Daniele Touza Miguel

O Ensino de Frações nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Vitória

2024

Daniele Touza Miguel

O Ensino de Frações nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Alancardek Pereira Araujo

Vitória
2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Miguel, Daniele Touza, 1996-

M634e O Ensino de Frações nos Anos Finais do Ensino Fundamental / Daniele Touza Miguel. - 2024.

74 p. : il.

Orientador: Alancardek Pereira Araujo.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Frações. 2. Base Nacional Comum Curricular. I. Araujo, Alancardek Pereira. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“O Ensino de Frações nos Anos Finais do Ensino Fundamental”

Daniele Touza Miguel

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 27/06/2024 por:

____

Prof.(a) Dr.(a) Alancardek Pereira Araujo
Orientador(a) – UFES

____

Prof.(a) Dr.(a) Moacir Rosado Filho
Membro Interno – UFES

____

Prof.(a) Dr.(a) Giselle Ribeiro de Azeredo Silva Strey
Membro Externo – SEDU-ES

Campus Universitário Alaor de Queiroz Araújo – Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória – ES │ 29075-910 │ (27) 4009-2474
│www.matematica.ufes.br/pt-br/pos-graduacao/PMPM – profmat.ufes@gmail.com

Datas e horários baseados em Brasília, Brasil
Sincronizado com o NTP.br e Observatório Nacional (ON) em 27/06/2024 às 18:22:16

Folha de Assinaturas Daniele Touza Miguel

Data e Hora de Criação: 25/06/2024 às 09:35:21

Documentos que originaram esse envelope:
- Folha de Assinaturas Daniele Touza Miguel.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 008dc2f074b01a44a41bb170d43e5638b366c4c10089e511993351e971f041c8
[SHA512]: 7942276c94f9e336a81a55cc614989579ea08103e13e53768f5a751256a57dc05e024e9b92780ee7b66989c076e0d8080bf95904d12928df457eb3d3d864c5e0

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - Alancardek Pereira Araújo (alancardek.araujo@ufes.br)
Data/Hora: 27/06/2024 - 16:23:26, IP: 200.137.65.109, Geolocalização: [-20.286766, -40.303109]
[SHA256]: 7104185310d996b3c83c500e30247fd49d0ea441e3797962cd0ada52dd398dc3

Alancardek Pereira Araujo

ASSINADO - Giselle Ribeiro de Azeredo Silva Strey (giselle.sarstrey@educador.edu.es.gov.br)
Data/Hora: 27/06/2024 - 15:59:25, IP: 179.109.143.2, Geolocalização: [-20.759875, -41.541787]
[SHA256]: aa35a4fc7a48d4c1a15efc9ac23cfaf1075184ac812e57a940f310c93de807df

ASSINADO - Moacir Rosado Filho (moacrosa@gmail.com)
Data/Hora: 27/06/2024 - 18:22:16, IP: 179.82.179.116, Geolocalização: [-20.295041, -40.296714]
[SHA256]: 2a3ced529756bc3b04c65f40b88d5463fac6718c1dcacd61a078fdd8391517b4

Histórico de eventos registrados neste envelope

27/06/2024 18:22:16 - Envelope finalizado por moacrosa@gmail.com, IP 179.82.179.116
27/06/2024 18:22:16 - Assinatura realizada por moacrosa@gmail.com, IP 179.82.179.116
27/06/2024 16:23:26 - Assinatura realizada por alancardek.araujo@ufes.br, IP 200.137.65.109
27/06/2024 16:22:56 - Envelope visualizado por alancardek.araujo@ufes.br, IP 200.137.65.109
27/06/2024 15:59:25 - Assinatura realizada por giselle.sarstrey@educador.edu.es.gov.br, IP 179.109.143.2
27/06/2024 15:59:11 - Envelope visualizado por giselle.sarstrey@educador.edu.es.gov.br, IP 179.109.143.2
27/06/2024 06:00:08 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br
27/06/2024 06:00:08 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br
25/06/2024 09:35:22 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.100

Dedico este trabalho primeiramente a Deus e também aos meus pais, minha irmã e meu noivo que sempre me apoiaram e me deram todo o suporte necessário.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela força diária para prosseguir e não desistir.

A minha família, em especial aos meus pais Neuza e Gilmar, além da minha irmã Rafaela, por sempre me apoiar e me ajudar em tudo o que precisei, com orações, palavras de ânimo e atitudes de apoio e incentivo.

Ao meu noivo, Guilherme, por estar comigo em todos os momentos, me dando o suporte que precisei.

Ao meu orientador Prof. Dr. Alancardek Araujo, por ter desempenhado tal função com dedicação e parceria. Suas análises e sugestões foram fundamentais no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas de curso, com quem pude compartilhar e viver momentos muito bons e desafiadores. Pude aprender muito com vocês, obrigada!

Aos professores do PROFMAT - UFES, pelos ensinamentos que me permitiram ter um melhor desempenho no meu processo de formação profissional.

Aos meus diretores, Edson Helmer e Francisco Rangel, pelo apoio e flexibilidade para me ajudar na minha trajetória.

A todos que de alguma forma contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui. Muito obrigada!

Resumo

Sabemos o quanto a Matemática é importante em nosso dia a dia. São diversas situações do cotidiano em que precisamos de seus conceitos e aplicações. Na formação básica do estudante o conhecimento matemático também se torna fundamental para seu desempenho acadêmico. Porém, como docentes e profissionais em constante contato com alunos do Ensino Fundamental, observamos alguns temas importantes que são de difícil compreensão por parte dos alunos e, também, desafiador para o ensino por parte do professor. Um desses grandes desafios da sala de aula é o ensino e aprendizagem de frações no Ensino Fundamental, que é o período escolar em que os alunos devem criar uma base mais forte sobre este conteúdo. Diante disso, este trabalho se desenvolveu através de um estudo mais aprofundado sobre números racionais, observando as principais dificuldades relacionadas ao ensino e aprendizagem de frações e o que a BNCC nos orienta a respeito do tema, buscando uma alternativa que auxilie o professor em sala de aula a desenvolver este conteúdo. Propomos aqui a utilização de alguns jogos que darão suporte ao professor em seu trabalho em sala de aula.

Palavras-chave: Ensino. Frações. Números racionais. Jogos. Metodologia ativa.

Abstract

We know how important mathematics is in our daily lives. There are several everyday situations in which we need its concepts and applications. In the student's basic training, mathematical knowledge also becomes fundamental for their academic performance. However, as teachers and professionals in constant contact with elementary school students, we observed some important themes that are difficult for students to understand and also challenging for teachers to teach. One of these major challenges in the classroom is the teaching and learning of fractions in Elementary School, which is the school period in which students must create a stronger foundation on this content. In view of this, this work was developed through a more in-depth study of rational numbers, observing the main difficulties related to teaching and learning fractions and what the BNCC guides us on the subject, seeking an alternative that helps the teacher in the classroom. class to develop this content. Here we propose the use of some games that will support teachers in their work in the classroom.

Keywords: Teaching. Fractions. Rational numbers. Games. Active Methodology.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

Vemos, no cotidiano da sala de aula, diversos estudantes, de vários níveis de escolaridade, que apresentam dificuldades em compreender o trabalho com frações, o que acarreta sérios problemas no prosseguimento dos estudos sobre números, álgebra, funções, entre outros. Na maioria dos casos, as frações são temidas tanto pelos estudantes quanto pelos professores já nos anos iniciais do ensino fundamental. Portanto, é necessário destacar a importância do ensino de frações para os nossos alunos, uma vez que ele é a base para o desenvolvimento de muitos outros conteúdos na Matemática. Pensando nisso, vemos que se o aluno já não compreende o trabalho com frações nos primeiros anos de estudo, isso compromete o restante do processo de aprendizagem. Segundo (JESUS, 2013),

> Dentre os conteúdos matemáticos abordados no Ensino Fundamental, frações é um dos menos consolidados pelos alunos. Dificuldades em operações básicas como adição e subtração de frações vão sendo acumuladas, e muitos estudantes chegam ao 9º ano do Ensino Fundamental sem as habilidades mínimas necessárias.

Diante desse contexto queremos responder a seguinte pergunta: "De que modo os professores podem planejar suas aulas para trabalhar com seus alunos o ensino de frações, e quais estratégias podem utilizar, visto que a maioria dos estudantes apresenta resistência e dificuldades em relação a este conteúdo?".

Desse modo, o objetivo geral deste trabalho é analisar as dificuldades encontradas no ensino de Matemática, em especial no ensino de frações, verificando a maneira como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sugere o desenvolvimento desse tema durante os anos finais do Ensino Fundamental e trazendo como forma de abordagem deste conteúdo, dentre outras que serão citadas, a utilização de jogos em sala de aula.

Os objetivos específicos são:

- Compreender as dificuldades enfrentadas pelos alunos e professores no trabalho em sala de aula com frações;
- Observar a maneira como a BNCC orienta o trabalho com frações na etapa do Ensino Fundamental;
- Analisar de forma mais aprofundada o conteúdo de frações, desde o estudo de números racionais no ensino fundamental;
- Propor jogos e outras estratégias que irão auxiliar o professor da Educação Básica no trabalho com frações.

Diante da dificuldade do aluno em aprender, surgem desafios ainda maiores para o professor ao ensinar. Para um estudante do Ensino Fundamental, essas várias regras e novos conceitos podem não ser de tão fácil compreensão. Para (JESUS, 2013),

> São regras para encontrar frações equivalentes, para simplificar frações, comparar, adicionar, subtrair, multiplicar e dividir frações. Para um aluno que está, em média, com 11 anos, aceitar e memorizar essas regras que, a princípio, não fazem sentido, pode ser um caminho árduo. Porém, acreditamos que é possível levar a compreensão ao aluno, partindo de exemplos simples, ao mesmo tempo em que ele mesmo constrói as regras, através de experimentos, manipulações e observações conduzidas pelo professor.

Sabemos que a aprendizagem é efetivada com mais facilidade quando o educando se envolve no processo de ensino-aprendizagem e, diante deste cenário, observamos que, nos dias atuais, as metodologias ativas são muito utilizadas como forma de contribuir de maneira significativa durante as aulas. Com base nisso, propomos nesse trabalho a utilização de algumas estratégias e jogos em sala de aula como aliado ao ensino de frações, com o objetivo de contribuir para a fixação, aquisição do conhecimento e assimilação deste conteúdo.

De encontro com o tema abordado temos a BNCC, documento que norteia a educação básica, que propôs uma organização do conteúdo de frações de modo a permear as etapas do ensino fundamental aumentando a complexidade do tema de forma gradativa, ou seja, as frações aparecem em todos os anos, porém de forma cada vez mais aprofundada. “Essa concepção de ensino já era recomendada, mas nem sempre foi levada em consideração. A BNCC institui como obrigatório algo que já se sabia” (Maria Ignez Diniz, diretora do Mathema) (MARTINEZ, Marcia Lorena Saurin, 2019).

O documento orienta que o primeiro contato com frações deve ocorrer já no 2º ano dos anos iniciais. Nesse ano, o aluno deve desenvolver a habilidade de “resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais” (BNCC, 2018). De modo geral, durante o Ensino Fundamental 1, o aprendizado referente a este conteúdo visa a construção do vocabulário e conceitos iniciais sobre frações, trabalhando de forma intuitiva, com materiais concretos, como diz (SALAS, Paula, 2018). É possível observar ainda, de acordo com a BNCC, que a ideia de comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal) e também relaciona-los a pontos na reta numérica já aparece no 5º ano do Ensino Fundamental. Porém, só nos anos finais que serão apresentadas de forma mais aprofundada aos estudantes as operações e as noções mais abstratas referentes ao tema.

Para a construção das ideias e do que se pretende desenvolver neste trabalho, no segundo capítulo falaremos um pouco sobre os números naturais e inteiros. Veremos como se dá o primeiro contato com estes números e algumas de suas características, notações e observações importantes a respeito destes conjuntos. Em seguida, no capítulo 3, apresentaremos os números racionais, a definição deste conjunto e representações deste tipo de número. Já no capítulo 4, apresentaremos de maneira mais detalhada os tópicos envolvendo frações que são orientados pela BNCC a serem trabalhados em sala de aula nos anos finais do Ensino Fundamental, tais como equivalências, comparação de frações e operações. A abordagem dos tópicos citados é feita também a partir de alguns problemas. Por fim, no capítulo 5, abordaremos algumas estratégias que podem ser utilizadas pelos professores e daremos sugestões de jogos que visam facilitar o trabalho do docente ao desenvolver em sala de aula o tema em questão.

2 Conjuntos dos Números Naturais e dos Números Inteiros

Neste capítulo trataremos, de forma mais breve, sobre alguns conceitos relacionados aos números Naturais e Inteiros, apresentando questões básicas a respeito destes conjuntos. Abordaremos um pouco sobre o contato inicial com os números e sua necessidade no dia a dia. Não iremos nos aprofundar tanto, pois o objetivo maior deste trabalho será explorar um pouco mais números Racionais.

2.1 O contato inicial com Números

Conseguimos observar a utilização dos números, suas propriedades e operações, desde os primeiros anos da escola, com jogos e atividades lúdicas nos anos iniciais. Nos ensinos Fundamental e Médio aparecem os conjuntos numéricos e, no Superior, um aprofundamento maior de conjuntos em diversas disciplinas. Além disso, sabemos que em diversas outras áreas de conhecimento são utilizados e empregados números em situações em que se faz necessário contar, medir, comparar, etc. Por essa importância tão grande dos números que vemos nos dias de hoje é até difícil imaginar que houve um tempo em que o homem não era capaz sequer de contar.

No período do homem primitivo não houveram grandes avanços na Matemática, mas segundo (EVES et al., 2004), pode-se imaginar que, mesmo nessa época, a espécie humana tinha algum senso numérico, pelo menos no sentido de *mais* ou *menos*, diante da necessidade de acrescentar ou retirar. Para o autor,

> Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples. Uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros e quantos eram seus inimigos e tornava-se necessário a um homem saber se seu rebanho de carneiros estava diminuindo. É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda (EVES et al., 2004, p. 25 e 26).

Com o passar do tempo foram surgindo, diante da necessidade, representações numéricas, como sons e, posteriormente, símbolos, que foram se modificando e evoluindo até chegar na representação que utilizamos nos dias de hoje. Diante da necessidade de contagem, surgiram também regras, conceitos e operações relacionados a esses números, que falaremos um pouco mais a seguir.

2.2 O Conjunto dos Números Naturais

As atividades com que o homem se depara no dia a dia, inclusive as mais simples, exigem um conhecimento mínimo de Matemática. Podemos citar como alguns exemplos fazer um telefonema, a marcação do tempo, a utilização do calendário, etc. Essas são atividades que envolvem apenas contagem e que fazem parte da vida do ser humano. Para essas tarefas geralmente são utilizados os números da forma 1, 2, 3, ... e estes números são chamados de Naturais. De acordo com (LIMA et al., 2001), as várias reflexões ocorridas no decorrer do tempo e o sistema social que se tornava cada vez mais complexo, contribuiu para a necessidade e aperfeiçoamento do Conjunto dos Números Naturais.

Mas, afinal, que números são esses? Essa sequência é finita? De que modo podemos defini-los? Não podemos apenas seguir nossa intuição para responder tais questionamentos. Para (HEFEZ, 1993),

> O grande desenvolvimento da Matemática a partir da criação do Cálculo Diferencial no século dezessete colocou diante dos matemáticos novos problemas que, para serem melhor compreendidos e solucionados, requeriam uma fundamentação mais rigorosa do conceito de número.

Porém, somente em 1889 que o matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932) encontrou uma maneira mais simples de definir números naturais. Existem quatro axiomas que embasam sua teoria e caracterizam esses números. Dessa forma definimos o Conjunto dos Números Naturais, representado pelo símbolo $\mathbb{N}$, pelos axiomas de Peano listados a seguir:

I. Todo número natural n tem um único sucessor $s(n) = n+1$. Por exemplo: o sucessor de 1 é 2, pois $1 + 1 = 2$ e o sucessor de 2 é 3, pois $2 + 1 = 3$.

II. 1 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro número, ou seja, não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s(n) = 1$.

III. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes, ou seja, $m \neq n \Rightarrow s(m) = m + 1 \neq s(n) = n + 1$.

IV. (Axioma da Indução). Seja X um conjunto contendo apenas números naturais, ou seja, $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Todos os fatos relacionados aos números naturais, tais como as propriedades de suas operações, podem ser demonstrados através da utilização dos axiomas listados. O sistema de numeração decimal que nós utilizamos permite descrever qualquer número natural usando somente os símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Representamos o Conjunto dos Números Naturais da seguinte maneira:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} .$$

O Axioma IV (Axioma da Indução) permite provar a existência das operações de adição e multiplicação e várias propriedades acerca dos números naturais. Demonstrações que decorrem do Axioma da Indução chamam-se demonstrações por indução ou provas por indução.

Ordem. No conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais temos uma relação de ordem $<$, definida por: Dados m, $n \in \mathbb{N}$, diz-se que $m < n$ (m é menor do que n) quando, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, $n = m + p$, neste caso, diz-se também que $n > m$ (n é maior do que m). Também define-se, $m \leq n$ se, e somente se, $m = n$ ou $m < n$, e por último $n \geq m$ se, e somente se, $n = m$ ou $n > m$.

Segue da definição da ordem $<$ e dos Axiomas de Peano que, $1 \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, 1 é o menor número natural.

O próximo resultado permite provar muitos fatos acerca dos números naturais.

Teorema 2.2.1. ***O Principio da Boa Ordenação****. Todo subconjunto não-vazio X do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais possui um menor elemento, ou seja, existe $k \in X$ tal que, $k \leq m$, para todo $m \in X$.*

Uma demonstração do Princípio da Boa Ordenação como consequência do Axioma da Indução pode ser encontrada em (LIMA, 2014)

Observações:

1. As reticências são utilizadas ao final da sequência para indicar que o conjunto é infinito. De fato, se o conjunto $\mathbb{N}$ fosse finito, existiria nele um elemento maior do que todos os outros. Então, seja $m \in \mathbb{N}$ tal elemento do conjunto $\mathbb{N}$. De acordo com o axioma (II), m possui um único sucessor, que é $m + 1$, de modo que $m + 1 \in \mathbb{N}$. Além disso, $m + 1 > m$, uma contradição, uma vez que m é o maior elemento de $\mathbb{N}$. Desse modo, concluímos que não existe maior elemento e o conjunto $\mathbb{N}$ é infinito.

2. O número 0 (zero) pode ser ou não considerado um número natural, sendo esta uma questão de preferência. Logo, alguns autores definem o Conjunto dos Números Naturais como:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., 78, ..., 237, ...\} .$$

Neste caso, pode-se adaptar os Axiomas de Peano para se tornarem válidos com o 0 (zero):

- No Axioma II. 0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro número, ou seja, não existe número natural n tal que $s(n) = 0$.
- No Axioma IV (Axioma da Indução), Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto do Conjunto dos Números Naturais tal que, $0 \in X$ e, sempre que $n \in X$ implicar que $s(n) = n + 1 \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

3. A partir do conjunto $\mathbb{N}$ conseguiremos desenvolver os conceitos e definições referentes aos conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

4. O axioma IV também é conhecido como Axioma da Indução e é uma ferramenta fundamental para demonstrar teoremas que envolvem os números naturais e também inteiros.

2.3 O Conjunto dos Números Inteiros

Com o passar do tempo surgiram necessidades de se utilizar outros números além dos naturais como para representar a temperatura, altitude e prejuízos financeiros. Esses números são os inteiros. Além disso, os números inteiros também são importantes e fundamentais nas manipulações algébricas, principalmente na resolução de equações.

Por exemplo, uma simples equação da forma $x + 3 = 1$ não admite solução em $\mathbb{N}$.

Apesar dessa grande necessidade da utilização de números negativos, as teorias a respeito dos números inteiros surgiram apenas ao final do século XIX, de modo a dar existência a esse tipo de número. Afinal, como pode-se ter uma quantidade que é menor que nada (zero)? Daí, podemos até imaginar que a aceitação desse conceito não tenha sido tão simples.

2.3.1 Notações e conceitos iniciais

A partir da construção do Conjunto dos Números Inteiros, podemos denotá-lo da seguinte maneira:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

- **Adição e multiplicação de números inteiros**

As propriedades dessas operações aritméticas são bastante conhecidas, porém, há um conjunto básico delas de onde as demais são deduzidas. O conjunto em questão expressa a natureza da estrutura algébrica do anel dos números inteiros, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Vejamos o teorema a seguir:

Teorema 2.3.1. *O anel dos números inteiros, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, tem o seguinte conjunto de propriedades básicas: Para todos os a, b, $c \in \mathbb{Z}$:*

i) fechamento das operações + (adição) e $\cdot$ (multiplicação):
$a + b \in \mathbb{Z}$ *[a operação + é fachada]*
$a \cdot b \in \mathbb{Z}$ *[a operação $\cdot$ é fachada]*

ii) associatividade das operações:
$a + b + c = (a + b) + c$ *[associatividade da +]*
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *[associatividade da $\cdot$]*

iii) existência de elemento neutro para as operações:
$a + 0 = a$ *[0 é elemento neutro da +]*
$a.1 = a$ *[1 é elemento neutro da $\cdot$]*

iv) existência de inverso na adição:
Existe $a' \in \mathbb{Z}$ tal que a+a'=0 *[a' é o simétrico de a]*
(a' é único e geralmente indicamos por -a)

v) comutatividade das operações:
a+b=b+a *[comutatividade da +]*
a$\cdot$b=b$\cdot$a *[comutatividade da $\cdot$]*

vi) distributividade da multiplicação:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *[distributividade da $\cdot$]*

vii) integridade da multiplicação: $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$ *[integridade da $\cdot$]*

A demonstração das propriedade do Teorema acima pode ser encontrada em (OLIVEIRA, 2022).

Exemplo 2.3.2. *Vamos mostrar, com um exemplo mais simples, a capacidade de gerar outros resultados a partir desse conjunto básico de propriedades. Vamos provar a unicidade do simétrico de um número inteiro.*

Inicialmente, podemos observar que, através da existência de elemento neutro (zero) e da comutatividade da adição, temos: $0 + b = b + 0 = b$ e, também, $0 = b + b' = b' + b$, para qualquer b inteiro.

Agora, vamos racionar por absurdo. Suponha que a' e a'' são simétricos de a. Então, temos:

$$a' = 0 + a' = (a + a'') + a' = a + (a'' + a') = a + (a' + a'') = (a + a') + a'' = 0 + a'' = a''$$

Leis do cancelamento - *Sejam a, b números inteiros:*

i). $a + c = b + c \Rightarrow a{=}b, \forall\ c \in \mathbb{Z}$

ii). $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a{=}b, \forall\ 0 \neq c \in \mathbb{Z}$

Prova:

(i) Seja $a + c = b + c$, pela existência e unicidade do simétrico de c, temos, $(a+c)+(-c) = (b+c)+(-c)$ e, pela associatividade, $a+[c+(-c)] = b+[c+(-c)]$. Daí, segue que $a + 0 = b + 0$ e, como 0 é elemento neutro da adição, concluímos que $a = b$.

(ii) De $ac = bc$ temos que $ac + (-b)c = bc + (-b)c = 0$. Daí, pela comutatividade e distributividade da multiplicação, obtemos que $0 = ac+(-b)c = ca+c(-b) = c\cdot(a-b) = 0$. Porém, sabemos que para o produto de dois números inteiros resultar em zero devemos ter ao menos um desses números igual a zero, e como $c \neq 0$, concluímos que $a - b = 0$.

Conceitos básicos de divisibilidade

Uma dificuldade enfrentada no trabalho com números inteiros é que nem sempre é possível representar uma divisão de inteiros por um inteiro. Quando nos referimos a uma equação do primeiro grau, por exemplo, não conseguimos encontrar solução inteira para $2x = 3$. Porém, existe solução inteira para $2x = 4$, em que $x = 2$.

Uma ideia que nos permite caracterizar equações de primeiro grau que tem solução nos inteiros é a de divisor, que falaremos a seguir.

Definição 2.3.3. *(RIPOLL; RIPOLL; SILVEIRA, 2003) Divisor de um dado número inteiro a é todo inteiro b capaz de transformar o inteiro dado num produto de inteiros:* $a = b \cdot c$*, para algum número inteiro c.*
Sempre que b for divisor de a, também costuma-se empregar as seguintes terminologias alternativas, sinônimas:
- *"o inteiro b divide a", o que abreviamos com a notação:* $b|a$*;*
- *"o inteiro a é múltiplo de b".*

Exemplo 2.3.4. - *Os divisores de* $a = 2$ *são* $b = -2, -1, 1$ *e* 2.
Com efeito, temos, respectivamente: $2 = (-2)\cdot(-1), 2 = (-1)\cdot(-2), 2 = 1\cdot 2$ *e* $2 = 2\cdot 1$
- $b = (-4)$ *é um dos divisores de* $a = (-8)$*, pois* $-8 = (-4)\cdot 2$.
- *Os divisores de* $a = 0$ *são todos os inteiros b.*

OBSERVAÇÃO:

No Ensino Fundamental, o conceito de divisor é apresentado apenas no contexto de números naturais, com números inteiros positivos. Porém, aqui estamos considerando como divisor quaisquer números inteiros que estejam de acordo com a definição dada, mesmo os negativos. Ou seja, todo números inteiro tem divisores tanto positivos quanto negativos. Logo, se b é divisor de a, então $-b$ também é.

A seguir, abordaremos de forma breve a divisão euclidiana.

2.3.2 Teorema da divisão euclidiana

Segundo (RIPOLL; RIPOLL; SILVEIRA, 2003), dividir consiste em "quebrar" um todo em partes iguais. Essa divisão pode acontecer de forma *exata*, quando ao unirmos as partes obtemos o todo, ou de forma *inexata*, quando o resultado da soma das partes é diferente do todo.

Neste momento trabalharemos no contexto dos inteiros. Chamemos a o número inteiro que corresponde ao todo e b o inteiro que representa o valor de cada uma das partes iguais. Daí:

- Dizer que é possível realizar uma divisão exata de a por b é o mesmo que dizer que existe um q inteiro, de modo que: $a = b \cdot q$. Isso equivale a b ser divisor de a.
- Dizer que a divisão de a por b é inexata é o mesmo que dizer que existe um q inteiro, de modo que $a = b \cdot q + r$, sendo $0 \leq r < |b|$. Na divisão euclidiana, q e r são chamados de quociente e resto da divisão, respectivamente.

Ao trabalhar com a divisão exata, temos apenas uma maneira de fazê-la, porém, é possível fazer a divisão inexata por falta (como $26 = 3 \cdot 8 + 2$) ou por excesso (como $26 = 3 \cdot 9 + (-1)$). A divisão inexata mais utilizada na Matemática é a chamada *divisão euclidiana*, que é a divisão inexata por falta.

A divisão euclidiana permite ampliar o quociente de a por b, não sendo necessário na divisão que b seja um divisor de a, trabalhando apenas em números inteiros. Veja a seguir a definição exata.

Definição 2.3.5. *Fazer a* ***divisão euclidiana*** *de um número inteiro a por um inteiro* $b \neq 0$*, equivale a encontrar uma decomposição da forma:*

$$a = b \cdot q + r, \textit{ onde } q, r \textit{ são inteiros, e com } 0 \leq r < |b|.$$

Denominações: q é o quociente (euclidiano), r é o resto da divisão euclidiana de a por b. Relembrando: $|b| = b$, se $b \geq 0$ e $|b| = (-b)$, se $b < 0$.

Exemplo 2.3.6. *A divisão euclidiana de 30 por 8 é:* $30 = 8 \cdot 3 + 6$ *(de modo que* $q = 3, r = 6$*), já a de 3 por 7 é:* $3 = 7 \cdot 0 + 3$ *(onde* $q = 0$ *e* $r = 3$*).*
A divisão euclidiana de -40 por 3 é: $-40 = 3 \cdot (-14) + 2$. *Devemos ficar atentos ao fato de que o resto de uma divisão nunca deve ser negativo.*

Quando $r = 0$, a divisão euclidiana acaba coincidindo com a divisão exata. Por isso, geralmente se diz que a divisão euclidiana generaliza a divisão exata com números inteiros. Vejamos, primeiro, o teorema da divisão euclidiana para números positivos.

Teorema 2.3.7 (Divisão Euclidiana com números positivos)**.** *Dados números naturais m, n com $m < n$. Então, ou n é múltiplo de m, ou existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $n = mq + r$, onde $r < m$. Além disso, q e r são únicos com esta propriedade.*

Demonstração. Dados m, $n \in \mathbb{N}$ com $m < n$, considere o conjunto

$$A = \{k \in \mathbb{N};\, m\,k \geq n\}\,.$$

Como $m \geq 1$ então $m\,n \geq n$, ou seja, $n \in A$ e portanto A é não-vazio.

Pelo Princípio da Boa Ordenação, o conjunto A possui um menor elemento $k_0 \in A$. Isto significa que:

(a) $m\,k_0 \geq n$, pois $k_0 \in A$.

(b) $k_0 \leq k$, para todo $k \in A$, pois k_0 é o menor elemento de A.

Como $m\,k_0 \geq n$, temos duas possibilidades:

(i) $m\,k_0 = n$.

Neste caso n é múltiplo de m e, nada mais há a provar.

(ii) $m\,k_0 > n$.

Observa-se que, $k_0 > 1$ pois $m < n$. Sendo $k_0 > 1$, então k_0 é o sucessor de algum número natural q, ou seja $k_0 = q + 1$.

Como $q < k_0$, em particular $q \notin A$, assim $m\,q < n$, mas isto significa que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n = m\,q + r$.

Para concluir a existência dos números q e r, basta provar que necessariamente $r < m$.

Suponhamos por contradição que $r \geq m$.

Caso 1. $r = m$, então

$$\begin{aligned} n =& m\,q + r \\ n =& m\,q + m \\ n =& m(q+1) \\ n =& m\,k_0 > n \quad \text{absurdo.} \end{aligned}$$

Caso 2. $r > m$, então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $r = m + j$, assim

$$\begin{aligned} n =& m\,q + r \\ n =& m\,q + (m+j) \\ n =& m(q+1) + j \\ n =& m\,k_0 + j > n \quad \text{absurdo.} \end{aligned}$$

Portanto, $r < m$. Isto conclui a existência dos números naturais q e r, com $n = m\,q + r$ e $r < m$.

Agora provaremos a unicidade dos números q e r.

Suponhamos que $n = m\,q + r = m\,q' + r'$ com $r < m$ e $r' < m$.

Suponhamos por contradição que $q \neq q'$, digamos $q' < q$, então

$$\begin{aligned} m\,q' + r' =& m\,q + r \\ r' =& m\,q - m\,q' + r \\ r' =& m(q - q') + r \;>\; m, \quad \text{pois } q - q' \geq 1 \text{ e } r \geq 1, \text{ contrariando } r' < m. \end{aligned}$$

Se supusermos $q' < q$, da mesma forma chegaremos a uma contradição do tipo $r > m$. Portanto $q = q'$.

Prosseguindo, sabendo que $q = q'$

$$\begin{aligned} m\,q' + r' =& m\,q + r \\ m\,q + r' =& m\,q + r \end{aligned}$$

$$r' = r. \quad \blacksquare$$

Como já foi dito, também é possível efetuar a divisão com resto entre números inteiros envolvendo, também, números negativos, como indica o teorema a seguir.

Teorema 2.3.8. *[Divisão Euclidiana] Dados inteiros d e D com $d \neq 0$, existem inteiros q e r tais que:*

$$D = d \cdot q + r \qquad e \qquad 0 \leq r < |d|. \tag{2.1}$$

Além disso, q e r são unicamente determinados pelas condições acima.

A demonstração do Teorema 2.3.8 pode ser encontrada no livro Curso de Álgebra (HEFEZ, 1997).

No Ensino Fundamental essa divisão geralmente é chamada de "divisão com resto", mas vimos anteriormente que ela não é a única divisão com resto. Portanto, é a divisão com resto conhecida pelos alunos nessa etapa de ensino.

Exemplo 2.3.9. *Vamos realizar a divisão euclidiana de 22 por 5.*

$$5 < 2 \cdot 5 < 3 \cdot 5 < 4 \cdot 5 < 22 < 5 \cdot 5 < ...$$

ou seja: $4 \cdot 5 = 20 < 22 = 20 + 2$. *Logo,* $22 = 4 \cdot 5 + 2$.

3 Números racionais e suas propriedades

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018, p. 259), no processo de formação básica dos alunos, o conhecimento matemático é de extrema importância, pois contribui na melhoria da sociedade de uma forma geral. As atividades da vida cotidiana do ser humano, inclusive as mais simples, exigem que saibamos o mínimo de Matemática. Entre essas tarefas, podemos citar, por exemplo, verificar o dia do mês num calendário. Nesse contexto, as atividades mais simples podem ser consideradas aquelas que envolvem apenas contagem. Sendo assim, os números necessários para essas tarefas seriam da forma 1, 2, 3, 4, 5, ... , que são os Números Naturais. Os Números Inteiros aparecem da necessidade de considerar números negativos em situações como a medição de temperatura, por exemplo.

Mas será que os números inteiros são suficientes para que possamos realizar todas as tarefas do dia a dia? Além da atividade de contar, medir também é uma tarefa necessária, por exemplo. Medir é o ato de comparar duas grandezas de mesma espécie tomando uma delas como padrão. Porém, há uma dificuldade quando, ao escolher uma unidade padrão para medir, o resultado obtido não é um número inteiro. A partir daí surgiu a necessidade de buscar novas maneiras de representar partes de inteiros, que são chamados de números racionais e são representados pelas frações. Segundo o matemático Hassler Whitney, do Institute for Advanced Study (Princeton, USA): “ *A primeira crise na Matemática ensinada na escola ocorre com o estudo das frações. O stress é causado particularmente pela tremenda confusão das ideias associadas.*”

3.1 Definição de Número Racional

De acordo com (GODINO et al., 2004), a ideia e definição de número racional positivo foi construída durante vários milhões de anos e durante muitos séculos, seu conceito esteve associado a contextos concretos de medida e partilha. Inicialmente, os conceitos de fracção e razão eram independentes, mas a partir de um determinado momento convergiram, dando origem ao conceito de número racional positivo e, posteriormente, ao conceito mais geral de número racional.

(GODINO et al., 2004) afirma que o Conjunto dos Números Racionais é o primeiro conjunto que os alunos tem contato que não se baseia no processo de contagem. Até o momento, adicionando ou tirando unidades, os alunos conseguiriam resolver a maior parte dos problemas propostos. Porém, como já citamos anteriormente, existem muitos problemas que não conseguimos solucionar utilizando esses processos apenas com números inteiros e requerem a introdução de número racional. No entanto, ao introduzir números racionais em sala de aula o processo de contagem já não pode mais ser a base do raciocínio, uma vez que não existe um número racional “seguinte” a um racional dado. Desse modo, a partir do ensino desses números ocorrem mudanças importantes na forma de pensar e de usar os números, provocando confusões e dificuldades nos alunos.

O conceito de número racional é um dos mais importantes da Matemática, porém, também é um dos mais complexos do ensino básico. Segundo (POST; BEHR; LESH, 1986), “parece que muitos alunos não têm um conceito funcional interno de número racional”. Alguns estudos indicam que existem fatores que afetam diretamente na aprendizagem e dificuldade de aplicação deste conteúdo. São eles: (i) o fato de uma fração apresentar diferentes significados dependendo do contexto; (ii) O ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos; (iii) o fato de um número racional, em sua representação fracionária, ser formado por dois números, o que leva os alunos a enxergar uma fração como dois números separadamente (MONTEIRO; PINTO, 2005). Na percepção de (POST; BEHR; LESH, 1986), falta aos alunos a noção quantitativa de número racional, além de que para a maior parte deles é difícil a compreensão de que estes números podem ser representados de várias formas: razões, divisões, parte de um todo, etc.

Mais adiante abordaremos a forma como esse conceito é trabalhado em sala de aula e essas várias representações do números racionais. Porém, podemos aqui já começar a refletir sobre o que um aluno necessita para compreender, por exemplo, o que representa $\frac{4}{6}$. No momento em que são introduzidos números racionais, os alunos já tem uma grande noção a respeito dos números naturais. Por esse motivo, os números 4 e 6 tem significado para eles, mas agora, em $\frac{4}{6}$ (QUARESMA, 2010) destaca que existem três informações importantes para se atentar: (i) o tamanho do denominador; (ii) o tamanho do numerador; (iii) a relação entre numerador e denominador.

Para (BEHR et al., 1997), para que se compreenda a definição de número racional, é necessário ter clareza sobre cada um de seus significados separadamente e também da relação entre eles. Um determinado conhecimento não se desenvolve isoladamente, mas sim quando se relaciona com outros conhecimentos.

Diante de estudos realizados por (POST et al., 1993), foi possível definir algumas implicações para o ensino dos números racionais: (i) deve ser feito com base nos conhecimentos que os alunos trazem com eles; (ii) o ensino de números racionais deve enfatizar as inter-relações entre os diversos significados de número racional; (iii) deve ser feito priorizando a compreensão de ordem e equivalência, ao invés de ensinar apenas algoritmos; (iv) o processo de ensino deve acontecer com a utilização de modelos educativos que reforcem os conceitos e as diferentes representações dos números racionais.

Enfatizaremos mais adiante alguns erros cometidos pelos alunos que são frequentemente encontrados quando o professor está trabalhando com frações. Porém, devido a grande quantidade de representações desse tipo de número, muitos alunos se confundem e, num primeiro momento apontam, por exemplo, que $\dfrac{1}{2} = 1,2$.

Uma definição mais usual de número racional é o que diz que: é aquele número que pode ser escrito na forma fracionária $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e b é diferente de zero. Representamos o Conjunto dos Números Racionais pelo símbolo $\mathbb{Q}$. Então, temos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a,\, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0 \right\}.$$

Sendo assim, b é chamado de denominador, que representa em quantas partes estamos dividindo o inteiro adotado como referência inicial e a é chamado de numerador, que representa a quantidade de partes desse total b que estamos destacando (DANTE, 2018).

3.2 Representações de números racionais

De acordo com (QUARESMA, 2010), as diferentes representações numéricas em Matemática devem ser utilizadas pelos alunos como recurso para facilitar e resolver problemas diversos. Para (GOLDIN, 2003), uma representação é uma configuração de sinais, caracteres, ícones ou objetos que podem, de alguma forma, designar ou substituir alguma coisa. Para este mesmo autor, raramente as representações tem significado sozinhas. Porém, uma vez que na Matemática se trabalha com objetos abstratos, se torna mais interessante para o aluno recorrer as suas representações. Nas orientações para o ensino de Matemática (PRINCIPIOS, 2007), os autores argumentam que os professores precisam, diariamente, “encorajar os alunos a representar as suas ideias sob formas que, para eles, façam sentido, mesmo que as suas representações não sejam as convencionais” (p. 75). O professor deve sempre buscar estabelecer pontes entre as próprias representações dos alunos e as convencionais, para que esse processo faça sentido para eles.

A porcentagem, o número decimal, a fração, são algumas das várias representações de um número racional. O professor deve trabalhar com os alunos a ideia de que um número pode ter várias designações. Para (PRINCIPIOS, 2007),

> Os alunos necessitam de desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjecturas. [...] Estas representações funcionam como ferramentas para raciocinar e resolver problemas ajudando, igualmente, os alunos a comunicarem o seu raciocínio a terceiros (p. 240).

Segundo (MOSS; CASE, 1999), quando o professor se dedica unicamente a ensinar utilizando métodos tradicionais e resultados prontos algumas dificuldades surgem como barreira para o aprendizado, como: (i) o tempo em que se dedica ao ensino dos métodos é maior do que o dedicado ao desenvolvimento dos conceitos e ideias para criação de sentido; (ii) os conceitos apresentados priorizam o ponto de vista do professor, não dando relevância as resoluções informais dos alunos; (iii) nas representações utilizadas, não é enfatizada a diferença entre um número racional e um número inteiro.

Para (WEBB; BOSWINKEL; DEKKER, 2008), um dos maiores desafios que há no ensino da Matemática no ensino básico é desenvolver maneiras de concretizar na aprendizagem a verdadeira compreensão sobre a Matemática uma vez que, o ensino não deve ter como base os processos, mas sim ter foco na compreensão de conceitos. Por exemplo, quando o professor vai abordar em sala de aula o algoritmo para a adição ou para a subtração de fracções. Muitos ensinam o processo e dão tempo aos alunos para "treinarem", sendo que, na verdade, grande parte dos alunos continuarão a confundir os procedimentos e se esquecerão de como funcionam.

Segundo (POST et al., 1993), a compreensão do número racional está relacionada com algumas características como a compreensão da conversão entre as diferentes representações de números racionais. Eles afirmam ainda, que quando os alunos são privados da utilização e da conversão entre as diversas representações de números racionais, acabam enfrentando maiores dificuldades ao trabalhar com o conteúdo.

Diante de tantas representações que envolvem números racionais, uma das dificuldades encontradas pelos professores em sala de aula é a conversão entre fração e sua representação decimal. Por exemplo, alguns alunos podem pensar que $\frac{1}{3} = 1,3$, o que não é verdade. Diante disso, percebe-se através destes erros que o sistema de numeração decimal ainda não está de fato compreendido e que as representações não estão claras, ainda não estão ligadas de acordo com as quantidades que dizem respeito.

Para (MONTEIRO; PINTO, 2007), os números racionais ocupam grande parte do currículo da educação básica, e ainda mais por este motivo se torna tão essencial que a aprendizagem seja eficaz. Ele cita algumas dificuldades que os alunos enfrentam no estudo deste conteúdo e são observadas com frequência nas escolas como (i) confusão entre décimas e centésimas, como por exemplo ao observar os números 2,5 com 2,05; (ii) dificuldade de distinguir a quantidade de algarismos e o valor que o número representa como, por exemplo, pensar que 1,456 é maior que 1,5 pela quantidade de algarismos que tem cada número; (iii) pensarem que não há nenhum número racional entre 0,1 e 0,2, por exemplo.

Diante das dificuldades citadas, (OWENS; SUPER, 1993) indica que o trabalho com numeral decimal e a representação fracionária deve ser feito de forma concomitante, com o objetivo de que o aluno observe que as duas representações se tratam da mesma situação e pertencem ao mesmo conjunto numérico.

Um número racional possui várias representações. São exemplos de números racionais:

$$-\frac{1}{3}; \frac{3}{8}; -\frac{2}{5}; 7,3333...; \frac{7}{15}; 18,96.$$

Segundo (LIMA; BRITO, 2001), todo número que pode ser escrito no formato de uma fração é racional, portanto números Naturais e Inteiros também são números Racionais, uma vez que podem ser escritos no numerador de uma fração cujo denominador é igual a 1. Assim, são considerados números racionais:

- Qualquer número natural ou inteiro
- Qualquer número com representação decimal finita
- Qualquer número cuja representação decimal é uma dízima periódica

Além disso, a porcentagem também é trabalhada com os alunos no Ensino Fundamental e, segundo (MOSS, 2002), num estudo que desenvolvendo, ele observou que, no geral, os alunos possuem boa compreensão do "significado" de diversos valores numéricos que são representados na forma de percentagem. Um exemplo envolvendo esse aspecto é que os estudantes afirmaram que 100 por cento significava "tudo", 99 por cento significava "quase tudo", 50 por cento significava "exatamente metade", e 1 por cento significava "quase nada". Essa acaba sendo uma forma vantajosa de compreender a porcentagem, pois são afirmações que fazem parte do cotidiano dos alunos. Porém, essas observações não anulam o fato de porcentagem também ser um conceito difícil de aprender.

De acordo com (COX, 1999), ao tentar resolver algumas questões envolvendo números racionais, por diversas vezes os alunos esboçam, fazem rabiscos, traçam figuras, ou utilizam desenhos para conseguir chegar na resolução do problema. Daí, observa-se como os alunos elaboram imagens mentais para servir de apoio à interpretação das informações que são apresentadas, de modo a procurar estratégias de solução. De acordo com o autor, muitas vezes, os alunos produzem essas representações, pois já observaram anteriormente essas mesmas representações sendo feitas pelo professor no quadro.

A princípio podemos fazer algumas observações referentes a esses números:

1. A fração $\frac{a}{b}$ é chamada de *racional*, pois pode ser vista como uma razão entre os números inteiros a e b.

2. Se faz necessário considerar $b \neq 0$, uma vez que, assim como foi citado na observação anterior, a fração $\frac{a}{b}$ é uma razão, ou seja, representa o quociente $a \div b$ e não existe divisão por zero.

3.2.1 Frações

Falaremos mais adiante de forma mais aprofundada sobre o conceito de fração e suas várias representações. Porém, de forma breve e generalizada, podemos dizer que fração é a representação da parcela de um "todo". Para (NACARATO et al., 1990), a fração é o resultado de duas ações. A primeira é dividir a quantidade total (ou o todo) em grupos de mesma quantidade (ou em partes iguais). A esse número total de grupos/partes chamamos de denominador. A segunda ação se trata de selecionar uma certa quantidade de grupos ou de partes, que chamamos de numerador.

$$\frac{numerador}{denominador} = \frac{\text{primeira ação}}{\text{segunda ação}}$$

Exemplo 3.2.1. *"Dividir um pedaço de arame em 10 partes iguais e considerar 7 dessas partes." Podemos representar a situação descrita através da seguinte fração:*

$$\frac{\textit{segunda ação}}{\textit{primeira ação}} = \frac{7\ \textit{(numerador)}}{10\ \textit{(denominador)}}$$

Exemplo 3.2.2. *"Separar 250 alunos em 5 grupos com o mesmo número de pessoas e selecionar 2 desses grupos para participar de uma excursão." Podemos representar a situação descrita através da seguinte fração:*

$$\frac{\textit{segunda ação}}{\textit{primeira ação}} = \frac{2\ \textit{(numerador)}}{5\ \textit{(denominador)}}$$

Equivalência de frações

Segundo (NACARATO et al., 1990), duas ou mais frações são *equivalentes* quando representam a mesma parte de um inteiro. Usaremos o sinal "=" para representar frações equivalentes.

Veja o exemplo anterior. Quando separamos 250 alunos em 5 grupos, temos 50 alunos em cada um dos grupos. Selecionar 2 dos 5 grupos é o mesmo que selecionar 100 das 250 pessoas, ou seja:

$$\frac{2}{5} = \frac{100}{250}.$$

Mais adiante veremos de forma mais detalhada como se dá o trabalho com frações equivalentes em sala de aula.

3.3 Ordenação dos Números Racionais

Ao iniciar o trabalho envolvendo números racionais os alunos já possuem conhecimentos sobre números naturais e inteiros. Para (POST; BEHR; LESH, 1986), esses conhecimentos adquiridos pelos alunos, inclusive em seu contexto social, influenciam de forma significativa na maneira como os alunos entendem a ordenação dos números racionais. Essa influência, por vezes, se dá de forma persistente e, dependendo de como ela acontece, pode dificultar o processo de compreensão da relação de ordem dos números racionais.

Os alunos, neste momento, já conhecem os números naturais e já conseguem ordená-los e, de forma inevitável, esse conhecimento prévio acaba influenciando na maneira como eles vão tentar organizar seu pensamento para também ordenar os números racionais. Porém, sabemos que o modo de trabalhar com este novo conjunto não é exatamente o mesmo do Conjunto dos Números Naturais e isso pode influenciar de forma negativa neste momento da aprendizagem.

No trabalho com números racionais não existe esse aspecto óbvio que se utiliza para comparar dois números como é feito entre os números naturais. Porém, quando o aluno se depara, por exemplo, com as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ é intuitivo que o aluno pense que saiba ordenar, alegando que $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{2}$, uma vez que 3 é maior que 2. Esse conhecimento está relacionado a ordenação dos números naturais, mas quando se trata de números racionais este pensamento está incorreto. O que define o significado de uma fração é a relação entre numerador e denominador e não as respectivas magnitudes absolutas quando vistas isoladamente. De fato, são necessárias diferentes estratégias para ordenar $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{4}$ ou $\frac{3}{9}$ e $\frac{4}{9}$. Essas estratégias são novas para os alunos e, considerados neste momento, mais complexas.

Para (POST; BEHR; LESH, 1986), os alunos devem entender que a noção quantitativa de número racional vai além do que foi visto até então nas aulas de Matemática. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ de uma pequena torta pode ser menor que $\frac{1}{3}$ de uma torta grande. Isso acontece caso as frações não tenham o mesmo referencial. Porém, se tratando de uma ordenação de valores absolutos, estes valores estarão todos relacionados a uma unidade comum. Por exemplo, no sistema matemático $\frac{1}{3}$ é sempre inferior a $\frac{1}{2}$, pois a unidade de comparação é 1.

Para (POST et al., 1985), a ordenação de frações exige que o aluno compreenda alguns conceitos como o fato de que o tamanho da fração depende da relação que há entre numerador e denominador. Além disso, existe uma relação inversa entre o número de partes em que o todo está dividido e o tamanho de cada uma dessas partes. Os autores também ressaltam que, um conhecimento que o aluno precisa ter é de que quando as frações tem o mesmo denominador, o tamanho de cada fração está diretamente relacionada ao número de partes que se tomam.

Dizemos que o Conjunto dos Números Racionais é ordenado, ou seja, dados dois números racionais r e s, apenas uma das situações a seguir acontece:

$$r = s, r < s \text{ ou } r > s.$$

3.3.1 Igualdade

Sejam dois números racionais r e s, em que $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$, com a, b, c e d números inteiros com b e d diferentes de zero. Se $r = s$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$.

Como consequência dessa definição, temos:

Se duas frações não possuem o mesmo denominador, mesmo assim é possível que essas frações sejam iguais. Veja como exemplo as frações $\frac{4}{8}$ e $\frac{3}{6}$. Como $a \cdot d = c \cdot b$, pela definição concluímos que $\frac{4}{8} = \frac{3}{6}$. Essas frações são chamadas equivalentes e falaremos delas mais adiante.

Todo número inteiro também é racional, podemos representar cada um desses números como fração. Veja, por exemplo, que podemos escrever de infinitas maneiras o número 3 na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e b diferente de zero.

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3}.$$

3.3.2 Desigualdade

Como vimos, todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, em que a e b são inteiros e b é diferente de zero. Como $-a \cdot (-b) = a \cdot b$, então, podemos afirmar que todo racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $b > 0$.

Desse modo, dados $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais com $b > 0$ e $d > 0$, definimos:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d < b \cdot c.$$

A motivação dessa definição está no Exemplo 4.4.1.

Essa não é uma definição tão simples de ser entendida pelos alunos. Segundo, (MONTEIRO; PINTO, 2007), as diversas representações envolvendo números racionais trazem certa confusão na cabeça dos alunos, principalmente na hora de comparar frações. Veja:

- Na compreensão dos números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ a maioria dos alunos aponta $\frac{1}{4}$ como maior, visando o fato de que 4 é maior que 3. Este erro indica e que a representação fracionária ainda não está bem compreendida.

4 Frações no Ensino Básico

Não há dúvida de que a fração tem seu papel fundamental no cotidiano. Ela surgiu diante da necessidade de representar uma medida que não tem uma quantidade inteira de unidades, ou seja, dividir a unidade de medida de forma mais precisa (SILVA, 2019, p. 62). Vejamos como geralmente as frações são trabalhadas no Ensino Fundamental.

4.1 A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Ensino de Frações

O ensino de frações em sala de aula é sempre muito desafiador, pois se trata de um conteúdo que assusta muitos alunos e até mesmo professores na hora de ensinar por ser considerado um conteúdo muito difícil pela maioria dos estudantes. Buscando compreender melhor como se dá o ensino de frações nos anos finais do Ensino Fundamental, faremos uma análise sobre o modo como este conteúdo é abordado pela BNCC, que é o documento que norteia atualmente o currículo escolar.

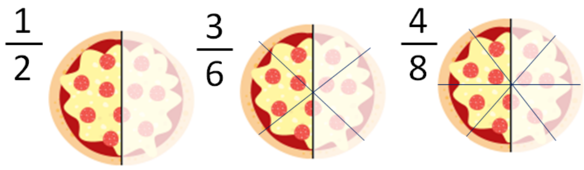
Conforme as orientações da BNCC (BNCC, 2018), conseguimos perceber que o início do trabalho com frações em sala de aula se dá, especificamente, no 4º ano e é desenvolvido gradativamente até o 8º ano (BNCC, 2018, p. 280). Como já foi citado, a proposta é que este conteúdo seja abordado de forma progressiva ano a ano. Percebemos isso de forma mais clara no trecho que diz que “as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes” (BNCC, 2018, p. 297).

Diante disso, o documento apresenta os conteúdos que deverão ser trabalhados pelos docentes, sendo divididos por ano escolar, unidades temáticas, objetos do conhecimento e habilidades. Especificamente nos anos finais, o conceito e definição de frações está bem mais estabelecido, possibilitando que os alunos comecem a desenvolver os processos de comparação e operação com as frações.

Assim como podemos observar nos Parâmetros Curriculares Nacionais (NACIONAIS, 1998), a BNCC também nos traz a sugestão de que o ensino de frações deve ser feito de forma gradativa, estruturando e formalizando os conceitos aos poucos, ano a ano. Um exemplo que vemos especificamente para o 6º ano é que o objetivo principal do ensino desse conteúdo está em apresentar o significado de frações, fazendo com que os alunos enxerguem a fração, principalmente, como parte/todo e quociente. Além disso, nesse mesmo ano são introduzidas as operações de adição e subtração de frações, bem como o estudo de frações utilizando a resolução de problemas (BNCC, 2018, p. 280-319).

A seguir vemos o exemplo de frações e imagens que representam parte/todo.

Figura 1 – Parte/todo



Fonte: (Site Smartick, 2018)

Para os demais anos do ensino fundamental a orientação da BNCC é que o desenvolvimento do conteúdo aconteça de maneira mais intensa, de modo que:

> [...] No 7º ano, os alunos ampliam o conhecimento sobre as diversas formas de aplicação de frações, passando a utiliza-las na representação de parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. Neste ano, são introduzidas as operações de multiplicação, divisão e potenciação de frações, bem como a resolução de problemas que necessitam destas operações. No 8º ano, já tendo consolidado o conceito de fração, suas representações e operações, são propostas aplicações destes conceitos como na obtenção de fração geratriz de dízima periódica e cálculos de porcentagem. No 9º ano, as frações são aplicadas no cálculo de potências com expoentes fracionários" (BNCC, 2018, p. 300-339).

É válido ressaltar que no 7º ano ainda, os alunos já tem o contato com o Conjunto dos Números Racionais e veem algumas noções desses números. Além disso, a porcentagem também já aparece no 6º ano, porém, de forma mais simples.

Seguem alguns exemplos que abordam os tópicos citados em cada ano, como foi falado acima.

Exemplo 4.1.1. *Fração como parte de inteiro: Em uma turma com vinte alunos, sete tem cabelo curto. A fração que representa a situação dada é* $\frac{7}{20}$.

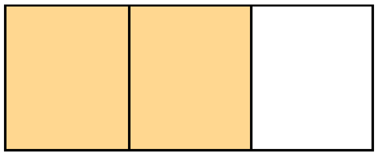
Geralmente os livros didáticos de Matemática apresentam uma definição para a compreensão inicial do conceito de fração que prioriza o aspecto relacionado a parte/todo, como a vemos a seguir:

A notação $\dfrac{a}{b}$ *representa a fração ou pedaço correspondente a "a" partes de uma unidade ou todo que foi dividido em "b" partes iguais.*

Mesmo que a definição acima esteja correta, de acordo com (DRUCK, 2006), ela é bastante vaga e problemática, apesar de parecer simples. Vejamos a seguir alguns exemplos para a fração $\dfrac{2}{3}$ que, segundo a definição acima, representa duas partes de um todo que é dividido em três partes iguais.

1) $\frac{2}{3}$ de uma barra de chocolate.

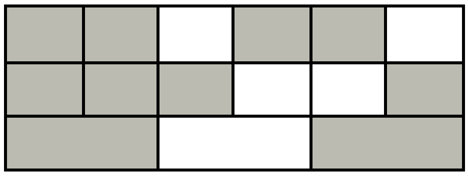
Figura 2 – Fração dois terços (1)



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

2) $\frac{2}{3}$ de uma barra de chocolate.

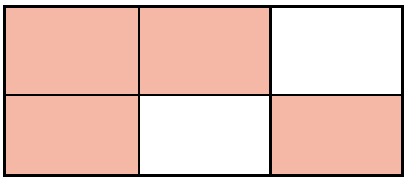
Figura 3 – Fração dois terços (2)



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

3) $\frac{2}{3}$ de uma barra de chocolate.

Figura 4 – Fração dois terços (3)



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

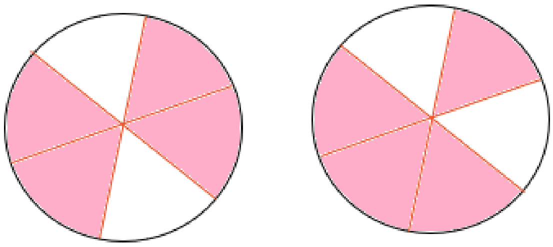
4) $\frac{2}{3}$ de uma coleção de 6 estrelas.

Figura 5 – Fração dois terços (4)

Fonte: Produção do próprio autor (2023)

5) $\frac{2}{3}$ de duas pizzas.

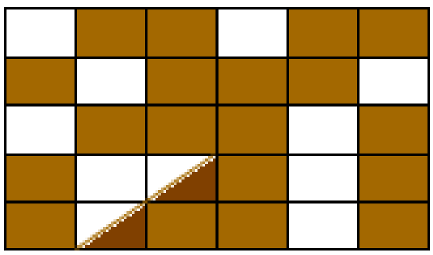
Figura 6 – Fração dois terços (5)



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

6) $\frac{2}{3}$ da área de um terreno está destacado a seguir.

Figura 7 – Fração dois terços (6)



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

7) $\frac{2}{3}$ de uma coleção de 6 estrelas.

Figura 8 – Fração dois terços (7)

Fonte: Produção do próprio autor (2023)

8) $\frac{2}{3}$ dos palitos de fósforo estão riscados.

Figura 9 – Fração dois terços (8)

Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Através dos exemplos acima é possível notar que a definição dada, de forma mais geral, não compreende todas as possibilidades de se trabalhar com frações. Veja que nos exemplos 1, 2, 3 e 6, o todo é representado por uma unidade, como apresenta a definição, o que muda são as partes em que cada unidade é dividida. Porém, nos exemplos 2 e 6, como o aluno poderá compreender que a região hachurada representa 2 partes de um inteiro que foi dividido em 3 partes iguais? A mesma pergunta podemos fazer em relação ao exemplo 5. O que são a unidade e a parte nos exemplos 4, 5, 7 e 8? Podemos chamar uma coleção de 12 objetos de uma unidade e uma coleção de 4 objetos de uma parte? Isso está claro para o aluno. Provavelmente, com o simples conceito apresentado anteriormente, não estará.

Segundo (DRUCK, 2006), ao simplificar os "desenhos" que se faz para facilitar o entendimento da definição de fração, estamos dificultando a compreensão, por parte do aluno, do conceito abstrato. Diante dessa ideia da imagem mais facilitada, convencemos o estudante de que fração é um pedaço ou mais de uma barrinha retangular. Porém, a ideia de fração é muito mais abrangente, por isso se torna fundamental ter o cuidado ao apresentar tais definições, pois aquilo que se chama de "todo" ou "unidade" é uma noção bem flexível, que pode variar de acordo com o contexto ou problema trabalhado. Para (DRUCK, 2006),

> é preciso ficar claro que, uma vez fixado, o todo funciona como padrão único de referência para o problema – neste sentido, unidade. Mas, dependendo do problema, também é necessário ficar claro que se deve dispor de um estoque de vários "todos" equivalentes – o que nos permite obter as frações impróprias, maiores do que a unidade.

São várias as possibilidades de trabalhar com frações, ideias sintetizadas ou implícitas na definição usual de fração. Porém, devemos considerar a faixa etária da etapa escolar em que os alunos estão para introduzir tais conceitos, não se deve tratá-los diretamente, sistematizando.

> Assim, torna-se necessário apresentar muitas situações de interesse dos alunos, correspondentes a vivências de realidade possível (não simplesmente frações de figuras geométricas, por exemplo), onde problemas que demandem medir pedaços não inteiros tornem necessário o emprego de novas convenções numéricas. Pode-se dar inicialmente aos alunos a prerrogativa de inventar nomes para os diferentes pedaços. É prejudicial introduzir rapidamente a notação e a nomenclatura oficiais da aritmética, antes que eles tenham atribuído significado claro à diferença entre, por exemplo, a metade, a terça parte ou o quinto. (DRUCK, 2006)

Exemplo 4.1.2. *Fração como resultado da divisão: Pedro quer dividir 5 barras de chocolate entre seus quatro filhos.*

Quando os alunos veem o exemplo acima, muitos se deparam com o fato de que seu conhecimento está limitado a pensar nas situações como parte/todo. Logo, surge uma dificuldade de entender a situação dada que é a quantidade de chocolate recebida por cada filho. O aluno pode ter sua dificuldade se pensar como parte/todo uma vez que o todo, nesse caso, seria menor que a parte considerada. Porém, basta pensar em cada barra divida em quatro partes iguais e percebemos que $\frac{5}{4}$ é o mesmo que $1 + \frac{1}{4}$, ou seja, uma barra inteira e $\frac{1}{4}$ de outra, como na figura abaixo.

Figura 10 – Cinco quartos da barra de chocolate

Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Exemplo 4.1.3. *Fração como razão: Em uma empresa de produção de parafusos, foram produzidos 90 parafusos, sendo que 6 deles são defeituosos. Qual a razão entre a quantidade de parafusos defeituosos e o total de parafusos produzidos? A fração que representa a situação dada é* $\frac{6}{90}$.

Segundo (DRUCK, 2006), a maioria dos livros didáticos para o Ensino Fundamental apresenta, na seguinte ordem, os conceitos que já foram citados aqui: inicialmente é apresentada a divisão envolvendo números naturais, em seguida, essa ideia se amplia utilizando frações. Mais adiante aparecem as razões e, por fim, os números racionais aparecem ao final. Geralmente a cada conteúdo trabalhado não é feita indicação sobre como ele se relaciona com o(s) anterior(es). Muitas vezes são apresentadas definições que simplesmente reduzem um conceito ao outro, como, por exemplo, "razão é fração" ou "fração é divisão".

De qualquer modo, o uso dessas "identificações" não estão erradas, mas, quando apresentadas de uma forma mais direta e mecânica para o aluno, elas podem gerar obstáculos à aprendizagem significativa das várias noções. Diante dessa situação, (DRUCK, 2006) questiona:

> afinal, fração, razão e divisão são realmente nomes distintos para a mesma coisa? Qual a diferença entre número racional e fração? Quais as diferenças entre essas noções, como se inter-relacionam? Por que se justifica o emprego da mesma notação de barra para as quatro? Não conheço nenhum texto que aborde essa problemática explicitamente. Ma parece-me importante refletir sobre essas questões, percebê-las claramente e observar se tais identificações não estão confundindo nosso aluno, bloqueando sua compreensão.

Quando o professor tem essa consciência, sobre as dificuldades citadas acima, isso pode favorecer o desenvolvimento de um trabalho didático mais eficaz para o tratamento desses conceitos em sala de aula. De fato, quando retomamos os exemplos envolvendo frações que foram discutidos anteriormente, ou outros, podemos perceber a presença, implícita ou explícita, de divisões, repartições ou outras formas concretas ou abstratas em que é possível visualizar um pedaço de um todo como uma determinada fração. Então, para (DRUCK, 2006), uma ideia da divisão realmente está ligada ao conceito de fração. Ao repartir duas maçãs para três pessoas, cada uma delas receberá $\dfrac{2}{3}$ de maçã. Ou seja, a quantidade de maçã recebida é o resultado de 2 (maçãs) divididas entre 3 (pessoas), caracterizando um quociente. Dessa maneira, se torna natural identificar que a fração $\dfrac{2}{3}$ (o número que expressa tal quantidade, a quantifica) indique o quociente entre os números 2 e 3. O autor reforça ainda que ”essa ”naturalidade“ só se apresenta em modelos onde temos mais de um todo para ser repartido, mesmo que o resultado não seja uma fração imprópria.“

Exemplo 4.1.4. *Fração como operador: Carla é uma aluna muito estudiosa. No mês de setembro (30 dias) ela passou $\frac{3}{5}$ dos dias estudando. Quantos dias ela passou estudando?*

No exemplo acima, o que se quer saber é “quanto é $\frac{3}{5}$ de 30?”. É comum que alguns professores em sala de aula pensem ser mais prático apresentar ao aluno a maneira mecânica de se resolver, que seria simplesmente multiplicar a fração $\frac{3}{5}$ por 30. Mas será que esse método prático faz sentido para o aluno? Simplesmente memorizar a maneira com que se resolve o problema não garante que o aluno esteja aprendendo. Daí, uma possibilidade de resolução é pensar na fração $\frac{3}{5}$ como parte/todo, ou seja, basta pensar nos 30 dias como cinco partes de 6 dias e aí consideramos três dessas partes, que nos dá dezoito como resultado. Fazendo o cálculo com o produto teríamos $\frac{3}{5} \times 30 = 18$.

Como já citado anteriormente, podemos observar, então, que a proposta é de um ensino gradativo sobre frações. Porém, apesar de a BNCC apresentar as habilidades conforme foi mostrado até aqui, (BENINCÁ, 2020) propões um estudo integrado desse conceito, ou seja, as frações podem ser trabalhadas e desenvolvidas em diversas áreas da Matemática básica como álgebra, geometria, grandezas e medidas, entre outras, e podem ser aplicadas em diversos contextos do cotidiano.

Diante disso, a BNCC nos indica a impotância de ampliar os conhecimentos sobre números para além do conjunto do números Naturais.

> [...] é essencial a ampliação dos conhecimentos dos números naturais e de suas operações, bem como a iniciação no convívio com um novo tipo de número, os racionais positivos. Tais conhecimentos, que devem se iniciar sempre a partir de situações e problemas contextualizados, vão ganhando estrutura para que possam descontextualizados de aplicações especificas e reaplicados em novas situações durante a resolução de problemas (BNCC, 2018, p. 139).

De acordo com o documento, é através do ensino contextualizado que o aluno poderá aprender com mais facilidade o conteúdo trabalhado, pois quando o aluno não compreende os conceitos e aplicações desses conceitos, se torna bem mais difícil compreender o que está sendo ensinado, especialmente se tratando do ensino de frações. (GARCEZ, 2018), destaca que o ensino de fração é sempre desafiador, começando pela compreensão dos números racionais. Além disso, é destacada a importância de que o ensino da Matemática, de um modo geral, e também de frações, seja desenvolvido de forma lúdica, para que, desse modo ele se torne mais compreensível por parte dos alunos. Assim, espera-se que os alunos sejam estimulados a aprender frações na prática, ao contrário de um ensino voltado apenas para decorar regras, em que a aprendizagem pode não se efetivar.

Para (LIMA, 2021), se faz importante a compreensão de frações embasada na contextualização em que o professor consegue perceber a realidade e individualidade de cada aluno no processo da aprendizagem de frações.

A seguir, podemos visualizar as habilidades propostas na BNCC a serem desenvolvidas durante o ensino fundamental, a partir do 4º ano.

ANO	UNIDADE TEMÁTICA	OBJETO DE CONHECIMENTO	HABILIDADE
4º ANO	NÚMEROS	Números racionais: frações unitárias mais usuais (1/2,1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100)	(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
5º ANO	NÚMEROS	Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica	(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
5º ANO	NÚMEROS	Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência	(EF05MA04) Identificar frações equivalentes. (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.

Tabela 1 – Habilidades por ano do EF

5º ANO	NÚMEROS	Cálculo de porcentagens e representação fracionária	(EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
6º ANO	NÚMEROS	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
6º ANO	NÚMEROS	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
6º ANO	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)	(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

Tabela 2 – Continuação - Habilidades por ano do EF

7º ANO	NÚMEROS	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. (EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. (EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. (EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
7º ANO	NÚMEROS	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.
7º ANO	NÚMEROS	úmeros racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.
8º ANO	NÚMEROS	Potenciação e radiciação	(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

Tabela 3 – Continuação - Habilidades por ano do EF

8º ANO	NÚMEROS	Dízimas periódicas: fração geratriz	(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.
9º ANO	NÚMEROS	Potências com expoentes negativos e fracionários	(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

Tabela 4 – Continuação - Habilidades por ano do EF

As operações de adição e subtração vistas já no 6º ano são um grande desafio para professor e aluno. Geralmente os livros didáticos instruem o professor a trabalhar principalmente com o mínimo múltiplo comum (MMC) para desenvolver essas operações, e muitos professores abordam esse método como única alternativa, sendo ele o motivo de grande dificuldade nesta etapa. Quando o professor mostra que as operações de adição e subtração entre frações pode ocorrer de outra maneira como, por exemplo, igualando os denominadores antes de resolver a operação, percebe-se que muitos alunos desenvolvem esta parte do conteúdo com mais facilidade. Por exemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6}.$$

Apesar disso, trabalhar o MMC em sala de aula também é importante, uma vez que, dependendo da quantidade de frações que se está adicionando ou subtraindo, ou até mesmo, dependendo de quem são os denominadores, é bem mais prático resolver utilizando a ideia do mínimo múltiplo comum.

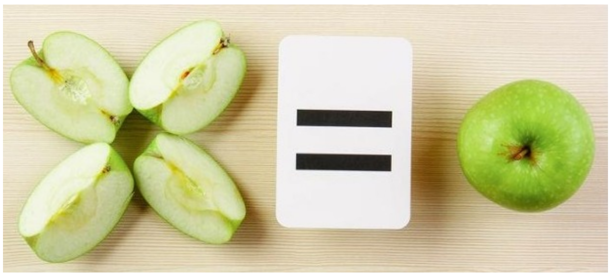
4.2 O ensino de frações

Como já foi citado anteriormente, a notação $\frac{a}{b}$ indica diferentes noções, dependendo da situação dada, podendo representar parte do todo, uma razão, uma divisão, entre outros. Além disso, a palavra "fração" significa "parcela de um todo", "porção" e o verbo "fracionar" significa "dividir o todo em partes", "separar". É provável que o aluno já tenha escutado essa palavra antes de estudar este conteúdo na escola, já trazendo algum significado para ela. Porém, mesmo que isso aconteça, na maior parte das vezes, são significados mais simples, e o professor em sala terá que acrescentar significados a fim de incorporar sentidos mais técnicos da Matemática para ela.

Podemos perceber que uma criança pequena só aprende a falar a palavra "cachorro" ou, só domina seu conceito, quando sua vivência com animais for suficiente para poder diferenciar, por exemplo, um cão de um gato. À medida que sua experiência direta com animais aumenta, a criança consegue aprender informações mais detalhadas sobre eles, diferenciando e identificando as espécies. Da mesma forma, o desenvolvimento da ideia correta de fração se dará no convívio com estratégias utilizadas pelo professor em sala e o contato de forma gradativa com este assunto, tornando o conceito mais significativo para o aluno com o passar do tempo. Ao invés de o estudante preferir a "metade maior" da maçã, ele entenderá de fato o conceito de "metade", a partir de suas experiências e do trabalho com o professor.

Vejamos a seguir uma maneira mais comum de se apresentar a definição de fração para os alunos: Todo "objeto original" que não tenha sido dividido é chamado de inteiro. Quando são feitos cortes neste objeto, é feita uma divisão deste inteiro. Caso a divisão resulte em partes iguais, conseguimos representar as partes deste objeto em forma de fração. A Figura 11 representa uma maçã que foi dividida em quatro partes iguais.

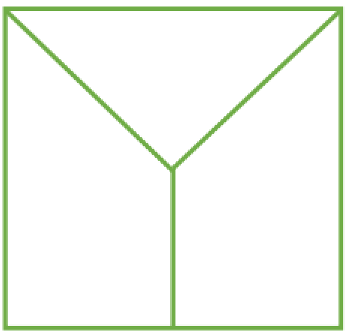
Figura 11 – Maça dividida em quatro partes iguais



Fonte: (MARTINEZ, Marcia Lorena Saurin, 2019)

Agora, vejamos, se dividirmos esse quadrado em três partes, poderemos obter uma fração? Bom, irá depender se as partes resultantes dessa divisão representam o mesmo valor.

Figura 12 – Quadrado dividido em três partes



Fonte: (MARTINEZ, Marcia Lorena Saurin, 2019)

Nesse contexto (MENDES; MENDES, 2016) alerta sobre a forma como frações vem sendo ensinada, atribuindo a isso a responsabilidade em relação ao fracasso dos alunos na compreensão desse conteúdo.

> [...] o ensino tem sido responsabilizado por esse fracasso, principalmente, por se ater a representações de frações na forma de retângulos e círculos

> em textos didáticos que associam aos desenhos a escrita da fração, sem qualquer contexto de significados para a criança (MENDES; MENDES, 2016, p. 2).

Percebemos, então, que se as aulas de Matemática não forem atrativas para os alunos, principalmente se tratando do ensino de frações, eles podem perder o foco e o interesse em aprender, como vemos muitas das vezes. Desse modo, o professor de Matemática é frequentemente desafiado a buscar alternativas pedagógicas que o aprendizado aconteça de maneira satisfatória.

Diante desse contexto, Figueiredo (2018) nos mostra que, mesmo utilizando o exemplo da divisão em partes, existem situações diferentes que podem ser trabalhadas em sala como, por exemplo:

> [..] dividir um chocolate em 3 partes e comer 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 chocolates para 3 pessoas. Outra situação diferente das anteriores é aquela em que a fração é utilizada como comparação entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão (FIGUEIREDO, 2018, p.15).

4.3 Frações equivalentes

Um ponto importante a ser destacado no ensino de frações é a necessidade de entender que há distinção entre, por exemplo, a fração $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$, que pode ser representada como no caso acima ou com o tradicional exemplo do bolo, em que pegar três pedaços de um bolo que foi dividido em quatro partes iguais não é o mesmo que pegar seis pedaços do mesmo bolo que foi dividido em oito partes iguais. A essas frações dizemos que são equivalentes.

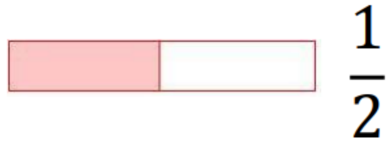
Os alunos geralmente iniciam a compreensão desta parte do conteúdo trabalhando com a visualização e a manipulação de materiais para, posteriormente, pensar no ´´tamanho" das partes e, então, compreender o que são frações equivalentes. Ainda utilizando o bolo como exemplo, utilizamos a fração para representar a forma como dividimos um bolo, de modo que a ideia de número racional é usada para expressar a quantidade de bolo separada.

Em resumo, frações equivalentes são aquelas que, mesmo sendo diferentes, representam o mesmo número racional. Isso significa que elas possuem o mesmo valor.

Para que existam frações equivalentes elas devem pertencer ao mesmo inteiro. Observe as imagens a seguir. O retângulo representa um inteiro.

- Podemos dividir o retângulo ao meio, isto é, em duas partes, e destacarmos 1 dessas partes.

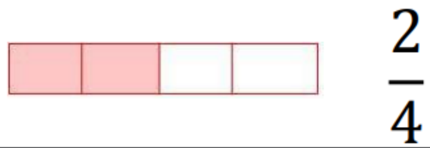
Figura 13 – Fração um meio



Fonte: Próprio autor

- Podemos dividir o mesmo retângulo, representando o inteiro, em 4 partes e destacando 2.

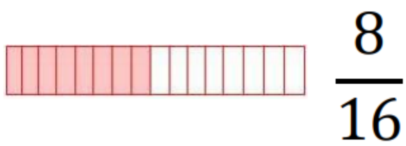
Figura 14 – Fração dois quartos



Fonte: Próprio autor

- Podemos ainda dividir o mesmo retângulo, representando o inteiro, em 16 partes e destacando 8.

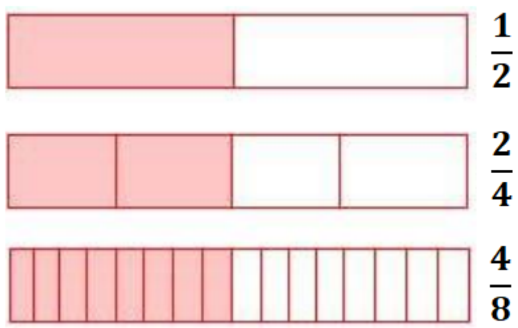
Figura 15 – Fração oito dezesseis avos



Fonte: Próprio autor

As frações que foram representadas acima são chamadas equivalentes, uma vez que, apesar de possuírem representação numérica diferente, expressam quantidades iguais. Nesse caso, essas frações estão sempre representando a metade do inteiro. Veja as frações na forma geométrica e numérica:

Figura 16 – Frações na forma geométrica e numérica



Fonte: Próprio autor

Segundo (Site Smartick, 2018), "a partir de uma certa idade, não é difícil para uma criança convencer-se de que comer uma metade de chocolate em 1, 2, 3 ou 4 pedacinhos redunda em haver comido a mesma quantidade de chocolate, ou seja, em notação fracionária, que:"

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}.$$

Não é interessante induzir o aluno a aprender de forma mecânica uma sequência de frações equivalentes como vemos acima, mas ele precisa entender de fato o significado "concreto destas igualdades". Nesse contexto, é de extrema importância que o professor trabalhe com a desigualdade entre frações, uma vez que aí se torna mais clara a necessidade da utilização da ideia de frações equivalentes.

Para uma melhor contextualização e aplicação desse conceito, observe o problema a seguir:

Suponha que temos 2 melancias para dividir, de forma igual, para 3 alunos. De repente, chegam mais 6 alunos. Quantas melancias devemos obter para que todos os alunos recebam a mesma quantidade de melancias do caso inicial quando tinham 2 melancias para três alunos?

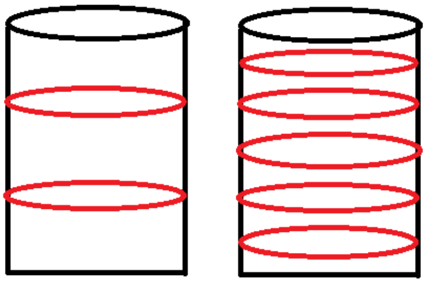
Primeiro, observe que a fração que representa a quantidade de melancia que cada aluno teria inicialmente é $\frac{2}{3}$, uma vez que são duas melancias divididas para três pessoas. Chegando mais seis alunos, teremos nove alunos ao todo. Queremos que cada um desses nove alunos continue recebendo $\frac{2}{3}$ de melancia. Diante disso, o professor levará o aluno a entender que, se a quantidade de alunos triplicou, a quantidade de melancias deverá também triplicar para que se mantenha a mesma quantidade para cada um. Logo, serão necessárias 6 melancias, que é o mesmo que afirmar que as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{6}{9}$ são equivalentes, pois,

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}.$$

Então, respondendo a pergunta do problema, seriam necessárias mais 4 melancias para que se mantenha a quantidade inicial para cada alunos.

Para finalizar esse tópico relacionado a frações equivalentes gostaria de compartilhar uma experiência que tive a oportunidade de desenvolver com meus alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Sabendo da dificuldade que os alunos enfrentam, pensei em uma maneira diversificada de abordar essa parte do conteúdo com os alunos. Já tinha apresentado a fração, alguns conceitos iniciais e agora falaria de frações equivalentes. Apresentei a ideia principal, como sendo frações que possuem o mesmo valor. Então, fizemos uma experiência. Levei dois copos transparentes iguais para a sala de aula e dividi um em três partes iguais e outro em seis partes iguais, utilizando uma fita colorida, como podemos observar abaixo.

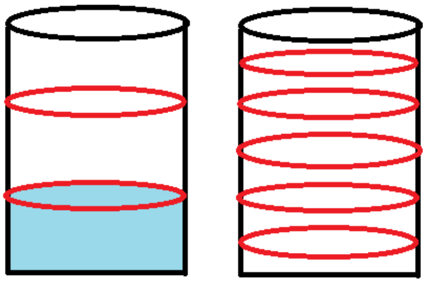
Figura 17 – Experimento das frações equivalentes (1)



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Em seguida, coloquei água colorida no copo da esquerda, enchendo apenas até uma parte marcada. Como a seguir.

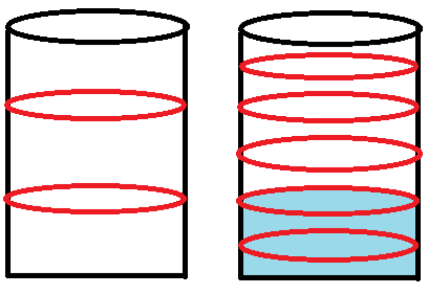
Figura 18 – Experimento das frações equivalentes (2)



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Perguntei aos alunos qual a fração que representa a quantidade de água do copo e eles responderam corretamente $\frac{1}{3}$. Em seguida, despejei a água do primeiro copo no segundo, obtendo o seguinte resultado.

Figura 19 – Experimento das frações equivalentes (3)



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Então, perguntei qual a fração que representa a quantidade de água no segundo copo e eles responderam corretamente $\frac{2}{6}$. Então questionei os estudantes: mas não é a mesma quantidade de água? Porque as frações são diferentes? As respostas foram diversas, mas no fim, concordaram que a diferença estava na quantidade de partes em que cada copo foi dividido, uma vez que o valor representado (quantidade de água no copo) era o mesmo. Dessa forma, pude concluir junto com a turma que as frações são equivalentes.

Pude observar o envolvimento dos alunos e como conseguiram compreender esse conceito tão simples, porém de grande importância, uma vez que é através dele que, por exemplo, conseguimos desenvolver as ideias da comparação de frações e também das operações entre frações.

Por fim, é interessante que o aluno observe, através dos exemplos que, para encontrar uma fração equivalente a outra basta multiplicar numerador e denominador pelo mesmo número inteiro. Por exemplo, como vimos acima, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ são equivalentes e $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$. Da mesma forma, podemos destacar algumas outras frações equivalentes a $\frac{1}{3}$, veja:

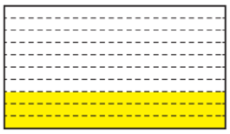
- $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{9}$
- $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{4} = \frac{4}{12}$
- $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{15}$

Sugiro a atividade a seguir como uma tarefa interessante a ser realizada com os alunos nessa etapa. O professor pode dividir a turma em grupos e irá distribuir folhas de papel ofício.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE SOBRE FRAÇÕES EQUIVALENTES

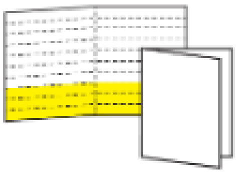
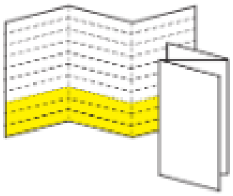
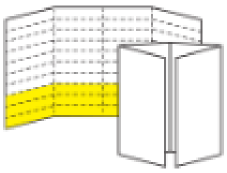
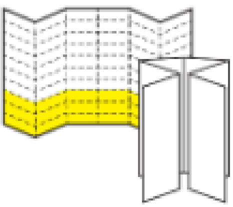
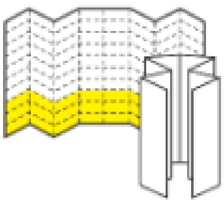
Junte-se a seus colegas e dobrem o retângulo da página de reprodução como indicadona coluna mais à esquerda da tabela. Observando as dobras feitas, responda às questões propostas, preenchendo a tabela. Divida o trabalho em sua equipe: cada membro pode ficar encarregado de uma ou mais linhas da tabela. Lembre-se: as dobraduras devem ser feitas perpendicularmente às várias linhas desenhadas no retângulo da página de reprodução.

Figura 20 – Atividade sobre frações equivalentes (1)

Como dobrar	Quantidade de retângulos pintados	Quantidade total de retângulos	Fração do retângulo do encarte que está pintada
	3	10	$\frac{3}{10}$

Fonte: (RIPOLL et al., 2017)

Figura 21 – Atividade sobre frações equivalentes (2)

Como dobrar	Quantidade de retângulos pintados	Quantidade total de retângulos	Fração do retângulo do encarte que está pintada
			
			
			
			
			

Fonte: (RIPOLL et al., 2017)

Na atividade 2, a folha foi divida inicialmente em dez retângulos iguais, dos quais três deles foram pintados de amarelo. Ao realizar a primeira dobra, cada retângulo inicial ficou dividido ao meio, inclusive os pintados de amarelo. Assim, tanto para cobrir a área da região pintada de amarelo como para cobrir a área da folha será necessário o dobro da quantidade inicial:

Área da folha=área de 10 retângulos=área de 20 "retângulos divididos ao meio"; Área da região pintada=área de 3 retângulos=área de 6 "retângulos divididos ao meio". Assim pode-se dizer que a área da região pintada de amarelo é $\frac{3}{10}$ ou $\frac{6}{20}$ da área da folha. De onde se conclui que estas frações representam a mesma quantidade: a área da região pintada de amarelo tendo a área da folha como unidade. Por isso escrevemos

$$\frac{3}{10} = \frac{6}{20} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 10}$$

onde 2 é o número de partes em que você dobrou a folha. Ora, quando você dobrou a folha em três partes iguais, cada retângulo inicial ficou dividido em três partes, inclusive os pintados de amarelo. Assim, tanto para cobrir a área da região pintada de amarelo como para cobrir a área da folha será necessário o triplo da quantidade inicial: Área da folha=área de 10 retângulos=área de 30 "retângulos divididos em três partes"; Área da região pintada=área de 3 retângulos=área de 9 "retângulos divididos em três partes". De onde se conclui que as frações $\frac{3}{10}$ e $\frac{9}{30}$ representam a mesma quantidade: a área da região pintada de amarelo tendo a área da folha como unidade. Por isso escrevemos

$$\frac{3}{10} = \frac{9}{30} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 10}$$

onde 3 é o número de partes em que você dobrou a folha. Do mesmo modo, ao dobrar a folha em quatro, seis ou oito partes iguais, você obteve outras representações equivalentes para a fração $\frac{3}{10}$:

- ao dobrar em quatro partes iguais: $\frac{3}{10} = \frac{12}{40} = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 10}$; em que 4 é o número de partes em que você dobrou a folha;
- ao dobrar em seis partes iguais: $\frac{3}{10} = \frac{18}{60} = \frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 10}$; em que 6 é o número departes em que você dobrou a folha;
- ao dobrar em oito partes iguais: $\frac{3}{10} = \frac{24}{80} = \frac{8 \cdot 3}{8 \cdot 10}$; em que 8 é o número departes em que você dobrou a folha.

Assim, generalizando o processo de "dobrar" a folha, tem-se que, ao "dobrar"a folha em n partes iguais:

$$\frac{3}{10} = \frac{n \cdot 3}{n \cdot 10},\text{onde } n \text{ é o número de partes em que você dobrou a folha.}$$

Fonte: (RIPOLL et al., 2017)

4.4 Comparação de frações

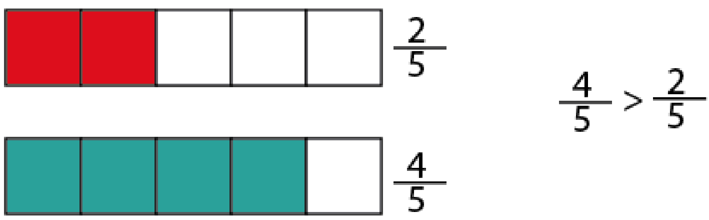
Alguns estudos apontam estratégias informais utilizadas pelos alunos para comparar frações, que provavelmente não foram especificamente ensinadas. Uma dessas estratégias é o que se chama de *pensamento residual* que para (POST; BEHR; LESH, 1986), se trata de encontrar a quantidade necessária para se construir o todo. Vejamos, por exemplo, a comparação entre $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$. O aluno pode observar que, na primeira fração, para se alcançar o todo falta $\frac{1}{8}$ e na segunda fração falta $\frac{1}{6}$. Sendo assim, como falta mais na segunda fração, tem-se $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$. É claro que, neste momento, o aluno já deve saber comparar frações de numerador 1. Reforçaremos essa questão mais adiante.

Uma outra estratégia que os mesmos autores citam é a utilização de *pontos de referência*, que se trata de comparar duas frações envolvendo uma terceira como referência. Geralmente se trata de $\frac{1}{2}$ ou, às vezes, 1. Por exemplo, ao utilizar essa estratégia um aluno diria que $\frac{5}{8}$ é maior que $\frac{3}{7}$, uma vez que ele observa que a primeira fração é maior que a metade e a segunda já é menor que a metade.

Outra estratégia ainda, citada pelos autores é o *pensamento diferencial*. Nesse modo de analisar frações, o aluno diria, por exemplo, que $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$ são equivalentes, pois as duas precisam de apenas uma parte para formar o todo. Dessa forma, eles comparam apenas numerador com denominador, ou seja, observam a diferença entre 5 e 6 e entre 7 e 8, que é de uma unidade, sem considerar o tamanho real da fração. Esta maneira de pensar reflete muito no trabalho que é feito com números naturais, mas que não pode ser replicado da mesma forma no trabalho com números racionais. Portanto, alunos que tem este tipo de pensamento, geralmente são conduzidos a resultados incorretos.

Geralmente, comparar frações com mesmo denominador não é tão complexo para o aluno, ainda mais quando o professor utiliza figuras para tal finalidade. Veja a imagem abaixo.

Figura 22 – Frações com mesmo denominador



Fonte: (Site Matemática na Web, 2022)

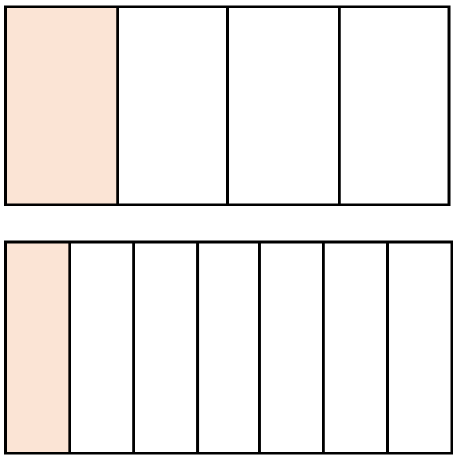
De um modo geral, quando o professor apresenta esta imagem para o aluno, fica claro que, ao dividir um retângulo em cinco partes iguais e considerar duas delas, estamos nos referindo a uma quantidade menor do que dividir este mesmo retângulo nas mesmas cinco partes iguais, porém considerando quatro delas.

O desafio maior acontece quando queremos comparar frações com denominadores diferentes. Vamos começar com um caso simples em que os numeradores são iguais. Tomemos o numerador 1 e as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{7}$.

Então, podemos perceber com mais facilidade que:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{7}.$$

Figura 23 – Frações com mesmo numerador



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

De fato, na fração $\frac{1}{4}$ temos a unidade dividida em quatro partes e estamos considerando uma delas. Já na fração $\frac{1}{7}$ temos a unidade dividida em sete parte e também estamos considerando uma delas, porém, as partes dessa última fração são menores, logo, vale a desigualdade apresentada acima.

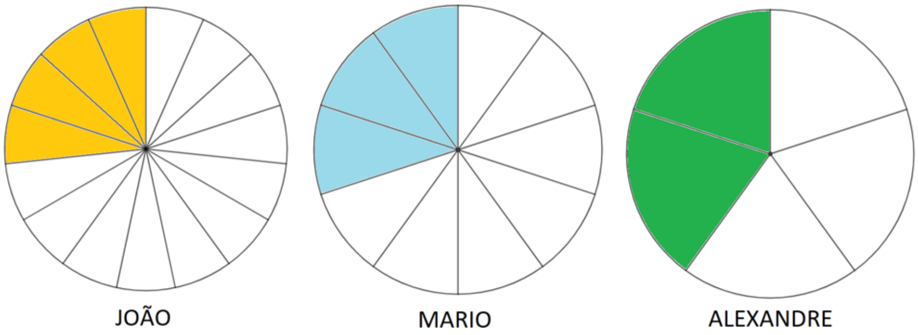
Agora, e se os numeradores também forem diferentes? Vejamos o problema abaixo:

Exemplo 4.4.1. *Dona Maria fez um bolo. João comeu $\frac{4}{15}$, Mário comeu $\frac{3}{10}$ e Alexandre comeu $\frac{2}{5}$ do mesmo bolo. Quem comeu mais bolo?*

Parece intuitivo ensinar a técnica de redução ao mesmo denominador para comparar frações, porém, fornecer essa regra de imediato pode retirar do aluno a motivação para criar estratégias de resolução. Quando o professor incentiva o aluno a refletir sobre uma possível forma de resolução, ele terá a oportunidade de compreender de fato a ideia que existe por trás da técnica ensinada.

Primeiro, vejamos a imagem que representa essa divisão.

Figura 24 – Divisão do bolo - João, Mario e Alexandre

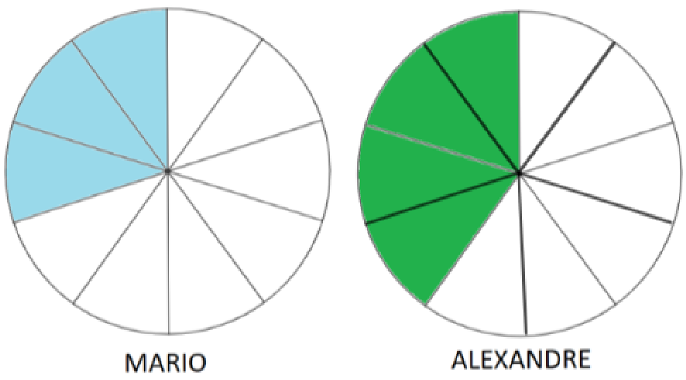


Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Podemos imaginar o seguinte diálogo entre alunos que tenham domínio do conteúdo de frações.

A1 – Alexandre comeu 2 pedaços, Mário 3 e João 4. Então João comeu mais!
A2 – É, mas os pedaços do João eram menores de todos já que para ele o bolo foi dividido em 15 partes, para Mário em 10 e para Alexandre só em 5 partes! Precisa ver como ficam os tamanhos dos pedaços.
A3 – Cada pedaço do Alexandre vale por 2 de Mário!
A1 – Por que? Como?
A3 – Ora, como é que se consegue 10 pedaços de bolo se antes o bolo já foi dividido em 5 pedaços?
A1 – É,..., é só cortar cada um dos 5 pedaços ao meio. E aí ..., é mesmo!! O pedaço do Alexandre vale por 2 do Mário!

Figura 25 – Pedaços de bolo de Mario e Alexandre

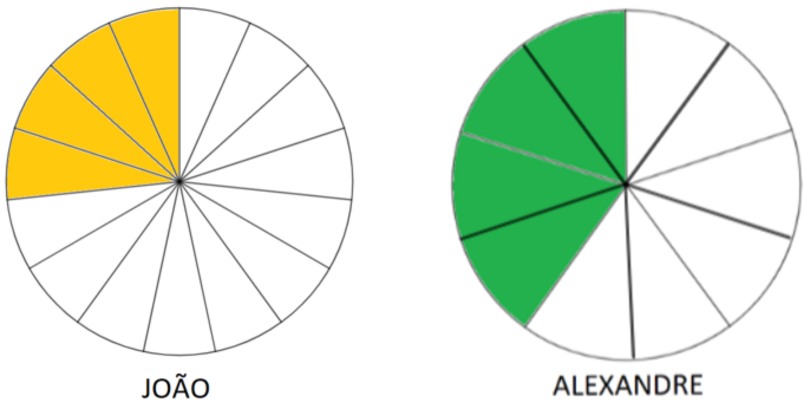


Fonte: Produção do próprio autor (2023)

A2 - Então, se o bolo que se refere a Alexandre tiver os pedaços cortados ao meio, tendo 10 pedaços no total, ele comeria 04 desses pedaços ao invés de 02.
A3 - Daí, vemos que $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, pois as duas frações são equivalentes e já sabemos então que $\frac{2}{5} > \frac{3}{10}$, ou seja, Alexandre comeu mais bolo que Mario.
A1 - Mas e João? Ele também comeu quatro pedaços.
A2 - É, mas foram 04 pedaços de um bolo que foi dividido em 15. Os pedaços são menores, como já falamos. Lembra que $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$? E como $\frac{4}{10} = \frac{4}{15}$, Então Alexandre também comeu mais bolo que João.

Fonte: Diálogo adaptado de (Site Smartick, 2018)

Figura 26 – Pedaços de bolo de João e Alexandre



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Por fim, com as análises e possíveis questionamentos do professor, os alunos podem concluir que Alexandre foi o que comeu a maior parte do bolo.

É perceptível que vale a pena promover estes momentos iniciais antes de mostrar ao aluno o método de resolução mais direto, pois assim os discentes estarão de fato se apropriando e colocando em funcionamento conceitos significativos para uma real compreensão das frações e definições.

É claro que o aluno não vai dominar por completo a ideia de fração e pode acontecer de alguns deles não conseguirem chegar as conclusões acima de maneira intuitiva, mas a partir daí o aluno poderá entender que a ideia de comparar frações está totalmente ligada ao conceito de equivalência.

Por fim, após o professor em sala de aula realizar estas análises com seus alunos, (ORTON et al., 1995) indica que, como citado anteriormente, uma boa estratégia para comparar frações é encontrar frações equivalente com denominadores comuns. Por exemplo, se quisermos comparar $\dfrac{2}{5}$ e $\dfrac{7}{9}$, podemos encontrar frações equivalentes a estas com denominador 45, que são $\dfrac{18}{45}$ e $\dfrac{35}{45}$, respectivamente. Daí, pode-se verificar de forma clara que $\dfrac{7}{9}$ é maior.

(QUARESMA, 2010) ainda reforça que uma outra maneira em que é possível comparar frações é através da comparação da sua representação decimal. Associada a este método, pode-se citar a representação das frações na reta numérica.

4.5 Operações entre frações

Agora, nos deparamos com o fato de que as quatro operações fundamentais são ferramentas muito importantes para resolver problemas, inclusive, envolvendo frações. Porém, é preciso deixar claro para o aluno as ideias que cada operação envolve e em quais situações são aplicadas cada uma delas. Vamos abaixo relembrar em quais contextos são trabalhadas cada operação, porém em $\mathbb{N}$.

- **Adição:** Juntar ou acrescentar.
- **Subtração:** Retirar, completar ou comparar.
- **Multiplicação:** Formar quantidades correspondentes à adição de parcelas iguais ou ao número de combinações entre objetos de conjuntos finitos distintos.
- **Divisão:** Repartir de forma equitativa ou medir o dividendo usando o divisor como padrão de medida.

Mas quais dessas ideias fazem sentido no universo das frações? Vamos analisar cada uma delas.

A ideia de **adição e subtração** se mantém, pois tem utilização em situações parecidas, tanto trabalhando com números naturais como com números fracionários. Por esse motivo, os alunos não costumam ter muita dificuldade em compreender o significado da adição e subtração em situações problema envolvendo frações. Mesmo se tratando de "pedaços" (de tecidos, pizza, etc.) é fácil entender que juntar ou acrescentar pedaços/partes está ligado a ideia da adição. Além disso, o discente geralmente também compreende de modo satisfatório que retirar um pedaço de outro ou querer saber "que pedaço faltaria para completar outro", ou até mesmo, questionar a respeito do tamanho do pedacinho que se refere à diferença entre dois outros pedaços (e, portanto comparar).

Desse modo, percebe-se que, no trabalho com essas duas operações, a dificuldade maior encontrada pelos alunos não está no conceito ou a ideia envolvendo adição e subtração, pois esses conceitos se mantém. Porém, o desafio maior está na parte técnica. Apesar disso, se os alunos tem certo domínio no trabalho com frações equivalentes, eles serão capazes de desenvolver técnicas que o ajudarão a resolver os problemas que envolvem essas duas operações entre frações.

Assim como já foi falado anteriormente, a introdução do método mais prático e direto, com técnicas de resolução para resolver as operações, pode dificultar mais o processo de aprendizagem, pois é importante que o próprio aluno possa tentar desenvolver uma maneira de solucionar a situação. Segundo (DRUCK, 2006),

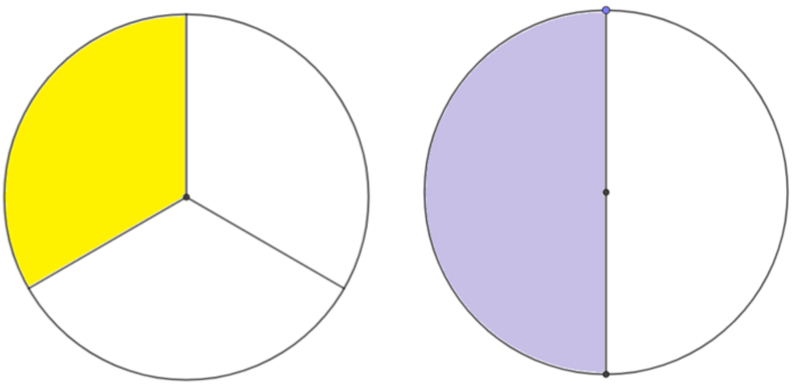
> Um aluno que tenha incorporado o significado do denominador, não terá dúvidas sobre o resultado da adição ou subtração de frações com um mesmo denominador. Os exemplos falam por si só. "Se a dois quintos junto mais um quinto, é claro que fico com três quintos – os pedaços são todos do mesmo tamanho, têm inclusive o mesmo 'nome', é só contar com quantos pedaços fico ao final da operação". O mesmo ocorre com a subtração de rações com o mesmo denominador.

Realizar a operação com mesmos denominadores é mais fácil para os alunos. A questão é um pouco mais difícil quando os denominadores são diferentes. Veja o exemplo abaixo:

Maria e Joana compraram uma pizza. Maria comeu $\frac{1}{3}$ *da pizza e Joana comeu* $\frac{1}{2}$*. Quanto da pizza elas comeram no total? Quanto da pizza Joana comeu a mais que Maria?*

Observe que a primeira pergunta está claramente relacionada a ideia de adição e a segunda pergunta a ideia de subtração. Inicialmente, o aluno pode observar como a pizza está sendo divida em cada caso. Veja:

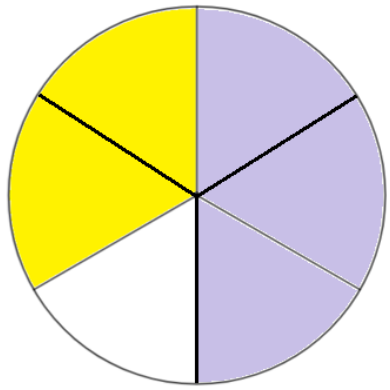
Figura 27 – Pizza - Maria e Joana (1)



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Assim como já foi feito na seção anterior, é interessante redividir a pizza para que possa ser feita uma análise melhor.

Figura 28 – Pizza - Maria e Joana (2)



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Veja que a adição já pode ser feita apenas com a estratégia utilizada e com esta imagem o estudante pode concluir que $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$. Sendo assim, Maria e Joana comeram juntas $\frac{5}{6}$ da pizza.

Aproveitando esta última imagem conclui-se também que Joana comeu $\frac{1}{6}$ a mais de pizza que Maria, pois $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$. Observe que, desse modo estamos reforçando a ideia da equivalência de frações e o significado da adição e subtração.

Para finalizar o trabalho com adição e subtração de frações, podemos mostrar ao aluno que, uma outra forma de trabalhar com frações com denominadores diferentes é obtendo frações equivalentes às originais, encontrando especificamente frações equivalentes com mesmo denominador. Retomemos o exemplo da pizza. Para saber quanto Maria e Joana comeram no total teremos que realizar a adição das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$. Vejamos algumas frações equivalentes a cada fração.

- $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$
- $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$

Veja que as frações $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{6}$, equivalentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ respectivamente) possuem o mesmo denominador. Dessa forma fica mais simples realizar a adição, pois:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

que é o mesmo resultado encontrado anteriormente. Generalizando esse resultado, podemos observar que, tomando a, b, c e d números inteiros com b e d diferentes de zero, temos:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$$

em que $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$ e $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$.

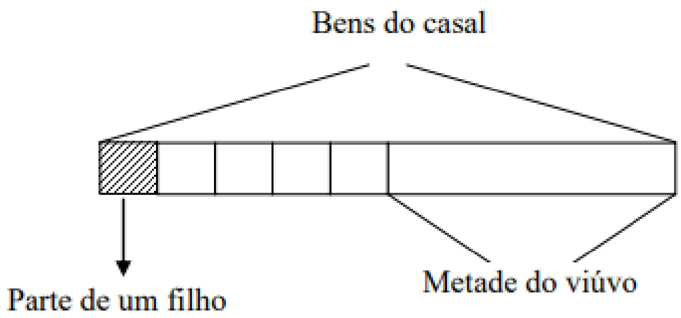
Continuando o trabalho com as operações, iremos observar que ideia de **multiplicação e divisão** não se mantém. O significado que os alunos trazem dessas operações, dependendo do contexto, pode não ter o mesmo sentido. O que seria o valor da soma de $\frac{7}{9}$ consigo próprio $\frac{2}{3}$ de vezes? Ou ainda, o que seria repartir $\frac{1}{2}$ banana por $\frac{1}{3}$ de pessoas? Nesses casos faz-se necessário atribuir significados para as operações de multiplicação e divisão entre frações.

A partir de agora o aluno deve entender que multiplicar frações é procurar uma fração de outra fração (uma parte de um pedaço). Essa ideia deve ser colocada de maneira clara inicialmente aos discentes por meio da observação e discussão de exemplos como vemos a seguir.

Se um casal tem 5 filhos, quando ocorre o falecimento de um dos cônjuges, cada filho receberá a quinta parte da metade dos bens do casal como herança, ou seja, $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ dos bens.

Vejamos graficamente que parte cabe a cada filho:

Figura 29 – Representação da divisão de bens



Fonte:(Site Matemática na Web, 2022)

A partir da observação da imagem verificamos que, se primeiro dividimos o retângulo maior (que representa o total de bens) ao meio e depois dividimos metade desses bens em cinco partes, considerando uma delas, estamos, na verdade, nos referindo a $\frac{1}{10}$ do total de bens, que é o mesmo resultado da multiplicação $\frac{1}{2}.\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$.

Por fim, o aluno pode observar que para realizar a multiplicação entre as frações, basta multiplicar numeradores e denominadores de cada fração. Apesar de ter esse método prático para realização de tal operação, permitir que o aluno tenha essa experiência de observar e chegar a própria conclusão, fará com que tal multiplicação entre frações faça sentido para.

Após compreender a importância de encontrar *fração de fração*, porque chamar esse processo de *multiplicação de frações*? (DRUCK, 2006) destaca que a preposição ´´de" aparece em vários problemas típicos que envolvam adição de parcelas iguais. Observemos alguns exemplos.

1. Comprei 3 pacotes de $\frac{1}{2}$kg de café no supermercado. Quanto de café comprei?

Nesse caso podemos pensar que fiquei com $\frac{1}{2}$kg somados em 3 parcelas que da um total de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

2. Comprei 3 pacotes de 5kg de açúcar. Qual o total de açúcar que comprei?

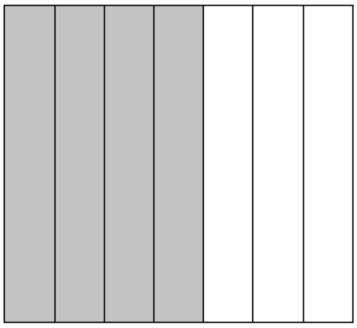
Nesse caso também é possível afirmar: fiquei com 3 pacotes ´´de" 5kg, ou seja, $5kg + 5kg + 5kg = 15kg$.

Nos dois casos, envolvendo números naturais, podemos atribuir o dignificado da preposição ´´de" a soma de parcelas iguais (o que não é tão intuitivo quando trabalhamos com multiplicação de frações que não representam inteiros, como já foi discutido acima). Logo, essa preposição, remete a operação de multiplicação. Porém, é preciso ter cautela ao apresentar essas ideias para o aluno, pois a introdução precipitada de métodos, antes mesmo que os alunos tenham a oportunidade de desenvolver experiências pessoais para resolver problemas pode trazer dificuldades na aprendizagem significativa. Como o aluno chega aos anos finais com a notação de multiplicação usual, associadas a números naturais, carregada de conceitos, uma barreira pode se formar à compreensão da ampliação do seu uso em outros contextos, fazendo com que o caminho para a ampliação desse conceito seja voltado para a mera memorização de regras sem sentido.

Daí, é importante destacar que o procedimento visto anteriormente, para multiplicar frações, é o mesmo para o produto envolvendo número fracionário e natural, por exemplo. Multiplicar $4.\frac{2}{5}$ é o mesmo que multiplicar $\frac{4}{1}.\frac{2}{5} = \frac{8}{5}$, pois o número natural 4 pode ser representado como fração por $\frac{4}{1}$.

Agora, vamos encontrar a fração que representa $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{7}$. Primeiro, podemos representar a fração $\frac{4}{7}$ na imagem a seguir.

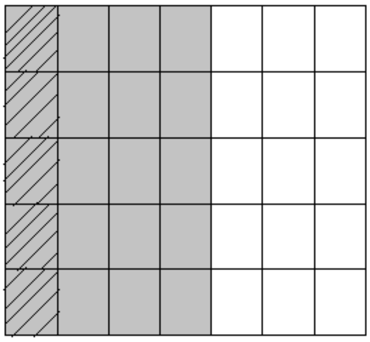
Figura 30 – Fração $\dfrac{4}{7}$



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Como queremos $\dfrac{1}{5}$ dessa parte, podemos dividir cada fatia em cinco partes e considerar uma de cada uma delas. Veja:

Figura 31 – Fração $\dfrac{1}{5}$ de $\dfrac{4}{7}$



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Antes de dar prosseguimento, é válido destacar que, tomando m um número inteiro e n um número inteiro diferente de zero, temos:

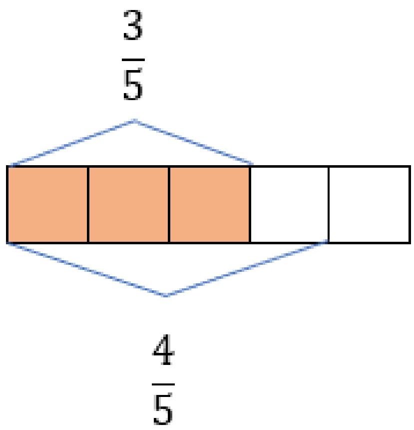
$$\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} (\text{somatório de } m \text{ fatores de } \frac{1}{n})$$

Agora abordaremos brevemente a ideia de divisão de frações. Assim como nas outras operações que discutimos até aqui é interessante fazer com que o aluno entenda o processo ao invés de decorar o método como ´´inverte e multiplica". Existem possibilidades de que o aluno consiga encontrar caminhos para resolver as divisões sem que precisem decorar resoluções de maneira mecânica, desde que o professor saiba conduzir e orientar da melhor forma. Veja o exemplo abaixo.

1) Quanto, ou que fração $\dfrac{4}{5}$ *cabe em* $\dfrac{3}{5}$ *(de algo)?*

Observe que essa pergunta nos indica a procurar, em outras palavras, medir $\frac{3}{5}$ (de um todo inicial) utilizando $\frac{4}{5}$ (do mesmo todo) como unidade de medida.

Figura 32 – Fração $\frac{4}{5}$



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Agora, esse novo "todo" (fração $\frac{4}{5}$) já está dividido em quatro partes iguais e somente três dessas partes serão consideradas pela fração $\frac{3}{5}$. Então, são três pedaços (cada pedaço medindo $\frac{1}{5}$ do todo inicial) entre quatro iguais que representam a parte de $\frac{4}{5}$ que cabem em $\frac{3}{5}$. Logo, temos que $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ cabem em $\frac{3}{5}$.

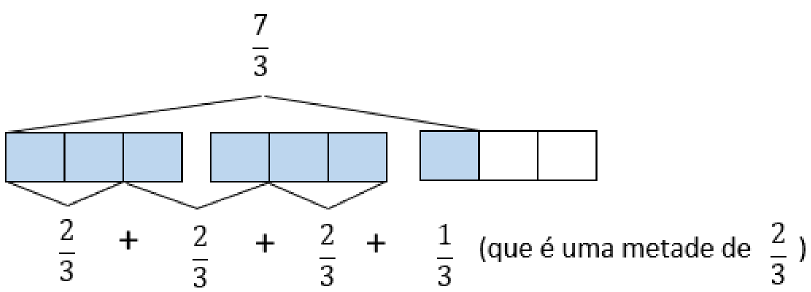
Traduzindo para a linguagem Matemática, obtemos a igualdade:

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{4}.$$

Vejamos mais um exemplo.

2) Quanto ou que fração de $\frac{2}{3}$ *cabe em* $\frac{7}{3}$*?*

Figura 33 – Fração $\frac{7}{3}$



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

Podemos observar na figura que cabem três pedaços de $\frac{2}{3}$ e mais $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ em $\frac{7}{3}$ (que é o todo inicial). Como $3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, concluímos que cabem $\frac{7}{2}$ de $\frac{2}{3}$ em $\frac{7}{3}$. Ou, em termos matemáticos, temos:

$$\frac{7}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{7}{2}.$$

Com esses dois exemplos o aluno pode notar que nas frações resultantes temos o numerador como sendo o numerador do dividendo e o denominador como sendo o numerador do divisor. Mas isso não é coincidência. (DRUCK, 2006) explica que

> O elemento comum no dois problemas é que estamos procurando o quociente entre duas frações com o mesmo denominador. Um denominador comum significa que o todo inicial (ao qual se referem as duas frações do problema) foi dividido em pedaços de mesma medida. Ora, se todos os pedaços são equivalentes e o divisor representa a nova unidade de medida (ou o novo todo) do problema, o número de partes em que ele está dividido será o denominador da resposta, pelo próprio conceito de fração como relação parte x todo. Já o dividendo representa o total a ser recoberto pela nova unidade, ou seja, o número de partes que devo tomar da mesma unidade (dividida em partes iguais) e, portanto, o numerador da resposta.

O autor ainda orienta que se resolva muitos exemplos como esse utilizando material concreto e figuras, inicialmente realizando a divisão entre frações com mesmo denominador. Desse modo, quando o aluno compreender esta ideia, conseguirá resolver problemas desse tipo de um modo geral, uma vez que pode-se trabalhar com frações equivalentes e reduzi-las a um denominador comum. Veja a divisão abaixo.

$$\frac{1}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{12} \div \frac{8}{12} = \frac{3}{8}.$$

É interessante observar que o trabalho com frações equivalentes nos auxilia em diversas situações e agora, mais uma vez, facilita o trabalho envolvendo a divisão de frações. Fazer com que o aluno "decore" a técnica de inverter e multiplicar depende de um raciocínio que exige mais conhecimentos envolvendo elementos inversos e o elemento neutro da multiplicação. Esse método pode ser passado para os estudantes, o que geralmente é orientado nos livros didáticos, porém, após o aluno fazer suas observações e tentativas utilizando elementos mais significativos.

5 Jogos no ensino de Frações

Para que o professor, diante das dificuldades existentes no ensino-aprendizagem de Matemática, possa atender as necessidades dos alunos é necessário trabalhar com propostas didáticas e metodologias que ajudem o professor em sala de aula, como também os alunos no desenvolvimento do seu conhecimento matemático. Para (AGRANIONIH; SMANIOTTO, 2002), o jogo matemático é

> uma atividade lúdica e educativa, intencionalmente planejada, com objetivos claros, sujeita a regras construídas coletivamente, que oportuniza a interação com os conhecimentos e os conceitos matemáticos, social e culturalmente produzidos, o estabelecimento de relações lógicas e numéricas e a habilidade de construir estratégias para a resolução de problemas.

A aprendizagem de números racionais, deve ser feita utilizando conhecimentos prévios dos alunos, utilizando imagens concretas e materiais manipuláveis. De acordo com (BEHR et al., 1984), estudos realizados por eles indicam que quando os alunos utilizam materiais manipuláveis como auxílio na aprendizagem dos números racionais e seus conceitos, percebeu-se que é possível desenvolver de maneira mais fácil um pensamento sobre as frações baseado em imagens internas. Por exemplo, diante destas imagens mentais internas, os alunos se mostram capazes de tomar decisões sobre questões de ordem com sucesso. Em seus estudos relatam que ao final de uma unidade de ensino trabalhado com materiais manipuláveis foi solicitado a uma aluna que comparasse $\frac{6}{8}$ e $\frac{3}{5}$ e ela respondeu que seis oitavos era maior porque ao olhar para a fração temos seis partes pintadas e sobram duas partes sem pintar. Em relação a fração $\frac{3}{5}$, cada parte em que é dividida é maior do que as partes da fração anterior e também sobram duas partes, assim como na fração $\frac{6}{8}$, mas cada uma delas é maior do que as partes divididas da fração anterior, e por isso $\frac{3}{5}$ é a fração menor.

Utilizar jogos durante as aulas pode ser uma metodologia eficaz e motivadora do ensino-aprendizagem da Matemática, pois com sua aplicação os alunos podem obter grande avanço na percepção e concentração, o que pode acarretar num desenvolvimento de conteúdos como operações, números, quantidade, força, localização, discriminação e velocidade, além de trabalhar o respeito as exigências das normas e dos controles. Segundo (FOGUESATTO; DUARTE, 2022), os jogos podem levar os alunos a refletir sobre o conteúdo em diferentes contextos de frações como os significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais.

Porém, segundo o (BRASIL, 1998, p. 212), o jogo aplicado em sala de aula sem planejamento ou objetivos definidos pode não trazer o retorno desejado.

> O jogo pode tronar-se uma estratégia didática quando as situações são planejadas e orientadas pelo adulto visando a uma finalidade de aprendizagem, isto é, proporcionar à criança algum tipo de conhecimento, alguma relação ou atitude. Para que isso ocorra, é necessário haver uma intencionalidade educativa, o que implica planejamento e previsão de etapas pelo professor para alcançar objetivos predeterminados e extrair do jogo atividades que lhe serão decorrentes.

O jogo permite ao aluno enfrentar novos desafios e conhecer seus limites. A Matemática, quando trabalhada utilizando jogos, é apresentada de forma dinâmica e faz com que os alunos, em sua maioria, tenham mais motivação para aprender os conteúdos trabalhados pelo professor. Desse modo, a aprendizagem se torna interativa, diminuindo as dificuldades que existem no contexto do ensino de Matemática, em especial sobre o conteúdo de frações.

De acordo com (BEZERRA; MAGINA; SPINILLO, 2009, p. 415):

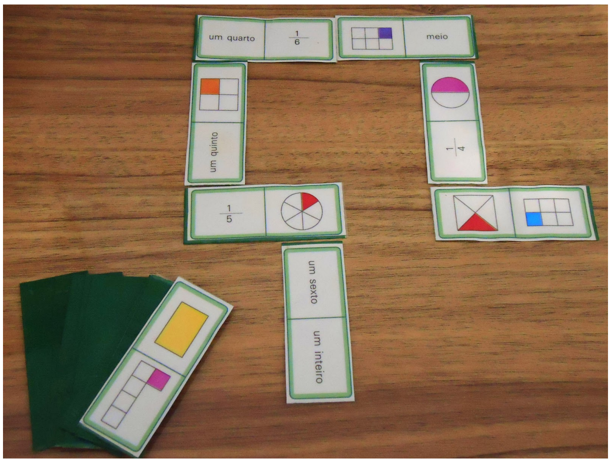
> Algumas causas das dificuldades das crianças com frações residem na complexibilidade inerente a esse conceito e na abordagem aplicadas ao ensino desse conteúdo na escola. Parece haver, então, a necessidade de se explorar formasalternativas de ensino que considerem uma visão mais ampla da fração (tanto em termos de representação como de significação), que encorajem o aluno a adotar seu conhecimento informal sobre frações e que auxiliem na superação das dificuldades encontradas em relação conceito (BEZERRA; MAGINA; SPINILLO, 2009, p. 415).

Na atividade lúdica a importância maior se da para a forma com que o desenvolvimento da aula acontece, com o intuito de que os alunos adquiram o conhecimento com as mais diversas maneiras, e que, através desse trabalho diferenciado, quando o aluno observar alguma questão fracionária, que ele possa observar e compreender o processo de resolução do problema apresentado. De um modo geral, a ludicidade propõe um conceito onde a aula acontece de forma dinâmica, ressignificando o contexto no processo de ensino e aprendizagem.

5.1 Dominó das frações

O jogo de dominó original é muito conhecido por todos. Além disso, a maioria dos estudantes conhece esse jogo e suas regras. Ao trazer para a sala de aula como uma ferramenta para ensinar Matemática, o professor consegue trabalhar com algo que possivelmente o aluno já conhece e adaptar algumas questões como, por exemplo, ao invés da quantidade de bolinhas em cada quina é possível trabalhar com frações, suas representações através de imagens, frações equivalentes, entre outros. O aluno deve encaixar as quinas que se complementam.

Figura 34 – Dominó das frações



Fonte: (Site Jogos Significativos, 2013)

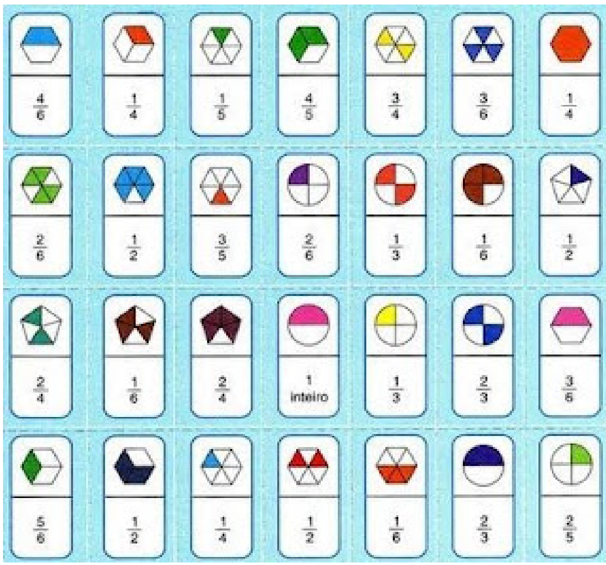
Veja a seguir a estrutura do jogo.

OBJETIVO: Explorar o conceito de fração, a representação fracionária, a leitura e a escrita da mesma, a observação e concentração, o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático e de estratégias de jogo.

Sugestão: A confecção das peças do dominó pode ser feita pelos próprios alunos em oficinas!

MATERIAL NECESSÁRIO: cartolina, tesoura, cola, lápis de cor.

Figura 35 – Modelo para o Dominó das frações



Fonte: (Site Jogos Significativos, 2013)

ORIENTAÇÕES: Divida os alunos em equipes de 4 membros. Eles deverão medir e recortar retângulos de cartolina medindo 8 cm x 3 cm e construir as 28 peças que compõe um jogo de dominó substituindo os números do dominó por frações como no modelo abaixo:

OBJETIVO DO JOGO: livrar-se das peças antes de seu(s) adversário(s).

MODO DE JOGAR: Colocar as peças com a face virada para baixo e embaralha-las. No caso de 2 jogadores, cada jogador pega 7 peças. No caso de 4 ou 5 jogadores cada um pega 5 peças. As peças restantes ficam em um canto da mesa, pois podem ser utilizadas. Uma pessoa sorteada inicia o jogo, revelando uma peça. Cada jogador, na sua vez, coloca uma peça na mesa, de modo que as partes das peças que se encostam representem a mesma parte do todo considerado. Caso o jogador não tenha peça para continuar o jogo, ele compra novas peças da mesa, até que possa jogar. Caso não haja mais peças a serem compradas,o jogador passa a vez. Ganha o jogador que terminar com as peças da mão, antes do(s) adversário(s). Caso o jogo "tranque", é possível "abrir", retirando a peça de uma das pontas e colocando na outra até que um dos jogadores consiga continuar o jogo.

Fonte: (Site Jogos Significativos, 2013)

5.2 Bingo das frações

O Bingo é outro jogo em que os alunos já estão habituados, se divertem e gostam muito de participar, ainda mais quando há premiações para o ganhador. Geralmente, de acordo com as regras comuns, cada participante da brincadeira recebe uma cartela com números aleatórios e durante o jogo são sorteados números. Caso o número sorteado esteja na cartela, ele é marcado. Quando são marcados todos os números da cartela surge o vencedor.

Diferente do Bingo tradicional, no Bingo das frações os números sorteados são resultados de operações. Veja o exemplo de cartela abaixo.

Figura 36 – Cartela do Bingo das frações (1)

B	I	N	G	O
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{13}$
$\frac{10}{17}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{19}$
5	$\frac{8}{21}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{7}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{10}{3}$

Fonte: Produção do próprio autor (2023)

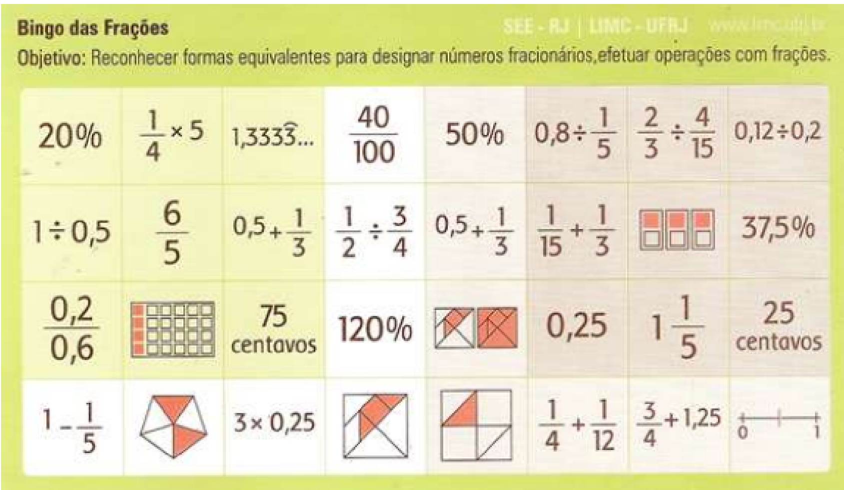
O professor pode trabalhar conceitos mais amplos e coloca-los nas cartelas. Porém, dependendo do trabalho que o professor já realizou até aqui ele pode limitar os valores das tabelas ao trabalho com as operações, ou seja, o professor fará os sorteios de operações entre frações e o resultado estará na cartela. Logo, para o aluno saber se a fração resultante está em sua cartela ou não ele deve realizar a operação sorteada.

Por exemplo, digamos que a operação sorteada foi $\frac{2}{3}.\frac{7}{2}$, o resultado será $\frac{7}{3}$, que está na cartela acima, mas para o aluno descobrir isso, terá que resolver a operação.

De acordo com (BRAGA; LIMA, 2020), “este jogo apresenta uma maneira interessante e bem chamativa de abordagem do conteúdo, levando em conta a interação mediadora do professor no desenvolvimento da aula com os alunos”. Vale destacar ainda que, por meio deste jogo os alunos poderão interagir na aula, trazendo as dúvidas para o professor.

O autor citado apresenta ainda uma outra cartela para esse mesmo jogo que envolvem ainda mais conceitos. A aplicação ou não dependerá do nível de conteúdo que já foi trabalhado e apreendido pelos discentes. Veja um exemplo abaixo.

Figura 37 – Cartela do Bingo das frações (2)



Fonte: (BRAGA; LIMA, 2020)

Aqui sua proposta é sortear as frações que são resultado das operações na cartela e outras definições.

6 Conclusão

É preciso destacar que, nos dias atuais, diante do cenário cada vez mais desafiador que enfrentamos em sala de aula, o ensino de Matemática está se tornando cada vez mais difícil. Se tratando de alguns temas específicos, como o ensino de fração, percebemos que a maioria de nossos alunos possue certa resistência no estudo referente a este conteúdo.

Diante desse cenário, espera-se que através deste trabalho seja possível contribuir com o desenvolvimento deste conteúdo em sala de aula, visando enfrentar dificuldades enfrentadas por nossos alunos ao se deparar com o estudo de frações sem um contexto adequado para seu aprendizado, uma vez que conseguimos propor a utilização de alguns jogos para dar suporte ao docente.

Referências

AGRANIONIH, N. T.; SMANIOTTO, M. Jogos e aprendizagem matemática: uma interação possível. *Erechim: EdiFAPES*, 2002. Citado na página 65.

BEHR, M. J. et al. Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a rational-number-as-operator task. *Journal for Research in Mathematics Education*, National Council of Teachers of Mathematics, v. 28, n. 1, p. 48–69, 1997. Citado na página 27.

BEHR, M. J. et al. Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for research in mathematics education*, National Council of Teachers of Mathematics, v. 15, n. 5, p. 323–341, 1984. Citado na página 65.

BENINCÁ, M. Investigando a aprendizagem de frações nas séries iniciais do ensino fundamental ii. Universidade Federal do Espírito Santo, 2020. Citado na página 40.

BEZERRA, F.; MAGINA, S.; SPINILLO, A. Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? uma experiência de ensino. v. 2, 2009. Citado na página 66.

BNCC. Base nacional comum curricular. *Brasília: MEC*, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 14, 26, 34, 35 e 40.

BRAGA, E. d. S. de O.; LIMA, V. da S. O bingo das frações sob a ótica da resolução de problemas. *Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar*, v. 6, n. 16, 2020. Citado na página 69.

BRASIL, M. Referencial curricular nacional para a educação infantil. *Brasília: Mec/SEF*, v. 2, 1998. Citado na página 66.

COX, R. Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and instruction*, Elsevier, v. 9, n. 4, p. 343–363, 1999. Citado na página 30.

DANTE, L. R. Teláris matemática. *6º ao 9º ano do Ensino Fundamental*, v. 3, 2018. Citado na página 28.

DRUCK, I. d. F. Frações: uma análise de dificuldades conceituais. 2006. Citado 7 vezes nas páginas 35, 38, 39, 40, 58, 61 e 64.

EVES, H. W. et al. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Unicamp Campinas, 2004. Citado na página 16.

FOGUESATTO, K.; DUARTE, V. E. de C. Operações com frações. *Feira Regional de Matemática de Ijuí*, v. 4, n. 4, 2022. Citado na página 65.

GARCEZ, W. R. *Topicos sobre o ensino de fracoes: Equivalencia*. Tese (Doutorado) — dissertacao] Rio de Janeiro, 2013. Disponivel em:< https://impa. br/wp . . . , 2018. Citado na página 41.

GODINO, J. D. et al. Didáctica de las matemáticas para maestros: Gami. *Recuperado de http://www. ugr. es/˜ jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros. pdf*, 2004. Citado na página 26.

GOLDIN, G. A. Representation in school mathematics: A unifying research perspective. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, p. 275–285, 2003. Citado na página 28.

HEFEZ, A. Curso de álgebra, volume 1, 2ª edição. *Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro*, 1993. Citado na página 17.

HEFEZ, A. *Curso de álgebra, volume 1.* [S.l.]: Impa, 1997. Citado na página 25.

JESUS, A. B. M. D. Uma proposta de ensino de frações voltada para a construção do conhecimento. 2013. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

LIMA, E. L. *Análise real volume 1. Funções de uma variável.* [S.l.]: IMPA - Coleção Matemática Universitária, 2014. Citado na página 18.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio.* [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 2001. v. 1. Citado na página 17.

LIMA, R. J. d. Uma proposta de ensino e aprendizagem de frações no 6º ano no ensino fundamental. Centro de Ciências Exatas e Naturais-CCEN, 2021. Citado na página 41.

LIMA, V. S.; BRITO, M. Mapeamento cognitivo e a formação do conceito de frações. *Psicologia da Educação Matemática: teoria e pesquisa. Florianópolis, SC: Insular*, p. 107–127, 2001. Citado na página 30.

MARTINEZ, Marcia Lorena Saurin. *Desenvolvendo conceitos dos Números Racionais:Frações*. 2019. Disponível em:<https://wp.ufpel.edu.br/obeducpacto/files/2019/12/Fracoes.pdf>. Acesso em: 13 de outubro de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 45.

MENDES, E. C.; MENDES, M. Os múltiplos recursos para ensinar fração. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, v. 14, n. 1, p. 89–107, 2005. Citado na página 27.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. *Desenvolvendo o sentido do número racional.* [S.l.]: Lisboa: APM, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 33.

MOSS, J. *Percents and proportion at the center: Altering the teaching sequence for rational number. Making sense of fractions, ratios and proportions.* [S.l.]: National Council of Teachers of Mathematics, Reston Virginia, 2002. Citado na página 30.

MOSS, J.; CASE, R. Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for research in mathematics education*, National Council of Teachers of Mathematics, v. 30, n. 2, p. 122–147, 1999. Citado na página 28.

NACARATO, A. M. et al. *Tópicos de Ensino de Matemática, O Conceito de Fração, vol. 3, 1990.* [S.l.]: Delta Xis, 1990. Citado na página 31.

NACIONAIS, P. C. Ministério da educação. *Secretaria da Educação Média e tecnológica*, 1998. Citado na página 34.

OLIVEIRA, L. B. d. Construção dos conjuntos numéricos e aplicações. Centro de Ciências Exatas e da Tecnologia - UFOB, 2022. Citado na página 20.

ORTON, R. E. et al. Logical and psychological aspects of rational number pedagogical reasoning. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, ERIC, v. 3, p. 63–75, 1995. Citado na página 56.

OWENS, D.; SUPER, D. Teaching and learning decimal fractions. *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics*, p. 137–158, 1993. Citado na página 29.

POST, T. et al. Curriculum indications from research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts: Multiple research perspective. *Learning, teaching and assessing rational number concepts: Multiple research perspective. Madison: University of Wisconson*, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.

POST, T. R.; BEHR, M.; LESH, R. based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on learning Problems in Mathematics*, v. 8, p. 39–48, 1986. Citado 4 vezes nas páginas 27, 31, 32 e 53.

POST, T. R. et al. Order and equivalence of rational numbers: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, National Council of Teachers of Mathematics, v. 16, n. 1, p. 18–36, 1985. Citado na página 32.

PRINCIPIOS, N. Normas para a matemática escolar. *Lisboa: APM (Traduçao portuguesa da ediçao original de 2000)*, 2007. Citado na página 28.

QUARESMA, M. *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino.* Tese (Doutorado), 2010. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 57.

RIPOLL, C. C. et al. *Frações no Ensino Fundamental - Volume 1.* [S.l.]: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2017. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 53.

RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA, J. F. P. d. Números racionais, reais e complexos. *Cadernos de matemática e estatística. Série B, Trabalho de apoio didático. Porto Alegre*, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

SALAS, Paula. *DO que vai mudar no ensino de fração?* 2018. Disponível em:<https://novaescola.org.br/conteudo/12453/o-que-vai-mudar-no-ensino-de-fracao>. Acesso em: 13 de outubro de 2023. Citado na página 14.

Site Jogos Significativos. *Jogo dominó das frações.* 2013. Disponível em:<https://jogossignificativos.blogspot.com/2013/04/trabalhar-fracoes-com-turminha-de-forma.html>. Acesso em: 28 de novembro de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 68.

Site Matemática na Web. *Comparação de números fracionários.* 2022. Disponível em:<https://matematicanaweb.com.br/assuntos/conjunto-dos-numeros-racionais-absolutos/comparacao-de-numeros-fracionarios/>. Acesso em: 28 de novembro de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 60.

Site Smartick. *Amplificação e simplificação das frações. Frações equivalentes.* 2018. Disponível em:<https://br.smartick.com/blog/matematica/fracoes/fracoes-equivalentes-amplificacao/>. Acesso em: 23 de outubro de 2023. Citado 3 vezes nas páginas 35, 48 e 56.

WEBB, D. C.; BOSWINKEL, N.; DEKKER, T. Abaixo da ponta do iceberg: Usando representações para apoiar a compreensão do aluno. v. 14, n. 2, p. 110–113, 2008. Citado na página 29.