 6 e 5 palitos. Fizemos a conversão para binário e em seguida a soma NIM.

- $4_{10} = 100_2$
- $6_{10} = 110_2$
- $5_{10} = 101_2$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Feita a soma, perguntei aos alunos se essa soma demonstrava uma jogada favorável ou desfavorável para o primeiro jogador. Os alunos responderam que era favorável, já que a soma NIM era diferente de zero. Assim, expliquei que, para garantir a vitória, uma jogada deve ser feita de forma que, após a retirada de palitos, a nova soma NIM passe a ser igual a zero. Neste momento, dei aos alunos um tempo para pensar em qual seria a melhor jogada a se fazer. Observando a soma no quadro, uma aluna percebeu que uma boa estratégia seria transformar a quantidade de palitos da segunda pilha em 001_2, ou seja retirar 5 palitos da segunda pilha, entregando ao oponente a seguinte configuração:

- $4_{10} = 100_2$
- $1_{10} = 001_2$
- $5_{10} = 101_2$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Após esta jogada, a maioria dos alunos então começou a perceber como funciona o cálculo por trás do jogo de NIM. Neste momento, um aluno fez a seguinte pergunta: "Professor, se a soma NIM já é 0 e sou obrigado a jogar, isso quer dizer que vou perder de qualquer jeito?". Respondi que sim, a não ser que o oponente cometesse algum erro na manutenção da soma NIM igual a zero.

Finalizada a explicação, dividi os alunos em trios e forneci a cada trio 21 palitos de picolé e uma tabela-guia com as seguintes colunas: "Pilhas", "Representação binária", "Soma NIM" e "Movimento planejado". Pedi aos alunos que jogassem três partidas, alternando quem começa cada partida. Pedi também que os alunos, antes de cada jogada, realizassem a soma NIM e planejasse o movimento para "zerar" a soma.

Circulando pela sala, percebi que alguns grupos criaram códigos de cores para marcar bits 1 e 0, facilitando o cálculo mental. Enquanto isso, um dos grupos testou iniciar a partida em posição perdedora (soma NIM zero) para ver se o adversário errava, o que foi uma iniciativa interessante da parte deles. Uma aluna me perguntou se precisava sempre mexer na pilha com mais palitos, ao que respondi que não era um movimento obrigatório, mas que geralmente é a pilha que possibilita zerar a soma NIM. Outro aluno perguntou se a operação XOR serve apenas para três números, ao que respondi que serve para quaisquer quantidades.

Ao fim da aula, convidei os grupos a compartilhar os resultados. Uma aluna disse que, após entender o conceito da soma NIM, não perdeu nenhuma partida. Outra aluna disse que sentiu dificuldade no início mas que depois entendeu quando o padrão apareceu. Por fim, um aluno disse que gosta muito quando há a oportunidade de jogar primeiro e entender depois o fundamento por trás do jogo.

Em suma, a aplicação do jogo de NIM na turma mostrou-se bastante produtiva. Os alunos se envolveram ativamente, discutiram estratégias e, de maneira descontraída, exercitaram o raciocínio lógico. Além disso, a atividade serviu de introdução para futuros conteúdos sobre sistemas numéricos e lógica matemática, mostrando como o lúdico pode ser um importante aliado no processo de ensino-aprendizagem.

6 Conclusão

A presente investigação reafirma, com base empírica consistente, que a integração entre conteúdos de Matemática e jogos didáticos constitui estratégia eficaz para a promoção de aprendizagens significativas, notadamente na introdução do Sistema de Numeração Binário na Educação Básica..

O conjunto de tarefas — Calendários Mágicos, Adivinhar a Figura, Adivinhar a Idade, escrita em ASCII e o Jogo de NIM — proporcionou evidências claras de incremento no engajamento discente, no cálculo mental e na compreensão conceitual. O NIM, formalizado por Bouton (1901-1902) a partir da operação XOR, confirmou-se como recurso didático altamente eficiente: a conversão de quantidades para sua representação binária, o cálculo da soma NIM e a elaboração da jogada ótima constituem oportunidades legítimas para o desenvolvimento de aritmética, lógica booleana e teoria dos números. Durante o estudo de caso, observou-se melhora tangível no raciocínio lógico, na rapidez de processamento mental e no sentimento de autoeficácia dos alunos, que passaram a atribuir o êxito à estratégia adotada, e não ao acaso.

Ressalta-se que tais avanços foram alcançados em contexto de infraestrutura limitada e de reconhecida desvalorização da carreira docente em Minas Gerais e no Brasil. Nessa conjuntura, cada sessão bem-sucedida assumiu caráter duplo: instrumento pedagógico de superação de defasagens e ato concreto de resistência às condições adversas. O retorno sistemático dos achados à comunidade escolar buscou, ainda, fortalecer a cultura da pesquisa aplicada e incentivar a replicação de metodologias análogas por outros profissionais da educação básica. Os resultados obtidos permitem afirmar, com razoável grau de confiança, que a mediação do sistema binário por meio de jogos potencializa a motivação, consolida o pensamento computacional e aprofunda a compreensão de estruturas numéricas; que os jogos de estratégia imparcial, como o NIM, constituem ponte efetiva entre os conteúdos curriculares de Matemática e a lógica de programação exigida no itinerário de Formação Técnica em Informática; e que a adoção dessas práticas é exequível mesmo em ambientes de recursos escassos, desde que o docente assuma papel de mediador qualificado e estrategista curricular.

Conclui-se que a implantação criteriosa de jogos matemáticos configura estratégia didática sólida para democratizar o acesso a saberes formais, robustecer a formação técnica emergente e, simultaneamente, enfrentar os mecanismos de desvalorização docente. Ensinar por meio do lúdico não se restringe à diversão: representa a promoção de raciocínio estruturado, o estímulo ao pensamento computacional e a reafirmação do compromisso social da escola pública com a equidade e a excelência. As evidências aqui apresentadas sustentam a convicção de que práticas pedagógicas fundamentadas em jogos podem tornar-se mais engajadoras, inclusivas e academicamente consistentes. Este estudo, entretanto, não se encerra em si mesmo; inaugura um ciclo de cooperação interinstitucional destinado a fortalecer as redes de pesquisa que investigam essa temática. Almeja-se, portanto, que seus achados reverberem em benefício da sociedade, da Universidade Federal do Espírito Santo e, sobretudo, da Educação Básica brasileira, inspirando novos estudos, políticas e intervenções capazes de consolidar uma cultura educacional mais justa, inovadora e transformadora.

Referências

BELL, T.; FELLOWS, M.; WITTEN, I. H. *Computer Science Unplugged: ensinando ciência da computação sem o uso do computador*. classic.csunplugged.org, 2011. Disponível em: <https://classic.csunplugged.org/wp-content/uploads/2014/12/CSUnpluggedTeachers-portuguese-brazil-feb2011.pdf>. Citado na página 26.

BERTICELLI, D. G. D.; ZANCAN, S. Calme pro—cálculo mental para professores. *Revista de ensino de Ciências e Matemática*, v. 12, n. 4, p. 1–21, 2021. Citado na página 49.

BOUTON, C. L. Nim, a game with a complete mathematical theory. *The Annals of Mathematics*, v. 3, n. 1/4, 1901–1902. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 60.

DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de aritmética*. São Paulo, SP: Editora Atual, 1991. Citado na página 15.

EVES, H.; DOMINGUES, H. *Introdução à história da matemática*. 5a. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

FLORES, C. R. O ensino de matemática e seus desafios: perspectivas para a motivação dos alunos. *Revista Educação Matemática em Foco*, 2012. Citado na página 27.

FREDERICO, A. C. V.; COSTA, C. S. O jogo nim, sua estratégia de vitória e uma nova forma de jogar com foco na educação básica. *Revista Professor de Matemática On line*, 2022. Citado na página 53.

GOMES, M. E. d. O. Os números binários aplicados à computação. *PROFMAT*, 2021. Citado na página 17.

GOODFELLOW, I.; BENGIO, Y.; COURVILLE, A. *Deep learning*. [S.l.]: The MIT Press, 2016. ISBN 9780262035613. Citado na página 25.

GRANDO, R. C. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. Tese (Doutorado) — Universidade de Campinas, Campinas, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 30.

GRAVES, A.; MOHAMED, A.-r.; HINTON, G. Speech recognition with deep recurrent neural networks. *IEEE*, 2013. Citado na página 25.

HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética*. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2006. Citado na página 19.

HEFEZ, A. *Iniciação à aritmética*. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2015. Citado na página 15.

HEFEZ, A. *Aritmética*. Rio de Janeiro, RJ: Coleção PROFMAT-SBM, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

HINTON, G. et al. Deep neural networks for acoustic modeling in speech recognition: The shared views of four research groups. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2012. Citado na página 25.

IFRAH, G. *História Universal dos Algarismos*. Rio de Janeiro, RJ: Editora Nova Fronteira, 1947. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

IMPA. *Lançamento ICM 2018 - Matemágicas - Parte 1*. 2015. YouTube, publicado em 20 de fev. de 2015. Duração: 17:57min. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Z_$EWxT5JVE > .Acessoem :$ $17denov.de2025.Citadonapágina35$.

KRIZHEVSKY, A.; SUTSKEVER, I.; HINTON, G. E. Imagenet classification with deep convolutional neural networks. *NeurIPS Proceedings*, 2012. Citado na página 25.

LECUN, Y.; BENGIO, Y.; HINTON, G. Deep learning. *Nature*, 2015. Citado na página 25.

LIMA, E. L.; SILVA, R. C. *O ensino de Matemática na Educação Básica: reflexões e práticas do PROFMAT*. [S.l.]: SBM, 2019. Citado na página 28.

LOPES, D. *Jogos: Cê Manja ou Nim?* OBM, 2017. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/02/Davi-Lopes-Jogos-CÃł-Manja-ou-Nim.pdf>. Citado na página 57.

LORENZ, E. *The essence of chaos*. Seattle: University of Washington Press, 1993. Citado na página 26.

MARTINES, V. M. Base de numeração e o sistema binário. *PROFMAT*, 2019. Citado na página 18.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

SALVIATO, J. L. *Sistema de numeração binário: dos computadores à sala de aula*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.

SANTOS, V. R.; OLIVEIRA, C. G. A Álgebra boolena presente nos circuitos lógicos. *Caderno de Graduação - Ciências Exatas e Tecnológicas - UNIT - Sergipe*, 2016. Citado na página 24.

SCHMIDHUBER, J. Deep learning in neural networks: An overview. *Neural Networks*, 2015. Citado na página 25.

SILVA, J. R. Desafios no ensino de sistemas numéricos na educação básica: uma análise dos recursos didáticos disponíveis. *Revista Brasileira de Educação em Matemática*, 2022. Citado na página 30.

SILVER, D. et al. Mastering the game of go with deep neural networks and tree search. *Nature*, 2016. Citado na página 25.

SMOLE, K.; DINIZ, M.; CÂNDIDO, P. *Cadernos do Mathema: Ensino Fundamental: Jogos de Matemática de 1° a 5° ano*. Artmed Editora, 2007. ISBN 9788536310626. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=CECajTdLUKAC>. Citado na página 34.

STALLINGS, W. *Cryptography and Network Security: Principles and Practice*. Pearson, 2016. ISBN 9780134444284. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=6MgsjwEACAAJ>. Citado na página 24.

STEFFENON, R.; GUARNIERI, F. *Belos problemas de matemática: indução e contagem*. [S.l.]: SBM, 2016. Citado na página 26.

TAHAN, M. *O Homem que Calculava*. [S.l.]: Editora Record, 2001. 304 pages. ISBN 8501061964. Citado na página 33.

VIEIRA, F. M. S. Álgebra booleana. *Educação & Tecnologia*, v. 5, n. 1, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 24, 26 e 30.

VIEIRA, M. S. L. M. et al. O uso do jogo nim como recurso didático à construção do conceito de múltiplos no 6º ano do ensino fundamental. *ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2016. Citado na página 53.

VYGOTSKY, L. *Pensamento e Linguagem*. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 1934. Citado na página 32.