Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Alessandra de Assumpção Viegas Machado

Os Desafios de Ensinar Trigonometria no Ensino Médio

Rio de Janeiro

2025

Alessandra de Assumpção Viegas Machado

Os Desafios de Ensinar Trigonometria no Ensino Médio

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof.ª Nasim Karimi

Rio de Janeiro

2025

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

M149 Machado, Alessandra de Assumpção Viegas.
Os desafios de ensinar Trigonometria no Ensino Médio / Alessandra de Assumpção Viegas machado. – 2025.
85 f. : il.

Orientador: Nasim Karimi.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática.

1. Matemática – Estudo e ensino (Ensino médio) - Teses. 2. Trigonometria - Teses. I. Karimi, Nasim. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 51:37

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

_______________________________ _______________________
Assinatura Data

Alessandra de Assumpção Viegas Machado

Os Desafios de Ensinar Trigonometria no Ensino Médio

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

.

Aprovada em 10 de setembro de 2025.

Banca Examinadora

Prof.ª Dra. Nasim Karimi (Orientadora)
Instituto de Matemática - UERJ

Prof. Dr. Mohammad Soufi Neyestani
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Mohammad Fanaee
Universidade Federal Fluminense - UFF

Rio de Janeiro

2025

DEDICATÓRIA

Com todo o meu amor, para as minhas meninas **Larissa, Beatriz e Maria Fernanda**. Que esta obra seja um lembrete de que o aprendizado é uma jornada contínua e transformadora. A educação tem o poder de mudar nossas vidas, a qualquer tempo, e espero que vocês sempre acreditem nisso.

AGRADECIMENTOS

À minha filha, Larissa, por me encorajar a seguir em frente e me dar a confiança que precisei.

Ao meu marido, Marcelo, por ser meu maior apoio.

À minha mãe, Maria das Graças, por se desdobrar para que eu tivesse tempo de me dedicar a este sonho.

À minha orientadora, Nasim Karimi, por toda a dedicação, os ensinamentos e a confiança.

Aos meus familiares, principalmente Tio Paulo e Marilda, por entenderem as proporções deste sonho e sempre me motivarem.

Aos meus colegas da Escola Municipal Bento Ribeiro, principalmente o professor José Roberto, que não me deixou desistir, por sempre acreditarem e me ajudarem a persistir neste sonho.

Aos meus alunos, a jornada de ensino e aprendizagem que percorremos juntos foi muito mais do que apenas aulas de matemática. Vocês me ensinaram que a vida, assim como a matemática, é cheia de problemas que, quando abordados com paciência e perseverança, podem ser resolvidos.

E, acima de tudo, a Deus, por tê-los, por me dar forças e me fazer sentir nos Seus braços durante toda a minha caminhada.

Insanidade é fazer a mesma coisa repetidamente e esperar resultados diferentes

Albert Einstein

RESUMO

MACHADO, Alessandra de Assumpção Viegas. *Os Desafios de ensinar Trigonometria no Ensino Médio.* 2025. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2025.

Este estudo investiga as dificuldades enfrentadas no ensino de trigonometria, motivado pelos resultados insatisfatórios dos alunos em avaliações de matemática e pelos relatos de professores do estado do Rio de Janeiro sobre os obstáculos didáticos. A pesquisa, de natureza qualitativa e quantitativa, utilizou um questionário aplicado a professores de matemática da cidade do Rio de Janeiro para capturar suas percepções e experiências. Complementarmente, foram analisados relatórios de desempenho de uma rede pública de ensino, que evidenciaram a persistente defasagem na aprendizagem de matemática. Além disso, a dissertação discute a literatura acadêmica predominante nas escolas públicas e apresenta estudos de caso de alunos, que ilustram de forma concreta os desafios e as lacunas identificadas. O objetivo final é oferecer uma compreensão aprofundada das causas da baixa performance em trigonometria e fornecer insights para o desenvolvimento de estratégias de ensino mais eficazes.

Palavras-chave: trigonometria; ensino de trigonometria; círculo trigonométrico; desafio do ensino de matemática; ensino médio.

ABSTRACT

MACHADO, Alessandra de Assumpção Viegas. *The Challenges of Teaching Trigonometry in High School.* 2025. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2025.

This study investigates the difficulties faced in teaching trigonometry, motivated by students' unsatisfactory results in mathematics assessments and by reports from teachers in the state of Rio de Janeiro about didactic obstacles. The research, which is both qualitative and quantitative, used a questionnaire administered to mathematics teachers in the city of Rio de Janeiro to capture their perceptions and experiences. In addition, performance reports from a public school system were analyzed, which highlighted a persistent learning gap in mathematics.

Furthermore, this dissertation discusses the predominant academic literature in public schools and presents student case studies that concretely illustrate the identified challenges and gaps. The ultimate goal is to provide a deep understanding of the causes of poor performance in trigonometry and offer insights for developing more effective teaching strategies.

Keywords: trigonometry; teaching Trigonometry; unit circle; challenges in mathematics education; high school.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEFET	Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IFRJ	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SEEDUC	Secretaria de Estado de Educação
SME	Secretaria Municipal de Educação

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Durante uma aula de matemática para professores que almejam o título de Mestres em Matemática, apresentei a ideia para o trabalho de conclusão de curso, iria falar sobre a compreensão dos alunos sobre funções trigonométricas. Depois que apresentei o projeto, o professor perguntou aos meus colegas quais os desafios que cada um encontrava ao ensinar trigonometria, e assim nasceu este trabalho, foi tão rica essa discussão e ficamos tão envolvidos, que resolvi escrever sobre os apontamentos que reunimos. Este trabalho pretende apresentar as dificuldades e desafios que educadores encontram ao ensinar trigonometria para alunos do Ensino Médio da cidade do Rio de Janeiro.

Num artigo para a revista Educação Matemática em revista, os autores Lira, Silva e Neto procuram apresentar as maiores dificuldades matemáticas encontradas pelos alunos nas salas atualmente, neste artigo foram analisados alguns trabalhos publicados a partir de 2019 que apresentavam as dificuldades dos alunos no ensino fundamental. Os autores consideram que:

> "Essas dificuldades de aprendizagem são causadas por diversos fatores, dos quais foram encontrados em destaque as relacionadas à leitura e a interpretação das situações-problema. Sem uma boa leitura, pois, a dificuldade é ampliada, principalmente no que se refere à tradução da linguagem textual, do problema, para a linguagem matemática. Em decorrência disso, observamos também que o desinteresse do aluno e o pouco incentivo dos pais em seus estudos são fatores que não contribuem para melhoria de suas aprendizagens, mesmo em contextos em que há o desejo e o uso de metodologias distintas do que convencionalmente é usado."

A Trigonometria é um ramo da matemática que estuda as relações entre os ângulos e os lados de um triângulo, esse estudo pode ser generalizado também numa circunferência, usando conceitos como seno, cosseno e tangente e é utilizada em várias áreas como navegação, construção civil, astronomia e outras. Este ramo é um dos mais importantes nas graduações de ciências exatas, visto sua presença na Astronomia, Física e Navegação.

No primeiro livro da série A Matemática do Ensino Médio, de Elon Lages Lima. Paulo Cezar, Eduardo Wagner e Morgado, da editora SBM, traz as funções trigonométricas como importante tema tanto pelas suas aplicações como seu papel central no desempenho da Análise Matemática. Essa série de livros vem sendo utilizada na graduação, nos cursos de extensão e formação de professores. Destaca as funções trigonométricas por serem periódicas, oscilatórias ou vibratórias e descreverem fenômenos da natureza como movimento dos planetas, som, circulação de sangue, batimentos cardíacos, etc. Ou seja, fenômenos relevantes para a Ciência e desenvolvimento da humanidade.

Este trabalho relata as aulas de trigonometria para uma turma de segundo ano do ensino médio, de uma escola da rede pública da zona norte da cidade do Rio de Janeiro, com aproximadamente 30 alunos. Relata também acompanhamento escolar de alunas da rede pública da mesma cidade, analisa o olhar de alguns professores que ensinam trigonometria na cidade do Rio de Janeiro e as dificuldades encontradas por alunos e educadores no processo de ensino aprendizagem sobre o tema.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 História da Trigonometria

Fenômenos como a maré, o movimento de um pêndulo, cálculos de distâncias inacessíveis ou de grandes alturas podem ter sido a motivação para o que conhecemos como funções trigonométricas. Aristarco de Samos (310 a.C. - 230 a.C.) foi um astrônomo e matemático que estudou as medidas de distância entre a Terra e o Sol e entre a Terra e a Lua, usando semelhança de triângulos, e em cima desses estudos grandes matemáticos estabeleceram as razões trigonométricas. Tales de Mileto (624 a.C. - 547 a. C.) foi um filósofo, matemático, engenheiro e astrônomo grego que criou um método de comparar sombras e obter medidas de distâncias inacessíveis, conforme Eves, 1995, p.95, esse método e as razões trigonométricas foram utilizados, posteriormente, para determinar as medidas das pirâmides do Egito.

Carl B. Boyer (1976), no seu livro História da Matemática, diz:

> "Assim como na numeração havia competição entre os sistemas de origens grega e indiana, também nos cálculos astronômicos houve a princípio na Arábia dois tipos de trigonometria - a geometria grega das cordas, como é encontrada no Almagesto, e as tabelas hindus de senos, derivadas através dos Sindhind. Aqui também, o conflito terminou com o triunfo do sistema hindu, e quase toda a trigonometria árabe finalmente se baseou na função seno. Na verdade, foi também por meio dos árabes, e não diretamente dos hindus, que essa trigonometria do seno chegou à Europa."

Almagesto é um tratado matemático e astronômico, formado por 13 livros, escrito no século II por Claudio Ptolomeu que versava sobre os movimentos das estrelas e dos planetas, neste encontramos uma tabela de cordas equivalente a tabela de senos e cossenos. "O Almagesto resistiu à ação do tempo e hoje se tem acesso não só as tábuas trigonométricas, como também uma explicação sobre os métodos utilizados em sua construção" (Boyer, C.)

Figura 1: Tabela de cordas extraída do livro Almagesto

11. TABLE OF CHORDS

Arcs	Chords			Sixtieths[1]			
½	0	31	25	0	1	2	50
1	1	2	50	0	1	2	50
1½	1	34	15	0	1	2	50
2	2	5	40	0	1	2	50
2½	2	37	4	0	1	2	48
3	3	8	28	0	1	2	48
3½	3	39	52	0	1	2	48
4	4	11	16	0	1	2	47
4½	4	42	40	0	1	2	47
5	5	14	4	0	1	2	46
5½	5	45	27	0	1	2	45
6	6	16	49	0	1	2	44
6½	6	48	11	0	1	2	43
7	7	19	33	0	1	2	42
7½	7	50	54	0	1	2	41
8	8	22	15	0	1	2	40
8½	8	53	35	0	1	2	39
9	9	24	54	0	1	2	38
9½	9	56	13	0	1	2	37
10	10	27	32	0	1	2	35
10½	10	58	49	0	1	2	33
11	11	30	5	0	1	2	32
11½	12	1	21	0	1	2	30
12	12	32	36	0	1	2	28
12½	13	3	50	0	1	2	27
13	13	35	4	0	1	2	25
13½	14	6	16	0	1	2	23
14	14	37	27	0	1	2	21
14½	15	8	38	0	1	2	19
15	15	39	47	0	1	2	17
15½	16	10	56	0	1	2	15
16	16	42	3	0	1	2	13

Arcs	Chords			Sixtieths			
16½	17	13	9	0	1	2	10
17	17	44	14	0	1	2	7
17½	18	15	17	0	1	2	5
18	18	46	19	0	1	2	2
18½	19	17	21	0	1	2	0
19	19	48	21	0	1	1	57
19½	20	19	19	0	1	1	54
20	20	50	16	0	1	1	51
20½	21	21	11	0	1	1	48
21	21	52	6	0	1	1	45
21½	22	22	58	0	1	1	42
22	22	53	49	0	1	1	39
22½	23	24	39	0	1	1	36
23	23	55	27	0	1	1	33
23½	24	26	13	0	1	1	30
24	24	56	58	0	1	1	26
24½	25	27	41	0	1	1	22
25	25	58	22	0	1	1	19
25½	26	29	1	0	1	1	15
26	26	59	38	0	1	1	11
26½	27	30	14	0	1	1	8
27	28	0	48	0	1	1	4
27½	28	31	20	0	1	1	0
28	29	1	50	0	1	0	56
28½	29	32	18	0	1	0	52
29	30	2	44	0	1	0	48
29½	30	33	8	0	1	0	44
30	31	3	30	0	1	0	40
30½	31	33	50	0	1	0	35
31	32	4	7	0	1	0	31
31½	32	34	22	0	1	0	27
32	33	4	35	0	1	0	22

Fonte: Boyer

Sindhind é uma obra de zij trazida da Índia nos inícios dos anos 770 depois de Cristo para ser traduzido para a corte do califa Al-Mansur em Bagdá. É um texto astronômico com vinte e quatro capítulos que mostram o movimento dos corpos celestes ao longo de muitos anos, e muito mais, e que utiliza a função seno.

No primeiro volume da coleção do professor de matemática, A Matemática do Ensino Médio, os autores dizem que a trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares em redor da Terra.

Em História da Matemática, de Carl B. Boyer é citado que o grego Hipparchus de Rhodes (190 a.C. – 120 a.C.), que publicou a primeira tabela trigonométrica, com os valores das cordas de ângulos de 0º a 180º.

No artigo Tales de Mileto e as origens da trigonometria, de 2019, Marcelo Viana fala do primeiro livro onde aparece o termo trigonometria, publicado em 1595, pelo astrônomo e teólogo alemão Bartholomaeus Pitiscus (1561-1613), ele teria criado este termo.

Na década de 80, os livros didáticos traziam o desenvolvimento do conteúdo de forma algébrica e fria. Nos livros de hoje há toda uma introdução histórica, que aproxima a nossa realidade da trigonometria, buscando envolver e motivar o aluno para sua aprendizagem.

O triângulo retângulo, com suas características e regras, é uma ferramenta poderosa no estudo de astronomia, navegação e construção desde a Antiguidade.

1.2 **Trigonometria na Base Nacional Comum Curricular**

De acordo com a BNCC, Base Nacional Comum Curricular, o estudo da trigonometria atualmente acontece no Ensino Médio, de acordo com as habilidades EM13MAT306 e EM13MAT308 o aluno deve resolver e elaborar problemas em contexto que envolvem fenômenos periódicos e comparar suas representações com as funções de seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem aplicativos digitais, além disso, deve aprender a aplicar as relações métricas, incluindo as leis de seno e cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver problemas que envolvem triângulos, em diferentes contextos.

Mas ainda não é assim que ocorre, o aluno tem o primeiro contato no nono ano do Ensino Fundamental - Anos Finais. Esse contato ocorre com o ensino das relações métricas no triângulo retângulo, especialmente o Teorema de Pitágoras. Daí, é tratado as razões entre os lados dos triângulos retângulos e suas aplicações, a Trigonometria. Depois o aluno é levado a conhecer as relações em um triângulo qualquer, a lei dos senos e lei dos cossenos.

No ensino médio, inicia-se o estudo dos conceitos básicos de trigonometria retomando alguns conceitos de Geometria Plana, como ângulos na circunferência, arcos e unidades de medidas de arcos. Daí é apresentado a ideia de seno, cosseno e tangente de um número real num círculo trigonométrico, destacando-se que para um ponto qualquer pertencente ao círculo trigonométrico, haverá um ângulo correspondente, e um triângulo, cuja a altura estará relacionada ao seno desse ângulo, e a largura da base estará relacionada ao cosseno desse mesmo ângulo. Os livros, em geral, trazem uma boa quantidade de exercícios de fixação, alguns com situações do cotidiano que podem ser representados por funções trigonométricas. Em algumas escolas, consegue-se aprofundar um pouco mais o assunto apresentando as relações e identidades trigonométricas que é importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático do aluno.

A BNCC justifica o estudo da matemática para todos os alunos da Educação Básica devido a sua grande aplicação na sociedade contemporânea e pelo potencial da Matemática na formação de cidadãos críticos. No ensino fundamental a matemática está dividida em cinco campos, chamados unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, Probabilidade e estatística. E apesar de apresentar vários conteúdos que servem como base para a Trigonometria, esta não é tratada neste nível.

No Ensino Médio, que busca uma visão integrada da Matemática aplicada à realidade, a BNCC apresenta cinco competências específicas de Matemática e suas tecnologias:

Figura 2: Competências específicas

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: BNCC

O estudo de trigonometria é mencionado nas habilidades da competência três. A Habilidade EM13MAT306 propõe resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. A habilidade EM13MAT308 propõe aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Contudo, a BNCC não apresenta uma ordem preestabelecida desses conteúdos, inclusive a palavra Trigonometria não aparece em nenhuma das suas 600 páginas. A área de Matemática e suas tecnologias propõe um aprofundamento das aprendizagens, mas com o foco na resolução e elaboração de problemas em diversos contextos para abranger as competências aplicando as aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental.

Se por um lado, a BNCC possibilita várias maneiras de organizar o currículo do Ensino Médio, por outro lado, parece diminuir a importância desses conteúdos na formação do aluno. Cada escola pode se aprofundar ou não nesses objetos de conhecimento, o que não garante a igualdade no ensino prevista em lei.

1.3 **Recursos didáticos**

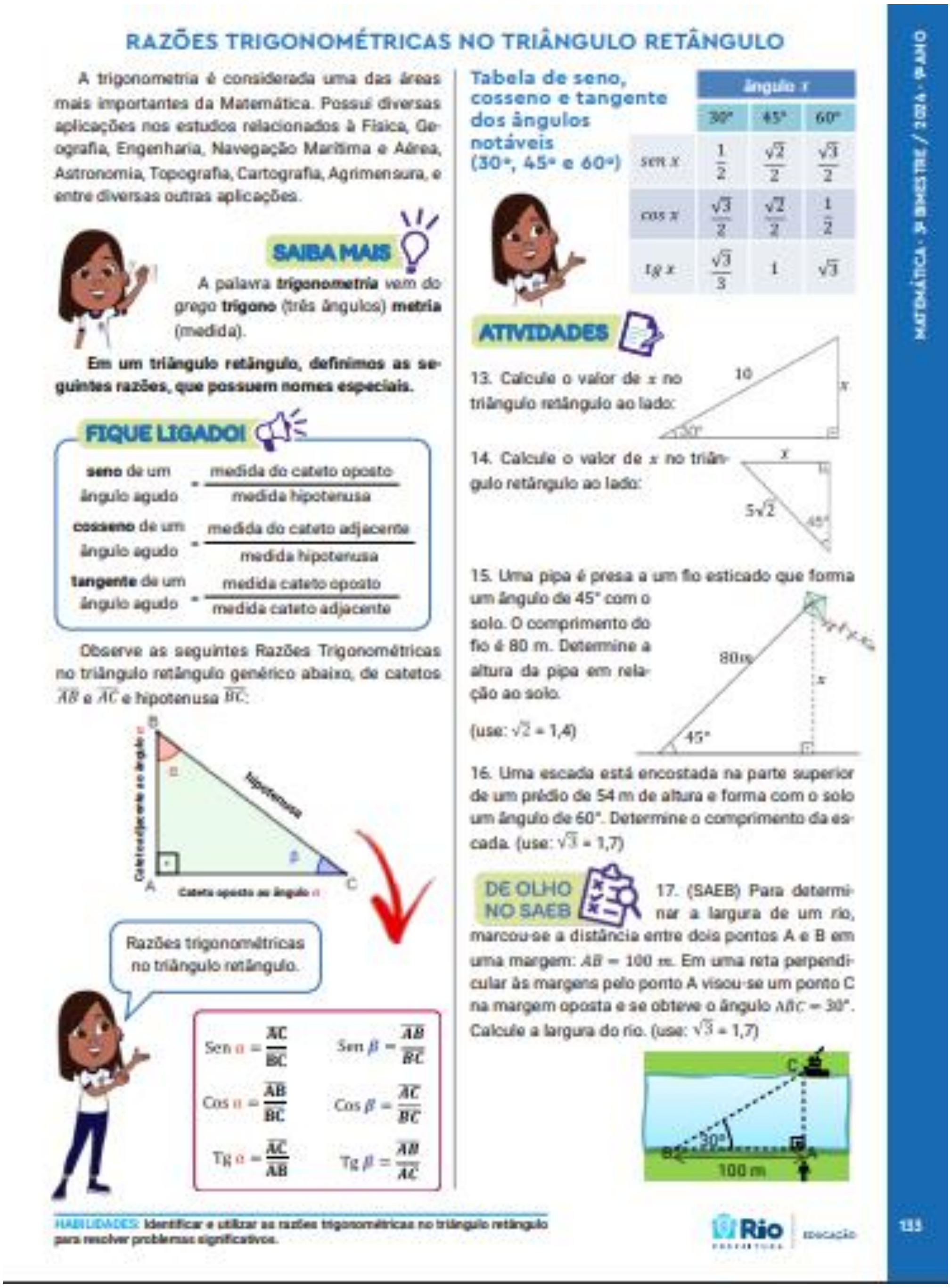
A Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro disponibiliza desde 2020 uma proposta curricular que destaca a contextualização significativa, considerando os conhecimentos prévios dos alunos no processo de aprendizagem dos conteúdos matemáticos. A habilidade de identificar e utilizar as razões trigonométricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos é proposta no nono ano, no semestre final, depois que foram trabalhados os conceitos de relações métricas no triângulo retângulo.

Além disso, o Portal Rioeduca 2025, é uma plataforma digital que centraliza recursos pedagógicos e conteúdo de apoio para a rede municipal de ensino, representa uma evolução significativa na forma como professores, alunos e responsáveis interagem com o processo de aprendizagem. Mais do que um simples repositório de arquivos, o site se propõe a ser uma ferramenta dinâmica e acessível, refletindo a crescente necessidade de adaptação da educação aos desafios do século XXI.

Neste portal, aluno e professor tem acesso ao material completo do qual faz parte a página na figura abaixo, além de outros materiais como recuperação de estudos, banco de itens e videoaulas que disponibiliza um pouco mais desse conteúdo.

Com o intuito de mitigar as lacunas educacionais e uniformizar o ensino na rede pública municipal do Rio de Janeiro, a Secretaria Municipal de Educação disponibiliza o material didático Rioeduca. A Figura 3 ilustra uma das páginas deste material, concebido como um guia essencial, estabelecendo os conteúdos mínimos a serem abordados em toda a rede. No que concerne à Trigonometria, constata-se a alocação de apenas uma página, a qual oferece uma definição concisa e superficial do tema, bem como de suas aplicações. O material apresenta as razões trigonométricas no triângulo retângulo, os ângulos notáveis e um conjunto limitado de exercícios. Diante desta abordagem elementar, depreende-se a necessidade de o docente complementar e aprofundar o conteúdo em suas aulas, enriquecendo a experiência de aprendizagem dos discentes.

Figura 3: Razões trigonométricas



RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

A trigonometria é considerada uma das áreas mais importantes da Matemática. Possui diversas aplicações nos estudos relacionados à Física, Geografia, Engenharia, Navegação Marítima e Aérea, Astronomia, Topografia, Cartografia, Agrimensura, e entre diversas outras aplicações.

SAIBA MAIS

A palavra **trigonometria** vem do grego **trigono** (três ângulos) **metria** (medida).

Em um triângulo retângulo, definimos as seguintes razões, que possuem nomes especiais.

FIQUE LIGADO!

seno de um ângulo agudo = $\frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida hipotenusa}}$

cosseno de um ângulo agudo = $\frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida hipotenusa}}$

tangente de um ângulo agudo = $\frac{\text{medida cateto oposto}}{\text{medida cateto adjacente}}$

Observe as seguintes Razões Trigonométricas no triângulo retângulo genérico abaixo, de catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e hipotenusa $\overline{BC}$:

$\text{Sen}\,\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ $\text{Sen}\,\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

$\text{Cos}\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ $\text{Cos}\,\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

$\text{Tg}\,\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ $\text{Tg}\,\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

Tabela de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis (30°, 45° e 60°)

	ângulo x		
	30°	45°	60°
$sen\ x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\ x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\ x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ATIVIDADES

13. Calcule o valor de x no triângulo retângulo ao lado:

14. Calcule o valor de x no triângulo retângulo ao lado:

15. Uma pipa é presa a um fio esticado que forma um ângulo de 45° com o solo. O comprimento do fio é 80 m. Determine a altura da pipa em relação ao solo.

(use: $\sqrt{2} = 1{,}4$)

16. Uma escada está encostada na parte superior de um prédio de 54 m de altura e forma com o solo um ângulo de 60°. Determine o comprimento da escada. (use: $\sqrt{3} = 1{,}7$)

DE OLHO NO SAEB

17. (SAEB) Para determinar a largura de um rio, marcou-se a distância entre dois pontos A e B em uma margem: $AB = 100\ m$. Em uma reta perpendicular às margens pelo ponto A visou-se um ponto C na margem oposta e se obteve o ângulo $A\hat{B}C = 30°$. Calcule a largura do rio. (use: $\sqrt{3} = 1{,}7$)

HABILIDADES: Identificar e utilizar as razões trigonométricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos.

MATEMÁTICA · 3º BIMESTRE / 2024 · 9º ANO

Rio Prefeitura Educação

133

Fonte: Material Rio Educa 2024.

O Governo do Estado do Rio de Janeiro, visando a organização e o direcionamento do processo de ensino-aprendizagem no Ensino Médio, disponibiliza um documento de orientação de estudos estruturado para cada bimestre. No caderno referente ao quarto bimestre do primeiro ano, a Trigonometria é contemplada de forma sistematizada, conforme ilustrado na Figura 4. Este material serve como um referencial para o trabalho pedagógico, estabelecendo uma base comum para o desenvolvimento das habilidades e competências esperadas nesta etapa de escolarização.

Figura 4: Trigonometria

GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO

Matemática – Orientações de Estudos

SUMÁRIO

Fonte: Orientações de estudo SEEDUC de 2021.

Integrando o apêndice desta pesquisa, o referido documento de orientação de estudos, com versões distintas para alunos e professores (esta última contendo o gabarito), encontra-se acessível no sítio eletrônico da Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro (SEEDUC). A proposta pedagógica delineada para o estudo da Trigonometria no quarto bimestre do primeiro ano do Ensino Médio concentra-se na apresentação do ciclo trigonométrico para as funções seno, cosseno e tangente, na resolução de equações trigonométricas elementares (primeira volta) e na construção dos gráficos dessas funções. Embora represente um direcionamento importante, cumpre ressaltar que estas orientações não esgotam a totalidade do conteúdo programático, complementando-se com sugestões de recursos audiovisuais pertinentes ao tema, ou seja, indica links para vídeos ou softwares sobre Trigonometria.

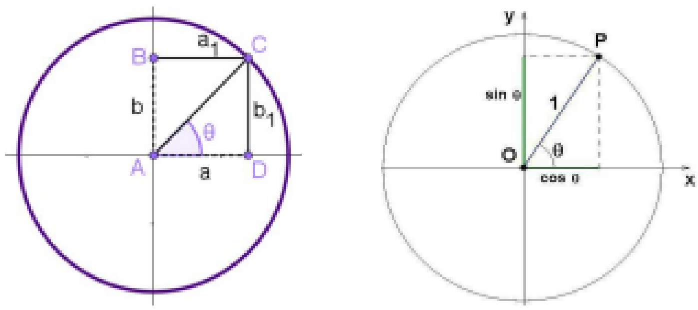
A primeira aula apresenta o ciclo trigonométrico com origem no ponto (0,0) de um plano cartesiano com medida de raio igual a 1 unidade e seus quadrantes. Mostra a simetria no ciclo e ensina como reduzir ao primeiro quadrante. E define seno, cosseno e tangente do ciclo conforme figura abaixo.

Figura 5: Definição de seno e cosseno

1.2- Seno, Cosseno e Tangente no Ciclo Trigonométrico

- Seno e Cosseno

Agora observe que no **círculo trigonométrico,** é possível determinar os valores de **seno** e de **cosseno** de um ângulo θ qualquer. Por isso, é importante construir esse ângulo no círculo trigonométrico, como demonstrado abaixo.



Obs.: Não esqueça que o eixo x (abscissas), representa o cosseno e o eixo y (ordenadas), representa o seno.

Fonte: Orientações de estudo da SEEDUC 2021.

A segunda aula trata de função exponencial e a terceira de construção de gráficos de funções exponenciais. A quarta aula retorna ao assunto, apresentando as equações mais simples de trigonometria com soluções na primeira volta. Na quinta aula, a proposta é ensinar a identificar os gráficos do seno, cosseno e tangente.

E então o material se encerra com sugestão de aplicação de cinco questões de revisão de múltipla escolha. O material é sucinto e sem exercícios que levam o aluno a praticar, faz referência a música como aplicação do conteúdo, relacionando um gráfico da frequência de uma música com o gráfico de uma função trigonométrica, mas não orienta como construir gráficos, e indica a leitura e visita a alguns recursos audiovisuais, como a plataforma Khan Academy.

Um exemplo de livro didático utilizado é o "Contextos e Aplicações", de Luiz Roberto Dante, da Editora Ática, de 2013. Observando o sumário da segunda edição, volume um, podemos observar um aprofundamento no conteúdo. O livro traz semelhanças de triângulo, relações métricas e razões trigonométricas.

Figura 6: Sumário do Livro Contextos e Aplicações de Matemática

UNIDADE 4 Sequências e Trigonometria

CAPÍTULO 7
Sequências

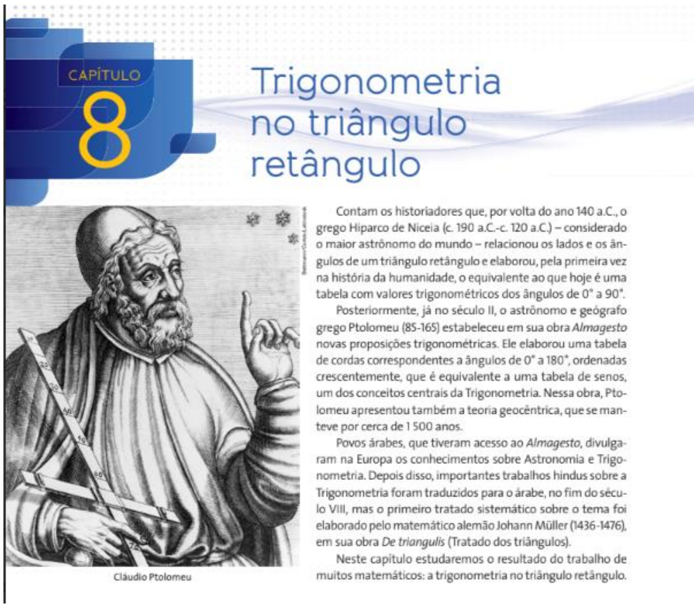
CAPÍTULO 8
Trigonometria no triângulo retângulo

9

Fonte: Livro

A introdução do capítulo foi concebida para fornecer um panorama da **História da Trigonometria**. A estratégia visa a estabelecer uma ponte entre o conhecimento formal e sua origem, permitindo ao estudante não apenas assimilar o conteúdo, mas também compreender a sua evolução e relevância prática ao longo do tempo. A inserção de um breve histórico, ilustrado por recursos visuais como a figura a seguir, busca humanizar a disciplina. Ao apresentar a trigonometria como o resultado de séculos de observações, desafios e avanços de civilizações como a babilônica, egípcia e grega, o material pedagógico estimula a curiosidade e o engajamento do aluno. A figura, neste contexto, não é apenas um adorno, mas uma âncora visual que exemplifica a aplicação primitiva da trigonometria, como na medição de distâncias ou na astronomia.

Figura 7: História da Matemática



CAPÍTULO 8

Trigonometria no triângulo retângulo

Contam os historiadores que, por volta do ano 140 a.C., o grego Hiparco de Niceia (c. 190 a.C.-c. 120 a.C.) – considerado o maior astrônomo do mundo – relacionou os lados e os ângulos de um triângulo retângulo e elaborou, pela primeira vez na história da humanidade, o equivalente ao que hoje é uma tabela com valores trigonométricos dos ângulos de 0° a 90°.

Posteriormente, já no século II, o astrônomo e geógrafo grego Ptolomeu (85-165) estabeleceu em sua obra *Almagesto* novas proposições trigonométricas. Ele elaborou uma tabela de cordas correspondentes a ângulos de 0° a 180°, ordenadas crescentemente, que é equivalente a uma tabela de senos, um dos conceitos centrais da Trigonometria. Nessa obra, Ptolomeu apresentou também a teoria geocêntrica, que se manteve por cerca de 1 500 anos.

Povos árabes, que tiveram acesso ao *Almagesto*, divulgaram na Europa os conhecimentos sobre Astronomia e Trigonometria. Depois disso, importantes trabalhos hindus sobre a Trigonometria foram traduzidos para o árabe, no fim do século VIII, mas o primeiro tratado sistemático sobre o tema foi elaborado pelo matemático alemão Johann Müller (1436-1476), em sua obra *De triangulis* (Tratado dos triângulos).

Neste capítulo estudaremos o resultado do trabalho de muitos matemáticos: a trigonometria no triângulo retângulo.

Cláudio Ptolomeu

Fonte: Livro

O percurso metodológico inicia-se com uma reflexão sobre a etimologia da palavra Trigonometria, que deriva do grego e significa "medida de triângulos". Essa contextualização linguística e conceitual serve como um ponto de partida para o aluno, conectando o objeto de estudo ao seu nome e propósito fundamental.

Posteriormente, a metodologia avança para um segundo momento crucial: a apresentação de um problema histórico. Conforme ilustrado na figura a seguir, o problema não se restringe a um exercício matemático padrão, mas se configura como um desafio autêntico, com raízes em aplicações práticas do passado. Ao ser proposto, o problema estimula o aluno a adotar uma postura investigativa, encorajando a reflexão em grupo. Essa estratégia, alinhada a abordagens construtivistas e sociointeracionistas, promove o desenvolvimento de habilidades de colaboração e argumentação, além de potencializar o raciocínio matemático. O desafio histórico serve, portanto, como um catalisador para o engajamento cognitivo, preparando o terreno para a introdução formal dos teoremas e propriedades da semelhança de triângulos.

Essa sequência, do significado à aplicação histórica, visa a construir um arcabouço de conhecimento que vá além da memorização de fórmulas. Ao invés de uma mera transposição de conteúdo, o método busca gerar um aprendizado significativo, onde o aluno compreende a relevância do tema antes de dominar suas técnicas.

Figura 8: A palavra Trigonometria

1 Semelhança de triângulos

Neste capítulo retomaremos o estudo da Trigonometria (do grego: 'medida dos triângulos'), revendo e aprofundando a Trigonometria no triângulo retângulo. O conceito de proporcionalidade é questão central nesse processo, portanto faremos uma revisão de tópicos relevantes da Geometria plana.

A proporcionalidade, principalmente na forma do teorema de Tales ou de semelhança de triângulos, foi um dos conhecimentos geométricos mais úteis ao longo dos tempos. Foi com semelhança de triângulos que Aristarco (310 a.C.-230 a.C.) comparou as distâncias da Terra, e com que os matemáticos árabes estabeleceram as razões trigonométricas.

Tales de Mileto (624 a.C.-547 a.C.), considerado um dos mais versáteis gênios da Antiguidade, levou para a Grécia a Geometria dos egípcios e começou a aplicar a ela os procedimentos da Filosofia grega. Com seu método de comparar sombras, hoje conhecido como teorema de Tales, realizou muitos cálculos até então inéditos. O mais famoso deles foi a obtenção da altura de uma pirâmide.

Conta-se que Tales fincou uma vareta verticalmente no chão, ao lado da pirâmide. Esperou até um momento em que a sombra e a vareta tivessem exatamente o mesmo tamanho. Nesse instante, Tales mediu a sombra da pirâmide, descobrindo assim sua altura.

Junte-se com um colega e discutam como esse método usado por Tales permite que se descubra a altura da pirâmide. Poderia ter sido usado outro momento do dia, por exemplo, o momento em que a sombra da vareta fosse metade da altura dela?

A ideia aqui é que os alunos reflitam sobre a situação proposta. Podem surgir dúvidas sobre o fato de a pirâmide não ser um segmento vertical. Estimule os alunos a vencer suas dificuldades. Seria interessante que as duplas discutissem entre si.

Você sabia?
Tales é considerado um dos sete sábios da Antiguidade. Formem trios e pesquisem quem são os outros seis.

Periandro de Corinto, Pítaco de Mitilene, Bias de Priene, Cleóbulo de Lindos, Sólon de Atenas e Quílon de Esparta.

Fonte: Livro

A análise do material didático referente à Trigonometria revela uma estrutura que privilegia a compreensão aprofundada e a prática resolutiva. O capítulo foi concebido para guiar o estudante de forma sistemática, partindo da apresentação detalhada de conteúdos, acompanhada por exemplos e exercícios resolvidos que servem como guia para o desenvolvimento de estratégias de resolução. A inclusão de exercícios de aprendizagem e questões para reflexão reforça a proposta pedagógica de consolidar o conhecimento e estimular o pensamento crítico.

No tratamento das Relações Métricas no Triângulo Retângulo, a abordagem mantém a coerência ao incorporar a dimensão histórica. O material contextualiza o uso do triângulo retângulo pelos egípcios para a medição e marcação de ângulos retos, o que não apenas ilustra a origem prática do conceito, mas também humaniza a matemática ao conectá-la a uma necessidade histórica.

No entanto, a abordagem das Razões Trigonométricas adota um caminho mais direto e pragmático. A seção se concentra na apresentação do conteúdo, seguida por exercícios e a Tabela Trigonométrica. Essa concisão, embora eficiente para a exposição dos conceitos, poderia ser complementada por exemplos que explorassem as aplicações dessas razões em contextos mais amplos.

A finalização do capítulo com uma seleção de questões do ENEM e de outros vestibulares é um ponto forte da metodologia, pois demonstra a relevância e a recorrência do tema em avaliações de alta performance, preparando o aluno para os desafios acadêmicos. Essa seção valida a importância do conteúdo e serve como um simulado para o estudante.

Apesar da promessa, contida na apresentação da coleção, de uma abordagem que integrasse os temas matemáticos com contextos como tecnologia, saúde, sociedade e meio ambiente, o capítulo de Trigonometria não apresenta essa articulação. O conteúdo é tratado de forma isolada, o que representa um ponto de fragilidade na proposta pedagógica, perdendo a oportunidade de demonstrar a aplicabilidade da trigonometria em cenários do mundo real.

A análise dessa coleção revela uma diferença metodológica significativa, particularmente na abordagem da Trigonometria em triângulos quaisquer, da circunferência trigonométrica e das funções e relações trigonométricas. Em contraste com outras coleções, estes tópicos são abordados em detalhe nas sessenta páginas iniciais, indicando a profundidade e a relevância que o autor atribui a eles.

A introdução desta unidade é notável por sua capacidade de conectar o abstrato ao concreto, utilizando o exemplo dos batimentos cardíacos e a modelagem por meio de funções trigonométricas. Essa abordagem não apenas contextualiza o assunto, mas também demonstra sua aplicabilidade direta em áreas como a saúde, o que se alinha com a promessa da coleção de integrar a matemática a outros campos do conhecimento.

No tratamento da trigonometria em triângulos quaisquer, a estratégia de ensino retoma a abordagem histórica já observada, ao introduzir o tema por meio de cálculos para distâncias inacessíveis. Esta técnica serve para aprofundar a compreensão do aluno sobre a origem e a utilidade do conceito. O material segue a mesma estrutura de apresentação de conteúdo, exercícios e exemplo, o que garante uma transição suave e familiar para o estudante.

Um ponto de destaque é a seção que correlaciona Matemática e Tecnologia. A inclusão do software GeoGebra como uma ferramenta para a construção de gráficos trigonométricos representa um avanço didático significativo. A figura anexa ilustra o potencial do aplicativo em tornar o aprendizado mais interativo e visual, superando as limitações do ensino tradicional. Essa integração da tecnologia não só cumpre a promessa da coleção, mas também prepara o aluno para a utilização de ferramentas digitais, uma habilidade essencial no contexto educacional e profissional contemporâneo.

Figura 9: Matemática e Tecnologia

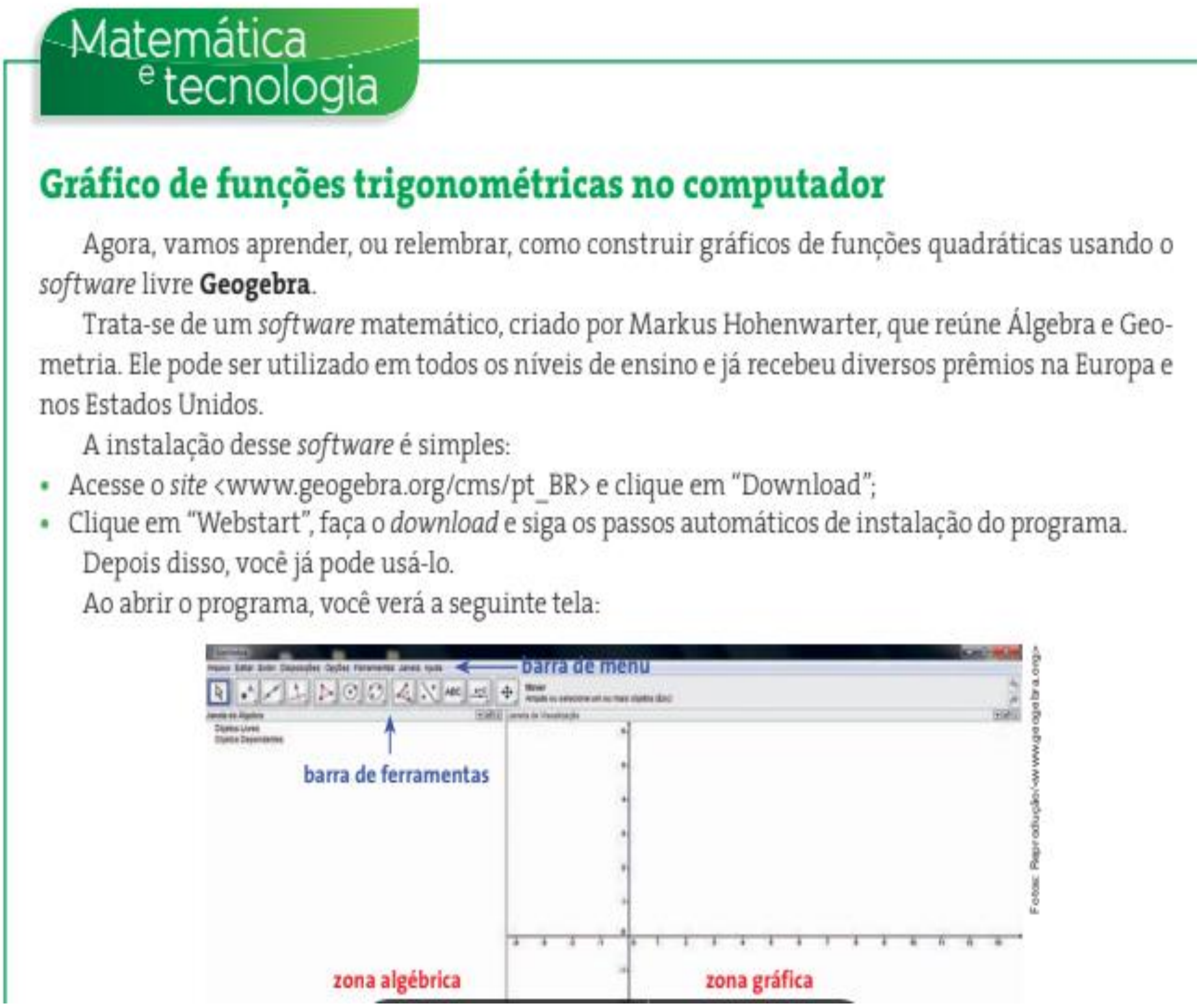

Matemática e tecnologia

Gráfico de funções trigonométricas no computador

Agora, vamos aprender, ou relembrar, como construir gráficos de funções quadráticas usando o *software* livre **Geogebra**.

Trata-se de um *software* matemático, criado por Markus Hohenwarter, que reúne Álgebra e Geometria. Ele pode ser utilizado em todos os níveis de ensino e já recebeu diversos prêmios na Europa e nos Estados Unidos.

A instalação desse *software* é simples:

- Acesse o *site* <www.geogebra.org/cms/pt_BR> e clique em "Download";
- Clique em "Webstart", faça o *download* e siga os passos automáticos de instalação do programa.

Depois disso, você já pode usá-lo.

Ao abrir o programa, você verá a seguinte tela:

Fonte: Livro

O material didático em análise se distingue por uma abordagem aprofundada de conceitos que, tradicionalmente, não são contemplados ou são tratados de forma superficial no ensino público. A seção aprofunda o conteúdo explorando as Identidades Trigonométricas, as Fórmulas de Adição de Arcos, as Fórmulas de Arco Duplo e as Equações Trigonométricas. A inclusão desses tópicos é de extrema relevância, pois eles constituem o alicerce para o estudo da trigonometria em níveis mais avançados, como no cálculo diferencial e integral. A ausência desses assuntos no currículo da maioria das escolas públicas cria uma lacuna no aprendizado, dificultando a progressão do estudante para o ensino superior ou em exames de alto nível.

1.4 **Revisão Bibliográfica**

No site do PROFMAT, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, podemos encontrar um repositório das dissertações de mestrado dos alunos que concluíram o curso.

No dia 9 de agosto de 2025, poderíamos encontrar 8053 dissertações. Utilizando o filtro Trigonometria, reduzimos para 143 registros. Refinando um pouco mais a pesquisa, utilizando o filtro Ensino de Trigonometria, reduzimos para 31 registros.

Desses 31 registros, oito deles apresentam o GeoGebra, ou algum software dinâmico parecido como uma proposta para abordar o ensino de Trigonometria e mostra como a tecnologia pode ser uma aliada na aprendizagem.

Material concreto como o teodolito ou o uso de compasso e transferidor também são apresentados em seis dessas dissertações como instrumentos para facilitar a aprendizagem desses conceitos.

Amorim (2023) diz:

> "A criação e utilização dos teodolitos manuais contribuirão para tornar o ensino de trigonometria mais significativo e envolvente, promovendo uma aprendizagem ativa e despertando o interesse dos alunos pela matemática."

Em nove dessas dissertações, encontramos sequências didáticas diferentes para o ensino e aprendizagem da Trigonometria. Um exemplo é a sequência proposta por Edu Souza Pinheiro, organizada em oito blocos de atividades. O primeiro bloco tem como objetivo reconhecer a História da Trigonometria. O segundo retoma alguns conceitos como Teorema de Tales, de Pitágoras, triângulos e suas relações. O terceiro se refere a trigonometria no triângulo retângulo a serem realizadas em grupos com caráter exploratório como medir alturas de paredes. o quarto bloco seria a construção do teodolito. O quinto aborda a transição da Trigonometria do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico através de aulas expositivas. O sexto bloco contempla o círculo trigonométrico no plano cartesiano, desde funções até as fórmulas de soma e diferença de ângulos através de utilização de recursos computacionais como o GeoGebra. O sétimo bloco visa uma integração com outras disciplinas como Física, com palestras de profissionais e resolução de problemas, finalmente o oitavo bloco prevê as avaliações através de testes e trabalhos desenvolvidos nos blocos. Pinheiro (2021) acredita que:

> "Esta sequência didática, ora proposta, pode ser altamente eficaz e se apresenta de forma positiva em aumentar o interesse e o gosto dos (as) estudantes pela matemática, especialmente pela trigonometria, melhorando significativamente o desempenho dos (as) mesmos (as) em avaliações externas como o ENEM e, quem sabe, elevando o patamar do país, em verificações de conhecimento como é o caso do PISA e contribuindo com a elevação do Índice de Desenvolvimento da Educação do Brasil."

Uma se preocupa como ocorre a avaliação e faz uma sugestão de como avaliar esse conteúdo. Outra, apresenta as contribuições que a literatura científica tem apresentado para o Ensino de Trigonometria, e as demais relatam agentes motivadores para o ensino, como a astronomia, a música, a resolução de problemas.

Ou seja, em pouco mais de uma década, as dissertações buscavam ferramentas, embasamento para melhorar o ensino deste conteúdo como se o problema fosse de Trigonometria não ser interessante. Esta pesquisa visa mostrar que os desafios são outros, a dificuldade em lidar com a defasagem de aprendizagem dos alunos, falta de tempo para abordar o conteúdo de forma profunda e o grande número de alunos por turma, impacientes e indisciplinados são os principais motivos para os resultados na aprendizagem de Trigonometria serem tão baixos.

2 METODOLOGIA E ANÁLISE DOS DADOS

Este trabalho combina metodologias de pesquisa qualitativa e quantitativa caracterizando uma abordagem mista.

A parte quantitativa da pesquisa se manifesta através do questionário utilizado para coletar dados que podem ser analisados estatisticamente e os resultados das avaliações, que servem como um dado objetivo e de desempenho. Eles medem o impacto das práticas de ensino e podem ser correlacionados com os outros dados. A intenção é quantificar comportamentos, percepções ou características de um grupo de professores que ensinam Trigonometria nas escolas do estado do Rio de Janeiro.

A parte qualitativa, por sua vez, é representada pelo relato de experiências vividas nessas salas de aula, de forma coletiva ou individual, e a revisão bibliográfica do material utilizado nessas aulas. Essa abordagem busca aprofundar a análise, compreendendo as motivações e as complexidades por trás das respostas do questionário. As narrativas dos professores sobre essas vivências revelam as dificuldades e os sucessos de forma autêntica e detalhada. Permite analisar o contexto e entender como fatores específicos da sala de aula das escolas influenciam o processo de ensino e aprendizagem. Os relatos corroboram com os dados quantitativos, fornecendo exemplos concretos que ilustram as tendências identificadas no questionário.

A força dessa metodologia está na triangulação, que é a combinação das três fontes de dados. Se os questionários indicam os desafios que os professores encontram no ensino da Trigonometria (dado quantitativo), e os relatos de experiência descrevem as dificuldades encontradas pelos professores nesse processo (dado qualitativo), a pesquisa pode verificar se os resultados das avaliações dos alunos nessa rede confirmam as dificuldades apresentadas (dado de desempenho). Essa combinação de evidências torna a conclusão muito mais robusta.

Em resumo, a dissertação utilizou uma metodologia mista com triangulação de dados, o que lhe permitiu construir uma análise rica e multifacetada do processo de ensino e aprendizagem, combinando a objetividade dos números com a profundidade das experiências humanas.

2.1 Plataforma Rioeduca em Ação

Um dos desafios apresentados nesta pesquisa é a defasagem de aprendizagem em Matemática apresentada pelos alunos do ensino público do Estado do Rio de Janeiro. Em 2023, a nota dos alunos da rede estadual do Rio de Janeiro em Matemática, segundo o Ideb/Saeb, foi de 4,4 para o Ensino Fundamental (anos finais) e 3,97 para o Ensino Médio, com uma média geral de Ideb de 3,8 e 3,3, respectivamente, posicionando o estado entre os de menor desempenho no país. Através de uma amostragem dos resultados de uma escola, ilustra-se essa defasagem mencionada.

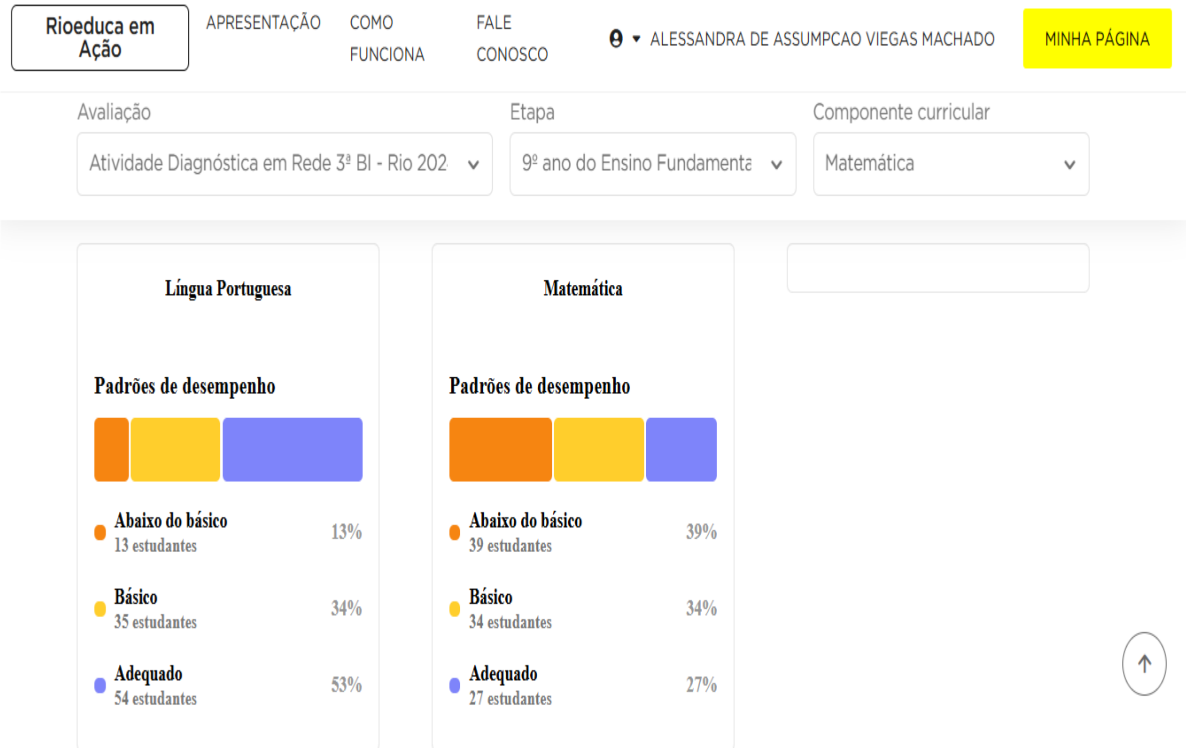
O município do Rio de Janeiro provê para os professores e gestores da sua rede de ensino público uma plataforma de avaliação e monitoramento da educação. O objetivo é diagnosticar os resultados de desempenho dos estudantes nas avaliações da rede durante os últimos anos e apoiar o planejamento de ações educacionais para o próximo ano.

Uma das funcionalidades da plataforma Rioeduca em Ação é a apresentação dos resultados obtidos nas avaliações bimestrais da rede em conjunto com os recursos de Orientações Pedagógicas, Currículo e Habilidades que iremos utilizar para embasar a realidade dos desafios mencionados nesta pesquisa.

Os dados aqui apresentados são de uma escola de uma comunidade da zona norte da cidade do Rio de Janeiro, de turno único, com aproximadamente 600 alunos, referentes a turmas de sexto ao nono ano no ano de 2024.

No infográfico a seguir, podemos verificar a distribuição dos estudantes pelos padrões de desempenho, são eles: Abaixo do básico, para proficiência média alcançada abaixo de 29 pontos; básico, se a proficiência média estiver entre 30 e 69 pontos e adequado para média acima de 70 pontos.

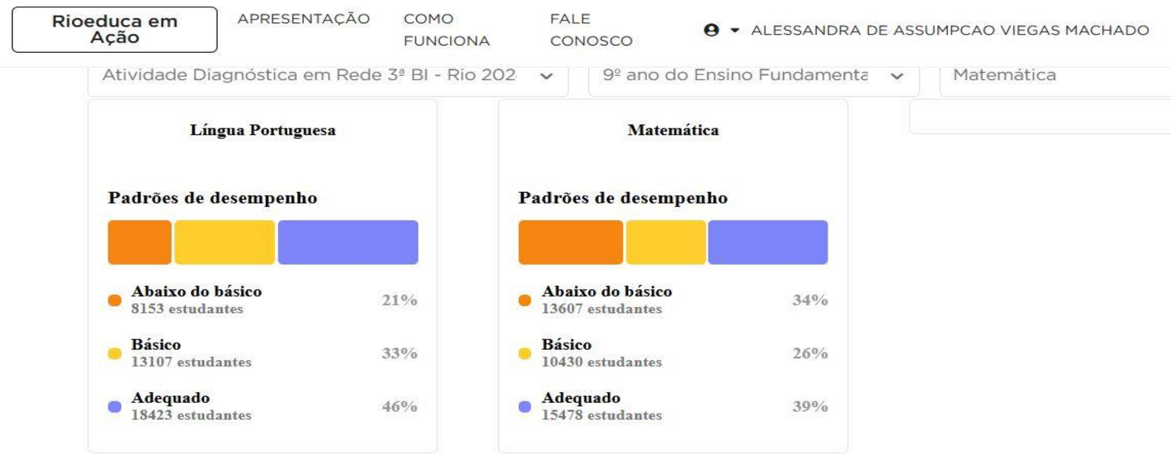
Figura 10: Resultados da avaliação do nono ano



Fonte: CAED Digital

Os resultados dessa amostra das quatro turmas de nono ano na última avaliação do ano já nos mostram o esperado, mais de sessenta por cento dos alunos saíram do nono ano com uma aprendizagem abaixo do adequado, ou seja, deficitários dos conteúdos básicos esperados para o Ensino Médio. Poderíamos dizer que essa é uma amostra pequena para toda a rede, mas o infográfico abaixo nos mostra o resultado de toda a rede, no mesmo período, e que esses gráficos se mostram coerentes entre si. E apesar dos resultados de língua portuguesa parecer melhor, mostra que quarenta por cento estão abaixo do adequado, o que conversa com a pesquisa relatada no capítulo 2, que apresenta a dificuldade em interpretar situações problemas é um dos maiores problemas entre os estudantes.

Figura 11: Resultados da Avaliação da Rede Municipal



Fonte: CAED Digital

Um outro infográfico disponível na Plataforma informa o percentual de acerto por habilidade de cada segmento.

Figura 12: Habilidade Circunferência

Fonte: CAED Digital

A análise do desempenho da turma revelou uma falha crítica na consolidação de uma habilidade fundamental para o estudo da trigonometria: o reconhecimento e a compreensão dos elementos e relações de círculo e circunferência. Apenas 32% dos alunos foram capazes de responder corretamente às questões que avaliavam essa competência.

Esse resultado, que está significativamente abaixo do nível de proficiência esperado, corrobora as observações dos professores e os relatos coletados nesta pesquisa. A baixa taxa de acerto demonstra que o aprendizado sobre o conteúdo de círculo e circunferência não foi efetivamente consolidado. Essa lacuna é particularmente preocupante, pois o domínio desses conceitos é um pré-requisito essencial para o sucesso no ensino de trigonometria, que é um dos principais temas do primeiro ano do ensino médio.

A deficiência na aquisição dessa habilidade básica representa um obstáculo substancial para a progressão do estudante, podendo comprometer a sua capacidade de compreender tópicos mais complexos que dependem de uma sólida base geométrica.

A análise do desempenho da turma revelou que a habilidade relacionada à visão de ângulos centrais e arcos associados não foi devidamente consolidada. Conforme ilustrado no infográfico a seguir, apenas 27% dos alunos demonstraram ter adquirido essa competência, um percentual significativamente abaixo do nível de proficiência esperado.

Essa lacuna no aprendizado é crítica, pois a compreensão da relação entre ângulos e arcos é fundamental para a construção de conceitos trigonométricos mais avançados. A dificuldade em visualizar e manipular essas relações pode comprometer a aprendizagem de temas subsequentes, como a definição de funções trigonométricas e a resolução de equações no círculo.

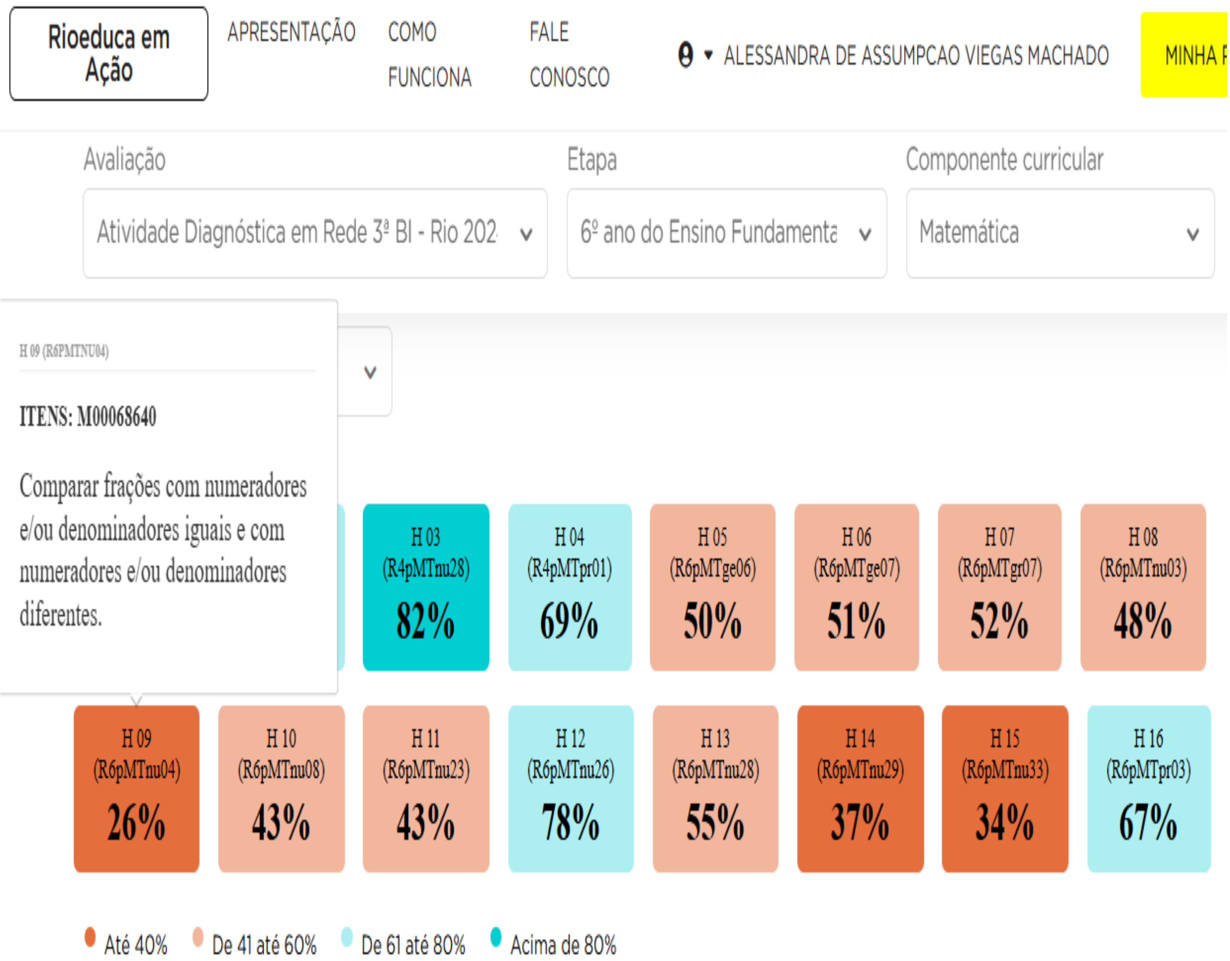
Figura 13: Habilidade Ângulos

Fonte: CAED Digital

O estudo de frações e suas operações emerge como uma das principais barreiras, conforme apontado pelos professores, que prejudicam o aprendizado de trigonometria. Esta dificuldade é corroborada por dados do sexto ano da mesma instituição: a terceira avaliação do ano, conforme ilustrado no infográfico a seguir, revela um desempenho abaixo do esperado em uma das habilidades relacionadas ao tema.

A análise quantitativa é particularmente preocupante. Ao considerar que, dos 600 alunos da escola, apenas 2% foram reprovados, podemos inferir que aproximadamente 70% dos estudantes progredirão para o sétimo ano com essa defasagem crítica. Essa progressão automática, sem a consolidação do conhecimento básico, cria um ciclo de dificuldades que se manifesta em tópicos mais complexos, como a trigonometria. A fragilidade nas operações com frações, um conceito fundamental na matemática, torna-se um obstáculo intransponível, impedindo que os alunos compreendam e apliquem as razões e as relações trigonométricas de forma eficaz.

Figura 14: Resultados da avaliação da Rede Municipal



Fonte: CAED Digital

2.2 **Análise do formulário para os professores**

Na aula que foi inspiração para esta dissertação, eu, o professor regente e meus colegas debatemos sobre o ensino de Trigonometria, levantamos várias dificuldades que os alunos apresentam quando introduzimos os conceitos de Trigonometria. Num grupo de vinte professores atuantes ou na rede pública ou na rede privada, não houve discordâncias, como ensinar Trigonometria para alunos que não conseguem dividir números racionais, simplificar frações, racionalizar ou trabalhar com radicais, reconhecer o que é ângulo, reconhecer um triângulo retângulo e seus elementos, reconhecer círculo, circunferência e seus elementos? Existe uma defasagem tão grande desses assuntos na aprendizagem do alunado que torna o ensino de assuntos mais complexos quase impossível no cenário da educação atual.

Para os professores, as dificuldades vão além dos livros e cadernos de matemática. O aluno não acredita na importância da sua educação para a própria vida, então ele não tem interesse em aprender, ele acredita que nunca vai utilizar as habilidades no cotidiano e não tem expectativas de uma vida melhor.

A tecnologia também é um problema por conta da dificuldade do aluno em se manter longe das redes sociais e dos games. Usada de forma irresponsável e ilimitada, a tecnologia vem sendo um verdadeiro problema para a educação. No seu artigo de 2019, Crises de inteligência, Martins cita:

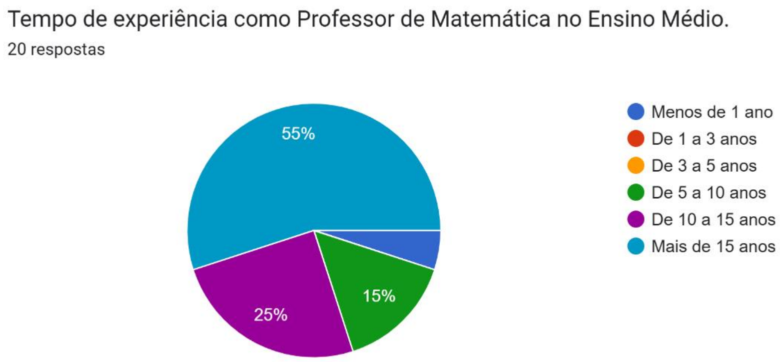
> "O atropelamento resultante do mau uso das máquinas eletrônicas pode ser verificado na superficialidade e pequenez dos textos produzidos pelos educandos, na resistência a leituras mais profundas e mais complexas, no prejudicado desenvolvimento cerebral e na impaciência e na indisciplina nas salas de aula"

Através de um formulário Google recolhi 39 questionários de professores atuantes nas redes públicas e particulares. São respostas anônimas, e tem como objetivo recolher uma amostra aleatória dos desafios que os professores da cidade do Rio de janeiro enfrentam quando ensinam trigonometria nas suas aulas.

Dos 39 professores que responderam ao questionário, três tem menos de trinta anos de idade, vinte e um estão na faixa etária de 30 a 40 anos, seis tem de 40 a 50 anos e 8 estão acima dos 50 anos. O que mostra que mais de 75% são pessoas adultas com muitas vivências para relatar.

Sobre a formação acadêmica destes professores, 21 são licenciados em Matemática, 2 são bacharéis, 11 são especialistas e 6 Mestres no ensino da Matemática. Ou seja, 58% dos professores não buscaram uma pós graduação. Seis professores dão aula de Matemática, mas são formados em outras áreas, como pedagogia e computação.

Figura 15: Tempo de atuação



Fonte: Elaborado pela autora

Uma informação interessante que tiramos do gráfico acima é a pouca experiência em lecionar de 40% dos entrevistados, considerando que 75% do nosso público tem mais de 30 anos e isso nos faz entender a quantidade de profissionais que não buscaram, ainda, cursos de pós-graduação e nos faz perceber que os relatos das vivências esperadas fazem parte de 40% dos professores entrevistados.

É importante relatar também que somente 28% trabalham na rede particular, o restante trabalha em ambas as redes ou só na rede pública. Isso é interessante porque esta pesquisa apresenta uma análise de dados de resultados de experiências vividas na rede pública do município do Rio de Janeiro.

Dos professores entrevistados, 95% lecionam trigonometria no ensino médio, em torno de 58% trata deste conteúdo no primeiro ano do ensino médio. Esse resultado concorda com o levantamento feito no item 1.3 dessa pesquisa que relata os recursos didáticos sobre o tema e mostra que o conteúdo se apresenta na maioria nos livros do primeiro ano do ensino médio. E como consideramos que o aluno aprende matemática num conceito espiral conforme sugere o trecho da BNCC, p. 269:

> “A organização dos objetos de conhecimento contempla o aprofundamento progressivo dos conteúdos, de modo que alguns deles são retomados em diferentes anos escolares com complexidade crescente, respeitando o nível de desenvolvimento dos alunos”.

Isso nos mostra um dos possíveis motivos para a fragilidade na aprendizagem do conteúdo.

Quando perguntado sobre a carga horária dedicada a Trigonometria em suas aulas, sessenta e quatro por cento dos entrevistados responderam menos de seis horas/aulas e trinta e seis por cento responderam mais de dez horas/aulas.

Uma das questões solicitou que os professores escolhessem três das nove opções levantadas como as possíveis dificuldades dos alunos no aprendizado de trigonometria. Os resultados revelam:

- **Falta de pré-requisitos de matemática básica (álgebra, geometria) e desinteresse e falta de motivação dos alunos:** 61,5% dos professores selecionaram ambas opções.
- **Dificuldade em aplicar as fórmulas e identidades trigonométricas e dificuldade em interpretar gráficos de funções trigonométricas:** 46,1% dos entrevistados marcaram essas dificuldades como fatores determinantes.
- **Dificuldade em resolver problemas contextualizados envolvendo trigonometria:** 43,6% selecionaram essa opção.
- **Dificuldade em abstrair os conceitos trigonométricos:** 41% também marcaram essa opção.
- **Dificuldade em compreender os conceitos básicos (ângulos, seno, cosseno, tangente, etc.):** 38,5% escolheram essa como uma das três opções.
- **Dificuldade em visualizar o ciclo trigonométrico e suas aplicações:** Alcançou 35,6%.
- **Dificuldade em relacionar a trigonometria com a geometria do triângulo retângulo:** 25,6% escolheram essa opção.

Sobre o nível de interesse que o conteúdo desperta no alunado depois que é apresentado, 13 professores dos 20 entrevistados relatam muito baixo interesse, 11 disseram que apresentam baixo interesse, 11 classificaram como regular o interesse dos alunos e 2 relatam muito interesse. Ou seja, mais da metade dos professores sugeriram baixo interesse no assunto.

Uma pergunta opcional feita no questionário foi sobre estratégias utilizadas pelos entrevistados para tentar engajar os alunos no aprendizado de trigonometria. Vinte e sete professores responderam, e são estratégias bem interessantes:

- Relacionar músicas ao ensino das fórmulas;
- Mostrar a aplicação da trigonometria no dia a dia;

- Utilizar situações-problemas
- Utilizar softwares matemáticos, como vídeos e o aplicativo GeoGebra;
- Comentar sobre fenômenos físicos periódicos e associar a Trigonometria;
- Usar exemplos práticos com distâncias não alcançadas;
- Ensinar de maneira lúdica;
- Contextualizar e fazer exercícios de muita aplicabilidade;
- Aulas práticas, oficinas em sala, trabalhos em grupo;
- E mostrar a cobrança nas avaliações externas.

A terceira seção do questionário teve como foco principal os desafios e as necessidades relacionadas aos processos de ensino e aos recursos pedagógicos. A análise dos dados revela que a defasagem de aprendizagem dos alunos é o obstáculo mais significativo, sendo citada por 30 dos 39 participantes (76,9%) como o maior desafio no ensino de trigonometria.

Além da defasagem, outros obstáculos foram identificados com frequência. A falta de tempo para aprofundar o conteúdo foi citada por 18 professores (46,2%), enquanto o grande número de alunos por turma foi destacado por 17 docentes (43,6%). Outros desafios importantes, mencionados por 9 professores cada (23,1%), incluem a pressão para cumprir o currículo visando ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e outros vestibulares, e a carência de recursos didáticos adequados, como materiais manipulativos e softwares educacionais.

No campo da tecnologia, a dificuldade em integrar ferramentas tecnológicas no ensino da trigonometria foi reportada por 8 professores (20,5%). A avaliação da compreensão dos conceitos trigonométricos por parte dos alunos também se mostrou um desafio para 9 professores (23,1%).

Com menor frequência, mas ainda relevante, a dificuldade em encontrar atividades e exemplos contextualizados para a realidade do Rio de Janeiro foi mencionada por 4 docentes (10,3%), enquanto a falta de formação continuada específica para o ensino de trigonometria foi assinalada por 3 professores (7,7%).

Quando perguntado sobre que recursos didáticos eles utilizavam com mais frequência no ensino da Trigonometria, listas de exercícios foi o mais citado, o livro didático ficou em segundo lugar e vídeos e animações online em terceiro mais escolhido. Em torno de trinta por cento dos professores também disseram utilizar matérias manipulativos e softwares de geometria dinâmico. Seis professores disseram utilizar projetos, ou jogos educativos.

A tecnologia foi um dos recursos de apoio adicionais mais citados pelos professores para melhorar o ensino da Trigonometria no Ensino Médio. Laboratórios de informática com computadores, rede de internet de qualidade, lousa digital e acesso a softwares tornariam o ensino mais atrativo, dinâmico. O compasso e o transferidor poderiam tornar os conceitos mais concretos. A preocupação com a defasagem também é mencionada, devemos nos preocupar com o que ocorre no ensino fundamental com os alunos, para depois de nove anos, chegarem ao ensino médio com tão pouco conhecimento. Também foram citados como relevantes o reforço escolar como apoio, a volta do ensino de construções geométricas e o aumento da carga horária para a disciplina de Matemática. Por fim, uma campanha de valorização da educação para a sociedade, para convencer o aluno e os responsáveis da importância do aprendizado escolar seriam recursos significativos para vencer esses desafios.

Quando perguntado como os professores iniciavam o ensino deste conteúdo nas suas aulas, foi surpreendente a variedade de respostas citadas. Tem aqueles que começam revisando o triângulo retângulo, um professor disse que dá início com o estudo do Teorema de Pitágoras e depois a tabela trigonométrica, uns disseram que começam revisando os conceitos de seno, cosseno e tangente e depois relacionando com a circunferência trigonométrica. Outra resposta interessante foi de um professor que começava fazendo algumas estimativas de medições reais, utilizando o par de esquadros como referência. Um outro professor disse começar com um exemplo real para o uso de seno, cosseno ou tangente, relacionando com semelhança. E um outro começa utilizando contextos históricos. Essa variedade de possibilidades também foi percebida quando fizemos o levantamento de alguns recursos didáticos, e o interessante é que não conseguimos determinar o melhor caminho para seguir, todos parecem viáveis.

Para terminar o questionário, foi perguntado se utilizavam alguma estratégia específica para conectar a trigonometria com outras áreas da matemática ou com outras disciplinas. Era uma pergunta opcional, das 19 recebidas, seis responderam não. Utilizar a trigonometria para calcular área de triângulos, gerando uma associação com geometria, listas de questões do ENEM com abordagens na área de biologia, exemplos de interação da Trigonometria com Filosofia, Geografia topográfica foram os citados, mas não foram explicados como usá-los.

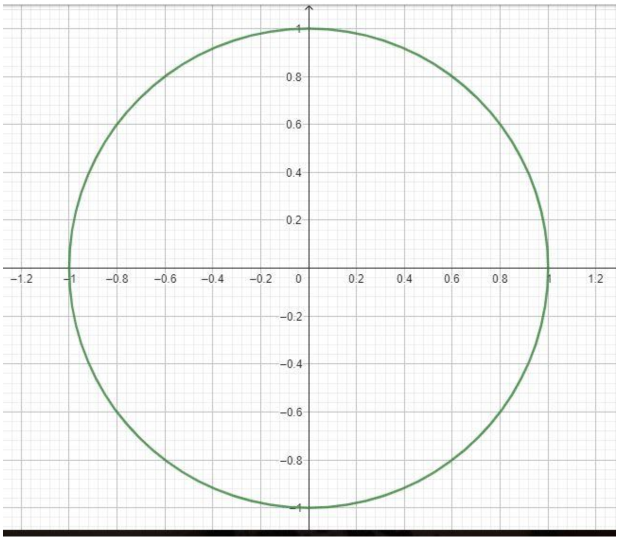
2.3 **Trigonometria numa sala de aula da rede pública em 2024.**

Este registro documenta o desenvolvimento de um plano de aula sobre trigonometria, inspirado no artigo, Students' Understanding of Trigonometric Functions, de Keith Weber, implementado em uma turma de segundo ano do ensino médio, composta por 28 alunos, em uma escola estadual pública localizada na Zona Norte do Rio de Janeiro.

Observações e Reflexões:

- **Desafios Iniciais:** Desde o início, ficou evidente que o ensino de trigonometria representaria um desafio significativo. A turma demonstrava lacunas consideráveis em conceitos fundamentais da matemática.
- **Aula 1:** A primeira aula, realizada no início do terceiro bimestre do ano letivo de 2024, teve como objetivo introduzir os alunos à prática da trigonometria. Foi proposta uma atividade e os alunos deveriam marcar um ponto em uma circunferência (Figura 16), como sugerido no artigo mencionado.

Figura 16: Círculo trigonométrico

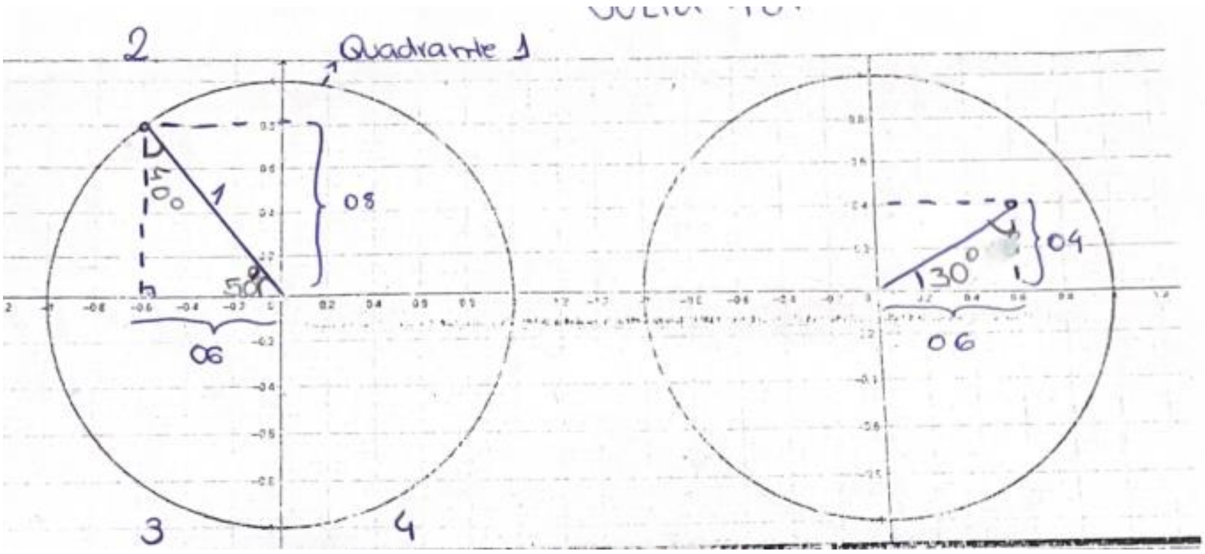


Fonte: Elaborada pela autora no GeoGebra.

  - Observou-se dificuldade generalizada na compreensão do conceito de lugar geométrico da circunferência. A maioria dos alunos posicionou os pontos na região interna ou externa do círculo.
  - Identificou-se uma falta de familiaridade com os eixos cartesianos. Nenhum aluno conseguiu projetar corretamente o ponto marcado sobre os eixos.
  - A medição da distância do centro às projeções também apresentou dificuldades, com alguns alunos utilizando a régua de maneira inadequada.

- Ao introduzir a relação dos valores encontrados com seno e cosseno, conceitos já abordados no Ensino Fundamental II, constatou-se que muitos alunos não haviam estudado o conteúdo ou não o recordavam.
- O uso do transferidor para medir o ângulo central referente ao ponto na circunferência mostrou-se problemático, revelando uma falta de habilidade com o instrumento, apesar de seu uso regular no Ensino Fundamental II.

Figura 17: Exercício da aluna Júlia



Fonte: Autora

- **Aula 2:** Optou-se por uma abordagem mais tradicional, apresentando os arcos trigonométricos e relacionando as ideias de grau e radiano.
  - Novos desafios surgiram: dificuldades na resolução de problemas envolvendo regra de três, simplificação de frações e compreensão do número pi.
  - Interessante que eles perguntavam quando faríamos o exercício com os círculos de novo.
- **Avanços e Dificuldades:** A introdução dos ângulos notáveis no círculo trigonométrico foi um momento positivo, com alguns alunos recordando o conteúdo e a mnemônica utilizada para memorizá-los. A explicação sobre redução ao primeiro quadrante pareceu gerar interesse e compreensão.
- **Aula 3:** Procurou-se estabelecer uma conexão entre os conteúdos abordados: o ponto na reta real, o círculo trigonométrico e as funções seno e cosseno.
  - Alunos com melhor base matemática acompanharam a aula com facilidade, demonstrando surpresa com a extensão infinita do gráfico das funções.

    - Alunos com dificuldades na matemática básica mostraram-se confusos. Observou-se desinteresse por parte de alguns.
- **Aula 4:** Foi proposta uma lista de exercícios para resolução em sala de aula, com consulta ao caderno e trabalho em duplas ou grupos.
    - Evidenciou-se uma carência de vocabulário específico da área, com os alunos demonstrando dificuldade em expressar suas dúvidas e em manipular os termos "seno" e "cosseno" nas equações. A utilização do sinal de igual também se mostrou problemática. A fragilidade na base matemática mostrou ser um obstáculo significativo para a aprendizagem.

Resultados:

- Dos 28 alunos matriculados, 25 realizaram a avaliação final.
- 8 alunos obtiveram desempenho acima do esperado.
- 5 alunos alcançaram rendimento na média.
- 8 alunos tiveram aproveitamento muito baixo, acertando apenas uma das oito questões.
- 4 alunos entregaram a avaliação em branco.

2.4 **Acompanhamento escolar de alunas da rede pública.**

A presente pesquisa também incorpora um estudo de caso aprofundado, centrado no acompanhamento escolar de alunas da rede pública estadual e federal. Esta abordagem metodológica, de natureza qualitativa, busca transcender a análise estatística para oferecer uma compreensão detalhada e contextualizada do processo de aprendizagem.

Ao focar na trajetória individual dessas alunas, o estudo visa a investigar como as dificuldades e os sucessos são experienciados e superados em um ambiente de ensino público. A análise de questões e avaliações realizadas na escola não servirá apenas como um indicador de desempenho, mas como uma ferramenta de diagnóstico. O objetivo é identificar padrões de raciocínio, lacunas no conhecimento e as estratégias utilizadas pela estudante na resolução dos problemas.

A inclusão deste estudo de caso é justificada pela sua capacidade de fornecer evidências concretas e narrativas que complementam os dados mais amplos da pesquisa. A experiência singular da aluna torna-se um prisma através do qual se pode refletir sobre os desafios e as potencialidades do ensino de Trigonometria na rede pública, conferindo profundidade e riqueza aos resultados dessa dissertação.

Maria, uma aluna de 17 anos do terceiro ano do curso técnico de Química no IFRJ, representa um caso de estudo singular e relevante para esta pesquisa. Sua trajetória acadêmica, caracterizada por um histórico de alto rendimento em escolas particulares antes de ingressar no Instituto, a distingue dos demais alunos da amostra. Sua disciplina, autonomia nos estudos e o interesse em aprofundar os conteúdos, aliados ao seu objetivo de cursar Engenharia Química, a posicionam como um perfil de estudante atípico.

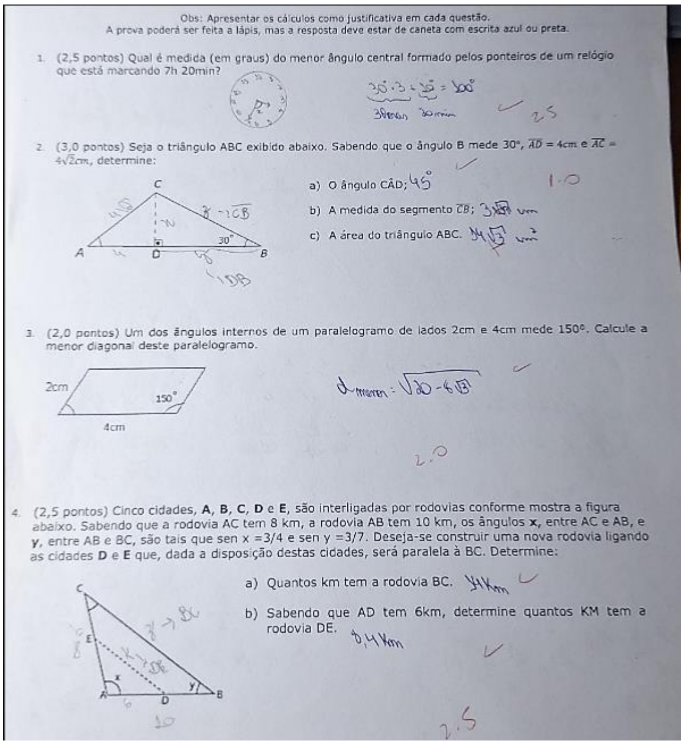
O acompanhamento de seus estudos de trigonometria no círculo, realizado em paralelo a esta pesquisa, revelou um contraste notável com as dificuldades observadas na maioria dos alunos. Maria, de fato, demonstrou não apenas facilidade, mas também apreço pelo conteúdo, encontrando os tópicos apresentados atrativos.

A unidade de Trigonometria foi estruturada pela professora de Maria para revisar inicialmente o triângulo retângulo e as leis de seno e cosseno. Em seguida, foram introduzidos os conceitos de arcos e ângulos, culminando na apresentação do círculo trigonométrico. Um ponto de destaque, e que se diferencia do currículo comum da rede pública, foi a abordagem detalhada das fórmulas de soma e subtração de arcos. Este tópico, em particular, demandou um acompanhamento mais intensivo com Maria, devido à quantidade de fórmulas a serem assimiladas.

O curso de trigonometria foi finalizado com a apresentação das funções trigonométricas. No entanto, é importante registrar que esse conteúdo não foi objeto de avaliação formal, o que pode ter impactado a percepção final de domínio por parte da aluna.

Este estudo de caso oferece uma valiosa oportunidade de analisar a aprendizagem de matemática em um contexto de excelência acadêmica e de comparar a experiência de um aluno com alto rendimento com os desafios enfrentados pela maioria dos estudantes da rede pública.

Figura 18: Avaliação na rede federal



Obs: Apresentar os cálculos como justificativa em cada questão.
A prova poderá ser feita a lápis, mas a resposta deve estar de caneta com escrita azul ou preta.

1. (2,5 pontos) Qual é medida (em graus) do menor ângulo central formado pelos ponteiros de um relógio que está marcando 7h 20min?

2.5

2. (3,0 pontos) Seja o triângulo ABC exibido abaixo. Sabendo que o ângulo B mede 30°, $\overline{AD}$ = 4cm e $\overline{AC}$ = $4\sqrt{2}$cm, determine:

a) O ângulo CÂD; 45°

b) A medida do segmento $\overline{CB}$;

c) A área do triângulo ABC.

1.0

3. (2,0 pontos) Um dos ângulos internos de um paralelogramo de lados 2cm e 4cm mede 150°. Calcule a menor diagonal deste paralelogramo.

2.0

4. (2,5 pontos) Cinco cidades, **A**, **B**, **C**, **D** e **E**, são interligadas por rodovias conforme mostra a figura abaixo. Sabendo que a rodovia AC tem 8 km, a rodovia AB tem 10 km, os ângulos **x**, entre AC e AB, e **y**, entre AB e BC, são tais que sen x =3/4 e sen y =3/7. Deseja-se construir uma nova rodovia ligando as cidades **D** e **E** que, dada a disposição destas cidades, será paralela à BC. Determine:

a) Quantos km tem a rodovia BC.

b) Sabendo que AD tem 6km, determine quantos KM tem a rodovia DE.

2.5

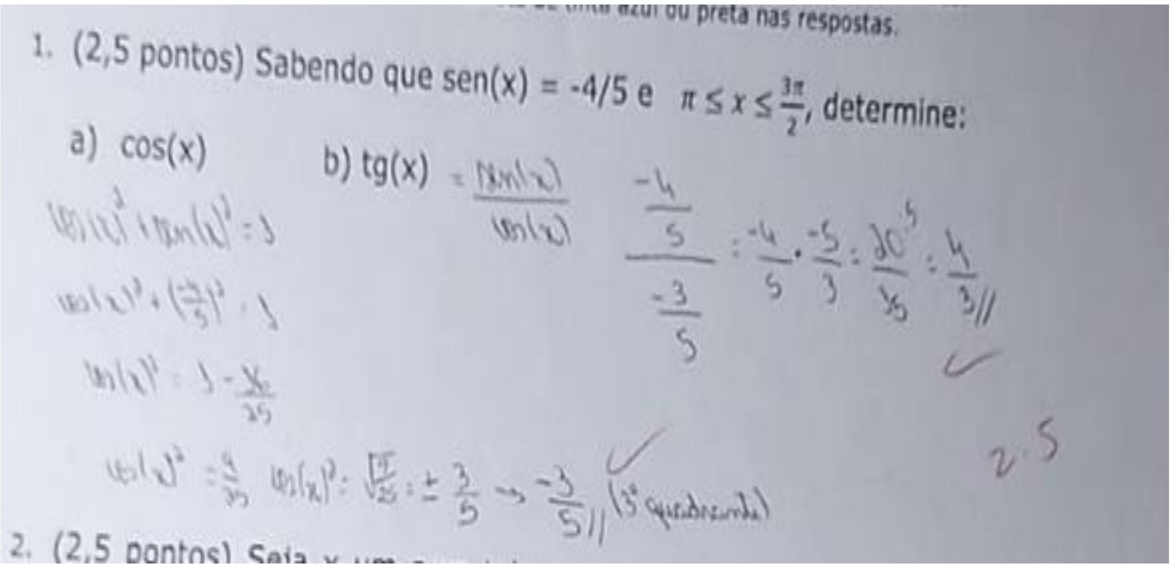
Fonte: Autora

A avaliação da aluna, conforme ilustrado na figura, na qual obteve nota 8, é composta por questões contextualizadas que podem ser classificadas como de nível médio a difícil. Embora a folha com os cálculos detalhados não tenha sido recuperada, a nota expressiva sugere que a aluna não apenas teve contato com a trigonometria, mas também a compreendeu sem a dificuldade esperada, uma situação que contrasta com a de muitos alunos da rede pública.

Essa facilidade pode ser atribuída, de forma significativa, ao fato de que Maria já possuía os conhecimentos prévios essenciais para o aprendizado do tema. A consolidação de conceitos básicos atuou como um facilitador, permitindo-lhe construir novos saberes sobre uma base sólida.

A confirmação dessa hipótese é reforçada pela segunda avaliação, onde as questões são apresentadas com as resoluções, como mostrado na figura abaixo. A proficiência demonstrada por Maria na primeira avaliação sugere que a sua capacidade de resolver os problemas se baseava em uma compreensão conceitual profunda, e não na memorização de fórmulas.

Figura 19: Exercício

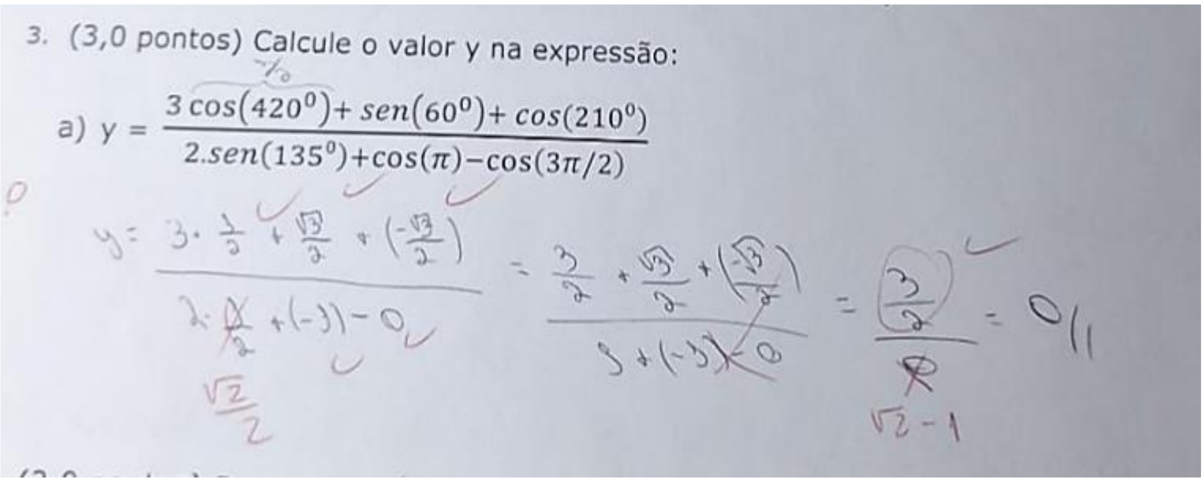


Fonte: Autora

A questão em análise, embora seja um exercício clássico de trigonometria e de relativa facilidade, exige do estudante o domínio de conceitos fundamentais como equações, potências, divisão de frações e números irracionais. Essa necessidade de conhecimentos prévios, conforme apontado pelos professores entrevistados nesta pesquisa, é um dos maiores desafios enfrentados na rede pública. Muitos alunos chegam ao Ensino Médio com uma defasagem crítica, sem a base necessária para a abordagem de conteúdos mais complexos. Essa lacuna impede o desenvolvimento das habilidades esperadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Além disso, a questão ilustrada, que envolve senos e cossenos, demanda do aluno a capacidade de lidar com conceitos como intervalos reais, funções e inequações. A proficiência nesses temas, de acordo com os relatórios da Secretaria Municipal de Educação (SME) analisados no capítulo 3, apresenta percentuais de acerto muito baixos. Isso reforça a tese de que a dificuldade em trigonometria muitas vezes não reside no tema em si, mas na falta de um alicerce sólido em matemática básica, o que impede a plena aquisição das novas competências.

Figura 20: Expressão



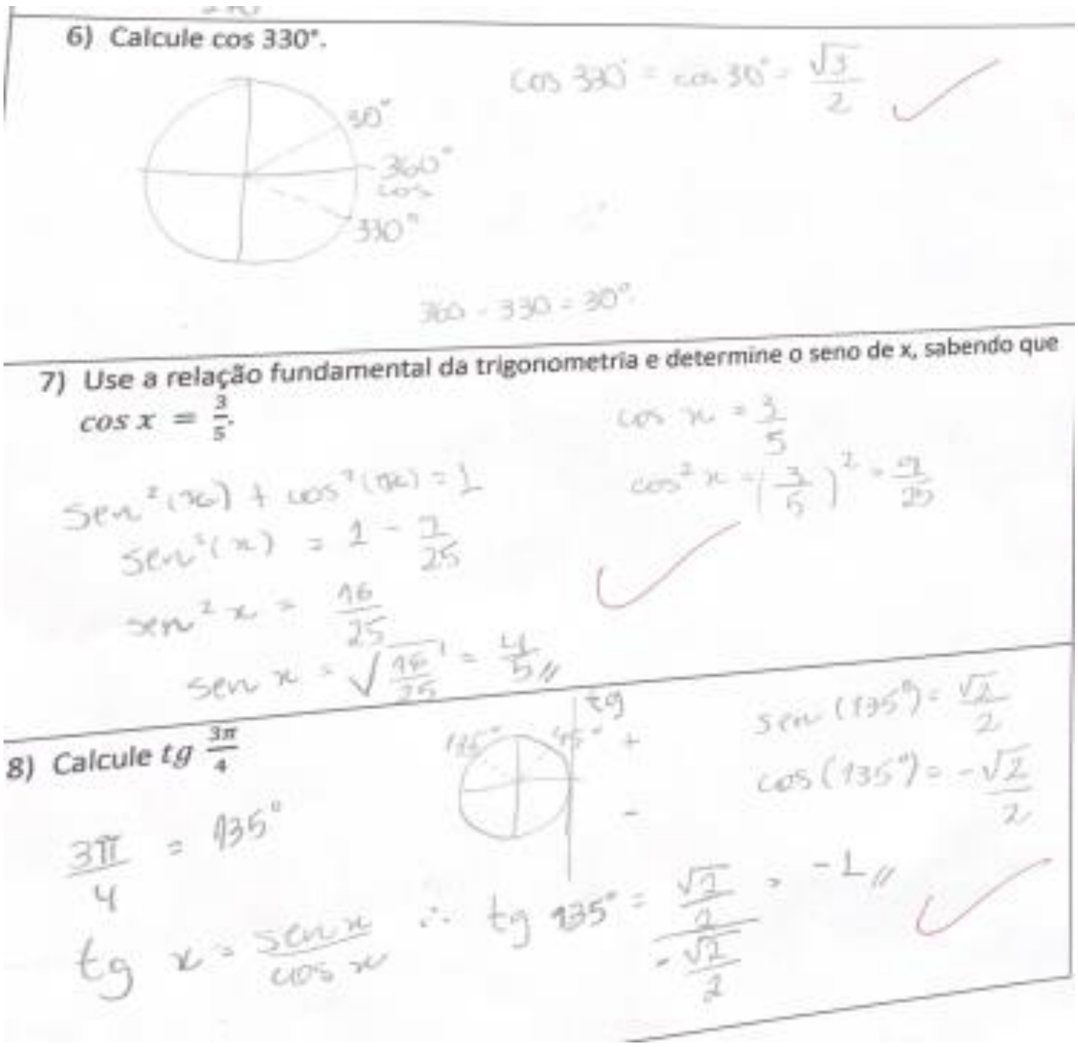
Fonte: Autora

A análise da única questão que a aluna não acertou é particularmente instrutiva, pois revela mais sobre suas competências do que a totalidade de seus acertos. A questão em questão (figura acima), exige um sólido domínio de operações com frações e radicais, habilidades essenciais para a resolução correta. A proficiência de Maria nestes tópicos, que é vital para o cálculo de senos e cossenos de ângulos de múltiplas voltas, tanto em graus quanto em radianos, é notável.

O desempenho de Maria nessa avaliação demonstra que ela não encontrou as dificuldades esperadas no aprendizado de trigonometria. Sua aptidão em lidar com os conceitos e a sua capacidade de aplicar o conhecimento em diferentes contextos reforçam a tese de que sua base matemática prévia foi um diferencial crucial.

Para finalizar, foi solicitado que Maria resolvesse os mesmos exercícios propostos para os alunos envolvidos no experimento relatado no capítulo anterior. Vale ressaltar que ela acertou todas as questões, mostrou com refinamento e boa base todas as soluções num bom tempo de realização. Abaixo a figura 21 mostra uma parte desta avaliação para posterior comparação.

Figura 21: Maria



Fonte: Autora

Ademais, a própria aluna, em depoimento, descreveu o assunto como "tranquilo", expressando uma preferência pela trigonometria em relação a logaritmos. Embora essa comparação não seja o foco desta dissertação, ela sugere a importância da afinidade do estudante com o conteúdo, o que pode influenciar diretamente o processo de aprendizagem.

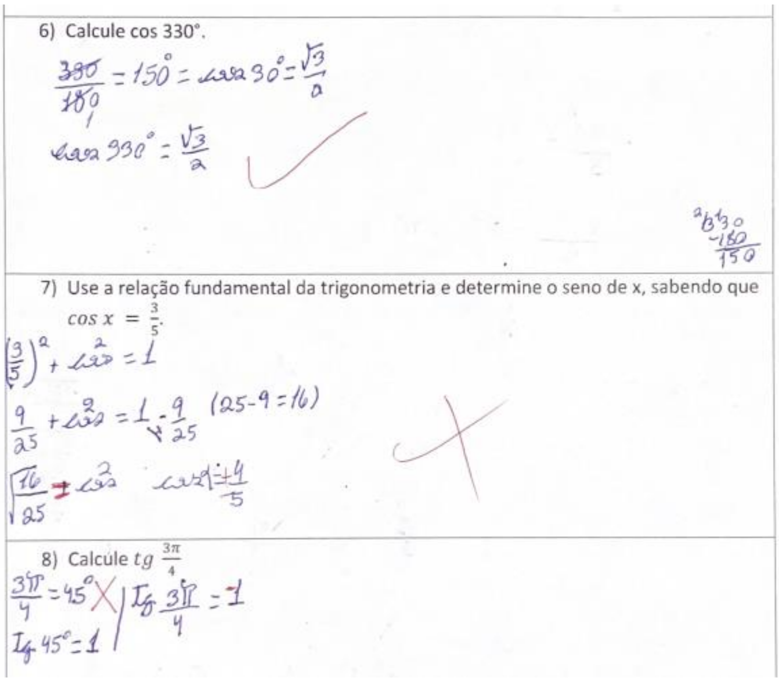
Ana tem 17 anos e é aluna da turma do nosso experimento numa escola pública estadual do Rio de Janeiro. Ela sempre estudou na rede pública, no entorno do bairro da zona norte onde mora com os pais. É beneficiária do Programa federal Bolsa-família, tem mais outros 8 irmãos que ajuda a cuidar. Se destaca por focar na sua aprendizagem apesar de todas as dificuldades, deseja ser pediatra ou psicóloga.

A análise da figura a seguir revela a existência de um nível de dificuldade reduzido na formulação das questões de avaliação, o que pode mascarar as reais dificuldades dos alunos, mas é o que acontece nas salas de aula atuais da rede pública como resultado da defasagem apresentada pelos alunos. Além disso, a pouca atenção dada ao registro dos resultados, ao aceitar respostas "suficientes" como corretas, reflete uma despreocupação com a avaliação precisa do conhecimento, já que o aluno dificilmente será reprovado de acordo com os critérios de avaliação adotados no Estado.

No entanto, mesmo nesse contexto, o desempenho da aluna em questão é digno de nota. Embora sua resposta demonstre problemas na formulação e na representação de frações e igualdades, ela conseguiu chegar à algumas respostas corretas. Esse resultado indica que, apesar de suas lacunas de aprendizagem, a aluna demonstra uma notável capacidade de lutar contra essas deficiências para assimilar novos conteúdos.

Essa característica ressalta a importância de uma análise mais profunda do processo de aprendizagem, que vai além do resultado final, valorizando o esforço e a capacidade de superação do estudante e comprova a existência de lacunas de aprendizagem citadas no questionário pelos professores.

Figura 22: Ana



Fonte: Autora

Analisando as duas resoluções apresentadas, podemos notar as seguintes diferenças e semelhanças:

Questão 6: Calcular cos (330°)

- Aluna Maria (Figura 21): A aluna demonstra um bom entendimento do círculo trigonométrico. Ela corretamente identifica que 330° está no quarto quadrante e que o cosseno de 330° tem o mesmo valor que o cosseno do seu ângulo de referência, que é

360°−330°=30°. A resposta final está correta. O raciocínio é claro e visualmente apoiado pelo desenho do círculo.

- Aluna Ana (Figura 22): A aluna comete um erro de cálculo inicial ao converter 330° para 150°, o que leva a uma resposta incorreta. A forma como ela tenta relacionar 330° com 180° e depois com 30° é confusa e o resultado final, apesar de ser o valor numérico correto, carece de um raciocínio claro e preciso para o ângulo dado.

Questão 7: Usar a relação fundamental da trigonometria para determinar o seno de x, dado cos(x)=53

- Aluna Maria (Figura 21): A aluna utiliza a relação fundamental da trigonometria ($sen^2(x)+cos^2(x)=1$) de forma impecável. Ela substitui o valor do cosseno, calcula o quadrado de 3/5 corretamente (9/25), isola $sen^2(x)$ e, finalmente, extrai a raiz quadrada para encontrar o valor do seno, 4/5. A resolução é sequencial e logicamente correta.
- Aluna Ana (Figura 22): A aluna inicia o processo corretamente ao substituir o valor de cos(x) na fórmula. No entanto, ela comete um erro de cálculo ao tentar subtrair os valores (9/25 de 1), resultando em uma equação incorreta. O sinal de "mais ou menos" (±) na raiz quadrada é adicionado de forma inadequada, e o processo não chega à resposta correta.

Questão 8: Calcular tg (43π)

- Aluna Maria (Figura 21): A aluna primeiramente converte 3π/4 radianos para graus, chegando a 135°. Em seguida, ela usa a definição de tangente (tg(x)= sen(x)/cos(x)) e encontra os valores de seno e cosseno para 135°, os quais estão corretos (seno positivo no segundo quadrante, cosseno negativo). A divisão resulta em -1, que é a resposta correta. O desenho do círculo trigonométrico e as anotações de sinais (+ e -) mostram um entendimento sólido.
- Aluna Ana (Figura 22): A aluna converte corretamente 3π/4 radianos para 135°, mas depois comete um erro grave ao tentar relacionar o problema com 45°. Ela anota tg(45) = 1 e conclui que tg (135) = 1, ignorando o fato de que 135° está no segundo quadrante, onde a tangente é negativa. A resolução é baseada em uma suposição incorreta e carece do raciocínio trigonométrico necessário para a questão.

A Aluna Maria demonstra um entendimento sólido e consistente dos conceitos de trigonometria, conseguindo aplicar as fórmulas e as propriedades do círculo trigonométrico de forma precisa em todas as questões. Seus métodos são lógicos e levam às respostas corretas. A utilização de desenhos e anotações auxilia na visualização e na organização do raciocínio.

A Aluna Ana, por outro lado, apresenta dificuldades conceituais e de cálculo. Embora consiga iniciar algumas questões corretamente, ela comete erros cruciais que comprometem a precisão das respostas. Sua resolução da questão 6 é confusa, e nas questões 7 e 8, os erros de cálculo e de conceito (sinal da tangente) indicam uma compreensão frágil dos tópicos abordados.

3 ESTRATÉGIAS PARA SUPERAR OS DESAFIOS

A superação dos desafios educacionais exige uma abordagem que transcende a responsabilidade individual do professor, do aluno ou do governo, requerendo uma colaboração multifacetada. Não se pode, portanto, adotar uma postura de inércia, como se não houvesse soluções possíveis. Nesse sentido, as estratégias didáticas propostas nesta pesquisa foram selecionadas por sua viabilidade de aplicação em diversos contextos, utilizando materiais de fácil acesso e que são intrínsecos ao cotidiano dos estudantes.

Segundo Luckesi (2005):

> "não tem sentido o aluno ter assimilado uma quantidade considerável de conceitos se esses não têm uma relação com a sua vida, com o dia a dia. Relacionar os conteúdos com o cotidiano dá verdadeiro sentido ao ensino-aprendizagem".

A partir dessa fundamentação, as estratégias apresentadas nesta pesquisa foram cuidadosamente selecionadas por sua natureza prática e adaptabilidade. A primeira delas consiste na aplicação da Modelagem Matemática, que encoraja o aluno a desenvolver um olhar investigativo sobre seu entorno e a formular questionamentos a partir de observações cotidianas. Essa abordagem estimula o pensamento crítico e a autonomia intelectual, permitindo que o estudante construa o conhecimento a partir de sua própria realidade.

A segunda estratégia emprega metodologias ativas, utilizando um material concreto e de fácil acesso, que faz parte do universo do aluno. A utilização de recursos tangíveis e a participação ativa no processo de aprendizagem não apenas facilitam a compreensão de conceitos complexos, mas também promovem a colaboração, o engajamento e a retenção do conhecimento de forma mais significativa. Ambas as estratégias, ao se basearem em recursos disponíveis e na experiência do aluno, demonstram a viabilidade de se promover um ensino mais relevante e eficaz em diferentes contextos educacionais.

3.1 Uma atividade com Modelagem Matemática

Em 2016, num curso de Modelagem Matemática, desenvolvi um projeto de Trigonometria que se tornou uma monografia do curso de Pós-Graduação em Modelagem

Matemática. Vou acrescentar o relato nesta pesquisa pois acredito ser interessante apresentar um caminho para ultrapassar os desafios de ensinar trigonometria.

O projeto se chama “Qual é a altura?’ e o objetivo era responder a seguinte pergunta: Como se dá o ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo em uma turma do 1º ano do Ensino Médio durante uma atividade de Modelagem Matemática?

A Modelagem Matemática foi uma ferramenta que usei na busca de tornar o ensino-aprendizagem mais interessante e dinâmico para os estudantes. A minha preparação é o primeiro momento do projeto. Contei com 30 dias corridos para estar pronta. Para isso revisei livros didáticos do ensino médio como Matemática Ciências e Aplicações da Editora Saraiva, Matemática Contextos e Aplicações da Editora Ática e outros. Estudei o capítulo de Aplicações de Trigonometria do livro Temas e Problemas da Coleção Professor de Matemática da SBM. Busquei sites e vídeos sobre o conteúdo, sobre o ensino do conteúdo. Também foi necessário pesquisar sobre atividades de Modelagem Matemática por não ter muita clareza sobre como seria um projeto com essa abordagem na prática e para buscar premeditar o que ocorreria em sala e estar apta para o desenvolvimento da aula. Durante essa fase de planejamento observei que o costume do ensino tradicional buscava me boicotar, vi que é difícil mudar hábitos. Porém consegui superar esse desafio, pois me vi em uma nova experiência que se revelou potencialmente rica em criatividade e abstrações tanto para os alunos como para mim.

O estudo de trigonometria no triângulo retângulo se apresentava em todas as obras para o primeiro ano do Ensino Médio, como por exemplo no livro Contextos e Aplicações de Dante, volume 1, a maioria começava com a ideia de semelhança, utilizava um problema para introduzir o assunto e desenvolver outros exercícios para exemplificar o tema. Depois apresenta semelhança de triângulos de uma forma mais técnica até destacar o triângulo retângulo e suas aplicações. Finalmente, chegamos à trigonometria no triângulo retângulo que geralmente é apresentada através do uso da História da Matemática, às vezes repletas de definições e conceitos que não abordam a utilidade desse conteúdo de forma significativa para o aluno no mundo de hoje.

Vale destacar que tenho obtido relativo interesse dos alunos nas aulas de trigonometria utilizando paródias para as tabelas, como na figura abaixo, no ritmo da tradicional música Jingle Bells.

Figura 23: Paródia

Um, dois, três	*A raiz vem depois*	*Veja como é*
Três, dois, um	*No três e no dois*	*Raiz de três sobre três*
Tudo sobre dois	*A tangente é diferente*	*Um raiz de três*

Fonte: Desconhecida

Macetes com palavras, também é muito bem aceito, por exemplo a palavra SOHCAHTOA, onde as iniciais representam as razões e a ordem das razões: Seno-Oposto-Hipotenusa-Cosseno-Adjacente-Hipotenusa-Tangente-Oposto-Adjacente, são repetidas pelos alunos, inclusive nos anos seguintes do ensino médio. Porém apesar de conceitos bons em avaliações, fico angustiada, pois percebo que a aprendizagem não ocorreu de forma significativa.

Depois dessa revisão, passei para o segundo momento da pesquisa que consistiu em elaborar a atividade a ser proposta e implementada. É relevante descrever o cenário em que foram aplicadas as atividades de Modelagem. Minha investigação se deu numa escola pública brasileira, na área urbana de uma cidade do interior do Rio de Janeiro. Apesar de pequena, a escola é bem administrada e tem um bom conceito na comunidade, com resultados significativos quando o objetivo é a busca de uma vaga nas universidades. A turma tinha 30 alunos, excepcionalmente, são alunos interessados, participativos e responsáveis, com algumas exceções. Uma das características de uma atividade de modelagem matemática é o trabalho em grupo, daí a turma foi dividida em grupos, minha única interferência foi quanto a quantidade de alunos por grupo, de 4 a 6 alunos.

Toda semana teríamos um tempo de aula (50 minutos) para desenvolver essa atividade, mas seria esperado do grupo que ao longo da semana pesquisassem sobre o assunto, desenvolvessem relatórios sobre as pesquisas feitas e formulassem perguntas para serem debatidas em sala.

Outro ponto que considerei importante foi como apresentar o trabalho para a turma. Decidi levá-los para uma caminhada no entorno do Colégio que possui uma vista privilegiada para as montanhas. Durante o passeio questionei sobre como descobrir a altura das montanhas que vimos, da torre da igreja em frente à escola e até mesmo da escola. Como poderíamos determinar? Assim aproveitei para fugir do modelo tradicional de aula em sala, com alunos enfileirados nas suas carteiras e o professor expondo questões no quadro branco. Nosso objetivo é resgatar o interesse do aluno e não conseguiremos resultados diferentes sem mudanças.

Tomadas todas as decisões de como iniciar a atividade, passei para o terceiro momento, minha primeira aula com uma abordagem de Modelagem Matemática.

Durante o passeio podíamos ver montanhas e picos. Como se eu estivesse apenas curiosa perguntei como é medida a altura de uma montanha, seria possível descobrir a altura de onde estávamos? E a altura do prédio da escola? Como poderíamos medir? Ouvi algumas sugestões e sugeri que pesquisassem essas questões para a próxima aula. A próxima fase seria receber e debater as pesquisas realizadas, e com sorte, algum grupo falaria sobre o Teodolito. A ideia central é construir o teodolito e levar os estudantes em campo para utilizar na medida de situações complexas. Mas devemos aproveitar bastante as pesquisas realizadas pelos grupos, experimentar as soluções encontradas é um momento que enriquece a aprendizagem.

A próxima aula foi dedicada a apresentar os teodolitos construídos, nessa minha experiência, percebi que a maioria dos grupos montou, porém não sabia utilizar o instrumento, então reserve um momento para isso, muitas perguntas irão surgir. Para finalizar, a turma voltou para a rua com teodolitos, pranchetas, canetas, tabelas trigonométricas e calculadoras para descobrir as medidas de prédios, árvores, largura de rios e picos da cidade.

Figura 24: Usando o teodolito em campo

Fonte: Autora

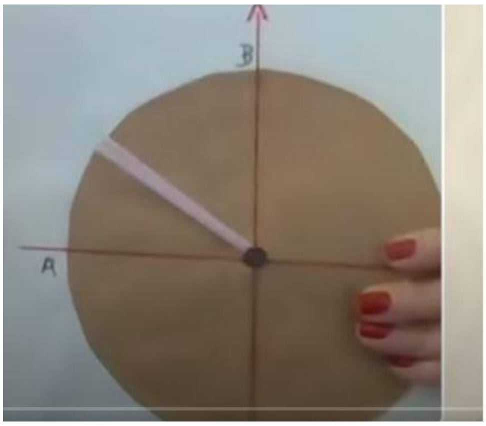
Eles deveriam fazer três atividades: a primeira era medir a altura de uma árvore, conhecendo a distância entre um aluno e uma árvore. A segunda era medir a largura de um rio num determinado ponto da margem, e a terceira foi responder nossa pergunta, qual é a altura da montanha? Levamos uma tarde inteira num parque da cidade, alguns momentos foram mais intensos, outros mais leves, mas não podemos negar que a atividade ocorreu com muito interesse e protagonismo do aluno, eles esboçaram as situações, alguns grupos conseguiram calcular as medidas, eles estavam radiantes, cansados e vivenciando a Matemática viva ao redor deles. Como professora, foi um dos dias mais cansativos e mais empolgantes de toda minha carreira. Você pode ler mais detalhes na minha monografia O Uso da modelagem matemática no ensino de trigonometria, realizada em 2017, através do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ).

3.2 **Uma proposta utilizando metodologia ativa**

Muito se fala sobre as metodologias ativas**,** que tem como objetivo colocar o aluno no centro de processo de aprendizagem com atividades problematizadoras de forma a fazê-los desenvolver o pensamento matemático e assim, com ajuda de material manipulativo ou não, digital ou não, levá-los a se apropriar dos novos conceitos.

A professora Luciana Tenura, mestre em Matemática e especialista em BNCC, divide suas experiências em sala de aula, no curso Trigonometria por meio de metodologias ativas, disponível nas redes sociais. Ela sugere atividades problematizadoras, boas perguntas que devem ser discutidas em pares ou grupos pelos alunos, com a ajuda de um material manipulativo que deve ser construído pelos próprios. Um círculo trigonométrico feito com papelão, tachinha e canudos que vai auxiliar na aprendizagem de conceitos iniciais como raio unitário, radiano, quadrantes conforme figura abaixo, permitindo que eles se apropriem desses conceitos e estejam prontos para desenvolver as habilidades sugeridas no BNCC.

Figura 25: Atividade



Fonte: Youtube

Um exemplo de atividade seria desenvolver a ideia de radiano com a ajuda do círculo trigonométrico construído e barbantes. Relembrando o conceito de comprimento de um círculo, poderíamos leva-los a pensar de forma matemática e entender porque o círculo mede 2π radianos. Ou seja, eles vivenciam a ideia do que é uma circunferência trigonométrica com um material concreto, além de ser possível utilizar esse material para explicar a ideia de seno cosseno e tangente.

Com atividades problematizadoras, ela sugere que em grupo, eles discutam e pense matemática e assim se apropriem dos seus conceitos.

3.3 **Considerações Metodológicas e Proposta de Intervenção**

Após um extenso levantamento bibliográfico, um aprofundado diálogo com a prática docente, a análise da realidade do ambiente escolar em que se insere esta pesquisa e a exploração de novas ferramentas tecnológicas, como a Inteligência Artificial (IA), a presente dissertação culmina na elaboração de uma proposta de intervenção pedagógica. Este planejamento didático, que visa ao ensino de Trigonometria no primeiro ano do Ensino Médio, integra abordagens lúdicas, investigativas e tecnológicas, buscando atender às lacunas de aprendizagem e promover uma compreensão sólida e contextualizada do tema.

O planejamento, detalhado nos apêndices deste trabalho juntamente com as listas de exercícios correspondentes, está estruturado em uma sequência de oito aulas. A sua concepção foi pautada na necessidade de um percurso formativo que revisitasse conceitos básicos e progressivamente introduzisse noções mais complexas, com especial atenção aos estudantes com defasagens em Matemática.

A sequência didática se desdobra da seguinte forma:

1. Revisão e Experimentação (Aula 1): O primeiro encontro tem como foco a Trigonometria no triângulo retângulo. Por meio de uma atividade prática, os alunos utilizarão triângulos manipuláveis para medir lados e ângulos, calculando as razões trigonométricas e comparando seus resultados com uma tabela trigonométrica, estimulando a percepção das relações proporcionais.
2. Investigação com IA (Aula 2): A segunda aula propõe uma abordagem investigativa com o uso de Inteligência Artificial. Os alunos, em duplas, serão desafiados a explorar

e definir o que é trigonometria, suas origens e suas aplicações, posicionando a IA como uma ferramenta auxiliar na pesquisa e na interpretação de conceitos.

3. Construção do Círculo Trigonométrico (Aula 3): Esta aula é dedicada à construção de um material manipulativo central para a proposta: o círculo trigonométrico de papelão e canudo. Este artefato, inspirado em abordagens lúdicas, servirá como modelo físico e recurso didático para as aulas subsequentes.
4. Aprofundamento com Radianos e IA (Aula 4): Complementando a exploração anterior, esta aula utiliza a IA para investigar e definir o conceito de radiano. Os estudantes utilizarão o círculo interativo construído para visualizar e compreender esta unidade de medida, com o professor atuando como mediador do processo investigativo.
5. Fixação e Prática (Aula 5): Neste momento, o foco é na consolidação dos conceitos já abordados. Os alunos realizarão exercícios extraídos de livros didáticos e avaliações externas, permitindo a prática e a aplicação dos conhecimentos adquiridos.
6. Introdução às Razões na Circunferência (Aula 6): Com o auxílio do círculo trigonométrico interativo, os alunos serão guiados a explorar as razões trigonométricas na circunferência completa, identificando as relações e as variações de sinal nos quadrantes.
7. Transição para Funções (Aulas 7 e 8): O último bloco do planejamento, composto por duas aulas, objetiva a transição da trigonometria no triângulo retângulo para a trigonometria na circunferência. Utilizando papel quadriculado e o círculo interativo, os alunos construirão os gráficos das funções seno e cosseno, compreendendo suas características fundamentais (domínio, imagem e período).

A avaliação desta proposta se dará de forma contínua e formativa, com instrumentos somativos explicitados nos planos de aula anexados. Espera-se que a implementação deste planejamento gere dados e reflexões que possam aprofundar a presente pesquisa em trabalhos futuros, contribuindo para o campo da didática da Matemática com o uso de novas tecnologias.

CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo investigar as dificuldades que os professores encontram ao ensinar Trigonometria para os alunos do Ensino Médio. Reunindo um questionário proposto aos discentes, uma experiência com uma turma de uma escola de nível médio da zona norte da cidade do Rio de Janeiro, relatórios de avaliação dos alunos da rede de ensino municipal da mesma cidade e relatos de experiências vividas com meus próprios alunos, podemos concluir que existe uma base forte que sustenta os desafios apresentados.

Os resultados indicam que a defasagem de aprendizagem dos alunos, a falta de tempo para abordar o conteúdo de forma profunda e o grande número de alunos por turma seriam os maiores desafios encontrados. Outro desafio seria o desinteresse e falta de motivação dos alunos com a própria aprendizagem, o que constitui um problema não só para a Trigonometria como para todo o conteúdo da disciplina.

Esses achados dialogam com Masola e Allevato (2016), eles acrescentam que estudantes ingressantes no nível superior apresentam dificuldades e há falta de conhecimento acerca de conteúdos matemáticos próprios da formação escolar em níveis fundamental e médio. Além disso, Lira, Silva e Silva Neto também corroboram com essas ideias.

> "As principais dificuldades de aprendizado matemático dos alunos surgem a partir de conteúdos elementares. Estes são necessários para a construção de conceitos matemáticos mais complexos, imprescindíveis ao desenvolvimento do intelecto humano."

Algumas estratégias foram apresentadas para superar as dificuldades de ensino, baseadas no uso da tecnologia, na metodologia ativa e abordagens utilizando modelagem matemática temos atividades que podem gerar o interesse e motivação nos alunos para a aprendizagem de novos conhecimentos.

Futuros estudos poderiam explorar a necessidade de uma reavaliação dos conteúdos tratados em sala e o tempo disponível para o ensino e aprendizagem das habilidades Matemáticas.

Assim, espera-se que esta dissertação contribua para o avanço das discussões sobre os desafios de ensinar Trigonometria e inspire novos olhares para solucionar esse problema.

REFERÊNCIAS

[1] MACHADO, A. A.V. *O uso da modelagem matemática no ensino da Trigonometria.* Rio de Janeiro: CEFET, 2018.

[2] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio*. v. 1, 10 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[3] DANTE, L. R. *Contexto e aplicações*, v. 1 e 2. 2 ed. São Paulo: Ática, 2013.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 03.11.2024.

[5] BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 1996.

[6] VIANA, M. *Tales de Mileto e as origens da trigonometria*. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

[7] FERREIRA, A. L. S. *Trigonometria e funções trigonométricas, uma abordagem didática metodológica*. Macapá: PROFMAT, 2016.

[8] MARTINS, M. R. *Educação e tecnologia: a crise da inteligência*. Educação, núm. 44, pp.1-22. Brasil: Universidade Federal de Santa Maria, 2019.

[9] LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem: componente do ato pedagógico*. São Paulo: Cortez, 2011.

[10] AMORIM, A. C. *Utilização de teodolitos manuais na educação básica* [dissertação]. Juazeiro do Norte: Universidade Regional do Cariri; CE. 2021. 120f.

[11] PINHEIRO, E. S. *Uma sequência didática para o ensino da Trigonometria no Ensino Médio* [dissertação]. São Luís: Universidade Federal do Maranhão; 2021. 58p.

[12] VIANA, M. *Tales de Mileto e as origens da trigonometria*, 2019. Disponível em: **https://impa.br/noticias/tales-de-mileto-e-as-origens-da-trigonometria/** Acesso em 14/10/2024.

[13] FREITAS, L. M. T. *Trigonometria - uma abordagem prática*. Belo Horizonte: Dois Pontos, v. 4, p. 57-58, 1998.

[14] FREITAS, L. M. T. *Trigonometria por meio de metodologias ativas*, 2025. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=GBfPt-IG0oc. Acesso em 06/03/2025

[15] RODRIGUES, G. G. *Trigonometria e tecnologias digitais: uma pesquisa nos arquivos científicos publicados no XIII ENEM*, 2022. 36 f.

[16] LIRA, J. V. D.; SILVA, M. V. R.; SILVA NETO, J. F. *Dificuldades de aprendizagem matemática: o que dizem as pesquisas recentes.* Educação Matemática em Revista, RS, Ano 25, 2024, número 25. v.1. p.54.

[17] PTOLOMEU. *Almagest* (Vol. I). Biblioteca da Faculdade de Ciências Astronômicas da Universidade Nacional de La Plata. 1813.

[18] PEREIRA, A. C. C.; MOREY, B. B. Um ensaio sobre a história da trigonometria antes do século XV, Conex. Ci. e Tecnol. Fortaleza/CE, v. 9, n. 4, p. 143 - 152, dez. 2015.

[19] MASOLA, Wilson de Jesus; ALLEVATO, Norma*. Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na educação superior.* Revista Brasileira de Ensino Superior, v. 2, n. 1, p. 64-74, jun./mar. 2016.

[20] WEBER, K*. Studentes'Understanding of Trigonometric Functions*. Mathematics Education Researvh Journal. Ano 2005, v.17, n.3, p.91-112.

[21] IEZZI, G. DOLCE, O. DEGENSZAJN, D. PÉRIGO, R. ALMEIDA, N. *Matemática: ciência e aplicação, 2: ensino médio.* 5. Ed. São Paulo: Atual, 2010.

[22] EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 1995, p. 95.

[23] GEOGEBRA, Marcus Hohenwarter. Ano 2025. GeoGebra 5.0.216.0. https://www.geogebra.org. Acesso em 20/08/2024.

[24] RIO DE JANEIRO, Secretaria Municipal de Educação. Material Rioeduca 2024. Rio de Janeiro, RJ. ZIT Gráfica e editora, 2024.

[25] Orientações de estudos de Matemática. SEEDUC, RJ. 2024.

APÊNDICE A – Questionário para os professores

Prezado(a) professor(a),
Este questionário tem como objetivo coletar informações sobre os desafios que você enfrenta ao ensinar trigonometria no Ensino Médio. Suas respostas são muito importantes para a pesquisa de mestrado do PROFMAT e contribuirão para uma melhor compreensão das dificuldades e para o desenvolvimento de estratégias mais eficazes de ensino.
Agradecemos sua colaboração e garantimos o anonimato das suas respostas.

Informações profissionais

Idade:

- **A.** Menos de 20
- **B.** De 20 a 30 anos
- **C.** De 30 a 40 anos
- **D.** De 40 a 50 anos
- **E.** Acima de 50 anos

Formação acadêmica (Marque a opção mais alta concluída)

- A. Licenciatura em Matemática
- B. Bacharelado em Matemática
- C. Especialização em Ensino de Matemática
- D. Mestrado em Matemática
- E. Mestrado em Ensino de Matemática (PROFMAT ou outros)
- F. Doutorado em Matemática
- G. Doutorado em Ensino de Matemática
- H. Outra. Qual? ___________________________

Tempo de experiência como Professor de Matemática no Ensino Médio.

- A. Menos de 1 ano
- B. De 1 a 3 anos
- C. De 3 a 5 anos
- D. De 5 a 10 anos
- E. De 10 a 15 anos
- F. Mais de 15 anos

Em qual tipo de escola você leciona atualmente no Ensino Médio?

- A. Escola Pública Estadual
- B. Escola Pública Municipal
- C. Escola Pública Federal
- D. Escola Particular
- E. Outras

Em quais etapas do Ensino Médio você costuma lecionar trigonometria?

- A. 1º ano
- B. 2º ano
- C. 3º ano
- D. Não costumo lecionar trigonometria

Na(s) escola(s) em que leciona trigonometria, qual é a carga horária dedicada a essa disciplina aproximadamente?

A. Não leciono trigonometria
B. Até 2 horas/aula
C. De 2 a 6 horas/aula
D. De 6 a 10 horas/aula
E. De 10 a 14 horas/aula
F. Mais de 14 horas/aula

Desafios relacionados aos alunos
Em sua experiência, escolha três principais dificuldades que os alunos demonstram ao aprender trigonometria?

A. Dificuldade em compreender os conceitos básicos (ângulos, seno, cosseno, tangente, etc.)
B. Dificuldade em visualizar o ciclo trigonométrico e suas aplicações.
C. Dificuldade em relacionar a trigonometria com a geometria do triângulo retângulo.
D. Dificuldade em aplicar as fórmulas e identidades trigonométricas
E. Dificuldade em resolver problemas contextualizados envolvendo trigonometria
F. Falta de pré-requisitos de matemática básica (álgebra, geometria)
G. Desinteresse e falta de motivação dos alunos
H. Dificuldade em abstrair os conceitos trigonométricos
I. Dificuldade em interpretar gráficos de funções trigonométricas
J. Outras dificuldades

Em uma escala de 1 (muito baixa) a 5 (muito alta), como você avalia o nível de interesse dos seus alunos em relação ao estudo da trigonometria?

1	2	3	4	5

Quais estratégias você utiliza para tentar engajar os alunos no aprendizado de trigonometria?

____

____

____

Desafios relacionados ao Ensino e aos Recursos
Quais são os principais desafios que você, como professor(a), enfrenta ao ensinar trigonometria, escolha no máximo três?

A. Falta de tempo para abordar o conteúdo de forma profunda
B. Grande número de alunos por turma
C. Falta de recursos didáticos adequados (materiais manipulativos, softwares, etc.
D. Dificuldades em encontrar atividades e exemplos contextualizados para o Rio de Janeiro
E. Necessidade de lidar com a defasagem de aprendizagem dos alunos
F. Dificuldade em avaliar a compreensão dos alunos sobre os conceitos trigonométricos
G. Falta de formação continuada específica sobre o ensino de trigonometria
H. Pressão para cumprir o conteúdo para o Enem e outros vestibulares
I. Dificuldade em integrar a tecnologia no ensino da trigonometria
J. Outros desafios

____

Quais recursos didáticos você utiliza com mais frequência no ensino da trigonometria?

A. Livro didático
B. Listas de exercícios

C. Materiais manipulativos (ex: transferidor, compasso)
D. Softwares de geometria dinâmica (ex: Geogebra)
E. Vídeos e animações online
F. Projetos e atividades práticas
G. Jogos educativos
H. Outros

Na sua opinião, quais recursos ou apoios adicionais seriam mais úteis para melhorar o ensino da trigonometria no Ensino Médio?

____
____
____
____
____
____

Abordagens e Metodologias

Nesta seção você poderá detalhar um pouco mais o trabalho que você produz em sala de aula. Caso não tenha interesse de responder, terminamos aqui e agradecemos a sua participação!

Como você costuma iniciar o ensino da trigonometria no Ensino Médio?

____
____
____
____
____

Quais abordagens metodológicas você considera mais eficazes para o ensino da trigonometria?

____
____
____
____

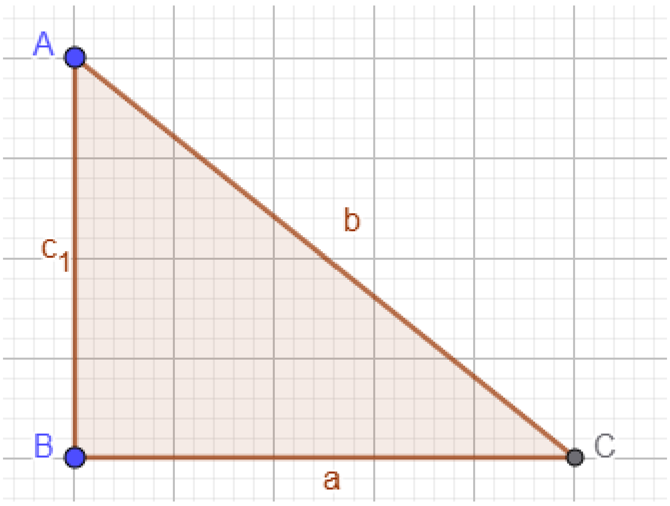
Você utiliza alguma estratégia específica para conectar a trigonometria com outras áreas da matemática ou com outras disciplinas? Se sim, qual(quais)?

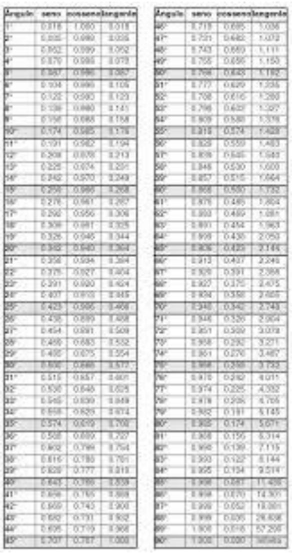
____
____
____
____
____

Obrigada!

APÊNDICE B – Roteiro de Aulas

Aula 1 – Folha A
Revendo a Trigonometria no triângulo retângulo Trabalho em duplas Roteiro: 1) Meça os lados dos triângulos. 2) Meça os ângulos do triângulo. 3) Divida a medida do lado a pela medida do lado b e anote. 4) Divida a medida do lado c pela medida do lado b e anote. 5) Divida a medida do lado a pela medida do lado c e anote. 6) Consulte a tabela Trigonométrica e anote o seno, o cosseno e a tangente da medida do ângulo C. 7) Compare os resultados dos itens 3, 4 e 5 com os resultados do item 6.





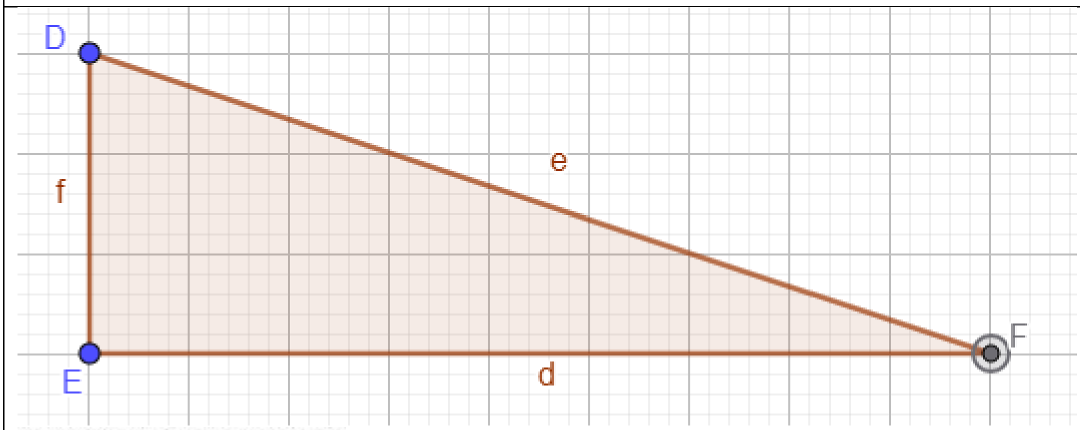
Aula 1 – Folha 2

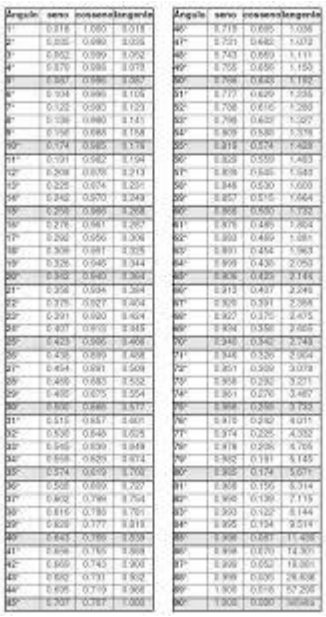
Revendo a Trigonometria no triângulo retângulo

Trabalho em duplas

Roteiro:

1) Meça os lados dos triângulos.
2) Meça os ângulos do triângulo.
3) Divida a medida do lado d pela medida do lado e e anote.
4) Divida a medida do lado f pela medida do lado e e anote.
5) Divida a medida do lado f pela medida do lado d e anote.
6) Consulte a tabela Trigonométrica e anote o seno, o cosseno e a tangente da medida do ângulo C.
7) Compare os resultados dos itens 3, 4 e 5 com os resultados do item 6.





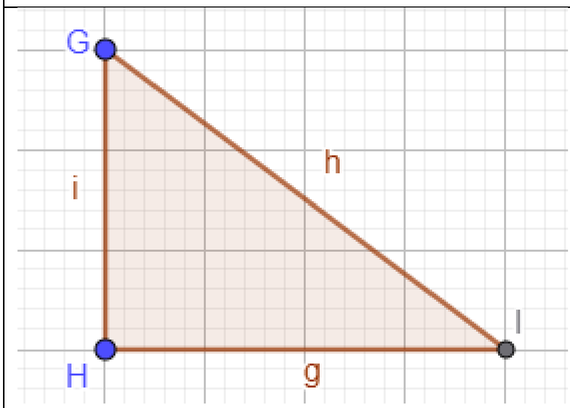
Aula 1 – Folha 3

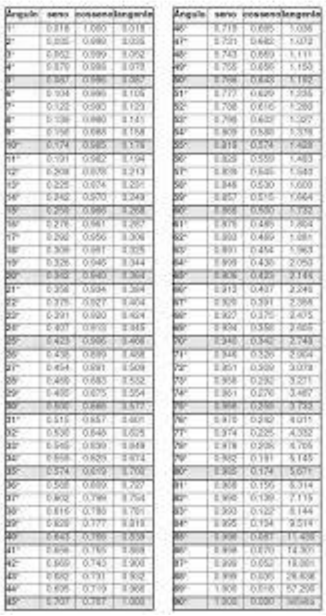
Revendo a Trigonometria no triângulo retângulo

Trabalho em duplas

Roteiro:

1) Meça os lados dos triângulos.
2) Meça os ângulos do triângulo.
3) Divida a medida do lado g pela medida do lado h e anote.
4) Divida a medida do lado i pela medida do lado h e anote.
5) Divida a medida do lado i pela medida do lado g e anote.
6) Consulte a tabela Trigonométrica e anote o seno, o cosseno e a tangente da medida do ângulo C.
7) Compare os resultados dos itens 3, 4 e 5 com os resultados do item 6.



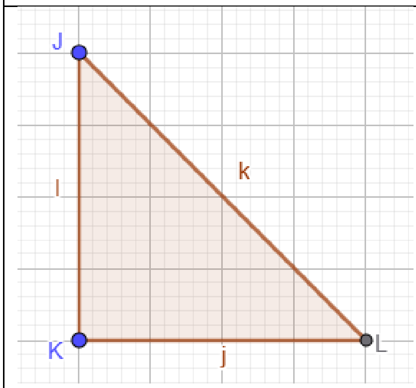


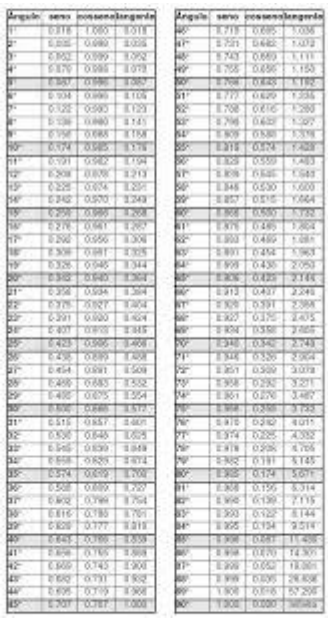
Aula 1 – Folha 4

Revendo a Trigonometria no triângulo retângulo
Trabalho em duplas

Roteiro:

1) Meça os lados dos triângulos.
2) Meça os ângulos do triângulo.
3) Divida a medida do lado j pela medida do lado k e anote.
4) Divida a medida do lado l pela medida do lado k e anote.
5) Divida a medida do lado l pela medida do lado j e anote.
6) Consulte a tabela Trigonométrica e anote o seno, o cosseno e a tangente da medida do ângulo C.
7) Compare os resultados dos itens 3, 4 e 5 com os resultados do item 6.





Aula 2
Aprendendo com IA Pergunte a qualquer inteligência artificial: Sou aluno(a) do primeiro ano do ensino médio de uma escola pública do Rio de Janeiro e quero aprender sobre Trigonometria, pode me ensinar? Anote a resposta:

Aula 3

Vamos criar um círculo trigonométrico usando materiais simples. Siga estas instruções passo a passo para montar o seu.

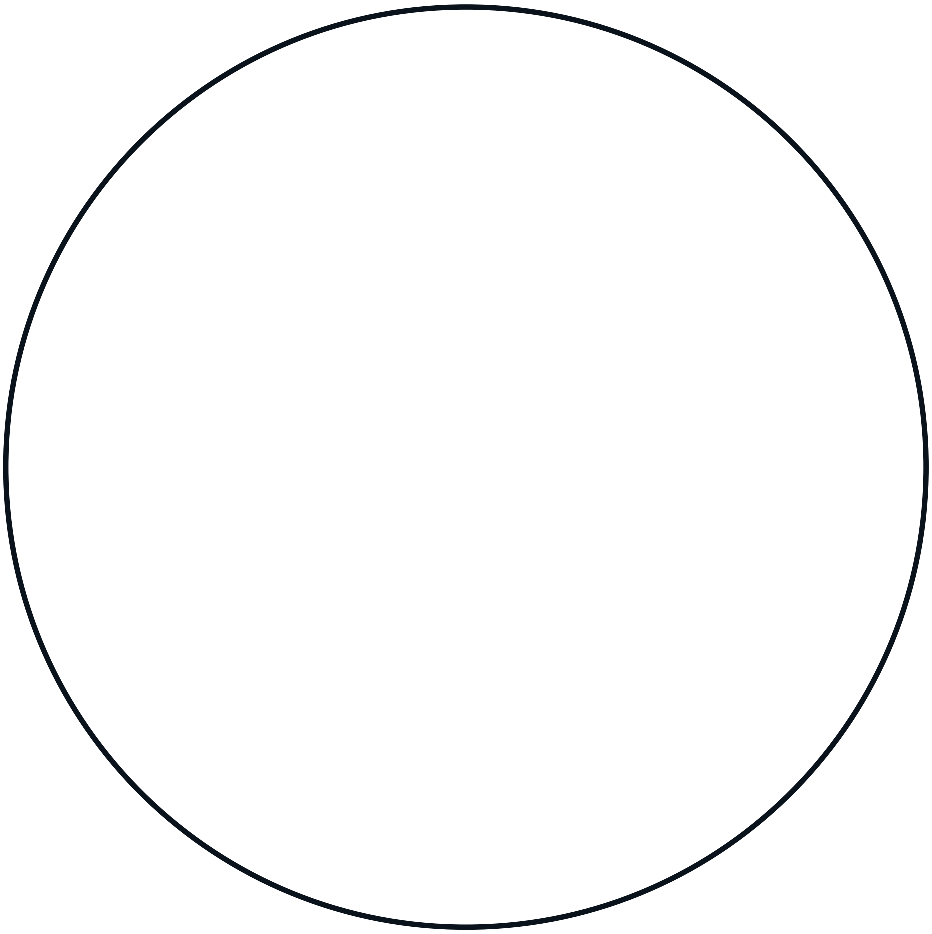
Materiais Necessários

Papel cartão, cartolina ou papelão; Tesoura; Lápis; Tachinha; Canudo; Transferidor; Molde de círculo.

Instruções de Montagem

1. **Prepare o molde:** Pegue seu molde de círculo e dobre-o duas vezes ao meio. Isso criará quatro divisões iguais e marcará o centro.
2. **Corte o círculo base:** Use o molde para desenhar um círculo no papelão. Com a tesoura, recorte o círculo cuidadosamente.
3. **Marque o círculo:** Com o molde dobrado, marque o centro do círculo de papelão e, depois, use as dobras do molde para traçar as linhas de divisão no papelão. Essas linhas serão os eixos X e Y do seu círculo trigonométrico.
4. **Fixe o canudo:** Pegue uma das pontas do canudo e use a tachinha para prendê-la no centro do círculo de papelão. Certifique-se de que o canudo possa girar livremente.
5. **Ajuste o tamanho do canudo:** Corte o canudo de forma que ele não ultrapasse a borda do círculo. Ele deve funcionar como o raio do seu círculo.
6.

Com o seu círculo pronto, você pode começar a explorar os ângulos e as relações trigonométricas de forma visual e prática. Que tal marcarmos alguns ângulos notáveis no seu círculo, como 30°, 45° e 60°?



Aula 4

O Radiano

Utilizando qualquer inteligência artificial pergunte:
O que é radiano?
Anote a resposta.

Vamos usar o círculo que você construiu na aula passada para visualizar o conceito de radiano de uma forma bem prática. Você só vai precisar de um pedaço de barbante.

Passo a Passo

1. **Meça o raio:** Pegue o barbante e corte-o com o mesmo comprimento do raio do seu círculo de papelão.
2. **Comece a medir:** Fixe uma das pontas do barbante no ponto em que o eixo horizontal (eixo x) encontra a borda do círculo, no lado direito. Este ponto representa 0° e 0 radianos.
3. **Contorne a borda:** Use o barbante para "abraçar" a circunferência, seguindo a borda do círculo no sentido anti-horário.
4. **Marque 1 radiano:** O ponto onde a outra ponta do barbante terminar de contornar o círculo marca exatamente o ângulo de **1 radiano**.

Ao fazer isso, você consegue ver, de forma física e concreta, o que significa um radiano: é o ângulo que "cabe" em um arco de circunferência com o mesmo comprimento que o raio.
Que tal repetirmos o processo para ver quantos radianos cabem em um círculo completo?

Aula 5

Lista de exercícios

1) Converta os seguintes ângulos de graus para radianos:

a) 180∘

b) 60∘

c) 270

2) Converta os seguintes ângulos de radianos para graus:

a) $\frac{\pi}{2} rad$

b) $\frac{3\pi}{4} rad$

c) 5π rad

3) Identifique o quadrante em que se encontra cada ângulo a seguir:

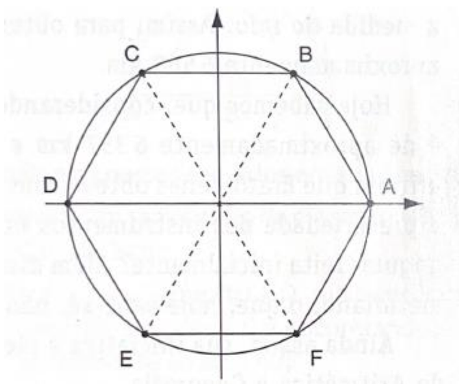
a) 135∘

b) 300∘

c) $\frac{5\pi}{6}\ rad$

4) Encontre a primeira determinação positiva e o quadrante do ângulo de 750°.

5) Na figura, o hexágono regular ABCDEF está inscrito na circunferência trigonométrica. O vértice A é imagem do número real zero.



Determine a quais números reais pertencentes ao intervalo [0,2π [correspondem os demais vértices.

APÊNDICE C – Planos de aula

Plano de Aula 1: Revisão de Trigonometria no Triângulo Retângulo

Duração: 1 aula (50 minutos)

Objetivos

- **Revisar** os conceitos fundamentais de trigonometria no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente).
- **Aprofundar** a compreensão das relações trigonométricas.
- **Aplicar** os conceitos na resolução de problemas práticos e teóricos.
- **Desenvolver** a habilidade de identificar e usar as razões trigonométricas em diferentes contextos.

Materiais

- Quadro branco e pincéis/canetas.
- Folhas de exercícios com problemas variados.
- Régua e transferidor.
- Calculadora.

Aula: Conceitos e Fundamentos (50 minutos)

1. Introdução (20 minutos)

- Inicie a aula com uma breve conversa sobre o que os alunos se lembram da trigonometria. Separe os alunos em duplas, entregue o roteiro e peça para que desenvolvam a tarefa.
- Proponha que os alunos apresentem suas respostas e comparem situações comuns que ocorram entre as duplas.
- **2. Revisão Teórica (20 minutos)**
- Desenhe um **triângulo retângulo** no quadro e nomeie seus lados: **hipotenusa**, **cateto oposto** e **cateto adjacente** em relação a um ângulo agudo (α).
- Explique e escreva no quadro as definições das razões trigonométricas:
    - **Seno** ($\sin\alpha$) = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$
    - **Cosseno** ($\cos\alpha$) = $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$
    - **Tangente** ($\tan\alpha$) = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$
- Enfatize a importância da posição do ângulo para determinar qual cateto é o oposto e qual é o adjacente.

3. Atividade Dirigida (10 minutos)

- Resolva alguns exercícios simples no quadro, pedindo a participação dos alunos.
    - **Exemplo 1:** Dado um triângulo retângulo com hipotenusa = 5 e cateto adjacente = 4, calcule o seno, cosseno e tangente do ângulo α. (Lembre-os de usar o Teorema de Pitágoras para encontrar o cateto que falta).
    - **Exemplo 2:** Dado um ângulo e um lado, peça para eles montarem a equação para encontrar o lado desconhecido. Por exemplo: "Um triângulo retângulo tem um ângulo de 30∘ e a hipotenusa de 10 cm. Qual a medida do cateto oposto?"

Avaliação

- **Formativa:** Observação da participação dos alunos durante as aulas e nas atividades.
- **Somativa:** Correção dos exercícios da lista e avaliação da compreensão dos conceitos durante a atividade prática.

Observações

- Durante as atividades, estimule a colaboração e a troca de ideias entre os alunos.
- Enfatize que a trigonometria é uma ferramenta poderosa para resolver problemas do mundo real.
- Para alunos com mais dificuldade, ofereça exemplos adicionais e simplifique os problemas. Para os mais avançados, proponha desafios extras ou problemas mais complexos.

Plano de Aula 2: Investigando a Trigonometria com Inteligência Artificial

Duração: 1 aula (50 minutos)

Objetivos

- **Explorar** e **definir** o que é trigonometria, suas origens e suas aplicações.
- **Compreender** as razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) de forma intuitiva.
- **Utilizar** uma ferramenta de Inteligência Artificial como assistente de pesquisa e aprendizado.
- **Desenvolver** habilidades de pesquisa, formulação de perguntas e interpretação de respostas.

Materiais

- Computadores ou smartphones com acesso à internet para cada aluno ou em duplas.
- Projetor para o professor.
- Folha do Roteiro.
- Acesso a uma ferramenta de IA generativa (como ChatGPT, Gemini, etc.).

Etapa 1: Introdução e Desafio (10 minutos)

1. **Questionamento Inicial:** Comece a aula perguntando aos alunos se eles sabem o que significa a palavra "trigonometria". Anote no quadro as ideias que surgirem. Explique que o nome vem do grego, "trigonon" (triângulo) e "metron" (medida), ou seja, a "medida dos triângulos".
2. **Lançamento do Desafio:** Diga à turma que hoje eles serão pesquisadores. O desafio é usar uma inteligência artificial para responder à pergunta: "O que é trigonometria?". O objetivo não é apenas copiar a resposta, mas **entender** o que a IA está dizendo.

Etapa 2: Investigação com a IA (25 minutos)

1. **Formulando as Perguntas (5 min):** Divida os alunos em duplas. Peça que eles pensem em perguntas que possam fazer para a IA, além da principal. Sugira que quebrem o tema em partes.
    - **Sugestões de perguntas para a IA:**
        - "Onde a trigonometria surgiu?"
        - "Para que serve a trigonometria no dia a dia?"
        - "Qual a diferença entre seno, cosseno e tangente?"
        - "Me dê um exemplo de um problema simples resolvido com trigonometria."

    - "Me explique como um triângulo retângulo se encaixa na trigonometria."

2. **Explorando com a Ferramenta (15 min):**
    - Oriente as duplas a inserirem suas perguntas na ferramenta de IA.
    - Incentive-os a pedir para a IA **simplificar** as explicações se parecerem muito complexas. Por exemplo, "Explique o que é seno de uma forma mais fácil."
    - Peça para eles lerem e discutirem as respostas entre si, procurando por palavras-chave e conceitos.
3. **Registro de Descobertas (5 min):**
    - Enquanto investigam, peça para que registrem no caderno as principais descobertas, como:
        - Onde a trigonometria é usada (engenharia, navegação, jogos de videogame, etc.).
        - A definição de seno, cosseno e tangente em relação a um triângulo retângulo.
        - O fato de que a trigonometria estuda a relação entre os ângulos e os lados dos triângulos.

Etapa 3: Compartilhando e Concluindo (15 minutos)

1. **Discussão em Grupo:** Peça a cada dupla para compartilhar com a turma uma descoberta que consideraram interessante. O professor atuará como mediador, organizando as informações no quadro.
2. **Síntese dos Conceitos:** Com base nas descobertas dos alunos, ajude-os a construir uma definição coletiva de trigonometria. Revise as definições de **seno** (sin), **cosseno** (cos) e **tangente** (tan) em um triângulo retângulo, desenhando um no quadro e identificando os lados (cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa).
3. **Reflexão Final:** Encerre a aula com uma reflexão sobre como a IA pode ser uma ferramenta de apoio no aprendizado, mas que a **interpretação e o raciocínio humano** são essenciais para o verdadeiro entendimento.

Avaliação

- **Formativa:** A avaliação será contínua, observando o engajamento dos alunos na pesquisa, a qualidade das perguntas formuladas para a IA e a capacidade de compartilhar e sintetizar as informações encontradas.

Plano de Aula 3: Construindo o Círculo Trigonométrico

Duração: 1 aula (50 minutos)

Objetivos

- **Compreender** o que é o círculo trigonométrico e qual a sua importância.
- **Visualizar** a relação entre os ângulos e as coordenadas dos pontos na circunferência.
- **Construir** um modelo físico e interativo do círculo trigonométrico.
- **Associar** os valores de seno e cosseno aos eixos x e y.

Materiais

- **Para o professor:**
  - Um círculo trigonométrico já pronto para demonstração.
- **Para cada aluno ou dupla:**
  - **Papelão:** Um quadrado de aproximadamente 30x30 cm.
  - **Canudo:** Um canudo de plástico flexível.
  - **Tachinha:** Uma tachinha ou percevejo de metal.
  - **Régua** e **lápis**.
  - **Transferidor**.
  - **Tesoura**
  - **Molde de um círculo**
  - **Roteiro**

Etapa 1: Apresentação Teórica e Preparação (25 minutos)

1. **Introdução ao Círculo (5 min):** Inicie a aula perguntando o que os alunos se lembram sobre a circunferência e as funções trigonométricas (seno e cosseno). Apresente o conceito do círculo trigonométrico como uma ferramenta para visualizar a variação dos valores de seno e cosseno para qualquer ângulo. Explique que ele é um círculo de raio 1 centrado na origem de um plano cartesiano**.**
2. **Preparando o Material (30 min):** Pedir para seguirem as orientações do roteiro para a construção do círculo.

Etapa 3: Fixação e Discussão (15 minutos)

1. **Valores Notáveis (10 min):**
   - Oriente os alunos a girar o canudo para os ângulos notáveis que marcaram (30∘,45∘,60∘,90∘).
2. **Conclusão (5 min):**
   - Encerre a aula pedindo que cada um resuma o que aprendeu.
   - Reforce a ideia de que o círculo trigonométrico não é apenas um desenho, mas uma ferramenta visual poderosa que ajuda a entender a periodicidade e a variação das funções trigonométricas.
   - O modelo construído por eles servirá como um recurso de estudo para aulas futuras.

Avaliação

3. **Formativa:** Observação da participação e do engajamento dos alunos durante a construção e a manipulação do modelo. A capacidade de responder às perguntas sobre a variação dos valores de seno e cosseno demonstra a compreensão do conceito.

Plano de Aula 4: O que é Radiano? (Com o auxílio de uma Inteligência Artificial)
Duração: 1 aula (50 minutos)

Objetivos

- **Compreender** o conceito de radiano como uma unidade de medida de ângulos.
- **Relacionar** a medida em radianos com a medida em graus.
- **Entender** por que o radiano é uma unidade de medida "natural" para a matemática e física.
- **Utilizar** uma Inteligência Artificial (IA) como ferramenta de aprendizado e exploração.

Materiais

- Computadores ou smartphones com acesso à internet para cada dupla.
- Círculo trigonométrico interativo construído em sala
- Acesso a uma ferramenta de IA generativa (como ChatGPT, Gemini ou similar).
- Giz ou caneta para quadro branco.

Etapa 1: Introdução e Atividade Prática (5 minutos)

1. **Questionamento Inicial (5 min):** Comece a aula perguntando aos alunos se eles sabem o que é um radiano. Peça que levantem hipóteses.

Etapa 2: Interação com a IA (20 minutos)

1. **Formulando a Pergunta (5 min):** Peça aos alunos que se juntem em duplas, comecem com a pergunta do roteiro. O desafio deles é usar a IA para "descobrir" mais sobre o radiano. Juntos, pensem em perguntas que a IA pode responder. Incentive-os a serem criativos.
   - **Sugestões de perguntas:**
     - "Explique o que é 1 radiano de forma simples."
     - "Qual a relação entre radianos e graus?"
     - "Por que usamos radianos em vez de graus em algumas fórmulas de física?"

        - "Dê exemplos de problemas que usam radianos."

2. **Explorando com a IA (15 min):**
    - Peça às duplas para inserirem suas perguntas na ferramenta de IA e analisarem as respostas.
    - Oriente-os a não apenas copiar, mas a **ler e interpretar**. Se a resposta for confusa, incentive-os a pedir para a IA "simplificar" a explicação. Por exemplo: "Explique a resposta anterior como se eu tivesse 10 anos."
3. **Compartilhando Descobertas (10 min):**
    - Peça a cada dupla para compartilhar com a turma uma descoberta interessante que fizeram com a IA.
    - Anote no quadro as principais conclusões:
        - 1 radiano é o ângulo em que o arco da circunferência tem o mesmo comprimento do raio.
        - Uma volta completa na circunferência (360∘) equivale a 2π radianos.
        - A partir disso, relacione 360∘=2π rad e 180∘=π rad.

Etapa 3: Fixação e Conversão (15 minutos)

1. **Praticando a Conversão (10 min):**
    - Com a fórmula de conversão $\frac{Graus}{180º} = \frac{Radianos}{\pi}$, resolva alguns exercícios no quadro com a participação dos alunos.
    - **Exemplos:**
        - Converter 90∘ para radianos.
        - Converter 2π rad para graus.
        - Converter 30∘ para radianos.
        - Converter 43π rad para graus.
2. **Discussão Final e Reflexão (5 min):**
    - Feche a aula retomando o papel da IA no processo. Pergunte: "Como a IA ajudou vocês a entender o conceito de radiano de uma forma diferente?".
    - Ressalte que a IA é uma ferramenta poderosa para a exploração e aprofundamento, mas que a compreensão e o raciocínio crítico ainda são essenciais.

Avaliação

- **Formativa:** Observação da participação na atividade prática, na interação com a IA e na resolução dos exercícios. A capacidade de formular boas perguntas para a IA e de interpretar as respostas demonstra a compreensão do tema.

Plano de Aula 5: Arcos, Ângulos e Simetrias no Círculo Trigonométrico

Duração: 1 aula (50 minutos)

Objetivos

- **Revisar** e **aprofundar** o conceito de ângulos e arcos de circunferência.
- **Compreender** e **converter** entre as unidades de medida de ângulos: graus e radianos.
- **Associar** os números reais a pontos na circunferência trigonométrica.
- **Resolver** exercícios que combinem todos esses conceitos.

Materiais

- Quadro branco e pincéis/canetas.
- Folhas de exercícios.
- Círculo trigonométrico interativo construído em sala

Etapa 1: Exercícios (30 minutos)

- Distribua uma folha de exercícios para que os alunos pratiquem.

Etapa 2: Correção (20 minutos)

- Reserve os minutos finais para um resumo da matéria e para tirar as últimas dúvidas.
- Reforce a ideia de que a prática é fundamental e que o círculo trigonométrico é a ferramenta visual mais importante para este tema.

Avaliação

- **Formativa:** Participação em sala, resolução dos exercícios e respostas aos questionamentos do professor.
- **Somativa:** Correção das listas de exercícios e uma avaliação que inclua a conversão de unidades, identificação de quadrantes, e aplicação das simetrias.

Plano de Aula 6: Razões Trigonométricas na Circunferência

Duração: 1 aula (50 minutos)

Objetivos

- **Relembrar** a construção do círculo trigonométrico interativo.
- **Visualizar** a relação entre os ângulos e as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) na circunferência.
- **Compreender** a variação e o sinal do seno, cosseno e tangente nos quatro quadrantes.
- **Associar** a variação de seno e cosseno com as coordenadas (x, y) no plano cartesiano.
- **Aplicar** o modelo construído para resolver exercícios de forma prática e visual.

Materiais

- Círculo trigonométrico interativo (construído na aula anterior) para cada aluno.
- Quadro branco e pincéis/canetas.
- Folhas de exercícios.

Etapa 1: Ativação do Conhecimento e Preparação (10 minutos)

1. **Relembrando a Construção:** Inicie a aula pedindo aos alunos que peguem seus círculos interativos de papelão, canudo e tachinha. Peça para que eles girem o canudo e expliquem como cada parte do modelo se relaciona:
    - O canudo representa o **raio** (ou a hipotenusa de um triângulo retângulo).
    - A base do triângulo (projeção no eixo x) representa o **cosseno**.
    - A altura do triângulo (projeção no eixo y) representa o **seno**.
2. **Revisão dos Eixos:** Peça aos alunos que identifiquem os eixos de seno (vertical) e cosseno (horizontal) em seus modelos.

Etapa 2: Exploração Guiada das Funções Trigonométricas (25 minutos)

1. **O Seno na Circunferência:**
    - Peça aos alunos que girem o canudo do **0° ao 90°** (primeiro quadrante) e observem a "sombra" no eixo do seno. Pergunte: "O que acontece com o valor do seno? Ele aumenta ou diminui? O valor é positivo ou negativo?"
    - Repita o processo para os outros quadrantes:
        - **90° a 180°** (segundo quadrante): O seno diminui, mas continua positivo.
        - **180° a 270°** (terceiro quadrante): O seno diminui e se torna negativo.

- **270° a 360°** (quarto quadrante): O seno aumenta, mas continua negativo.

- Conclua no quadro o sinal do seno em cada quadrante.

2. **O Cosseno na Circunferência:**
   - Repita o processo anterior, mas agora pedindo para que os alunos observem a projeção no eixo do cosseno (horizontal).
   - **0° a 90°:** O cosseno diminui e é positivo.
   - **90° a 180°:** O cosseno diminui e se torna negativo.
   - **180° a 270°:** O cosseno aumenta, mas continua negativo.
   - **270° a 360°:** O cosseno aumenta e se torna positivo.
   - Conclua no quadro o sinal do cosseno em cada quadrante.
3. **A Tangente (10 min):**
   - Desenhe no quadro uma reta tangente à circunferência no ponto (1,0).
   - Explique que a tangente é a projeção do canudo nessa reta. A tangente pode ser calculada como $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.
   - Peça aos alunos para usarem seus modelos para determinar o sinal da tangente em cada quadrante, baseando-se nos sinais de seno e cosseno que já descobriram. (Exemplo: No segundo quadrante, Seno é (+) e Cosseno é (-), então a Tangente é (-)).

Etapa 3: Exercícios e Aplicação Prática (15 minutos)

1. **Exercícios com o Círculo:**
   - Distribua uma folha de exercícios. Os problemas devem ser projetados para usar o círculo interativo como ferramenta.
   - **Exemplo 1:** "Use seu círculo para encontrar os sinais do seno, cosseno e tangente para o ângulo de 210°."
   - **Exemplo 2:** "Gire o canudo para o ponto de 300°. Observe o valor do seno e compare-o com o seno do ângulo de 60°. O que você percebe?"
   - **Exemplo 3:** "Em quais quadrantes o seno e o cosseno têm o mesmo sinal?"
2. **Discussão e Conclusão (10 min):**
   - Peça aos alunos que resolvam os exercícios em duplas e, em seguida, discutam as respostas com a turma.
   - Ao final, ressalte a importância do círculo trigonométrico como uma ferramenta visual poderosa, que simplifica a compreensão das razões trigonométricas em vez de apenas memorizar fórmulas.

Avaliação

- **Formativa:** A avaliação será contínua, baseada na participação ativa dos alunos na exploração dos conceitos com seus modelos e na resolução dos exercícios propostos.

Plano de Aula 7: Introdução às Funções Trigonométricas

Duração: 2 aulas (50 minutos cada)

Objetivos

- **Transicionar** da trigonometria no triângulo retângulo para a trigonometria na circunferência.
- **Compreender** o que são as funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente).
- **Analisar** as características das funções seno e cosseno (domínio, imagem, período e gráfico).
- **Construir** o gráfico de $y=\sin(x)$ e $y=\cos(x)$ de forma intuitiva e prática.
- **Aplicar** o conhecimento das funções trigonométricas para resolver problemas.

Materiais

- Círculo trigonométrico interativo (feito na aula anterior).
- Quadro branco e pincéis/canetas.
- Projetor (opcional) para exibir vídeos ou gráficos.
- Folhas de papel quadriculado para cada aluno/dupla.
- Régua e lápis.

Aula 1: Do Círculo ao Gráfico

1. Revisão e Conexão (10 minutos)

- Comece a aula com uma breve revisão sobre a variação do seno e do cosseno na circunferência, usando o círculo interativo que os alunos construíram. Peça que girem o canudo e respondam a perguntas como:
  - "Onde o seno é positivo?"
  - "Qual o valor máximo do cosseno?"
- Conecte essa variação à ideia de uma **função**.

2. Introdução às Funções Seno e Cosseno (15 minutos)

- Apresente as notações das funções: $f(x)=\sin(x)$ e $f(x)=\cos(x)$.
- Diga que o objetivo é "desenrolar" o círculo trigonométrico e transformar a variação circular em um gráfico em uma linha reta.

- No quadro, crie uma tabela de valores para a função y=sin(x) com base nos ângulos notáveis da circunferência. Peça aos alunos que usem seus círculos interativos para ajudar a preencher:

3. Construção do Gráfico (25 minutos)

- Distribua o papel quadriculado. Peça para os alunos desenharem um plano cartesiano.
- Oriente-os a marcar os ângulos no eixo horizontal (x): 0,2π,π,3π/2,2π,…
- Em seguida, peça para que marquem os pontos da tabela no gráfico.
- Com base nos pontos, peça para eles unirem os pontos com uma linha suave. Oriente-os a observar a "onda" que se forma e a estendê-la, se possível.

Aula 2: Análise das Características das Funções

1. Revisão e Introdução (10 minutos)

- Inicie a aula revisando a construção do gráfico de y=sin(x) e peça para que os alunos construam a tabela e o gráfico de y=cos(x) de forma individual ou em duplas, seguindo o mesmo processo da aula anterior.

2. Análise Gráfica (25 minutos)

- Com os gráficos de seno e cosseno no quadro e nos cadernos dos alunos, promova uma discussão sobre as características:
  - **Domínio e Imagem (ou Contradomínio):**
    - **Domínio:** Pergunte: "Que valores podemos colocar no x (no ângulo)?". Explique que podemos usar **todos os números reais**.
    - **Imagem:** Pergunte: "Que valores o y pode ter?". Mostre que o valor do seno e do cosseno varia apenas entre **-1 e 1**.
  - **Período:** Mostre que o gráfico se repete. Explique que o **período** é o intervalo em que a onda completa um ciclo, que é de 2π radianos (ou 360∘).
  - **Amplitude:** Explique que a amplitude é a distância do centro da onda (o eixo x) até o pico, que é 1.

3. Conexão com o Cotidiano (10 minutos)

- Finalize a aula mostrando a aplicação dessas funções no cotidiano. Use exemplos como:
  - Ondas sonoras e de rádio.
  - A variação da altura da maré.
  - A duração da luz do dia ao longo de um ano.

- Explique que, ao modelar esses fenômenos cíclicos, as funções trigonométricas são essenciais.

Avaliação

- **Formativa:** A avaliação será feita através da participação dos alunos na construção dos gráficos e na análise de suas propriedades.
- **Somativa:** Uma lista de exercícios que inclua a identificação de domínio, imagem e período de funções trigonométricas e a representação gráfica de alguns pontos.