

André Luiz Favero

Matemática Financeira: uma proposta de Sequência Didática para o Ensino Médio

Vitória

2024

André Luiz Favero

Matemática Financeira: uma proposta de Sequência Didática para o Ensino Médio

Dissertação de mestrado apresentada ao
PROFMAT como parte dos requisitos exi-
gidos para a obtenção do título de Mestre em
Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Milton Edwin Cobo Cortez

Vitória

2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

F273m Favero, André Luiz, 1991-
Matemática Financeira: uma proposta de Sequência
Didática para o Ensino Médio / André Luiz Favero. - 2024.
82 p. : il.

Orientador: Milton Edwin Cobo Cortez.

Coorientadores: Iancardek Pereira Araujo, Alexandre Krüger
Zocolotti.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de
Ciências Exatas.

1. Matemática Financeira. 2. Educação Financeira. 3.
Sequência Didática. I. Cortez, Milton Edwin Cobo. II. Araujo,
Iancardek Pereira. III. Zocolotti, Alexandre Krüger. IV.
Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências
Exatas. V. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“Matemática Financeira: Uma proposta de sequência didática para o ensino médio”

André Luiz Favero

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 20/12/2024 por:

Documento assinado digitalmente
gov.br MILTON EDWIN COBO CORTES
Data: 21/12/2024 11:03:16-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.(a) Dr.(a) Milton Edwin Cobo Cortez
Orientador(a) – UFES

Documento assinado digitalmente
gov.br ALANCARDEK PEREIRA ARAUJO
Data: 22/12/2024 12:19:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.(a) Dr.(a) Alancardek Pereira Araujo
Membro Interno – UFES

Documento assinado digitalmente
gov.br ALEXANDRE KRÜGER ZOCOLOTTI
Data: 22/12/2024 11:34:30-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.(a) Dr.(a) Alexandre Krüger Zocolotti
Membro Externo – IFES

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, autor de toda criação, a meus pais João Batista e Auxilia, a minha esposa Juliana e a nossa filha Maria Antônia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois é o autor da vida e sustento nessa caminhada.

Agradeço a toda minha família, minha esposa sempre presente ao meu lado me dando força, meus pais que sempre me incentivaram nos estudos desde criança, meus irmãos, cujo sempre pude contar com apoio.

Agradeço a meus amigos, Vanildo, amigo religioso dos tempos de ensino médio, que mesmo longe está em oração, aos amigos da EEEFM Coronel Antônio Duarte, de Iconha que sempre me apoiaram e me incentivaram neste mestrado, e a professora Doutora Solange Prado que me indicou o mestrado e me deu total força para iniciar o mesmo.

Agradeço na pessoa do diretor Felipe De Nadai, a EEEFM Camila Motta, de Alfredo Chaves, escola no qual leciono, todo apoio prestado nesse tempo de mestrado.

Agradeço especialmente a meu colegas de mestrado, que sempre se colocaram a disposição para ajuda me incentivando a nunca desistir, guardo todos com muito carinho.

Agradeço a todos professores do mestrado, que direta ou indiretamente, sempre estiveram prontos a nos ajudar no desenvolvimento das disciplinas e conhecimentos.

Agradeço ao meu orientador Milton Cobo, que desde o início apoiou essa dissertação e a enriqueceu com suas orientações e conhecimentos.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro essencial concedido para o desenvolvimento deste mestrado.

E agradeço a SEDU, Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo, que com o benefício concedido de redução de carga horária, possibilitou frequentar o mestrado as quinta feiras e desenvolver os estudos.

“Investir em conhecimento sempre rende os melhores juros.”
(Benjamin Franklin)

Resumo

A Matemática Financeira deveria ser um campo fundamental na matemática do ensino médio, visto a necessidade humana cotidiana de analisar e tomar decisões sobre o uso do dinheiro e planejamento futuro. Sua importância vai muito além do ambiente escolar, sendo essencial na vida pessoal, profissional e social das pessoas. Porém, dados mostram que grande é o número de endividados no Brasil e que a maioria das pessoas ainda deixam suas economias na poupança, isto nos reflete falta de organização financeira e de conhecimento sobre mercado financeiro e investimentos. Com certeza, a maioria destas pessoas assim como eu, não tiveram educação financeira, nem em casa e nem na escola. Nessa linha, esta dissertação apresenta o desenvolvimento de uma Sequência Didática voltada ao ensino de Matemática Financeira no ensino médio, com o objetivo de aproximar os conteúdos do cotidiano dos alunos propondo uma abordagem prática e interativa. A Sequência Didática criada inclui temas como organização financeira, porcentagem, juros simples e compostos, conversão de taxas, formas de economizar, formas de pagamento, mercado financeiro, investimentos e empréstimos, explorando cada conceito por meio de atividades que envolvem situações reais. Ao se trabalhar essa sequência, espera-se que desenvolvam-se nos estudantes habilidades de cálculo e raciocínio crítico bem como uma melhor compreensão dos conceitos financeiros e uma maior capacidade de aplicá-los em situações do cotidiano. Assim, esta dissertação visa fornecer um material substancial para professores de matemática abordarem Matemática Financeira de maneira relevante e atraente para os estudantes.

Palavras-chave: Matemática financeira, educação financeira.

Abstract

Financial Mathematics should be a fundamental field of the mathematics of high school, given the everyday human need to analyze and make decisions regarding the use of money and future planning. Its importance goes far beyond the school environment; it is essential in the personal, professional, and social lives of individuals. However, data show a high level of indebtedness in Brazil, and most people still keep their savings in low-interest accounts, reflecting a lack of financial organization and knowledge about the financial market and investment opportunities. Most likely, many of these individuals, like myself, did not receive financial education, either at home or in school. In this regard, this dissertation presents the development of a Didactic Sequence aimed at teaching financial mathematics in high school, with the objective of connecting the content with students' everyday lives through a practical and interactive approach. The created Didactic Sequence includes topics such as financial organization, percentages, simple and compound interest, rate conversions, saving methods, payment options, the financial market, investments, and loans, exploring each concept through activities that involve real-life situations. By working through this sequence, it is hoped that students will develop calculation skills, critical thinking, and a better understanding of financial concepts, along with an improved ability to apply these concepts in real-life situations. Thus, this dissertation aims to provide substantial material for mathematics teachers to approach financial mathematics in a way that is both relevant and engaging for students.

Keywords: Financial mathematics, financial education.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Função crescente / decrescente	24
Figura 2 – Gráfico das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = (\frac{1}{2})^x$	25
Figura 3 – Juros simples x juros compostos	27
Figura 4 – Juro simples 12 meses	27
Figura 5 – Juro composto 12 meses	28
Figura 6 – Juro simples x juro composto em 240 meses	28
Figura 7 – TAXA SELIC	39
Figura 8 – Taxa Refencial	39
Figura 9 – IPCA	40
Figura 10 – Planilha controle pessoal B3 (parte 1)	50
Figura 11 – Planilha controle pessoal B3 (parte 2)	51
Figura 12 – Recarga da tag	52
Figura 13 – Desconto a vista no fogão	53
Figura 14 – Votos válidos prefeito Alfredo Chaves	54
Figura 15 – Nescau preços	56
Figura 16 – Maionese preços	56
Figura 17 – Planilha comparativo de embalagens	57
Figura 18 – Produtos supermercado 1	58
Figura 19 – Produtos supermercado 2	59
Figura 20 – Geladeira	61
Figura 21 – Parcelas Geladeira	62
Figura 22 – Máquina de lavar	64
Figura 23 – Máquina de lavar - Valor futuro	65
Figura 24 – Cartão de crédito benefícios	67
Figura 25 – Simulação dos investimentos pela planilha	76
Figura 26 – Gráfico dos investimentos	76
Figura 27 – Simulações de investimentos com aportes	78
Figura 28 – Simulações de investimentos com aportes	78
Figura 29 – Simulação Tabela SAC	79
Figura 30 – Simulação Tabela PRICE	80

Lista de tabelas

Tabela 1 – COLEÇÃO CONSCIENTE DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA	17
Tabela 2 – COLEÇÃO CONSCIENTE DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA	18
Tabela 3 – Aproximação do número e	23
Tabela 4 – Aplicação com aportes mensais	33
Tabela 5 – Aplicação e pagamento da TV	36
Tabela 6 – Tributação Imposto de Renda	40
Tabela 7 – Tabela SAC	45
Tabela 8 – Tabela PRICE	45
Tabela 9 – Planilha de Orçamento Pessoal	49
Tabela 10 – Recarga Tag	53
Tabela 11 – Cálculo de 0,5%	54
Tabela 12 – Supermercado 1 x supermercado 2	59
Tabela 13 – Valor presente pagamento da geladeira	62
Tabela 14 – Valor futuro pagamento da geladeira	63
Tabela 15 – Valor presente pagamento da máquina de lavar	65
Tabela 16 – Investimentos simulações	73
Tabela 17 – Investimentos simulações	75

Lista de abreviaturas e siglas

B3	Brasil, Bolsa e Balcão
BC	Banco Central
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CDB	Certificado de Depósito Bancário
CDI	Certificado de Depósito Interbancário
COPOM	Comitê de Política Monetária
CMN	Conselho Monetário Nacional
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
INSS	Instituto Nacional do Seguro Social
IPCA	Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo
IOF	Imposto sobre Operações Financeiras
IR	Imposto de Renda
FGC	Fundo Garantidor de Crédito
LCA	Letra de Crédito do Agronegócio
LCI	Letra de Crédito Imobiliário
PRICE	Nome dado em homenagem ao criador do método, Richard Price
RCA	Certificados de Recebíveis do Agronegócio
RCI	Certificados de Recebíveis Imobiliários
PIX	Pagamento Instantâneo
SAC	Sistema de Amortização Constante
TR	Taxa Referencial
SEDU	Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo
SELIC	Sistema Especial de Liquidação e Custódia

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	CONTEÚDOS ESPECÍFICOS	15
2.1	Matemática Financeira na BNCC	15
2.2	Orientações Curriculares Sedu 2023	16
2.3	Porcentagem	18
2.3.1	Aumentos e descontos	19
2.3.2	Aumentos e descontos sucessivos	20
2.4	Juros	20
2.4.1	Um pouco da história	20
2.4.2	Número neperiano (e)	21
2.4.3	Aplicação do número (e)	22
2.5	Função exponencial	24
2.6	Juro simples	25
2.7	Juro composto	26
2.8	Taxas equivalentes	29
2.9	Capitalização composta com aportes mensais	33
2.10	Capitais equivalentes	35
2.10.1	Valor futuro	36
2.10.2	Valor presente	37
2.11	Mercado financeiro	38
2.12	Investimentos	41
2.13	Sistemas de amortização	44
2.13.1	Tabela SAC	44
2.13.2	Tabela PRICE	45
3	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	47
3.1	Estrutura da Sequência Didática	47
3.2	Plano 1: Organizando receitas e gastos	48
3.3	Plano 2: Usando porcentagem	50
3.4	Plano 3: Economia nas embalagens	55
3.5	Plano 4: Calculando descontos	57
3.6	Plano 5: Compra a vista ou a prazo	60
3.7	Plano 6: Uso do cartão de crédito	66
3.8	Plano 7: Um pouco do mercado financeiro	68
3.9	Plano 8: Conversão de taxas	68

3.10	Plano 9: Simulações de investimentos em renda fixa	72
3.11	Plano 10: Simulações de investimentos com aportes mensais	76
3.12	Plano 11: Simulações de empréstimos	77
4	CONCLUSÃO	81
	REFERÊNCIAS	82

1 Introdução

Os professores de matemática escutam frequentemente a indagação “onde vou usar isso na minha vida”. Em Matemática Financeira, esse cenário não é diferente, pois os conteúdos relacionados, tais como, porcentagem, regra de três, juros simples e compostos, podem ser aplicados as situações financeiras das pessoas, de forma geral, talvez seja o campo da matemática mais útil para as pessoas, pois todos precisamos do dinheiro para viver e realizar os afazeres diariamente, seja alimentação, transporte, lazer, etc. E a forma de como controlamos nossos gastos e receitas, realizamos compras, investimentos e mesmo empréstimos, implicam diretamente na qualidade da nossa vida futura.

Na vivência de comunidade e como docente em sala de aula, observo que dentre as crianças e jovens, poucas são as que possuem instrução financeira nas famílias e pouco também a escola oferta. Nesse contexto, segundo ([KIYOSAKI, 2017](#)), uma das razões pelas quais os ricos ficam mais ricos, os pobres, mais pobres e a classe média luta com as dívidas é que o assunto dinheiro não é ensinado nem em casa nem na escola.

Recordo a minha própria trajetória, nos meus estudos, tanto no fundamental como no ensino médio, o tema nunca foi estudado de forma aprofundada, pelo contrário, sempre superficialmente, principalmente juros compostos, pois o mesmo nunca foi tão cobrado em provas como no ENEM. Recordo ainda, que na minha família se discutia muito sobre cuidado em se gastar: meus pais sempre prezaram muito a economia, visto as dificuldades financeiras que tínhamos quando criança. Mas, como a maioria das famílias, pouco sabíamos sobre investimentos. Minha primeira conta salário foi aberta no meu primeiro emprego, no final de 2012, com 21 anos e até então, não sabia que existia a aplicação da poupança nos bancos.

Essa realidade de ensino sobre Matemática Financeira nas famílias e escola, reflete diretamente na vida financeira das pessoas. No Brasil, segundo professor economista da USP Paulo Feldmann, os endividados representam 43% da população, são mais de 70 milhões de pessoas endividadas. Quando olhamos para aqueles que conseguem poupar, guardar algum dinheiro, de acordo com pesquisa feita pela CNI - Confederação Nacional da indústria em agosto de 2022, apenas 29% da população consegue poupar algum dinheiro, estes em maioria colocam seu dinheiro na poupança, hoje uma das aplicações de renda fixa menos rentável ([FELDMANN, 2023](#)).

Como docente a mais de 10 anos e professor de ensino médio desde 2017 lecionando nas escolas da Secretaria de Estado da Educação (SEDU), percebo a carência de material sobre Matemática Financeira ligada a educação financeira dos nossos estudantes.

Nesse contexto financeiro desafiador a nível nacional, da realidade de aprendizado

dos estudantes nas famílias e escolas sobre educação financeira e carência de materiais de apoio ao professor, fica evidente a importância de uma Sequência Didática que auxilie a prática dos professores em sala de aula, de maneira que estimulem os alunos e os engajem nos estudos.

Por tal reflexão, este trabalho tem como objetivo geral, propor uma Sequência Didática destinada a turmas do Ensino Médio, com vistas ao desenvolvimento de habilidades à Matemática Financeira.

Com o desenvolvimento do trabalho, temos os seguintes objetivos específicos:

- Estimular o estudo matemático desenvolvendo os conteúdos por meio dos exemplos do dia a dia.
- Tornar as aulas mais atrativas e dinâmicas, com envolvimento e participação dos alunos.
- Praticar e desenvolver os conhecimentos sobre os conteúdos de matemática financeira tais como, porcentagem, juros simples e compostos, conversão de taxas e funções.
- Criar condições para que os alunos melhorem sua qualidade de vida proporcionando um futuro melhor.
- Utilizar recursos tecnológicos como planilhas e calculadora.
- Aproveitar o celular como recurso favorável a construção de conhecimento em pesquisas, uso de aplicativos e calculadora.

O trabalho inicia-se com uma abordagem da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e das orientações curriculares da SEDU a respeito da Matemática Financeira, e está estruturado numa pesquisa científica sobre os conteúdos relacionados a mesma. No último capítulo, apresentamos uma sequência didática com onze planos de aula que envolvem orçamento financeiro, economia e formas de poupar, uso do cartão de crédito, mercado financeiro, investimentos e empréstimos.

2 Conteúdos específicos

Ao longo deste capítulo, será tratado um pouco sobre os conteúdos que envolvem matemática financeira, bem como uma análise sobre o assunto a partir da BNCC e das orientações curriculares da SEDU.

2.1 Matemática Financeira na BNCC

Como descrito por ([MAIA, 2022](#)), lidamos com dinheiro frequentemente na maioria do nosso tempo de vida. Desde crianças, já o utilizamos, por exemplo, para comprar guloseimas. O dinheiro se faz parte das nossas necessidades, sonhos e realizações, e diante das decisões que tomamos, assumimos as consequências, que por muitas pessoas é uma situação financeira difícil. Nessa perspectiva, de importância na vida humana, o ensino de educação financeira é fundamental para a realidade e futuro dos estudantes.

Assim, a educação financeira aborda os comportamentos do ser humano com o uso do dinheiro e a Matemática Financeira permite que as pessoas desenvolvam cálculos sobre suas finanças.

Quando tratamos de dinheiro, o tema é tão amplo, que aparece direta e indireta em vários campos temáticos da matemática, como por exemplo:

- Números: na realização das operações, porcentagem e proporcionalidades por exemplo.
- Álgebra: Determinando valores desconhecidos, uso de funções.
- Estatística: Levantamento de dados, cálculo de médias e outras medidas de tendência.

Nos anos iniciais do ensino fundamental, os alunos já iniciam os estudos indiretamente sobre Matemática Financeira, principalmente quando são expostos ao ensino das operações.

Nos anos finais, segundo a BNCC ([Brasil, Ministério da Educação, 2017](#)), o trabalho visa desenvolver habilidades relacionadas ao cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais.

([Brasil, Ministério da Educação, 2017](#)) Outro aspecto a ser considerado nessa unidade temática é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Essa unidade

temática favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro. É possível, por exemplo, desenvolver um projeto com a História, visando ao estudo do dinheiro e sua função na sociedade, da relação entre dinheiro e tempo, dos impostos em sociedades diversas, do consumo em diferentes momentos históricos, incluindo estratégias atuais de marketing. Essas questões, além de promover o desenvolvimento de competências pessoais e sociais dos alunos, podem se constituir em excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira e também proporcionar contextos para ampliar e aprofundar esses conceitos.

No ensino médio, a habilidades a seguir contempla diretamente o ensino de Matemática Financeira:

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Outras habilidades, tem a Matemática Financeira como um contexto para desenvolvimento de conteúdos, como por exemplo:

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

2.2 Orientações Curriculares Sedu 2023

O tema Educação Financeira é visto cada vez com mais relevância pela SEDU, assim como observamos pela BNCC. Diante disso, o currículo do Espírito Santo nos diz:

Os temas “Educação para o Consumo” e “Educação Financeira e Fiscal” possibilitam que os estudantes reflitam sobre a prática de consumo consciente a partir do desenvolvimento de comportamentos autônomos e saudáveis, que contribuem para a construção de uma vida mais equilibrada e sustentável, sob o ponto de vista financeiro, evitando desperdícios e afetando diretamente a vida do estudante e da comunidade local. Além disso, os estudantes também poderão aprender a gerenciar suas próprias finanças e analisar riscos e oportunidades de mercado, desenvolvendo uma mudança de cultura e de hábitos([Currículo do Espírito Santo, 2023](#)).

Em Matemática Financeira, alguns conteúdos são específicos, como juro simples e compostos por exemplo, mas outros objetos de conhecimento se utilizam na unidade

monetária, isso desde o ensino inicial, fundamental I, quando as crianças são estimuladas a contar, realizando as operações com dinheiro, por exemplo.

Esse cálculo ganha aprofundamento no ensino fundamental II (de 6º ao 9º ano), onde os já adolescentes, estão inseridos com maior participação em atividades que envolvem dinheiro, e assim, possuem normalmente, maiores responsabilidades quanto ao uso do dinheiro. Estes, estudam principalmente as operações, porcentagem, calculando descontos, acréscimos, juros simples, estudo de gráficos, médias, proporcionalidade, dentre outros.

Já no ensino médio, essa perspectiva é ainda maior, principalmente no segundo e terceiro ano do ensino médio, nestes anos as orientações curriculares trazem a Matemática Financeira junta ao cálculo de juros simples e essencialmente ao de juros compostos, relacionando com seus gráficos no estudo linear e exponencial.

Visando a inserção de educação financeira no cotidiano escolar, a SEDU propôs a partir do segundo trimestre, trabalhar em todas as séries/anos do fundamental II ao ensino médio a “COLEÇÃO CONSCIENTE de Educação Financeira” da autora Josi Gomes Barros.

Essa coleção vem com um volume para cada série, e cada volume é dividido em 4 unidades, trabalhando eixos de educação financeira de modo que o conhecimento seja sequencial e crescente ao longo das unidades/volumes. Podemos observar um resumo das coleções nas tabelas 1 e 2 abaixo do ensino fundamental II e ensino médio, respectivamente.

Tabela 1 – COLEÇÃO CONSCIENTE DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA

ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS		
6º ano	Unidade 1	A profissão dos sonhos
	Unidade 2	Economize praticando os três Rs
	Unidade 3	Construindo o orçamento doméstico
	Unidade 4	Consumir de maneira consciente
7º ano	Unidade 1	Como economizar água
	Unidade 2	A importância do seguro
	Unidade 3	Internet segura e consciente
	Unidade 4	Crédito responsável
8º ano	Unidade 1	Consumo consciente de alimentos
	Unidade 2	Meu primeiro negócio
	Unidade 3	O que são juros
	Unidade 4	Como aprender a investir
9º ano	Unidade 1	Customizar para poupar
	Unidade 2	A diferença entre querer e precisar
	Unidade 3	O que é inflação
	Unidade 4	O que é Código de Defesa do Consumidor

Fonte: Orientações curriculares SEDU 2024

Ainda sobre educação financeira, vale lembrar que o novo ensino médio possui os

Tabela 2 – COLEÇÃO CONSCIENTE DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA
ENSINO MÉDIO

1º ano	Unidade 1	Dinheiro e Consumo
	Unidade 2	Planejamento Financeiro
	Unidade 3	Crédito Responsável
	Unidade 4	Poupar e Empreender
2º ano	Unidade 1	Planejando a Vida Financeira
	Unidade 2	Consumo Além da Conta
	Unidade 3	Tipos de Investimento
	Unidade 4	Fontes de Renda
3º ano	Unidade 1	Planejamento e Gestão de Orçamento
	Unidade 2	Crédito Consciente
	Unidade 3	Geração de Renda
	Unidade 4	Consumo Consciente

Fonte: Orientações curriculares SEDU 2024

itinerários, que são escolhidos pela escola junto a comunidade escolar para sequência e aprofundamento, dentre estes, temos um itinerário de matemática sobre “EDUCAÇÃO FINANCEIRA E FISCAL”. Como são vários os itinerários para escolha, acaba que este não é contemplado por todas as escolas, logo, muitos estudantes do nosso estado não tem a oportunidade de se aprofundar no tema.

2.3 Porcentagem

A porcentagem aparece cotidianamente na vida das pessoas, seja no campo estatístico com levantamento de dados, seja no comércio com ofertas e descontos, nos bancos com taxas de juros referentes a aplicações e empréstimos, quem nunca se deparou com uma dessas frases:

- “Toda loja com até 70% de desconto”.
- “Petrobras anuncia aumento de 5,8% no preço da gasolina”.
- “Desemprego cai a 7,8% no mês de setembro”.
- “Mais de 40% dos brasileiros estão endividados”.
- “Taxa selic tem queda de 0,5 ponto ficando em 12,75% ao ano”.

Para compreender porcentagem, precisamos saber o conceito de razão, que é o quociente entre dois números, ou seja, a divisão entre eles. A porcentagem assim, são razões de denominador 100, divisão por 100.

$$\frac{7}{100} = 7\% \qquad \frac{31}{100} = 31\%$$

As questões que envolvem porcentagem são de compreensível solução, basta atribuir valor 100 ao elemento de comparação (número citado) e o resto é só fazer conta! (MISSAGIA; VELTER, 2006). Na verdade, fazer a conta é aplicar uma regra do três, como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 2.3.1. *Em um estádio, numa partida de futebol, 18% são torcedores visitantes e os outros 32.800 são do time da casa. Quantos torcedores assistiram esta partida de futebol?*

Resolução: O total de torcedores no estádio é de 100%. Se 18% são visitantes, logo, 82% são de torcedores do time da casa. Montando uma regra de três, temos:

$$\begin{array}{cc} 32.800 & 82\% \\ x & 100\% \end{array}$$

Multiplicando cruzado, resolvemos a equação:

$$\begin{aligned} 82x &= 3.280.000 \\ x &= 40.000 \end{aligned}$$

Assim, o número x de torcedores que assistiram a essa partida de futebol foi de 40.000.

2.3.1 Aumentos e descontos

Quando falamos em aumentos e descontos podemos utilizar o fator multiplicativo, que é a utilização do valor decimal referente a operação de aumento ou desconto, vejamos os exemplos:

Exemplo 2.3.2. *O salário dos professores é de R\$ 3.000,00 e sofrerá um reajuste de 10%.*

Resolução: 3.000 representa 100% , somado aos 10% , totaliza 110% , que na forma decimal é 1,1.

$$(1,1) \cdot 3.000 = 3.300,00$$

Logo o salário dos professores passará a ser de R\$ 3.300,00.

Exemplo 2.3.3. *Uma loja de roupas está com 20% de desconto. Qual o valor a ser pago por uma calça de R\$ 140,00?*

Resolução: R\$ 140,00 representa 100% , subtraindo os 20% de 100% sobram 80% a ser pago efetivamente pela calça. E na forma decimal, 80% é 0,8.

$$(0,8) \cdot 140 = 112,00$$

Assim, o valor a ser pago pela calça após receber o desconto é de: R\$ 112,00.

2.3.2 Aumentos e descontos sucessivos

Vamos observar o exemplo:

Exemplo 2.3.4. *Um produto que custava inicialmente R\$ 100,00 teve dois aumentos mensais consecutivos, em janeiro aumentou 10% e em fevereiro aumentou 5%, qual o valor deste produto após os aumentos?*

Resolução: Esta é uma questão que os estudantes comumente erram, pois aparentemente o aumento foi de 10% somado a 5% resulta 15%, porém não é este o cálculo correto.

O produto custando inicialmente R\$ 100,00 tem aumento de 10%, resultando em R\$ 110,00, o próximo aumento é em cima deste último valor, assim devemos calcular 5% de R\$ 110,00 que resulta em R\$ 5,50 de aumento, logo o valor final é de R\$ 115,50.

2.4 Juros

2.4.1 Um pouco da história

A primeira alusão escrita sobre juros compostos data de 2400 a.C: os sumérios, antigo povo da Mesopotâmia, realizavam empréstimos de sementes e o pagamento era feito com uma parte da colheita, uma forma de pagamento de juros. Na época não existia outra moeda de troca. As informações financeiras eram escritas em tábuas com dados como escrituras de vendas e notas promissórias ([LOPES, 2018](#)).

Em muitas dessas tábuas foram encontradas demonstrações contundentes sobre as práticas de juros compostos. Numa tábua de aproximadamente 1700 a.C. em Louvre na França, está inscrito: “*a juros compostos de 20% ao ano, uma determinada quantia em dinheiro deve ser aplicada por quanto tempo para que seu valor dobre?*” ([KILHIAN, 2008](#)).

Os juros também são mencionados várias vezes na bíblia, no qual muitos versículos condenam essa prática, pois era visto como forma de exploração dos mais necessitados.

Abaixo, alguns versículos sobre juros:

“Se fizerem empréstimo a alguém do meu povo, a algum necessitado que viva entre vocês, não cobrem juros dele; não emprestem visando a lucro.” Êxodo 22,25

“Não cobrem juros de um israelita, por dinheiro, alimento, ou qualquer outra coisa que possa render juros.” Deuteronômio 23,19

“Vocês poderão cobrar juros do estrangeiro, mas não do seu irmão israelita, para que o Senhor, o seu Deus, os abençoe em tudo o que vocês fizerem na terra em que estão entrando para dela tomar posse.” Deuteronômio 23,20

Na parábola dos “Talentos” relatada no evangelho de Mateus, é curioso que é mencionado depositar o dinheiro no banco para receber juros.

“Então, devias ter depositado meu dinheiro no banco, para que, ao voltar, eu recebesse com juros o que me pertence.” Mateus 25,27

Com o passar do tempo e o desenvolvimento do comércio ao redor do mundo, a comercialização de produtos bem como ouro e prata, as civilizações criaram suas próprias moedas, que trouxeram problemas comerciais, mas que foram resolvidos com o surgimento de cambistas. Estes, faziam a troca de diferentes moedas e com o tempo passaram a emprestar e guardar dinheiro. Curioso que como eles ficavam sentados em bancos de madeira, temos hoje os “Bancos”, instituições financeiras (LOPES, 2018).

Na Itália no final do século XV, importantes materiais foram produzidos sobre matemática financeira. Em 1478, “A aritmética de Treviso” considerado primeiro registro impresso sobre matemática financeira apresentava a prática do escambo. Pouco tempo depois em 1584, Pierro Borghi publicou o livro “Aritmética Comercial”, que tratava de questões financeiras da época. Este livro foi muito importante, visto que ele teve ao menos 17 edições (LOPES, 2018).

2.4.2 Número neperiano (e)

O número neperiano é um número irracional, cujo valor aproximado é 2,718281828 representado pela letra (e), o nome é uma alusão a John Neper, mas na verdade, ele foi determinado por Jacob Bernoulli algumas décadas após a morte de Neper.

O contexto no qual Bernoulli determinou o número é uma prática de matemática financeira proposta por ele em um artigo em 1690:

“Uma pessoa empresta dinheiro, devendo recebê-lo de volta ao fim de um ano, com juros. Suponha-se que quem empresta pode decidir dividir o ano em várias frações idênticas, recebendo o dinheiro mais os juros ao fim de cada fração, com uma taxa de juro proporcional à fração, voltando a emprestá-lo imediatamente. Quanto é que a pessoa receberia no fim do ano?”

Para demonstrar essa situação, vamos fazer o seguinte exemplo:

Exemplo 2.4.1. *Uma pessoa pega R\$ 1,00 emprestado e no fim do ano devolve R\$ 2,00, ou seja, 100% de juro ao ano.*

Nessa situação, vamos fracionar a taxa de juros proporcionalmente a fração do

tempo, como por exemplo, se dividirmos esse juro em 50% ao semestre por dois semestres, assim, temos:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 1 \cdot (1 + 0,5)^2$$

$$M = (1,5)^2$$

$$M = 2,25$$

Logo a pessoa irá devolver R\$ 2,25 ao final de um ano.

Tomando outra situação, vamos agora dividir o ano em 4 trimestres, a taxa de 25% ao trimestre, o que faz com que:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 1 \cdot (1 + 0,25)^4$$

$$M = (1,25)^4$$

$$M = 2,44140625$$

Já podemos observar que, conforme vamos dividindo o ano (tempo) em frações menores e proporcionalmente dividimos a taxa de juros, vamos obtendo valores maiores. Na tabela abaixo apresentamos mais resultados:

Bernoulli percebeu que aumentando infinitamente a frequência de capitalização chegava a uma constante que pode ser expressa por:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2.4.3 Aplicação do número (e)

Seja Q_0 uma quantia de dinheiro que cresce com um juro anual de $r\%$.

Se o juro é composto a cada 3 meses, então o juro é aplicado 4 vezes por ano e será de $\frac{r\%}{4}$. Se $Q(t)$ é o montante no tempo t anos, então temos:

$$Q(0) = Q_0$$

$$Q\left(\frac{1}{4}\right) = \left(1 + \frac{r}{4}\right) \quad (1 \text{ trimestre} = \frac{1}{4} \text{ ano})$$

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{r}{4}\right)^2$$

$$Q\left(\frac{3}{4}\right) = \left(1 + \frac{r}{4}\right)^3$$

$$Q(1) = Q_0 \left(1 + \frac{r}{4}\right)^4$$

Em geral, após t anos, o montante será $Q(t) = Q_0 \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4t}$.

Tabela 3 – Aproximação do número e

n	$(1 + \frac{1}{n})^n$	Resultado
1	$(1 + \frac{1}{1})^1$	2
2	$(1 + \frac{1}{2})^2$	2,25
3	$(1 + \frac{1}{3})^3$	2,37037
4	$(1 + \frac{1}{4})^4$	2,44141
5	$(1 + \frac{1}{5})^5$	2,48832
10	$(1 + \frac{1}{10})^{10}$	2,59374
100	$(1 + \frac{1}{100})^{100}$	2,70481
1.000	$(1 + \frac{1}{1.000})^{1.000}$	2,71692
10.000	$(1 + \frac{1}{10.000})^{10.000}$	2,71815
100.000	$(1 + \frac{1}{100.000})^{100.000}$	2,71827
1.000.000	$(1 + \frac{1}{1.000.000})^{1.000.000}$	2,7182804
10.000.000	$(1 + \frac{1}{10.000.000})^{10.000.000}$	2,7182816
100.000.000	$(1 + \frac{1}{100.000.000})^{100.000.000}$	2,71828179

Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Suponha agora, que o juro é aplicado a cada $\frac{1}{n}$ anos, $n \in \mathbb{N}$.

Então, $Q(t) = Q_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$. Quando $n \rightarrow \infty$, temos juros compostos continuamente. Neste caso, pelo resultado da demonstração de Bernoulli, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

e portanto, $Q(t) = Q_0 \cdot e^{rt}$ quando os juros são aplicados continuamente.

Comparemos a fórmula $Q(t) = Q_0 \cdot e^{rt}$ com juros anuais de $r\%$ e compostos diariamente, ie, $n = 365$. Suponhamos que $Q_0 = 100.000,00$ e $r = 12\% = 0,12$.

O tempo que consideramos é $t = 1$ ano.

Continuamente: $Q(t) = Q_0 \cdot e^{rt} = 10^5 \cdot e^{(0,12)} \approx 112.749,68$.

Composto diariamente: $Q(t) = Q_1 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot 1} = 10^5 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{365}\right)^{365} \approx 112.747,46$

Vemos portanto, que a diferença é muito pouca.

Essa demonstração de aplicação da base e do logaritmo natural em juros compostos pode ser vista no capítulo 5 “Economias e empréstimos” do livro de matemática discreta de (MORGADO; CARVALHO, 2015).

2.5 Função exponencial

A função exponencial é caracterizada pela variável no expoente, sendo a base, maior que zero e diferente de 1. É indicada pela notação:

$$f(x) = a^x$$

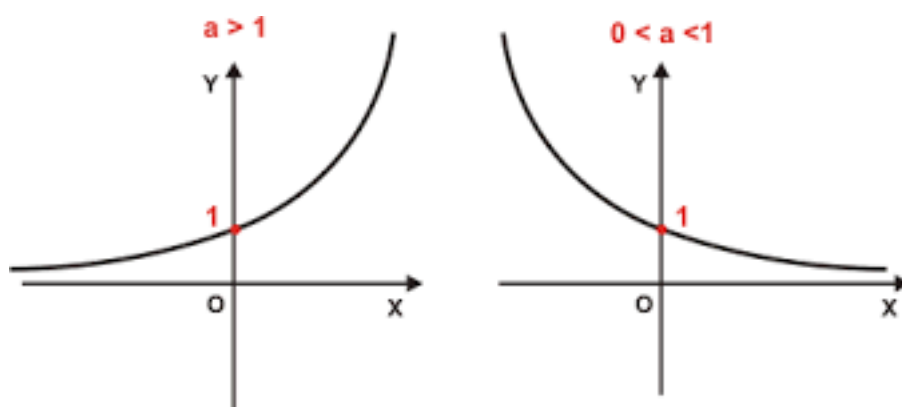
Exemplos: $f(x) = 3^x$ $f(x) = (1,2)^x$ $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Sobre as restrições apresentadas, elas são bem explicadas, a base não pode ser 1, visto que o número 1 elevado a qualquer número é 1. O mesmo se aplica para o zero, zero elevado a qualquer número é zero, com exceção que, 0^0 que é indefinido.

Também não podemos ter a base negativa, pois a função não fica definida. Vamos tomar por exemplo base -5 e expoente $\frac{1}{2}$, neste caso, temos a raiz quadrada de um número negativo e não há solução no conjunto dos reais.

Tomando a base como um número maior que 1, a função é crescente e se a base for um número entre 0 e 1 a função é decrescente, podemos observar na figura 1 um exemplo geral e na figura 2 exemplo de uma função crescente e de uma decrescente.

Figura 1 – Função crescente / decrescente

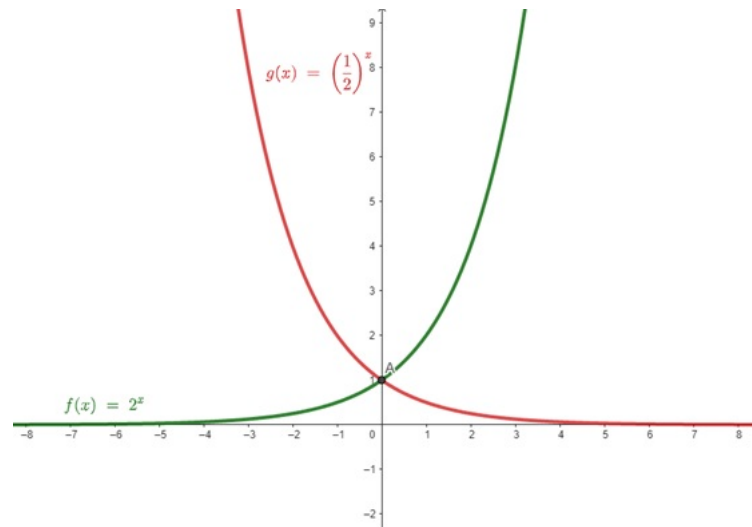


Fonte: <https://portalsuaescola.com.br/propriedades-da-funcao-exponencial/> Acesso em 05/11/2023

No juro composto, o valor dos juros depende do tempo da aplicação, como a variável (tempo) está no expoente, caracteriza assim uma função exponencial. Ou seja, o montante está em função do tempo n , visto que temos um capital e uma taxa pré definidos.

$$M(n) = C \cdot (1 + i)^n$$

Dada uma taxa de juros maior que zero, sempre teremos um crescimento do capital aplicado.

Figura 2 – Gráfico das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ 

Fonte: Próprio do próprio autor (2023)

2.6 Juro simples

Juros é uma compensação por um empréstimo de determinado valor por certo período (tempo).

No cálculo de juros, o valor inicial de uma dívida, empréstimo ou investimento é chamado de capital. Sobre esse valor, é aplicada uma taxa de juros, que é expressa em porcentagem, essa taxa corrige o valor do capital ao longo do tempo, seja ele mensal, anual ou mesmo diário. Essa correção, ou seja, o valor inicial (capital) acrescido dos juros no período é chamado de montante.

O juro simples é uma aplicação na qual a taxa, incide apenas sobre o valor principal (capital) ao longo do tempo estabelecido. Assim, temos:

$$1^\circ \text{ Mês: } J = C \cdot i$$

$$2^\circ \text{ Mês: } J = C \cdot i$$

$$3^\circ \text{ Mês: } J = C \cdot i$$

$$\vdots$$

$$\text{Enésimo Mês: } J = C \cdot i$$

Até o enésimo mês (n vezes), em cada mês, o juro sempre é resultante da multiplicação do capital pela taxa, fazendo essa observação chegamos a fórmula para o cálculo total dos juros simples:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

Onde:

$$J = \text{juros} \quad C = \text{capital} \quad i = \text{taxa} \quad n = \text{tempo}$$

Para efetuar cálculos, é sempre bom lembrar que taxa e tempo devem estar na mesma unidade.

Vejam os um exemplo:

Exemplo 2.6.1. *Qual o montante produzido por um capital de R\$ 1.000,00 aplicado a juros simples com taxa de 2% ao mês durante 6 meses?*

Resolução: Seja, $C = 1.000$, $i = 2\%$ e $n = 6$

$$J = C \cdot i \cdot n$$

$$J = (1.000) \cdot (0,02) \cdot (6)$$

$$J = 120,00$$

Logo, o montante produzido será de:

$$M = C + J$$

$$M = 1.000 + 120$$

$$M = 1.120,00$$

O montante final desta aplicação é de R\$ 1.120,00.

2.7 Juro composto

No regime de juros simples, observamos que apenas o valor principal (capital) rendia juros, de maneira proporcional a taxa e tempo.

No sistema de juros compostos, temos também a geração de juros sobre juros, ou seja, os juros são gerados sempre sobre o valor do montante do último período.

Os juros compostos são amplamente utilizados pelo mercado financeiro e aparecem cotidianamente na vida das pessoas, principalmente nos investimentos e empréstimos.

Vamos ver um exemplo de aplicação realizado no sistema de juros simples e no de juros compostos e fazer a comparação.

Exemplo 2.7.1. *Seja um capital de R\$ 1.000,00 aplicado a uma taxa de 1% ao mês durante 12 meses.*

Nas figuras 3, 4 e 5, observamos a tabela com valores e seus gráficos.

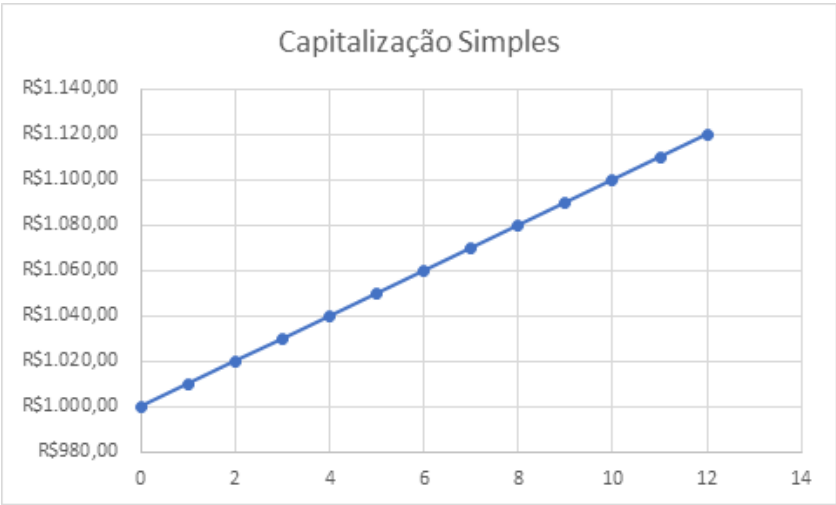
Na figura 3, podemos observar a diferença de valores nas duas capitalizações e seus gráficos nas imagens seguintes são muito parecidos, porém, quando aumentamos consideravelmente o tempo, fica evidente o efeito dos juros sobre juros, a capitalização composta tem um crescimento muito maior, concluímos isso pelo gráfico da figura 6 a seguir:

Figura 3 – Juros simples x juros compostos

Capitalização simples		Capitalização composta	
Tempo	Valor	Tempo	Valor
0	R\$ 1.000,00	0	R\$ 1.000,00
1	R\$ 1.010,00	1	R\$ 1.010,00
2	R\$ 1.020,00	2	R\$ 1.020,10
3	R\$ 1.030,00	3	R\$ 1.030,30
4	R\$ 1.040,00	4	R\$ 1.040,60
5	R\$ 1.050,00	5	R\$ 1.051,01
6	R\$ 1.060,00	6	R\$ 1.061,52
7	R\$ 1.070,00	7	R\$ 1.072,14
8	R\$ 1.080,00	8	R\$ 1.082,86
9	R\$ 1.090,00	9	R\$ 1.093,69
10	R\$ 1.100,00	10	R\$ 1.104,62
11	R\$ 1.110,00	11	R\$ 1.115,67
12	R\$ 1.120,00	12	R\$ 1.126,83

Fonte: Próprio do próprio autor (2023)

Figura 4 – Juro simples 12 meses



Fonte: Próprio do próprio autor (2023)

A seguir, vemos como o montante varia na capitalização composta:

1º mês: $M = C \cdot (1 + i)$

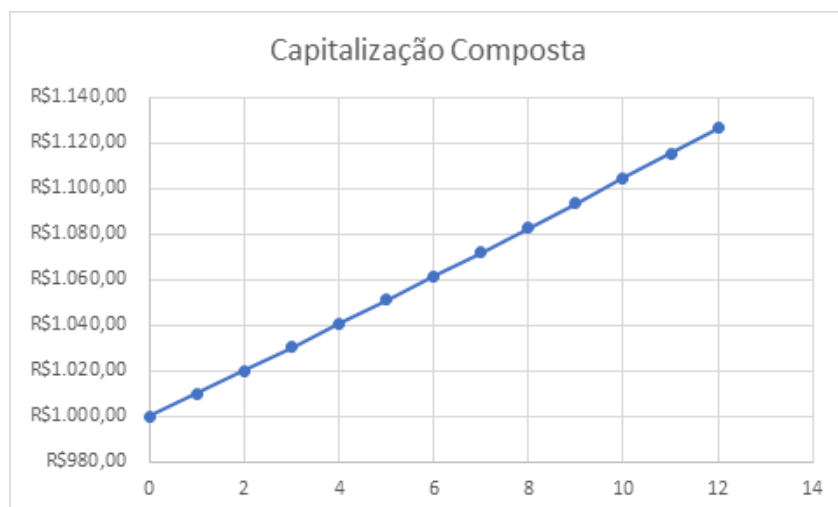
2º mês: $M = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$

3º mês: $M = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$

⋮

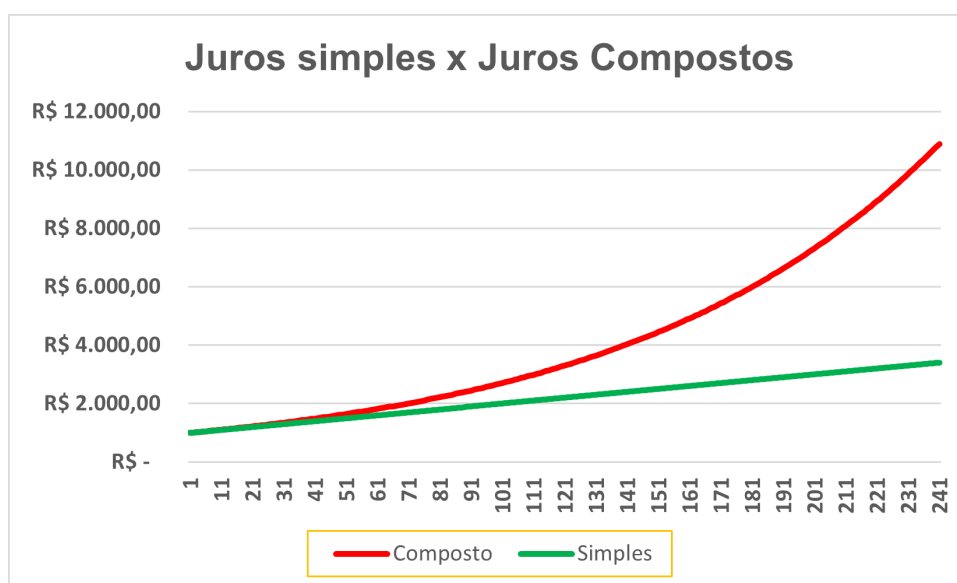
Enésimo mês: $M = C \cdot \underbrace{(1 + i) \cdot (1 + i) \cdot \dots \cdot (1 + i)}$

Figura 5 – Juro composto 12 meses



Fonte: Próprio do próprio autor (2023)

Figura 6 – Juro simples x juro composto em 240 meses



Fonte: Próprio do próprio autor (2023)

n vezes

O montante de cada mês, é calculado a partir do montante do mês anterior multiplicado sempre pela expressão $(1+i)$, resultando na fórmula de capitalização composta:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Para calcularmos os juros obtidos numa aplicação, basta ao final diminuir o capital do montante:

$$M = C + J$$

$$J = M - C$$

$$J = C \cdot (1 + i)^n - C$$

$$J = C \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

Vamos ver exemplos de cálculos com juros compostos:

Exemplo 2.7.2. *Qual o montante produzido por um capital de R\$ 1.000,00 aplicado por 6 meses a taxa de 2% ao mês?*

Resolução:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 1000 \cdot (1 + 0,02)^6$$

$$M = 1000 \cdot (1,12616)$$

$$M = 1.126,16$$

O montante produzido é de R\$ 1.126,16.

Exemplo 2.7.3. *Quanto pagarei de juros por um empréstimo de R\$ 5.000,00 em um ano a uma taxa de 3% ao mês?*

Resolução:

$$J = C \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

$$J = 5000 \cdot [(1 + 0,03)^{12} - 1]$$

$$J = 5000 \cdot [(1,03)^{12} - 1]$$

$$J = 5000 \cdot [1,4257608868 - 1]$$

$$J = 5000 \cdot [0,4257608868]$$

$$J = 2.128,80$$

Pagarei de juros, o valor de R\$ 2.128,80.

2.8 Taxas equivalentes

Vamos iniciar essa abordagem com uma simples pergunta:

A taxa de 1% ao mês é o mesmo que uma taxa de 12% ao ano?

Vamos responder essa pergunta nos sistemas de capitalização simples e composta, tomando como valores um capital de R\$ 1.000,00 e tempo de um ano (12 meses).

No sistema de capitalização simples, temos:

Com a taxa de 1% ao mês:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

$$J = 1.000 \cdot (0,01) \cdot 12$$

$$J = 120,00$$

Com a taxa de 12% ao ano:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

$$J = 1.000 \cdot (0,12) \cdot 1$$

$$J = 120,00$$

Conclui-se que no sistema de juros simples, para a taxa e tempo estarem na mesma unidade de medida de tempo, a conversão é uma simples multiplicação ou divisão.

Exemplo 2.8.1. Converter 3% ao mês para taxa anual e para taxa diária.

Resolução:

$$3 \cdot 12 = 36 \quad \text{ou seja, } 36\% \text{ ao ano.}$$

$$3 \div 30 = 0,1 \quad \text{ou seja, } 0,1\% \text{ ao dia.}$$

Observação: Considerado um mês 30 dias.

No sistema de capitalização composta, temos:

Com a taxa de 1% ao mês:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 1.000 \cdot (1 + 0,01)^{12}$$

$$M = 1.000 \cdot (1,01)^{12}$$

$$M = 1.000 \cdot (1,1268250301)$$

$$M = 1.126,8250301$$

Com a taxa de 12% ao ano:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 1.000 \cdot (1 + 0,12)^1$$

$$M = 1.000 \cdot (1,12)$$

$$M = 1.000 \cdot (1,12)$$

$$M = 1.200,00$$

Observamos claramente no sistema de juros compostos, que os valores encontrados são diferentes, o que nos leva a conclusão de que se temos uma taxa de juros mensal, para

converter a juro anual não é só multiplicar por 12 como parece óbvio, e assim também a volta, ou seja, se temos uma taxa anual e queremos mensal, não é só dividir por 12. Isso acontece pois temos um rendimento de juros sobre juros.

Logo, Consideram-se duas taxas como equivalentes, se na hipótese de aplicá-las a um mesmo prazo e a um mesmo capital for indiferente aplicar em uma ou em outra (MACÊDO, 2014).

Para determinarmos taxas equivalentes em juros compostos partimos do seguinte:

Sabemos que o montante do juro composto é determinado por $M = C \cdot (1 + i)^n$ e que $M = C + J$.

Podemos igualar os dois montantes e desenvolvendo, teremos:

$$C + J = C \cdot (1 + i)^n.$$

$$J = C \cdot (1 + i)^n - C$$

$$J = C \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

Com essa fórmula $J = C \cdot [(1 + i)^n - 1]$, determinamos os juros, mas vamos observar um exemplo e analisar o resultado:

Exemplo 2.8.2. *Seja um capital de R\$ 100,00, aplicado a 1% ao mês durante um ano, qual o juro gerado?*

Resolução:

$$J = C \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

$$J = 100 \cdot [(1 + 0,01)^{12} - 1]$$

$$J = 100 \cdot [1,1268250301 - 1]$$

$$J = 100 \cdot [0,1268250301]$$

$$J = 12,68250301$$

Os juros obtidos são de R\$ 12,68.

Como taxas equivalentes são taxas que determinam o mesmo juro com mesmo capital e mesmo período de tempo, neste exemplo anterior, fica evidente que para o capital de R\$ 100,00 produzir o mesmo juro da taxa mensal de 1%, a taxa anual deve ser correspondente a 12,68% aproximadamente.

Assim, através da fórmula $J = C \cdot [(1 + i)^n - 1]$ podemos determinar a seguinte fórmula para equivalência de taxas:

$$I = \text{taxa que quero} \qquad i = \text{taxa que tenho}$$

$$q = \text{tempo que quero} \qquad t = \text{tempo que tenho}$$

$$I = [(1 + i)^{\frac{q}{t}} - 1]$$

A seguir, temos a resolução de alguns exemplos:

Exemplo 2.8.3. Converter a taxa de 3% ao mês para taxa anual.

Resolução:

$$I = [(1 + i)^{\frac{q}{t}} - 1]$$

$$I = [(1 + 0,03)^{\frac{12}{1}} - 1]$$

$$I = [(1,03)^{12} - 1]$$

$$I = [1,4257608868 - 1]$$

$$I = 0,4257608868 \text{ (devemos multiplicar por 100)}$$

$$I = 42,57608868\%$$

Exemplo 2.8.4. Converter a taxa de 6% ao ano para taxa mensal.

Resolução:

$$I = [(1 + i)^{\frac{q}{t}} - 1]$$

$$I = [(1 + 0,06)^{\frac{1}{12}} - 1]$$

$$I = [(1,06)^{\frac{1}{12}} - 1]$$

$$I = [\sqrt[12]{1,06} - 1]$$

$$I = [1,0048675506 - 1]$$

$$I = 0,0048675506 \text{ (multiplicar por 100)}$$

$$I = 0,48675506\%$$

Exemplo 2.8.5. Converter a taxa de 5% ao trimestre para taxa anual.

Resolução:

$$I = [(1 + i)^{\frac{q}{t}} - 1]$$

$$I = [(1 + 0,05)^{\frac{12}{3}} - 1]$$

$$I = [(1,05)^4 - 1]$$

$$I = [1,21550625 - 1]$$

$$I = 0,21550625 \text{ (multiplicar por 100)}$$

$$I = 21,550625\%$$

2.9 Capitalização composta com aportes mensais

Sempre que falamos em juro composto logo pensamos numa aplicação de certo capital com uma taxa definida em um período de tempo estipulado. Mas no dia a dia das pessoas, nem sempre é assim, muitas vezes elas vão economizando o dinheiro e tem a necessidade de irem aplicando o mesmo para este dinheiro não ficar parado.

Outro exemplo são pessoas que separam todo mês determinado valor para alguma meta futura, como uma viagem, aquisição de um bem, uma previdência, ou mesmo uma reserva de emergência.

Nesse contexto, precisamos pensar numa maneira para calcularmos o montante final de um investimento com sucessivas aplicações. Para demonstrar essa situação, vamos tomar um valor como aporte a ser aplicado sempre no mesmo período de tempo a uma taxa pré determinada. Tomemos a seguinte situação:

Investimento com aportes mensais de R\$ 100,00 a uma taxa de juros de 1% ao mês.

Tabela 4 – Aplicação com aportes mensais

Mês	Aporte	Juros	Total
0	R\$ 100,00	R\$ -	R\$ 100,00
1	R\$ 100,00	R\$ 1,00	R\$ 201,00
2	R\$ 100,00	R\$ 2,01	R\$ 303,01
3	R\$ 100,00	R\$ 3,03	R\$ 406,04
4	R\$ 100,00	R\$ 4,06	R\$ 510,10
5	R\$ 100,00	R\$ 5,10	R\$ 615,20
6	R\$ 100,00	R\$ 6,15	R\$ 721,35
7	R\$ 100,00	R\$ 7,21	R\$ 828,57
8	R\$ 100,00	R\$ 8,29	R\$ 936,85
9	R\$ 100,00	R\$ 9,37	R\$ 1.046,22
10	R\$ 100,00	R\$ 10,46	R\$ 1.156,68
11	R\$ 100,00	R\$ 11,57	R\$ 1.268,25
12	R\$ 100,00	R\$ 12,68	R\$ 1.380,93

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Na tabela 4, vemos que a cada mês é realizado um aporte de R\$ 100,00 e os juros sempre incidem sobre o montante do mês anterior e assim temos o comportamento nestes doze primeiros meses registrados.

Essa situação, consiste numa recorrência:

$$M_0 = 100$$

$$M_1 = M_0 \cdot 1,01 + 100$$

$$M_2 = M_1 \cdot 1,01 + 100$$

$$\begin{aligned}
M_3 &= M_2 \cdot 1,01 + 100 \\
M_4 &= M_3 \cdot 1,01 + 100 \\
&\vdots \\
M_{n-2} &= M_{n-3} \cdot 1,01 + 100 \\
M_{n-1} &= M_{n-2} \cdot 1,01 + 100 \\
M_n &= M_{n-1} \cdot 1,01 + 100
\end{aligned}$$

Como resolução desta recorrência, podemos realizar uma soma telescópica, porém, precisamos ir forçando uma multiplicação para podermos ir eliminando os termos de maneira a obter uma fórmula para o montante no enésimo mês “ M_n ”.

$$\begin{aligned}
1,01^n \cdot M_0 &= 100 \cdot 1,01^n \\
1,01^{n-1} \cdot M_1 &= M_0 \cdot 1,01^n + 100 \cdot 1,01^{n-1} \\
1,01^{n-2} \cdot M_2 &= M_1 \cdot 1,01^{n-1} + 100 \cdot 1,01^{n-2} \\
1,01^{n-3} \cdot M_3 &= M_2 \cdot 1,01^{n-2} + 100 \cdot 1,01^{n-3} \\
1,01^{n-4} \cdot M_4 &= M_3 \cdot 1,01^{n-3} + 100 \cdot 1,01^{n-4} \\
&\vdots \\
1,01^2 \cdot M_{n-2} &= M_{n-3} \cdot 1,01^3 + 100 \cdot 1,01^2 \\
1,01 \cdot M_{n-1} &= M_{n-2} \cdot 1,01^2 + 100 \cdot 1,01 \\
M_n &= M_{n-1} \cdot 1,01 + 100
\end{aligned}$$

Fazendo a soma e simplificando os termos que se anulam, temos:

$$\begin{aligned}
M_n &= 100 \cdot 1,01^0 + 100 \cdot 1,01^1 + 100 \cdot 1,01^2 + \dots + 100 \cdot 1,01^{n-2} + 100 \cdot 1,01^{n-1} + 100 \cdot 1,01^n \\
M_n &= 100 \cdot (1,01^0 + 1,01^1 + 1,01^2 + \dots + 1,01^{n-2} + 1,01^{n-1} + 1,01^n)
\end{aligned}$$

Observamos acima, que todos os termos que são multiplicados pelo valor 100, formam uma progressão geométrica de razão $q = 1,01$, assim, podemos fazer a soma de todos os termos dentro dos parênteses através da fórmula da soma de uma P.G. finita:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
S_{n+1} &= \frac{(1,01)^{n+1} - 1}{1,01 - 1} \\
S_{n+1} &= \frac{(1,01)^{n+1} - 1}{0,01}
\end{aligned}$$

Substituindo na soma do montante do enésimo mês, temos:

$$M_n = 100 \cdot \frac{[(1,01)^{n+1} - 1]}{0,01}$$

Sabemos que inicialmente, os R\$ 100,00 corresponde ao valor do aporte mensal do qual chamaremos de A , a taxa de juros i foi definida em 1% ao mês, que corresponde a 0,01 na forma decimal, substituindo na sentença, encontramos a seguinte fórmula para aportes mensais iguais:

$$M_n = A \cdot \frac{[(1+i)^{n+1}-1]}{i}$$

Exemplo 2.9.1. Calcular o montante gerado por uma aplicação com aportes mensais de R\$ 100,00, sendo o primeiro aporte realizado na data zero (hoje) a uma taxa de 1% ao mês fixa durante o período de 12 meses.

Resolução:

$$M_n = A \cdot \frac{[(1+i)^{n+1}-1]}{i}$$

$$M_{12} = 100 \cdot \frac{[(1+0,01)^{12+1}-1]}{0,01}$$

$$M_{12} = 100 \cdot \frac{[(1,01)^{13}-1]}{0,01}$$

$$M_{12} = 100 \cdot \frac{[(1+0,01)^{12+1}-1]}{0,01}$$

$$M_{12} = 100 \cdot \frac{[1,1380932804-1]}{0,01}$$

$$M_{12} = 100 \cdot \frac{[0,1380932804]}{0,01}$$

$$M_{12} = 100 \cdot \frac{[13,80932804]}{0,01}$$

$$M_{12} = 1380,932804$$

Logo, o montante gerado foi de R\$ 1.380,93. Percebemos que bate exatamente com o valor apresentado no final da tabela 2.

2.10 Capitais equivalentes

Vamos supor a seguinte situação:

Você vai a uma determinada loja comprar uma TV, o vendedor lhe dá as seguintes condições de pagamento: R\$ 1.000,00 a vista ou duas vezes de R\$ 505,00 com primeiro pagamento um mês após o ato da compra. Qual opção é mais vantajosa ao cliente?

Importante ressaltar, que caso a pessoa não tenha o dinheiro suficiente para pagamento a vista, a melhor maneira é parcelado.

Neste caso, muitas pessoas iriam somar as duas parcelas de R\$ 505,00 totalizando R\$ 1.010,00 e diriam que é mais vantajoso a compra vista, visto uma diferença de R\$ 10,00 nestas compras, mas não é bem assim. É preciso lembrar que o dinheiro tem valor diferente em tempos distintos.

Para demonstrar, vamos supor que o cliente tem os R\$ 1.000,00 para pagamento a vista, mas decide pagar a prazo e aplica seu dinheiro num investimento que rende 1% ao mês.

Descrição dos acontecimentos na tabela 5:

Tabela 5 – Aplicação e pagamento da TV

Mês	Montante	Parcela	Saldo final
0	R\$ 1.000,00	R\$ 0,00	R\$ 1.000,00
1	R\$ 1.010,00	R\$ 505,00	R\$ 505,00
2	R\$ 510,50	R\$ 505,00	R\$ 5,50

Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Podemos observar pela tabela, que inicialmente o cliente aplica o valor de R\$ 1.000,00, e no mês seguinte com o montante ele desconta a primeira prestação, sobrando R\$ 505,00. Ele aplica novamente esse valor e no próximo mês com o montante de R\$ 510,05 ele desconta a segunda e última prestação de R\$ 505,00, sobrando R\$ 5,05. Ou seja, pagar essa TV em duas prestações de R\$ 505,00 foi mais vantajoso do que pagar a vista.

Essa demonstração, nos deixa evidente que não devemos somar parcelas em tempos diferentes.

2.10.1 Valor futuro

O dinheiro num contexto histórico, sofre variação, normalmente perdendo valor, assim, os juros são uma forma de compensação, através da fórmula do juros composto, podemos calcular valores futuros, como por exemplo:

Exemplo 2.10.1. *Os juros valem 1% ao mês, qual o valor de R\$ 2.000,00 nos próximos meses?*

Vamos usar: VF para valor futuro.

Daqui um mês:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$VF = C \cdot (1 + i)^n$$

$$VF = 2.000 \cdot (1 + 0,01)^1$$

$$VF = 2.000 \cdot (1,01)$$

$$VF = 2.020$$

Assim, R\$ 2.000,00 valem daqui um mês R\$ 2.020,00.

Daqui três meses:

$$VF = C \cdot (1 + i)^n$$

$$VF = 2.000 \cdot (1 + 0,01)^3$$

$$VF = 2.000 \cdot (1,01)^3$$

$$VF = 2.000 \cdot (1,030301)$$

$$VF = 2.060,602$$

Assim, R\$ 2.000,00 valem daqui três meses R\$ 2.060,60.

Dá mesma maneira, podemos calcular para outros períodos de tempo (meses).

2.10.2 Valor presente

O valor presente é o nosso capital, se quisermos trazer valores do futuro para o presente, basta também utilizar a fórmula de juro composto isolando a variável C (capital).

Vamos utilizar VP para valor presente.

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$VF = VP \cdot (1 + i)^n$$

$$\frac{VF}{(1+i)^n} = VP$$

$$\text{Assim, temos: } VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

Exemplo 2.10.2. *Sabendo que os juros valem 1% ao mês, qual o valor atual de uma parcela de R\$ 4.040,00 a ser paga daqui a um mês?*

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

$$VP = \frac{4.040}{(1+0,01)^1}$$

$$VP = \frac{4.040}{(1,01)}$$

$$VP = 4.000$$

O valor atual da parcela é de R\$ 4.000,00.

Exemplo 2.10.3. *Sabendo que os juros valem 1% ao mês, qual o valor atual de uma parcela de R\$ 5.000,00 a ser paga daqui a 6 meses?*

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

$$VP = \frac{5.000}{(1+0,01)^6}$$

$$VP = \frac{5.000}{(1,01)^6}$$

$$VP = \frac{5.000}{(1,0615201506)}$$

$$VP = 4.710,23$$

O valor atual da parcela é de aproximadamente R\$ 4.710,23.

2.11 Mercado financeiro

O mercado financeiro é o ambiente onde ocorrem as negociações de títulos, moedas, ações, derivativos e mercadorias. Para realização destas negociações estão envolvidos investidores, vendedores, as instituições e os órgãos de fiscalização. Cada país possui seu mercado, porém as negociações podem ser realizadas também externamente.

Dentro de um mercado financeiro existem leis e diretrizes que o gerem, tanto para investimentos em renda variável como na renda fixa, vamos abordar um pouco sobre alguns informes importantes para se conhecer aplicações em renda fixa.

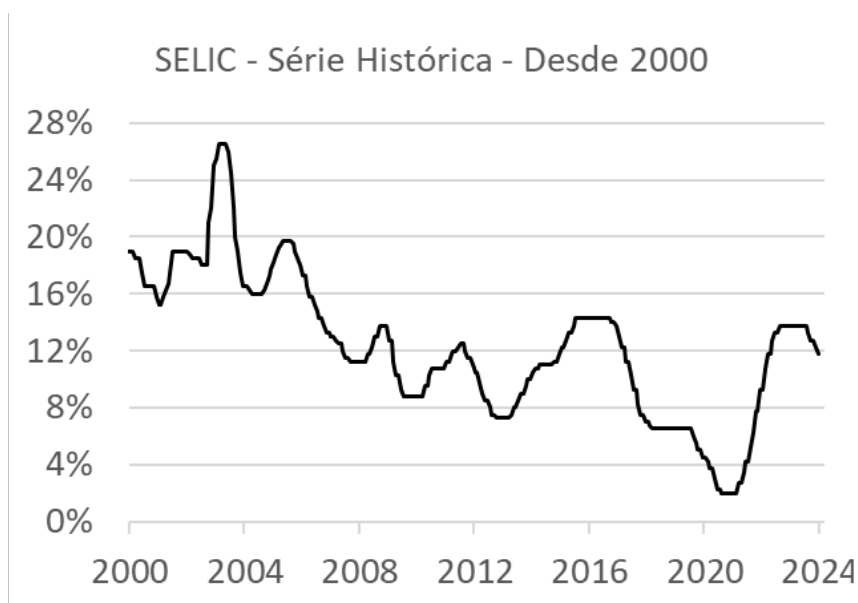
- **Taxa selic:** Segundo o Banco Central, a taxa Selic é a taxa básica de juros da economia, que influencia outras taxas de juros do país, como taxas de empréstimos, financiamentos e aplicações financeiras. Ela é definida periodicamente pelo Comitê de Política Monetária (Copom), do Banco Central e é o principal instrumento para controlar a inflação.

Em resumo, quando a Selic é elevada, os juros ficam mais altos não só em investimentos como em financiamentos e empréstimos, desestimulando o consumo e consequentemente espera-se uma queda na inflação. Quando a Selic tem seu valor reduzido, ocorre o inverso, juros menores estimulam empréstimos e financiamentos movimentam a economia o que normalmente potencializa o aumento da inflação.

Pela figura 7, percebemos que os maiores valores da taxa Selic no novo milênio, foram entre 2000 e 2007, onde atingiu picos maiores que 20% ao ano. Por sua vez, as mínimas foram registradas no final de 2020, chegando ao valor de 2% ao ano. A partir desse momento, voltou a subir atingindo valores próximos a 14% ao ano no final de 2023 e desde então vem apresentando pequenas quedas e na presente data de 16 de julho se encontra em 10,5% ao ano.

- **CDI:** Os Certificados de Depósito Interbancário (CDI) é uma taxa que representa a média dos juros dos empréstimos realizados entre os bancos. Essa taxa caminha muito próximo ao valor da taxa Selic. Muitos investimentos em renda fixa tem como indexador o CDI, um exemplo são os Certificados de Depósitos Bancários - CDBs, títulos emitidos por bancos.
- **TR:** Segundo o InfoMoney (2022), a Taxa Referencial (TR) foi criada em 1990 para ser uma taxa de juros de referência, naquele período, marcado por um descontrole da inflação, tinha como parâmetro a correção dos juros. Com o tempo, essa taxa perdeu espaço para outras taxas, atualmente, ela serve como um indicador para a atualização monetária de algumas aplicações financeiras e operações de crédito, um exemplo claro é sua utilização no cálculo de juros da poupança.

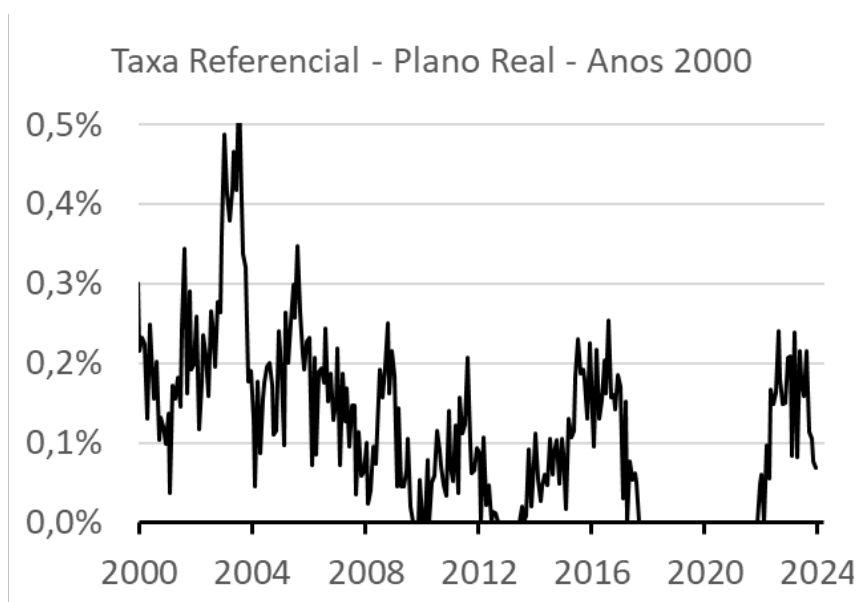
Figura 7 – TAXA SELIC



Fonte: <https://recieri.com/selic-serie-historica/>

Pela imagem da figura 8, vemos que a taxa referencial a partir do ano 2000 tem seu valor quase sempre com oscilações de 0,1% e 0,2% e por alguns períodos essa taxa esteve zerada, sendo o maior deles entre meados de 2017 e final de 2021, período similar a menor taxa de juros da Selic.

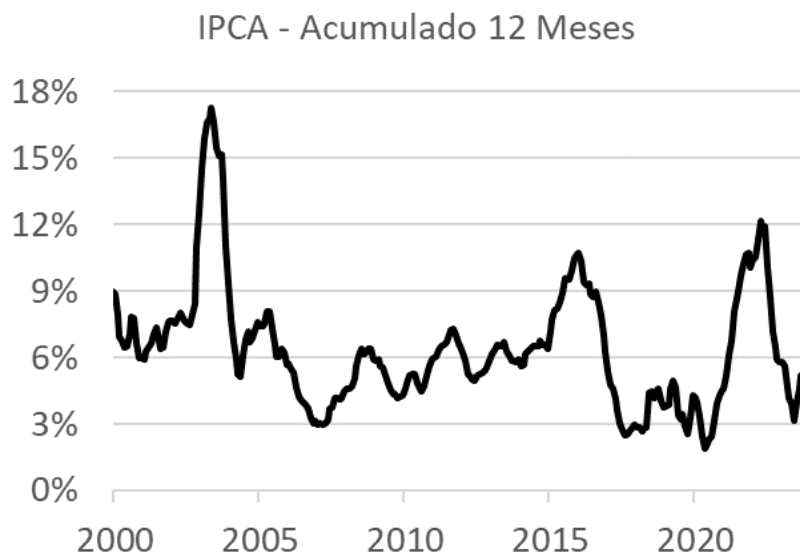
Figura 8 – Taxa Referencial



Fonte: <https://recieri.com/taxa-referencial/> (Acesso em 16/07/2024)

- **IPCA:** Segundo o IBGE, o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) tem por objetivo medir a inflação de um conjunto de produtos e serviços comercializados no varejo, referentes ao consumo pessoal das famílias. Esse índice

Figura 9 – IPCA



Fonte: <https://recieri.com/ipca-serie-historica/> (Acesso em 16/07/2024)

de preços tem como unidade de coleta estabelecimentos comerciais e de prestação de serviços, concessionária de serviços públicos e internet e é realizado ao longo do mês. Este índice também é utilizado como indexador de aplicações financeiras.

Pela figura 9, observamos que uma média anual do IPCA está em torno dos 5%, mas que o mesmo já atingiu picos maiores que 10% e suas mínimas estiveram pouco abaixo dos 3%

- **Tributação:** Algumas aplicações são isentas de imposto de renda como a poupança, LCA e LCI e RCA e RCI, por exemplos, mas outras possuem imposto de renda, cuja taxa de desconto varia de acordo com o tempo da aplicação. Na tabela abaixo vemos esse funcionamento:

Tabela 6 – Tributação Imposto de Renda

PRAZO DE INVESTIMENTO	ALÍQUOTA DE IR
Até 6 meses	22,50 %
6 meses a 1 ano	20,00%
1 a 2 anos	17,50%
Acima de 2 anos	15,00%

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

- **FGC:** De acordo com o InfoMoney 2022, o Fundo Garantidor de Crédito (FGC) é uma instituição privada sem fins lucrativos que garante aos investidores de instituições financeiras associadas a recuperação do patrimônio investido em caso de algum problema que essa instituição financeira possa ter.]Importante salientar que há um

limite de 250 mil por CPF ou CNPJ coberto pelo FGC. Outro ponto a destacar, é que nem todos os investimentos de renda fixa possuem cobertura do FGC, os principais que possuem são a poupança, CDB, LCA e LCI.

- **Tipos de remuneração:** Segundo o InfoMoney [2022](#), a remuneração dos investimentos em renda fixa podem seguir padrões diferentes, existem três maneiras mais comuns, que são os títulos prefixados, pós-fixados e híbridos. Abaixo vamos descrever um pouco sobre eles:
 - Títulos prefixados: Nestes investimentos, os juros são fixos, determinados quando os papéis são lançados, assim o investidor sabe exatamente qual será sua remuneração. Por exemplo, a compra de um título prefixado a taxa de 10% ao ano, ao fim deste período, esse título deverá render esse valor.
 - Títulos pós-fixados: Nesse caso, os títulos são atrelados a algum indicador, como por exemplo a Selic ou o CDI, e conforme a variação dos mesmos, os rendimentos vão alterar. Por exemplo, uma aplicação que rende 100% do CDI, quando este indicador aumentar ou reduzir, os juros do investimento também vão acompanhar essa movimentação.
 - Títulos híbridos: Esses papéis mesclam características de aplicações pré e pós-fixadas. Uma parcela da remuneração se dá por juros fixos e outra é atrelada a um indicador que pode variar ao longo do tempo. Um exemplo clássico é o dos títulos atrelados à inflação, que pagam uma taxa prefixada mais a variação do IPCA.

2.12 Investimentos

Os investimentos podem ser classificados em dois grandes grupos, renda fixa e renda variável.

Os investimentos em renda fixa, tem por si, a característica de serem conservadores, ou seja, apresentam menores riscos, mas com isso também possuem menores rendimentos. Muitos são protegidos pelo fundo garantidor de crédito FGC, que dá uma segurança ao investidor. Estes investimentos normalmente estão atrelados a taxa Selic, CDI ou IPCA, podemos citar como exemplos o tesouro direto, poupança, CDBs, LCIs e LCAs, CRIs e CRAs e debêntures. Adiante, vamos abordar um pouco sobre estes principais investimentos em renda fixa.

- **Tesouro direto:** São títulos emitidos pelo governo, assim sendo, são considerados os mais seguros. Esses títulos podem ser prefixados, pós-fixados ou atrelados a inflação (IPCA). Esses investimentos são organizados pela bolsa de valores (B3) e podem

ser adquiridos através de bancos e corretoras. Para realização desses investimentos, pode haver taxas de administração e custódia bem como Imposto de Renda (IR) e Imposto sobre Operações Financeiras (IOF).

- **Poupança:** A poupança é o investimento mais tradicional do Brasil. Mesmo nos dias atuais com diversidade de aplicações, a poupança ainda é a queridinha dos brasileiros. Segundo a 7ª edição do Raio X do Investidor, produzida pela Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capital (Anbima) em parceria com o DataFolha, em 2023, 25% da população total investia no instrumento. Considerando apenas a população investidora, esse percentual é de 68%.

Essa aplicação varia de acordo com a Selic seguindo diretrizes estabelecidas pelo governo, não há taxas ou incidência de impostos, sendo isentos os rendimentos, e os mesmos são iguais em todas as instituições financeiras. Os rendimentos da poupança são de 0,5% ao mês mais a variação da TR (Taxa Referencial) se a Selic estiver acima de 8,5% ao ano. Quando estiver igual ou abaixo disso, a rentabilidade será equivalente a 70% da Selic mais a variação da TR.

A poupança possui rendimento mensal, ou seja, se você aplicar o dinheiro no dia 01 de janeiro, por exemplo, o valor do primeiro juro será creditado no dia 01 de fevereiro. A poupança é um investimento assegurado pelo fundo garantidor de crédito até o valor de R\$ 250.000,00.

- **CDBs:** Certificados de Depósitos Bancários (CDBs) são títulos emitidos pelos bancos para levantar dinheiro. Eles podem ser pré-fixados ou pós-fixados sendo este último mais comuns. oferecem como remuneração um percentual de algum índice de referência de renda fixa, normalmente, a taxa do CDI, esses percentuais podem ser variados, com aplicações de rendimento inferior ao da poupança ou bem atrativos, vale lembrar, que estas aplicações podem ter liquidez diária, permitindo o resgate a qualquer momento ou possuir longo período de vencimento. Estes investimentos possuem cobertura do fundo garantidor de crédito dando segurança ao investidor. É cobrado imposto de renda sobre os rendimentos de acordo com a tabela regressiva que vai de 22,5% a 15%.
- **LCI e LCA:** As letras de crédito, tanto imobiliário (LCI) quanto do agronegócio (LCA), são semelhantes. Assim como os CDBs são emitidas por instituições financeiras, com a diferença de serem restritas aquelas com alguma atividade de crédito relacionada ao setor imobiliário ou do agronegócio.

Embora normalmente ofereçam remuneração abaixo dos CDBs, elas podem se tornar vantajosas, visto que são isentas do imposto de renda. É importante lembrar que elas não possuem liquidez imediata e seus prazos foram alongados pelo CMN - Conselho Monetário Nacional em fevereiro de 2024, tendo o LCA prazo de vencimento mínimo

de 9 meses e o LCI de 12 meses, assim o investidor precisa ter ciência que ao aplicar nestes investimentos não terá seu dinheiro disponível pra resgate a qualquer momento. Vale lembrar que estas aplicações também são asseguradas pelo fundo garantidor de crédito.

- **CRI e CRA:** Os Certificados de Recebíveis Imobiliários (CRI) e do Agronegócio (CRA) são investimentos distintos, mas possuem muitas características em comum. Eles são títulos securitizados de renda fixa, ou seja, transformam créditos a receber como parcelas de uma venda a prazo ou pagamentos de um financiamento.

Podemos citar como exemplo, uma construtora. Em um certo prédio que ela constrói, talvez ela venda os apartamentos em parcelas, que poderão ser pagos ao longo de muitos anos, assim, para iniciar uma nova construção, possa ser que essa construtora precise levantar recursos, para isso, ela capta dinheiro com os pagamentos futuros de seus clientes, juntando-os e em um CRI vendendo no mercado.

Desse modo, a construtora consegue antecipar recursos que só receberia em muitos anos, as vezes mais de 30 anos. Para essa organização, entram a securitizadoras, elas compram a dívida e emitem os CRIs disponibilizando aos investidores. O CRI ou CRA podem ser encontrados de valores diferentes, prazos distintos e remunerações específicas. Esses investimentos podem estar atrelados a Selic, CDI ou IPCA tendo como característica importante não possuir imposto de renda sobre os lucros, porém, não possuem cobertura do FGC. Outro ponto a destacar é que normalmente são investimentos de pouca liquidez, onde muitos títulos possuem longos prazos de vencimento, superando 15 anos.

- **Debêntures:** São títulos de crédito emitidos por empresas e negociados no mercado de capitais. Normalmente essas empresas levantam recursos para novos projetos, como a construção de uma nova fábrica ou expansão de seu empreendimento. Assim, esses títulos costumam ter vencimentos mais longos podendo ter retornos prefixados, pós-fixados ou híbridos. As debêntures são tributadas via tabela de imposto de renda, porém a uma exceção, que são as debentures incentivadas, utilizadas para captar recursos para grandes obras no país. As debentures assim como CRI e CRA não possuem cobertura pelo FGC.

A renda variável, como próprio nome diz, são investimentos com maior volatilidade, do mesmo jeito que se pode obter ganhos significativos, as perdas podem ser irreparáveis. Podemos citar como exemplo, investimentos em ações, fundos de investimentos, seja de ações, imobiliários, fundos de índice (ETFs), BDRs, criptomoedas entre outros, essas operações podem são realizadas através de corretoras. Não vamos abordar aqui estes investimentos, ficam como sugestão de estudos e aprofundamento.

2.13 Sistemas de amortização

Segundo (MACÊDO, 2014), empréstimo é uma modalidade de dívida e surge quando uma determinada quantia é emprestada por um período de tempo determinado. Falando em empréstimos, o brasileiro sabe bem o que é essa realidade. Segundo pesquisa feita pela Serasa, em parceria com a Opinion Box em dezembro de 2021, 79% dos brasileiros precisaram recorrer a empréstimos no período da pandemia, a grande maioria para contornar situações financeiras, destes, a grande maioria em cartão de crédito, devido a facilidade, porém os mesmos possuem altos juros.

Outro dado relevante, é sobre empréstimos consignados, aqueles descontados em contra cheque, o Brasil tinha em setembro de 2023, 16.995.121 aposentados e pensionistas com algum empréstimo consignado ativo, de acordo com o INSS. Número altíssimo, visto que são cerca de 23 milhões de aposentados no nosso país.

O pagamento de tais empréstimos é realizado pela amortização, que é a quitação gradual de uma dívida, que é acertada entre as partes no momento da contratação de um empréstimo. Ou seja, a amortização reduz o valor total do empréstimo a cada prestação, assim, seu valor é maior do que o juro gerado no período.

Todo empréstimo é caracterizado pelo valor principal (montante contratado) acrescido de juros provenientes da taxa combinada pelas partes que remunera o agente financeiro. Essa dívida deverá ser paga de maneira regular com parcelas pré-determinadas, essas parcelas são a amortização do empréstimo realizado por um tempo determinado.

Existem vários tipos de amortização, sendo os mais comuns em nosso país a tabela SAC e a tabela Price.

2.13.1 Tabela SAC

Como o próprio nome sugere, a amortização neste sistema é constante, ou seja, o saldo devedor é dividido em parcelas iguais no período fixado, porém, como os juros incidem sobre valor do saldo devedor, no início, as prestações possuem valor maior e vão diminuindo com o tempo, chegando ao final com os débitos de menor valor. Assim, pelo sistema SAC, a amortização é constante e as prestações são decrescentes.

Vamos analisar o seguinte exemplo:

Um empréstimo de R\$ 50.000,00 a ser pago em 10 parcelas, a taxa de juros mensal de 1,5%. A tabela abaixo mostra como ficam os pagamentos.

Como observamos nessa tabela 7, a amortização possui mesmo valor em todas as parcelas, os juros vão diminuindo a cada parcela, pois o mesmo sempre incide sobre o saldo devedor e assim o valor das parcelas é decrescente até o final das prestações.

Tabela 7 – Tabela SAC

Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestações
0	R\$ 50.000,00	R\$ -	R\$ -	R\$ -
1	R\$ 45.000,00	R\$ 5.000,00	R\$ 750,00	R\$ 5.750,00
2	R\$ 40.000,00	R\$ 5.000,00	R\$ 675,00	R\$ 5.675,00
3	R\$ 35.000,00	R\$ 5.000,00	R\$ 600,00	R\$ 5.600,00
4	R\$ 30.000,00	R\$ 5.000,00	R\$ 525,00	R\$ 5.525,00
5	R\$ 25.000,00	R\$ 5.000,00	R\$ 450,00	R\$ 5.450,00
6	R\$ 20.000,00	R\$ 5.000,00	R\$ 375,00	R\$ 5.375,00
7	R\$ 15.000,00	R\$ 5.000,00	R\$ 300,00	R\$ 5.300,00
8	R\$ 10.000,00	R\$ 5.000,00	R\$ 225,00	R\$ 5.225,00
9	R\$ 5.000,00	R\$ 5.000,00	R\$ 150,00	R\$ 5.150,00
10	R\$ -	R\$ 5.000,00	R\$ 75,00	R\$ 5.075,00
-	Total	R\$ 50.000,00	R\$ 4.125,00	R\$ 54.125,00

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

2.13.2 Tabela PRICE

Pelo sistema PRICE de amortização, é fixado o valor a ser pago em cada prestação, ou seja, as mesmas são constantes, desse modo, a amortização do empréstimo é crescente.

Vamos tomar por exemplo, a mesma situação apresentada na tabela SAC: *Um empréstimo de R\$ 50.000,00 a ser pago em 10 parcelas, a taxa de juros mensal de 1,5%.*

Vejamos como fica esta amortização na tabela 8:

Tabela 8 – Tabela PRICE

Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestações
0	R\$ 50.000,00	R\$ -	R\$ -	R\$ -
1	R\$ 45.328,29	R\$ 4.671,71	R\$ 750,00	R\$ 5.421,71
2	R\$ 40.586,50	R\$ 4.741,79	R\$ 679,92	R\$ 5.421,71
3	R\$ 35.773,59	R\$ 4.812,91	R\$ 608,80	R\$ 5.421,71
4	R\$ 30.888,49	R\$ 4.885,11	R\$ 536,60	R\$ 5.421,71
5	R\$ 25.930,10	R\$ 4.958,38	R\$ 463,33	R\$ 5.421,71
6	R\$ 20.897,34	R\$ 5.032,76	R\$ 388,95	R\$ 5.421,71
7	R\$ 15.789,09	R\$ 5.108,25	R\$ 313,46	R\$ 5.421,71
8	R\$ 10.604,22	R\$ 5.184,87	R\$ 236,84	R\$ 5.421,71
9	R\$ 5.341,57	R\$ 5.262,65	R\$ 159,06	R\$ 5.421,71
10	-R\$ 0,01	R\$ 5.341,59	R\$ 80,12	R\$ 5.421,71
	Total	R\$ 50.000,01	R\$ 4.217,09	R\$ 54.217,10

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Como observado, as prestações possuem sempre mesmo valor, os juros são decrescentes e a amortização é crescente. Mas como se calcula o valor das prestações, saldo devedor, amortização e juros nesse sistema?

Como a prestação é definida e é igual em todos os pagamentos ela é calculada de imediato pela fórmula:

$$P = VP \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

Onde:

P = prestação

VP = valor presente (empréstimo)

n = número de períodos

i = taxa (usada na forma decimal)

Com a prestação definida, calculamos os outros valores:

Cálculo dos juros: saldo devedor do mês anterior multiplicado pela taxa.

Cálculo da amortização: diferença entre o valor da prestação e o juros.

Cálculo do saldo devedor: Saldo devedor do mês anterior subtraindo a amortização do período em questão.

3 Sequência Didática

A sequência didática por si, é uma organização de atividades de maneira sequencial.

Zabala (1998), afirma que uma sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.

A sequência didática proporciona uma estrutura lógica e coerente para o desenvolvimento de conteúdos em sala de aula. Segundo Zabala (1998), uma Sequência Didática não se resume a uma mera sucessão de atividades, mas sim a um encadeamento planejado de ações que visam promover a aprendizagem dos alunos. Nesse contexto, a importância de sua aplicação no processo educacional é inegável, uma vez que ela oferece um caminho estruturado para que o conhecimento seja construído de maneira progressiva e eficaz.

Zabala (1998), destaca que o aprendizado é um processo ativo, onde o aluno constrói seu conhecimento a partir de experiências prévias e novas situações problemáticas. O autor enfatiza que o papel do professor é fundamental na elaboração dessas sequências, sendo necessário um planejamento detalhado que considere as necessidades, interesses e o nível de desenvolvimento dos alunos. Para Zabala, o ensino deve ser organizado de maneira a proporcionar desafios adequados que permitam aos estudantes avançar em sua zona de desenvolvimento proximal.

Assim, nós professores, devemos preparar uma sequência didática de acordo com a realidade dos nossos estudantes, bem como, adequar a coerência entre as atividades, de modo que estejam de maneira construtiva e organizada atendendo as necessidades para o processo de ensino aprendizagem.

A seguir, apresentamos a sequência didática proposta.

3.1 Estrutura da Sequência Didática

- **Tema:** Matemática Financeira.
- **Duração da sequência:** Onze planos de aula totalizando 22 aulas de 50 minutos cada.
- **Público alvo:** 2º ano do ensino médio.
- **Objetivos:** Abordar o tema “Matemática Financeira” com exemplos e situações do dia a dia dos estudantes e familiares, de modo a consolidar os conteúdos relacionados.

- **Conteúdos prévios:** Operações com racionais, potenciação, radiciação, proporcionalidade, porcentagem, juros simples e compostos, função exponencial.
- **Conteúdos a serem trabalhados:** Porcentagem, juros simples e compostos, valor presente e futuro, conversão de taxas, mercado financeiro e investimentos, amortizações.
- **Habilidades BNCC:** (EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
- **Recursos pedagógicos:** Quadro, datashow, Softwares, celulares, computadores (Chromebooks e Notebooks) e impressões.
- **Metodologias:** Aulas expositiva e dialogada, pesquisas, trabalho em grupo, uso de planilhas e resolução de problemas e exercícios.
- **Avaliação:** Se dará de forma continuada ao longo das aulas, observando a participação, cumprimento e resolução das atividades e o desenvolvimento dos estudantes.

3.2 Plano 1: Organizando receitas e gastos

Duração: Duas aulas de 50 minutos cada.

Objetivos: Aprender a organizar receitas e despesas identificando gastos que podem ser reduzidos de maneira a poupar dinheiro.

Desenvolvimento: Antes de pensar em investir e aplicar o dinheiro é importante as pessoas se organizarem com suas receitas e gastos. É o primeiro e fundamental passo numa estruturação financeira.

Uma pesquisa realizada pelo Instituto Opinion Box, que ouviu 2.018 pessoas de todas as regiões do país afirma que cerca de 63% dos brasileiros realizam algum tipo de controle de suas receitas e gastos. Assim, concluímos que cerca de 37% ou aproximadamente quatro em dez brasileiros não realiza nenhum controle sobre suas finanças ([ECONÔMICO, 2022](#)).

O objetivo desta prática, é discutir com os alunos sobre a importância de controle de gastos e receitas para que possam ter tranquilidade e eventualmente não tenham surpresas indesejadas no curto e médio prazo. Com uma organização financeira, poderão perceber

se estão gastando mais que ganhando, observar gastos supérfluos e outros que podem ser diminuídos, controlar uso do cartão, bem como outras formas de pagamento, como dinheiro, pix e outros e assim, poder começar investir o dinheiro poupado. De maneira simples, o orçamento auxilia a pessoa a conhecer melhor sua realidade e se planejar.

Essa realização pode ser feita de maneira simples, com papel e caneta ou com uso de tecnologia, pode ser realizado através de planilhas, pois com as mesmas conseguimos obter resultados rápidos, além de gráficos informativos, bem como percentuais indicativos.

Um orçamento bem feito deve conter a anotação das entradas e gastos, estes podem ser separados como fixos ou variáveis. Fixo são aqueles gastos que mesmo não sendo exatamente o mesmo todo mês, não podem ser colocados de lado, como contas de água, energia, internet, transporte, aluguel, condomínio, IPTU, prestações de bens comprados como carro, moto, dentre outros. São muitos os gastos variáveis, podemos citar: vestuário, passeios, presentes, alimentação fora, delivery, dentre outros.

Atividade: Fazer um orçamento financeiro.

Os estudantes podem preencher a tabela 9, registrando seu orçamento pessoal ou familiar, pode ser proposto que seja preenchido mensalmente ou anualmente.

Tabela 9 – Planilha de Orçamento Pessoal

Receitas	Valor	Despesas	Valor	Despesas	Valor
Salário		Aluguel		Supermercado	
Aluguel		Condomínio		Feira	
Pensão		Prestação da casa		Padaria	
Horas extras		Faxina		Medicamentos	
13º salário		Prestação do carro		Cabeleireiro	
Férias		Seguro do carro		Manicure	
Rendimentos		Estacionamento		Esteticista	
Extras		Carro/manutenção		Academia	
Outros		Plano de saúde		Clube	
Total		Colégio/faculdade/curso		Médicos/consultas	
		IPTU		Dentista	
		IPVA/Licenciamento		Hospital	
		Empréstimos		Material escolar	
		Seguro de vida		Uniforme	
		Luz		Viagens	
		Água		Cinema/teatro	
		Telefone/Celular		Rest./bares/Delivery	
		Gás		Roupas	
		TV e Streaming		Calçados	
		Internet		Acessórios	
		Ônibus/Uber/táxi		Presentes	
		Combustível		Outros	
		Estacionamento		Total	

Com uso desta tabela, os alunos podem se organizar e ter noção se está sobrando algum valor ou se é necessário cortar algum gasto para que sobre dinheiro para realizar investimentos.

Na internet são oferecidos vários modelos de tabelas para gerenciar receitas e despesas, uma sugestão é utilizar a planilha de orçamento pessoal disponível gratuitamente para uso no site da B3, basta fazer um cadastro e baixar. Seu acesso se encontra disponível em: (B3, 2024).

Como exemplo nas imagens 10 e 11.

Figura 10 – Planilha controle pessoal B3 (parte 1)

B

3

Planilha de Orçamento Pessoal

		Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Mai	Junho	Julho	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
		Valor	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor
RECEITAS	Salário												
	Aluguel												
	Pensão												
	Horas extras												
	13º salário												
	Férias												
	Rendimentos												
	Outros												
		R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
INVESTIMENTOS													
Inscrição aqui o montante mensal que você destinará aos seus investimentos:	Ações												
	Tesouro Direto												
	Renda fixa												
	previdência privada												
	Outros												
	Total	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
% sobre Receita		#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
DESPESAS													
CATEGORIA	DESPESAS												
FIXAS Aqueles que têm o mesmo montante mensalmente	Habitação												
	Aluguel												
	Condomínio												
	Prestação da casa												
	Seguro da casa												
	Diarista												
	Mensalista												
	Transporte												
	Prestação do carro												
	Seguro do carro												
FIXAS Aqueles que têm o mesmo montante mensalmente	Saúde												
	Seguro saúde												
	Plano de saúde												
	Educação												
	Colégio												
	Faculdade												
	Curso												
	Impostos												
	IPU												
	Outros												
CATEGORIA	DESPESAS												
FIXAS Aqueles que têm o mesmo montante mensalmente	Seguro de vida												
	Total despesas fixas	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
	% sobre Receita	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!

Fonte: Disponível em (B3, 2024)

Essa planilha, disponível em (B3, 2024) em específico, favorece o entendimento de seu preenchimento, assim como a possibilidade de observação e crítica das receitas e gastos obtidos.

3.3 Plano 2: Usando porcentagem

Duração: Duas aulas de 50 minutos cada.

Objetivos: Resolver problemas do cotidiano que utilizam porcentagem.

Figura 11 – Planilha controle pessoal B3 (parte 2)

VARIÁVEIS Aqueles que acontecem todos os meses mas podemos tentar reduzir	Habitação	Luz												
		Água												
		Telefone												
		Telefone Celular												
		Gás												
	Transporte	TV e Streaming												
		Internet												
		Metrô												
		Ônibus												
		Uber e táxi												
	Alimentação	Combustível												
		Estacionamento												
		Supermercado												
		Feira												
		Padaria												
Saúde	Delivery													
	Medicamentos													
Cuidados pessoais	Cabeleireiro													
	Manicure													
	Esteticista													
		Academia												
		Clube												
Total despesas variáveis			R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	
% sobre Receita			#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
EXTRAS São as despesas extraordinárias, para as quais precisamos estar preparados quando acontecerem	Saúde	Médico												
		Dentista												
	Manutenção/ prevenção	Hospital												
		Carro												
	Educação	Casa												
		Material escolar												
			Uniforme											
	Total despesas extras			R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	
	% sobre Receita			#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
	ADICIONAIS aquelas que não precisam acontecer todos os meses	Lazer	Viagens											
Cinema/teatro														
Restaurantes/ bares														
Outros														
Roupas														
Vestuário		Calçados												
		Acessórios												
Outros		Presentes												
		% sobre Receita			#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
SALDO			Receita	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
	Investimentos		R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	
	Despesas fixas		R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	
	Despesas variáveis		R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	
	Despesas extras		R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	
	Despesas adicionais		R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	
	Saldo		R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	

Fonte: Disponível em (B3, 2024)

Desenvolvimento: A porcentagem é um dos conteúdos que mais aparecem no dia a dia das pessoas, visto sua empregabilidade na parte financeira, além de aparecer como indicador de pesquisas e levantamento de dados.

É importante que saibamos fazer cálculos que envolvam porcentagem, principalmente calcular mentalmente percentuais, pois nos deparamos frequentemente com esses casos, principalmente em estabelecimentos comerciais, no cálculo de descontos ou acréscimos em parcelas.

Neste plano de aula, vamos abordar junto aos estudantes alguns exemplos que envolvem porcentagem.

Exemplo 3.3.1. *Descontos em pagamento a vista.*

Você vai a uma determinada loja de eletrodoméstico para comprar uma geladeira, que custa R\$ 2.800,00. O vendedor informa que há um desconto de 5% no pagamento a vista. Qual o valor a vista a ser pago por essa geladeira?

Esse problema pode ser resolvido de algumas maneiras, como regra de três, calculando o desconto ou diretamente pelo fator multiplicativo.

Total do produto 100% menos 5% de desconto o cliente pagará efetivamente 95% do valor R\$ 2.800,00.

$$95\% \text{ de } 2.800 = (0,95) \cdot 2.800 = 2.660$$

Assim, o preço da geladeira a vista é de R\$ 2.660,00.

Exemplo 3.3.2. Recarga da Tag.

Tag em inglês significa etiqueta, rótulo. As tags são etiquetas que não aparecem na tela do computador, mas que servem para orientar alguém. A Tag num veículo, proporciona passagem rápida pelas cancelas de pedágio.

Você possui uma Tag em seu veículo, porém é preciso ter saldo disponível e assim as recargas são necessárias. Na figura 12, observamos as condições de recarga, tendo cada valor uma taxa de recarga, dadas as condições, qual a recarga mais vantajosa pelo cliente?

Figura 12 – Recarga da tag

Valor da recarga	Taxa sobre recarga	Saldo final para uso
R\$ 30,00	R\$ 5,00	R\$ 25,00
R\$ 50,00	R\$ 10,00	R\$ 40,00
R\$ 80,00	R\$ 15,00	R\$ 65,00
R\$ 150,00	R\$ 25,00	R\$ 125,00
R\$ 250,00	R\$ 35,00	R\$ 215,00

Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Para determinar a recarga mais vantajosa, podemos encontrar o percentual correspondente a cada taxa de recarga, sendo o mais vantajoso o que possuir menor percentual, faremos um exemplo, restante aparece na tabela:

$$x\% \text{ de } 30 = 5$$

$$x\% \cdot 30 = 5$$

$$x\% = \frac{5}{30}$$

$$x\% \approx 16,67\%$$

Assim, a recarga mais vantajosa é a de valor R\$ 250,00. É importante ressaltar que existem outras condições determinantes para escolha, como por exemplo, se a pessoa tem o valor maior disponível, caso contrário, a opção de R\$ 30,00 pode ser mais vantajosa.

Tabela 10 – Recarga Tag

Recarga	Taxa da recarga	Saldo para uso	Percentual da taxa
R\$ 30,00	R\$ 5,00	R\$ 25,00	16,67%
R\$ 50,00	R\$ 10,00	R\$ 40,00	20%
R\$ 80,00	R\$ 15,00	R\$ 65,00	18,75%
R\$ 150,00	R\$ 25,00	R\$ 125,00	16,67%
R\$ 250,00	R\$ 35,00	R\$ 215,00	14%

Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Outra observação, é que realizar a recarga de R\$ 50,00 não vale a pena, pois realizando duas recargas de R\$ 30,00 da o mesmo valor da taxa da recarga de R\$ 50,00.

Exemplo 3.3.3. Porcentagem de desconto.

Na imagem 13, observamos um fogão que possui desconto no pagamento a vista.

Figura 13 – Desconto a vista no fogão

Fogão 5 Bocas Com Mesa de Vidro Atlas Mônaco Top Glass Bivolt
 Código da1geedbj6 | Ver descrição completa | Atlas

★★★★★ 4.6 (253) Avaliar produto

Cor: Preto

Vendido por **Melhor para você**
 Entregue por **Magalu**
 O Magalu garante a sua compra, do pedido à entrega. Saiba mais

R\$ 2.999,90
 R\$ 1.488,26 em 10x de R\$ 148,83 sem juros
 ou **R\$ 1.279,90** no Pix
 (14% de desconto no pix)

Cartão de crédito
 sem juros R\$ 1.488,26
 10x R\$ 148,83

COMPRAR AGORA

ADICIONAR À SACOLA

Fonte: <https://www.magazineluiza.com.br/fogao-5-bocas-com-mesa-de-vidro-atlas-monaco-top-glass-bivolt/p/da1geedbj6/ed/fg5b/> (Acesso em: 14/10/2024)

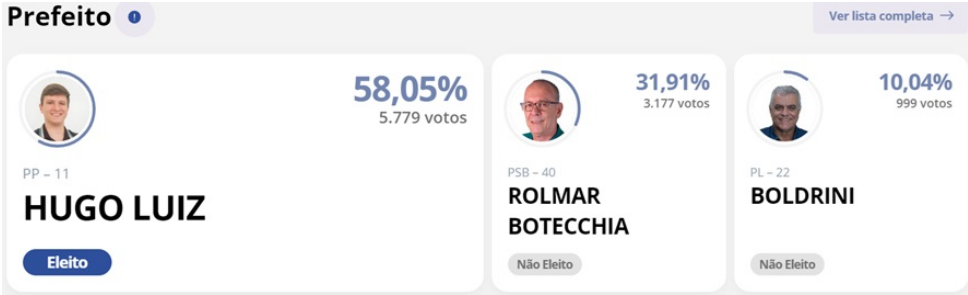
O preço do fogão é de R\$ 1.488,26 podendo ser parcelado em até 10x sem juros, o mesmo possui um desconto de 14% a vista com preço de R\$ 1.279,90 no pix. Podemos discutir com os estudantes, como foi calculado esse desconto e apresentar meios de solução.

Uma solução é a seguinte: 100% é o valor inicial, com 14% de desconto, o produto passa a valer no pagamento a vista $100\% - 14\% = 86\%$. Calculando agora 86% do valor inicial de R\$ 1.488,26 ($0,86 \cdot 1488,26$), obtemos o valor de R\$ 1.279,90.

Exemplo 3.3.4. Percentual de votos na eleição para prefeito de Alfredo Chaves.

O cenário eleitoral utiliza porcentagem para representar resultados de pesquisas de intenções de votos, bem como dos resultados das eleições.

Figura 14 – Votos válidos prefeito Alfredo Chaves



Fonte:

<https://resultados.tse.jus.br/oficial/app/index.html/eleicao;e=e619;uf=es;mu=56057;tipo=3;ufbu=es;>
(Acesso em: 14/10/2024)

Na figura 14, observamos o percentual de votos válidos para prefeito no município de Alfredo Chaves no ano de 2024. A partir deste dados podemos discutir com os estudantes por exemplo, como esses percentuais são encontrados.

Ao realizar a soma dos votos dos três candidatos ($5779 + 3177 + 999$) que é de 9955, esse total representa 100% dos votos válidos, assim, para calcular o percentual por exemplo, do vencedor Hugo Luiz, fazemos a divisão do seu quantitativo pelo total:

$$5779 \div 9955 \approx 0,5805$$

$$0,5805 \cdot 100 \approx 58,05\%$$

Exemplo 3.3.5. *Calcular percentuais mentalmente.*

Propor aos alunos calcular 0,5% de valores crescentes, conforme a tabela.

Tabela 11 – Cálculo de 0,5%

Valor	Resultado
R\$ 100,00	R\$ 0,50
R\$ 1.000,00	R\$ 5,00
R\$ 10.000,00	R\$ 50,00
R\$ 100.000,00	R\$ 500,00
R\$ 1.000.000,00	R\$ 5.000,00

Fonte produção do próprio autor (2023)

Essa tabela pode ir sendo preenchida linha a linha, de modo que ao final, o professor pode discutir com os alunos a seguinte afirmativa: “você sabiam que 0,5% é menor que o rendimento da poupança, e que existem aplicações com rendimentos melhores?”

Essa proposta simples, tem por objetivo estimular a curiosidade dos estudantes sobre investimentos e perceber o poder dos juros.

3.4 Plano 3: Economia nas embalagens

Duração: Duas aulas de 50 minutos cada.

Objetivos: Determinar por cálculos qual a embalagem de um mesmo produto é a mais econômica.

Desenvolvimento: Com a receita que dispomos, seja por meio de salário num emprego ou de maneira autônoma, para podermos conseguir realizar investimentos, é necessário que pensemos em como podemos economizar. Várias situações do cotidiano, nos permitem economizar, dos quais podemos citar os seguintes exemplos:

Evitar consumismo: com acesso a tecnologia, sites e aplicativos de lojas e por impulso, acabamos comprando muitas vezes produtos que são supérfluos, podemos passar sem, mas por vaidade e luxo, ou pela sensação que estamos comprando barato, talvez em uma promoção, isso faz com que gastemos mais que o necessário.

Procurar menor preço: Quando temos a condição de tempo e de localização para ir em mais de um estabelecimento comercial, conseguimos comparar e comprar determinados itens sejam no setor alimentício, de saúde ou outros pelo menor valor. Essa prática ajuda muito na economia, pois os produtos em sua maioria sempre tem diferença de preço comparando estabelecimentos.

Aproveitar promoções: Quando fazemos acompanhamento dos preços de determinado produto e o mesmo entra em uma verdadeira promoção, esta é uma ótima maneira de economizar, essa prática releva quase sempre uma excelente economia.

Procurar as embalagens mais econômicas: Grande parte dos produtos possuem mais de uma embalagem, visto a necessidade dos clientes com quantidades diferentes do produto. Ao fazer compra, sempre devemos ficar atentos pra ver as mais econômicas, pois nem sempre a embalagem com maior quantidade é a mais vantajosa.

A respeito deste último item, nas figuras adiante, 15 e 16, temos os seguintes exemplos do qual podemos observar as diferenças e realizar cálculos para ver a diferença entre as embalagens:

Neste exemplo, é notória a percepção que a embalagem maior é mais vantajosa que a menor, visto a diferença de preços e a diferença de quantidade. Para saber o valor exato, podemos fazer o seguinte cálculo:

Encontrar o valor de uma grama da embalagem menor e depois multiplicar pelo peso da embalagem maior.

$$13,89 \div 370 = 0,0375405405$$

$$670 \cdot 0,0375405405 = 25,15$$

Logo, pelo valor da embalagem menor, é como se a embalagem maior de 670g

Figura 15 – Nescau preços



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

tivesse o valor de R\$ 25,15.

Fazendo $25,15 - 18,69$, temos uma diferença de R\$ 6,46.

Calculando $6,46 \div 18,69 = 0,34564$ e multiplicando por 100, temos uma diferença de aproximadamente 34,56% no preço entre a embalagem de 370g e a de 670g.

Na maioria dos casos, a embalagem maior torna-se mais econômica, mas isso nem sempre acontece, vamos observar o próximo exemplo:

Figura 16 – Maionese preços



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Nesse caso, é nítido que a embalagem menor é mais vantajosa, pois ao comprar duas unidades, você está levando 500 gramas por R\$ 7,61 visto que a embalagem maior é de 450 gramas e vale R\$ 8,99.

Vamos calcular quanto mais cara está a embalagem maior, podemos realizar uma regra de três simples como resolução:

250g	3,79
450g	x

$$250x = 1705,5$$

$$x = \frac{1705,5}{250}$$

$$x = 6,822$$

Ou seja, pelo valor da embalagem menor, a maior deveria custar aproximadamente R\$ 6,82 par ter valor equiparado.

Percentualmente, temos:

$$8,99 - 6,82 = 2,17$$

$$2,17 \div 6,82 = 0,318181...$$

$$0,318181 \cdot 100 \approx 31,81\%$$

Logo, a diferença percentual de preço do produto nas duas embalagens é de aproximadamente 31,81%.

Atividade: Propor aos estudantes que pesquisem num estabelecimento comercial mesmos produtos que estejam em embalagens diferentes fazendo registros dos preços e quantidades, seja por foto ou anotações e já buscando as primeiras considerações sobre qual embalagem é a mais econômica.

Com os levantamentos realizados, propor na aula o preenchimento da planilha observando os resultados e diferenças encontradas. Na figura 17, segue um esboço da planilha a ser realizada com os exemplos já citados.

Figura 17 – Planilha comparativo de embalagens

LEVANTAMENTO DE PREÇOS - EMBALAGEM MAIS ECONÔMICA								
Item	Discriminação	Peso emb. 1	Peso emb. 2	Preço 1	Preço 2	Comparativo	Diferença	Difer. Percentual
1	Nescau	370	670	R\$ 13,89	R\$ 18,69	R\$ 25,15	R\$ 6,46	34,58%
2	Maionese	250	450	R\$ 3,79	R\$ 8,99	R\$ 6,82	R\$ 2,17	31,78%
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

No uso da planilha, conseguimos inserir fórmulas que facilitam e otimizam o tempo, mostrando os resultados de maneira rápida e precisa.

3.5 Plano 4: Calculando descontos

Duração: Duas aulas de 50 minutos cada.

Objetivos: Comparar valores e determinar por cálculos o percentual de economia de um mesmo produto vendido em estabelecimentos diferentes.

Desenvolvimento: Os estabelecimentos comerciais tem liberdade para determinar o preço de venda dos produtos, logo, é muito comum encontrarmos diferença quando comparamos um mesmo item em estabelecimentos diferentes, seja em supermercados, farmácias, e todos os outros segmentos. As imagens a seguir nos mostram um levantamento de preços realizado em dois estabelecimentos:

Figura 18 – Produtos supermercado 1



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Atividade: As figuras 18 e 19, evidenciam os preços de produtos em dois supermercados distintos. Percebemos nitidamente a diferença entre os valores de cada item nas duas imagens.

Com os estudantes, vamos propor que preencham a tabela a seguir registrando os preços e calculando a diferença monetária e percentual de cada item.

A diferença monetária é calculada com uma simples subtração, vamos utilizar o primeiro exemplo do Leite integral:

$$6,15 - 5,25 = 0,9$$

Na diferença percentual, o cálculo se dá por uma divisão entre a diferença monetária pelo menor valor, assim, determinamos quanto mais caro está o outro, ao final basta multiplicar por 100 para ter o valor percentual.

Figura 19 – Produtos supermercado 2



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Tabela 12 – Supermercado 1 x supermercado 2

nº	Item	Mercado 1	Mercado 2	Diferença R\$	Diferença %
1	Leite integral 1l	R\$ 6,15	R\$ 5,25	R\$ 0,90	17,14%
2	Sabão em pó OMO 1,6kg	R\$ 22,90	R\$ 25,90	R\$ 3,00	13,1%
3	Pasta de dente colgate 90g	R\$ 16,75	R\$ 12,23	R\$ 4,52	36,96%
4	Trigo Venturelli 1kg	R\$ 6,38	R\$ 6,79	R\$ 0,41	6,38%
5	Macarrão Apollo 1kg	R\$ 7,48	R\$ 5,99	R\$ 1,49	24,87%
6	Pó de Café 250g	R\$ 8,18	R\$ 8,10	R\$ 0,08	0,99%
7	Água sanitária Qboa 1l	R\$ 4,90	R\$ 5,99	R\$ 1,09	22,24%
8	Leite condensado Moça 395g	R\$ 10,98	R\$ 13,99	R\$ 3,01	27,41%
9	Arroz Sepé 5kg	R\$ 33,48	R\$ 35,99	R\$ 2,51	7,5%
10	Azeite Gallo 500g	R\$ 59,98	R\$ 54,45	R\$ 5,53	10,16%
11	Maionese Helmanns 500g	R\$ 14,98	R\$ 12,45	R\$ 2,53	20,32%
12	Achocolatado Nescau 370g	R\$ 11,90	R\$ 10,45	R\$ 1,45	13,88%
13	Total	R\$ 204,06	R\$ 197,58	R\$ 6,48	3,28%

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

$$0,9 \div 5,25 = 0,1714 \cdot 100 = 17,14\%$$

A respeito da tabela, podem ser feitas algumas outras perguntas:

- Qual o item de maior diferença monetária?
- Qual o item de maior diferença percentual?
- São os mesmos?
- Qual a diferença monetária e percentual total se separarmos todos os itens em mais caros e baratos?
- Baseado nesses produtos, buscando sempre o de menor valor, qual seria a economia para uma compra de R\$ 1.000,00?

3.6 Plano 5: Compra a vista ou a prazo

Duração: Duas aulas de 50 minutos cada.

Objetivos: Utilizar valor presente e valor futuro para determinar o mais vantajoso ao adquirir um produto.

Desenvolvimento: Ao realizar a compra de um produto seja eletrônico, eletrodoméstico, vestuário, dentre tantos outros, seja no meio físico ou online, nos deparamos com várias formas de pagamento, por exemplo: Pix, cartão de crédito ou débito, boleto, dinheiro, carnê, carteira digitais, transferência bancária, dentre outros.

Esses pagamentos, muitas vezes tem valores diferentes, pois os mesmos podem ser considerados a vista ou a prazo. Diante de tantas opções, qual a melhor opção no ato da compra?

Essa pergunta não possui uma resposta correta, visto que tem que se levar em conta varias situações no ato da compra, como por exemplo:

- Ter a disponibilidade de pagamentos variados: muitas pessoas não possuem por exemplo pix, ou cartão de débito e crédito.
- Ter saldo ou dinheiro: muitas pessoas não dispõe de saldo suficiente para uma compra a vista.
- A necessidade: urgência que uma pessoa tem por um produto, assim ela vai comprar, nem que seja parcelado com altos juros, por exemplo, se a geladeira da família queimar.

- Conhecimento sobre o que é mais vantajoso: a maioria das pessoas não fazem conta ou não sabem fazer conta para determinar o melhor meio de pagamento, muitas pessoas tem o hábito de pagar só a vista, ou só no débito, ou só no crédito.

Considerando que a pessoa tem o dinheiro para pagamento a vista, vamos citar alguns exemplos e fazer contas para o que é mais vantajoso, vamos considerar numa base de mercado, que o dinheiro vale 0,8% para o cliente, ou seja, ele consegue aplicar e ter este retorno mensalmente. Na compra do cartão de crédito, normalmente o cliente tem entre 10 e 40 dias, este é o tempo para compras antes de pagar a fatura, vamos usar para compras no crédito, sempre 30 dias, ou seja, o cliente paga a primeira parcela um mês após o ato da compra.

Figura 20 – Geladeira



Fonte: <https://www.shopclub.com.br/geladeira-refrigerador-if55-inverter-top-freezer-431l-branco/p?skuId=2003915> (acesso em 09/12/2023)

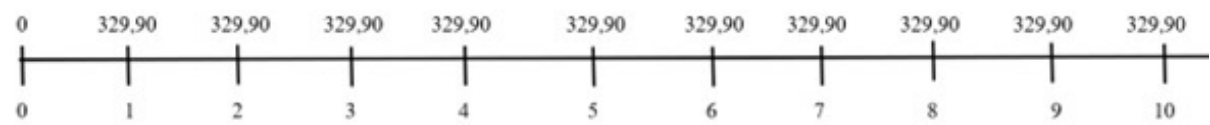
Neste exemplo da figura 20, temos uma geladeira que custa R\$ 3.299,00 e não possui diferença nos pagamentos podendo ser parcelado em até 10x de R\$ 329,90 sem juros.

Assim, não é nem preciso fazer contas para ter certeza que é mais vantajoso o pagamento parcelado e em quanto mais parcelas de menor valor, melhor para o cliente, pois ele terá seu dinheiro rendendo por mais tempo.

Neste exemplo, vamos calcular o valor a vista da geladeira se ela for comprada parcelada em 10 x de R\$ 329,90 sem juros. Vamos trazer as parcelas de cada mês para o tempo 0. para isso, basta usar a fórmula de valor presente:

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

Figura 21 – Parcelas Geladeira



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Na tabela 13 , apresentamos os resultados:

Tabela 13 – Valor presente pagamento da geladeira

Tempo	Pagamento	Fórmula	Valor no tempo 0
0	R\$ 0,00	$VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$	R\$ 0,00
1	R\$ 329,90	$VP = \frac{329,9}{(1+0,08)^1}$	R\$ 327,28
2	R\$ 329,90	$VP = \frac{329,9}{(1+0,08)^2}$	R\$ 324,68
3	R\$ 329,90	$VP = \frac{329,9}{(1+0,08)^3}$	R\$ 322,11
4	R\$ 329,90	$VP = \frac{329,9}{(1+0,08)^4}$	R\$ 319,55
5	R\$ 329,90	$VP = \frac{329,9}{(1+0,08)^5}$	R\$ 317,01
6	R\$ 329,90	$VP = \frac{329,9}{(1+0,08)^6}$	R\$ 314,50
7	R\$ 329,90	$VP = \frac{329,9}{(1+0,08)^7}$	R\$ 312,00
8	R\$ 329,90	$VP = \frac{329,9}{(1+0,08)^8}$	R\$ 309,53
9	R\$ 329,90	$VP = \frac{329,9}{(1+0,08)^9}$	R\$ 307,07
10	R\$ 329,90	$VP = \frac{329,9}{(1+0,08)^{10}}$	R\$ 304,63
Total	R\$ 3299,00	-	R\$ 3158,36

Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Considerando que na compra com cartão um tempo médio da fatura vencer é de 30 dias e trazendo as parcelas para o tempo 0 (pagamento no ato da compra), seria o mesmo de pagar R\$ 3.158,36, ou seja, uma diferença de R\$ 140,64.

Essa realidade de trazer para o tempo 0, talvez não seja a melhor maneira para o aluno compreender a situação, é estranho pensar num dinheiro futuro sendo relocado para um valor presente. Uma maneira mais lúdica, seria pensar que o cliente tem o valor de R\$

3.299,00, mas como não tem diferença no pagamento ele opta por parcelar em 10 vezes. Então ele aplica esse valor e a cada mês seguinte vai efetuando o pagamento das parcelas até o décimo mês. Ao final ele vai ter os juros da aplicação por esse período. Na tabela a seguir, apresentamos essa situação:

Tabela 14 – Valor futuro pagamento da geladeira

Tempo	Montante	Parcela	Saldo final
0	R\$ 3.299,00	R\$ 0,00	R\$ 3.299,00
1	R\$ 3.325,39	R\$ 329,90	R\$ 2.995,49
2	R\$ 3.019,44	R\$ 329,90	R\$ 2.689,56
3	R\$ 2.711,07	R\$ 329,90	R\$ 2.381,17
4	R\$ 2.400,22	R\$ 329,90	R\$ 2.070,32
5	R\$ 2.086,88	R\$ 329,90	R\$ 1.756,98
6	R\$ 1.771,04	R\$ 329,90	R\$ 1.441,14
7	R\$ 1.452,67	R\$ 329,90	R\$ 1.122,77
8	R\$ 1.131,75	R\$ 329,90	R\$ 801,85
9	R\$ 808,26	R\$ 329,90	R\$ 478,36
10	R\$ 482,19	R\$ 329,90	R\$ 152,29

Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Pela tabela, percebemos que o cliente aplicando o valor e abatendo as parcelas, ainda estaria ao final dos 10 meses com R\$ 152,29, que são os juros proveniente da aplicação.

É interessante observar que os dois valores encontrados são diferentes, R\$ 140,64 e R\$ 152,29, isso porque temos os juros sobre juros.

Este primeiro, é resultado de trazer todas as parcelas para a data atual, no ato da compra, assim seria dizer, que dos R\$ 3.299,00 sobraria ao cliente R\$ 140,64 no ato da compra.

Se aplicarmos esse valor nas condições de juros dada, de 0,8% ao mês, teremos ao final dos 10 meses o mesmo valor apenas com pequena diferença de aproximação.

$$VF = C \cdot (1 + i)^n$$

$$VF = 140,64 \cdot (1 + 0,008)^{10}$$

$$VF = 140,64 \cdot (1,008)^{10}$$

$$VF = 140,64 \cdot (1,0829423085)$$

$$VF = 152,30$$

Como observado, os valores são quase que idênticos, apenas por questão de aproximação.

Vamos ver outro exemplo na figura [22](#):

Figura 22 – Máquina de lavar

Lavadora de Roupas Electrolux 11Kg Essencial Care Branca LES11 127 Volts
 Código hd4dea3c2a | Ver descrição completa | Electrolux



★★★★★ 4.6 (165) [Avaliar produto](#)

Selecionar Voltagem
 110V

Vendido e entregue por **Frio Peças**
 O Magalu garante a sua compra, do pedido à entrega. [Saiba mais](#)

R\$ 2.191,00
R\$ 1.928,36 no Pix
 (3% de desconto)
 ou R\$ 1.988,00 em 10x de R\$ 198,80 sem juros

Cartão de crédito
 sem juros R\$ 1.988,00
 10x R\$ 198,80

COMPRAR AGORA

ADICIONAR À SACOLA

VITORIA, ES - 29048-180 [alterar](#)

Receba em até 6 dias úteis
 Após o pagamento confirmado R\$ 55,75

Fonte: <https://www.magazineluiza.com.br/lavadora-de-roupas-electrolux-11kg-essencial-care-branca-les11-127-volts/p/hd4dea3c2a/ed/lava/> (acesso em: 10/12/2023)

Temos na imagem uma máquina de lavar que pode ser paga a vista por R\$ 1.928,36 no Pix ou R\$ 1.988,00 em 10x de R\$ 198,80 sem juros.

Para muitas pessoas, é melhor comprar essa máquina a vista, já que o valor é menor, mas não é bem assim. Vamos calcular os valor das parcelas no tempo presente e fazer a comparação. Na tabela a seguir temos os valores:

Observamos que o valor das parcelas no tempo presente gera um valor total de R\$ 1.903,25 menor que o valor a vista de R\$ 1.928,36, uma diferença de R\$ 25,11. Ou seja, neste caso, é melhor comprar parcelado, uma grande surpresa visto os valores iniciais.

Agora vamos calcular o valor futuro, ou seja, pegar o valor a vista da máquina de lavar que é de R\$ 1.928,36, investir com aplicação que rende 0,8% ao mês e cada mês debitar a parcela de R\$ 198,80.

Na figura a 23, observamos os resultados:

Observamos que após os pagamentos de todas as parcelas, sobrou R\$ 27,19, ou seja, evidente que foi melhor pagar a máquina de lavar a prestação, mesmo tendo desconto a vista, os juros gerados foram maiores.

Novamente, percebemos que o valor Valor presente (R\$ 25,11) foi diferente do valor futuro (R\$ 27,19), se aplicarmos esse valor nas condições de juros dada, de 0,8% ao mês, teremos ao final dos 10 meses o mesmo valor apenas com pequena diferença de aproximação.

$$VF = C \cdot (1 + i)^n$$

$$VF = 25,11 \cdot (1 + 0,008)^{10}$$

Tabela 15 – Valor presente pagamento da máquina de lavar

Tempo	Pagamento	Fórmula	Valor no tempo 0
0	R\$ 0,00	$VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$	R\$ 0,00
1	R\$ 198,80	$VP = \frac{198,8}{(1+0,08)^1}$	R\$ 197,22
2	R\$ 198,80	$VP = \frac{198,8}{(1+0,08)^2}$	R\$ 195,66
3	R\$ 198,80	$VP = \frac{198,8}{(1+0,08)^3}$	R\$ 194,10
4	R\$ 198,80	$VP = \frac{198,8}{(1+0,08)^4}$	R\$ 192,56
5	R\$ 198,80	$VP = \frac{198,8}{(1+0,08)^5}$	R\$ 191,04
6	R\$ 198,80	$VP = \frac{198,8}{(1+0,08)^6}$	R\$ 189,52
7	R\$ 198,80	$VP = \frac{198,8}{(1+0,08)^7}$	R\$ 188,02
8	R\$ 198,80	$VP = \frac{198,8}{(1+0,08)^8}$	R\$ 186,52
9	R\$ 198,80	$VP = \frac{198,8}{(1+0,08)^9}$	R\$ 185,04
10	R\$ 198,80	$VP = \frac{198,8}{(1+0,08)^{10}}$	R\$ 183,57
Total	R\$ 1988,00	-	R\$ 1903,25

Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Figura 23 – Máquina de lavar - Valor futuro

Meses	Rendimento	Parcela	Débito parcela	Juro
0	R\$ 1.928,36	R\$ 0,00	R\$ 1.928,36	R\$ 0,00
1	R\$ 1.943,79	R\$ 198,80	R\$ 1.744,99	R\$ 15,43
2	R\$ 1.758,95	R\$ 198,80	R\$ 1.560,15	R\$ 13,96
3	R\$ 1.572,63	R\$ 198,80	R\$ 1.373,83	R\$ 12,48
4	R\$ 1.384,82	R\$ 198,80	R\$ 1.186,02	R\$ 10,99
5	R\$ 1.195,51	R\$ 198,80	R\$ 996,71	R\$ 9,49
6	R\$ 1.004,68	R\$ 198,80	R\$ 805,88	R\$ 7,97
7	R\$ 812,33	R\$ 198,80	R\$ 613,53	R\$ 6,45
8	R\$ 618,44	R\$ 198,80	R\$ 419,64	R\$ 4,91
9	R\$ 422,99	R\$ 198,80	R\$ 224,19	R\$ 3,36
10	R\$ 225,99	R\$ 198,80	R\$ 27,19	R\$ 1,79
	Total	R\$ 1.988,00		R\$ 86,83

Fonte: Produção do próprio autor (2023)

$$VF = 25,11 \cdot (1,008)^{10}$$

$$VF = 25,11 \cdot (1,0829423085)$$

$$VF = 27,19$$

Atividade: Propor aos estudantes pesquisar produtos em site de vendas na internet e através dos mesmos, realizar os cálculos de valor presente e valor futuro destacando se é mais vantajoso a compra a vista ou parcelado demonstrando os valores. A demonstração será realizada em tabelas sendo realizada em planilha como no exemplo da imagem [23](#).

3.7 Plano 6: Uso do cartão de crédito

Duração: Duas aulas de 50 minutos cada.

Objetivos: Compreender os benefícios e riscos do uso do cartão de crédito.

Desenvolvimento: O uso do cartão de crédito vem crescendo a cada ano no Brasil, segundo dados do Banco Central (BC) o número de clientes que usam o cartão de crédito cresceu 30,9% entre 2019 e 2022.

Oferecido por bancos e instituições financeiras com determinado limite, sua função é realizar pagamentos a vista ou parcelados, ou seja, um empréstimo do banco de tal maneira que o cliente paga o montante de suas compras numa data fixa no mês.

Embora seja uma excelente ferramenta de pagamento, pois dispensa dinheiro em espécie e mesmo uso do saldo em conta, muitas pessoas acabam tendo um uso desenfreado, gerando dívidas a juros altos e complicações na vida financeira. Muitas pessoas usam limite esquecendo que o mesmo não é crédito, parcelam muitas compras e depois de um tempo a conta das faturas chega, se a mesma superar a receita a pessoa entra num endividamento, entrando num ciclo de altos juros.

Mas como intuito desta aula, veremos os benefícios e vantagens do uso do cartão de crédito em relação a outros pagamentos.

A princípio podemos citar que a grande concorrência entre as instituições financeiras tem reduzido o valor das taxas do cartão, tendo hoje várias opções de cartão gratuito, sem cobrança de anuidades e taxa.

Outro ponto positivo, é a organização das compras efetuadas. Todos os pagamentos ficam listados em ordem cronológica, podendo o cliente conferir suas compras. Na fatura, o cliente pode conferir onde destinam-se os maiores valores, podendo assim observar se é possível diminuir gastos em determinado setor, como por exemplo alimentação ou vestuário.

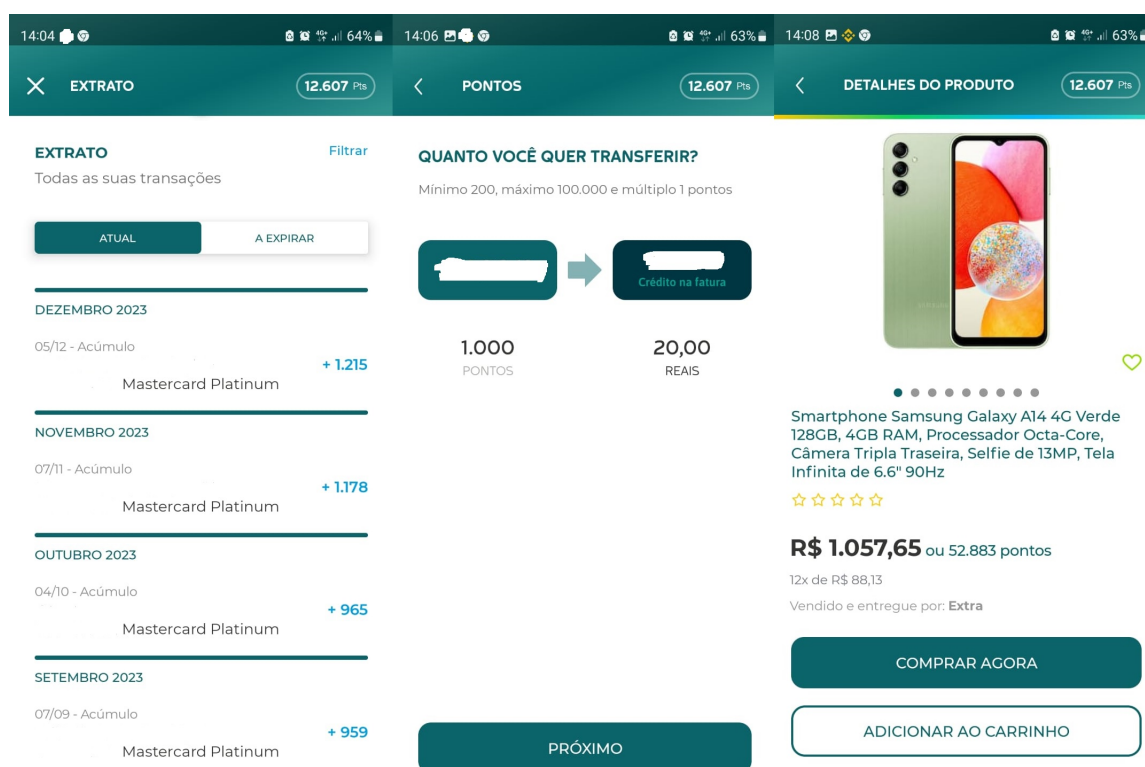
Como já abordamos em aula anterior, um grande benefício do cartão de crédito é poder parcelar compras. Uma compra que não possui desconto a vista e pode ser parcelada

da a opção do cliente aplicar o valor e gerar juros até o final das parcelas.

Outro ponto interessante é o acúmulo de pontos concedido pelo uso do cartão de crédito. Esses pontos, podem ser trocados por produtos, passagens aéreas, voltar na forma de crédito, isso a depender das regras de cada cartão concedido pelas instituições financeiras.

Na imagem abaixo, vemos um exemplo sobre sistema de pontos de um determinado cartão. A esquerda, percebemos que o número de pontos de cada mês vem variado, isso devido o valor pago da fatura. No centro da imagem 24, temos a demonstração do valor da troca de pontos por crédito e na direita, observamos um celular que pode ser adquirido com pontuação do cartão.

Figura 24 – Cartão de crédito benefícios



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

O cálculo para saber quantos pontos se obtém em cada fatura fechada, varia de acordo com cada tipo de cartão, em geral é acrescentado de um a dois pontos por dólar pago na fatura, o cálculo é simples.

Vamos tomar o dólar pelo preço de R\$ 4,90 e utilizar para cada dólar efetuado em compras a o ganho de 1,5 pontos.

Se uma fatura paga em determinado mês deu R\$ 2.450,00, basta fazer:

$$2450 \div 4,9 = 500$$

$$500 \cdot (1,5) = 750 \text{ pontos}$$

Assim, o valor da fatura resultou em 750 pontos.

Atividade: Baseado no orçamento financeiro realizado no início, cada aluno vai calcular qual seria seu gasto mensal e anual com cartão de crédito e em cima destes valores, realizar o cálculo de quantos pontos são obtidos. Poderá ser realizado também a conversão dos pontos em crédito.

3.8 Plano 7: Um pouco do mercado financeiro

Duração: Duas aulas de 50 minutos.

Objetivos: Conhecer conceitos, definições, indexadores e outras informações sobre mercado financeiro.

Desenvolvimento: Neste tópico, vamos abordar sobre o mercado financeiro, conhecendo um pouco sobre os principais índices indexadores (Selic, CDI, IPCA e TR), investimentos de renda fixa, cobrança de imposto de renda e segurança desses ativos.

Esta aula será apresentada com base em referência ao capítulo 2.9 de forma expositiva e dialoga.

Atividade: Propor um resumo em caderno do conteúdo apresentado sobre mercado financeiro realizando pesquisa sobre pontos de dúvida e curiosidades.

3.9 Plano 8: Conversão de taxas

Duração: Duas aulas de 50 minutos cada.

Objetivos: Aprender a realizar a conversão de taxas no sistema composto de capitalização.

Desenvolvimento: Converter taxas é um cálculo recorrente para pessoas que buscam investimentos ou realizam empréstimos, pois para fim de comparação é preciso ter taxas na mesma unidade de tempo.

Como exemplo e explicação para os alunos, faremos as seguintes atividades:

- **Exemplo 1:** Dado um investimento em CDB de 100% do CDI, onde na data de 24/07/2024 se encontra em 10,4% ao ano, determine a taxa mensal de remuneração desta aplicação:

Resolução:

$$iq = [(1 + it)^{\frac{q}{t}} - 1]$$

$$iq = [(1 + 0,104)^{\frac{1}{12}} - 1]$$

$$iq = [(1,104)^{\frac{1}{12}} - 1]$$

$$iq = [1,0082790792 - 1]$$

$$iq = [0,0082790792] \cdot 100$$

$$iq = 0,82790792\%$$

Logo, a taxa mensal bruta aproximada é de 0,8279%.

- **Exemplo 2:** No mês de junho de 2024, a poupança teve rendimento de 0,5367%. Baseado neste rendimento, qual seria o rendimento anual?

Resolução:

$$iq = [(1 + it)^{\frac{q}{t}} - 1]$$

$$iq = [(1 + 0,005367)^{\frac{12}{1}} - 1]$$

$$iq = [(1,005367)^{\frac{12}{1}} - 1]$$

$$iq = [1,0663395346 - 1]$$

$$iq = [0,0663395346] \cdot 100$$

$$iq = 6,63395346\%$$

Logo, a taxa anual aproximada é de 6,6339%.

- **Exemplo 3:** Paulo aplicou em um CDB com taxa prefixada de 11% a.a. de vencimento em seis meses, qual a taxa correspondente para esse período aplicado?

Resolução:

$$iq = [(1 + it)^{\frac{q}{t}} - 1]$$

$$iq = [(1 + 0,11)^{\frac{1}{2}} - 1]$$

$$iq = [(1,11)^{\frac{1}{2}} - 1]$$

$$iq = [1,0535653753 - 1]$$

$$iq = [0,0535653753] \cdot 100$$

$$iq = 5,35653753\%$$

Logo, a taxa semestral aproximada é de 5,3565%.

Atividades: Propor aos estudantes resolver as seguintes atividades sobre conversão de taxas:

1. Encontre a taxa mensal de cada um dos investimentos abaixo:
 - a) Poupança rendimento 2023 (8,03% a.a.).
 - b) Tesouro Selic (10,5% a.a.).
 - c) LCA 90% do CDI (10,4% a.a.).

Resolução:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } iq &= [(1 + it)^{\frac{q}{t}} - 1] \\
 iq &= [(1 + 0,0803)^{\frac{1}{12}} - 1] \\
 iq &= [(1,0803)^{\frac{1}{12}} - 1] \\
 iq &= [1,0064573242 - 1] \\
 iq &= [0,0064573242] \cdot 100 \\
 iq &= 0,64573242\%
 \end{aligned}$$

Logo, a taxa mensal aproximada é de 0,6457%.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } iq &= [(1 + it)^{\frac{q}{t}} - 1] \\
 iq &= [(1 + 0,105)^{\frac{1}{12}} - 1] \\
 iq &= [(1,105)^{\frac{1}{12}} - 1] \\
 iq &= [1,0083551557 - 1] \\
 iq &= [0,0083551557] \cdot 100 \\
 iq &= 0,83551557\%
 \end{aligned}$$

Logo, a taxa mensal bruta aproximada é de 0,8355%.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } 90\% \text{ de } 10,4\% &= 9,36\% \\
 iq &= [(1 + it)^{\frac{q}{t}} - 1] \\
 iq &= [(1 + 0,0936)^{\frac{1}{12}} - 1] \\
 iq &= [(1,0936)^{\frac{1}{12}} - 1] \\
 iq &= [1,0074841176 - 1] \\
 iq &= [0,0074841176] \cdot 100 \\
 iq &= 0,74841176\%
 \end{aligned}$$

Logo, a taxa mensal aproximada é de 0,7484%.

2. Você resolve aplicar num investimento de renda fixa que rende 105% do CDI. Qual o rendimento mensal dessa aplicação?

O CDI é está sempre bem próxima a taxa Selic, normalmente sendo 0,1% menor que a mesma. Nesta presente data (24/07/2024) a Selic está em 10,5% ao ano, assim, o CDI vale 10,4% ao ano.

Resolução:

Para uma aplicação que rende 105% basta fazer:

$$105\% \text{ de } 10,4\%$$

$$(1,05) \cdot (10,4) = 10,92$$

Ou seja, esta aplicação tem um rendimento bruto de 12,8625% ao ano.

Convertendo para mensal, vamos substituir na fórmula:

$$iq = [(1 + it)^{\frac{q}{t}} - 1]$$

$$iq = [(1 + 0,1092)^{\frac{1}{12}} - 1]$$

$$iq = [(1,1092)^{\frac{1}{12}} - 1]$$

$$iq = [1,0086739891 - 1]$$

$$iq = 0,0086739891 \text{ (multiplicar por 100)}$$

$$iq = 0,86739891$$

Temos uma taxa bruta de aproximadamente 0,87% ao mês.

3. Um investidor aplicou R\$ 5.000,00 em um Certificado de Depósito Bancário (CDB) que oferece uma taxa de juros composta de 13% ao ano. O investidor deseja comparar essa taxa anual com uma taxa mensal equivalente para entender melhor os rendimentos, qual seria essa taxa?

Resolução:

$$iq = [(1 + it)^{\frac{q}{t}} - 1]$$

$$iq = [(1 + 0,13)^{\frac{1}{12}} - 1]$$

$$iq = [(1,13)^{\frac{1}{12}} - 1]$$

$$iq = [1,0102368444 - 1]$$

$$iq = [0,0102368444] \cdot 100$$

$$iq = 1,0102368444\%$$

Logo, a taxa mensal aproximada é de 1,0102%.

4. Você aplicou em um título do Tesouro Direto que rende 0,8% ao mês. Para melhor planejamento financeiro, você quer saber a taxa equivalente em termos anuais, calcule.

Resolução:

$$iq = [(1 + it)^{\frac{q}{t}} - 1]$$

$$iq = [(1 + 0,008)^{\frac{12}{1}} - 1]$$

$$iq = [(1,008)^{\frac{12}{1}} - 1]$$

$$iq = [1,1003386937 - 1]$$

$$iq = [0,1003386937] \cdot 100$$

$$iq = 10,03386937\%$$

Logo, a taxa anual aproximada é de 10,0339%.

5. Um fundo de investimento promete um rendimento de 6% ao semestre. Um investidor está interessado em entender o rendimento mensal e anual desse fundo para decidir se vale a pena aplicar. Quais seriam essas taxas?

Resolução:

$$iq = [(1 + it)^{\frac{q}{t}} - 1]$$

$$iq = [(1 + 0,06)^{\frac{1}{6}} - 1]$$

$$iq = [(1,06)^{\frac{1}{6}} - 1]$$

$$iq = [(1 + 0,06)^{\frac{1}{6}} - 1]$$

$$iq = [1,0097587942 - 1]$$

$$iq = [0,0097587942] \cdot 100$$

$$iq = 0,97587942\%$$

Logo, a taxa mensal aproximada é de 0,9759%.

Já a taxa anual será:

$$iq = [(1 + it)^{\frac{q}{t}} - 1]$$

$$iq = [(1 + 0,009759)^{\frac{12}{1}} - 1]$$

$$iq = [(1,009759)^{\frac{12}{1}} - 1]$$

$$iq = [1,1236027483 - 1]$$

$$iq = [0,1236027483] \cdot 100$$

$$iq = 12,36027483\%$$

Logo, a taxa anual aproximada é de 12,3603%.

3.10 Plano 9: Simulações de investimentos em renda fixa

Duração: Duas aulas de 50 minutos cada.

Objetivos: Calcular o montante de aplicações com diferentes taxas, valores e períodos, observando a variação e correspondendo cada exemplo a seu gráfico.

Desenvolvimento: Depois de economizar o dinheiro buscando as melhores ofertas, produtos com melhor custo benefício e as melhores formas de pagamento, é preciso pensar em investimentos para o dinheiro poupado.

Essas escolhas são decisivas e fundamentais no montante futuro do seu dinheiro, veremos exemplos de acordo com mercado financeiro e algumas das principais ofertas de aplicações.

Vamos preencher a seguinte tabela:

Temos as seguintes considerações:

Tabela 16 – Investimentos simulações

Investimento	Taxa	1 ano	5 anos	10 anos	20 anos
Poupança rendimento 2023	8,03% a.a.				
Tesouro Selic	10,5% a.a.				
LCA 90% do CDI	10,4% a.a.				
CDB de 100% do CDI	10,4% a.a.				

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

- O índice da Taxa Selic e CDI são referentes a data de 24/07/2024.
- Vamos considerar para preenchimento um capital de R\$ 10.000,00.
- Temos que considerar que a poupança e o LCA são investimentos isentos de IR.
- O Tesouro Selic e o CDB possuem IR, vamos utilizar o menor valor 15% que se aplica a investimentos com mais de dois anos.

Vamos realizar essas simulações de duas maneiras, primeiro usando as fórmulas, calculadora, papel e caneta e assim realizar os cálculos.

Resolução: Poupança

Para o cálculo, usamos a fórmula do montante em juros compostos.

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 10.000 \cdot (1 + 0,0803)^1$$

$$M = 10.000 \cdot (1,0803)^1$$

$$M = 10.803,00$$

Para os outros períodos, basta trocar o tempo (n).

$$M = 10.000 \cdot (1,0803)^5 \approx 14.713,70$$

$$M = 10.000 \cdot (1,0803)^{10} \approx 21.649,30$$

$$M = 10.000 \cdot (1,0803)^{20} \approx 46.869,20$$

Resolução: Tesouro Selic

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 10.000 \cdot (1 + 0,105)^1$$

$$M = 10.000 \cdot (1,105)^1$$

$$M = 11.050,00$$

Para os outros períodos, basta trocar o tempo (n).

$$M = 10.000 \cdot (1,105)^5 \approx 16.474,47$$

$$M = 10.000 \cdot (1,105)^{10} \approx 27.140,80$$

$$M = 10.000 \cdot (1,105)^{20} \approx 73.662,35$$

Esses valores são brutos, temos que descontar 15% sobre os rendimentos, para isso, basta multiplicar pelo fator 0,85:

$$11.050,00 - 10.000,00 = 1.050,00 \cdot 0,85 = 892,50$$

$$16.474,47 - 10.000,00 = 6.474,47 \cdot 0,85 = 5.503,30$$

$$27.140,80 - 10.000,00 = 17.140,80 \cdot 0,85 = 14.569,68$$

$$73.662,35 - 10.000,00 = 63.662,35 \cdot 0,85 = 54.113,00$$

Resolução: LCA 90% do CDI

$$0,9 \cdot 10,4 = 9,36\% \text{ ao ano.}$$

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 10.000,00 \cdot (1 + 0,0936)^1$$

$$M = 10.000,00 \cdot (1,0936)^1$$

$$M = 10.936,00$$

Para os outros períodos, basta trocar o tempo (n).

$$M = 10.000,00 \cdot (1,0936)^5 \approx 15.642,01$$

$$M = 10.000,00 \cdot (1,0936)^{10} \approx 24.467,24$$

$$M = 10.000,00 \cdot (1,0936)^{20} \approx 59.864,59$$

Resolução: CDB de 100% do CDI

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 10.000,00 \cdot (1 + 0,104)^1$$

$$M = 10.000,00 \cdot (1,104)^1$$

$$M = 11.040,00$$

Para os outros períodos, basta trocar o tempo (n).

$$M = 10.000,00 \cdot (1,104)^5 \approx 16.400,06$$

$$M = 10.000,00 \cdot (1,104)^{10} \approx 26.896,19$$

$$M = 10.000,00 \cdot (1,104)^{20} \approx 72.340,49$$

Esses valores são brutos, temos que descontar 15% sobre os rendimentos, para isso, basta multiplicar pelo fator 0,85:

$$11.040,00 - 10.000,00 = 1.040,00 \cdot 0,85 = 884,00$$

$$16.400,06 - 10.000,00 = 6.400,06 \cdot 0,85 = 5.440,05$$

$$26.896,19 - 10.000,00 = 16.896,19 \cdot 0,85 = 14.361,76$$

$$72.340,49 - 10.000,00 = 62.340,49 \cdot 0,85 = 52.989,42$$

Com os resultados encontrados, podemos preencher a tabela 17 e analisando fazer algumas importantes observações:

Tabela 17 – Investimentos simulações

Investimento	Taxa	1 ano	5 anos	10 anos	20 anos
Poupança 2023	8,03% a.a.	R\$ 10.803,00	R\$ 14.713,70	R\$ 21.649,30	R\$ 46.869,20
Tesouro Selic	10,5% a.a.	R\$ 10.892,50	R\$ 15.503,30	R\$ 24.569,68	R\$ 64.113,00
LCA 90% do CDI	10,4% a.a.	R\$ 10.936,00	R\$ 15.642,01	R\$ 24.467,24	R\$ 59.864,59
CDB 100% do CDI	10,4% a.a.	R\$ 10.884,00	R\$ 15.440,05	R\$ 24.361,76	R\$ 62.989,42

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

- No primeiro ano, os investimentos possuem resultados próximos, mas com o passar do tempo e a ação dos juros compostos a diferença da poupança em específico é muito considerável em relação aos outros investimentos.
- Nos primeiros anos o LCA teve os melhores resultados de rendimento, porém, como as taxas dos investimentos que possuem cobrança de IR (Tesouro Selic e CDB) são maiores, chegará o momento que mesmo com os descontos vai superar os investimentos isentos.
- Importante ressaltar que esses investimentos possuem regras diferentes, assim, nem sempre o que tem maior rentabilidade possa ser o melhor. Sabemos que a poupança e o Tesouro Selic possuem liquidez diária, mas esse último, por ser um título ele varia conforme mercado, assim vai pagar o que foi contratado apenas no vencimento.
- O LCA como já descrito, não tem liquidez, seu resgate se realiza apenas no vencimento, já o CDB varia, alguns títulos possuem liquidez, estes normalmente tem percentuais menores atrelados ao índice, títulos com melhores remunerações tendem a ter vencimentos mais longos.

Realizamos então, a simulação dos investimentos usando as fórmulas e fazendo as contas, agora vamos expor outra maneira com os alunos, vamos fazer as simulações por meio de planilhas, vamos utilizar a planilha do Excel.

Na imagem 25 vemos como ficou a demonstração pela planilha:

Na figura 26, observamos os gráficos exponenciais respectivos a cada investimento.

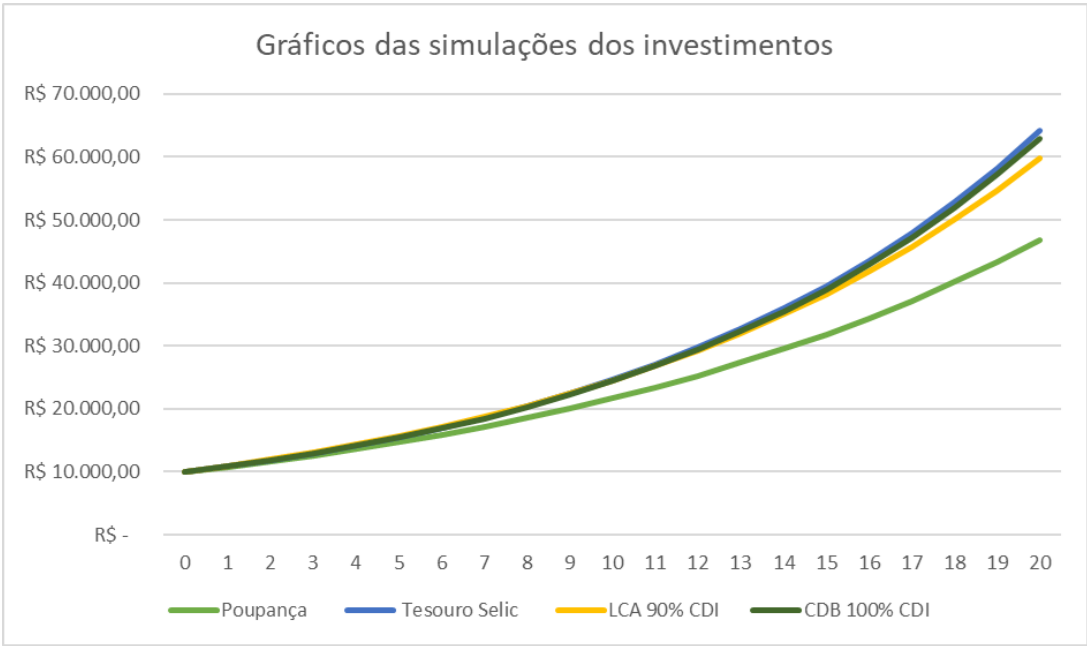
Atividades: Baseado nos exemplos dados, pedir os alunos para realizarem outras simulações, com outros valores, taxas e períodos.

Figura 25 – Simulação dos investimentos pela planilha

Tempo	Poupança	Tesouro Selic	LCA 90% CDI	CDB 100% CDI
0	R\$ 10.000,00	R\$ 10.000,00	R\$ 10.000,00	R\$ 10.000,00
1	R\$ 10.803,00	R\$ 10.892,50	R\$ 10.936,00	R\$ 10.884,00
2	R\$ 11.670,48	R\$ 11.878,71	R\$ 11.959,61	R\$ 11.859,94
3	R\$ 12.607,62	R\$ 12.968,48	R\$ 13.079,03	R\$ 12.937,37
4	R\$ 13.620,01	R\$ 14.172,67	R\$ 14.303,23	R\$ 14.126,86
5	R\$ 14.713,70	R\$ 15.503,30	R\$ 15.642,01	R\$ 15.440,05
6	R\$ 15.895,21	R\$ 16.973,64	R\$ 17.106,10	R\$ 16.889,81
7	R\$ 17.171,59	R\$ 18.598,38	R\$ 18.707,23	R\$ 18.490,35
8	R\$ 18.550,47	R\$ 20.393,71	R\$ 20.458,23	R\$ 20.257,35
9	R\$ 20.040,08	R\$ 22.377,54	R\$ 22.373,12	R\$ 22.208,12
10	R\$ 21.649,30	R\$ 24.569,69	R\$ 24.467,24	R\$ 24.361,76
11	R\$ 23.387,73	R\$ 26.992,00	R\$ 26.757,38	R\$ 26.739,38
12	R\$ 25.265,77	R\$ 29.668,66	R\$ 29.261,87	R\$ 29.364,28
13	R\$ 27.294,61	R\$ 32.626,37	R\$ 32.000,78	R\$ 32.262,16
14	R\$ 29.486,37	R\$ 35.894,64	R\$ 34.996,05	R\$ 35.461,43
15	R\$ 31.854,12	R\$ 39.506,08	R\$ 38.271,68	R\$ 38.993,42
16	R\$ 34.412,01	R\$ 43.496,72	R\$ 41.853,91	R\$ 42.892,73
17	R\$ 37.175,29	R\$ 47.906,38	R\$ 45.771,43	R\$ 47.197,58
18	R\$ 40.160,47	R\$ 52.779,05	R\$ 50.055,64	R\$ 51.950,13
19	R\$ 43.385,35	R\$ 58.163,34	R\$ 54.740,85	R\$ 57.196,94
20	R\$ 46.869,20	R\$ 64.113,00	R\$ 59.864,59	R\$ 62.989,42

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Figura 26 – Gráfico dos investimentos



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

3.11 Plano 10: Simulações de investimentos com aportes mensais

Duração: Duas aulas de 50 minutos cada.

Objetivos: Realizar por meio de planilhas e uso da fórmula, simulações de investimentos com aportes mensais.

Desenvolvimento:

Na maioria das vezes nosso dinheiro poupado é fruto de economias mensais com a separação de parte do que ganhamos. Assim, deixar o dinheiro parado esperando juntar mais ocasiona uma perda inflacionária no tempo, desta forma, se torna necessário a aplicação dos valores poupados.

Com os alunos, vamos fazer simulações de investimentos com aportes mensais. Faremos essas simulações em planilhas, utilizando o Excel. Vamos utilizar dois valores de aportes, R\$ 200,00 e R\$ 500,00 e duas aplicações como comparação, a poupança, com referência a taxa de 2023 que foi de 8,03% e um CDB de 100% do CDI, cujo índice na respectiva data de realização de 28/07/2023 é de 10,4% ao ano.

Primeiro ponto importante a ressaltar, é que como os aportes são mensais, então vamos considerar as respectivas taxas mensalmente, a conversão foi realizada em aulas anteriores.

Poupança de 8,03% ao ano é equivalente a 0,6457% ao mês.

CDB de 100% do CDI (10,4%) é equivalente a 0,8279% ao mês.

Outro ponto importante, é que o CDB possui IR, logo, teremos que fazer desconto dos rendimentos, vamos utilizar o menor valor referente a aplicações com mais de 2 anos que é de 15%.

Nas imagens 27 e 28 a seguir, visualizamos duas maneiras de fazer as simulações dos investimentos:

Na figura 27, temos os aportes e rendimentos dos 12 primeiros meses. Já na figura 28, está a amostra o montante após 240 meses (20 anos). Nesse exemplo, se quiser saber o valor em outro período ou com taxa ou com outro aporte, basta alterarmos os valores.

Importante destacar com os alunos, que mesmo a taxa sendo de pequena diferença, no longo prazo a diferença entre os investimentos é bem considerável. Na poupança teríamos o montante de R\$ 287.813,11 e no CDB de R\$ 341.165,48. Isso representa mais de 54 mil só de juros.

Atividades: Propor aos alunos realizar outras simulações com diferentes aportes, taxas e períodos, fazendo anotações dos resultados.

3.12 Plano 11: Simulações de empréstimos

Duração: Duas aulas de 50 minutos cada.

Figura 27 – Simulações de investimentos com aportes

Aporte de R\$ 200,00			Aporte de R\$ 500,00		
Tempo	Poupança	CDB 100% CDI	Tempo	Poupança	CDB 100% CDI
0	R\$ 200,00	R\$ 200,00	0	R\$ 500,00	R\$ 500,00
1	R\$ 401,29	R\$ 401,41	1	R\$ 1.003,23	R\$ 1.003,52
2	R\$ 603,88	R\$ 604,23	2	R\$ 1.509,71	R\$ 1.510,58
3	R\$ 807,78	R\$ 808,49	3	R\$ 2.019,45	R\$ 2.021,23
4	R\$ 1.013,00	R\$ 1.014,19	4	R\$ 2.532,49	R\$ 2.535,48
5	R\$ 1.219,54	R\$ 1.221,35	5	R\$ 3.048,85	R\$ 3.053,36
6	R\$ 1.427,41	R\$ 1.429,97	6	R\$ 3.568,53	R\$ 3.574,92
7	R\$ 1.636,63	R\$ 1.640,07	7	R\$ 4.091,57	R\$ 4.100,17
8	R\$ 1.847,20	R\$ 1.851,66	8	R\$ 4.617,99	R\$ 4.629,15
9	R\$ 2.059,13	R\$ 2.064,75	9	R\$ 5.147,81	R\$ 5.161,88
10	R\$ 2.272,42	R\$ 2.279,36	10	R\$ 5.681,05	R\$ 5.698,41
11	R\$ 2.487,09	R\$ 2.495,50	11	R\$ 6.217,73	R\$ 6.238,76
12	R\$ 2.703,15	R\$ 2.713,18	12	R\$ 6.757,88	R\$ 6.782,96

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Figura 28 – Simulações de investimentos com aportes

Poupança			CDB 100% do CDI			
Tempo	Taxa	Aporte	Tempo	Taxa	Aporte	Fator IR
240	0,6457%	R\$ 500,00	240	0,8279%	R\$ 500,00	0,15
Poupança	R\$ 287.813,11		CDB Bruto	R\$ 380.106,44		
			CDB Líquido	R\$ 341.165,48		

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Objetivos: Realizar por meio de planilhas simulações de empréstimos com amortizações pelo sistema SAC e pelo sistema Price.

Desenvolvimento: Os empréstimos fazem parte dos brasileiros e em sua maioria no nosso país possuem amortização pelo sistema SAC ou Price.

Neste plano, vamos apresentar as diferenças dos dois sistemas de amortização apresentando-os em simulações através de planilhas.

Para tal, vamos considerar a seguinte situação:

Um empréstimo de R\$ 15.000,00 a taxa de juros de 2% ao mês a ser pago mensalmente por dois anos (24 parcelas).

Na figura 29, vemos a demonstração pela tabela SAC realizado por meio de planilha, no caso, utilizado o Excel.

Podemos concluir com os estudantes, que a amortização é contante, mesmo valor do início ao fim, os juros são decrescentes em função de incidirem sobre o saldo devedor que vai diminuindo e consequentemente as parcelas a cada mês vão tendo menor valor pois

Figura 29 – Simulação Tabela SAC

Tabela SAC				
Meses	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 15.000,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
1	R\$ 14.375,00	R\$ 625,00	R\$ 300,00	R\$ 925,00
2	R\$ 13.750,00	R\$ 625,00	R\$ 287,50	R\$ 912,50
3	R\$ 13.125,00	R\$ 625,00	R\$ 275,00	R\$ 900,00
4	R\$ 12.500,00	R\$ 625,00	R\$ 262,50	R\$ 887,50
5	R\$ 11.875,00	R\$ 625,00	R\$ 250,00	R\$ 875,00
6	R\$ 11.250,00	R\$ 625,00	R\$ 237,50	R\$ 862,50
7	R\$ 10.625,00	R\$ 625,00	R\$ 225,00	R\$ 850,00
8	R\$ 10.000,00	R\$ 625,00	R\$ 212,50	R\$ 837,50
9	R\$ 9.375,00	R\$ 625,00	R\$ 200,00	R\$ 825,00
10	R\$ 8.750,00	R\$ 625,00	R\$ 187,50	R\$ 812,50
11	R\$ 8.125,00	R\$ 625,00	R\$ 175,00	R\$ 800,00
12	R\$ 7.500,00	R\$ 625,00	R\$ 162,50	R\$ 787,50
13	R\$ 6.875,00	R\$ 625,00	R\$ 150,00	R\$ 775,00
14	R\$ 6.250,00	R\$ 625,00	R\$ 137,50	R\$ 762,50
15	R\$ 5.625,00	R\$ 625,00	R\$ 125,00	R\$ 750,00
16	R\$ 5.000,00	R\$ 625,00	R\$ 112,50	R\$ 737,50
17	R\$ 4.375,00	R\$ 625,00	R\$ 100,00	R\$ 725,00
18	R\$ 3.750,00	R\$ 625,00	R\$ 87,50	R\$ 712,50
19	R\$ 3.125,00	R\$ 625,00	R\$ 75,00	R\$ 700,00
20	R\$ 2.500,00	R\$ 625,00	R\$ 62,50	R\$ 687,50
21	R\$ 1.875,00	R\$ 625,00	R\$ 50,00	R\$ 675,00
22	R\$ 1.250,00	R\$ 625,00	R\$ 37,50	R\$ 662,50
23	R\$ 625,00	R\$ 625,00	R\$ 25,00	R\$ 650,00
24	R\$ 0,00	R\$ 625,00	R\$ 12,50	R\$ 637,50
	Total	R\$ 15.000,00	R\$ 3.750,00	R\$ 18.750,00

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

a mesma é composta pela soma da amortização e juros.

Na figura 30, temos a amortização pela tabela PRICE, vamos considerar as mesmas informações da tabela SAC, um empréstimo de R\$ 15.000,00 a taxa de juros de 2% ao mês a ser pago mensalmente por dois anos (24 parcelas).

Podemos observar a respeito do sistema PRICE, que as parcelas que são constantes, possuem mesmo valor do início ao fim os juros são decrescentes em função de incidirem sobre o saldo devedor que vai diminuindo, já a amortização é crescente, visto que seu valor é referente a diferença entre o valor das parcelas e o juros.

Ponto importante a ser observado com os estudantes é o valor final a ser pago (empréstimos + juros) nos dois sistemas, o PRICE sempre tem valor um pouco maior,

Figura 30 – Simulação Tabela PRICE

Tabela PRICE				
Meses	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 15.000,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
1	R\$ 14.506,93	R\$ 493,07	R\$ 300,00	R\$ 793,07
2	R\$ 14.004,01	R\$ 502,93	R\$ 290,14	R\$ 793,07
3	R\$ 13.491,02	R\$ 512,99	R\$ 280,08	R\$ 793,07
4	R\$ 12.967,77	R\$ 523,25	R\$ 269,82	R\$ 793,07
5	R\$ 12.434,06	R\$ 533,71	R\$ 259,36	R\$ 793,07
6	R\$ 11.889,68	R\$ 544,39	R\$ 248,68	R\$ 793,07
7	R\$ 11.334,40	R\$ 555,27	R\$ 237,79	R\$ 793,07
8	R\$ 10.768,03	R\$ 566,38	R\$ 226,69	R\$ 793,07
9	R\$ 10.190,32	R\$ 577,71	R\$ 215,36	R\$ 793,07
10	R\$ 9.601,06	R\$ 589,26	R\$ 203,81	R\$ 793,07
11	R\$ 9.000,01	R\$ 601,05	R\$ 192,02	R\$ 793,07
12	R\$ 8.386,95	R\$ 613,07	R\$ 180,00	R\$ 793,07
13	R\$ 7.761,62	R\$ 625,33	R\$ 167,74	R\$ 793,07
14	R\$ 7.123,79	R\$ 637,83	R\$ 155,23	R\$ 793,07
15	R\$ 6.473,20	R\$ 650,59	R\$ 142,48	R\$ 793,07
16	R\$ 5.809,59	R\$ 663,60	R\$ 129,46	R\$ 793,07
17	R\$ 5.132,72	R\$ 676,87	R\$ 116,19	R\$ 793,07
18	R\$ 4.442,31	R\$ 690,41	R\$ 102,65	R\$ 793,07
19	R\$ 3.738,09	R\$ 704,22	R\$ 88,85	R\$ 793,07
20	R\$ 3.019,78	R\$ 718,30	R\$ 74,76	R\$ 793,07
21	R\$ 2.287,11	R\$ 732,67	R\$ 60,40	R\$ 793,07
22	R\$ 1.539,79	R\$ 747,32	R\$ 45,74	R\$ 793,07
23	R\$ 777,52	R\$ 762,27	R\$ 30,80	R\$ 793,07
24	R\$ 0,00	R\$ 777,52	R\$ 15,55	R\$ 793,07
	Total	R\$ 15.000,00	R\$ 4.033,60	R\$ 19.033,60

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

pois sendo a amortização crescente, o saldo devedor em relação a Tabela SAC é sempre maior, gerando juros um pouco maiores.

Do ponto de vista econômico, a tabela SAC é mais vantajosa, mas de um ponto de vista pessoal, possa ser uma pessoa prefira o sistema PRICE por saber exatamente o valor que vai pagar todos os meses.

Atividades: Propor aos alunos realizar outras simulações baseados em interesses pessoais como empreendimento, aquisição de veículo, dentre outros utilizando assim, diferentes valores, taxas e períodos.

4 Conclusão

A partir da abordagem sobre Matemática Financeira ao longo desta dissertação, acreditamos que uma Sequência Didática no ensino médio, poderá desempenhar um papel importantíssimo na formação dos estudantes, promovendo uma compreensão prática e aplicável dos conceitos financeiros. Ao longo deste trabalho, fica evidente, que o ensino estruturado e progressivo desses conteúdos, partindo de situações cotidianas e problematizações reais, pode contribuir significativamente para a formação dos estudantes, desenvolvendo cidadãos críticos e conscientes no âmbito econômico.

A proposta de Sequência Didática apresentada, busca priorizar a articulação entre teoria e prática, incentivando o desenvolvimento de habilidades como o cálculo de porcentagens, juros simples e compostos, organização financeira, e entendimento sobre mercado financeiro, investimentos e dívidas. Dessa forma, os estudantes não apenas poderão assimilar os conceitos matemáticos envolvidos, mas também compreender sua relevância em tomadas de decisão que impactam diretamente a vida cotidiana e o futuro econômico.

Além disso, a abordagem sequencial, que respeita o ritmo de aprendizagem e promove a contextualização, é uma prática eficaz em engajar os estudantes, permitindo que construam conhecimentos de forma sólida e significativa. Essa metodologia auxilia a didática de conteúdos muitas vezes abstratos, aproximando-os da realidade dos estudantes e despertando um maior interesse pelo aprendizado da Matemática Financeira.

Por fim, ao aplicar essa Sequência Didática no ensino médio, esperamos contribuir para a construção de um ensino de matemática mais dinâmico, relevante e alinhado às demandas da sociedade contemporânea. A capacidade de gerir recursos financeiros de maneira consciente é uma competência essencial que todos devemos ter, e o ensino de Matemática Financeira tem o potencial de ser uma ferramenta poderosa nessa formação. Assim, com uma abordagem didática bem planejada, esta prática pode ultrapassar as barreiras da sala de aula e preparar os estudantes para os desafios econômicos e sociais que encontrarão ao longo de suas vidas.

A partir da abordagem sobre Matemática Financeira atrelada educação financeira ao longo deste trabalho, essa sequência será de utilidade aos professores para um trabalho que aproxime os conteúdos estudados da realidade vivida pelos alunos, servindo para os mesmos tomarem melhores decisões e poderem proporcionar um futuro melhor.

Referências

- B3. *Planilha de orçamento pessoal*. 2024. Urlhttps://borainvestir.b3.com.br/planilha-de-orcamento-pessoal/?utm_source=B3_MVPutm_medium=HMPFutm_campaign=button. Acesso em 19 de julho de 2024. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- Brasil, Ministério da Educação. Base nacional comum curricular. *Brasília*, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>. Citado na página 15.
- Currículo do Espírito Santo. Currículo capixaba. *SEDU*, 2023. Disponível em: <<https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/>>. Citado na página 16.
- ECONÔMICO, I. *37% dos brasileiros admitem não ter controle de suas finanças pessoais*. 2022. Url<https://economia.ig.com.br/2022-12-21/brasileiros-descontrole-financeiro.html>. Acesso em 20 de julho de 2024. Citado na página 48.
- FELDMANN, P. *Cerca de 43% adulta do país está endividada*. 2023. Url<https://jornal.usp.br/atualidades/cerca-de-43-da-populacao-adulta-do-pais-esta-endividada/>. Acesso em 16 de julho de 2024. Citado na página 13.
- INFOMONEY. *Renda Fixa: tudo o que você precisa saber para começar a investir*. 2022. Url<https://www.infomoney.com.br/guias/renda-fixa/>. Acesso em 18 de julho de 2024. Citado 3 vezes nas páginas 38, 40 e 41.
- KILHIAN, K. *Juros compostos*. 2008. Url<https://www.obaricentrodamente.com/>. Acesso em 29 de julho de 2024. Citado na página 20.
- KIYOSAKI, R. T. *Pai rico pai pobre*. *Rio de Janeiro: Alta Books*, 2017. Citado na página 13.
- LOPES, A. *MATEMÁTICA FINANCEIRA*. 2018. Url<https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/matematica-financeira>. Acesso em 29 de julho de 2024. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- MACÊDO, F. P. d. *Matemática financeira*. *Mossoró: Edufersa*, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 44.
- MAIA, M. *Proposta de atividades de matemática financeira para o ensino médio nos termos da nova base nacional comum curricular*. *Dissertação Profmat*, 2022. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6617&id2=170371659>. Citado na página 15.
- MISSAGIA, L. R.; VELTER, F. *Aprendendo matemática financeira*. *Rio de Janeiro: Elsevier*, 2006. Citado na página 19.
- MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática discreta*. *Rio de Janeiro: SBM*, 2015. Citado na página 23.
- ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. *Porto Alegre: Artmed*, 1998. Citado na página 47.