

Diogo Guimarães Machado

**UM ESTUDO SOBRE A HISTÓRIA DA
ESCRITA MATEMÁTICA: DOS SISTEMAS
NUMÉRICOS AOS SÍMBOLOS
MATEMÁTICOS ELEMENTARES**

Vitória

2025

Diogo Guimarães Machado

**UM ESTUDO SOBRE A HISTÓRIA DA ESCRITA
MATEMÁTICA: DOS SISTEMAS NUMÉRICOS AOS
SÍMBOLOS MATEMÁTICOS ELEMENTARES**

Dissertação de mestrado apresentada ao
PROFMAT como parte dos requisitos exi-
gidos para a obtenção do título de Mestre em
Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



PROFMAT

Orientador: Prof. Dr.Fábio Corrêa de Castro

Vitória

2025

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

M149e Machado, Diogo Guimarães, 1981-
Um estudo sobre a história da escrita matemática: dos sistemas numéricos aos símbolos matemáticos elementares / Diogo Guimarães Machado. - 2026.
63 p. : il.

Orientador: Fábio Corrêa de Castro.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Numerais. 2. Símbolos matemáticos. I. Castro, Fábio Corrêa de. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

**“UM ESTUDO SOBRE A HISTÓRIA DA ESCRITA
MATEMÁTICA: DOS SISTEMAS NUMÉRICOS AOS
SÍMBOLOS MATEMÁTICOS ELEMENTARES”**

Diogo Guimarães Machado

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 11/12/2025 por:

Prof. Dr. Fábio Corrêa de Castro
Orientador – UFES

Profa. Dra. Tiane Marcarini Pinto
Examinador interno – UFES

Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira
Examinador externo – UFOP

Campus Universitário Alaor de Queiroz Araújo
Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória – ES | 29075-910 | (27) 4009-2473/2474
<https://matematica.redenacional.ufes.br/> – profmat.ufes@gmail.com – pos.matematicaredenacional@ufes.br





folha_de_assinaturas_Diogo_Guimarães_Machado

Data e Hora de Criação: 15/12/2025 às 11:31:57

Documentos que originaram esse envelope:

- folha_de_assinaturas_Diogo_Guimarães_Machado.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)



Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 9369804ca46a667da64aeb5759bd552d3ef932d7c769679e53457261510fb0f2

[SHA512]: e6d1a1569ae485a16f91c686608070666f826dd84316c1b27f7f1556d844ea815c7516b96bc9749acdbcac5041050a5af8cadb70c6c217adffd8cd4cc5f55bdf

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



ASSINADO - Fábio Corrêa de Castro (fabio.castro@ufes.br)

Data/Hora: 15/12/2025 - 12:06:27, IP: 179.102.140.101, Geolocalização: [-20.274974, -40.302969]

[SHA256]: 8318b9e5e4a9975cdd863141114e65b891ce45f2bfb159413bf57e0c99d636d9

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)



ASSINADO - Tiane Marcarini Pinto (tiane.pinto@ufes.br)

Data/Hora: 16/12/2025 - 12:07:38, IP: 179.102.128.69

[SHA256]: 4769008fab5551953591497065dd64ad229b8ac29cac960f8c059879a7c95cc9

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)



ASSINADO - Wenderson Marques Ferreira (wmf@iceb.ufop.br)

Data/Hora: 15/12/2025 - 15:58:20, IP: 152.255.102.238

[SHA256]: 401134333eba3d0bc084220ebac688547f6b46d494f12214684577400533cc23

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

Histórico de eventos registrados neste envelope

16/12/2025 12:07:38 - Envelope finalizado por tiane.pinto@ufes.br, IP 179.102.128.69

16/12/2025 12:07:38 - Assinatura realizada por tiane.pinto@ufes.br, IP 179.102.128.69

16/12/2025 12:07:31 - Envelope visualizado por tiane.pinto@ufes.br, IP 179.102.128.69

15/12/2025 15:58:20 - Assinatura realizada por wmf@iceb.ufop.br, IP 152.255.102.238

15/12/2025 12:06:27 - Assinatura realizada por fabio.castro@ufes.br, IP 179.102.140.101

15/12/2025 11:32:33 - Envelope registrado na Blockchain por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.109

15/12/2025 11:32:33 - Envelope encaminhado para assinaturas por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.109

15/12/2025 11:31:57 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.109

Dedico este trabalho à minha esposa e aos meus dois filhos.

Agradecimentos

À minha esposa Cinthia, que acompanhou de perto todas as etapas dessa jornada, com paciência, compreensão e sempre me incentivando.

A meus filhos Vicente e Matias, que precisaram compreender, diversas vezes, que o papai estava em casa, mas precisava estudar em vez de participar de uma maravilhosa brincadeira.

A meus familiares, em especial à minha mãe, que sempre me ensinou a valorizar o estudo.

Aos professores que contribuíram para minha formação acadêmica. Em especial, ao meu orientador, que sempre se mostrou disposto, esteve presente e proporcionou uma orientação que contribuiu de forma ímpar para a realização deste trabalho.

“Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda”
(Paulo Freire)

Resumo

Reconhecendo o valor da História da Matemática como ferramenta pedagógica para um ensino mais significativo, este trabalho tem como objetivo compilar e sistematizar a origem e a evolução dos números, dos principais sistemas de numeração e dos símbolos matemáticos fundamentais, contextualizando-os em seus ambientes socioculturais e nos marcos históricos que os moldaram. O recorte histórico abrange os primeiros métodos de contagem, como marcas em ossos e o uso de pedrinhas, a invenção dos números e da escrita, chegando até a consolidação dos símbolos usados na notação moderna. A pesquisa, de natureza bibliográfica, baseou-se em fontes especializadas, com ênfase na obra *The Universal History of Numbers*, de Georges Ifrah. Os símbolos foram selecionados por sua relevância na notação matemática elementar. O produto final é um documento organizado que serve como recurso de apoio para educadores, visando enriquecer a prática docente com narrativas históricas que podem tornar os conceitos matemáticos mais acessíveis e contextualizados para os alunos.

Palavras-chave: História da Matemática; Sistemas numéricos; História dos Números; Escrita matemática; Símbolos matemáticos;

Abstract

Acknowledging the value of the History of Mathematics as a pedagogical tool for more meaningful instruction, this work aims to compile and systematize the origin and evolution of numbers, the main numeral systems, and fundamental mathematical symbols, contextualizing them within their sociocultural environments and the historical milestones that shaped them. The historical scope spans from the earliest counting methods, such as tally marks on bones and the use of small stones, and the invention of numbers and writing, up to the consolidation of the symbols used in modern notation. The research, bibliographical in nature, was based on specialized sources, with emphasis on the work *The Universal History of Numbers* by Georges Ifrah. The symbols were selected for their relevance in elementary mathematical notation. The final product is an organized document intended as a support resource for educators, aiming to enrich teaching practice with historical narratives that can make mathematical concepts more accessible and contextualized for students

Keywords: History of Mathematics; Number Systems; History of Numbers; Mathematical writing; Mathematical symbols.

Lista de ilustrações

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Número concreto. | 18 |
| Figura 2 – Nome dos números sumérios de 1 a 10 e das seis primeiras dezenas. . . | 19 |
| Figura 3 – Nome dos números sumérios 30, 40 e 50. | 20 |
| Figura 4 – Nome dos números sumérios até 3.600. | 20 |
| Figura 5 – Nome dos números sumérios até 216.000. | 21 |
| Figura 6 – Símbolos gráficos dos números sumérios. | 21 |
| Figura 7 – Rotação em alguns símbolos gráficos sumérios. | 21 |
| Figura 8 – Escrita cuneiforme dos números sumérios. | 22 |
| Figura 9 – Número 691 escrito em uma tabuleta suméria. | 23 |
| Figura 10 – Tábua suméria de aproximadamente 2000 a.C., que registra o gado por meio de sinais e números cuneiformes. | 23 |
| Figura 11 – Escrita cuneiforme simplificada pelo uso de subtração. | 24 |
| Figura 12 – Os numerais egípcios. | 25 |
| Figura 13 – Estátua do rei KhaSeKhem (cerca de 2.800 a.C.). | 26 |
| Figura 14 – Inscrição aos pés da estátua do rei KhaSeKhem. | 26 |
| Figura 15 – Imagem do cabo da clava do Rei Narmer. | 27 |
| Figura 16 – Traçado da inscrição do cabo da clava do Rei Narmer. | 27 |
| Figura 17 – Números na inscrição do cabo da clava do Rei Narmer. | 27 |
| Figura 18 – Hieróglifo que representa frações. | 28 |
| Figura 19 – Frações especiais. | 28 |
| Figura 20 – Frações do olho de Horus. | 28 |
| Figura 21 – Etiquetas e barras de barro com inscrições hieroglíficas minoicas. . . . | 29 |
| Figura 22 – Escrita numérica minoica. | 29 |
| Figura 23 – Escrita numérica grega, conhecida como escrita ática ou escrita herodiana. | 30 |
| Figura 24 – A letra era a inicial do nome do número. | 30 |
| Figura 25 – O princípio multiplicativo no sistema numérico grego. | 30 |
| Figura 26 – O novo sistema numérico grego. | 31 |
| Figura 27 – Sinais gráficos do sistema numérico romano. | 31 |
| Figura 28 – Sinais gráficos do sistema numérico romano. | 32 |
| Figura 29 – Evolução do sinal gráfico para 50. | 33 |
| Figura 30 – Evolução do sinal gráfico para 100. | 33 |
| Figura 31 – Evolução do sinal gráfico para 500. | 33 |
| Figura 32 – Escritas numéricas etruscas. | 34 |
| Figura 33 – Comparação entre numéricas etruscas e romanas. | 35 |
| Figura 34 – Sinais gráficos fenícios para o número 100. | 35 |
| Figura 35 – Exemplos de escrita numérica fenícia. | 36 |

| | |
|---|----|
| Figura 36 – Exemplos de escrita numérica síria. | 36 |
| Figura 37 – Os primeiros sinais gráficos numéricos chineses. | 37 |
| Figura 38 – Sistema numérico chinês. | 38 |
| Figura 39 – Mudanças nos sinais gráficos dos números 10, 20, 30 e 40. | 38 |
| Figura 40 – Variações nas formas gráficas dos numerais chineses, conforme encontradas em inscrições do final do período dos reinos guerreiros (séculos V a III a.C.). | 39 |
| Figura 41 – Os treze símbolos. | 39 |
| Figura 42 – A notação chinesa moderna para múltiplos consecutivos das quatro primeiras potências de 10. | 40 |
| Figura 43 – Página traduzida de documento chinês do século XV. | 41 |
| Figura 44 – Extensão do sistema com treze símbolos para a escrita de números grandes. | 41 |
| Figura 45 – Escrita numérica para textos científicos, onde se escreve números muito grandes. | 42 |
| Figura 46 – Escrita numérica <i>suan zi</i> | 42 |
| Figura 47 – Número 654 escrito no sistema numérico <i>suan zi</i> | 42 |
| Figura 48 – Opções que supriam a falta do símbolo para zero. | 43 |
| Figura 49 – Números escritos no sistema <i>suan zi</i> já com a utilização do sinal gráfico para o zero. | 43 |
| Figura 50 – Escrita numérica maia. | 45 |
| Figura 51 – Escrita numérica maia. | 45 |
| Figura 52 – Irregularidade na terceira ordem do sistema numérico maia. | 46 |
| Figura 53 – O zero do sistema numérico maia. | 46 |
| Figura 54 – A falta da propriedade operacional do zero maia. | 47 |
| Figura 55 – Imagem de uma das páginas de um códice maia. | 47 |
| Figura 56 – Tradução de parte do códice da Figura 55. | 48 |
| Figura 57 – Explicação das expressões numéricas do códice da Figura 55. | 48 |
| Figura 58 – Cada algarismo foi pensado a partir do correspondente número de ângulos. | 49 |
| Figura 59 – Cada algarismo foi pensado a partir do correspondente número de traços. | 49 |
| Figura 60 – Cada algarismo foi pensado a partir da união da correspondente quantidade de pontos. | 50 |
| Figura 61 – Cada algarismo foi pensado a partir de um círculo e dois de seus diâmetros. | 50 |
| Figura 62 – Cada algarismo foi pensado a partir de um retângulo e suas diagonais. | 50 |
| Figura 63 – As nove unidades representadas por traços agrupados. | 52 |
| Figura 64 – Numerais Brahmi. | 52 |
| Figura 65 – Diversas modificações na escrita numérica indiana. | 53 |
| Figura 66 – Tradução hieróglifa do papiro de Rhind, problema 28. | 54 |

| | |
|---|----|
| Figura 67 – Atuais símbolos de adição e subtração em manuscritos no fim do século XV. | 55 |
| Figura 68 – Letra R usada para designar radiciação. | 57 |
| Figura 69 – Somatório com uso de índices e usado para séries infinitas. | 59 |
| Figura 70 – Primeira publicação do símbolo para produtório. | 60 |

Sumário

| | | |
|------|---------------------------------------|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 13 |
| 2 | AS LETRAS | 16 |
| 3 | OS NÚMEROS | 17 |
| 3.1 | Representação concreta dos números | 17 |
| 3.2 | O sistema numérico mesopotâmico | 18 |
| 3.3 | O sistema numérico egípcio | 24 |
| 3.4 | O sistema numérico grego | 28 |
| 3.5 | O sistema numérico romano | 31 |
| 3.6 | Os sistemas numéricos fenício e sírio | 35 |
| 3.7 | O sistema numérico chinês | 36 |
| 3.8 | O sistema numérico maia | 44 |
| 3.9 | O sistema numérico indiano | 49 |
| 4 | SÍMBOLOS DIVERSOS | 54 |
| 4.1 | Adição e subtração | 54 |
| 4.2 | Multiplicação e divisão | 55 |
| 4.3 | Igualdade | 56 |
| 4.4 | Maior e menor | 57 |
| 4.5 | Radiciação | 57 |
| 4.6 | Fatorial | 58 |
| 4.7 | Infinito | 58 |
| 4.8 | Somatório | 59 |
| 4.9 | Produtório | 59 |
| 4.10 | Funções | 60 |
| 4.11 | Incógnitas | 60 |
| 5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 62 |
| | REFERÊNCIAS | 63 |

1 Introdução

Entre os desafios enfrentados por professores de matemática, a falta de motivação dos alunos ocupa lugar de destaque. Na perspectiva do educando, não enxergar, por falta de incentivo, de exemplos nos seus familiares, de motivação ou por outros fatores, a escolarização como, entre outras coisas, uma ponte para uma melhor qualidade de vida contribui para uma formação no ensino básico com resultados inferiores aos esperados.

Em entrevista dada à Fundação Roberto Marinho sobre os resultados do Brasil no PISA (sigla em inglês para Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) em 2022, que mostram o Brasil em 65º lugar em Matemática, atrás de países como Colômbia, Costa Rica e Peru (ver ([Fundação Roberto Marinho](#),)), Ernesto Martins Faria, diretor-fundador do Interdisciplinaridade e Evidências no Debate Educacional (Iede), disse que precisamos, entre outras coisas, “conectar o ensino de maneira mais significativa com a vida do estudante”.

Uma grande tarefa para os professores, visto que não há um caminho considerado o melhor para o ensino de uma disciplina, é conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula, para que se possa encontrar ferramentas que promovam essa conexão. A adoção de novas estratégias de ensino, recursos e métodos para aprendizagem se mostra como uma das formas de atacar o problema. Entre as possibilidades está a exploração da História da Matemática.

Para ([MENDES, 2013](#)), é relevante considerar que o uso da História como recurso pedagógico pode promover um ensino e uma aprendizagem capazes de ressignificar o conhecimento matemático, acreditando-se que a História da Matemática, durante a ação docente, pode causar maior motivação e engajamento.

Ao consultarem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), os profissionais da educação encontram, como uma das sugestões, o uso da História da Matemática como um caminho para “fazer Matemática” na sala de aula.

A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento ([BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental, 1998](#), p. 42).

Os PCN apontam a possibilidade de a própria história de alguns conceitos matemáticos sugerir uma forma de abordagem deles, o que pode aumentar a qualidade da

aprendizagem ao apontar mais uma maneira de apresentar os conceitos. Além disso, os PCN colocam também o recurso à História da Matemática como possível esclarecedor de ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo estudante.

Considerando que o número modesto de professores de Matemática que implementam a inserção da História da Matemática como uma estratégia didática pode estar ligado, entre outros fatores, à falta de material compacto, claro e direto sobre o assunto, este trabalho pode ajudar ao assumir o papel de uma fonte de pesquisa e consulta no planejamento de aulas nas quais a História da Matemática é uma ferramenta com potencial facilitador e motivador para os estudantes na assimilação dos conteúdos.

A história da Matemática é um campo muito fértil, que já foi (e continua sendo) amplamente estudado, descoberto e registrado. Há um número enorme de arqueólogos, historiadores e matemáticos que trabalharam na tentativa de entender, desde o início, a relação entre o homem e a Matemática. Em meio a tanta informação, tantas obras, tantos dados catalogados, consultar a origem deste ou daquele conceito ou objeto matemático não é uma tarefa simples. Professores, estudantes e curiosos não conseguem, ao se deparar com um elemento da matemática, buscar facilmente sua origem ou sua história.

Este trabalho, que teve a inteligência artificial usada para fazer correção ortográfica e para nortear a tradução do resumo para a língua inglesa, traz um apanhado da invenção dos números, dos sistemas numéricos, da invenção da escrita numérica e da escrita matemática, relacionados às principais características socioculturais e fatos históricos que moldaram tais invenções ao longo da trajetória humana, desde a escrita em tabletes de barro até a invenção dos símbolos que moldaram a atual escrita matemática.

O acervo de dissertações do PROFMAT contém um grande número de trabalhos que tratam também de História da Matemática. Entretanto, o tema é abordado ou com foco na sua contribuição e importância na construção de um melhor processo de ensino e aprendizagem, ou com intuito de se contextualizar algum estudo sobre um tema específico, como por exemplo geometria, no qual se aborda sua história. Nenhum trabalho publicado até o ano de 2025 apresenta a história da escrita matemática ou a história dos principais sistemas de numeração desenvolvidos pelo ser humano. Dois trabalhos do acervo merecem destaque por contribuírem enormemente para disseminação do estudo do tema História da Matemática:

- O trabalho de João Batista Siqueira (UFCG - 2021), intitulado *Tópicos da História da Matemática e suas contribuições para o Ensino Básico*, que, além de apresentar o contexto histórico, faz uma maravilhosa comparação entre o sistema numérico egípcio e o sistema numérico que usamos atualmente (comumente chamado de indo-arábico).
- O trabalho de Jamerson Tenório da Silva Carvalho (UFAL - 2025), intitulado *HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NAS DISSERTAÇÕES DO PROFMAT: uma Revisão*

Sistemática de Literatura, que identifica e analisa as aplicações de conteúdos de Matemática utilizando abordagens baseadas na História da Matemática e faz um mapeamento de dissertações que utilizam a História da Matemática como abordagem didática, especificando os conteúdos abordados e os contextos de aplicação.

2 As letras

A importância da escrita como instrumento que viabiliza a representação visual e a preservação do pensamento já é amplamente difundida. Entretanto, a evolução do ser humano a partir da invenção da escrita vai muito além desses dois aspectos. O ato de escrever estimula o pensamento, exige reflexão e reorganização do que foi pensado. O ato de escrever conecta sempre o escritor com o abstrato, com mundo das ideias.

A escrita então pode ser considerada uma das maiores invenções da humanidade. Mas onde e quando ela surgiu? Para responder com precisão a esta pergunta, seria necessário encontrar a escrita mais antiga já feita pelo homem. Tendo uma escrita antiga, como garantir que não há outras mais antigas que ainda não foram descobertas?

Desse modo, podemos no máximo afirmar que a escrita mais antiga que conhecemos foi feita há cerca de 5 mil anos, na região da Suméria, que fica na Baixa Mesopotâmia, entre os rios Tigre e Eufrates. O que comprova tal afirmação são conjuntos de tabuletas de argila, cujo conjunto mais antigo foi datado desse período, que foram encontradas nessa região

Um fator importantíssimo que contribuiu para tal descoberta é o fato de o “papel” usado pelos sumérios ser argila. Outros materiais provavelmente não teriam sobrevivido ao tempo. A argila, mesmo após cinco mil anos, preservou o que os sumérios escreveram.

Além da escrita mais antiga conhecida, os sumérios também são os responsáveis pela agricultura e pelas cidades mais antigas conhecidas. Suas anotações eram feitas em uma espécie de pequenos blocos de argila, que eram, ainda no estágio maleável, marcados. As marcas eram feitas com ferramentas pontiagudas para traços e desenhos e com cunhas para marcas específicas, fato que deu origem ao nome “escrita cuneiforme”. Após secar, a argila guardava de forma muito eficiente os registros das mais diversas situações, muitas delas envolvendo informações sobre mercadorias, suprimentos, rebanhos, trocas, entregas, etc.

As letras marcaram a história dos números porque a invenção de um alfabeto fonético possibilitou que alguns povos usassem os sinais gráficos de seus alfabetos para representar números.

3 Os números

O ser humano levou muito tempo para inventar, a partir de suas necessidades na luta pela sobrevivência, os números, os nomes desses números e suas representações gráficas, ou seja, para inventar os números e os numerais. Enquanto o número é, grosso modo, a ideia abstrata, a quantidade, seu nome ou sua representação gráfica é chamada de numeral. Entretanto, no cotidiano estamos sempre, com um abuso de linguagem, usando a palavra número para indicar tanto o número quanto o numeral. E assim faremos, em diversas situações, neste trabalho. Não há aqui a intenção de discorrer sobre o conceito filosófico de número.

3.1 Representação concreta dos números

A aritmética concreta é derivada do método arcaico de contagem por monte de pedrinhas, que é um modo bem prático de fazer uma relação um-a-um entre dois conjuntos. Em português, a palavra “cálculo”, do latim *calculus*, que significa “uma pedra”, se refere à operação aritmética. Tal fato ocorre em diversas outras línguas

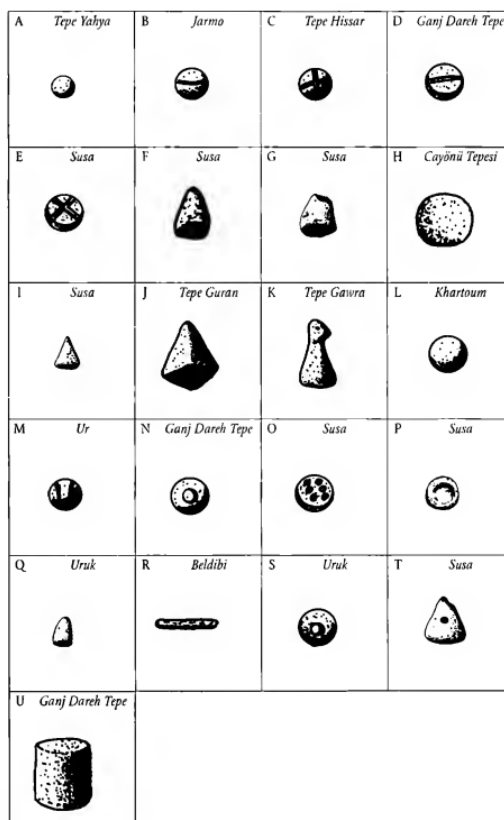
Na Etiópia, ao sair para uma incursão, cada guerreiro depositava uma pedrinha em um monte. Ao retornar, cada sobrevivente retirava sua pedra, e as pedras restantes mostravam as baixas entre os guerreiros.

É claro que o método de contagem por pedrinhas fica muito limitado à medida que se necessita contar números maiores. Seria necessário, por exemplo, coletar duzentas pedrinhas para contar apenas até 200. Assim, com a necessidade de contar de modo mais eficiente, o princípio de uma base em um sistema de numeração tornou possível usar as pedrinhas de modo mais criativo, atribuindo a algumas pedras um valor diferente de outras. Com isso, as pedrinhas naturais foram substituídas por pedaços de pedra de tamanhos distintos ou por pedras com marcas ou formatos que as classificassem.

A substituição de pedras ou pedaços de pedras por objetos de contagem fabricados para tal fim foi o próximo passo. Essa evolução resolveu também o problema de povos que habitavam locais onde pedras eram incomuns. Entre os materiais para a fabricação dos objetos de contagem está a terra maleável, que conhecemos como barro. Em diversos sítios arqueológicos no Oriente Médio foram encontrados milhares de pequenos objetos em grande variedade de tamanhos e formas, muitas delas em formatos geométricos regulares, como cones, discos, esferas, cilindros, etc. Os mais antigos datam do nono ao sétimo milênio a.C..

O pensamento numérico, por estar associado à sobrevivência, desenvolveu-se em

Figura 1 – Número concreto.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 97.

várias partes do mundo e de várias formas diferentes. Seja amontoando pedrinhas ou riscando galhos, contar é uma ferramenta humana.

3.2 O sistema numérico mesopotâmico

Os sumérios são o povo responsável pelo surgimento da civilização. Esse marco na história humana ocorreu com o surgimento da cidade suméria de Uruk, localizada entre os rios Tigre e Eufrates. Essa região, chamada de Baixa Mesopotâmia e atualmente pertencente ao Iraque, foi ocupada, por volta da segunda metade do quarto milênio a.C., pelos sumérios, que desenvolveram uma cultura com três manifestações importantes: o uso da glíptica, que é a arte de gravar em pedras, no qual cilindros eram gravados com desfiles de animais e cenas religiosas; o desenvolvimento da escultura em relevo em vasos de pedra; e, por fim, e mais importante, do ponto de vista da evolução da civilização, a invenção da escrita.

Após o declínio da civilização suméria, que iniciou após o reinado de Hamurabi, no século XVIII a.C., muitas características culturais dos sumérios sobreviveram na cultura mesopotâmica.

... Após o triunfo da Babilônia, sob Hamurabi, a Suméria desapareceu

politicamente; mas ainda assim, a língua suméria permaneceu como língua de sacerdotes, e muitas características de sua civilização, assimiladas pelos semitas babilônicos, sobreviveriam na cultura mesopotâmica da Babilônia (IFRAH, 2000, p. 81).

A escrita dos números foi inventada muito depois do conceito de número. Assim, os nomes dos números e o sistema de contagem usados pelos sumérios já eram há tempos consolidados quando se inventou escrevê-los. A escrita dos números sumérios é, obviamente, uma representação escrita do sistema numérico oral já existente.

Os sumérios não contavam em dezenas, centenas e milhares. Eles agrupavam os números por 60 e por potências de 60, o que chamamos de base sexagesimal. Esse sistema numérico foi usado posteriormente pelos gregos e depois pelos árabes como um sistema científico, adotado por astrônomos. Atualmente, ainda usamos esse conceito. Por exemplo, o intervalo de tempo de 2 horas, 25 minutos e 42 segundos, convertido para segundos, é o mesmo que $2 \times 60^2 + 25 \times 60 + 42 = 8.742$ segundos.

Pensando na base de um sistema numérico, 60 é um número bem grande, pois seria necessário, pelo menos a princípio, determinar 60 sinais gráficos ou palavras distintas para designar os números de 1 a 60. Os sumérios trataram esse problema usando o número 10 como uma espécie de apoio para dar nomes (e mais tarde escrever) aos números, como ilustra a Figura 2.

Figura 2 – Nome dos números sumérios de 1 a 10 e das seis primeiras dezenas.

| | | | |
|---|--|----|---------------|
| 1 | <i>geš</i> (or <i>aš</i> or <i>dič</i>) | 6 | <i>âš</i> |
| 2 | <i>min</i> | 7 | <i>imin</i> |
| 3 | <i>eš</i> | 8 | <i>ussu</i> |
| 4 | <i>limmu</i> | 9 | <i>ilimmu</i> |
| 5 | <i>iá</i> | 10 | <i>u</i> |

| | |
|----|--|
| 10 | <i>u</i> |
| 20 | <i>niš</i> |
| 30 | <i>ušu</i> |
| 40 | <i>nišmin</i> (or <i>nimin</i> or <i>nin</i>) |
| 50 | <i>ninnû</i> |
| 60 | <i>geš</i> (or <i>gešta</i>) |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 82.

Repare que os nomes das dezenas, com exceção do 20, são palavras compostas, derivadas de outras palavras para números, geralmente as palavras para alguma unidade e a palavra para a dezena (esse modo de dar nome aos números sobrevive até hoje, o que nos

deu nomes como oito e oitenta, que estão nitidamente ligados). A Figura 3 mostra como exemplos os nomes dos números 30 (a palavra para 30 deriva da combinação, com alguma flexão, das palavras para 2 e para 10), 40 (a palavra para 40 vem das palavras para 20 e para 2) e 50 (o nome do 50 é uma derivação um pouco diferente, que remete a uma soma).

Figura 3 – Nome dos números sumérios 30, 40 e 50.

$$30 = u\check{s}u < *e\check{s}.u = 3 \times 10$$

$$40 = ni\check{s}min = ni\check{s}.min = 20 \times 2$$

$$50 = ninn\acute{u} < *nimnu = nimiru = nimiru.u = 40 + 10$$

Fonte: IFRAH, 2000, p. 82.

Um detalhe muito importante nos nomes dos números sumérios é o fato de 60 ser chamado do mesmo modo que 1. Tal fato decorre da visão suméria de que 60 é uma “grande unidade”. Nesse sistema numérico oral, os múltiplos de 60 até 600 eram expressos tendo 60 como uma unidade, e o mesmo ocorre com os múltiplos de 600, até $3.600 = 60^2$ (ver Figura 4).

Figura 4 – Nome dos números sumérios até 3.600.

| | | | | | |
|-------|------------------|-------------|-------|--------------------|----------------------|
| 60 | <i>geš</i> | | 360 | <i>geš-àš</i> | (= 60 × 6) |
| 120 | <i>geš-min</i> | (= 60 × 2) | 420 | <i>geš-imin</i> | (= 60 × 7) |
| 180 | <i>geš-eš</i> | (= 60 × 3) | 480 | <i>geš-ussu</i> | (= 60 × 8) |
| 240 | <i>geš-limmu</i> | (= 60 × 4) | 540 | <i>geš-ilimmu</i> | (= 60 × 9) |
| 300 | <i>geš-iá</i> | (= 60 × 5) | 600 | <i>geš-u</i> | (= 60 × 10) |
| 600 | <i>geš-ű</i> | | 2,400 | <i>geš-u-limmu</i> | (= 600 × 4) |
| 1,200 | <i>geš-u-min</i> | (= 600 × 2) | 3,000 | <i>geš-u-iá</i> | (= 600 × 5) |
| 1,800 | <i>geš-u-eš</i> | (= 600 × 3) | 3,600 | <i>šàr</i> | (= 60 ²) |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 83.

Ocorre com 3.600 o mesmo que com 60, ou seja, é considerado uma nova unidade. Assim, o processo se repete, chegando em 36.000 e depois em $216.000 = 60^3$ (ver Figura 5).

Por volta de 3.200 a.C., os sumérios criaram o sistema numérico escrito. Eles adotaram um símbolo gráfico para cada um dos números 1, 10, 60, 600, 3.600, 36.000, ou seja, representaram graficamente o sistema numérico oral já existente, o que parece bem natural. Essa representação gráfica está ilustrada na Figura 6.

A escrita dos números era feita em tabuletas de barro, usando duas ferramentas de escrita. Essas ferramentas eram pequenos cilindros com uma ponta fina de um lado,

Figura 5 – Nome dos números sumérios até 216.000.

| | | | | | |
|------------------|--------|----------------------|------------------|--------|----------------|
| <i>šār</i> | 3,600 | (= 60 ²) | <i>šār-àš</i> | 21,600 | (= 3,600 × 6) |
| <i>šār-min</i> | 7,200 | (= 3,600 × 2) | <i>šār-imin</i> | 25,200 | (= 3,600 × 7) |
| <i>šār-eš</i> | 10,800 | (= 3,600 × 3) | <i>šār-ussu</i> | 28,800 | (= 3,600 × 8) |
| <i>šār-limmu</i> | 14,400 | (= 3,600 × 4) | <i>šār-ilimu</i> | 32,400 | (= 3,600 × 9) |
| <i>šār-iá</i> | 18,000 | (= 3,600 × 5) | <i>šār-u</i> | 36,000 | (= 3,600 × 10) |

| | | | | | |
|---------|------------------|--------------------------|---------|--------------------|--|
| 36,000 | <i>šār-u</i> | (= 60 ² × 10) | 144,000 | <i>šār-u-limmu</i> | (= 36,000 × 4) |
| 72,000 | <i>šār-u-min</i> | (= 36,000 × 2) | 180,000 | <i>šār-u-iá</i> | (= 36,000 × 5) |
| 108,000 | <i>šār-u-eš</i> | (= 36,000 × 3) | 216,000 | <i>šàrgal</i> | (= 60 ³) (literally: "big 3,600") |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 83.

Figura 6 – Símbolos gráficos dos números sumérios.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 84.

usada para desenhar, e uma ponta grossa do outro lado, usada como cunha. Essa parte precisava ter dois diâmetros diferentes (4mm e 1cm), para os símbolos que se distinguem apenas pelo tamanho.

A partir do século XXVII a.C., os sinais gráficos não circulares passaram a ser escritos com uma rotação de um quarto de volta no sentido anti-horário. Deixaram de apontar de cima para baixo e passaram a apontar da esquerda para a direita (ver Figura 7).

Figura 7 – Rotação em alguns símbolos gráficos sumérios.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 84.

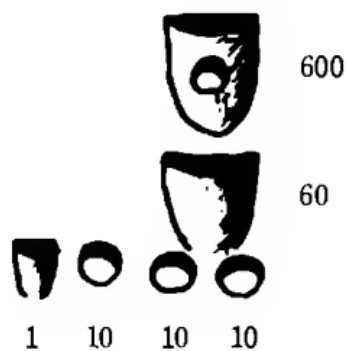
Com o surgimento da chamada “escrita cuneiforme” (do latim *cuneus*, que significa “cunha”), os números sumérios tomaram outra forma, completamente diferente. Todas as marcas foram produzidas a partir de uma única ferramenta de escrita, que usava apenas a pressão para imprimir uma marca específica e, a partir dela, se originavam todos os sinais gráficos. Essa mudança ocorreu não só com os números, mas também com os desenhos. A

mistura de linhas e marcas feitas por pressão deu lugar apenas a marcas por pressão, o que tornava a escrita mais rápida e o resultado mais limpo e mais nítido na superfície de argila. A Figura 8 ilustra esse novo modo de escrever os números.

Figura 8 – Escrita cuneiforme dos números sumérios.

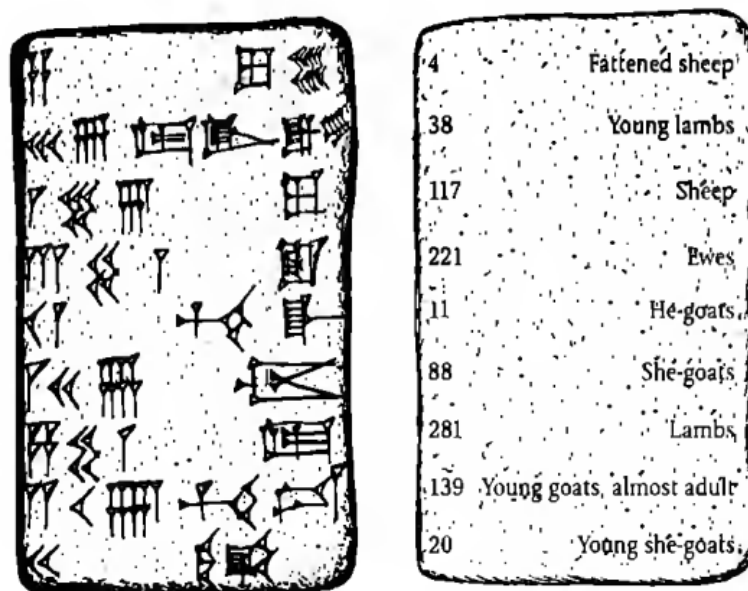
| 1 | 10 | 60 | 600 | 3,600 | 36,000 | 216,000 |
|------------|----|----|-----|-------|--------|---------|
| VERTICAL | | | | | | |
| | | | | | | |
| HORIZONTAL | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

Figura 9 – Número 691 escrito em uma tabuleta suméria.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 88.

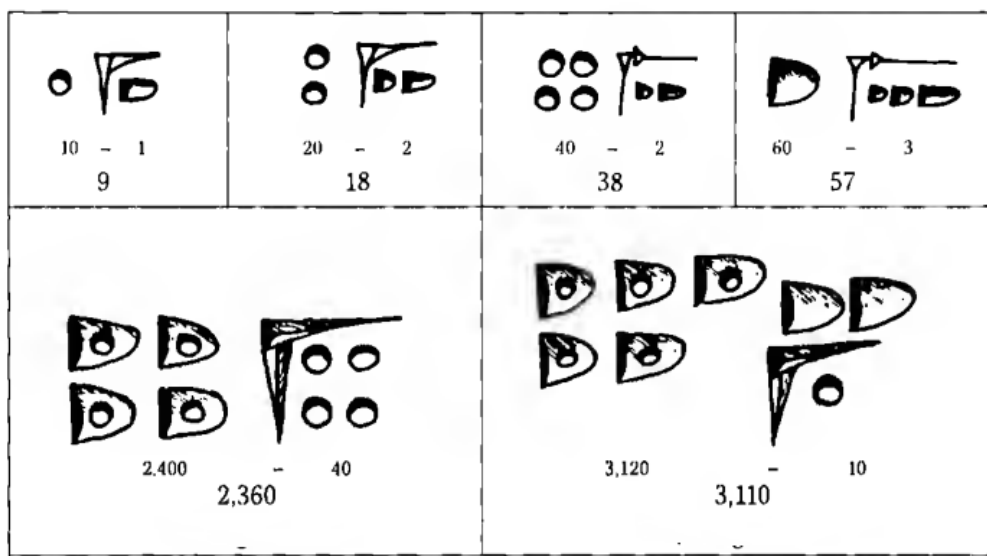
Figura 10 – Tábua suméria de aproximadamente 2000 a.C., que registra o gado por meio de sinais e números cuneiformes.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 88.

atualmente de “sinal de menos”.

Figura 11 – Escrita cuneiforme simplificada pelo uso de subtração.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 89.

3.3 O sistema numérico egípcio




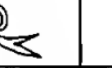






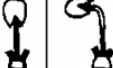






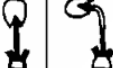



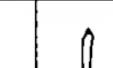

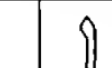




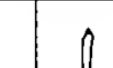

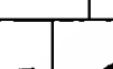
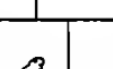
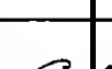
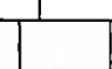
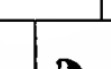


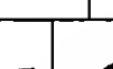
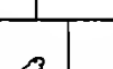
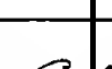

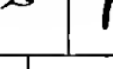
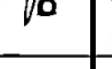

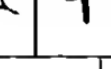
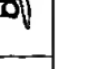


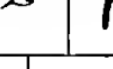
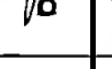
Os egípcios construíram um sistema de numeração datado de cerca de 5.000 anos atrás, mesma época em que palavras e números surgiram na Mesopotâmia. A notação numérica do Antigo Egito era, essencialmente, um traço escrito de um método concreto de enumeração, provavelmente usado bem antes da notação. Tal método, baseado na escala 10, consistia em representar um dado número colocando uma linha ou um empilhado correspondente de objetos padrão, cada um dos quais representando uma ordem de grandeza. Esses objetos podiam ser fichas, seixos, conchas, bolinhas, paus, discos, anéis, etc. Em sua notação, o sistema usava um esquema iterativo simples e símbolos distintos para cada uma das primeiras potências de 10.

Um único traço vertical representa a unidade, um postigo invertido foi usado para 10, algo como uma corda enrolada representa 100, uma flor de lótus foi usada para 1.000, um dedo representava 10.000, um girino era 100.000 e uma figura ajoelhada representava 1.000.000, como mostra a Figura 12. Cada símbolo era repetido por até 9 vezes, para preencher as lacunas de números entre as potências de 10. Ao longo do tempo, os números egípcios eram escritos (e lidos) tanto da esquerda para a direita, quanto no sentido contrário.

Os símbolos pictográficos do sistema de numeração egípcia, hieróglifos, não dão pistas sobre a natureza dos objetos usados no cálculo concreto antes da invenção da escrita. Não é plausível que flores de lótus ou girinos fossem práticos para contar. Os motivos da escolha desses símbolos estão repletos de hipóteses, mas sem evidências de provas.

Uma estátua do Rei Khasekhemwy (cerca de 2.800 a.C.), que se encontra no Museu

Figura 12 – Os numerais egípcios.

| | | | | | | | | | | |
|-----------|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 10 | ∩ | | | | | ∩ | | | | |
| 100 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1,000 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 10,000 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 100,000 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1,000,000 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 165.

Egípcio, no Cairo, traz uma inscrição abaixo dos pés do Rei que indica o número de inimigos (47.209) eliminados por ele. Como em outras situações, os egípcios mostravam lidar com números bastante grandes.

Outro exemplo de números altos pode ser encontrado em uma estátua de Hieracômpolis, datada de 2800 a.C., onde o número de inimigos mortos por um rei chamado KhaSeKhem é mostrado como 47.209 (IFRAH, 2000, p. 165).

Um grande exemplo da escrita dos números egípcios é a inscrição no cabo da clava do Rei Narmer (ver Figura 15), que uniu o Alto e o Baixo Egito por volta de 3.000 – 2.900 a.C.. Tal artefato mostra números que enaltecem as posses do Rei, mostrando quantidades de cabeças de gado, de cabras e de prisioneiros.

É bem plausível considerar que uma sociedade que construiu monumentos tão imponentes, como as pirâmides, tenha facilmente lidado com números grandes. Como prova dessa suposição, temos a cena esculpida no cabo da clava do Rei Narmer (ver Figura 16), que retrata uma cerimônia onde 400.000 cabeças de gado, 1.422.000 cabras e 120.000 prisioneiros são apresentados ao Rei, como mostra a Figura 17.

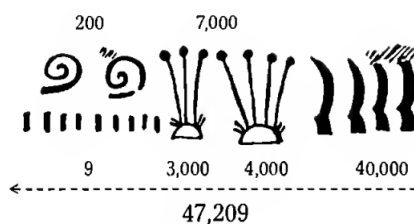
O sistema numérico desenvolvido pelos egípcios possui também um método para representar frações. Um hieróglifo específico, com um formato que lembra uma boca, ao lado ou acima de um número indica que aquele número é o denominador de uma fração

Figura 13 – Estátua do rei KhaSeKhem (cerca de 2.800 a.C.).



Fonte: (Egypt Museum, b).

Figura 14 – Inscrição aos pés da estátua do rei KhaSeKhem.



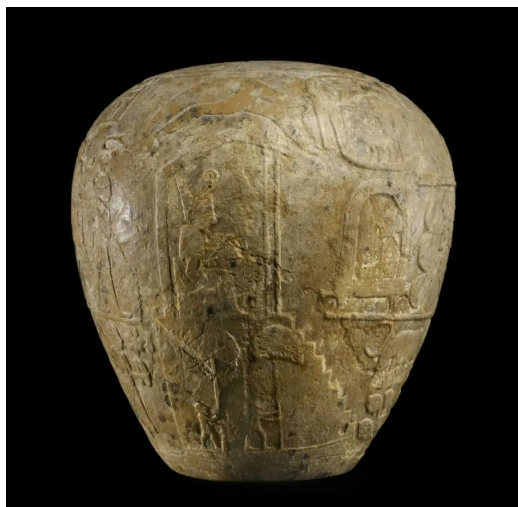
Fonte: IFRAH, 2000, p. 166.

com numerador 1, como mostra a Figura 18. Nesse sistema, outras frações são escritas como soma de frações com numerador 1.

As frações um meio, dois terços e três quartos tinham sinais gráficos próprios (ver Figura 19). Essas duas últimas eram as únicas com numerador diferente de 1.

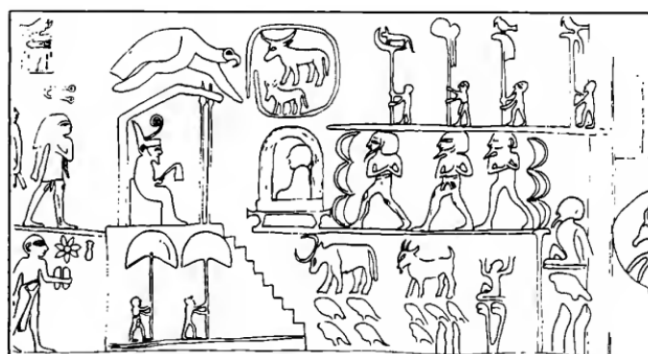
Uma escrita muito especial era usada para frações de medidas de volume. Os egípcios usavam, para medir volumes, uma unidade de medida chamada “heqat”, que

Figura 15 – Imagem do cabo da clava do Rei Narmer.










Fonte: (Egypt Museum, a).

Figura 16 – Traçado da inscrição do cabo da clava do Rei Narmer.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 165.

Figura 17 – Números na inscrição do cabo da clava do Rei Narmer.

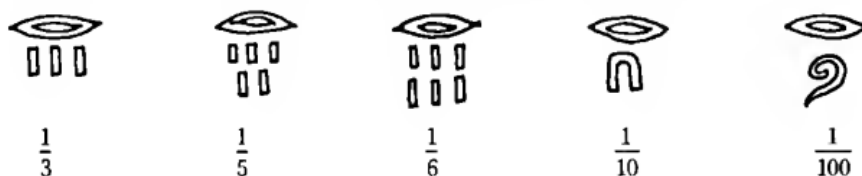
| Bulls | Goats | Prisoners |
|--|---|---|
|  400,000 |  1,000,000  2,000  400,000  20,000 |  100,000  20,000 |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 165.

equivale a 4,785 litros. As frações do heqat mais utilizadas no cotidiano eram representadas por partes do hieróglifo que representa o olho do deus Hórus.

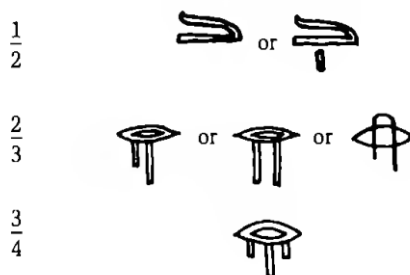
Na religião egípcia da época, Hórus era filho da deusa Ísis e do deus Osíris, o deus assassinado e cortado em treze pedaços por seu irmão, Seth. Quando cresceu, Hórus dedicou-se a vingar seu pai, e suas batalhas com seu tio Seth foram longas e sangrentas. Em um desses combates, Seth arrancou o olho de Hórus, cortou-o em seis pedaços e espalhou-os pelo Egito (IFRAH, 2000, p. 169).

Figura 18 – Hieróglifo que representa frações.



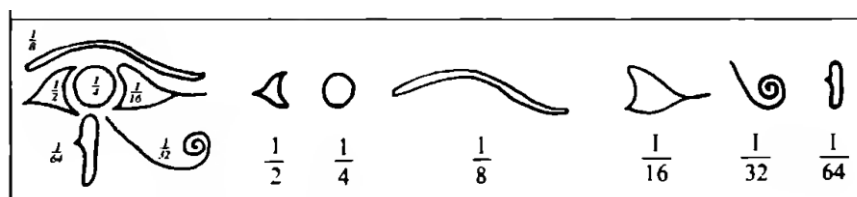
Fonte: IFRAH, 2000, p. 165.

Figura 19 – Frações especiais.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 169.

Figura 20 – Frações do olho de Horus.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 169.

3.4 O sistema numérico grego

Antes dos gregos, a civilização minoica se desenvolveu na ilha de Creta entre 2200 e 1450 a.C. Sob influência egípcia, os minoicos desenvolveram uma escrita hieroglífica, que sobreviveu ao tempo em inscrições feitas em objetos decorativos, como vasos e pedaços de marfim e de chifres de cervos, e em objetos feitos para escrita, como rótulos, barras, discos e tabuletas de argila.

Nas inscrições minoicas, os números, em base decimal, eram representados com os seguintes símbolos: um traço vertical ou uma semicircunferência para 1, um ponto ou uma barra horizontal para 10, uma barra inclinada para 100, um losango para 1000. Cada símbolo era repetido até 9 vezes, compondo um princípio aditivo. Havia também um símbolo formado por dois traços inclinados, como uma letra V, que indicava (provavelmente) a fração um quarto.

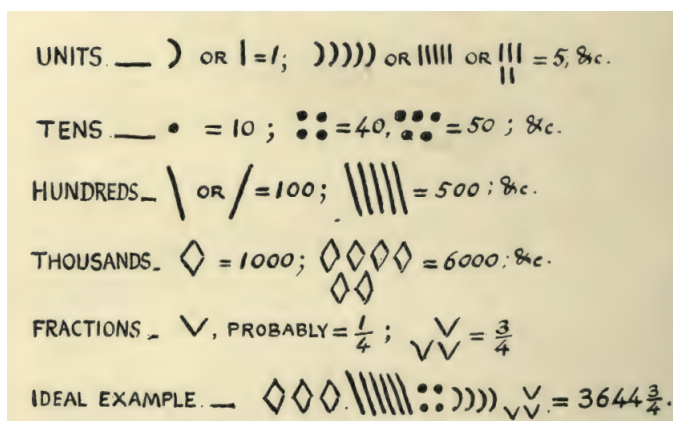
Não se sabe ao certo o que levou ao fim da civilização minoica, mas a região foi posteriormente palco do surgimento da civilização grega. Os símbolos numéricos

Figura 21 – Etiquetas e barras de barro com inscrições hieroglíficas minoicas.



Fonte: EVANS, 1909, p. 20.

Figura 22 – Escrita numérica minoica.



Fonte: EVANS, 1909, p. 258.

estritamente gregos mais antigos foram descritos pelo gramático bizantino Herodiano por volta de 200 d.C., por isso são chamados de números herodianos. Por ocorrerem muito em Atenas, também são conhecidos como números áticos. Eles eram representados por letras gregas, que indicavam os números 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1.000, 5.000, 10.000 e 50.000. Com estes símbolos e o princípio aditivo, se escreviam os demais números. Como muitos desses símbolos eram as letras iniciais do nome do número, tal sistema numérico é classificado como acrofônico.

Os números 50, 500, 5.000 e 50.000 são formados a partir de outros por um sistema multiplicativo. Escrevendo 10, 100, 1.000 ou 10.000 “dentro” do 5, temos o produto de 5 por tal número, formando assim 50, 500, 5.000 e 50.000. Esta é provavelmente uma evolução do sistema que economiza na escrita, pois evita escrever até 9 símbolos repetidamente, como escreviam os minoicos.

Os gregos mudaram seu modo de escrever os números. Passaram a usar um sistema numérico no qual as letras do alfabeto representavam os números. Eles usavam as vinte e quatro letras de seu alfabeto acrescidas de outras três letras.

Esse novo sistema tem a grande desvantagem de ter mais símbolos, ao ser comparado

Figura 23 – Escrita numérica grega, conhecida como escrita ática ou escrita herodiana.

| | | | | | |
|----|-------|-------|-------|--------|-------|
| 1 | ι | 100 | Η | 10,000 | Μ |
| 2 | ϛ | 200 | ΗΗ | 20,000 | ΜΜ |
| 3 | ϛϛ | 300 | ΗΗΗ | 30,000 | ΜΜΜ |
| 4 | ϛϛϛ | 400 | ΗΗΗΗ | 40,000 | ΜΜΜΜ |
| 5 | Ϛ | 500 | Ϟ | 50,000 | Ϟ |
| 6 | Ϛι | 600 | ϞΗ | 60,000 | ϞΜ |
| 7 | Ϛϛ | 700 | ϞΗΗ | 70,000 | ϞΜΜ |
| 8 | Ϛϛϛ | 800 | ϞΗΗΗ | 80,000 | ϞΜΜΜ |
| 9 | Ϛϛϛϛ | 900 | ϞΗΗΗΗ | 90,000 | ϞΜΜΜΜ |
| 10 | Δ | 1,000 | Χ | | |
| 20 | ΔΔ | 2,000 | ΧΧ | | |
| 30 | ΔΔΔ | 3,000 | ΧΧΧ | | |
| 40 | ΔΔΔΔ | 4,000 | ΧΧΧΧ | | |
| 50 | Ϟ | 5,000 | Ϟ | | |
| 60 | ϞΔ | 6,000 | ϞΧ | | |
| 70 | ϞΔΔ | 7,000 | ϞΧΧ | | |
| 80 | ϞΔΔΔ | 8,000 | ϞΧΧΧ | | |
| 90 | ϞΔΔΔΔ | 9,000 | ϞΧΧΧΧ | | |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 182.

Figura 24 – A letra era a inicial do nome do número.

| THE SIGN | WHICH IS THE SAME AS THE LETTER | WHOSE VALUE IS | IS THE FIRST LETTER OF THE WORD | WHICH IS THE GREEK NAME OF THE NUMBER |
|----------|---------------------------------------|----------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| Γ | PI (the archaic form of the letter Π) | 5 | Πεντε (Pente) | Five |
| Δ | DELTA | 10 | Δεκα (Deka) | Ten |
| Η | ETA | 100 | Ηεκατον (Hekaton) | Hundred |
| Χ | KHI | 1,000 | Χιλιοι (Khilioi) | Thousand |
| Μ | MU | 10,000 | Μυριοι (Murioi) | Ten thousand |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 182.

Figura 25 – O princípio multiplicativo no sistema numérico grego.

| | | |
|--------|------------|------------|
| 50 | Ϟ = Ϛ . Δ | 5 × 10 |
| 500 | ϞΗ = Ϛ . Η | 5 × 100 |
| 5,000 | ϞΧ = Ϛ . Χ | 5 × 1,000 |
| 50,000 | ϞΜ = Ϛ . Μ | 5 × 10,000 |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 182.

Figura 26 – O novo sistema numérico grego.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|------------|------------|----------|----------|-----------|-------------|---------------|--------------|---------------|-------|-------|------------|-------|-----------|----|
| α | β | γ | δ | ϵ | ζ | η | θ | ι | κ | λ | μ | ν | ξ | \omicron | π | φ | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ρ | σ | τ | υ | ϕ | χ | ψ | ω | ϑ | $\iota\alpha$ | $\iota\beta$ | $\iota\gamma$ | | | | | | |
| 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1,000 | 2,000 | 3,000 | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | β | γ | | | | | | | | | | | |
| | | | | | M | M | M, | | | | | | | | | | |
| | | | | | 10,000 | 20,000 | 30,000 | | | | | | | | | | |

Fonte: CAJORI, 1993, p. 25.

com os números áticos. Assim, ele é mais pesado para a memória. Não se sabe o real motivo da substituição dos números áticos por outro sistema. As relações comerciais entre gregos e fenícios, sírios e hebreus podem ter provocado a mudança.

3.5 O sistema numérico romano

O antigo sistema numérico usado pelos romanos é composto por números representados por letras, com algumas regras de adição e subtração. As letras usadas são I, V, X, L, C, D e M, representando respectivamente os números 1, 5, 10, 50, 100, 500 e 1.000.

Figura 27 – Sinais gráficos do sistema numérico romano.

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| I | V | X | L | C | D | M |
| 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1,000 |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 187.

Os outros números são formados através do uso sucessivo destes números e da adição de valores, no caso de números iguais e de números menores após números maiores, e da subtração de valores, no caso de números menores antes de números maiores. Essas regras ficam bem expostas nos exemplos a seguir:

- II = 2, III = 3, XX = 20, CCC = 300 (números iguais somados).
- VII = 7, LX = 60, DCCC = 800 (adição de números menores após números maiores).
- IV = 4, XC = 90, CD = 400 (subtração de números menores antes de números maiores).

- MMCMLXXVIII = 2.978 (adição e subtração).

Os numerais romanos como conhecemos hoje parecem pensados a partir do alfabeto latino. Entretanto, inicialmente eles possuíam representações diferentes.

... Como observaram T. Mommsen (1840) e E. Hübner (1885), esses sinais gráficos não são as primeiras formas das figuras neste sistema. Na verdade, eles foram precedidos por formas muito mais antigas, que nada tinham a ver com letras de um alfabeto. São modificações tardias de formas muito mais antigas (IFRAH, 2000, p. 187).

Os algarismos romanos vieram do ato de entalhar uma vara (ou osso) para contagem. Esta foi uma técnica primitiva onde se entalhava com traços uma vara (ou osso) para estabelecer uma correspondência um-a-um entre os objetos a serem contados e os objetos usados para contá-los. Assim, é natural que as representações gráficas desses números estavam ligadas a formas muito mais antigas, sem qualquer vínculo com as letras de um alfabeto.

O número 1 era representado por uma linha vertical, que vem do traço feito na vara (ou osso) de contagem. A posição vertical é natural, ao se pensar que é mais fácil, mais comum, fazer traços em uma vara (ou osso) segurando-a na horizontal para o uso de alguma ferramenta de entalhe, o que deixa os traços na vertical. O número 5 e o número 10 vêm do uso de entalhes na diagonal, com objetivo de ter um entalhe distinto do que representa 1. Dois traços diagonais formando um ângulo agudo eram usados para o 5 e dois traços diagonais sobrepostos e com inclinações opostas eram usados para 10. É natural que esses símbolos tenham se tornado as letras I, V e X com o passar do tempo.

Os números 50 e 100, que surgiram, por uma questão de uso, após os números até 10, eram inicialmente representados também por traços. O 50 era o 5 com uma linha vertical em seu centro e o 100 era a junção de dois traços diagonais e um vertical. Repare que a representação do 50 é “metade” da representação do 100, fato que também ocorre com os números 5 e 10 e com 500 e 1.000. O 500 era um semicírculo em ângulo e o 1.000 era um círculo com uma cruz sobreposta.

Figura 28 – Sinais gráficos do sistema numérico romano.

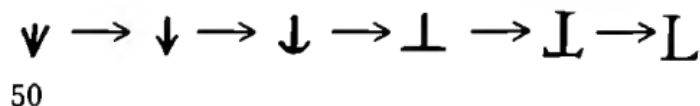
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1,000 |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 188.

Com o passar do tempo, esses símbolos foram evoluindo para as letras do alfabeto latino. Os sinais para 1, 5 e 10 foram, de forma óbvia, associados às letras I, V e X. Os outros passaram por um processo evolutivo, foram gradativamente sendo modificados.

O sinal gráfico para 50, ainda encontrado até o reinado de Augusto (27 a.C. - 14 d.C.), evoluiu progressivamente, transformando-se finalmente na letra L por volta do primeiro século a.C..

Figura 29 – Evolução do sinal gráfico para 50.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 188.

A evolução do número 100 para a letra C tem a ver com a palavra em latim *centum*, que significa “cem”. Primeiro passou para uma forma mais arredondada e depois tomou a forma da letra C (ver Figura 30). O mesmo ocorre com o número 1.000 e a palavra em latim *mille*, cuja inicial é M.

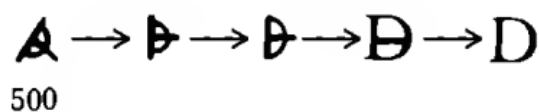
Figura 30 – Evolução do sinal gráfico para 100.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 188.

O símbolo para 500 sofreu inicialmente uma rotação de 45° no sentido anti-horário. Depois sofreu outras alterações e se transformou na letra D (ver Figura 31)

Figura 31 – Evolução do sinal gráfico para 500.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 188.

Os números romanos foram moldados para seu formato atual pelos romanos, mas surgiram centenas (ou talvez milhares) de anos antes da civilização romana. Os etruscos, povo que dominava a península itálica e desapareceu como povo distinto durante o império romano, os oscos, os umbros, já possuíam números com a forma e a estrutura dos algarismos romanos arcaicos. Tendo em vista que a escrita latina derivou da escrita etrusca e que esta derivou da escrita grega, é bem fácil aceitar a hipótese de que os números romanos vêm dos números etruscos e estes possuem origem grega.

O pouco de matemática que os romanos possuíam não veio inteiramente dos gregos, mas em parte de fontes mais antigas. Exatamente onde e como parte dela se originou é uma questão de dúvida. Parece mais

provável que a notação romana, bem como a geometria prática primitiva dos romanos, tenha vindo dos antigos etruscos, que, no período mais antigo ao qual nosso conhecimento deles se estende, habitavam a região (CAJORI, 1919).

Figura 32 – Escritas numéricas etruscas.

| | | | |
|----|-------------------------|-----|-------------------------|
| 1 | I | 38 | XIIXXX |
| 2 | II | 42 | IIIXXXX |
| 3 | III | 44 | IIIIIXXXX |
| 4 | IIII | | ↑ |
| 5 | Λ or ∩ | 50 | ↑ or Λ or ∩ |
| 6 | ←IIΛ | 52 | ←II↑ |
| 7 | ←IIΛ | 55 | ←Λ↑ |
| 8 | ←IIII∩ | 60 | ←X↑ |
| 9 | ←IIIIΛ | 75 | ←ΛX·X↑ |
| 10 | X or X or + | 82 | ←II+++↑ |
| 19 | XIX | 86 | ←IIIIIXXX↑ |
| 36 | ←IIIXXX.. | 100 | * or * or * |
| 38 | ←IIIIIXXX | 106 | ←IIΛ* |

Fonte: IFRAH 2000, p.190.

A título de comparação da similaridade dos sinais gráficos, a Figura 32 mostra escritas numéricas dos etruscos e a Figura 33 mostra lado a lado alguns números etruscos e romanos.

Figura 33 – Comparação entre numéricas etruscas e romanas.

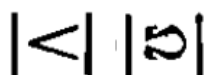
| ETRUSCAN | | ROMAN | |
|----------|-------------|-------|-----|
| 1 | | | 1 |
| 5 | ^ | v | 5 |
| 10 | x or / or + | x | 10 |
| 50 | ^ | v | 50 |
| 100 | * | * | 100 |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 197.

3.6 Os sistemas numéricos fenício e sírio

Os fenícios, civilização que surgiu na costa oriental do Mediterrâneo, onde hoje é o Líbano, Síria e parte de Israel, eram excelentes navegadores e, como consequência, grandes comerciantes. Foram responsáveis pelo primeiro alfabeto fonético que se tem notícia, que foi criado há cerca de três mil anos. A escrita dos números pelos fenícios, que provavelmente é anterior ao alfabeto, era feita usando traços. Os fenícios representavam os números de 1 a 9 usando uma respectiva quantidade de traços verticais e usavam um traço horizontal para representar o número 10. Fazendo uma simples composição, escreviam de 11 até 19 usando um traço horizontal seguido do respectivo número de traços verticais. Como escreviam da direita para a esquerda, o traço horizontal, 10, ficava à direita do número. O número 20 tinha mais representações. Podia ser dois traços paralelos horizontais, dois traços paralelos inclinados, dois traços paralelos e ligados por um traço cruzado, como uma letra H, dois traços inclinados, como um acento circunflexo. O número 100 era representado de duas formas, como mostra a Figura 34.

Figura 34 – Sinais gráficos fenícios para o número 100.

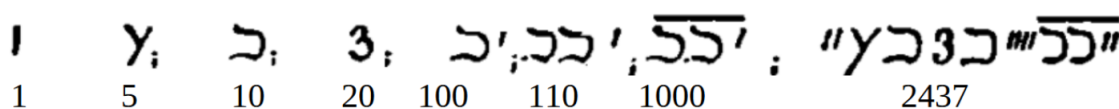


Fonte: CAJORI, 1993, p. 18.

No sítio arqueológico de Palmira (antiga metrópole fenícia localizada no deserto sírio e com papel fundamental na famosa Rota da Seda) foram encontradas inscrições, feitas em meados do século 3 da nossa era, onde os fenícios usavam símbolos parecidos com os descritos, mas também usavam um símbolo para o número 5. Além disso, usavam pequenos traços verticais à direita do 10 para indicar 10 multiplicado por 10, por 20, 30, ou seja, para escrever 100, 200, 300 e assim por diante. Um traço indica a multiplicação de 10 por 10, dois traços, a multiplicação de 10 por 20 e assim por diante.

Influenciados pelos fenícios, os numerais sírios, encontrados em manuscritos dos

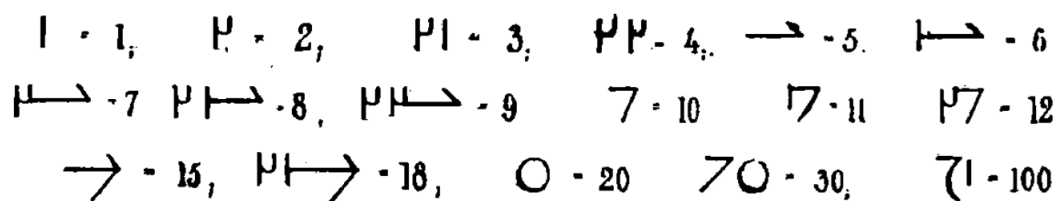
Figura 35 – Exemplos de escrita numérica fenícia.



Fonte: CAJORI, 1993, p. 18.

séculos VI e VII d.C., usavam as 22 letras de seu alfabeto para representar os números de 1 a 9, as dezenas de 10 a 90 e as centenas até 400. Outras centenas eram escritas com somas, por meio da justaposição das centenas de 100 a 400. Por exemplo, $500 = 400 + 100$, $700 = 400 + 300$, $900 = 400 + 400 + 100$. As centenas de 500 a 900 também eram escritas usando a correspondente dezena de 50 a 90, acrescida de um ponto sobre o símbolo, que indicava uma multiplicação por 10. As unidades de milhar eram escritas com os respectivos números de 1 a 9 acrescidos de um traço, como subscrito.

Figura 36 – Exemplos de escrita numérica síria.



Fonte: CAJORI, 1993, p. 19.

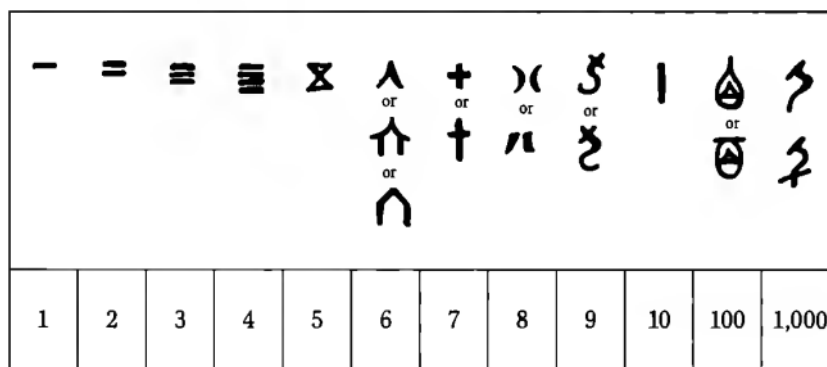
3.7 O sistema numérico chinês

As evidências mais antigas da escrita de numerais chineses são milhares de ossos e cascos de tartarugas, datados entre os séculos XIV e XII a.C., encontrados desde o final do século XIX. Eles apresentam inscrições gravadas por meio de objeto pontiagudo e rachaduras causadas por calor. Seriam objetos usados em adivinhação por fogo.

As inscrições neles são uma mistura de sinais gráficos onde objetos e conceitos são representados de forma direta e sinais que representam conceitos ou ideias de forma abstrata, ou seja, uma mistura de escrita pictográfica com escrita ideográfica. Isso sugere ser uma escrita de origem pictográfica com uma evolução, representando um estágio bem avançado de representação gráfica.

Os números chineses foram escritos com o correspondente número de traços horizontais para 1, 2, 3 e 4 e um traço vertical para 10. Os chineses, diferentemente de outros povos, usaram outros cinco símbolos distintos para os números de 5 a 9 e também símbolos para as três primeiras potências de 10 (ver Figura 37). Símbolos aparentemente sem sugestões intuitivas com os números representados.

Figura 37 – Os primeiros sinais gráficos numéricos chineses.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 269.

De posse dos números de 1 a 9 e das três primeiras potências de 10, com base decimal, os números intermediários eram escritos usando o princípio multiplicativo e o aditivo, com ligeiras mudanças gráficas nos números 20, 30 e 40, que são gerados pela repetição e junção das respectivas quantidades do símbolo do número 10 como um único símbolo. As dezenas de 50 a 90 são uma sobreposição do símbolo do número 10 acima do respectivo número de 5 a 9, indicando uma multiplicação.

Com uma construção parecida, mas com o 10 abaixo, temos os números de 11 a 19, escritos com uma sobreposição do correspondente número de 1 a 9 acima do número 10, que indica o princípio aditivo.

Para as centenas, utiliza-se o mesmo princípio das dezenas de 50 a 90, colocando o respectivo número de 1 a 9 acima do número 100. O mesmo ocorre com os milhares de 1.000 a 9.000.

Outros números são escritos com o princípio aditivo dos números descritos acima. Assim, 653 é escrito como 6.100+5.10+3, com justaposição indicando a soma e considerando o sentido de escrita (e leitura), que é de cima para baixo e da esquerda para a direita. A Figura 38 mostra exemplos de todas essas construções numéricas.

Os símbolos para as quatro primeiras dezenas sofreram diversas mudanças desde o século X a.C., como mostra a Figura 39.

A escrita numérica chinesa sofreu muitas alterações. A Figura 40 mostra variações nas formas gráficas dos numerais chineses, encontradas em inscrições dos séculos V a III a.C.

Após variações, o sistema numérico chinês passou a ser composto por um conjunto de treze símbolos (ver Figura 41), que representam os números de 1 a 9 e as quatro primeiras potências de 10 (10, 100, 1.000 e 10.000). Esse é o atual sistema numérico chinês.

Os múltiplos das potências de 10 são construídos, até 90.000, com o princípio multiplicativo, mas sem juntar símbolos. Para os números intermediários, são usados os

Figura 38 – Sistema numérico chinês.

| | | | | | |
|----|--|--------|-----|-------|---|
| 11 | | 10 1 | 100 | 1,000 | 10×5 and 6 ↓ $10 \times 8 + 8$ ↓ $1 \times 100 + 10 \times 6 + 4$ ↓ 2×100 and 9 ↓ $6 \times 100 + 10 \times 5 + 6$ ↓ |
| 12 | | 20 U | 200 | 2,000 | |
| 13 | | 30 W | 300 | 3,000 | |
| 14 | | 40 W | 400 | 4,000 | |
| 15 | | 50 | 500 | 5,000 | |
| 16 | | 60 | 600 | 6,000 | |
| 17 | | 70 | 700 | 7,000 | |
| 18 | | 80 | 800 | 8,000 | |
| 19 | | 90 | 900 | 9,000 | |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 271.

Figura 39 – Mudanças nos sinais gráficos dos números 10, 20, 30 e 40.

| 10 | 20 | 30 | 40 |
|----|----|-----|------|
| | U | W | W |
| † | U | U | U |
| † | †† | ††† | †††† |
| † | †† | ††† | †††† |
| † | †† | ††† | †††† |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 271.

princípios multiplicativo e aditivo.

Tradicionalmente, a escrita chinesa é feita e lida em colunas, de cima para baixo e da esquerda para a direita. Atualmente, os chineses escrevem horizontalmente, da esquerda para a direita. Como exemplo, a Figura 43 mostra uma página de um documento chinês datado do início do século XV.

Figura 40 – Variações nas formas gráficas dos numerais chineses, conforme encontradas em inscrições do final do período dos reinos guerreiros (séculos V a III a.C.).

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 100 | 1,000 | 10,000 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|-----|-------|--------|---|---|---|
| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 百 | 千 | 萬 | 萬 | 萬 | 萬 |
| 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 |
| 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 |
| 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 | 𠄎 |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 271.

Figura 41 – Os treze símbolos.

| | | | |
|---|---|--------|---|
| 1 | 一 | 10 | 十 |
| 2 | 二 | | |
| 3 | 三 | 100 | 百 |
| 4 | 四 | | |
| 5 | 五 | 1,000 | 千 |
| 6 | 六 | | |
| 7 | 七 | 10,000 | 萬 |
| 8 | 八 | | |
| 9 | 九 | | |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 271.

Para números maiores, o conjunto de treze símbolos, com uma extensão simples, é capaz de escrever qualquer número, até cem bilhões. Para tal, o símbolo para 10.000 é usado como uma unidade para a construção de 100.000, 1.000.000, etc.

Em textos científicos ou muito específicos, onde se escreve números muito grandes, são usados outros dez símbolos. Eles podem representar as potências de 10 de 10^5 até 10^{14} , ou podem representar de 10^8 até 10^{44} , sendo que cada símbolo representa uma potência

Figura 42 – A notação chinesa moderna para múltiplos consecutivos das quatro primeiras potências de 10.

| | | | | | | | |
|----|--------------------------------------|-----|---------------------------------------|-------|---|--------|--|
| 10 | 一十 1×10 -----> | 100 | 一百 1×100 -----> | 1,000 | 一千 $1 \times 1,000$ -----> | 10,000 | 一萬 $1 \times 10,000$ -----> |
| 20 | 二十 2×10 -----> | 200 | 二百 2×100 -----> | 2,000 | 二千 $2 \times 1,000$ -----> | 20,000 | 二萬 $2 \times 10,000$ -----> |
| 30 | 三十 3×10 -----> | 300 | 三百 3×100 -----> | 3,000 | 三千 $3 \times 1,000$ -----> | 30,000 | 三萬 $3 \times 10,000$ -----> |
| 40 | 四十 4×10 -----> | 400 | 四百 4×100 -----> | 4,000 | 四千 $4 \times 1,000$ -----> | 40,000 | 四萬 $4 \times 10,000$ -----> |
| 50 | 五十 5×10 -----> | 500 | 五百 5×100 -----> | 5,000 | 五千 $5 \times 1,000$ -----> | 50,000 | 五萬 $5 \times 10,000$ -----> |
| 60 | 六十 6×10 -----> | 600 | 六百 6×100 -----> | 6,000 | 六千 $6 \times 1,000$ -----> | 60,000 | 六萬 $6 \times 10,000$ -----> |
| 70 | 七十 7×10 -----> | 700 | 七百 7×100 -----> | 7,000 | 七千 $7 \times 1,000$ -----> | 70,000 | 七萬 $7 \times 10,000$ -----> |
| 80 | 八十 8×10 -----> | 800 | 八百 8×100 -----> | 8,000 | 八千 $8 \times 1,000$ -----> | 80,000 | 八萬 $8 \times 10,000$ -----> |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 263.

de 10 com expoente múltiplo de 4, ou ainda pode representar de 10^8 até 10^{4096} , sendo que cada símbolo representa uma potência de 10 com expoente começando em 8 e dobrando no próximo estágio.

Há ainda um outro sistema numérico usado no extremo oriente que tem características completamente diferentes das descritas acima. Trata-se de um sistema numérico decimal e posicional, usado por matemáticos chineses, japoneses e coreanos. Nas palavras de (IFRAH, 2000, p.278) "Embora conheçamos apenas exemplos desse sistema que datam do século II a.C., parece provável que remonte a muito mais tempo".

Esse sistema é conhecido em chinês pelo nome *suan zǐ*, que significa “cálculo com barras”. Nele, os números de 1 a 5 são representados pela correspondente quantidade de barras verticais e os números de 6 a 9 são representados por uma barra horizontal, que indica 5, acrescida da quantidade correspondente de barras verticais.

Como o sistema é posicional, ou seja, o valor do número está relacionado à sua

Figura 43 – Página traduzida de documento chinês do século XV.

| Col. VIII | Col. VII | Col. IV | Col. I |
|---|--|---|--|
| $\begin{array}{r} 1 \times \\ + 100 \\ + 6 \\ \times 10 \\ + 1 \\ \hline 161 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 3 \times \\ \times 100 \\ + 4 \\ \times 10 \\ + 5 \\ \hline 345 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 2 \times \\ \times 100 \\ + 4 \\ \times 10 \\ \hline 240 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 1 \times \\ \times 10,000 \\ + 6 \\ \times 1,000 \\ + 3 \\ \times 100 \\ + 4 \\ \times 10 \\ + 3 \\ \hline 16,343 \end{array}$ |
| $\begin{array}{r} 3 \times \\ \times 10 \\ + 2 \\ \hline 32 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 1 \times \\ \times 10 \\ + 2 \\ \hline 12 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 1 \times \\ \times 1,000 \\ + 3 \\ \times 100 \\ + 2 \\ \times 10 \\ + 8 \\ \hline 1,328 \end{array}$ | |

永樂大典卷之一萬六千三百四十三 十翰

算 算法十四

吳乘同除詳明算法歌曰吳乘同除法何如物實錢來做例兒先下原錢乘六物却將原物法除之將錢買物互乘取百里十斤以類推算者留心能善用一絲一忽不差池。

九章算經今有絲一斤價直二百四十今有錢一千三百二十八問得絲幾何。

答曰五斤八兩一十二銖五分銖之四。

術曰以一斤價數為法以一斤乘今有錢數為實實如法得絲數。此術今有之。或以一斤價為所有平。一斤為所求平。今有錢為所有數。而

今有絲一斤價直三百四十五今有錢七兩一十二銖問得錢幾何。

答曰一百六十一錢三十二分錢之二十三。

術曰以一斤錢數為法以一斤價數乘之。七兩一十二銖為實。實如法得

Fonte: IFRAH, 2000, p. 264.

Figura 44 – Extensão do sistema com treze símbolos para a escrita de números grandes.

| | | | | | |
|--------|--------------------------|-----------------------------|-----------|-------------------------------|---|
| 10^4 | 一萬 <i>yī wàn</i> | 1×10^4 | 10^8 | 一萬萬 <i>yī wàn wàn</i> | $1 \times 10^4 \times 10^4$ |
| 10^5 | 十萬 <i>shí wàn</i> | 10×10^4 | 10^9 | 十萬萬 <i>shí wàn wàn</i> | $10 \times 10^4 \times 10^4$ |
| 10^6 | 百萬 <i>yī bǎi wàn</i> | $1 \times 10^2 \times 10^4$ | 10^{10} | 百萬萬 <i>yī bǎi wàn wàn</i> | $1 \times 10^2 \times 10^4 \times 10^4$ |
| 10^7 | 千萬 <i>yī qiān wàn</i> | $1 \times 10^3 \times 10^4$ | 10^{11} | 千萬萬 <i>yī qiān wàn wàn</i> | $1 \times 10^3 \times 10^4 \times 10^4$ |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 277.

posição, pode haver a alternância de barras verticais e horizontais para evitar ambigüidade em alguns casos⁴, como mostra a Figura 47.

A ausência de um sinal que representasse os dígitos ausentes gerava, obviamente, confusões. A tentativa de deixar um espaço vazio para representar onde não havia um dígito era bastante confusa em números como 764, 7.064, 70.640 e 76.400. Alguns usavam os sinais das potências de 10 do sistema tradicional para auxiliar, outros escreviam esses

Figura 45 – Escrita numérica para textos científicos, onde se escreve números muito grandes.

| | | | |
|--------------------------|-----------|-----------|-------------|
| 萬 <i>wàn</i> | 10^4 | 10^4 | 10^4 |
| 億 <i>yì^a</i> | 10^5 | 10^8 | 10^8 |
| 兆 <i>zhào</i> | 10^6 | 10^{12} | 10^{16} |
| 京 <i>jīng</i> | 10^7 | 10^{16} | 10^{32} |
| 垓 <i>gāi</i> | 10^8 | 10^{20} | 10^{64} |
| 補 <i>bù^b</i> | 10^9 | 10^{24} | 10^{128} |
| 壤 <i>ràng</i> | 10^{10} | 10^{28} | 10^{256} |
| 溝 <i>gōu^c</i> | 10^{11} | 10^{32} | 10^{512} |
| 澗 <i>jiàn</i> | 10^{12} | 10^{36} | 10^{1024} |
| 正 <i>zhèng</i> | 10^{13} | 10^{40} | 10^{2048} |
| 載 <i>zài</i> | 10^{14} | 10^{44} | 10^{4096} |

THEORETICAL VALUES

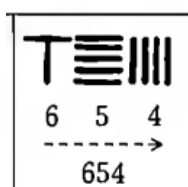
Fonte: IFRAH, 2000, p. 278.

Figura 46 – Escrita numérica *suan zi*.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 279.

Figura 47 – Número 654 escrito no sistema numérico *suan zi*.

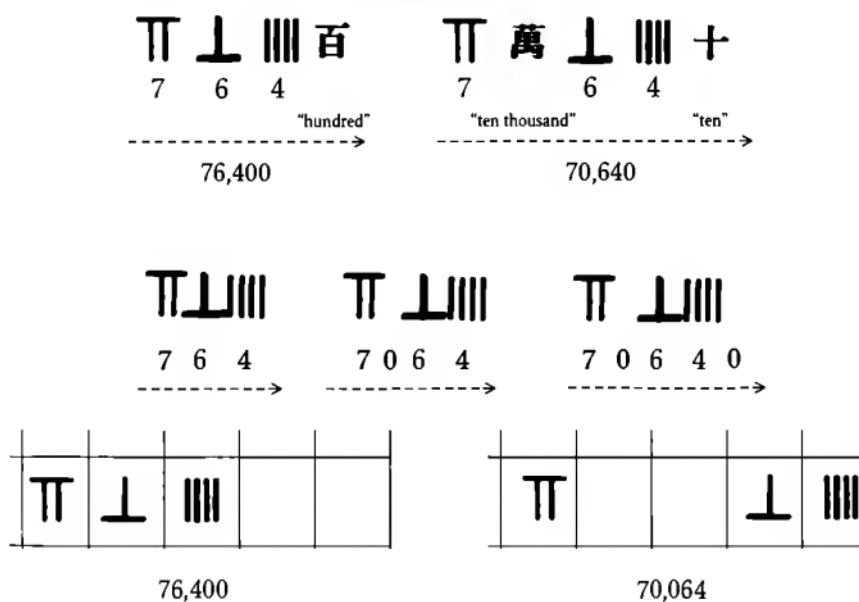


Fonte: IFRAH, 2000, p. 281.

números com ambiguidades usando o sistema tradicional, outros escreviam o número em uma malha quadriculada, que delimitava exatamente o dígito vazio.

A partir do século VIII, d.C. os chineses, influenciados pelos indianos, introduziram

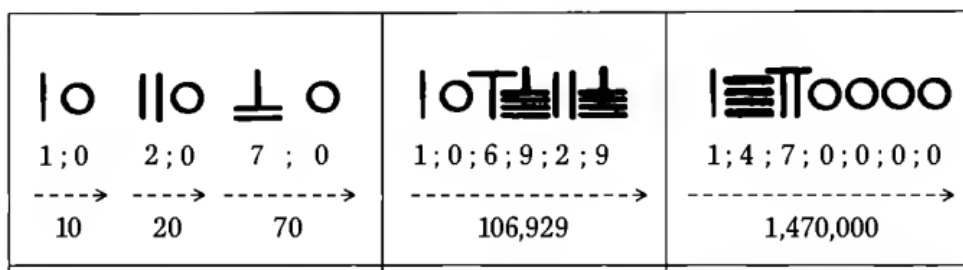
Figura 48 – Opções que supriam a falta do símbolo para zero.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 281.

um sinal posicional especial, que era um círculo, para representar um dígito ausente.

Figura 49 – Números escritos no sistema suan zi já com a utilização do sinal gráfico para o zero.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 281.

Com o passar dos séculos, a escrita chinesa não sofreu mudança fundamental. A língua chinesa é dividida em vários dialetos locais; os caracteres são lidos de forma diferente, mas a escrita é mantida. Com isso, povos diferentes são capazes de entendê-los. O resultado é que povos que não conseguem se comunicar verbalmente, por terem línguas distintas, conseguem entender a mesma escrita.

Como consequência, povos que atualmente habitam outros países, como Vietnã, antes Annam, e Japão, adotaram a escrita chinesa, mas pronunciavam à sua maneira, dando origem à escrita vietnamita chamada *chu'nom* (escrita de letras) e à escrita japonesa, essa com mais modificações devido ao idioma (a escrita vietnamita originada da chinesa foi abandonada no Vietnã no início do século XX, quando foi trocada por um sistema alfabético de origem latina).

3.8 O sistema numérico maia

Durante o primeiro milênio da era cristã, se desenvolveu na América Central a civilização maia. Embora tenha sido um povo que não inventou a roda, não usou animais de tração nem conheceu o metal ou o vidro, os maias chegaram a um estágio muito avançado em áreas como arte, arquitetura, matemática e astronomia.

Tudo isso foi feito com ferramentas que não se desenvolveram desde a Idade da Pedra: os maias não descobriram a roda, nem usaram animais de tração, nem quaisquer metais. A verdadeira glória dos maias reside em suas realizações abstratas e intelectuais (IFRAH, 2000, p. 297).

Com uma precisão astronômica muito maior do que seus contemporâneos europeus, os maias calcularam como sendo 584 dias a revolução sinódica de Vênus (tempo que demora para que Vênus, partindo de um ponto, retorne à mesma posição, observado da Terra), cujo cálculo moderno é 583,92 dias. Outro grande exemplo da avançada astronomia maia é o cálculo do ano solar. Embora só operassem com números inteiros, a medição do ano solar maia era de 365,242 dias. O atual calendário ocidental tem o ano solar com 365 dias e, com anos bissextos, dá uma média de 365,2425 dias. Cálculos modernos do ano solar apresentam a medição de 365,242198 dias, o que coloca a medição mais próxima do valor real.

Quando os europeus conquistaram a América Central, a civilização maia estava praticamente extinta há várias gerações. As culturas pré-colombianas foram sistematicamente suprimidas pelos conquistadores, cuja religião não compactuava com rituais religiosos onde a prática de sacrifício era comum. Na tentativa de converter os nativos ao cristianismo, os espanhóis buscaram erradicar todos os vestígios das práticas religiosas encontradas. Como a ciência maia estava diretamente ligada às crenças, quase todo o conhecimento maia foi perdido, queimado. Restaram poucos escritos maias. Alguns esculpidos em templos ou objetos e outros, que são mais completos, chamados de códices maias, são uma espécie de livro hieroglífico, com representações pictográficas e escrita fonética. Três desses códices foram descobertos na Europa durante os séculos XVIII e XIX.

Grande parte do conteúdo do códice é de natureza divina, calendárica e ritual. Com complexos mecanismos divinatórios, onde a astronomia é destaque, como nas passagens que indicariam com extrema exatidão as revoluções sinódicas do planeta Vênus associadas aos glifos que manifestam o destino (THOMPSON, 1972).

Os maias desenvolveram um sistema numérico posicional, com um zero e com base vigesimal. Nele os números de primeira ordem (de 1 a 19) são representados por pontos e traços. Um, dois, três e quatro pontos para os números de 1 a 4 e uma linha para 5. Um, dois, três e quatro pontos acima da linha para os números de 6 a 9 e duas linhas para 10. O processo se repete até 19, com o 15 sendo representado por três linhas.

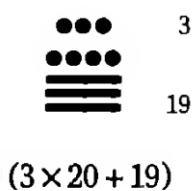
Figura 50 – Escrita numérica maia.

| | | | |
|----|---------------|----|----------------|
| 1 | • or | 11 | ⋮ or ⋮ |
| 2 | •• or • | 12 | ⋮• or ⋮ |
| 3 | ••• or •• | 13 | ⋮•• or ⋮• |
| 4 | •••• or ••• | 14 | ⋮••• or ⋮•• |
| 5 | — or | 15 | ≡ or ≡ |
| 6 | •— or • | 16 | •≡ or •≡ |
| 7 | ••— or •• | 17 | ••≡ or ••≡ |
| 8 | •••— or ••• | 18 | •••≡ or •••≡ |
| 9 | ••••— or •••• | 19 | ••••≡ or ••••≡ |
| 10 | == or | | |

Fonte: IFRAH, G. (2000), p.309.

Números maiores do que 19 são escritos com os mesmos sinais de 1 a 19, escritos na segunda e demais ordens, dispostos na vertical, com as ordens superiores acima das inferiores. Assim, o número 79 ($3 \times 20 + 19$), por exemplo, é escrito como 19 na parte inferior e 3 acima do 19, como mostra a Figura 51.

Figura 51 – Escrita numérica maia.

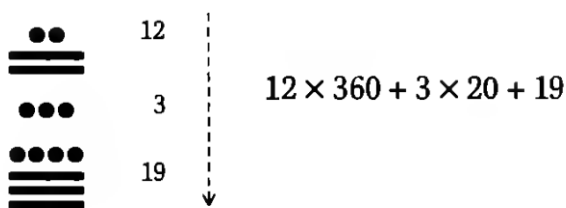


Fonte: IFRAH, 2000, p. 309.

A terceira ordem deveria, seguindo uma lógica simples, representar valores da segunda ordem multiplicados por 20, ou seja, valores da primeira ordem multiplicados por 400. Entretanto, em uma curiosa irregularidade, a terceira ordem de um número maia representa um valor de 1 a 19 multiplicado por 360 (multiplicado por 20 na segunda ordem e por 18 na terceira). Todas as demais ordens seguem a lógica de “o valor da ordem abaixo multiplicado por 20”. Como exemplo, a Figura 52 mostra o número maia representado por 12 na terceira ordem, 3 na segunda e 19 na primeira, que é o número $12 \times 18 \times 20 + 3 \times 20 + 19 = 4.399$, e não $4.879 = 12 \times 400 + 3 \times 20 + 19$.

Entre os diversos feitos que colocam os maias como uma civilização bastante

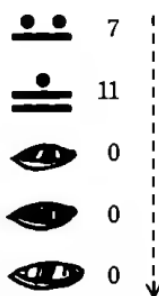
Figura 52 – Irregularidade na terceira ordem do sistema numérico maia.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 309.

desenvolvida, está o fato de que eles desenvolveram, em seu sistema numérico, um sinal gráfico para ordens sem dígitos, ou seja, os maias inventaram um zero. Nas palavras de (CAJORI, 1993, p. 43), “o sistema numérico (maia) revela a aplicação do princípio do valor local e o uso de um símbolo para zero séculos antes dos hindus começarem a usar seu símbolo para zero”. Ele é usado exatamente como no sistema numérico que usamos atualmente. Como exemplo o número 1.087.200, que no sistema numérico maia é representado por [7; 11; 0; 0; 0], como mostra a Figura 53.

Figura 53 – O zero do sistema numérico maia.



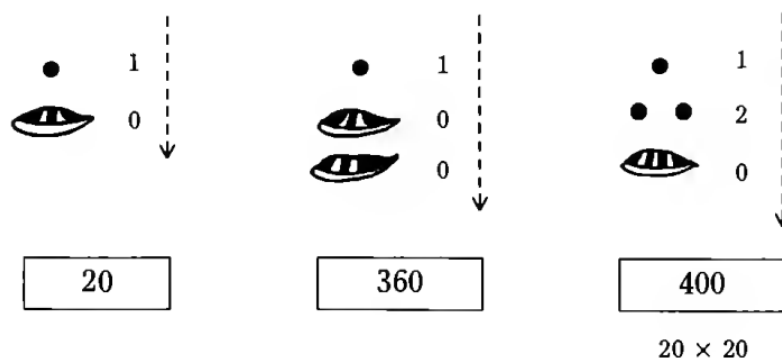
Fonte: IFRAH, 2000, p. 309.

Um fato muito importante sobre o zero maia é que, como o sistema numérico maia não é estritamente vigesimal, seu zero não possui a propriedade operacional de, ao ser adicionado ao final de um número, gerar um novo número cujo valor é o primeiro multiplicado pela base. Como exemplo, no sistema numérico maia o número [1;0;0] não é o mesmo que o número [1;0] multiplicado pela base 20. De fato, [1;0;0] = 360 e ao multiplicar [1;0] = 20 pela base 20, temos 400, como mostra a Figura 54.

Como exemplo prático da escrita numérica maia, analisemos uma página do códice maia denominado códice de Dresden (ver Figura 55), que traz uma tabela sobre as revoluções sinódicas de Vênus, calculada pelos astrônomos maias com sendo um ciclo de 584 dias. Cada uma das expressões na notação se refere a um número de dias e fornece o conjunto de equivalências mostrado na Figura 57.

Os números maias estavam associados não a questões cotidianas, como contagem, ou comércio, mas a situações científicas e religiosas, envolvendo observações astronômicas e cronologia do tempo. Esse sistema numérico não era acessível à população, era propriedade

Figura 54 – A falta da propriedade operacional do zero maia.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 311.

















































Figura 55 – Imagem de uma das páginas de um códice maia.



Fonte: (FORSTEMANN; SCHELE,)

exclusiva dos sacerdotes. A ciência maia era praticada nos templos e as descobertas astronômicas, entre elas o calendário maia, que é um dos mais avançados que a humanidade já criou, eram parte integrante das crenças religiosas e místicas dos maias.

Figura 56 – Tradução de parte do códice da Figura 55.

| | | | |
|---|---|---|---|
| L | K | J | I |
| 4  | 4  | 4  | 3  |
| 17  | 9  | 1  | 13  |
| 6  | 4  | 2  | 0  |
| 0  | 0  | 0  | 0  |
| H | G | F | E |
| 3  | 2  | 2  | 2  |
| 4  | 16  | 8  | 0  |
| 16  | 14  | 12  | 10  |
| 0  | 0  | 0  | 0  |
| D | C | B | A |
| 1  | 1  | 16  | 8  |
| 12  | 4  | 4  | 2  |
| 8  | 6  | 0  | 0  |
| 0  | 0  | 0  | 0  |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 310.

Figura 57 – Explicação das expressões numéricas do códice da Figura 55.

$$\begin{aligned}
 A &= [8; 2; 0] = 2,920 = 1 \times 2,920 = 5 \times 584 \\
 B &= [16; 4; 0] = 5,840 = 2 \times 2,920 = 10 \times 584 \\
 C &= [1; 4; 6; 0] = 8,760 = 3 \times 2,920 = 15 \times 584 \\
 D &= [1; 12; 8; 0] = 11,680 = 4 \times 2,920 = 20 \times 584 \\
 E &= [2; 0; 10; 0] = 14,600 = 5 \times 2,920 = 25 \times 584 \\
 F &= [2; 8; 12; 0] = 17,520 = 6 \times 2,920 = 30 \times 584 \\
 G &= [2; 16; 14; 0] = 20,440 = 7 \times 2,920 = 35 \times 584 \\
 H &= [3; 4; 16; 0] = 23,360 = 8 \times 2,920 = 40 \times 584 \\
 I &= [3; 13; 0; 0] = 26,280 = 9 \times 2,920 = 45 \times 584 \\
 J &= [4; 1; 2; 0] = 29,200 = 10 \times 2,920 = 50 \times 584 \\
 K &= [4; 9; 4; 0] = 32,120 = 11 \times 2,920 = 55 \times 584 \\
 L &= [4; 17; 6; 0] = 35,040 = 12 \times 2,920 = 60 \times 584
 \end{aligned}$$

Fonte: IFRAH, 2000, p. 310.

3.9 O sistema numérico indiano

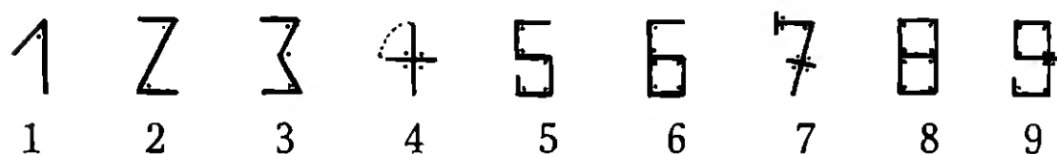
Atualmente usamos um sistema numérico composto pelos sinais gráficos

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0,

em um sistema posicional, com base decimal. A origem desse sistema é um assunto repleto de incertezas, embora já muito explorado. Apesar da extensa lista de pesquisas na área, ainda hoje é um assunto mergulhado em especulações, algumas bem plausíveis e outras um tanto fantasiosas. Vejamos algumas dessas origens fantasiosas:

- Há uma tradição popular do norte da África segundo a qual os 9 símbolos foram criados por um geômetra vidreiro do Magrebe, que teve a ideia de dar a cada um dos algarismos uma forma construída por linhas retas de modo que a quantidade de ângulos corresponde ao número representado (ver Figura 58).

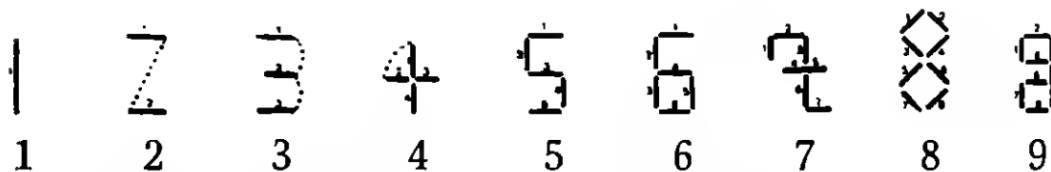
Figura 58 – Cada algarismo foi pensado a partir do correspondente número de ângulos.



Fonte: IFRAH, G. (2000), p.356.

- No século XIX o francês P. Voizot propôs algo parecido, mas relacionando o algarismo representado com a quantidade de linhas que formava o seu sinal gráfico (ver Figura 59).

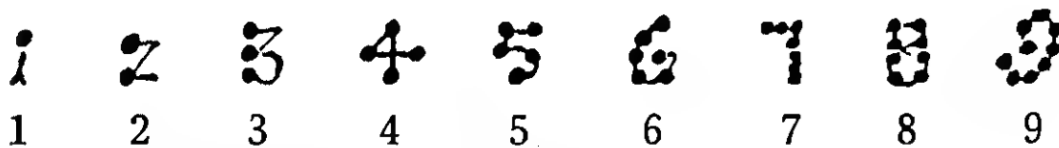
Figura 59 – Cada algarismo foi pensado a partir do correspondente número de traços.



Fonte: IFRAH, G. (2000), p.356.

- Em 1642 o jesuíta italiano Mario Bettini apresentou uma teoria que posteriormente ganhou reforços, sendo até associada aos gregos em 1890 pelo francês Georges Dumesnil. Tal teoria consiste na ideia de que os sinais gráficos foram concebidos a partir da união da correspondente quantidade de pontos associada ao número representado (ver Figura 60).

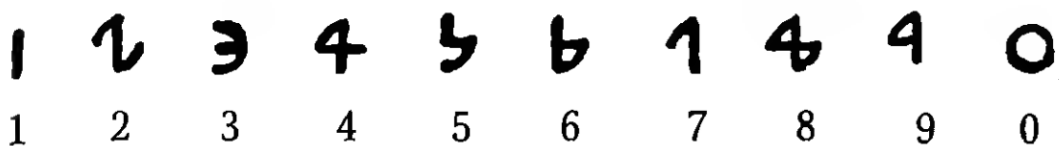
Figura 60 – Cada algarismo foi pensado a partir da união da correspondente quantidade de pontos.



Fonte: IFRAH, G. (2000), p.356.

- Outra teoria, apresentada em 1737 por Wiedler, que a associou ao astrólogo do século X Abenragel, é a de que a invenção dos 9 numerais mais o zero foi feita a partir de um círculo e dois de seus diâmetros (ver Figura 61).

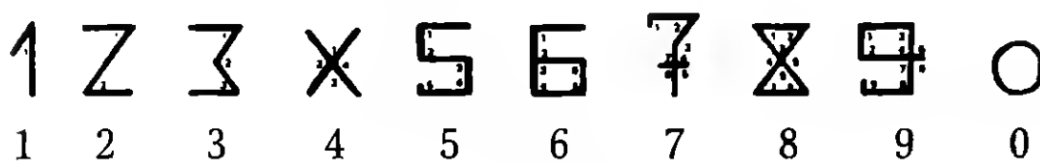
Figura 61 – Cada algarismo foi pensado a partir de um círculo e dois de seus diâmetros.



Fonte: IFRAH, G. (2000), p.357.

- Para o espanhol Carlos Le Maur (1778), os sinais em questão adquiriram sua forma a partir de um arranjo particular de pedras de contagem, reforçando a teoria apresentada por Mario Bettini, ou a partir do número de ângulos que podem ser obtidos a partir de certas formas formadas por um retângulo e suas diagonais (ver Figura 62).

Figura 62 – Cada algarismo foi pensado a partir de um retângulo e suas diagonais.



Fonte: IFRAH, G. (2000), p.357.

Existem outras dessas teorias, que colocam a invenção do nosso atual sistema de numeração como sendo fruto da imaginação de um único indivíduo, em um processo geométrico aparentemente simples, usando número de ângulos, ou de traços, pontos ou representações geométricas. Uma invenção fruto de algum tipo de geração espontânea e perfeitamente lógica. Nenhuma delas faz qualquer ligação com o surgimento dos 9 algarismos em uma grande variedade de formas e formatos, ao longo dos séculos e em diferentes partes do mundo.

A origem desses numerais remonta ao vale do Indo. Apesar das evidências arqueológicas de que lá houve, por volta de meados do terceiro milênio a.C., uma civilização altamente culta, não há documentos matemáticos indianos dessa época.

... Durante esse período e nos séculos seguintes, no entanto, grandes movimentos e conquistas de povos ocorreram no subcontinente indiano. Muitas das línguas e dialetos que evoluíram como resultado não foram decifrados. Portanto, é difícil, neste estágio, traçar um gráfico espaço-temporal das atividades matemáticas para esta vasta área (BOYER; MERZBACH, 2011, p. 189).

Embora o referido sistema numérico tenha sido por muito tempo chamado de árabe, devido ao fato de ter chegado na Europa através dos árabes, já se sabe que ele se originou na Índia.

Uma referência específica entre as mais antigas sobre o já consolidado sistema numérico indiano foi feita pelo bispo sírio Severo Sebekt, no ano de 662 da nossa era. Na referência, Sebekt, sobre os indianos, chamou a atenção para “seus valiosos métodos de cálculo e sua computação, que ultrapassa qualquer descrição. Desejo apenas dizer que essa computação é feita por meio de nove sinais” (SMITH, 1958, p. 167).

Os verdadeiros inventores desta descoberta fundamental, que não é menos importante do que feitos como o domínio do fogo, o desenvolvimento da agricultura ou a invenção da roda, da escrita ou da máquina a vapor, foram os matemáticos e astrônomos da civilização indiana: estudiosos que, ao contrário dos gregos, estavam preocupados com aplicações práticas e eram motivados por uma espécie de paixão por números e cálculos numéricos. Há muitas evidências que apoiam este fato, e até mesmo os próprios estudiosos árabes-muçulmanos frequentemente expressaram sua concordância (IFRAH, 2000, p. 361).

Por volta do século XV a.C., no vale do Indo, houve o início da escrita de conhecimentos religiosos, antes repassados oralmente de geração em geração, o que deu origem aos (talvez) mais antigos livros religiosos da história, os Vedas. Nas palavras de (BOYER; MERZBACH, 2011), “Os Vedas, grupos de textos antigos, essencialmente religiosos, incluem referências a números grandes e sistemas decimais.”

Na Índia, assim como no Egito, medições, principalmente na construção de templos, foram feitas a partir de cordas esticadas. Essa prática gerou um conjunto de conhecimentos conhecido por Sulbasutras (que pode ser traduzido como “livro das cordas”).

As notações numéricas indianas se desenvolveram com um padrão semelhante ao que ocorreu na Grécia. Incrições do período mais antigo do Vale do Indo mostram inicialmente traços simples, em grupos (ver Figura 63), representando as nove unidades.

Figura 63 – As nove unidades representadas por traços agrupados.



Fonte: IFRAH, 2000, p. 391.

Por volta do século III a.C. O padrão de traços repetidos teve a introdução de símbolos para os números 4, 10, 20 e 100 e passou a ser chamado de escrita Karosthi, que posteriormente deu lugar a outra notação, cujos caracteres foram chamados de Brahmi.

Figura 64 – Numerais Brahmi.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
|---|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | II | | + | | E | | | | |
| | | | | | ↳ | | | | |
| | | | | | F | | | | |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 378.

A partir dessa modificação gráfica, ao longo dos séculos seguintes houve um grande número de mudanças nas várias partes da Índia. A Figura 65 mostra diversas dessas mudanças.

A escrita Brahmi sofreu incisiva mudança com a introdução do princípio posicional, que tornou desnecessário qualquer outro símbolo além dos nove primeiros, visto que esses eram usados na representação de quaisquer outros números. Não se sabe quando essa transição ocorreu, mas é provável que tenha sido de forma gradativa.

Evidências apontam que a redução da escrita Brahmi para o uso de nove sinais em um sistema posicional ocorreu na Índia, mas a fonte de inspiração para tal mudança é incerta. Há a possibilidade de ter sido uma mudança interna, de ter ocorrido na fronteira com a Pérsia (sob influência da notação posicional babilônica), de ter sido na fronteira oriental, com a China, que tinha uma escrita “pseudoposicional” de números em forma de haste, escritos em uma malha quadriculada.

Os algarismos modernos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0) possuem esse formato desde o século XV, modelados no Ocidente e adotados permanentemente a partir da invenção da imprensa, na Europa. Sua introdução revolucionou as relações comerciais na Europa.

...A nova aritmética árabe era chamada de algorismo ou a arte do Alkarrismi... Os livros didáticos sobre algorismo começavam com o sistema árabe de notação e apresentavam regras para adição, subtração, multiplicação e divisão; os princípios da proporção eram então aplicados a vários

Figura 65 – Diversas modificações na escrita numérica indiana.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--|----|----|-----|---------|---------|-------|-------|-------|-------|
| Third century BCE: Brahmi of Asoka | | | | + | | 𑀧𑀢 | | | |
| Second century BCE: Inscriptions of Nana Ghat | - | = | | 𑀧𑀧 | | 𑀧 𑀢 | | | 𑀧 |
| First or second century CE: Inscriptions of Nasik | - | = | ≡ | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧 |
| First to second century CE: Kushana inscriptions | - | = | ≡ | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 |
| First to third century CE: Andhra, Mathura and Kshatrapa inscriptions | - | = | ≡ | 𑀧𑀧𑀧 𑀧𑀧𑀧 | 𑀧𑀧𑀧 𑀧𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 |
| Fourth to sixth centu- ry CE: Gupta inscriptions | 𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧𑀧 | 𑀧𑀧𑀧 𑀧𑀧𑀧 | 𑀧𑀧𑀧 𑀧𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧𑀧 | 𑀧𑀧𑀧 |
| Sixth to ninth century CE: Inscriptions of Nepal | 𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧𑀧 | 𑀧𑀧𑀧 𑀧𑀧𑀧 | 𑀧𑀧𑀧 𑀧𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧𑀧 | 𑀧𑀧𑀧 |
| Fifth to sixth century CE: Pallava inscriptions | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | |
| Sixth to seventh cen- tury CE: Valabhi inscriptions | 𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 |
| Various Indian manu- scripts | 𑀧 | 𑀧 | 𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 | 𑀧𑀧 |

Fonte: IFRAH, 2000, p. 397.

problemas práticos, e os livros geralmente concluíam com regras gerais para muitos dos problemas comuns do comércio. O algoritmo era, na verdade, uma aritmética mercantil, embora a princípio também incluísse tudo o que era então conhecido como álgebra (BALL, 2010, p. 152).

Atualmente esses numerais são usados em todo o mundo, como uma linguagem universal.

4 Símbolos diversos

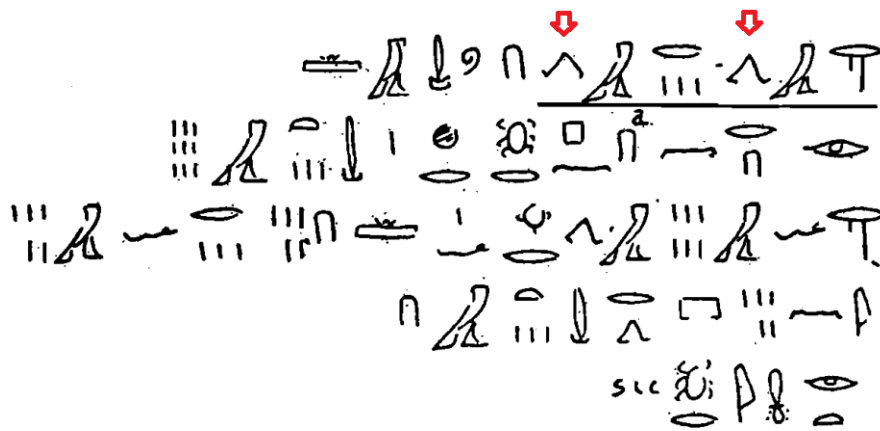
4.1 Adição e subtração

Como somar e subtrair são as operações mais elementares, suas relações com o ser humano são de longa data. Acrescentar ou retirar uma pedrinha do montinho, ação feita muito antes de se inventar os números, são exemplos práticos dessas operações.

Os sumérios já usavam um símbolo para indicar a subtração ao escrever, por exemplo, o número 9 no formato $10 - 1$ (ver Figura 11), que era mais fácil de escrever no sistema numérico utilizado por eles.

Os egípcios antigos usaram um par de pernas para designar adição e subtração. A adição era indicada com as pernas andando para a direita e a subtração, para a esquerda, como mostra o famoso papiro de Rhind (papiro egípcio escrito por volta do ano de 1650 a.C).

Figura 66 – Tradução hieróglifa do papiro de Rhind, problema 28.



Fonte: CAJORI, 1993, p. 230.

Na Europa do século XIII, essas operações eram representadas pelas letras *p* e *m*, que são as iniciais das palavras *plus* (mais em latim) e *minus* (menos em latim).

Os símbolos atuais para adição e subtração (+ e -) surgiram na Alemanha, nos últimos anos do século XV. Mais precisamente, esses símbolos estão em dois manuscritos, um deles de 1481, que pertencem a um volume de manuscritos denominado “C.80”, da Biblioteca de Dresden (ver Figura 67). Em 1486, eles foram impressos pela primeira vez, em um livro do alemão Johannes Widman (1460 - 1498), que estudou esses manuscritos. Nas palavras de (CAJORI, 1993, p. 231), “... não é de pouco interesse que J. Widman, que primeiro usou o + e o - na imprensa, tenha estudado esses dois manuscritos no volume de manuscritos C. 80 da Biblioteca de Dresden e, de fato, os tenha anotado”.

Figura 67 – Atuais símbolos de adição e subtração em manuscritos no fim do século XV.

$$1 \text{ } \text{cursive} + 2 \text{ } \text{cursive}$$

$$x^2 + 2x^2$$

$$10 - 1 \text{ } \text{cursive}$$

$$10 - x$$

Fonte: CAJORI, 1993, p. 231.

4.2 Multiplicação e divisão

A multiplicação foi indicada pelos babilônios nas famosas tábuas de argila. Um ideograma, denominado “A-DO”, significa “tempos” ou “multiplicação”. Já para os egípcios, o processo de multiplicação ou de divisão era conhecido como “wshtp”, que significa “inclinar a cabeça”. Mas não há um símbolo que o designava.

O indiano Bhaskara (1114 - 1185) usou, em seus manuscritos, um ponto para indicar multiplicação. Entretanto, a maioria das multiplicações era por ele indicada pela abreviação “bha” da palavra “bhavita”.

O alemão Michael Stifel (1487 - 1567), em sua famosa obra *Deutsche aritmetica*, de 1545, usou as letras maiúsculas **M** e **D**, para multiplicação e divisão, respectivamente. Essas letras foram usadas também por outros autores posteriormente.

O símbolo moderno para multiplicação (\times), que vem da “Cruz de Santo André” (Santo André foi um dos apóstolos de Jesus Cristo, que foi crucificado em uma cruz em forma de x por não se considerar digno de ser crucificado da mesma forma que Jesus), foi usado como símbolo de multiplicação em 1631, na obra *Claves mathematicae*, de William Oughtred (1574–1660). Não se conhece outra publicação anterior com “ \times ” usado como símbolo de multiplicação. Ele foi sim usado, mas com outros significados.

Nossos próprios estudos não conseguiram trazer à luz um caso claro e conclusivo em que, antes de Oughtred, “ \times ” era usado como símbolo de multiplicação. Em manuscritos medievais e nos primeiros livros impressos, “ \times ” era usado como um sinal matemático, de onze ou mais maneiras diferentes (CAJORI, 1993, p. 252).

Vários outros símbolos foram usados depois. Entre esses usos, vale destacar o que Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) escreveu em uma carta destinada a John Bernoulli (1667 - 1748) em 1698.

Não gosto de “ \times ” como símbolo para multiplicação, pois é facilmente confundido com x; ... frequentemente eu simplesmente relaciono duas grandezas por um ponto interposto e indico a multiplicação por ZC·LM. Portanto, ao designar razão, não uso um ponto, mas dois pontos, que uso ao mesmo tempo para divisão (CAJORI, 1993, p. 267).

A eficiência do uso de um ponto como símbolo de multiplicação onde há incógnita ou variável representada pela letra x fez do “ponto” um sinal muito usado até hoje. Embora

o uso do ponto como símbolo de multiplicação não tenha sido invenção de Leibniz, esse motivo para seu uso o coloca diretamente ligado à popularização desse símbolo. Além disso, Leibniz propôs o ponto depois de ter usado outros símbolos por mais de trinta anos.

Um detalhe importante é que, atualmente, as crianças aprendem inicialmente o símbolo \times para multiplicação e, após terem idade para iniciar os estudos em álgebra, são apresentadas ao “ponto” como novo símbolo para multiplicação.

Embora os gregos tenham desenvolvido muito a matemática, eles não tinham um símbolo para divisão. Os indianos escreviam denominadores abaixo dos numeradores. Isso pode ser o início do primeiro símbolo para divisão, mencionado pelo árabe Abu Bakr al-Hassar, no século XII, quando descreve o uso de uma linha horizontal: “Escreva os denominadores abaixo de uma linha [horizontal] e sobre cada um deles as partes pertencentes a ela”(CAJORI, 1993, p. 269).

Em 1202, Leonardo Fibonacci (1170 - 1250), em seu livro *Liber abaci*, também usou um traço horizontal como símbolo para designar divisão.

Em 1659 o suíço Johann Heinrich Rahn (1622 - 1676), na obra *Teutsche algebra*, publicou o símbolo \div para divisão. Seu livro foi traduzido para o inglês e publicado em Londres em 1668. Elogiado por Leibniz, o livro se popularizou e outros escritores usaram \div para indicar divisão.

4.3 Igualdade

O símbolo de igualdade que usamos hoje ($=$) foi criado por Robert Recorde (1512 – 1558), em uma publicação de 1557.

Antes de Recorde, os livros impressos de autores como Galileu, Kepler, Pascal, Napier, Fermat, etc, traziam a igualdade designada por palavras, como *aequales*, *aequantur*, *esgale*, *faciunt*,... ou por abreviações, como *aeq*. Mesmo após 1557, durante cem anos, alguns renomados matemáticos não utilizavam símbolos para designar igualdade em seus livros impressos. Mas os utilizavam em seus manuscritos.

O símbolo de Recorde só voltou a aparecer impresso sessenta anos depois. Entretanto, em 1631, ficou muito popular ao ser adotado em três obras importantes: *Artis analyticae praxis*, de Thomas Harriet, *Clawis mathematicae*, de William Oughtred, e *Trigonometria*, de Richard Norwood.

Mas o símbolo de Recorde também passou por problemas. Além do surgimento de outros símbolos com o mesmo propósito, no fim do século XVI e início do século XVII, o símbolo foi utilizado por renomados autores com significados distintos, designando relações diferentes da igualdade. Foi usado como símbolo para diferença aritmética, usado para designar "mais ou menos" (\pm), usado como separatiz em frações decimais, usado como

sinal para separar números que ocorriam em processos de resolução de problemas, para designar retas paralelas, etc. Tal confusão fez com o que o símbolo corresse o risco de ser descartado. Nas palavras de (CAJORI, 1993, p. 299), “...por esse motivo, corria o risco de ser completamente descartado em favor de algum símbolo que não sofresse tal desvantagem”.

Quando o avanço matemático passou a ser o cálculo diferencial e integral, o fato de Isaac Newton (1643 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) usarem o símbolo de Recorde fez com que ele tivesse uma adoção generalizada.

4.4 Maior e menor

A ideia de usar um par (par no sentido de símbolos que se complementam, que são um casal, que possuem alguma ligação) de símbolos para maior e menor foi introduzida por William Oughtred (1574 - 1660), em 1631. Ele usou os símbolos \square para maior e \blacksquare para menor. Segundo (CONTADOR, 2012, p. 152), no mesmo ano, Thomas Harriot (1560 - 1621), no trabalho intitulado *Artis analyticae*, substituiu os símbolos de Oughtred. Ele usou os símbolos $>$ para “maior do que” e $<$ para “menor do que”, que são os símbolos usados atualmente.

Vários outros símbolos foram introduzidos ao longo dos anos seguintes. Isaac Barrow (1630 - 1677) em 1657, Samuel Reyher (1635 - 1714) em 1698, John Bonycastle (1751 - 1821) em 1824, entre outros, introduziram símbolos alternativos, mas que não se popularizaram.

4.5 Radiciação

A operação de radiciação surgiu há tempos. Os egípcios antigos deixaram registros em papiros sobre esse tema.

O símbolo para $\sqrt{\quad}$, que usamos atualmente para radiciação, foi criado pelo matemático alemão Christoph Rudolff (1499 - 1545). A primeira aparição do símbolo foi no livro *Die coss*, publicado por Rudolff em 1525. Antes desse livro, na Europa, a operação de radiciação era comumente indicada pela letra maiúscula R, acrescida de um traço (ver Figura 68). A letra R é a inicial da palavra *radix* (raíz em latim). Algumas publicações traziam também a sílaba “ra” para indicar a radiciação.

Figura 68 – Letra R usada para designar radiciação.



Fonte: CAJORI, 1993, p. 368.

Após a publicação de Rudolff em 1525, vários outros matemáticos o utilizaram em suas publicações. Assim, $\sqrt{\quad}$ foi publicado na França em 1551, na Espanha em 1552, na Inglaterra em 1557 e seguiu sendo publicado em várias obras. Hoje ele é um símbolo universal.

A história do nosso sinal radical $\sqrt{\quad}$, após a época de Rudolff, relaciona-se principalmente aos simbolismos para indicar (1) o índice da raiz, (2) a agregação de termos quando a raiz de um binômio ou polinômio é necessária (CAJORI, 1993, p. 369).

4.6 Fatorial

O fatorial de um número já teve diversas notações. Entre elas, se destaca (por uma questão de popularidade do símbolo utilizado) a letra grega *pi* minúscula, π , usada para representar $m!$, como na obra *Teoria generale delle equazioni*, de Paolo Ruffini (1765 - 1822), publicada em 1799, onde, segundo (CAJORI, 1993, p. 73), ele escreveu “ $\pi = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot m$ ”.

Gauss usou a notação $\Pi(n)$ para designar $n!$. Diversas outras notações foram usadas para o mesmo fim. Algumas foram adotadas por vários autores, outras foram publicadas poucas vezes. Houve quem não usou notação alguma para indicar fatorial, escrevendo sempre o produto completo. Houve também quem usou uma notação em um momento e outra notação depois.

O sinal de exclamação para designar fatorial foi introduzido em 1808, por Christian Kramp (1760 - 1826), na obra *Éléments d'arithmétique universelle*. Segundo (CAJORI, 1993, p. 72), Kramp escreveu “Eu uso a notação muito simples $n!$ para designar o produto de números decrescentes de n até a unidade”.

Somente em 1915 ficou resolvida a questão da variedade de símbolos adotados na notação de fatorial, quando o Conselho da Sociedade Matemática de Londres, em suas “Sugestões para Notação e Impressão”, recomendou a adoção de $n!$ para tal fim.

4.7 Infinito

Em seu trabalho *De sectionibus conicis*, publicado em 1655, John Wallis (1616 - 1703) escreveu “Esto enim ∞ nota numeri infiniti”, que significa “Seja ∞ o sinal de um número infinito”. Assim, ele introduziu o símbolo para o infinito, que hoje é mundialmente conhecido. Por ser atualmente muito popular, o símbolo ∞ é usado não apenas nas ciências, mas diversas outras ocasiões, como anéis e colares que fazem alguma referência à ideia de infinito.

Há a conjectura de que Wallis, considerado um estudioso clássico, usou o símbolo da escrita antiga romana (os romanos usaram tal símbolo para representar o número 1000).

O símbolo ∞ ganhou total adesão quando, no início do século XVIII, passou a ser usado no Cálculo.

4.8 Somatório

O sinal Σ , que é a letra grega *sigma* maiúscula, usado atualmente para designar somatório, foi introduzido por Leonhard Euler (1707 - 1783) em 1755, na obra *Institutiones calculi differentialis*.

Embora o símbolo Σ tenha posteriormente sido utilizado por Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), ele teve pouca atenção durante o século XVIII. Competia com a letra S (maiúscula), usada como símbolo para o mesmo fim. Mas, durante a terceira década do século XIX, ele apareceu em duas importantes publicações. Foi usado na obra *A teoria analítica do calor*, de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), publicada em 1822, e na obra *Novos fundamentos da teoria das funções elípticas*, de Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851), publicada em 1829.

Mais tarde, no final do século XIX e início do século XX, o símbolo passou a ter uma abrangência ainda maior, com a utilização de índices e com a extensão de seu uso para soma de séries infinitas, como mostra a Figura 69.

Figura 69 – Somatório com uso de índices e usado para séries infinitas.

$$\sum_{m}^n f_r \quad \sum_{0}^{\infty} a_v$$

Fonte: CAJORI, 1993, vol 2, p. 61.

4.9 Produtório

Com uso análogo ao de somatório, o atual símbolo usado para produtório é \prod , que é a letra grega *pi* (maiúscula). Este símbolo foi introduzido em 1812, por Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), em um artigo sobre séries hipergeométricas, intitulado *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*. De acordo com (CAJORI, 1993, p. 78), a passagem onde \prod aparece pela primeira vez é constituída pela frase “Introducamus abhinc sequentem notationem”, que significa “Vamos agora introduzir a seguinte notação”, como mostra a Figura 70.

Mais tarde, Gauss também usou o símbolo \prod para produtos específicos. Outros matemáticos (Camille Jordan em 1870, Carl Gustav Jakob Jacobi em 1881, George Chrystal em 1889) também usaram o mesmo símbolo para designar produtos particulares.

Figura 70 – Primeira publicação do símbolo para produtório.

$$\Pi(k, z) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}{(z+1)(z+2)(z+3) \dots (z+k)} k^z$$

Fonte: CAJORI, 1993, vol 2, p. 78.

4.10 Funções

A ideia de uma correspondência entre dois conjuntos é muito, muito antiga. Tábuas babilônicas com, por exemplo, tabelas de multiplicação, possuem essa ideia.

O termo função foi inventado por Gottfried Leibniz (1646 - 1716), a definição formal de função foi feita por Johann Bernoulli (1667 - 1748) e a notação atual $f(x)$ foi introduzida em 1734 por Leonhard Euler (1707-1783).

Como ocorreu com vários outros conceitos matemáticos, as funções também foram escritas de outras formas. Em 1694, Bernoulli usou a letra n para representar qualquer função da variável z . No ano seguinte, Jakob Bernoulli (1654 - 1705) usou as representações p e q para representar funções de x . Já em 1718, Johann Bernoulli preferiu usar letras gregas para indicar funções, escrevendo “ ψx ”. Várias outras escritas desse tipo foram usadas, como Πx , Δx e Φx .

Em 1734 Euler escreveu $f(\frac{x}{a} + c)$ e, nas palavras de (CAJORI, 1993, p. 268), “esta foi a primeira aparição de f para funções”.

4.11 Incógnitas

Há milênios, o homem vem passando por ocasiões nas quais precisa se referir a algo que não conhece. Embora os egípcios antigos tenham sido mais conhecidos pelo desenvolvimento da geometria, a solução de problemas algébricos simples foi descrita em papiros, como o papiro de Rhind. Os egípcios antigos usaram um hieróglifo denominado “aha”, que significa algo como “pilha” ou “massa”, para designar uma incógnita.

Diofanto de Alexandria, no século III da nossa era, usou uma letra grega arcaica semelhante ao nosso S para indicar incógnita. O matemático indiano Brahmagupta (598 - 688) usou a sílaba inicial de nomes de cores, como “kâ” de *kâlaka* (preto), “ya” de *yavat tava* (amarelo) e “ni” de *nilaka* (azul), para indicar variáveis.

Atualmente, o uso da letra x para indicar o desconhecido, o secreto, o misterioso, não está somente na matemática. No mundo das séries de tv, “Arquivo X” foi um sucesso mundial. Entre as gigantes da tecnologia, uma grande rede social mudou seu nome de “twitter” para “X”.

Estabelecer de onde exatamente vem essa ideia de atribuir a letra x ao desconhecido não é tarefa simples. Atualmente se credita a René Descartes (1596 - 1650) o uso da letra x como incógnita (ou variável). Na obra *La Géométrie*, de 1637, onde apresentou uma poderosa ferramenta, que foi o uso da álgebra para resolver problemas de geometria, Descartes usou as letras x , y e z para representar variáveis, mas o x aparece com mais frequência. Como sua obra teve grande impacto no desenvolvimento da matemática, seus escritos foram amplamente divulgados e a letra x se popularizou.

5 Considerações finais

Na atualidade, a contagem ainda é uma ferramenta essencial na manutenção e desenvolvimento das diversas atividades humanas. Mas em um tempo onde a sobrevivência era, diariamente, a principal busca dos indivíduos, contar era uma ferramenta com uma importância muito maior. Ser capaz de estabelecer uma relação um-a-um por algum método concreto mais eficiente do que usar os dedos das mãos foi uma evolução cognitiva marcante.

Da contagem com pedrinhas ou marcas em objetos para a invenção de um sistema estrutural, onde algumas pedras ou marcas possuem valor diferente das demais foi um grande avanço. As contagens assim atingiram números cada vez maiores, o que deu aos povos a possibilidade de administrar quantidades cada vez maiores de suprimentos, animais, entre outros.

Com a invenção da escrita, o cenário mudou novamente, possibilitando armazenar dados, ação que faz parte da base da tecnologia de hoje. O lento processo de evolução da escrita abrange também os sistemas numéricos, que evoluíram ao longo dos séculos, junto das necessidades socioculturais de cada região.

Toda essa jornada, que faz parte da evolução humana, pode ser explorada como recurso para uma prática docente que promova a ressignificação do conhecimento matemático.

Referências

- BALL, W. W. R. *A Short Account of the History of Mathematics*. [S.l.]: Dover Publications, 2010. Reimpressão da 4^a edição, originalmente publicada em 1908. Citado na página 53.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *A History of Mathematics*. 3. ed. [S.l.]: Wiley, 2011. Citado na página 51.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, 1998. Documento referente ao Ensino Fundamental. Disponível em: <<https://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Citado na página 13.
- CAJORI, F. *A History of Mathematics*. 2. ed. Nova York: Chelsea Publishing Company, 1919. Citado na página 34.
- CAJORI, F. *A History of Mathematical Notations*. [S.l.]: Dover Publications, 1993. Reimpressão da edição original de 1928-1929. Citado 8 vezes nas páginas 46, 54, 55, 56, 57, 58, 59 e 60.
- CONTADOR, P. R. *Matemática, uma breve história*. 4. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012. v. 1. Citado na página 57.
- Egypt Museum. *Narmer Macehead*. Acesso em: 12 fev. 2025. Disponível em: <<https://egypt-museum.com/narmer-macehead/>>. Citado na página 27.
- Egypt Museum. *Statue of Khasekhemwy*. Acesso em: 12 fev. 2025. Disponível em: <<https://egypt-museum.com/statue-of-khasekhemwy>>. Citado na página 26.
- FORSTEMANN, E.; SCHELE, L. *The Dresden Codex*. Acesso em: 22 set. 2025. Disponível em: <http://www.famsi.org/mayawriting/codices/pdf/2_dresden_for_schele_pp13-24.pdf>. Citado na página 47.
- Fundação Roberto Marinho. *PISA 2022: Por que o Brasil está nas últimas posições em matemática, leitura e ciências*. Disponível em: <<https://futura.frm.org.br/conteudo/educacao-basica/noticia/pisa-2022-por-que-o-brasil-esta-nas-ultimas-posicoes-em-matematica-leitura-ciencias>>. Citado na página 13.
- IFRAH, G. *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer*. [S.l.]: Wiley, 2000. Citado 7 vezes nas páginas 19, 25, 27, 32, 40, 44 e 51.
- MENDES, I. A. História no ensino da matemática: trajetórias de uma epistemologia didática. *REMATEC*, 2013. Citado na página 13.
- SMITH, D. E. *History of Mathematics*. Nova York: Dover Publications, 1958. I. Citado na página 51.
- THOMPSON, J. E. S. *Un Comentario al Códice de Dresde: Libro de Jeroglífos Mayas*. México: Fondo de Cultura Económica, 1972. Citado na página 44.