Paulo Gustavo Magallan Xavier

Considerações acerca do ensino de Gráficos de Funções Quadráticas na Rede Estadual de Ensino do Espírito Santo

Vitória

2024

Paulo Gustavo Magallan Xavier

Considerações acerca do ensino de Gráficos de Funções Quadráticas na Rede Estadual de Ensino do Espírito Santo

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Júnior

Vitória

2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

X3c

Xavier, Paulo Gustavo Magallan, 1978-
Considerações acerca do Ensino de Funções Quadráticas na Rede Estadual de Ensino do Espírito Santo / Paulo Gustavo Magallan Xavier. - 2024.
81 p. : il.

Orientador: Etereldes Gonçalves Júnior.
Coorientadores: Alcebíades Dal Col Júnior, Bruna Zution Dalle Prane.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Funções Quadráticas. 2. Parábola. I. Gonçalves Júnior, Etereldes. II. Dal Col Júnior, Alcebíades. III. Dalle Prane, Bruna Zution. IV. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. V. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

"Considerações acerca do ensino de Gráficos de Funções Quadráticas na Rede Estadual de Ensino do Espírito Santo"

Paulo Gustavo Magallan Xavier

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 17/12/2024 por:

Documento assinado digitalmente
gov.br
ETERELDES GONCALVES JUNIOR
Data: 18/12/2024 15:05:26-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.(a) Dr.(a) Etereldes Gonçalves Júnior
Orientador(a) – UFES

Documento assinado digitalmente
gov.br
ALCEBIADES DAL COL JUNIOR
Data: 19/12/2024 06:25:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.(a) Dr.(a) Alcebíades Dal Col Junior
Membro Interno – UFES

Documento assinado digitalmente
gov.br
BRUNA ZUTION DALLE PRANE
Data: 19/12/2024 15:52:14-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.(a) Dr.(a) Bruna Zution Dalle Prane
Membro Externo – IFES

Dedico este trabalho ao meu pai, Mario José Xavier.

Agradecimentos

Agradeço à minha esposa Marluce pelo seu amor e companheirismo.

Agradeço à minha Mãe, Délia e meus irmãos, Mário e Rafaela pelo apoio.

Agradeço aos meus colegas de PROFMAT pelos ótimos momentos que vivemos.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Etereldes.

Agradeço ao Prof. Dr. Alcébíades pelas dicas na concepção da dissertação.

Agradeço ao Prof. Dr. Fábio Castro.

Agradeço à Profa. Dra. Bruna pelas valiosas contribuições.

Agradeço a todos os demais professores do PROFMAT..

"O ser matemático, em uma palavra, deixou de ser o número: passou a ser a lei de variação, a função. A Matemática não apenas foi enriquecida por novos métodos, mas foi transformada em seu objeto"

(Jacques Hadamard)

Resumo

Na matemática do Ensino Médio do Espírito Santo, as funções quadráticas ocupam um lugar notável. Contudo, no estudo de seu gráfico, a parábola, elementos fundamentais como o foco e a diretriz são frequentemente negligenciados, assim como características que possuem aplicações importantes como a propriedade refletora. Faremos, portanto um levantamento dos trabalhos anteriores de colegas do PROFMAT sobre o tema em que destacaremos apontamentos importantes que servirão como fundamento para as considerações que serão feitas nesta dissertação acerca do ensino de gráfico de funções quadráticas. Essas considerações terão como preocupação central servir como orientação aos colegas professores tentar minimizar as fragilidades supracitadas.

Palavras-chave: Funções Quadráticas, Parábola

Abstract

In high school mathematics in Espírito Santo, quadratic functions occupy a notable place. However, in the study of its graph, the parable, fundamental elements such as the focus and the directrix are often neglected, as well as characteristics that have important applications such as the reflective property. We will therefore carry out a survey of previous work by PROFMAT colleagues on the topic in which we will highlight important notes that will serve as a basis for the considerations that will be made in this dissertation about teaching the graph of quadratic functions. These considerations will have the central concern of serving as guidance to fellow teachers in trying to minimize the aforementioned weaknesses.

Keywords: Quadratic Functions, Parable

Lista de ilustrações

Figura 1 – Função $y = f(x)$ . . . 37
Figura 2 – Não é função $y = f(x)$ . . . 37
Figura 3 – Representação da parábola . . . 44
Figura 4 – Representação do Vértice e do Eixo Focal . . . 44
Figura 5 – Representação das Regiões determinadas pela parábola. . . . 45
Figura 6 – Representação de uma reta tangente a uma parábola. . . . 45
Figura 7 – O eixo focal coincide com o eixo de simetria . . . 46
Figura 8 – Parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas . . . 47
Figura 9 – Ponte Jucelino Kubitschek, Brasília -DF . . . 50
Figura 10 – Propriedade refletora da Parábola . . . 51
Figura 11 – O ângulo de Incidência é igual ao ângulo de reflexão . . . 51
Figura 12 – Prova da Propriedade Refletora da Parábola . . . 52
Figura 13 – Ondas refletidas em uma parábola . . . 53
Figura 14 – Representação de Farol de Fusca . . . 53
Figura 15 – A reta r é paralela à diretriz de $\mathcal{P}$ . . . 54
Figura 16 – A mediatriz dos pontos F e D coincide com a bissetriz de $\widehat{FTD}$ . . . 55
Figura 17 – Propriedade Refletora no Paraboloide de Revolução . . . 55
Figura 18 – Antena Parabólica . . . 56
Figura 19 – Radar . . . 56
Figura 20 – Telescópio . . . 57
Figura 21 – Fornalha de Odeillo, França com área de 1830 m² e foco situado a 18 m do espelho. Em primeiro plano é possível visualizar os espelhos auxiliares. 57
Figura 22 – Usina térmica Gemasolar, Espanha. . . . 57
Figura 23 – Caracterização das três curvas segundo os Pitagóricos . . . 58
Figura 24 – Quadratura da Parábola . . . 59
Figura 25 – Parábola de acordo com Apolônio . . . 60
Figura 26 – Esfera de Dandelin: Parábola . . . 61
Figura 27 – Construção de Parábola com dobradura . . . 65
Figura 28 – Concavidade voltada para cima . . . 65
Figura 29 – Concavidade voltada para baixo . . . 65
Figura 30 – GOLF Parabólico produzido no LEAMA-UFES . . . 67
Figura 31 – GOLF Parabólico produzido no LEAMA-UFES . . . 67
Figura 32 – $a > 0$ e $\Delta > 0$ . . . 68
Figura 33 – $a < 0$ e $\Delta > 0$ . . . 68
Figura 34 – $a > 0$ e $\Delta = 0$ . . . 68
Figura 35 – $a < 0$ e $\Delta = 0$ . . . 68

Figura 36 – $a > 0$ e $\Delta < 0$ 68
Figura 37 – $a < 0$ e $\Delta < 0$ 68
Figura 38 – Tabuleiro do Jogo dos três pontos 72
Figura 39 – Gráfico da função $y = x^2 - 4x + 5$ 74

Sumário

1 INTRODUÇÃO 11

2 CONTRIBUIÇÕES ANTERIORES 13

3 ARCABOUÇO TEÓRICO E CONTEXTO HISTÓRICO 36
3.1 Função Quadrática 36
3.2 Parábola 43
3.3 Contexto Histórico das Parábolas 58
3.4 Ensino de Gráficos de Funções Quadráticas no Espírito Santo 61

4 PROPOSTAS DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA 71

5 CONCLUSÃO 78

REFERÊNCIAS 79

1 Introdução

As funções quadráticas possuem muitas aplicações, desde a relação entre o espaço e o tempo em um movimento de aceleração constante até problemas de otimização que envolvem inclusive cálculo de área. Porém, após 20 anos de magistério, foi possível perceber muitas fragilidades no aprendizado relacionado a esse tema. Os conceitos envolvidos pareciam mais abstratos e desprovidos de significado aos estudantes do que realmente deveriam. Isso me levou a acreditar que a forma como esse conteúdo era apresentado deveria passar por reformulações. As mudanças no ensino de Matemática na última década, como as mudanças curriculares e o crescente uso de novas tecnologias, reforçaram ainda mais essa ideia. Surpreendentemente, depois de ler trabalhos de colegas do PROFMAT relacionados ao assunto, descobrimos um farto material de qualidade que poderia minimizar tais problemas.

Nosso objetivo geral é orientar uma abordagem para o trabalho com gráficos de funções quadráticas que poderia se mostrar mais interessante e significativa ao discente. O cerne dessas orientações seria uma integração do ensino desse tipo de gráficos com elementos que seriam abordados no estudo de cônicas. Acreditamos que isso está em consonância com a nova realidade do Ensino Médio no Brasil. Afinal, como afirma (LOUZADA, 2013, p 10):

> "Ao unir conceitos que usualmente são tratados nos livros didáticos de forma independente e fragmentados, mostrar consequências das propriedades matemáticas em aplicações e indicar o uso de recursos tecnológicos para auxiliar no processo de aprendizagem, acreditamos estar inovando nos modelos comuns de ensino do mesmo tema."

Como objetivos específicos, nessa proposta, usaremos a definição básica de parábola, nos apropriando de seus elementos principais (foco e diretriz) para correlaciona-lá com as funções quadráticas na finalidade de que o aluno perceba essa interligação. Ao mesmo tempo, o aluno deve perceber que parábola e função quadrática são entes matemáticos com identidade própria. Adicionalmente, julgamos necessário elucidar as aplicações da propriedade refletora da parábola já no estudo de funções quadráticas tornando o processo de ensino-aprendizagem de funções quadráticas ainda mais significativo.

No Capítulo 2 faremos uma compilação de trabalhos anteriores de colegas do PROFMAT sobre funções quadráticas, ressaltando suas contribuições mais importantes, no sentido de caracterizar os objetivos gerais e específicos de cada um deles. Em um dos trabalhos anteriores foi feita uma coletânea desse tipo de 25 dissertações. Aqui destacaremos 56 trabalhos, pois existe um intervalo de tempo de uma década entre o primeiro e o último trabalho publicado, e nessa década, o ensino da matemática passou por profundas transformações como a instauração do Novo Ensino Médio.

No Capítulo 3 faremos um arcabouço teórico das funções quadráticas com seus elementos principais e de seu gráfico, a parábola, de forma separada com o objetivo de destacar a distinção entre os dois conceitos: Gráfico de função quadrática e parábola. Isso pode ajudar no zelo da identidade da parábola como ente matemático. Também faremos um breve histórico (também de forma separada) e evidenciaremos a propriedade refletora e suas aplicações.

Nesse mesmo capítulo, faremos uma análise sobre a abordagem no ensino de gráfico de funções quadráticas com base nas habilidades contempladas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018 e das Orientações Curriculares de 2023 da Secretaria de Educação do Espírito Santo (SEDU). Tal análise servirá como orientação para uma abordagem alternativa de ensino de funções quadráticas.

No Capítulo 4 apresentaremos duas propostas de sequencias didáticas envolvendo o ensino de gráficos de funções quadráticas, baseadas nas considerações do Capítulo 3 .

O Capítulo 5 será destinado às considerações finais da dissertação.

2 Contribuições Anteriores

Já existe uma farta documentação de qualidade feita pelos egressos do PROFMAT sobre os mais variados aspectos que envolvem o assunto abordado aqui. Segue uma compilação dos inúmeros trabalhos de colegas do PROFMAT que tratam do tema funções quadráticas. Nosso método de pesquisa foi uma busca no site do programa (PROFMAT, 2024) em 20/7/2023 com as palavras chaves “Função Quadrática”, “Funções Quadráticas”, “Funções Polinomiais do Segundo Grau” e “Função Polinomial do Segundo Grau”. As dissertações resultantes foram analisadas e foram destacadas as particularidades que de alguma forma caracterizam os objetivos gerais e específicos de cada dissertação. Na escolha dessas particularidades levamos em consideração também a relevância para o desenvolvimento desta dissertação. A primeira dissertação da lista não constava originalmente nos resultados da pesquisa feita, sendo uma valiosa indicação do Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Júnior.

Abaixo consta uma tabela informativa da quantidade de dissertações da nossa pesquisa de acordo com o ano em que foram publicadas.

Tabela 1 – Dissertações do PROFMAT sobre funções quadráticas

Ano da publicação	Quantidade de dissertações
2013	11
2014	5
2015	6
2016	8
2017	4
2018	8
2019	7
2020	3
2021	3
2022	0
2023	1

Enunciaremos esses trabalhos, portanto, citando o nome do autor, o título da dissertação em ordem cronológica de publicação e as principais contribuições:

1. Autor: Sílvia Louzada

   Título: Relações entre Cônicas e Funções no Ensino Médio (2013).

   Contribuições:

   - Demonstração de que o eixo focal da parábola coincide com o eixo de simetria.
   - Contextualização histórica detalhada sobre as cônicas.

- Demonstração da propriedade refletora da parábola com relato de diversas aplicações.
- Atividades envolvendo gráfico de funções quadráticas integrada com vários conceitos da parábola e definições que geralmente não são abordadas na maioria das aulas de matemática, livros didáticos ou outros materiais de apoio utilizados.
- Análise de 7 das principais coleções de livros didáticos da época sobre a tratativa envolvendo gráficos de função quadrática.

2. Autor: Ramon de Abreu e Silva.

   Título: Funções Quadráticas e suas aplicações no Ensino Médio (2013).

   Contribuições:

   - Utiliza o problema de soma e produto para contextualizar historicamente um trinômio de 2º grau, pois ele é usado na definição de função quadrática.
   - Forma fatorada da função quadrática para visualizar as raízes.
   - Observa que com a forma canônica é possível concluir que todas as parábolas são semelhantes e que a função $g(x) = ax^2 + bx + c$ é uma translação da função $f(x) = ax^2$.
   - Destaca que a "Fórmula de Bháskara" já era um método conhecido pelos babilônios em 2000 a.C. Recebeu esse nome porque foi publicado em um livro escrito por outro matemático hindu no século 12.
   - Faz um breve relato sobre a discriminante de equação do 2º grau.
   - Definição de Parábola usando o foco e diretriz, sua simetria em relação ao eixo focal e a proposição de que o gráfico de uma função quadrática é, de fato, uma parábola.

3. Autor: Dayonne Soares dos Santos.

   Título: O desenvolvimento de um aplicativo para o estudo de funções quadráticas (2013).

   Contribuições:

   - Apresenta o trabalho de engenharia de software realizado para a construção do aplicativo NICOLAS para o estudo de funções quadráticas.
   - Define gráfico de funções quadráticas usando a equidistância dos pontos em relação a diretriz e o foco para provar que esse gráfico é uma parábola.
   - Análise do comportamento da parábola baseado nos coeficientes da função, que é melhor visível usando ambientes de geometria dinâmica.

- Aplicações de parábolas (faróis de carros, antenas parabólicas, holofotes, lanternas de mão), que usam a propriedade refletora (o autor menciona as aplicações mas não menciona a propriedade refletora).

4. Autor: Clésio Ricardo de Brito.

   Título: O estudo das funções quadráticas e sua relação com o cotidiano (2013).

   Contribuições:

   - Relata sobre o conceito de Etnomatemática.
   - Relata que as Orientações Curriculares vigentes orientam o estudo da forma fatorada da função quadrática para estabelecer relações entre aspectos do gráfico e os coeficientes da função.
   - Sequência Didática com várias aplicações e situações- problemas.
   - Menciona a antena parabólica como aplicação, mas sem mencionar a propriedade refletora.

5. Autor: Lúcia Andréia de Souza Rocha.

   Título: A utilização de softwares no Ensino de Funções Quadráticas (2013).

   Contribuições:

   - Faz um relato histórico sobre funções.
   - Faz algumas reflexões sobre o modo como é feito o estudo de tópicos anteriores ao de função no Ensino Fundamental e à abordagem que alguns livros didáticos fazem no estudo de funções destacando a ausência do uso de softwares nesses livros.
   - Sugestão de atividades usando o software wxMáxima.

6. Autor: Allan Gomes de Oliveira.

   Título: Funções e Geometria: O uso de ambiente de Geometria Dinâmica como subsídio para a caracterização das funções quadráticas (2013).

   Contribuições:

   - Faz uma crítica aos livros didáticos, pois os conteúdos tem poucas aplicações à realidade e são "pouco atraentes" e propõe os ambientes de Geometria Dinâmica como alternativa para tentar sanar esse problema, em especial o Geogebra.
   - Defende que a forma canônica da função quadrática é a mais adequada para analisar seus aspectos geométricos.
   - Teorema de caracterização das funções quadráticas onde ela transforma uma PA de primeira ordem em uma PA de segunda ordem.

- Modelagem de problemas do 2º grau mais fáceis de visualizar no Geogebra, por exemplo, um problema de área.

7. Autor: Fábio Antônio Leão Souza.

   Título: Funções Quadráticas: Estudo do gráfico das funções quadráticas (2013).

   Contribuições:

   - Destaca a utilização de ponto crítico para determinar o vértice da parábola.
   - Comenta sobre o fato da função quadrática ser monótona em intervalos determinados, utilizando o ponto crítico.
   - Faz um estudo detalhado dos coeficientes como instrumentação para análise do comportamento do gráfico.

8. Autor: Rodrigo Carvalho Dias.

   Título: Uma proposta para o uso do Winplot no ensino de funções quadráticas nas turmas do proeja (2013).

   Contribuições:

   - Propões atividades com o Winplot adaptadas para Educação de Jovens e Adultos.
   - Defende que com o winplot fica mais viável e didático analisar o comportamento do gráfico de acordo com o coeficiente b, fixados os coeficientes a e c.

9. Autor: Dayse Maria Alves de Andrade Ribeiro.

   Título: Uma abordagem didática para função quadrática (2013).

   Contribuições:

   - Resenha Histórica sobre Função Quadrática.
   - Comparação do significado geométrico e retórico de Parábola, segundo Aristóteles.
   - Apresenta propriedade refletora e suas aplicações.
   - Caracterização da função quadrática.
   - Comportamento do gráfico segundo os coeficientes de uma função quadrática com uso de ambientes de geometria dinâmica.
   - Algumas aplicações de Função Quadrática.

10. Autor: Jobson Hugo de Souza Soares.

    Título: Função Quadrática (2013).

    Contribuições:

- Faz uma crítica aos livros didáticos no quesito ensino de funções quadráticas e propõe um material complementar.
- Critica o método da "Fórmula de Bháskara" como um procedimento mecanizado para resolução de equações do 2º grau, citando como alternativa o método de completar o quadrado.
- Defende a forma canônica como instrumento para melhor entendimento de elementos de uma função quadrática.

11. Autor: Renato Câmara Victório de Almeida Júnior.

    Título: Desenvolvimento de Conceitos e Resolução de Atividades de Função Quadrática com uso do Software Geogebra (2013).

    Contribuições:

    - Apresentação da Metodologia da Engenharia Didática.
    - Proposta de atividade interativa usando o Geogebra para que os alunos descubram o comportamento de um gráfico de acordo com os coeficientes (objetivo geral), dividida em 7 atividades com objetivos específicos variados.
    - Durante as atividades foi percebido que muitos alunos não têm familiaridade com o conceito de translação.

12. Autor: Ruimar Calaça de Menezes.

    Título: Funções Quadráticas: Contextualização, Análise Gráfica e Aplicações (2014).

    Contribuições:

    - Contextualização histórica de equações e funções quadráticas partindo dos Babilônios até Euler e Dirichlet.
    - Aplicações da Parábola e dos Paraboloides de Revolução.
    - Uma prova simples de que uma função quadrática é bem definida pelos seus coeficientes.
    - Caracterização da função quadrática.
    - Análise da variação dos coeficientes da função.
    - Citação de várias aplicações.

13. Autor: Reilson Matos de Souza.

    Título: O uso do Geogebra no ensino de função quadrática (2014).

    Contribuições:

- Ressalta o uso de recursos computacionais como importante instrumento de suporte à aprendizagem, mas condiciona esse fato a uma reformulação no currículo, com novos modelos metodológicos.
- Destaca que Paulo Freire disse que "Ensinar é criar possibilidades para a produção do conhecimento." Essa frase sintetiza a ideia defendida no trabalho de que o Geogebra é um importante instrumento de aprendizagem interativa, em que o aluno participa ativamente do processo.
- Fez uma pesquisa com os alunos de uma escola estadual sobre as práticas cotidianas docentes.
- Apresentação do Geogebra com atividades de construção de gráficos de uma função quadrática.

14. Autor: Márcio do Socorro Costa Ferreira.

    Título: Uma abordagem didática para o ensino de máximo e mínimo de função quadrática (2014).

    Contribuições:

    - Construção de parábola usando esquadro e barbante.
    - Várias situações problemas de otimização de Função Quadrática.

15. Autor: José Vicente da Silva Fetizzola.

    Título: Uma abordagem didática para o Ensino de máximo ou mínimo na função quadrática e o software Geogebra (2014).

    Contribuições:

    - Excelente contextualização histórica acerca de funções quadráticas.
    - Construção da Parábola usando esquadro e barbante.
    - Explicação de Funções Básicas do Geogebra pertinentes ao ensino de funções quadráticas.
    - Incentivo ao docente para usar abordagem histórica, formal e tecnológica.

16. Autor: Aristóteles Alves Feitosa.

    Título: Interatividade no ensino-aprendizagem de função quadrática (2014).

    Contribuições:

    - Defende o uso de tecnologias para analisar as representações semióticas: Excel para tabelas e fórmulas, Winplot e Geogebra para gráficos.

- Comenta sobre 8 dissertações anteriores que abordaram o tema ressaltando a visão de cada autor sobre a problemática acerca das novas tecnologias na ensino-aprendizagem.
- Propõe atividades interativas sobre marcação de pontos no plano cartesiano, cálculo de valores numéricos de uma função quadrática e montagem de gráficos.
- Análise de desempenho de turmas de um Instituto Federal nas quais foram trabalhadas as questões das atividades.

17. Autor: João Franscisco Medina Araújo

    Título: Uma complementação para o ensino do conceito de função, funções afins e funções quadráticas para o currículo da rede pública estadual de São Paulo (2015).

    Contribuições:

    - Sugere uma sequência para construção do conceito de função de forma a complementar o material usado na rede estadual de São Paulo (Relação de 2 conjuntos).
    - Explanação de funções quadráticas do tipo $y = ax^2$ e $y = ax^2 + v$ mostrando a translação vertical através do Geogebra e finalmente a relação entre as funções do tipo $y = a(x - h)^2$ e $y = a(x - h)^2 + v$.
    - Relação entre a forma geral e a forma canônica da função quadrática, mas o estudo é feito partindo da forma canônica para a forma geral. Geralmente o tópico é abordado no sentido contrário.

18. Autor: Mateus Pierry Banhato.

    Título: Máximos e mínimos com proposta de aplicação para funções quadráticas (2015).

    Contribuições:

    - Arcabouço teórico com ênfase na existência de máximos e mínimos de funções.
    - Destaca que para que o ponto seja máximo ou mínimo ele deve ser um ponto crítico.
    - Equação do eixo de simetria da parábola enquanto função quadrática.
    - Apresenta alguns problemas clássicos envolvendo máximos e mínimos.

19. Autor: Cleber Valadares da Silva

    Título: Modelagem, Cálculo e Geogebra: uma nova proposta para o ensino para funções quadráticas (2015).

    Contribuições:

- Oficina de lançamento de um carro num plano inclinado e graduado e registro do espaço e do tempo para montagem de um modelo matemático com ajuda do Geogebra.
- Significado Geométrico dos coeficientes de uma função quadrática.
- Conceito de ponto crítico utilizando noções de cálculo.
- Proposta de algumas atividades para cálculo de valores máximos e mínimos.

20. Autor: Vitor Hugo Duarte de Assis.

    Título: Características da função quadrática e a metodologia de Resolução de Problemas (2015).

    Contribuições:

    - Abordagem sobre metodologia de Resolução de Problemas usando o método proposto por Polya com exemplos aplicados ao estudo de função quadrática.
    - Demonstração da unicidade de uma função quadrática pelos coeficientes e definição por 3 pontos explicitando sua relação com polinômios do 2º grau.
    - Demonstrou que uma parábola com diretriz paralela ao eixo x é gráfico de uma função quadrática.
    - Determinação da diretriz e foco do gráfico de uma função quadrática com base nos coeficientes a, b e c.
    - Observa que o limite de uma função quadrática tende ao infinito (ou menos infinito) dependendo do valor do coeficiente de x^2.
    - Abordagem teórica das características de uma função quadrática usando instrumentos não elementares (grupo, anel, limite e derivada), inclusive com a definição de concavidade.

21. Autor: Eliésio Alves da Silva.

    Título: Desenvolvimento de Aplicações no Geogebra direcionadas ao Ensino da Geometria Espacial e da Função Quadrática (2015).

    Contribuições:

    - Obtenção da diretriz e do foco de uma parábola (com diretriz paralela ao eixo x) a partir dos coeficientes da função quadrática que ela representa.
    - Atividades de modelagem de estruturas parabólicas usando o Geogebra.
    - Oficina de lançamento de foguetes de garrafas PET e análise da trajetória.

22. Autor: Adilson Maia Negrão.

Título: O geogebra como proposta de intervenção pedagógica no ensino da função quadrática (2015).

Contribuições:

- Referencial Teórico sobre Informática na Educação no Brasil (Instruicionismo x Construcionismo).
- Relato Histórico do Geogebra com instruções de uso.
- Faz uma comparação no ensino de função quadrática entre o método comumente usado pelos professores da educação básica e balizado pelos livros didáticos e o método proposto pela dissertação.
- Transformações da parábola: Translação, simetria, dilatação e compressão pelo método de modificações sucessivas.

23. Autor: Vladimir Boechat Braga Filho.

    Título: Um estudo aprofundado sobre as funções quadráticas aplicado ao Ensino Médio (2016).

    Contribuições:

    - Apresenta como proposição a simetria do gráfico da função quadrática em relação à uma paralela ao eixo das ordenadas.
    - Aborda problemas de otimização de funções quadráticas.
    - Definição de concavidade.
    - Demonstrou que uma função quadrática tem a parábola como gráfico, restringindo-se a parábolas com eixo de simetria paralelos ao eixo y.
    - Demonstrou a propriedade refletora restringindo-se a parábolas que são representações de funções quadráticas.

24. Autor: Leandro Souza Canavezi.

    Título: Uma proposta lúdica com utilização do Geogebra para o estudo de funções quadráticas e probabilidade geométrica (2016).

    Contribuições:

    - Apresentação da Metodologia da Engenharia Didática.
    - Oficina de jogo de dardos com alvos de área variável. O modelo matemático para calcular a probabilidade de acerto de determinado alvo é uma função quadrática.
    - Atividades de otimização para análise e resolução com auxílio do Geogebra.

25. Autor: Cristiane Moura da Silva Bronsato Canella.

    Título: Funções Quadráticas e suas aplicações no primeiro ano do ensino médio (2016).

    Contribuições:

    - Contextualização histórica das Funções quadráticas.
    - Caracterização da Função Quadrática.
    - Muitos exemplos ordenados por subtópicos (otimização, esboço de gráficos, determinação de raízes, inequações) com proposta de exercícios.
    - Demonstração da simetria da parábola em relação ao eixo focal.
    - Construção da parábola com dobradura.
    - Aplicações do paraboloide de revolução, em especial, nas usinas térmicas solares com demonstração da propriedade refletora.

26. Autor: Márcio Pereira Barbosa.

    Título: Recursos Tecnológicos como ferramentas didáticas no processo ensino aprendizagem de função quadrática (2016).

    Contribuições:

    - Análise de 2 livros didáticos usados na escola onde trabalha o autor sobre a abordagem do tema da dissertação.
    - Defende que no uso de recursos tecnológicos, o professor deve assumir o papel de mediador de aprendizagem.
    - Sequencia Didática com aplicação de questionário para avaliação de conhecimentos prévios.
    - Concluiu que, na sequência didática supracitada, o uso de Geogebra não contribui para sanar dificuldades relacionadas ao cálculo algébrico.

27. Autor: Marco Antônio Brito Paiva.

    Título: Uma proposta de utilização do Winplot no ensino da função quadrática nas turmas do 9º ano (2016).

    Contribuições:

    - Conceito Freireano de Educação Bancária.
    - Apresentação do Winplot, com citação sobre trabalhos anteriores do PROFMAT acerca do software.
    - Atividades do Winplot, usando comportamento do gráfico de acordo com os coeficientes da função com resolução de questões de vestibulares.

- Proposição: Se os coeficientes de uma função quadrática forem todos ímpares, suas raízes não podem ser números racionais (o autor faz a prova algébrica e mostra que é fácil visualizar no Winplot).

28. Autor: José Fábio Xavier.

    Título: Análise da Função Quadrática, com ênfase em seus coeficientes, via Geogebra (2016).

    Contribuições:

    - Ressalta a preocupação dos documentos orientadores (nesse caso os Parâmetros Curriculares Nacionais) com a formação geral, para continuidade dos estudos, em oposição à formação específica, para o mundo do trabalho. Essa dualidade é frequentemente motivo de debate no mundo acadêmico, segundo o autor.
    - Simetria da Parábola em relação ao eixo focal.
    - Histórico sobre Função Quadrática.
    - Sugestão de atividades usando o Geogebra com foco em elementos notáveis da parábola (com exceção do foco e da diretriz).

29. Autor: Bruno César Magalhães Alquimim.

    Título: Uma proposta do ensino de função quadrática utilizando o Geogebra (2016).

    Contribuições:

    - Relata as habilidades mais cobradas no ENEM nas questões de função quadrática, a maioria relacionada a análise e interpretação de gráficos, representações algébricas e tabelas. Na opinião do autor, isso vai de encontro às propostas dos livros didáticos analisados pelo mesmo.
    - Apresentação da metodologia construtivista, visto que a proposta da dissertação é “construtivista sociointeracionista”.
    - Relato sobre o ambiente Geogebra.
    - Sugestão de Sequência Didática com uso do Geogebra.

30. Autor: Pedro Paulo Sena Passos.

    Título: Metodologias Ativas e tecnologia: Uma proposta de aula sobre conceitos contextualizados de Função Quadrática com o Auxílio do programa Socrative (2016).

    Contribuições:

    - Ressalta o potencial didático das metodologias ativas no ensino da matemática e as Avaliações instantâneas como poderosos instrumentos orientadores para uma intervenção Pedagógica.

- Instruções para uso do ambiente Socrative.
- Proposta de sequência didática com atividades de problematização sobre funções quadráticas utilizando o ambiente Socrative.

31. Autor: Alisson Gleike Moraes.

    Título: Uma contribuição ao ensino-aprendizagem da Matemática na educação básica: aplicação das funções quadráticas no lançamento de foguetes confeccionados com garrafas PET (2017).

    Contribuições:

    - Utiliza-se da forma canônica de uma função quadrática para determinar seus principais elementos. Fala brevemente sobre a discriminante.
    - Propõe a construção de foguetes com garrafas PET para o lançamento e leitura de sua trajetória em um modelo matemático com ajuda do sotfware Epiinfo.

32. Autor: Marlon Prudenciano da Silva.

    Título: Equações e Funções Quadráticas: Aplicações e uma Coletânea de Problemas (2017).

    Contribuições:

    - Relato da forma Canônica.
    - Prova que o gráfico da função quadrática é uma parábola usando o conceito de equidistância.
    - Relata sobre a propriedade refletora da Parábola.
    - Aplicações que envolvem a propriedade refletora, mencionando que ela se conserva para paraboloides.

33. Autor: Max Cavalcante da Silva.

    Título: As Funções Quadráticas e suas aplicações (2017).

    Contribuições:

    - Cálculo dos valores máximos e mínimos da função através da comparação da forma polinomial com a equação canônica da parábola.
    - Aplicações na área de Física, Química e Biologia.
    - Sequência Didática enfatizando as aplicações o que, na opinião do autor, mostrou-se exitosa.

34. Autor: Fabiano Santana Reis.

Título: Uma proposta de Estudo de Funções Quadráticas mediada pela tecnologia (2017).

Contribuições:

- Significado Geométrico dos coeficientes de uma função quadrática.
- Demonstração algébrica da propriedade refletora da parábola com aplicações.
- Sequência Didática de 13 aulas envolvendo estudo de funções quadráticas que prioriza o protagonismo do aluno no processo de ensino-aprendizagem.
- Construção de parábola no Geogebra usando equidistância (embasado pela congruência de triângulos) e usando a propriedade refletora.

35. Autor: Josias Barbosa de Miranda.

    Título: Registros de Representação Semiótica de Funções Quadráticas: Análise de um livro Didático (2018).

    Contribuições:

    - Faz uma contextualização histórica do livro didático como instrumento no processo de ensino-aprendizagem.
    - Faz uma análise de diversas representações semióticas de uma função quadrática: Algébrica, gráfica, língua Natural, tabela e Figura.
    - O autor faz uma análise de um livro didático para saber se existe alguma predominância de problemas que envolvam algumas representações semióticas em detrimento de outras, uma vez que a maior parte dos problemas de função quadrática exige que se faça uma conversão de uma representação semiótica para outra. O livro analisado foi: "Matemática-Contextos e Aplicações" de Luiz Roberto Dante. O autor concluiu que os exercícios privilegiam a representação algébrica.
    - Demonstrou que o gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola utilizando o conceito de lugar geométrico de uma parábola.
    - Destacou o potencial didático da forma canônica de uma função quadrática.

36. Autor: Lígia Dalvane Samaritano Carnevali.

    Título: Equações do 2º grau e Funções Quadráticas (2018).

    Contribuições:

    - Faz uma crítica aos processos mecanizados usados para abordar o tema nos livros didáticos e no ensino em geral. Evidencia que a "Matemática tem um valor formativo essencial, sendo fundamental para desenvolver e estruturar o raciocínio lógico e dedutivo".

- Faz uma análise dos livros didáticos do 9º ano no ensino fundamental acerca de equações do 2º grau e de função do 2º grau. As coleções foram: Dante: Projeto Telaris (2016), Marília Centurion: Matemática na medida certa (2015) e Álvaro Andrini: Praticando Matemática (2015).
- Faz uma construção histórica do conceito de função.
- Ressalta a importância da aprendizagem significativa, que segundo Moreira (2017, p.2), "se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos[...]".
- Defende a abordagem do método de completar quadrados de Al-Khowarizmi como abordagem na resolução de equações de 2º grau e análise de gráficos de funções quadráticas.

37. Autor: Thamyres Ribeiro Medeiros.

    Título: Esboço de gráficos: rigor na abordagem de funções quadráticas (2018).

    Contribuições:

    - Fez uma análise de 8 livros didáticos da Rede Estadual de Juiz de Fora com relação aos conceitos que envolvem construção de gráficos, levando em consideração o rigor matemático.
    - Atividade de construção da parábola usando esquadro e barbante.
    - Proposta de Revisão de distância entre 2 pontos.
    - Propõe o trabalho com translação de parábola usando a translação de seu vértice. No referencial teórico utilizou a forma canônica.
    - Justificativa da boa definição de uma função quadrática através de 3 pontos não-colineares.

38. Autor: Arturo Leon Fernandes.

    Título: Uma abordagem no Estudo de Funções Quadráticas, Exponenciais e Logarítmicas utilizando o software Geogebra (2018).

    Contribuições:

    - Embasamento teórico do uso de tecnologias no ensino da matemática.
    - Sugere três atividades envolvendo análise de coeficientes, construção e análise de gráficos e análise de máximos e mínimos de uma função quadrática.

39. Autor: Anderson Leandro Gonçalves Quilles.

    Título: Uma Trajetória Hipotética de aprendizagem para o ensino de função quadrática na perspectiva de resolução de problemas (2018).

    Contribuições:

- Comentários sobre as metodologias de Resolução de Problemas e das Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA).
- Abordagem de funções quadráticas partindo de um problema concreto e modelando no sentido tabela-gráfico.
- Coordenadas do foco e da diretriz do gráfico de uma função quadrática em função dos coeficientes.
- Justificativa da propriedade refletora da parábola.
- Curiosidades como o Pirelióforo e a Calculadora parabólica.

40. Autor: Alan Bruno Lopes Barbosa.

    Título: Uma aplicação do Geogebra no Ensino de Função Quadrática (2018).

    Contribuições:

    - Defende a necessidade de escolas bem estruturadas para o ensino de matemática, com laboratório de informática e material manipulável como Torre de Hanói e Tangram.
    - Fez uma comparação entre aprendizagem significativa x aprendizagem mecânica.
    - Pontuou que William Oughtred fez a generalização da fórmula que é conhecida aqui no Brasil como "Fórmula de Bháskara".
    - Pontou que James Sylvester deu a noção de discriminante de equação quadrática e Albert Girard encontrou as relações entre os coeficientes e as raízes (soma e produto).
    - Citou a utilização de pontes penseis como aplicação de função quadrática e a economia de alguns investimentos, cuja curva de produção se aproxima de uma parábola.
    - Instruções sobre uso de Geogebra e sugestão de atividades envolvendo funções quadráticas.

41. Autor: Caroline Kosloski.

    Título: Função Quadrática: Uma proposta para o ensino médio (2018).

    Contribuições:

    - Defende a compreensão da parábola como uma cônica pelo aluno já no 1º ano do ensino médio, mesmo que não seja um estudo aprofundado.
    - Relato da lenda da duplicação do altar de Apolo na guerra do Peloponeso para contextualizar o problema da duplicação do cubo.
    - Caracterização das cônicas antes e depois de Apolônio de Perga.

- Nomenclatura das cônicas através da aplicação de áreas.
- Observou que Kepler foi o primeiro a usar a construção de parábolas usando o conceito de equidistância, além de comentar sobre a parábola como uma elipse com um foco no infinito e as esferas de Dandelin.
- Demonstrou a propriedade refletora, com extensão para os paraboloides de revolução.
- Sequência didática com 7 atividades com objetivos variados.

42. Autor: Edson Binga da Rocha.

    Título: Abordagem da função quadrática por meio de sua forma canônica: Um estudo de caso numa escola pública de Juaziero-BA (2018).

    Contribuições:

    - Baseado em um estudo de caso descrito na dissertação, defende que a abordagem usando a forma canônica melhora o nível de compreensão e que isso é explorado pelos livros didáticos.
    - Destaca que, segundo o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), 70% dos alunos no Brasil estão abaixo do nível 2 em domínio de competências em Matemática (em uma escala de 1 a 6). Esses dados são referentes à avaliação de 2015, com divulgação dos resultados em 2016.
    - Critica o uso de tabelas como única abordagem na construção de gráficos, pois os alunos perdem a ideia mais geral do comportamento da função.
    - Ilustra o Método de Descartes para resolução de equações do 2º grau.
    - Faz um relato detalhado do Método de Bháskara.
    - Pesquisa de campo com professores e 20 alunos da 1ª série da escola referida no título da dissertação.
    - Proposta de 3 sequências didáticas.
    - Análise de 5 coleções de livros didáticos nos critérios de contextualização, situações-problemas reais e articulação entre conteúdos.

43. Autor: Francisco Bruno Braga Teixeira.

    Título: O uso do software Winplot no auxílio do ensino de funções quadráticas presentes nas questões do Enem (2019).

    Contribuições:

    - Faz uma contextualização histórica do ensino de funções no Brasil.

- Lista as principais metodologias utilizadas, ressaltando as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICS) como recurso predominante no ensino da matemática.
- Propõe a forma canônica da função quadrática como instrumento de análise (principalmente quando os coeficientes não são inteiros).
- Promove a discussão de questões do Enem através de soluções algébricas e gráficas usando o Winplot.

44. Autor: Cezário Silvino Bonfim.

    Título: Uma revisão sistemática sobre a abordagem geométrica no ensino de funções quadráticas (2019).

    Contribuições:

    - Analisou 31 artigos de periódicos de educação matemática com propostas metodológicas para o ensino de funções quadráticas e classificou-os quanto a intensidade do uso da abordagem geométrica.
    - Sobre um dos artigos em especial, foi percebido pelos seus autores e destacado pelo autor da dissertação que a ideia da construção da parábola como lugar geométrico de pontos equidistantes teve uma aceitação muito maior pelos alunos do que o conceito livresco, onde a parábola é apresentada meramente como gráfico de uma função quadrática.

45. Autor: Hugo Leonardo da Silva.

    Título: Função Quadrática: Investigar os conhecimentos que os alunos do 1º ano do ensino médio apresentam para lidar com questões que envolvem os principais conceitos associados à função quadrática (2019).

    Contribuições:

    - Destaca o mérito dos Babilônios em lidar com problemas do 2º grau, já que muitas ferramentas algébricas disponíveis hoje não eram conhecidos por eles na época.
    - Exemplos de aplicações da função quadrática em várias áreas, inclusive em componentes curriculares afins à Matemática.
    - Pesquisa em forma de questionário para avaliar conhecimento de alunos da 1ª série onde foi constatado que eles tem muitas dificuldades de aprendizagem, principalmente em resolução de problemas envolvendo funções quadráticas.

46. Autor: Marcelo Gorges.

    Título: Função Quadrática: Lançamento Oblíquo de Projéteis (2019).

    Contribuições:

- Relato histórico de função quadrática e parábola.
- Apresentação sobre modelagem matemática.
- Relato sobre uma oficina que envolve lançamento de projéteis e análise de sua trajetória com aplicação posterior de questionário para descobrir as principais dificuldades na montagem do modelo matemático da trajetória dos mesmos.

47. Autor: Liliane Araújo Lima Brito.

    Título: Uma proposta de sequência didática para o estudo de função quadrática por meio da construção de ponte de palitos (2019).

    Contribuições:

    - Usou a definição de Apolônio no referencial teórico para definir parábolas.
    - Análise da abordagem do livro didático Contato Matemático de Joamir Roberto de Souza (editora FTD, 2016) nas funções quadráticas.
    - Proposta de sequência didática em 6 etapas em que uma delas é a construção de uma maquete de ponte de palitos.

48. Autor: João Paulo Neves e Silva.

    Título: Geogebra: Explorando possibilidades de abordagem interativa dos conteúdos de função quadrática, limites e derivada (2019).

    Contribuições:

    - As características interativas do Geogebra despertam o interesse para o trabalho investigativo para o ensino de funções.
    - Instruções para o uso de Geogebra.
    - Proposta de atividades sobre área, coeficientes de função quadrática, raízes, foco e diretriz e reta tangente (esta última usando noções de cálculo) usando o Geogebra.

49. Autor: Giuliano Eduardo Batista Cutrim.

    Título: Função Quadrática na modelagem matemática no lançamento de foguete de garrafa PET com alunos do 1º ano do Ensino Médio (2019).

    Contribuições:

    - Apresentação sobre modelagem matemática enquanto metodologia.
    - O estudo de função decorre da necessidade de compreender e criar modelos matemáticos de fenômenos a fim de fazer estimativas sobre os mesmos.
    - Cita várias aplicações da função quadrática.

- Relato sobre oficina de lançamento de foguetes com 35 alunos de 1º ano.

50. Autor: Juniane Ellen da Cunha Lara.

    Título: Estudando Funções Quadráticas com o lançamento de Objetos-Atividades com o celular e o Geogebra (2020).

    Contribuições:

    - O trabalho destaca a importância da modelagem matemática no ensino.
    - Proposta do método dos mínimos quadrados para ajuste linear das curvas.
    - Propõe uma sequência didática com lançamento de bolas e dardos na quadra e análise das trajetórias no Geogebra, para que o aluno conclua que essa trajetória se aproxima de uma parábola.
    - Propõe também uma experiência de casos de Covid em Itaguara - Minas Gerais onde é feito um ajuste dos dados obtidos em curva de função polinomial de grau 2 através do Geogebra para saber qual a função que melhor representaria tais dados.

51. Autor: Viviane Fátima Oliveira.

    Título: Dinâmica de Funções quadráticas: uma abordagem no Ensino Médio (2020).

    Contribuições:

    - Utiliza conceitos de Análise na proposta metodológica no Ensino de funções.
    - Faz uma contextualização histórica sobre funções.
    - A culminância do trabalho apresenta um caderno de atividades que faz uma abordagem de funções quadráticas usando sistemas dinâmicos.

52. Autor: Ernesto Araújo de Almeida.

    Título: Funções Quadráticas: Ensino e Aplicações (2020).

    Contribuições:

    - Pontuou que Galileu Galilei definiu o modelo matemático que relaciona as posições e o tempo de um movimento de queda livre nas proximidades da superfície da Terra o qual é uma função quadrática.
    - Demonstração da determinação de uma função quadrática por 3 pontos com exemplos.
    - Destaca as potencialidades da forma canônica, não exploradas nos livros didáticos.
    - Demonstração da parábola como gráfico de uma função quadrática através da equidistância.

- Esboço do gráfico usando o ponto simétrico ao ponto (0,c) em relação ao eixo de simetria da parábola ignorado nos livros didáticos.
- Comenta sobre o paraboloide de revolução e demonstra a propriedade refletora da parábola.

53. Autor: Aline da Silva Freitas Monteiro de Lima.

    Título: Função Quadrática: Uma proposta didático-pedagógica utilizando a sala de aula invertida no ensino remoto (2021).

    Contribuições:

    - Proposta de Atividade remota por meio de sala de aula invertida e paródia musical para estudo de função quadrática aplicada na pandemia, com relato detalhado.
    - Comenta sobre obstáculos comuns ao ensino de função quadrática.
    - Apresentação da metodologia de Sala de Aula Invertida como submodelo do ensino híbrido.
    - Comentários sobre alguns instrumentos usados: Google meet, Google classroom, WhatsApp.
    - Relato sobre 9 dissertações do PROFMAT que falam sobre Função Quadrática.

54. Autor: Márcia Falek Rocha.

    Título: Estudo da Função Quadrática: Uma proposta utilizando investigação matemática (2021).

    Contribuições:

    - Proposta que tem objetivo central de fazer o aluno reconhecer uma função quadrática numa situação-problema (modalidade presencial e online).
    - Abordagem que permite comparar funções quadráticas com funções afins e exponenciais.
    - Revisão Bibliográfica de 25 dissertações do PROFMAT com relato sobre algumas delas.
    - Atividade de círculos e moedas cuja culminância é uma função quadrática como modelo matemático.

55. Autor: Manoel Marcondes Germano Júnior.

    Título: Tecnologias Digitais no ensino de matemática: Uma abordagem do uso do software Geogebra para o ensino de função quadrática (2021).

    Contribuições:

- Sequencia didática com atividades interativas para aulas online que inclui resolução de questões do ENEM pelo Geogebra.
- Relato da Educação Brasileira com ênfase em sua democratização e uso de tecnologias no ensino de matemática.
- Fez uma pesquisa do ENEM entre os anos de 2011 e 2020 e concluiu que em média 2,8 % das questões de matemática envolvem funções quadráticas.

56. Autor: Márcia Regina Souza De Olanda.

    Título: Função Quadrática: Aplicações de situações didáticas em sala de aula e no Laboratório de ensino de Matemática (2023).

    Contribuições:

    - Apresentação da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e da Engenharia Didática de Michèle Artigue como metodologias de ensino com contextualização histórica das mesmas.
    - Enfatiza que a pesquisa realizada pela autora para investigar as habilidades de compreensão dos alunos dos conceitos que envolvem funções quadráticas se baseou em uma avaliação interpretativa da resolução das questões pelos alunos utilizando resolução de problemas, materiais concretos e software Geogebra.
    - Resenha histórica do ensino de funções e de matemática em geral no Brasil.
    - Atividade de montagem de polígonos com EVA pelos alunos para representar expressões algébricas e equações e de elaboração de mapas mentais.
    - Destaca que alguns entraves educacionais do ensino médio foram minimizados no século XXI com metodologias e currículos mais significativos, uso de tecnologias e contextualização de problemas.

Vários desses trabalhos apresentam a definição da parábola por equidistância e a propriedade refletora em seus arcabouços teóricos, mas apenas um deles propôs uma integração dos tópicos tratados no estudo de cônicas com os tópicos abordados no estudo de função quadrática. Por esse motivo tomaremos como uma das principais referências a dissertação de Sílvia Louzada chamada "Relações entre Cônicas e Funções no Ensino Médio". A proposta de integrar o estudo de cônicas e funções aborda especialmente (mas não somente) o conteúdo de funções quadráticas. Ao invés de estudar a parábola simplesmente como a representação geométrica dessas funções, podemos analisar as propriedades das parábolas como cônica, maximizando assim seu potencial significativo. O processo de ensino aprendizagem por esse método pode aumentar a quantidade de habilidades obteníveis no processo de ensino-aprendizagem de funções, já que trabalhando as parábolas como entes geométricos estaremos dando ênfase às suas características fundamentais e propriedades mais relevantes no cotidiano.

O trabalho de Louzada sobre cônicas faz uma rica resenha histórica que serve para uma boa contextualização. Papus de Alexandria é mencionado e Descartes tratado com detalhes. Existe também uma sugestão de sequências didáticas de caráter complementar em relação aos 7 livros didáticos que foram analisados. Os livros são amplamente utilizados e possuem autores renomados como Manoel Paiva, Gelson Iezzi e Luis Roberto Dante.

Dos livros pesquisados, apenas 2 definem parábola como objeto geométrico e 2 deles provam que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Apenas 3 citam a propriedade refletora, mas sem argumentação matemática. A autora (LOUZADA, 2013, p 24) comenta que já naquela época (2013), o conteúdo de cônicas já não era incluído em alguns currículos do Ensino Médio e, como veremos nas considerações posteriores, tem recebido ainda menos ênfase hoje.

É necessário enaltecer a proposta desse trabalho, pois apesar de ter sido escrito em 2013, ele trata de funções quadráticas de uma forma que entendemos que é necessária atualmente. A BNCC de 2018 não aponta nenhuma habilidade que aborde diretamente o estudo de cônicas, possivelmente porque esse conteúdo já não era trabalhado nas instituições de ensino por falta de tempo. Em adição a isso, as Orientações Curriculares de 2023 da Secretaria de Educação do Espírito Santo (SEDU) não abordam o estudo de cônicas, mas propõe o estudo de funções quadráticas na 1ª e 3ª séries do Ensino Médio.

A atividade 1 da sequência didática da dissertação de Louzada trata da própria definição de parábola por equidistância e será usada como referência na sugestão de uma das sequências didáticas deste documento. A atividade 2 é altamente recomendável para reforçar o conceito de simetria e falar da importância do uso do ponto simétrico do ponto (0,c) da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ na hora de esboçar um gráfico manualmente.

Na conclusão ela sugere aplicação das sequências didáticas sugeridas para os alunos e também posterior observação na aprendizagem dos discentes e como segunda sugestão, na página 66:

> Elaboração de um trabalho completo sobre o tema “funções quadráticas”, reunindo o melhor de cada material indicado pelo MEC, no guia [16], bem como de outras referências usualmente utilizadas nas escolas de ensino médio.

Os outros trabalhos abordam cada tema de maneiras diversas. Enquanto alguns autores se apropriaram de instrumentos algébricos, outros optaram pelo predomínio dos geométricos. A grande maioria dos trabalhos defende o uso de ambientes de geometria dinâmica para correlacionar as representações semióticas de uma função quadrática. Acreditamos que, além de tornar o processo de mediação de aprendizagem mais dinâmico e atrativo, tal instrumento é um facilitador para aquisição de habilidades matemáticas relacionadas à percepção. Isso provavelmente explica a grande quantidade de Sequências Didáticas presentes nessas dissertações onde instrumentos como o Geogebra são utilizados.

Outra característica marcante nesses trabalhos são as críticas na forma como é ensinada a função quadrática, principalmente nos livros didáticos. Entre as críticas destacamos a ausência do uso da forma canônica da função quadrática. A forma canônica é um instrumento com grande potencial no estudo dos gráficos, a partir do qual as transformações geométricas que envolvem parábolas se tornam mais facilmente perceptíveis em comparação com a forma polinomial. É importante salientar que a maioria das dissertações é anterior ao ano de 2018. Existem alguns fatos que se sucederam a esses trabalhos e mudaram os paradigmas do ensino da Matemática não só no Espírito Santo, mas também no Brasil:

- A aprovação do Novo Ensino Médio em 2017, com sua posterior instauração a partir de 2022. Foram sugeridas inclusões de componentes curriculares diversificados, com consequente redução da carga horária destinada ao ensino da Matemática onde houve uma inevitável redução dos conteúdos a serem trabalhados e de habilidades matemáticas a serem consolidadas.
- A Aprovação da Base Nacional Comum Curricular, em 2018 , na qual não existem habilidades diretamente relacionadas ao ensino de cônicas. Embora esse documento seja apenas um parâmetro, isso por si só já é um desestímulo à inserção desse tópico nos currículos estaduais. Isso acabou acontecendo inclusive no Espírito Santo. Em adição a isso ocorreu a aplicação dos descritores para análise de desempenho nas avaliações externas estaduais e nacionais, que também não contemplam diretamente o ensino de cônicas.
- A pandemia de Coronavírus, que começou oficialmente em março de 2020. Como veremos, durante esse período houve um aumento da discrepância de aprendizagem de alunos com diferentes classes sociais. Com isso, a prioridade das ações subsequentes à pandemia passou a ser a recomposição de aprendizagens para tentar consolidar no ensino médio habilidades matemáticas que não foram adquiridas no Ensino Fundamental, impactando diretamente no conteúdo que era trabalhado no Ensino Médio antes da pandemia.

As críticas orientadoras das considerações que faremos neste trabalho também estão presentes nos trabalhos supracitados: A ausência de informações à respeito das aplicações da propriedade refletora da parábola nos livros didáticos e a relutância em abordar elementos fundamentais da parábola, como o foco e a diretriz.

3 Arcabouço Teórico e Contexto Histórico

Apresentaremos inicialmente algumas fundamentações teóricas com o objetivo de explicitar características notáveis da função quadrática, que a distinguem de outras funções abordadas no ensino médio, como valor máximo (ou mínimo). A apresentação será feita deliberadamente sob o ponto de vista algébrico de modo a reforçar a sua independência da representação gráfica. Após isso, apresentaremos a parábola, para depois identificarmos (sob circunstâncias específicas) a mesma como um gráfico da função quadrática.

3.1 Função Quadrática

Apresentaremos algumas características fundamentais da função quadrática, como valores máximos e mínimos que ela pode assumir e intervalos de crescimento e decrescimento de modo a prover instrumentos que ajudarão a relacionar tal função com o seu gráfico, que abordaremos posteriormente.

Definição 3.1.1. *Dados dois conjuntos A e B, o conjunto $A \times B$, formado pelos pares ordenados (x, y) onde $x \in A$ e $y \in B$ é chamado de produto cartesiano de A e B. A partir daqui, chamaremos de $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e A e B serão subconjuntos de $\mathbb{R}$ no contexto de funções e de plano cartesiano.*

Um produto cartesiano de subconjuntos de números reais pode ser representado no plano cartesiano, onde cada um dos seus elementos representa um ponto desse plano.

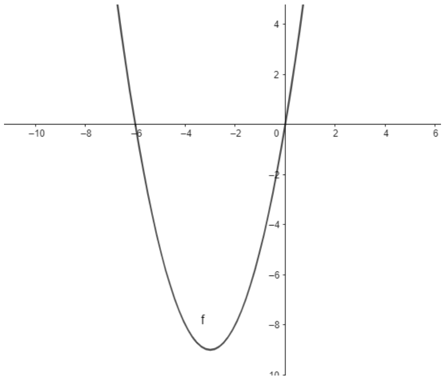
Definição 3.1.2. *Dados dois conjuntos A e B. Uma função $f : A \to B$ é um subconjunto de $A \times B$ com uma lei de formação que faz corresponder a cada elemento de A um único elemento de B.*

O conjunto A é chamado de domínio da função e o conjunto B é chamado de contradomínio da função. O conjunto imagem Im é formado pelos elementos de B que, pela lei de formação da função, são associados aos elementos de A.

Quando não houver especificações quanto ao domínio e contradomínio de uma função, consideraremos que a mesma é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

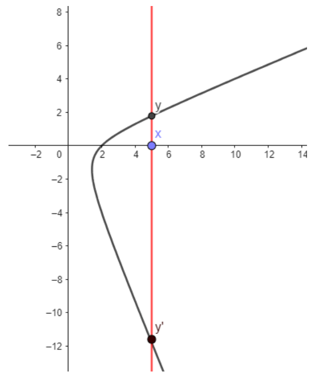
Como já foi dito, qualquer subconjunto de $A \times B$ pode ser representado no plano cartesiano. Se uma figura no plano cartesiano representa um subconjunto de $A \times B$, através dessa figura fica mais fácil dizer se esse subconjunto de $A \times B$ é uma função.

Figura 1 – Função $y = f(x)$



Autoria própria(2024).

Figura 2 – Não é função $y = f(x)$



Autoria própria(2024).

Por exemplo, na Figura 1, está representado o subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por (x, y) tal que $y = x^2 + 6x; y \in \mathbb{R}$. A cada valor do domínio está associado apenas um valor do contradomínio. Na Figura 2, está representado o subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definido por (x, y) tal que $x^2 = y^2 + 2xy + 4$. Nesse caso, existem elementos do domínio ao qual estão associados mais de um elemento do contradomínio ou não está associado nenhum valor do contradomínio. O subconjunto representado não é, portanto, uma função.

Definição 3.1.3. *Denomina-se função quadrática uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, da forma* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *onde os coeficientes* a*,* b *e* c *são números reais e* $a \neq 0$*.*

Exemplo 3.1.4. $f(x) = 3x^2 + 17x + 10$*, onde* $a = 3$*,* $b = 17$ *e* $c = 10$*.*

Exemplo 3.1.5. $f(x) = -x^2 + 6x$*, onde* $a = -1$*,* $b = 6$ *e* $c = 0$*.*

Exemplo 3.1.6. $f(x) = 5x^2 - 25$*, onde* $a = 5$*,* $b = 0$ *e* $c = -25$*.*

Trataremos agora de alguns valores como raízes e intervalos notáveis desse tipo de função. Para isso existem formas alternativas na sua escrita que possibilitam uma melhor análise desses intervalos. A forma mais notável nesse aspecto é a forma canônica.

Se tomarmos uma função na forma $y = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ e colocarmos o coeficiente a em evidência teremos $y = a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a})$. Adicionando e subtraindo $\frac{b^2}{4a^2}$ obtêm-se:

$$y = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \tag{3.1}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \tag{3.2}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \tag{3.3}$$

Essa é a forma canônica da função quadrática. Ela é útil para determinar as suas raízes e torna mais fácil prever o comportamento do seu gráfico como veremos adiante.

As raízes de uma função quadrática são os valores x do domínio para os quais a função (ou seja, o valor de $f(x)$) se anula. Para o cálculo desses valores podemos usar a sua forma canônica e igualar a zero. O termo $b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da equação e é representado pela letra grega Δ.

Se o valor de Δ é negativo, a função não possui raízes reais já que não existe número real que seja raiz quadrada de um número negativo. Resolvendo a equação temos:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{\Delta}{4a^2}. \tag{3.4}$$

Essa equação só tem solução se:

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Se Δ é positivo, então:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow \frac{|x + b|}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \tag{3.6}$$

Com isso, temos que:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.7}$$

ou

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3.8}$$

Observe que a média aritmética entre essas duas raízes é -$\frac{b}{2a}$. Isso quer dizer que a reta $y = \frac{-b}{2a}$ serve como eixo de simetria para essas raízes. Veremos posteriormente que essa reta serve como eixo de simetria para o gráfico da função quadrática, além de conter o vértice e o foco, elementos fundamentais desse gráfico.

Se o valor de Δ é zero, a função tem uma raiz, chamada de raiz dupla:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}; \tag{3.9}$$

A forma canônica permite fazer conclusões sobre o valor máximo e mínimo de uma função quadrática e analisar intervalos de crescimento e decrescimento. Ainda analisando essa variação da forma canônica e considerando o coeficiente $a > 0$:

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right).$$

O primeiro fator desse produto é a. O segundo fator tem duas parcelas: a segunda parcela é uma constante e a primeira parcela depende do valor de x, sendo obrigatoriamente não negativa. Como o primeiro fator a é positivo, é possível concluir que a expressão admite um valor mínimo. Tal valor é obtido quando a expressão $x + \frac{b}{2a}$=0. De onde concluímos que:

$$x = -\frac{b}{2a} \tag{3.10}$$

e

$$f(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}; \tag{3.11}$$

Se $a < 0$, a expressão adquire valor máximo quando a expressão $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}$ é a menor possível. Isso acontece quando o valor de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é igual a zero, ou seja, o valor máximo da função será igual ao da Equação 3.11 com x correspondendo ao da Equação 3.10.

Explicitaremos agora os valores que uma função quadrática pode assumir.

Definição 3.1.7. *Seja a função $f : A \to B$., com A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. O conjunto imagem de f é constituído pelos elementos $b \in B$ para os quais $f(a) = b$ para algum $a \in A$.*

Para uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, se $f(x_1) = y_1$ então a equação $ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$ possui solução. Portanto a equação $ax_1^2 + bx_1 + c - y_1 = 0$ tem solução, o que significa que sua discriminante $b^2 - 4a(c - y_1) \geq 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \geq -4ay_1$. Multiplicando essa última inequação por -1 temos:

$$-b^2 + 4ac \leq 4ay_1 \Leftrightarrow 4ay_1 \geq -b^2 + 4ac$$

Se o coeficiente a for positivo, dividimos a inequação por $4a$ e obtemos:

$$y_1 \geq \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a},$$

Portanto, o conjunto imagem da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ é:

$$\left\{y \in \mathbb{R}/y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}.$$

Se o coeficiente a é negativo, dividimos a inequação $4ay_1 \geq -b^2 + 4ac$ por $4a$ e obtemos:

$$y_1 \leq \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

e o conjunto a imagem da função será

$$\left\{y \in \mathbb{R}/y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}.$$

Explicitaremos agora em quais intervalos a função quadrática é crescente ou decrescente.

Definição 3.1.8. *Uma função $f : A \to B$, com A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ é crescente se*

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$$

e decrescente se

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 > y_2$$

para $y_1 = f(x_1) \in B$ e $y_2 = f(x_2) \in B$.

Para o resultado a seguir, usaremos a notação $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ quando usarmos a forma canônica da função quadrática.

Teorema 3.1.9. *Seja a função $y = ax^2 + bx + c = 0$ com $a > 0$ ($a < 0$):*

- *Se x_1 e x_2 pertencem ao domínio da função e $x_1, x_2 < x_v$ ($x_1, x_2 > x_v$), então a função é decrescente para todo $x < x_v$ ($x > x_v$).*
- *Se x_1 e x_2 pertencem ao domínio da função e $x_1, x_2 > x_v$ ($x_1, x_2 < x_v$), então a função é crescente para todo $x > x_v$ ($x < x_v$)*

Demonstração. Temos $y = ax^2 + bx + c$, onde $y_2 > y_1$ e $a > 0$:

$$a \cdot (x_2 - x_v)^2 + y_v > a \cdot (x_1 - x_v)^2 + y_v \Rightarrow \tag{3.12}$$

$$\Rightarrow a \cdot (x_2 - x_v)^2 > a \cdot (x_1 - x_v)^2 \Rightarrow \tag{3.13}$$

$$\Rightarrow (x_2 - x_v)^2 > (x_1 - x_v)^2 \Rightarrow \tag{3.14}$$

$$\Rightarrow |x_2 - x_v| > |x_1 - x_v|. \tag{3.15}$$

Temos 2 casos a considerar:

- x_1 e x_2 são menores que x_v, temos que $x_v - x_2 > x_v - x_1 \to -x_2 > -x_1 \to x_2 < x_1$ de onde podemos concluir que a função é decrescente.
- x_1 e x_2 são maiores que x_v, temos que $x_2 - x_v > x_1 - x_v \to x_2 > x_1$ de onde podemos concluir que a função é crescente.

Não obstante, se $y = ax^2 + bx + c$, onde $y_2 > y_1$ e $a < 0$

$$a \cdot (x_2 - x_v)^2 + y_v > a \cdot (x_1 - x_v)^2 + y_v \Rightarrow \tag{3.16}$$

$$\Rightarrow a \cdot (x_2 - x_v)^2 > a \cdot (x_1 - x_v)^2 \Rightarrow \tag{3.17}$$

$$\Rightarrow (x_2 - x_v)^2 < (x_1 - x_v)^2 \Rightarrow \tag{3.18}$$

$$\Rightarrow |x_2 - x_v| < |x_1 - x_v|. \tag{3.19}$$

Novamente, temos 2 casos a considerar:

- x_1 e x_2 são menores que x_v, temos que $x_v - x_2 < x_v - x_1 \to -x_2 < -x_1 \to x_2 > x_1$ de onde podemos concluir que a função é crescente para $x < x_v$.
- x_1 e x_2 são maiores que x_v, temos que $x_2 - x_v < x_1 - x_v \to x_2 < x_1$ de onde podemos concluir que a função é decrescente para $x > x_v$.

Se $y_2 = y_1$, temos:

$$a \cdot (x_2 - x_v)^2 + y_v = a \cdot (x_1 - x_v)^2 + y_v \Rightarrow \tag{3.20}$$

$$\Rightarrow a \cdot (x_2 - x_v)^2 = a \cdot (x_1 - x_v)^2 \Rightarrow \tag{3.21}$$

$$\Rightarrow (x_2 - x_v)^2 = (x_1 - x_v)^2 \Rightarrow \tag{3.22}$$

$$\Rightarrow |(x_2 - x_v)| = |(x_1 - x_v)|. \tag{3.23}$$

Daí concluímos que $x_1 = x_2$ ou que $x_v = \frac{x_1+x_2}{2}$ o que contraria a hipótese de x_1 e x_2 serem ambos maiores ou menores que x_v.

□

O teorema a seguir fala da boa definição de uma função quadrática conhecendo três pares de valores que se associam através de sua lei de formação.

Teorema 3.1.10. *Sejam x_1, x_2 e x_3 três números reais distintos e y_1, y_2 e y_3 números reais tais que os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ não são colineares em $\mathbb{R}^2$. Existe uma, e somente uma, função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ tal que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.*

Demonstração. Se x_1, x_2 e x_3 não são colineares vale a relação:

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3.24}$$

Trocando a primeira e a terceira coluna de lugar e considerando que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$, temos:

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} ax_1^2 + bx_1 + c & x_1 & 1 \\ ax_2^2 + bx_1 + c & x_2 & 1 \\ ax_3^2 + bx_3 + c & x_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3.25}$$

Se substituirmos a primeira coluna pela soma dela com a segunda coluna multiplicada por $-b$ com a terceira coluna multiplicada por $-c$, o valor da determinante continua o mesmo, chegando a:

$$\begin{vmatrix} ax_1^2 & x_1 & 1 \\ ax_2^2 & x_2 & 1 \\ ax_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.26}$$

Mas a veracidade da sentença acima equivale ao fato de que o sistema de equações abaixo é possível determinado. O que significa que existe apenas uma terna ordenada (a, b, c) que satisfaz as 3 equações do sistema

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 = f(x_1) \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 = f(x_2) \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 = f(x_3) \end{cases}$$, como queríamos demonstrar.

□

De maneira geral, as funções quadráticas nem sempre foram apresentadas como nos dias de hoje. Iniciaremos agora um breve relato histórico da produção científica relacionada às funções quadráticas através dos tempos.

(MENEZES et al., 2015, p 17) relata que o estudo das funções quadráticas tem origem na resolução de equações de grau 2 pelos babilônios por volta de 1700 a.C., mas sem os instrumentos algébricos disponíveis nos dias de hoje. Eles abordaram o problema de encontrar um par de números conhecidos sua soma e seu produto. Chamando os dois números em questão de x_1 e x_2 temos então as equações:

$$x_1 x_2 = a \tag{3.27}$$

e

$$x_1 + x_2 = b \Leftrightarrow x_1 = b - x_2; \tag{3.28}$$

Substituindo o valor de x_1 da Equação 3.28 na Equação 3.27 temos:

$$(b - x_2)x_2 = a \Leftrightarrow x_2^2 - bx_2 + a = 0. \tag{3.29}$$

Mais tarde, por volta do século VI antes de Cristo, os gregos voltaram a abordar o assunto por intermédio do estudo da razão áurea, que é a razão entre duas partes de um segmento de reta dividido em média e extrema razão. O modelo matemático que soluciona o problema é uma equação de 2º grau. Apesar disso, (FILIZZOLA et al., 2014, p 17) pontua que na Grécia, as soluções de problemas eram predominantemente geométricas.

Ainda de acordo com (MENEZES et al., 2015, p 22), os árabes e hindus também estudaram as equações do 2º grau. Brahmagupta e seu aluno, Bhaskara II descreveram a forma de resolver uma equação desse tipo no século 6 depois de Cristo, ainda sem o emprego de fórmulas ou representação da equação por meio de letras e seus coeficientes. O simbolismo algébrico começou a ser utilizado com o francês François Viéte (1540-1603), quase um milênio depois. Ainda assim, (FILIZZOLA et al., 2014, p 20) atribui o crédito de demonstrar algebricamente e geometricamente a fórmula resolutiva aos árabes. De acordo com o mesmo autor, a inserção do nome "Fórmula de Bháskara" à fórmula resolutiva aconteceu no Brasil a partir de 1960 e só recebe esse nome por aqui.

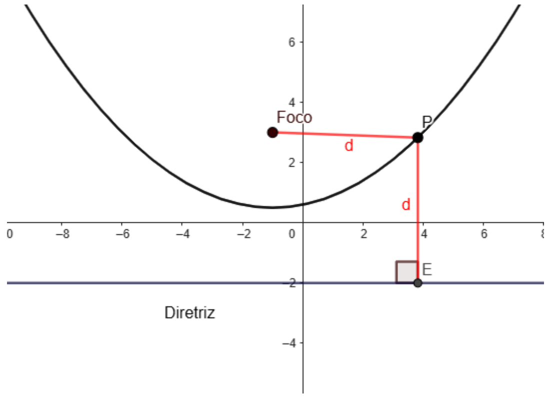
Contemporâneo de Viéte, Galileu Galilei era nascido em Pisa, Itália. Ele desenvolveu um modelo matemático para a queda livre de corpos: $s = \frac{gt^2}{2}$, onde g é a aceleração da gravidade, s é o espaço percorrido e t o tempo a partir do início da queda. Finalmente, o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) usou o termo função para descrever uma relação entre duas quantidades. O suiço Leonard Euler (1707-1783) criou a notação $f(x)$ e o alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1854) formulou uma definição de função mais parecida com a atual, aperfeiçoada com a posterior criação da Teoria dos Conjuntos.

3.2 Parábola

Definição 3.2.1. *Dados um ponto F e uma reta d, o lugar geométrico dos pontos que equidistam de F e da reta d constituí a parábola de foco F e diretriz d (Figura 3).*

Além do foco e da diretriz, existem outros elementos importantes para serem considerados em uma parábola. Um deles é o eixo focal, reta perpendicular à diretriz que passa pelo foco. Outro elemento é o vértice (Figura 4): ponto da parábola cuja distância até a diretriz é a menor possível. O vértice é também o ponto médio do segmento que

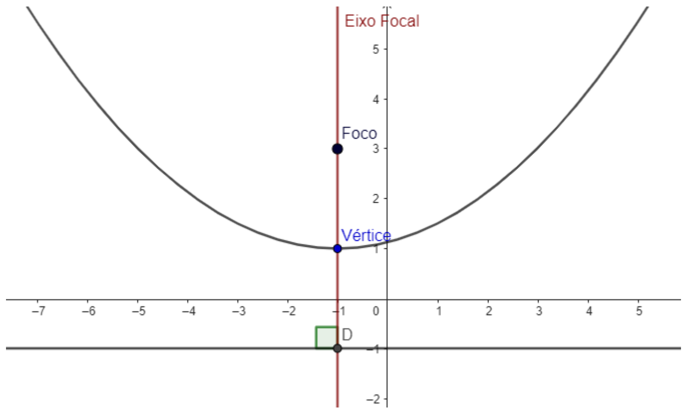
Figura 3 – Representação da parábola



Autoria própria (2023).

determina a distância entre o foco e a diretriz, além de ser o ponto de interseção do eixo focal com a parábola.

Figura 4 – Representação do Vértice e do Eixo Focal



Autoria própria (2023).

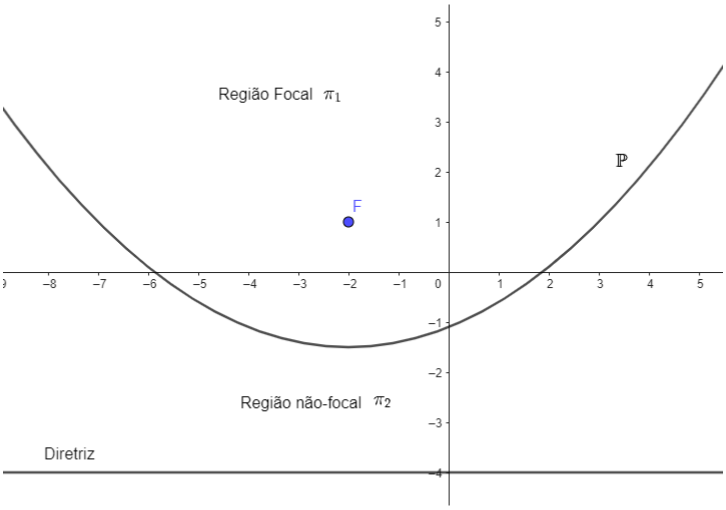
Uma parábola $\mathcal{P}$ divide o plano em duas regiões. Conforme indicado na Figura 5, a região π_1, que contém o foco F, é a *região focal* da parábola. A região π_2, que contém a diretriz, é a *região não-focal.* Se um ponto $P \notin \mathcal{P}$, então $P \in \pi_1$ ou $P \in \pi_2$. A importância disso ficará evidente na definição de reta tangente a uma parábola, que veremos adiante.

Definição 3.2.2. *Uma reta r é tangente à uma parábola $\mathcal{P}$ se ela não é paralela ao eixo focal e intercepta $\mathcal{P}$ em exatamente um ponto T. Todo ponto $P \in r$ tal que $P \neq T$ se situa na região não-focal de $\mathcal{P}$ conforme representado na Figura 5.*

Todos os pontos da reta tangente à uma parábola $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz d têm a seguinte propriedade: a distância desses pontos até a reta d é menor do que a distância desses pontos até F de $\mathcal{P}$. Obviamente a única exceção é o ponto de tangência, já que ele pertence à $\mathcal{P}$.

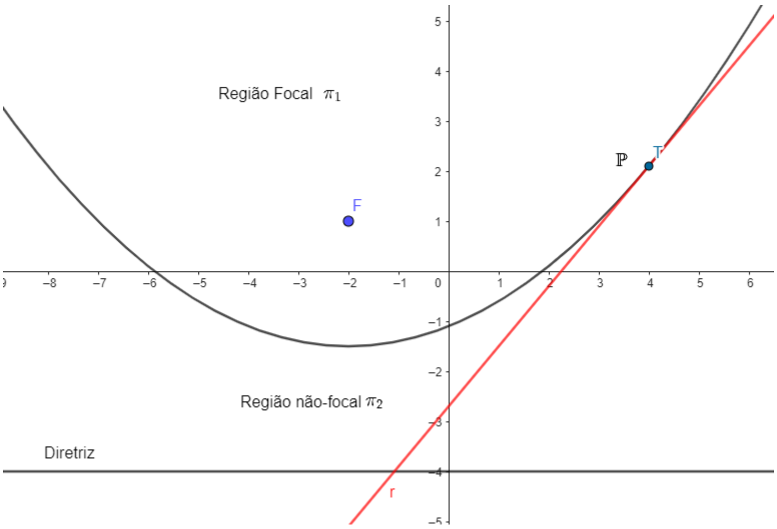
O resultado a seguir mostra que o eixo focal de uma parábola é também o seu eixo de simetria.

Figura 5 – Representação das Regiões determinadas pela parábola.



Autoria própria (2024).

Figura 6 – Representação de uma reta tangente a uma parábola.



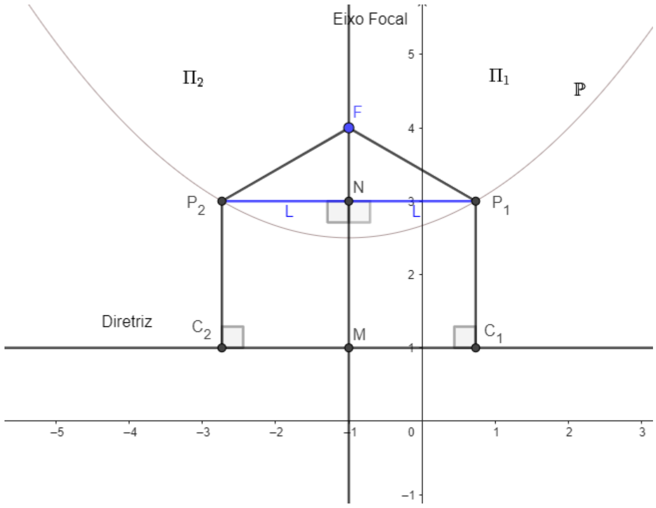
Autoria própria (2024).

Teorema 3.2.3. *Sejam Π_1 e Π_2 os semiplanos determinados pelo eixo focal de uma parábola $\mathcal{P}$. O ponto $P_1 \in \Pi_1$ está a uma distância L do eixo focal e $P_2 \in \Pi_2$ é um ponto simétrico de P_1 em relação ao mesmo eixo. Então $P_1 \in \mathcal{P} \rightarrow P_2 \in \mathcal{P}$.*

Demonstração. Seja a parábola $\mathcal{P}$ com foco F. O ponto N é a interseção do segmento $\overline{P_1P_2}$ com o eixo focal de $\mathcal{P}$ (Figura 7). Tomemos os pontos C_1 e C_2, que são os pés das perpendiculares baixadas, respectivamente, dos pontos P_1 e P_2 na diretriz da parábola.

Note que o segmento $\overline{P_1P_2}$ é paralelo à diretriz, pois o mesmo é perpendicular ao eixo focal (P_1 e P_2 são simétricos em relação ao eixo focal). Pela definição de distância entre ponto e reta, o segmento $\overline{P_2C_2}$ é paralelo ao segmento $\overline{P_1C_1}$. Então $P_2C_2C_1P_1$ é um paralelogramo e $\overline{P_1C_1}$ tem a mesma medida de $\overline{P_2C_2}$.

Figura 7 – O eixo focal coincide com o eixo de simetria



Autoria própria (2023).

Suponha agora, que $P_1 \in \mathcal{P}$, então $\overline{FP_1} = \overline{P_1C_1}$. Os segmentos $\overline{P_2N}$ e $\overline{P_1N}$ tem a mesma medida, pois P_1 e P_2 são simétricos em relação ao eixo focal.

Os ângulos $\widehat{P_2NF}$ e $\widehat{FNP_1}$ medem 90º.

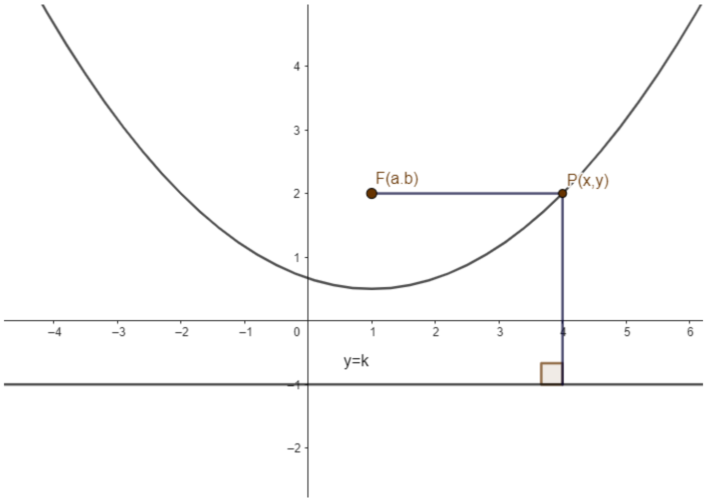
O segmento $\overline{FN}$ é lado comum aos triângulos P_2NF e P_1NF. Pelo caso LAL (lado-ângulo-lado), esses triângulos são congruentes. Então o segmento $\overline{FP_1}$ tem a mesma medida que o segmento $\overline{FP_2}$, que, por sua vez, tem a mesma medida que o segmento $\overline{P_2C_2}$. Ora, se o segmento $\overline{FP_2}$ tem a mesma medida que $\overline{P_2C_2}$ pela definição de parábola, $P_2 \in \mathbb{P}$.

$\square$

O próximo resultado é a culminância deste arcabouço teórico, pois estabelece a relação entre as funções quadráticas e as parábolas, que até agora foram apresentadas de forma independente. Para tanto consideraremos as parábolas com diretriz paralela (ou coincidente) ao eixo x, pois do contrário, ela não representa uma função. Além disso essa consideração torna o resultado mais simples.

Teorema 3.2.4. *Toda parábola com diretriz d na forma $y = k$ onde k é um número real é gráfico de uma função quadrática.*

Figura 8 – Parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas



Autoria própria(2023).

Demonstração. Considere a parábola com foco $F(a, b)$ e diretriz $y = k$ com $k \in \mathbb{R}$. Tomemos um ponto da parábola de coordenadas $P(x, y)$, a distância entre esse ponto e o ponto F é igual à distância entre esse ponto e a diretriz.

Como a diretriz é da forma $y = k$, onde $k \in \mathbb{R}$, a distância entre o P e a diretriz pode ser calculada por $\mid y - k \mid$. Daí, temos que:

$$d_{PF} = d_{Pd} \Rightarrow \tag{3.30}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \mid y - k \mid \Rightarrow \tag{3.31}$$

$$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = y^2 - 2ky + k^2 \Rightarrow \tag{3.32}$$

$$\Rightarrow (2b - 2k)y = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - k^2 \Rightarrow \tag{3.33}$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{\frac{1}{2b-2k}}_{m} x^2 + \underbrace{\frac{2a}{2k-2b}}_{n} x + \underbrace{\frac{a^2+b^2-k^2}{2b-2k}}_{c}. \tag{3.34}$$

Onde $k \neq b$, já que o foco da parábola não pertence a sua diretriz (Figura 8). Portanto, a relação entre as coordenadas de qualquer ponto da parábola é $P(x, mx^2 + nx + c)$, onde os coeficientes da função estão bem definidos na última equação da demonstração.

□

Definição 3.2.5. Concavidade de uma parábola. *Seja a parábola $\mathcal{P}$ que corresponde à função quadrática $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ e uma reta r tangente a $\mathcal{P}$.*

A concavidade da parábola é voltada para cima se para todo ponto $P(x, y) \in r$ satisfaz a relação $y \leq ax^2 + bx + c$ e é voltada para baixo se $P(x, y) \in r$ satisfaz a relação $y \geq ax^2 + bx + c$.

Abordaremos agora o cálculo da diretriz e do foco de uma parábola em função dos coeficientes da função quadrática associada essa parábola, assim como a determinação de sua concavidade. Para demonstração desses resultados, lançaremos mão de uma forma alternativa de escrever uma função quadrática que é

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0), \tag{3.35}$$

onde (x_0, y_0) são as coordenadas do vértice da parábola, o foco tem coordenadas $F(x_0, y_0{+}p)$ e a equação da diretriz é $y - y_0 + p = 0$. A variável p é a distância entre o foco e o vértice, chamado de parâmetro. Essa forma alternativa será utilizada no teorema seguinte, que corrobora a proposta de incluir o foco e a diretriz nos estudos de função quadrática no Ensino Médio.

Para o resultado a seguir usaremos mais uma vez as notações $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, na função $y = ax^2 + bx + c$, pois já conhecemos o valor da discriminante Δ.

Teorema 3.2.6. *O gráfico da função $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ e discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. é uma parábola de foco $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta+1}{4a}\right)$ e diretriz $y = \frac{-\Delta-1}{4a}$.*

Demonstração. Já sabemos que a forma canônica pode ser escrita na forma:

$$y = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \Rightarrow \tag{3.36}$$

$$\Rightarrow y = a\left((x - x_v)^2 + \frac{y_v}{a}\right) \Rightarrow \tag{3.37}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{a} = (x - x_v)^2 + \frac{y_v}{a} \Rightarrow \tag{3.38}$$

$$\Rightarrow \frac{y - y_v}{a} = (x - x_v)^2 \Rightarrow \tag{3.39}$$

$$\Rightarrow (x - x_v)^2 = \frac{1}{a}\left(y - y_v\right). \tag{3.40}$$

Comparando as Equações 3.35 e 3.40 temos que:

$$x_0 = x_v = -\frac{b}{2a}, \tag{3.41}$$

$$y_0 = y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}, \tag{3.42}$$

e, finalmente:

$$p = \frac{1}{4a}. \tag{3.43}$$

Com isso as coordenadas do foco F são:

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, y_0 + p\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta + 1}{4a}\right). \tag{3.44}$$

A equação da diretriz é:

$$y - \left(\frac{-\Delta + 1}{4a}\right) = 0, \tag{3.45}$$

ou seja,

$$y = \frac{-\Delta - 1}{4a}. \tag{3.46}$$

□

É possível também, condicionar a concavidade da parábola à posição relativa do seu foco e de sua diretriz. Observe que se o coeficiente a é positivo:

$$\frac{-\Delta + 1}{4a} > \frac{-\Delta - 1}{4a}, \tag{3.47}$$

Multiplicando por $4a$ temos:

$$-\Delta + 1 > -\Delta - 1, \tag{3.48}$$

onde o primeiro membro da desigualdade é a ordenada do foco e o segundo membro é a ordenada de qualquer ponto que pertence à diretriz, ou seja, a distância da origem até a diretriz. No sistema cartesiano, isso equivale a dizer que o foco está em uma posição superior à diretriz.

Analogamente, se o coeficiente a é negativo:

$$\frac{-\Delta + 1}{4a} < \frac{-\Delta - 1}{4a}, \tag{3.49}$$

Multiplicando a inequação por $4a$ temos:

$$-\Delta + 1 > -\Delta - 1. \tag{3.50}$$

A ordenada do foco é menor que a distância da diretriz até a origem, disso decorre o fato de o foco estar em uma posição inferior à diretriz.

Portanto, se a concavidade é voltada para cima, o foco está em um semiplano superior à diretriz, ou seja, acima da diretriz. Se estiver voltada para baixo, o foco está em um semiplano inferior à diretriz, ou seja, abaixo da diretriz. Esse fato fica bastante evidente graficamente, mas a demonstração algébrica torna ainda mais explícita a relação entre as representações semióticas de função quadrática. Ainda mais em relação a elementos que não são comumente estudados como foco e diretriz.

Uma das aplicações conhecidas da parábola é o fato de que qualquer objeto lançado traça uma trajetória que pode ser determinada por uma parábola. Outra aplicação importante tem relação com as *pontes pênseis*, que são as que possibilitam os maiores vãos. A estrutura dessas pontes tem formato parabólico e a carga nessas pontes é distribuída igualmente.

Figura 9 – Ponte Jucelino Kubitschek, Brasília -DF

Fonte: turismbr.com

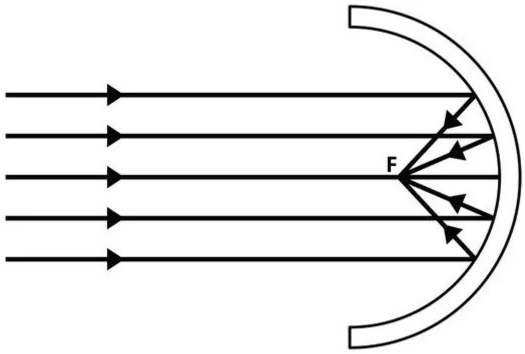
Mas, as aplicações mais significativas talvez tenham a ver com a propriedade refletora da parábola. Para a sua demonstração usaremos a definição abaixo.

Definição 3.2.7. *O ângulo entre uma reta r e uma curva $\mathcal{P}$ é o ângulo entre essa reta e a reta tangente à curva no ponto de tangência.*

Teorema 3.2.8. *Propriedade Refletora da Parábola: Seja r uma reta tangente à uma parábola $\mathcal{P}$ de foco F onde P é o ponto de tangência. Para toda reta t, paralela ao eixo focal da parábola $\mathcal{P}$, que a intercepta em P e forma um ângulo α com r, existe uma reta $s \neq t$ que também faz um ângulo α com r que passa obrigatoriamente por F.*

Uma forma mais lúdica de enunciar essa propriedade seria: todos os raios de luz paralelos ao eixo focal da parábola e refletidos em sua superfície passarão pelo foco da parábola.

Figura 10 – Propriedade refletora da Parábola

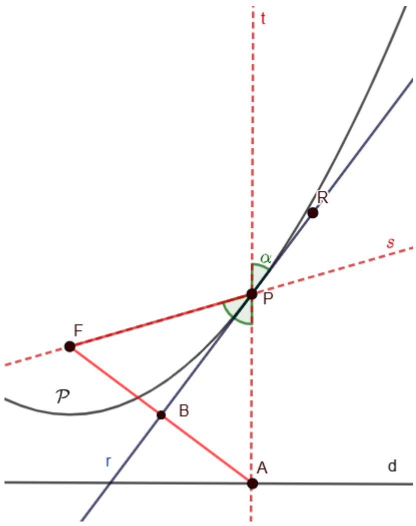


Fonte: brasilescola.uol.com.br

Para a demonstração desse teorema, vamos considerar os caso em que a concavidade da parábola é voltada para cima. O raciocínio será análogo no caso em que a concavidade é voltada para baixo. Também consideraremos a seguinte propriedade: Seja a parábola $\mathcal{P}$ com diretriz d e foco F e um ponto P do plano. Se a distância de F até P for menor que a distância de P até d, então P está na região focal da parábola. Se a distância entre F até P for maior que a distância de P até d, então P está na região não focal da parábola.

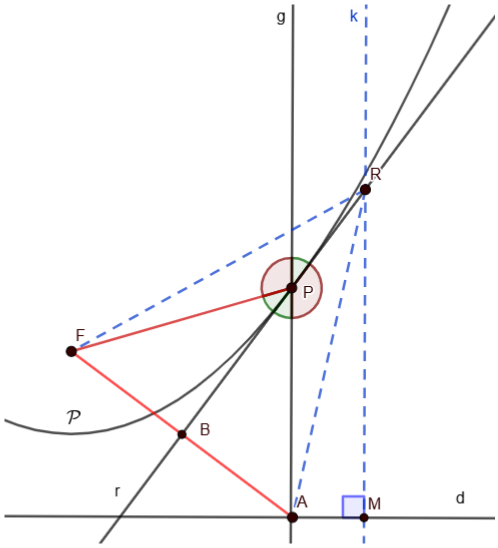
Usaremos também a Lei de Refração em que o ângulo de incidência de um raio de luz em uma superfície é igual ao ângulo de reflexão conforme ilustrado na Figura 11.

Figura 11 – O ângulo de Incidência é igual ao ângulo de reflexão



Autoria própria (2023).

Figura 12 – Prova da Propriedade Refletora da Parábola



Autoria própria (2023).

Demonstração. Considere a parábola $\mathcal{P}$ com foco F e diretriz d e um ponto $P \in \mathcal{P}$ e seja A o pé da perpendicular baixada de P sobre d. Tomemos a mediatriz r dos pontos A e F. Como $P \in \mathcal{P}$, $d(\overline{PA}) = d(\overline{PF})$ pelo conceito de equidistância. Portanto $P \in r$.

Tomemos um ponto $R \in r$ distinto de P. Provaremos que R não pertence à parábola $\mathcal{P}$ e portanto, que r é tangente à parábola. Seja M o pé da perpendicular baixada de R sobre a diretriz d. O triângulo AMR é retângulo em $\hat{M}$, portanto $\overline{AR}$ é seu maior lado (hipotenusa). Como R pertence à mediatriz r, temos que $d(\overline{AR}) = d(\overline{RF})$. Mas $d(\overline{AR}) > d(\overline{RM})$ e disso decorre que $d(\overline{FR}) > d(\overline{RM})$. Consequentemente, R está na região não-focal da parábola e portanto não pode pertencer à mesma o que conclui a demonstração (Figura 12).

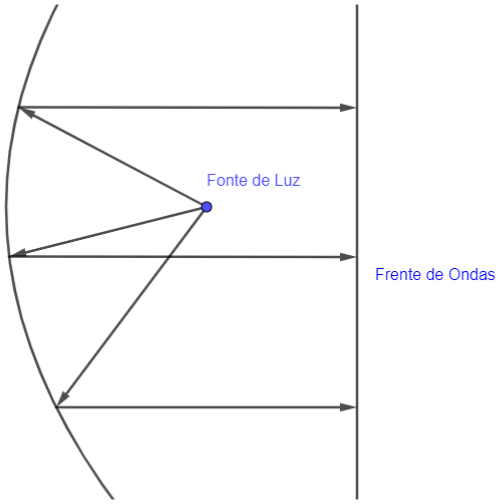
□

Teorema 3.2.9. *Seja $\mathcal{P}$ uma parábola com foco F e diretriz d. Dada uma reta r paralela a d que contém pontos na região focal, então: Se s é uma reta perpendicular a r intersectando $\mathcal{P}$ em um ponto T e r em um ponto R, temos que $d(\overline{TF}) + d(\overline{TR})$ é constante.*

Essa propriedade deixa mais evidente o fato de que uma frente de luz refletida na parábola caminha na velocidade constante, já que r é uma reta genérica paralela à diretriz. Isso faz com que a iluminação ocorra na mesma intensidade em todas os pontos dessa frente de ondas.

Um exemplo da aplicação dessa propriedade reside no farol de carro (Figura 14), onde a fonte luminosa está no foco do paraboloide e a frente de ondas é iluminada de maneira uniforme como representado na Figura 13.

Figura 13 – Ondas refletidas em uma parábola



Autoria própria (2024).

Figura 14 – Representação de Farol de Fusca

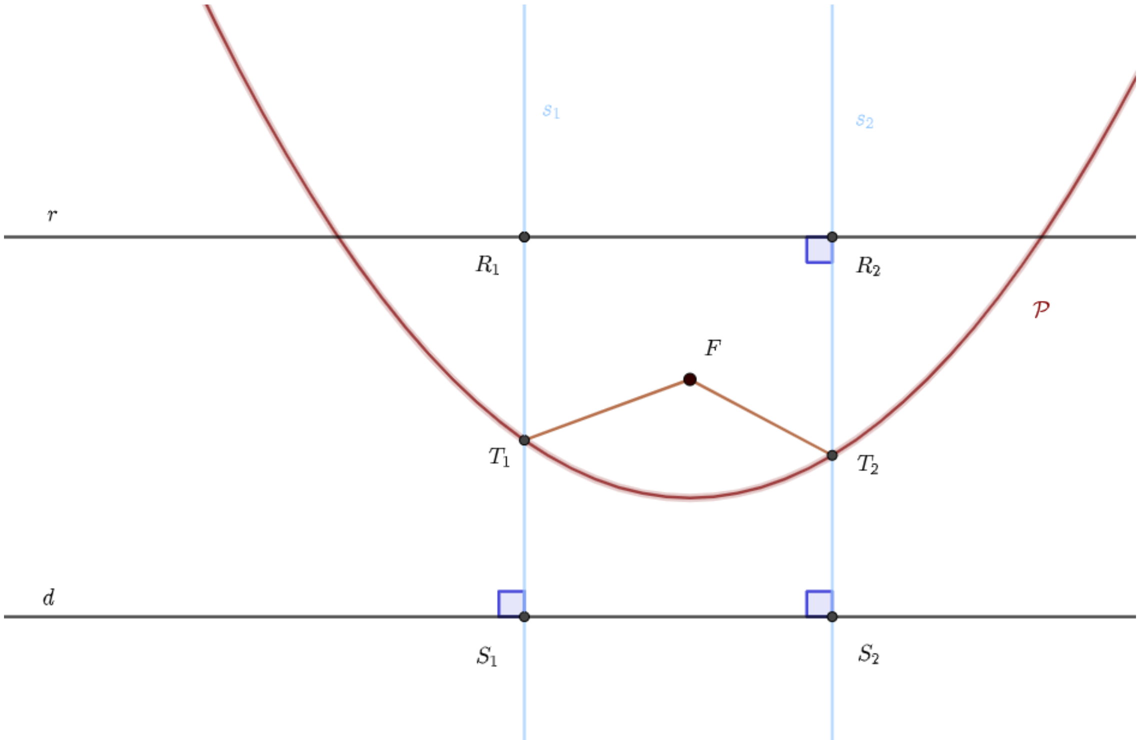
Fonte: produto.mercadolivre.com.br

Abaixo temos a demonstração do Teorema:

Demonstração. Sejam T_1 e T_2 pontos distintos de $\mathcal{P}$, com s_1 e s_2 retas perpendiculares a r que interceptam essa reta nos pontos R_1 e R_2, respectivamente. Os pontos S_1 e S_2 são as intersecções da diretriz d com s_1 e s_2, respectivamente (Figura 15). Como $d//r$, então $\mathrm{d}(\overline{S_1T_1}) + \mathrm{d}(\overline{T_1R_1}) = \mathrm{d}(\overline{S_2T_2}) + \mathrm{d}(\overline{T_2R_2})$ e, pela propriedade da equidistância referente à parábola, $\mathrm{d}(\overline{T_1F}) = \mathrm{d}(\overline{S_1T_1})$ e $\mathrm{d}(\overline{T_2F}) = \mathrm{d}(\overline{S_2T_2})$. Portanto temos que $\mathrm{d}(\overline{T_1F}) + \mathrm{d}(\overline{T_1R_1})$ $= \mathrm{d}(\overline{T_2F}) + \mathrm{d}(\overline{T_2R_2})$ sendo então comprovado que $\mathrm{d}(\overline{TF}) + \mathrm{d}(\overline{TR})$ é constante $\forall T \in \mathcal{P}$.

□

Figura 15 – A reta r é paralela à diretriz de $\mathcal{P}$



Autoria própria(2024).

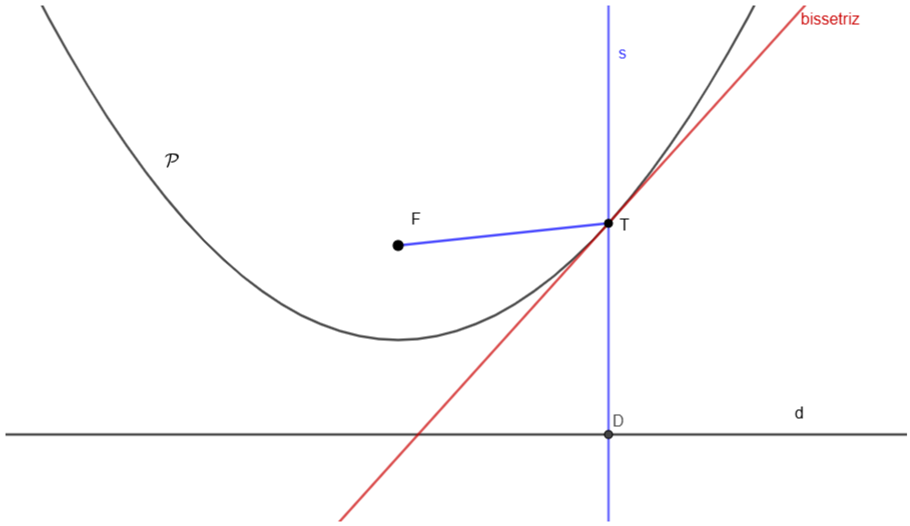
Teorema 3.2.10. *Recíproca da propriedade refletora. Seja $\mathcal{P}$ uma curva no plano. Além disso, em cada ponto da curva a reta tangente está definida. Existe um ponto $F \notin \mathcal{P}$ e uma reta d com a seguinte propriedade: Toda reta s perpendicular a d intersecta a curva $\mathcal{P}$ em algum ponto T. Além disso, se D é a interseção de s com d e a bissetriz do $\widehat{FTD}$ também é a mediatriz do segmento $\overline{FD}$, então a curva $\mathcal{P}$ é uma parábola. Perceba que a bissetriz em questão é a reta tangente a essa curva no ponto T e essa exigência é o mesmo que ter a propriedade refletora.*

De forma mais lúdica esse Teorema enuncia que se raios de luz são emanados de um ponto (que seria a fonte de luz) e incidem sobre uma curva sendo refletidos na direção perpendicular a reta d, então essa curva é uma parábola. Da mesma forma, se raios de luz incidem sobre essa curva na direção perpendicular à reta d e refletirem em um mesmo ponto, então a curva em questão é uma parábola.

Demonstração. Por hipótese, a bissetriz do ângulo $\widehat{FTD}$ coincide com a mediatriz do segmento $\overline{FD}$. Portanto, todos os pontos dela são equidistantes das extremidades F e D, incluindo o ponto T. Podemos concluir com isso que $\mathcal{P}$ é uma parábola com foco F e diretriz d.

□

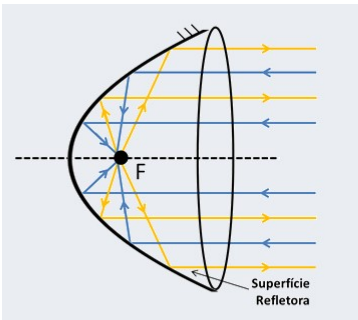
Figura 16 – A mediatriz dos pontos F e D coincide com a bissetriz de $\widehat{FTD}$



Autoria própria(2024).

Se girarmos uma parábola em torno de seu eixo focal, a superfície gerada é chamada de *Paraboloide de revolução.* A propriedade refletora se conserva ao longo de toda a superfície desse sólido, ou seja, todo raio de luz paralelo ao eixo focal reflete na superfície na direção do foco.

Figura 17 – Propriedade Refletora no Paraboloide de Revolução



Fonte: pir2.forumeiros.com

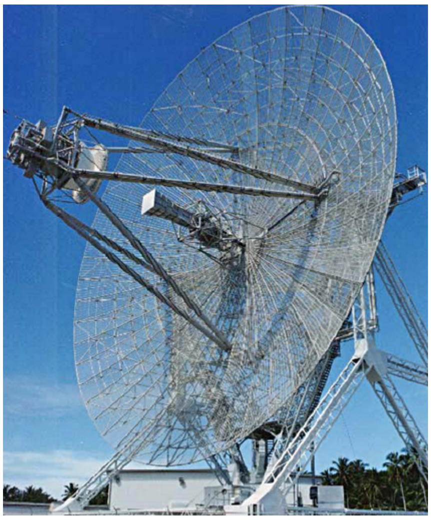
Existem muitas aplicações oriundas desse fato:

- Antenas Parabólicas: Seu eixo focal é apontado para a fonte do sinal (geralmente um satélite). Os sinais recebidos são refletidos na superfície convergindo no foco onde fica o receptor que converte as ondas em um sinal que as televisões transformam em imagens de qualidade.
- Radar: Está em constante rotação, portanto a posição do eixo varia, estando quase sempre aproximadamente na horizontal. As ondas eletromagnéticas saem do radar na direção do eixo e quando encontram um objeto, são refletidas de volta ao transmissor que fica no foco.

Figura 18 – Antena Parabólica

Fonte: cronoshare.com.br

Figura 19 – Radar



Fonte: https: www.gralon.net

- Telescópios: Nesse caso, o eixo é apontado para a porção do céu a ser observada. A luz que alcança o receptor é refletida para o foco, onde a imagem é criada. Dependendo do tipo de telescópio, são necessários espelhos auxiliares para que o observador possa ver a imagem captada pelo foco.

- Fornalha Solar: Os raios solares são captados na superfície de um grande espelho parabólico, com ajuda de espelhos auxiliares que redirecionam os raios na direção paralela ao eixo focal. Isso garante que todos esses raios sejam refletidos para o foco onde a energia solar é coletada e convertida em eletricidade.

  De acordo com (CANELLA, 2016, p 107), as usinas solares térmicas funcionam de forma semelhante. Elas redirecionam os raios solares para o foco onde a energia solar é convertida em eletricidade.

Figura 20 – Telescópio

Fonte: 123rf.com

Figura 21 – Fornalha de Odeillo, França com área de 1830 m² e foco situado a 18 m do espelho. Em primeiro plano é possível visualizar os espelhos auxiliares.

Fonte: Matemática e Atualidade - volume 2 (2015)

Figura 22 – Usina térmica Gemasolar, Espanha.

Fonte: (CANELLA, 2016)

- Faróis de Carros: Neste caso, a luz é emitida do foco e reflete na superfície parabólica emitindo raios paralelos ao eixo focal para iluminar com mais eficiência. O mesmo princípio se aplica aos holofotes e lanternas de mão.

3.3 Contexto Histórico das Parábolas

Faremos um breve relato sobre o desenvolvimento histórico do estudo das parábolas.

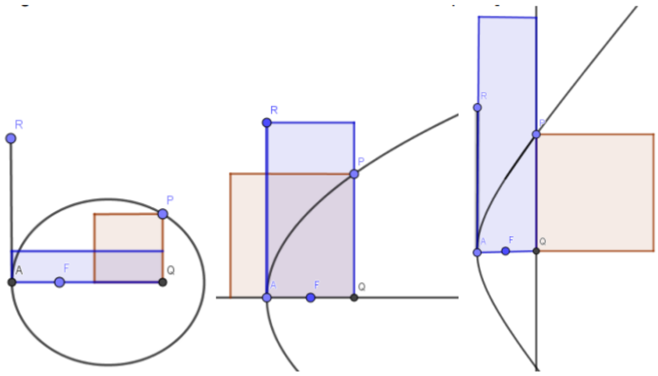
O estudo da parábola tem muito em comum com o estudo de outras cônicas. Essas curvas receberam esse nome porque podem ser obtidas mediante a interseção de uma plano com um cone.

Na gramática, uma parábola é uma narrativa que utiliza comparações simbólicas para transmitir uma mensagem proverbial. A origem etimológica vem do grego "parabole", que significa comparação. Outras duas cônicas, a elipse e a hipérbole, tem significados gramaticais que remontam a ideia de falta e excesso, respectivamente.

Na matemática, esses termos foram usados pelos pitagóricos, uma escola e uma irmandade liderada por Pitágoras de Samos, cerca de 540 a.C. A terminologia pitagórica consistia no uso de áreas para caracterizar as três curvas. A construção geométrica tinha predeterminado o eixo focal e um ponto genérico P da cônica (Figura 23). A partir disso era estabelecido um parâmetro e feita a comparação desse parâmetro com um segmento feito a partir de uma comparação de áreas entre retângulos e quadrados, como foi explicitado em (KOSLOSKI, 2018, p 17).

Se o segmento era menor que esse parâmetro, a curva resultante era uma elipse. Se o segmento fosse maior, a curva era uma hipérbole. Se fosse igual seria uma parábola.

Figura 23 – Caracterização das três curvas segundo os Pitagóricos



Fonte: (KOSLOSKI, 2018)

Os estudos dessas curvas como cônicas foi impulsionado por três problemas da Geometria Grega:

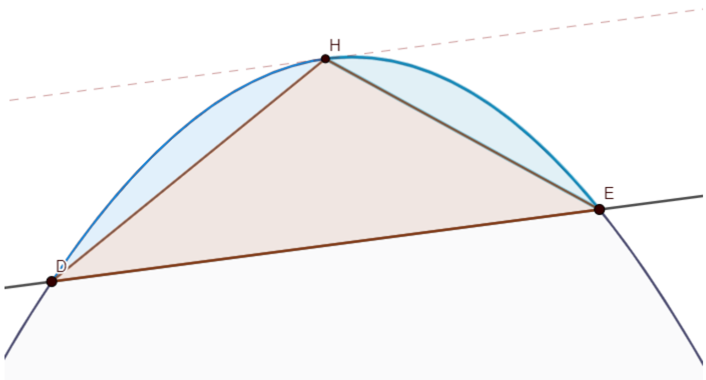
- Quadratura do círculo: cujo objetivo era construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado.
- Duplicação do cubo: cujo objetivo era construir uma cubo com o dobro do volume de um cubo dado.

- Trissecção de um ângulo: cujo o objetivo era obter um ângulo cuja medida era a terça parte de um ângulo dado.

Euclides de Alexandria (cerca de 300 a.C.), autor de *"Os Elementos"*, primava pela resolução através de construções geométricas. Porém, Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) era adepto de métodos mecânicos de construção, inspirado em parte na investigação de procedimentos de Eudoxo. Tais métodos mecânicos deveriam posteriormente ser demonstrados geometricamente.

Um dos problemas que Arquimedes resolveu foi o da *Quadratura da Parábola*, que compara a área delimitada por uma parábola e um segmento de reta com a área de um triângulo, cuja base é o segmento e altura igual à medida do segmento parabólico na razão de 4 para 3. No entanto, foi Menaecmus (380-320 a.C.), discípulo de Eudoxo, que descobriu as seções cônicas quando tentava resolver o problema da duplicação do cubo. Ele estabeleceu que uma parábola poderia ser pensada como a interseção de um plano perpendicular à geratriz de um cone reto quando o ângulo gerador desse cone era reto.

Figura 24 – Quadratura da Parábola



Autoria própria(2023).

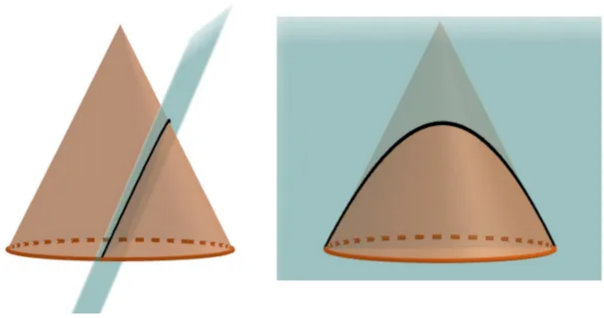
Apolônio (262-190 a.C.) nasceu em Perga, mas estudou em Alexandria usando os métodos de Euclides. Através de sua maior obra, *As Cônicas*, conseguiu uma definição das cônicas que era mais abrangente que a de Menaecmus: Essas curvas poderiam ser obtidas pela interseção de um plano com *qualquer* cone e a cônica gerada depende apenas da inclinação desse plano. A parábola, por exemplo, seria obtida pela interseção de um cone com um plano que fosse paralelo à sua geratriz.

Apolônio também passou a usar cones duplos em algumas dessas definições. Junto com os Elementos de Euclides, as Cônicas representa o apogeu da matemática grega.

Papus de Alexandria classificou os problemas geométricos em:

- Problemas Planos: Podem ser resolvidos com retas e circunferências (régua e compasso).

Figura 25 – Parábola de acordo com Apolônio



Fonte: site Brasil Escola

- Problemas Sólidos: Podem ser resolvidos por uma ou mais cônicas.
- Problemas Lineares: Suas soluções requerem outros elementos além dos citados no dois primeiros itens.

A solução da duplicação do cubo pela metodologia Euclidiana foi feita por Apolônio nas Cônicas. Hoje sabemos que os três problemas clássicos não podem ser resolvidos com régua e compasso, não sendo, pela classificação acima, problemas planos.

Pierre de Fermat, já no século XVII, queria expressar os problemas tratados por Apolônio na linguagem algébrica introduzida anteriormente por Francois Viéte. René Descartes (1596-1650), um dos pioneiros da Geometria Analítica, ansiava encontrar uma equação que satisfaz um lugar geométrico conhecido. Fermat queria fazer o caminho inverso, conseguindo mostrar que o lugar geométrico dos pontos que satisfazem uma equação do 2º grau é uma cônica através de técnicas algébricas que definiam essas curvas.

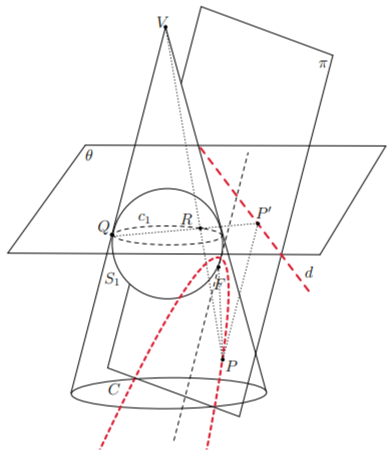
Fermat também apresentou uma maneira de encontrar tangentes a uma curva com um método que precede o cálculo infinitesimal de Leibniz e Newton. (ROQUE, 2019, p 268) descreve o método usado para achar a tangente a uma parábola.

Segundo (KOSLOSKI, 2018, p 19), Johanes Kepler foi o primeiro matemático a utilizar a nomenclatura de foco de uma cônica. O matemático alemão, nascido em 1571, também definiu a parábola como tendo um foco no infinito e usou a equidistância do foco e da diretriz para definir o lugar geométrico dessa curva.

Germinal Pierre Dandelin, belga nascido em 1794, argumentou que se um plano secciona um cone, existem uma ou duas esferas tangentes simultaneamente ao plano e ao cone: As esferas de Dandelin.

No caso da parábola, a esfera de Dandelin tangencia um plano paralelo a geratriz do cone no ponto que é o foco da parábola gerada pela interseção.

Figura 26 – Esfera de Dandelin: Parábola



Fonte: (MONTEIRO, 2014, p 14)

3.4 Ensino de Gráficos de Funções Quadráticas no Espírito Santo

Atualmente, a maioria dos estudantes que já tiveram contato com funções quadráticas tem a impressão errônea de que a parábola é meramente uma representação gráfica desse tipo de função. Uma parábola é uma cônica e também o lugar geométrico de todos os pontos do plano equidistantes de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz) pré-determinados, que coincide com o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ com $c \neq 0$ se a diretriz em questão é paralela ao eixo das abscissas. Uma boa parte desses estudantes também não está ciente das aplicações práticas que envolvem a parábola em si, pois os livros didáticos e outros materiais de apoio tendem a priorizar em suas descrições as aplicações que são modeladas por uma função do 2º grau.

Isso não é necessariamente uma surpresa, já que a Base Nacional Comum Curricular de 2018 não explicita nenhuma habilidade que aborda diretamente o estudo de cônicas e tão pouco está previsto o ensino-aprendizagem dessas curvas nas Orientações Curriculares de 2023 da Secretaria Estadual de Educação do Espírito Santo. Já o estudo de funções quadráticas está previsto no documento orientador estadual tanto na 1ª série, quanto na 3ª série do Ensino Médio. Na (BNCC, 2018, p 543) estão as seguintes habilidades:

> (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mınimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfıcies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Habilidades estas que aparecem tanto no currículo estadual (Orientações Curriculares SEDU, 2023) da 1ª série (2º trimestre), quanto no da 3ª série (2º trimestre), além de várias outras habilidades da BNCC relacionadas ao estudo de função quadrática que aparecem apenas na 1ª série. Isso pode ser devido ao fato do conteúdo referido estar presente constantemente nas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), como analisou (JUNIOR, 2021, p 41).

Outro motivo pode ser o fato de estar presente em todas as avaliações externas. Entre elas destacamos:

- O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB): que teve início em 1990 e atualmente acontece a cada dois anos no Brasil nos anos finais de cada modalidade (Ensino Fundamental – Anos Iniciais, Ensino Fundamental – Anos Finais e Ensino Médio) (RABELO, 2013). Alguns dos objetivos dessa avaliação são:
  - Oferecer subsídios para formulação, reformulação e monitoramento de políticas públicas de acordo com as demandas diagnosticadas.
  - Identificar problemas regionais na educação básica.
  - Analisar fatores socioeconômicos, culturais e escolares relevantes para o sucesso ou fracasso escolar.
  - Fornecer dados para o cálculo do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB).
  - Avaliar a qualidade e equidade e eficiência das Redes de Ensino do Brasil.
  - Municiar os agentes educacionais com informações sobre os resultados obtidos.
- Programa de Avaliação da Educação Básica no Espírito Santo (PAEBES): Avalia a qualidade da educação estadual no Espírito Santo e, por adesão, a educação municipal e privada.

Com relação ao SAEB, (RABELO, 2013) destaca que :

> As matrizes de referência contemplam as habilidades consideradas essenciais em cada etapa do ensino básico avaliada. Elas são compostas por um conjunto de descritores que incorporam o objeto de conhecimento e a operação mental necessária para a habilidade avaliada. Tais descritores expressam os saberes significativo no processo de ensino-aprendizagem e adquiridos pelos alunos, traduzindo-se em ações e operações mentais realizadas por eles.

Esses descritores possuem um ou mais habilidades da BNCC que correspondem a eles e vice versa. Porém, cada descritor da matriz de referência Saeb possui numeração própria. Alguns Descritores do Saeb do ensino médio que podem ser trabalhados (ou devem ser revisitados para o sucesso na aprendizagem) nas funções quadráticas são:

- D6-Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
- D17-Resolver problema que envolva equação do 2º grau.

- D18-Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
- D20-Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
- D25-Resolver problemas que envolvam os pontos máximos ou de mínimos no gráfico de uma função polinomial do segundo grau.
- D26-Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do primeiro grau.

Os descritores acima estão presentes na matriz de referência do PAEBES, mas com numeração diferente. O descritor D20, por exemplo aparece na matriz estadual com a numeração D071_M. O descritor D25 da lista nacional aparece na matriz estadual com a numeração D133_M.

Existem outros descritores que podem ser abordados no estudo de funções quadráticas, como os que envolvem cálculo de área. Há também os descritores da matriz de referência do Ensino Fundamental – Anos Finais (cuja numeração independe dos descritores da matriz do ensino médio) que são frequentemente abordados no ensino de funções quadráticas, já que o conteúdo já é estudado no 9º ano:

- D9-Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas.
- D30-Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.
- D31-Resolver problema que envolva equação de 2º grau.

Entretanto, existem outras demandas que devem ser observadas na mediação de aprendizagem de funções quadráticas além daquelas direcionadas às avaliações externas. Para que haja sucesso no processo didático, a aprendizagem precisa ter significado ao aluno. Nesse sentido, não é uma opção deixar de tratar das aplicações da parábola que têm maior relevância social.

Sendo a parábola um modelo para uma aplicação prática, os elementos utilizados nesse modelo podem e devem ser abordados. Boa parte das aplicações da parábola no cotidiano utilizam a propriedade refletora. Nessa propriedade, o foco da parábola é um ponto de convergência dos raios de luz refletidos na mesma, sendo um elemento protagonista nos modelos matemáticos pertinentes. Visto que não existe uma orientação para tratativa de cônicas no Ensino Médio na Rede Estadual do Espírito Santo, uma opção viável seria integrar elementos como o foco e a diretriz da parábola no ensino aprendizagem de funções quadráticas.

Um dos empecilhos apontados por alguns docentes seria a falta de conhecimentos prévios dos estudantes do Ensino Médio para a inserção desses elementos. Este é um argumento improcedente atualmente, já que o foco pode ser identificado como um ponto no plano cartesiano e a diretriz do gráfico de uma função quadrática é uma reta cuja equação é uma função constante. Ambos os elementos podem, inclusive, ser obtidos em função dos coeficientes de uma função quadrática conhecida como ficou demonstrado no Arcabouço Teórico de parábolas desta dissertação.

Existe também a preocupação com a abordagem da equidistância, que exige noções de geometria analítica como o cálculo da distância entre 2 pontos. No entanto, essa habilidade está prevista tanto na BNCC quanto nas orientações curriculares estaduais:

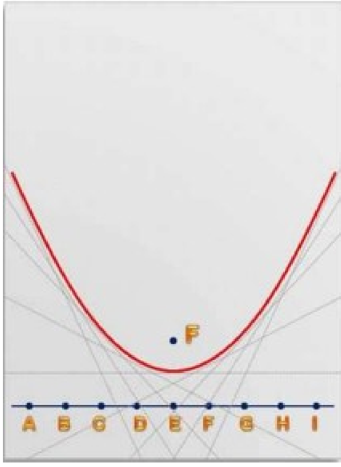
> (EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de formulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros construídas no plano. (BNCC, 2018, p 543)

O número entre parênteses na descrição da habilidade é um código alfanumérico. De acordo com esse código, essa habilidade está prevista para ser adquirida no 9º ano do Ensino Fundamental na disciplina de matemática. O número 16 se refere à ordem em que a habilidade aparece na listagem da Base Curricular Nacional. Portanto, o cálculo da distância entre 2 pontos já é uma habilidade pré-existente no momento que o tópico da equidistância da parábola for abordado. A distância entre um ponto e a diretriz pode ser calculada sem problemas, pois como já foi observado, a diretriz do gráfico de uma função quadrática é uma reta paralela ao eixo horizontal.

O conceito de concavidade de uma curva pode gerar dificuldades. Por exemplo, definir e determinar a concavidade do gráfico de uma função utilizando instrumentos puramente algébricos requer um nível de abstração que provavelmente não é acessível a uma boa parte dos alunos. Na função quadrática esse conceito pode ser trabalhado usando o seu gráfico como referencial. Uma boa estratégia seria uma atividade de construção de uma parábola usando dobradura tendo uma reta, que será a diretriz da parábola e um ponto fora dessa reta, que seria o foco. Tal atividade é abordada por (CANELLA, 2016, p.102) e ao final da mesma, o conceito de reta tangente a uma parábola poderia ser absorvido de forma quase intuitiva. É interessante observar que a parábola vai sendo definida a partir de várias retas tangentes e que cada uma delas é a mediatriz do foco F e um ponto da diretriz, como observado na Figura 27

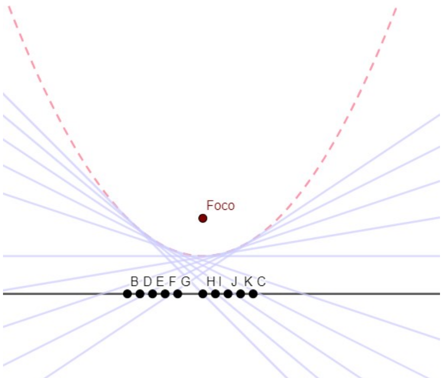
Em adição a isso, é possível ao discente perceber nessa mesma atividade com dobradura que a concavidade de uma parábola pode ser condicionada à posição relativa de seu foco e de sua diretriz e também pela posição das retas tangentes em relação à parábola.

Figura 27 – Construção de Parábola com dobradura



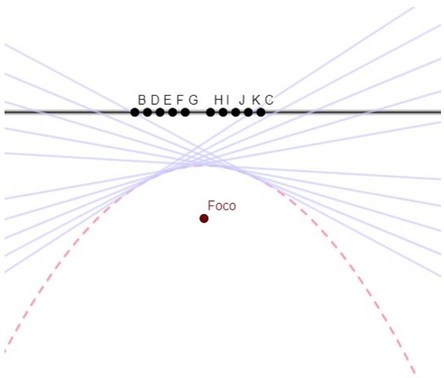
Fonte: (CANELLA, 2016, p 104)

Figura 28 – Concavidade voltada para cima



Autoria própria(2023).

Figura 29 – Concavidade voltada para baixo



Autoria própria(2023).

Apesar de haver outras formas de perceber, geralmente, é através das representações gráficas que se verifica com mais facilidade se uma relação é uma função ou não. As relações cujo gráfico é uma parábola não são uma exceção a essa regra, como podemos verificar na Figura 2.

A respeito da propriedade refletora da parábola, além de elevar muito o potencial significativo das funções quadráticas, sua demonstração geométrica envolve conceitos que são acessíveis aos alunos da 1ª série do Ensino Médio. Com efeito, aqui estão exemplos de algumas habilidades da BNCC trabalhadas no ensino fundamental relacionadas às propriedades de triângulos, congruência de triângulos e ângulos opostos pelos vértice, que estão presentes na demonstração referida.

- (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
- (EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação

da congruência de triângulos.

- (EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
- (EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.

Essa demonstração é uma boa oportunidade para realizar um nivelamento dos estudantes revisitando os conceitos geométricos referentes a essas habilidades, se necessário. A recíproca da propriedade refletora garante que a parábola é a única curva em que um feixe de ondas paralelas reflete em sua superfície e converge em um ponto. Entender esse fato pode ser tão importante quanto entender sua demonstração (ou mais).

Para esse fim, (BARBOSA, 2018, p 11) observa que o uso de recursos concretos e manipuláveis são boa opção que facilita a percepção da solução de um problema. A ferramenta na Figura 30 é um *"Golf Matemático"* idealizado pelos professores Etereldes Gonçalves Júnior, Fábio Correa Castro e Fábio Júlio Valentim e construído no Laboratório de Ensino e Aprendizagem Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo (LEAMA-UFES). O objetivo do jogo é lançar a bola a partir da borda retilínea até atingir a borda oposta, que tem formato parabólico da forma que a bola caia no buraco. É possível perceber a impossibilidade de isso acontecer se a trajetória da bola a partir da borda parabólica for em linha reta e perpendicular a essa borda retilínea (que é paralela à diretriz), já que de acordo com a propriedade refletora, tal trajetória deve ser na direção do foco. Na Figura 31 é perceptível que isso não acontece.

Figura 30 – GOLF Parabólico produzido no LEAMA-UFES

Fonte: LEAMA-UFES (2023)

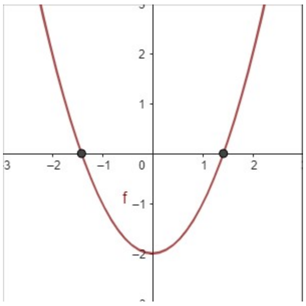
Figura 31 – GOLF Parabólico produzido no LEAMA-UFES

Fonte: LEAMA-UFES (2023)

É senso comum que o método resolutivo de Bháskara para resolução de equações quadráticas é trabalhado de forma mecanizada na maioria das vezes. A despeito disso, a discriminante Δ é um instrumento que não deve ser desprezado. De acordo com (BARBOSA, 2018, p 20), o matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897) foi o primeiro a introduzir a noção de discriminante de uma equação quadrática. Na equação geral do 2º grau $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, o valor da discriminante $B^2 - 4AC$

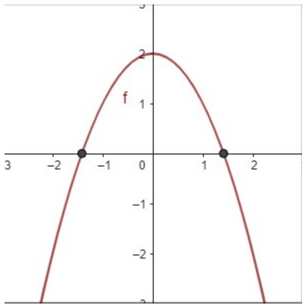
serve para identificar quase que imediatamente qual tipo de cônica ela representa. Na função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ é possível ter uma ideia de como será a parábola que a representa pelos valores do coeficiente a e da discriminante Δ:

Figura 32 – $a > 0$ e $\Delta > 0$



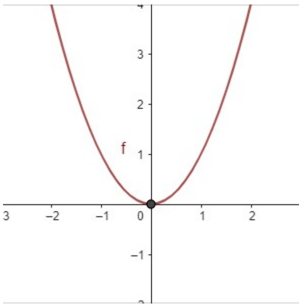
Autoria própria(2023).

Figura 33 – $a < 0$ e $\Delta > 0$



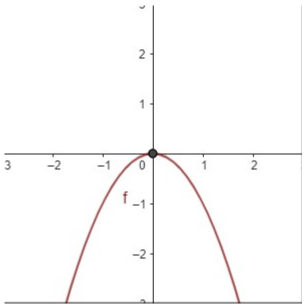
Autoria própria(2023).

Figura 34 – $a > 0$ e $\Delta = 0$



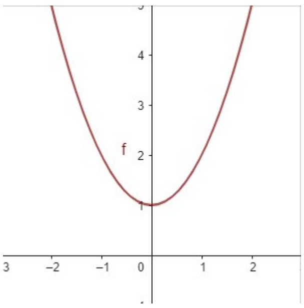
Autoria própria(2023).

Figura 35 – $a < 0$ e $\Delta = 0$



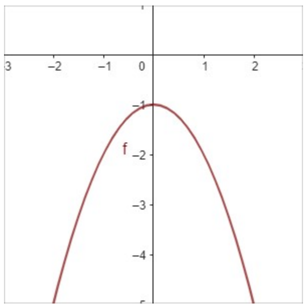
Autoria própria(2023).

Figura 36 – $a > 0$ e $\Delta < 0$



Autoria própria(2023).

Figura 37 – $a < 0$ e $\Delta < 0$



Autoria própria(2023).

Além disso, os valores das coordenadas do foco e do vértice e a equação da reta diretriz da parábola podem ser obtidos e até memorizados mais facilmente usando o valor da discriminante, conforme vimos no Teorema 3.2.6.

Como observado nas Figuras 36 e 37, o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ não intercepta o eixo das abcissas quando o valor de Δ é negativo. Para esboçar esse tipo de gráfico, é desejável que hajam pelo menos três pontos e nessa situação teríamos o vértice e o ponto $(0, c)$ da função, que são distintos desde que $b \neq 0$. Nessa situação, torna-se explícita a importância do ponto simétrico do ponto $(0, c)$ em relação ao eixo focal, que conforme consta em (ALMEIDA, 2020, p 45), tem como coordenadas $(-\frac{b}{a}, c)$. Interessante salientar que ainda $-\frac{b}{a}$ é a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, caso existam, sendo essa uma das conhecidas *Fórmulas de Viéte* (ALMEIDA, 2020, p 26).

A *Forma Canônica* é um poderoso instrumento no trato de gráfico de funções quadráticas. Através dela, é possível tornar evidente aos discentes que as parábolas representadas por 2 funções com mesmo módulo do coeficiente do termo x^2 são congruentes, sendo uma translação e/ou reflexão da outra.

Outras transformações geométricas também podem ser trabalhadas, como compressão ou dilatação de gráficos de função quadrática através da mudança do coeficiente do termo x^2. Com o uso de ambientes de geometria dinâmica como o Geogebra, é possível até que o aluno adquira noção intuitiva de que a reta é uma parábola degenerada em que o foco é um ponto que pertence à diretriz. É possível também (e recomendável) realizar um nivelamento das habilidades listadas abaixo, concomitantemente com o ensino de gráfico de funções quadráticas:

- (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com uso de instrumentos de desenho ou de sotfwares de geometria dinâmica.
- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação) e composições destas e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

Com a Pandemia de Coronavírus em 2020, houve a necessidade de abrir mão das aulas presenciais para proteger a saúde da comunidade escolar em geral. Em consonância com (BARBOSA ANA BEATRIZ LEITE DOS ANJOS, 2020, p 5), o prejuízo na aprendizagem foi inevitável, embora de forma bastante distinta para alunos de diferentes classes sociais. Alguns fatores determinantes nessa distorção foram a disponibilidade de recursos digitais, ambiente adequado para assistir aulas online e realizar atividades acadêmicas, a dependência de frequentar a escola para ter acesso a alimentação saudável e a vulnerabilidade ocasionada por questões de gênero.

Devido a essas desigualdades, a Secretaria de Educação do Espírito Santo elaborou um conjunto de ações que visam minimizar as desigualdades no ensino-aprendizagem que se intensificaram nesse período, dentre as quais se destacam:

- O Plano de nivelamento: Consiste na realização de uma Avaliação Diagnóstica para analisar os descritores em que os alunos apresentam maior fragilidade, seguido da definição de estratégias e recursos que serão utilizados para atacar tais fragilidades. Até o ano de 2023 foram feitas duas Avaliações Diagnósticas em cada ano letivo. Finalmente, é feita uma avaliação cumulativa que indica se as estratégias foram efetivas, servindo como uma devolutiva para a equipe escolar e discentes.

  O Plano de nivelamento é elaborado conjuntamente pela equipe pedagógica e leva em consideração os descritores em que cada turma apresenta menor aproveitamento nas avaliações diagnósticas e em avaliações externas, entre outros indicadores internos e externos no intuito de definir metas para o nível de aprendizagem das turmas seja mais homogêneo.

- Programa de Fortalecimento de Aprendizagem: Consiste em uma ação para mitigar desigualdades na aprendizagem de Português e Matemática mediante a contratação de um profissional para aulas de reforço e recuperação de aprendizagem de forma a atender às variadas necessidades didáticas de forma mais individualizada no contra-turno ou concomitantemente às aulas do respectivo componente curricular.

- A Rotina Pedagógica Escolar (RPE), uma iniciativa que consiste em um currículo estruturado semanalmente para uniformizar os conteúdos trabalhados no Ensino Médio das unidades da rede estadual de ensino. Instituída em 2024, ela prioriza tópicos que levam em consideração os descritores com menor assertividade no Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES) 2023, os descritores em queda de aproveitamento nos PAEBES nos 3 anos anteriores a 2024, os descritores trabalhados em cada série e os descritores que se referem à habilidades pré-requisitadas para os conteúdos da série em questão. Descritores relacionados à função quadrática estão presentes na RPE em todas as séries do Ensino Médio. Os descritores envolvidos no estudo de funções quadráticas no Ensino Médio são estão listados abaixo com a numeração da matriz de referência do PAEBES:

  - D43_M-Identificar a localizacão de pontos no plano cartesiano.
  - D87_M-Resolver problema que envolva equação do 2º grau.
  - D133_M-Resolver problemas que envolvam os pontos máximos ou de mínimos no gráfico de uma função polinomail do 2º grau.
  - D)71_M-Analisar crescimento e decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos

4 Propostas de Sequência Didática

De acordo com (OLANDA, 2023, p 20), as Sequências Didáticas foram introduzidas como documentos oficiais na educação nos anos 80 para estruturar atividades onde os discentes consolidam competências desenvolvidas parcialmente, além de desenvolver outras novas.

1. **Jogo dos três Pontos**

   Quantidade de aulas estimadas: 3 horas/aula (duas para montagem dos tabuleiros e outra para o jogo).

   Objetivos:

   - Compreender o comportamento dos elementos notáveis de um gráfico de uma função quadrática através da mudança de seus coeficientes, assim como algumas transformações geométricas sofridas pela parábola.
   - Compreender que dados 3 pontos não colineares no plano, existe um e apenas um gráfico de função quadrática que passa por esses 3 pontos.

   Essa é uma proposta da aplicação e fixação do Teorema 3.1.10. Para realizar essa atividade, o professor deve ter conhecimento básico de como funcionam alguns instrumentos do Geogebra. Alguns trabalhos do Capítulo 2 contém tutoriais interessantes direcionados ao ensino de Funções Quadráticas. Entre os quais destacamos:

   - O trabalho (SILVA, 2019, p 46) e na página 12 deste mesmo trabalho existe a nomenclatura das entradas do ambiente de geometria dinâmica mais comumente usada e que serão utilizadas na descrição da atividade.
   - O trabalho (BARBOSA, 2018, p 21).
   - O trabalho (ALQUIMIM, 2016, p 18).

   O ideal é que a atividade seja feita em um laboratório de informática com 2 alunos por computador, no máximo. Os computadores devem ter acesso a internet ou já ter o Geogebra instalado. É interessante que as construções sejam feitas de forma simultânea com o professor demonstrando os passos em um projetor e os alunos refazendo nos computadores.

   Atividade:

   A primeira parte da atividade é a construção do "tabuleiro" do jogo através do seguinte procedimento:

a) Na barra de ferramentas, acesse o controle deslizante e crie três controles deslizantes a, b e c variando entre -10 e 10 com incremento de $0,1$.

b) Digite no Campo de Entrada a função $y = ax^2 + bx + c$ e surgirá na Janela de Álgebra a função e seu gráfico na Janela de Visualização Gráfica.

c) Digite no Campo de Entrada a reta $x = \frac{-b}{2a}$. Com isso teremos uma reta na Janela de Visualização Gráfica. Em configurações, mude a cor da reta e mude a Legenda para *"Eixo Focal"*.

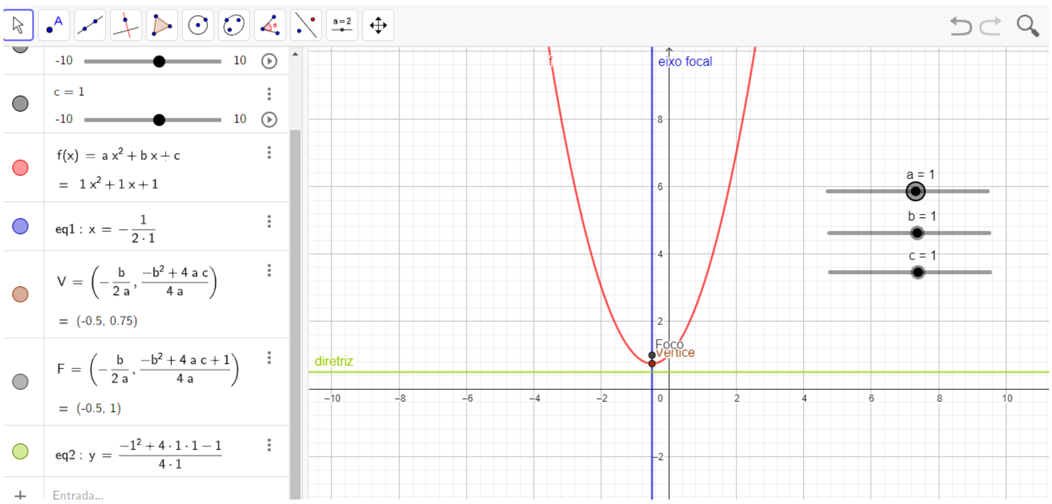
d) Digite no campo de Entrada o ponto $F = (\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac+1}{4a})$. Aparecerá um ponto na janela de visualização gráfica. Vá em configurações e mude a cor desse ponto e a legenda para *Foco*.

e) Digite no campo de entrada o ponto $V = (\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a})$. Proceda como no item anterior mudando a legenda do ponto para *Vértice*.

f) Digite no campo de entrada a reta $y = \frac{-b^2+4ac-1}{4a}$. Vai surgir uma reta paralela ao eixo x, que em configurações terá seu nome mudado para *Diretriz*.

Ao final o tabuleiro deverá estar como na Figura 38.

Figura 38 – Tabuleiro do Jogo dos três pontos



Autoria própria(2023).

É importante que cada fórmula utilizada já seja conhecida ou explicada para os alunos. Ao final da montagem do tabuleiro, alguns questionamentos podem ser feitos. O que acontece com o gráfico da função quadrática $ax^2 + bx + c$ se:

- Aumentarmos o valor do coeficiente de x^2 partindo de a=1?

  A resposta esperada é que a parábola sofre um processo de extensão (aumenta a sua abertura). Mas as posições de seu vértice e eixo focal não mudam.

- Diminuirmos o valor do coeficiente de x^2 a partir de 1 até próximo de zero?

A resposta esperada é que a parábola sofre um processo de compressão (diminui sua abertura).

- O valor do coeficiente a se torna zero?

  A resposta esperada é que a parábola se degenera em uma reta com o foco se tornando um ponto da diretriz.

- Diminuirmos o valor do coeficiente a a partir de zero?

  A resposta esperada é que a concavidade da parábola vai mudar, assim como a posição relativa entre foco e diretriz. A partir daí a parábola estende sua abertura, sendo possível observar inclusive que parábolas com mesmo módulo são congruentes.

- Alterarmos o valor do coeficiente c?

  A resposta esperada é que todos os elementos da parábola sofrerão uma translação vertical de acordo com o valor de c, mas não existe mudança na abertura da parábola.

- Alterarmos o valor do coeficiente b?

  Uma das várias conclusões a que se pode chegar é que o eixo focal se translada. Em adição a isso, se o coeficiente em questão se anula, o eixo de simetria é o próprio eixo das ordenadas. Como consequência, o ponto $(0, c)$ é o vértice da parábola, não possuindo simétrico em relação ao eixo focal.

Na segunda parte da sequencia didática, o professor vai digitar os pontos $A = (2, 1), B = (3, 2)$ e $C = (-1, 10)$ no *Campo de Entrada*. Esses pontos vão aparecer no gráfico e o professor vai mudando os valores dos coeficientes nos controles deslizantes até que a parábola passe pelos 3 pontos. Se houver alguma dúvida sobre a veracidade da resposta encontrada, basta substituir os valores dos pontos na função.

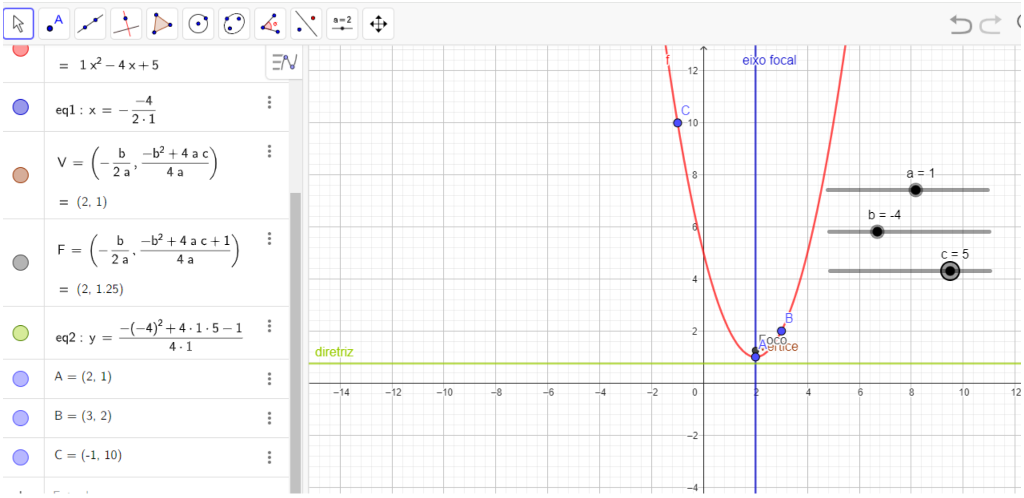
Veremos que, nesse caso, a função encontrada é $y = x^2 - 4x + 5$. Veja a Figura 39.

Posteriormente, o professor vai fornecer 3 pontos a cada rodada e os alunos vão manipular os controles deslizantes em seus computadores até achar a parábola que passe por esses pontos. O primeiro que conseguir ganha 7 pontos na rodada, o segundo aluno que conseguir ganha 5 pontos e o terceiro, 3 pontos. Ganha o jogo quem conseguir mais pontos ao final de todas as rodadas. Se os alunos demorarem muito para achar a parábola, o professor (que já vai conhecer as respostas) pode dar algumas dicas, como dar o valor de um dos coeficientes. É interessante estipular um tempo de 10 minutos, no máximo, para cada rodada e as dicas podem ser dadas a partir de 5 minutos, caso necessárias.

Sugestões de pontos para as rodadas subsequentes:

- Pontos $A = (2, 6), B = (-1, -6)$ e $C = (-2, -6)$.

Figura 39 – Gráfico da função $y = x^2 - 4x + 5$



Autoria própria(2023).

A função procurada nesse caso é $y = x^2 + 3x - 4$. Uma dica que pode ser dada se a turma tiver com dificuldades é que, por terem a mesma ordenada, os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo focal. Portanto é interessante deslizar o valor do coeficiente b de modo que o eixo focal seja mediatriz desses pontos. Depois de fixar o valor de b fica mais simples determinar os outros coeficientes.

- Pontos $A = (1, 5)$, $B = (2, 8)$ e $C = (0, 6)$.

  A função procurada nesse caso é $y = 2x^2 - 3x + 6$. Uma dica que pode ser dada se a turma tiver com dificuldades tem relação com o ponto C, já que esse ponto já nos fornece o valor do coeficiente c e com ele fixado será mais fácil determinar os valores dos outros coeficientes.

- Pontos $A = (1, 4)$, $B = (0, 0)$ e $C = (-1, -8)$.

  A função procurada nesse caso é $y = -2x^2 + 6x$. Aqui vale a mesma dica em relação ao coeficiente c mas agora consideramos o ponto B, fixando o valor do coeficiente supracitado em zero.

- Pontos $A = (0, 3)$, $B = (3, -9)$ e $C = (-2, 1)$.

  A função procurada nesse caso é $y = -x^2 - x + 3$. Aqui, mais uma vez, vale a mesma dica em relação ao coeficiente c mas agora consideramos o ponto A, fixando o valor do coeficiente supracitado em 3.

2. **Determinação de uma Função Quadrática por Equidistância**

   Duração: 2 horas/aula

   Sugestão do período: Fim do 1º trimestre da 1ª serie do EM

   Objetivos:

   - Calcular corretamente a distância entre 2 pontos no plano cartesiano.

- Desenvolver expressões com produtos notáveis.
- Reconhecer coeficientes de uma função quadrática.

Essa atividade tem como meta que o aluno aprenda a determinar uma função quadrática dadas as coordenadas do foco e a equação da diretriz do gráfico que corresponde à mesma. A sugestão é que ela seja aplicada como uma avaliação de saída (avaliação cumulativa) para determinar o quão efetivo foi o plano de nivelamento que avaliaria as habilidades (ou descritores) relativas aos objetivos supracitados.

Exemplo

Determinar a função quadrática que corresponde à parábola com foco $F = (4, 4)$ e diretriz $d : y = -4$.

O ideal é representar o foco e a diretriz graficamente antes de desenvolver os cálculos. Utilizando o conceito de equidistância iremos comparar a distância entre um ponto $P(x, y)$ da parábola até o foco com a distância de P até a diretriz d, que será o módulo da diferença entre a ordenada do ponto e -4. Essa atividade é útil para perceber através de linguagem algébrica que uma reta e um ponto fora dessa reta são elementos suficientes e necessários para determinar uma parábola. Depois de esclarecidos todos esses conceitos, seguem os cálculos:

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} = |y - (-4)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = y^2 + 8y + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16y = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2}{16} - \frac{x^2}{2} + 1$$

Como é possível perceber, os cálculos envolvem cálculo de distância entre 2 pontos e manipulação algébrica envolvendo produtos notáveis. São conteúdos que inevitavelmente terão que ser revisitados no Ensino Médio. A potencialidade didática dessa atividade é cumprir esse anseio ao mesmo tempo em que apresenta o conceito de parábola envolvendo equidistância por uma representação semiótica que não a geométrica.

Posteriormente, aplica-se um exercício avaliativo. As resoluções dos exercícios estão destacadas.

Exercício

Determine a equação quadrática cuja parábola correspondente tem foco F e diretriz d em cada caso.

a) $F = (0, -3)$ e $d : y = 1$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} = |y-1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y = -x^2 - 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{8} - 1$$

b) $F = (0, 0)$ e $d : y = 6$

$$\sqrt{(x)^2 + (y)^2} = |y-6| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = y^2 - 12y + 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12y = x^2 - 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{12} + 3$$

c) $F = (-1, 4)$ e $d : y = 8$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2} = |y-8| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = y^2 - 16y + 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y = -x^2 - 2x + 47 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{47}{8}$$

d) $F = (1, 7)$ e $d : y = -1$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} = |y+1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 14y + 49 = y^2 + 2y + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16y = x^2 - 2x + 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{16} - \frac{1}{8} + \frac{49}{16}$$

5 Conclusão

Considerando a potencialidade didática existente nos trabalhos apresentados no Capítulo 2 , aconselha-se fortemente a apropriação desse material por parte dos docentes para enriquecimento de suas ações de nivelamento de aprendizagem e aprofundamento de habilidades e descritores relacionadas ao ensino-aprendizagem de funções quadráticas.

Faz-se necessária a reflexão sobre a carência de conceituações importantes que permeia o ensino do tema abordado nessa dissertação. Esse é um problema que se intensifica nas relações dessas funções com os seus gráficos, as parábolas, pois a mesma é apresentada comumente de forma desprovida de identidade e características relevantes no cotidiano. Um exemplo dessa carência são elementos como foco e diretriz, que são fundamentais na definição da parábola e protagonistas de propriedades que possuem muitas aplicações, e são tradicionalmente ignorados. Frequentemente as avaliações externas citadas no Capítulo 3 demonstram que os alunos da Rede Estadual de Ensino do Espírito Santo possuem baixa assertividade nos descritores relacionados a esse tópico. Esse problema poderia ser minimizado tornando através de mediações de aprendizagem em ocorre uma integração de tópicos que geralmente são estudados separadamente (cônicas e funções quadráticas), o que aumenta o potencial significativo no estudo de gráficos de funções quadráticas.

Em concordância com (OLANDA, 2023, p.92), no século XXI alguns empecilhos no ensino da matemática foram mitigados através de metodologias e currículos mais significativos, uso de tecnologias, problemas contextualizados e uma tendência à construção do próprio conhecimento do aluno (protagonismo). Acreditamos que as considerações enunciadas nessa dissertação componham instrumentos para a consolidação desses princípios no tocante ao ensino de gráficos de funções quadráticas na rede estadual de ensino do Espírito Santo.

Referências

ALMEIDA, E. A. de. Funções quadráticas: Ensino e aplicações. *Dissertação do Profmat*, 2020. Citado na página 69.

ALQUIMIM, B. C. M. Proposta do ensino de função quadrática utilizando o geogebra. *Dissertação do Profmat*, 2016. Citado na página 71.

BARBOSA, A. B. L. Uma aplicação do geogebra para o ensino de função quadrática. *Dissertação do Profmat*, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 66, 67 e 71.

BARBOSA ANA BEATRIZ LEITE DOS ANJOS, C. A. S. A. Alexandre Lucas de A. Impactos na aprendizagem de estudantes da educação básica durante o isolamento físico social pela pandemia do covid-19. *CODAS (Communication Disorders, Audiology and Swallowing)*, 2020. Citado na página 69.

BNCC. Base nacional comum curricular. *Brasília: MEC*, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 64.

CANELLA, C. M. da S. B. Funções quadráticas e suas aplicações no primeiro ano do ensino médio. *Dissertação do Profmat*, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 56, 57, 64 e 65.

FILIZZOLA, J. d. S. et al. *Uma Abordagem Didática para o Ensino de Máximo Ou Mínimo na Função Quadrática e o uso do Software GeoGebra*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014. Citado na página 43.

JUNIOR, M. G. Tecnologias digitais no ensino de matemática: Uma abordagem do uso do software geogebra para o ensino de função quadrática. *Dissertação do Profmat*, 2021. Citado na página 62.

KOSLOSKI, C. Função quadrática: uma proposta para o ensino médio. *Dissertação do Profmat*, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 60.

LOUZADA, S. Relações entre cônicas e funções no ensino médio. *Dissertação do PROFMAT*, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=368&id2=40882>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 34.

MENEZES, R. C. d. et al. Funções quadráticas, contextualização, análise gráfica e aplicações. Universidade Federal de Goiás, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.

MONTEIRO, R. M. Resgate do teorema de dandelin no estudo de cônicas com o geogebra. *Dissertação do Profmat*, 2014. Citado na página 61.

OLANDA, M. R. S. de. Funções quadráticas: aplicações de situações didáticas em sala de aula e no laboratório de ensino de matemática. *Dissertação do Profmat*, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 78.

Orientações Curriculares SEDU. Orientações curriculares da secretaria de estado da educação do espírito santo. *SEDU*, 2023. Disponível em: <https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/wp-content/uploads/2023/01/MATEMATICA-EM-2023.pdf>. Citado na página 61.

PROFMAT, S. do. Mestrado profissional em matemática em rede nacional. 2024. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/>. Citado na página 13.

RABELO, M. *Avaliação Educacional: Fundamentos, metodologia e aplicações no cotidiano brasileiro- 1ª edição*. [S.l.]: Coleção Profmat-SBM, 2013. Citado na página 62.

ROQUE, J. B. P. d. C. T. Tópicos de história da matemática. *Coleção Profmat*, 2019. Citado na página 60.

SILVA, J. P. N. da. Goegebra: Explorando possibilidades de abordagem interativa. *Dissertação do Profmat*, 2019. Citado na página 71.