Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Alessandro Narciso Rocha Sanches

O Teorema de Pick: uma sequência didática a partir da revisão sistemática integrativa das produções discentes do PROFMAT

Rio de Janeiro

2025

Alessandro Narciso Rocha Sanches

O Teorema de Pick: uma sequência didática a partir da revisão sistemática integrativa das produções discentes do PROFMAT

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ageu Barbosa Freire

Rio de Janeiro

2025

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CTC/A

S211 Sanches, Alessandro Narciso Rocha.
O Teorema de Pick: uma sequência didática a partir da revisão sistemática integrativa das produções discentes do PROFMAT/ Alessandro Narciso Rocha Sanches. – 2025..
74 f.: il.

Orientador: Ageu Barbosa Freire
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Matemática - Estudo e ensino (Ensino fundamental) - Teses. 2. Polígonos – Métodos de ensino - Teses. I. Freire, Ageu Barbosa. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 51:37

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

________________________ ____________________

Assinatura Data

Alessandro Narciso Rocha Sanches

O Teorema de Pick: uma sequência didática a partir da revisão sistemática integrativa das produções discentes do PROFMAT

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Matemática.

Aprovado em: 10 de Março de 2025

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ageu Barbosa Freire (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística da UERJ

Prof. Dr. Ruben Edwin Lizarbe Monje
Instituto de Matemática e Estatística da UERJ

Prof. Dr. Javier Solano
Universidade Federal Fluminense - UFF

Rio de Janeiro

2025

DEDICATÓRIA

Dedico essa dissertação a minha esposa Iasmin e minha filha Amanda, que são as minhas maiores motivações para seguir em frente e sempre me aperfeiçoar.

AGRADECIMENTO

A minha esposa Iasmin Lobão Gromik Rocha, pela sua parceria durante essa jornada, me auxiliando com trabalhos impressos, cuidando de mim e da nossa casa.

Ao meu orientador Professor Ageu Barbosa Freire, minha imensa gratidão por sempre ter se mostrado disposto a me ajudar.

Aos meus colegas da turma PROFMAT 2022, foram dois anos de muito estudo e troca de conhecimento.

A CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

SANCHES, Alessandro Narciso Rocha. *O Teorema de Pick: uma sequência didática a partir da revisão sistemática integrativa das produções discentes do PROFMAT*. 2025. 76 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2025.

O Teorema de Pick é uma ferramenta de grande relevância que permite calcular a área de polígonos simples, com vértices nos pontos de uma malha quadriculada, usando contagem a partir da análise dos pontos na borda e no interior do polígono. Dessa forma, esta pesquisa objetiva desenvolver uma sequência didática tendo o Teorema de Pick como fio condutor. A sequência didática foi criada através de uma revisão sistemática integrativa das dissertações do PROFMAT que tratam sobre o Teorema de Pick e que possuem proposta metodológica (ou algo semelhante). Como resultado da análise dos dados obtidos nas dissertações cujas propostas metodológicas foram aplicadas, inferimos que o 9º ano do ensino fundamental configura o melhor período para aplicação de sequência didática com o tema.

Palavras-Chave: Teorema de Pick. Área de polígonos. Revisão integrativa. Sequência didática.

ABSTRACT

SANCHES, Alessandro Narciso Rocha.*Pick's Theorem: a didactic sequence through an integrative systematic review of PROFMAT's student productions.* 2025. 76 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2025.

Pick's Theorem is a very interesting tool that allows us to calculate the area of simple polygons, with vertices on the points of a grid, using counting from the analysis of the points on the border and inside the polygon. Our goal is to develop a didactic sequence where Pick's Theorem will be presented. The didactic sequence was created through an integrative systematic review of PROFMAT dissertations that deal with Pick's Theorem and have a methodological proposal (or something similar). As a result of the analysis of the data obtained in the dissertations whose methodological proposals were applied, we infer that the 9th grade of elementary school is the best period for applying a didactic sequence with this theme.

Keywords: Pick's Theorem. Area of polygons. Integrative review. Didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Rede no Plano . . . 14
Figura 2 - Polígono simples e não-simples . . . 14
Figura 3 - Triângulos fundamentais. . . . 14
Figura 4 - Polígonos justapostos. . . . 15
Figura 5 - Triângulo retângulo. . . . 16
Figura 6 - Quadrado. . . . 18
Figura 7 - Triângulo qualquer. . . . 19
Figura 8 - Decomposição do triângulo ABC. . . . 21
Figura 9 - Exemplos de polígonos. . . . 22
Figura 10 - Polígonos com buracos. . . . 23
Figura 11 - Poliedro plano. . . . 27
Figura 12 - Segmento de reta. . . . 30
Figura 13 - Etapas da revisão integrativa . . . 33
Figura 14 - Gráfico com a distribuição de dissertações analisadas por estado . . . 37
Figura 15 - Atividade com mapa no Geogebra. . . . 41
Figura 16 - Gráfico com a amostra de cada proposta educacional aplicada . . . 41
Figura 17 - Representação dos pontos B', B'' e I . . . 49
Figura 18 - Polígono construído no Geoplano virtual. . . . 52
Figura 19 - Ajuste da malha. . . . 53
Figura 20 - Icoságono aproximado da circunferência de raio 5. . . . 55
Figura 21 - Poliedro convexo e não-convexo. . . . 61
Figura 22 - Tetraedro de Reeve de altura 2. . . . 61
Figura 23 - Paralelogramo $ABCD$. . . . 63
Figura 24 - Tetraedro fundamental de altura 4. . . . 65
Figura 25 - Paralelepípedo. . . . 68
Figura 26 - Geoplano . . . 70
Figura 27 - Geoplano Virtual . . . 71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Tabela com as dissertações do PROFMAT que possuem no título a expressão “Pick” 34

Tabela 2 - Tabela com as dissertações selecionadas para a revisão integrativa. 36

Tabela 3 - Tabela com os dados após a revisão das dissertações selecionadas. 38

Tabela 4 - Dissertações onde aplicou-se a proposta educacional. 42

Tabela 5 - Volume do tetraedro. 61

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	**TEOREMA DE PICK**	13
1.1	**Definições e resultados preliminares**	13
1.2	**Demonstração do Teorema de Pick**	14
1.3	**Polígono simples com buracos**	23
1.4	**Teorema de Euler**	25
1.5	**Aplicação na aritmética**	28
2	**METODOLOGIA**	32
2.1	**Identificação do tema e seleção da questão de pesquisa**	33
2.2	**Estabelecimento de critérios de inclusão e exclusão.**	34
2.3	**Categorização das dissertações selecionadas e análise dos dados**	36
2.4	**Análise e interpretação dos resultados**	40
3	**SEQUÊNCIA DIDÁTICA: TEOREMA DE PICK**	45
3.1	**Sequência didática**	45
3.2	**Aula 1: Áreas de polígonos na malha quadriculada**	48
3.3	**Aula 2 : Apresentação do Teorema de Pick**	48
3.4	**Aula 3: Uso de geoplano**	51
3.5	**Aula 4: Calcular a área dos estados brasileiros**	52
3.6	**Aula 5: Valor aproximado de π**	54
	CONCLUSÃO	57
	REFERÊNCIAS	59
	APÊNDICE A - O Teorema de Reeve	60
	APÊNDICE B - O Geoplano	70
	APÊNDICE C - Atividade	72

INTRODUÇÃO

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [1], o cálculo de áreas de figuras planas é uma competência que abrange todos os anos finais do ensino fundamental de acordo com as seguintes habilidades:

> (EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
>
> (EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.
>
> (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
>
> (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
>
> (EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental, a BNCC destaca que:

> "Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática". (BRASIL, 2019, p.296)

No contexto da história da matemática, o austríaco George Pick (1859-1942) demonstrou, no final do século XIX, um teorema que revolucionou o cálculo de áreas de figuras planas. O Teorema de Pick, como hoje é conhecido, permite calcular a área de polígonos simples, convexos ou não, construídos sobre uma malha quadriculada, cujos vértices coincidem com os encontros das retas dessa malha, fazendo apenas a contagem dos pontos que estão na borda e no interior do polígono. Possibilitando assim o cálculo da área de polígonos onde não é possível calcular pelas fórmulas tradicionais de área, e sem precisar fazer a decomposição do polígono em figuras conhecidas como triângulo e retângulo.

Este teorema é pouco abordado nas escolas, mesmo sendo de fácil compreensão e aplicabilidade. Além de ser uma nova possibilidade para o cálculo de área de polígonos, ele pode ser usado em atividades lúdicas como calcular áreas geográficas, usado com material concreto como Geoplano, usado com softwares como Geogebra, o que pode despertar o interesse dos alunos.

Este trabalho visa entender as vantagens do ensino do Teorema de Pick. Em outros termos, objetiva-se compreender como é a aceitação por parte dos alunos, quais as dificuldades em aplicá-lo. A partir dessa diagnose, elaborar uma sequência didática apresentando o Teorema de Pick.

Nossa pesquisa é de finalidade exploratória com delineamento bibliográfico. Como metodologia, realizamos uma revisão sistemática integrativa, pois, segundo BOTELHO, CUNHA e MACEDO [2]: " A revisão integrativa possibilita a síntese de vários estudos já publicados, permitindo a geração de novos conhecimentos, pautados nos resultados apresentados pelas pesquisas anteriores."(Botelho, Cunha e Macedo, 2011, p.127), de caráter exploratório, dentre as dissertações do PROFMAT que tratam sobre o Teorema de Pick. Por se tratar de um programa de formação de professores com oferta nacional, acreditamos que as dissertações presentes no repositório do PROFMAT favorecem um trabalho de revisão integrativa, visto que são materiais produzidos a partir do contexto natural de professores em diversas instituições de ensino no Brasil.

O primeiro capítulo é dedicado ao Teorema de Pick. Iniciamos com algumas definições e resultados necessários para sua demonstração. Em seguida, mostramos a extensão do teorema para polígono com buracos, procuraremos a relação entre o Teorema de Pick e o Teorema de Euler para polígonos, e encerramos fornecendo uma aplicação do Teorema de Pick na aritmética.

No segundo capítulo, trazemos a metodologia ultilizada neste trabalho, destacando a relevância da revisão sistemática integrativa. Além disso, apresentamos os dados coletados, com os detalhamentos requeridos para tal tipo de revisão. Por fim, fornecemos os resultados obtidos.

O terceiro e último capítulo contém a sequência didática produzida a partir dos resultados alcançados com a revisão.

Por fim, são apresentados as considerações finais para este estudo.

1 TEOREMA DE PICK

Neste capítulo, trataremos sobre o Teorema de Pick, um resultado sobre o cálculo de áreas de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma rede no plano.

Este teorema é o resultado mais lembrado do matemático austríaco George Pick (1859-1942). Foi primeiramente publicado no artigo "Geometrischer zur Zahlenlehre" [3], de 1899, mas, só foi popularizado em 1969, quando foi publicado no famoso livro Mathematical Snapshots [4] do matemático polonês Hugo Dyonizy Steinhaus.

Como bibliografia base ultilizamos o livro [5]

Na primeira seção vamos apresentar algumas definições que serão necessárias para compreender os conceitos que iremos trabalhar. Na segunda iremos demonstrar o Teorema de Pick, com a apresentação de exemplos a fim de que se possa mais bem ilustrar o teorema. Na terceira iremos achar uma fórmula para calcular a área de um polígono com "buracos". Em sequência , a relação entre o Teorema de Euler para poliedros planos e o Teorema de Pick. E, por fim, uma aplicação do Teorema de Pick para a resolução das equações diofantinas.

1.1 Definições e resultados preliminares

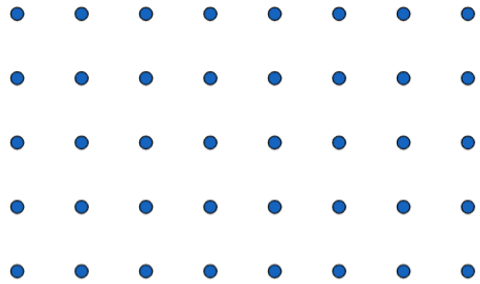
Nesta seção apresentaremos todos os conceitos básicos necessários para o enunciado e demonstração do Teorema de Pick.

Definição 1.1.1. *Uma rede no plano é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de linhas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles ao ponto mais próximo na horizontal ou vertical seja igual a* 1 *(unidade de medida).*

Definição 1.1.2. *Um polígono P está numa rede no plano se os seus vértices são pontos da rede. Um polígono P é dito simples quando seus lados não se cruzam, e, de cada vértice, partem apenas dois segmentos de retas, como mostra a Figura 2. O polígono P é a justaposição de dois polígonos P_1 e P_2 se $P = P_1 \cup P_2$, e P_1 e P_2 possuem seus pontos interiores disjuntos.*

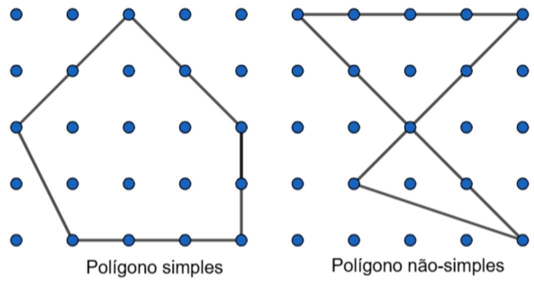
Definição 1.1.3. *Dado uma rede no plano, um triângulo é dito fundamental quando possui os três vértices e mais nenhum outro ponto, na borda ou interior, sobre a rede.*

Figura 1 - Rede no Plano.



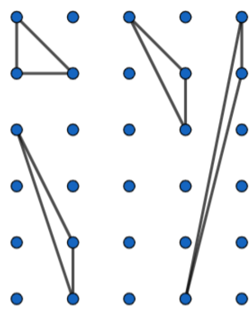
Fonte - O autor.

Figura 2 - Polígono simples e não-simples.



Fonte - O autor.

Figura 3 - Triângulos fundamentais.



Fonte - O autor.

1.2 Demonstração do Teorema de Pick

Teorema 1.2.1. ***(Teorema de Pick)*** *Sejam P um polígono simples sobre uma rede no plano, B o número de pontos da rede que estão sobre a borda e I o número de pontos que estão no interior de P. Então*

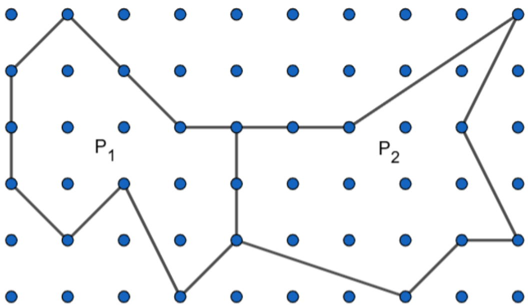
$$A(P) = \frac{B}{2} + I - 1$$

Demonstração. A demostração será feita em 4 passos.

Passo 1: Se $P = P_1 \cup P_2$ é uma justaposição e o Teorema de Pick vale para P_1 e P_2, então o teorema vale para P.

De fato, suponha que P é formado justapondo polígonos simples P_1 e P_2 ao longo de algumas aresta como no exemplo da Figura 4.

Figura 4 - Polígonos justapostos.



Fonte - O autor.

Sejam B_1 e B_2 a quantidade de pontos na borda de P_1 e P_2 respectivamente, e I_1 e I_2 a quantidade de pontos no interior do polígono $P1$ e $P2$ respectivamente. Justapondo os dois polígonos obtemos o polígono P com B pontos na borda e I pontos no interior. Seja N o número de pontos comuns entre P_1 e P_2 internos a P. Neste caso, temos que:

$$I = I_1 + I_2 + N$$

Para o cálculo de B, devemos retirar N de B_1 e de B_2, pois após a justaposição viraram pontos no interior de P. Observe que os polígonos P_1 e P_2 têm dois pontos em comum além dos que estão em N, que estão sendo contados duas vezes, portanto devemos subtrair 2 da contagem final. Logo,

$$B = (B_1 - N) + (B_2 - N) - 2 = B_1 + B_2 - 2N - 2$$

Por outro lado,

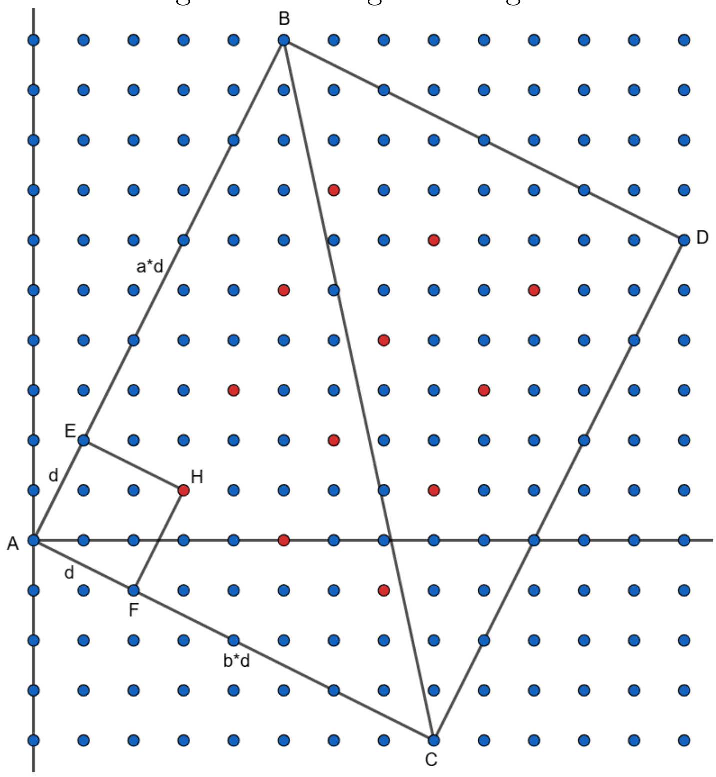
$$\begin{aligned}
A(P) &= A(P_1) + A(P_2) \\
&= \left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1\right) + \left(\frac{B_2}{2} + I_2 - 1\right) \\
&= \frac{B_1 + B_2}{2} - 2 + (I_1 + I_2) \\
&= \frac{B_1 + B_2}{2} - 2 + I - N \\
&= \frac{B_1 + B_2 - 2N - 2}{2} + I - 1 \\
&= \frac{B}{2} + I - 1
\end{aligned}$$

Mostrando que a fórmula da área do Teorema de Pick é aditiva. E, por indução, verifica-se que a mesma vale para uma união finita de justaposição.

Passo 2: Se T é um triângulo retângulo, então T verifica a fórmula de Pick.

Com efeito, seja T um triângulo retângulo obtido a partir de um retângulo R. Fazendo uma mudança de coordenadas se necessário, podemos supor que o ângulo reto se encontra no vértice $A = (0, 0)$. Então, denotando por $E = (x, y)$ e $F = (y, -x)$ os pontos adjacentes ao ponto A, que estão na borda de T, temos que E e F estão a uma distância $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ do ponto A como mostra a Figura 5.

Figura 5 - Triângulo retângulo.



Fonte - O autor.

Suponha que T possui catetos, um com a unidades do comprimento d e outro com b unidades do comprimento d, logo temos catetos medindo ad e bd. Assim, a área do triângulo T é

$$A(T) = \frac{abd^2}{2}$$

Seja B o número de pontos na borda de T, I o número de pontos no interior de T e N o número de pontos no interior de R pertencentes a hipotenusa de T. Note que,

$$B = a + b + 1 + N \tag{1.1}$$

$$I = \frac{I_R - N}{2}, \tag{1.2}$$

onde I_R denota o número de pontos no interior de R. Nosso problema agora é determinar I_R em função de a, b, x e y.

Note que I_R é formado pelos pontos que estão a uma distancia αd, para algum $\alpha \in \mathbb{N}$, da borda de T (os pontos vermelhos na Figura 5), mais os pontos interiores dos quadrados de lado d que se encontram dentro de R e cujos vértices são pontos da borda de R e os pontos vermelhos, como por exemplo o quadrado $AEHF$ da Figura 5 (observe que existem exatamente ab destes quadrados). Assim

$$I_R = (a-1)(b-1) + ab\lambda,$$

onde $(a-1)(b-1)$ é a quantidade de pontos vermelhos, e λ é a quantidade de pontos no interior de um quadrado de lado d que se encontra dentro de R e cujos vértices são pontos da borda de T ou algum dos pontos vermelhos.

Para determinar λ, considere Q um quadrado cujos vétices são os únicos pontos da rede que estão na borda de Q (veja a Figura 6). Podemos supor que os vértices de Q são os pontos $A = (0,0)$, $E = (x,y)$, $F = (y,-x)$ e $H = (x+y, y-x)$. Deste modo, Q é um quadrado de lado $d = \sqrt{x^2+y^2}$.

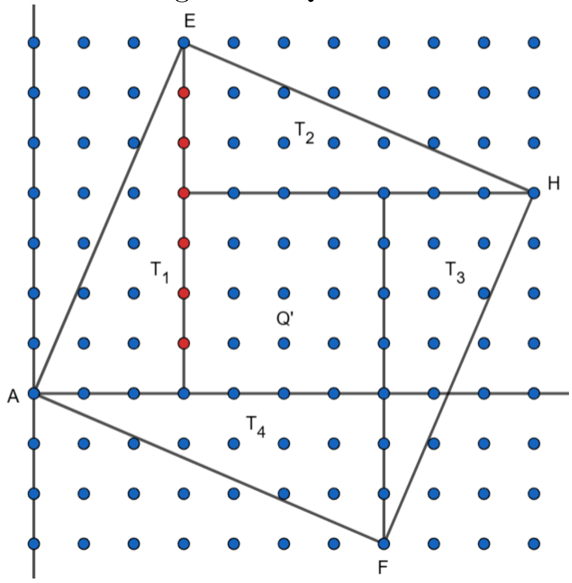
Temos o quadrado Q decomposto da seguinte maneira $Q = Q' \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ como mostra a Figura 6. Assim,

$$I_Q = 4I_{T_1} + I_{Q'} + 4(y-1),$$

onde I_{T_1} e $I_{Q'}$ é o número de pontos no interior de T_1 e Q', respectivamente, e, $y-1$ são os pontos no interior de Q que estão na borda dos catetos de medida y dos triângulos retângulos T_1, T_2, T_3 e T_4 não contando os vértices (veja os pontos vermelhos na Figura 6). Observe que,

$$I_{Q'} = (y-x-1)^2 \quad \text{e} \quad I_{T_1} = \frac{(x-1)(y-1)}{2}.$$

Figura 6 - Quadrado.



Fonte - O autor.

Logo,

$$\begin{aligned} I_Q &= 4I_{T_1} + I_{Q'} + 4(y-1) \\ &= 2(x-1)(y-1) + (y-x-1)^2 + 4(y-1) \\ &= x^2 + y^2 - 1 \\ &= d^2 - 1 \end{aligned}$$

Em particular, $\lambda = d^2 - 1$ e assim

$$I_R = (a-1)(b-1) + ab(d^2-1).$$

Portanto, da equação 1.2 temos

$$I = \frac{(a-1)(b-1) + ab(d^2-1) - N}{2}. \tag{1.3}$$

Logo, substituindo 1.1 e 1.3 na fórmula de Pick obtemos

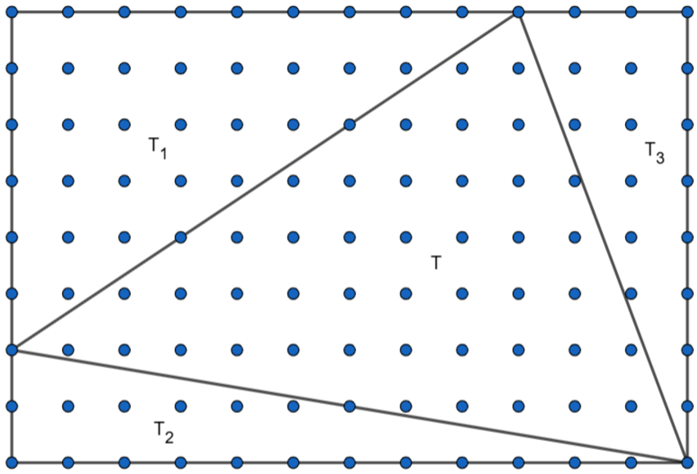
$$\begin{aligned} \frac{B}{2} + I - 1 &= \frac{(a+b+N+1)}{2} + \frac{(a-1)(b-1) + ab(d^2-1) - N}{2} - 1 \\ &= \frac{(a+b+N+1) + (a-1)(b-1) + ab(d^2-1) - N - 2}{2} \\ &= \frac{abd^2}{2} \\ &= A(T) \end{aligned}$$

Isto mostra que o teorema vale para triângulos retângulos. Em particular, usando o passo 1 o Teorema de Pick é válido para retângulos.

Passo 3: Se T é um triângulo qualquer, então T satisfaz a fórmula de Pick.

Dado um triângulo qualquer T, podemos construir 3 triângulos retângulos T_1, T_2 e T_3 de tal forma que a justaposição de todos os triângulos forme um retângulo, como mostra a Figura 7.

Figura 7 - Triângulo qualquer.



Fonte - O autor.

Temos que,

$$R = T \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$$

$$A(R) = A(T) + A(T_1) + A(T_2) + A(T_3)$$

$$A(T) = A(R) - A(T_1) - A(T_2) - A(T_3)$$

Usando o Teorema de Pick nos triângulos retângulos e no retângulo, obtemos

$$A(T) = \frac{B_R}{2} + I_R - 1 - \frac{B_{T_1}}{2} - I_{T_1} + 1 - \frac{B_{T_2}}{2} - I_{T_2} + 1 - \frac{B_{T_3}}{2} - I_{T_3} + 1$$

$$A(T) = \frac{B_R - B_{T_1} - B_{T_2} - B_{T_3}}{2} + I_R - I_{T_1} - I_{T_2} - I_{T_3} + 2$$

$$A(T) = -\frac{B_{T_1} + B_{T_2} + B_{T_3} - B_R}{2} + I_R - I_{T_1} - I_{T_2} - I_{T_3} + 2$$

$$A(T) = -\frac{B_T}{2} + (I_T + B_T - 3) + 2$$

$$A(T) = \frac{B_T}{2} + I_T - 1$$

O que mostra que o teorema de Pick é válido para um triângulo qualquer.

Passo 4: Todo polígono de n lados pode ser decomposto como a reunião de $(n-2)$ triângulos justapostos, cujos vértices são do polígono dado.

Para provar este fato, vamos usar indução sobre n.

Para $n = 3$ temos um triângulo, logo o teorema vale para $n = 3$.

Agora, suponha por indução que um polígono de n lados pode ser dividido em $(n-2)$ triângulos. E, vamos provar que um polígono de $(n+1)$ lados podem ser dividido em $(n-1)$ triângulos.

De fato, se P é um polígono com $(n+1)$ lados, ligando dois vértices não consecutivos do polígono P, de tal forma que esse segmento esteja contido em P, dividimos o polígono P em dois polígonos P_1 e P_2. Chamemos de n_1 o número de lados de P_1 e n_2 o número de lados de P_2. Logo, temos que:

$$n + 1 = n_1 + n_2 - 2$$

$$n + 3 = n_1 + n_2 \tag{1.4}$$

E, ao dividir o polígono P nos polígonos P_1 e P_2, temos que n_1, $n_2 \leq n$. Então pela hipótese temos que P_1 divide-se em $n_1 - 2$ triângulos e P_2 em $n_2 - 2$ triângulos. Logo o polígono P possui $n_1 + n_2 - 4$ triângulos ao todo. Pegando a equação 1.4 e subtraindo 4 em ambos os lados temos:

$$n_1 + n_2 - 4 = n + 3 - 4 = n - 1$$

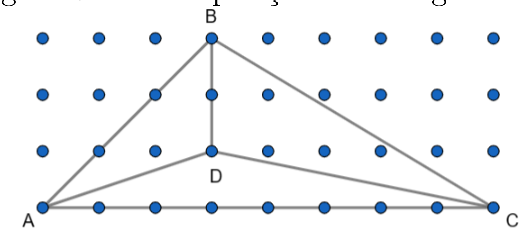
Então P possui $(n-1)$ triângulos, provando que a afirmação é verdadeira para um polígono de $(n+1)$ lados. Portanto, por indução é válida a afirmação $\square$

Corolário 1.2.2. *Todo polígono com vértices numa rede no plano pode ser decomposto em triângulos fundamentais.*

Demonstração. Como vimos no **Passo 4**, podemos dividir um polígono de n lados em $n-2$ triângulos.

Seja ABC um desses triângulos. Escolha um ponto no interior de ABC e chame-o de D. Partindo de D podemos traçar os segmentos DA, DB e DC, formando três novos triângulos DAB, DAC e DBC, como mostra a Figura 8.

Figura 8 - Decomposição do triângulo ABC.



Fonte - O autor.

Se após a decomposição do triângulo ABC ainda existirem pontos no interior, repetiremos o mesmo processo com os novos triângulos até que não tenham pontos no interior dos triângulos, transformando o triângulo ABC em uma união de triângulos menores. Se um desses triângulos menores tiver pontos de rede na borda além dos seus vértices, podemos decompor esse triângulo em dois triângulos tomando como referência o ponto na borda, repetindo esse processo até que os únicos pontos da rede na borda sejam apenas os vértices. Decompondo assim o triângulo ABC em triângulos fundamentais. □

Corolário 1.2.3. *A área de um triângulo fundamental é igual a 1/2 .*

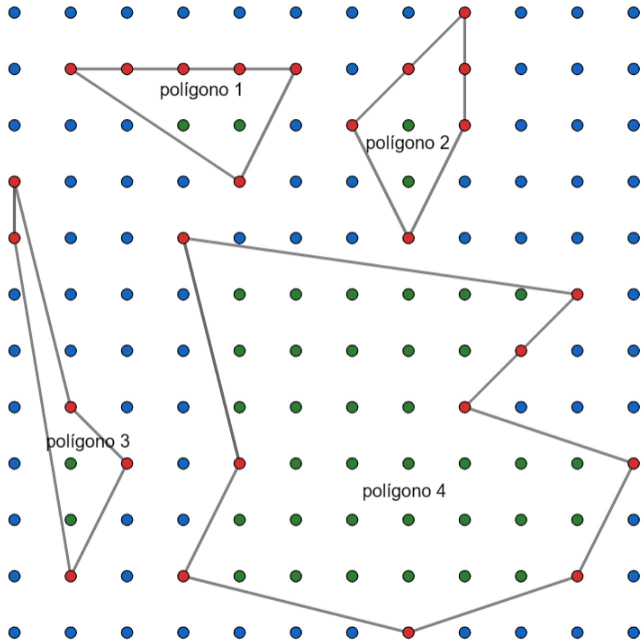
Demonstração. Como já foi provado que o Teorema de Pick vale para um polígono qualquer, então vale para o triângulo fundamental. Usando a fórmula de Pick, temos que:

$$A = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{3}{2} + 0 - 1 = \frac{1}{2}$$

□

Exemplo 1.2.4. *Considere os polígonos simples da Figura 9, onde os pontos vermelhos representam os pontos na borda e os pontos verdes representam os pontos no interior do polígono. Vamos usar o teorema de Pick para calcular as suas áreas.*

Figura 9 - Exemplos de polígonos.



Fonte - O autor.

$$A(P_1) = \frac{6}{2} + 2 - 1 = 4$$

$$A(P_2) = \frac{6}{2} + 2 - 1 = 4$$

$$A(P_3) = \frac{5}{2} + 2 - 1 = 3,5$$

$$A(P_4) = \frac{9}{2} + 34 - 1 = 37,5$$

Observação 1.2.5. *Note que o teorema de Pick não se aplica para polígonos não-simples. Por exemplo, para o polígono não-simples da Figura 2 temos que sua área é igual a 6, enquanto que pela fórmula de Pick teríamos:*

$$A = \frac{11}{2} + 2 - 1 = 6,5$$

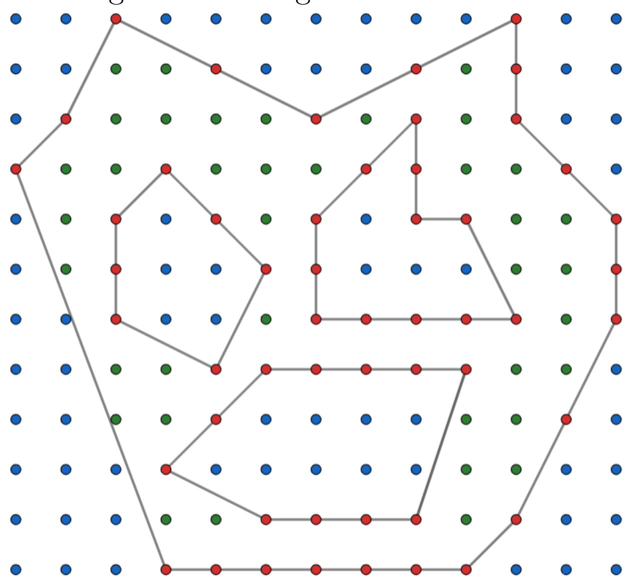
1.3 Polígono simples com buracos

Nesta seção, vamos mostrar uma generalização do Teorema de Pick que permite calcular a área de um polígono simples P que possui n buracos. Mas antes precisamos fixar o significado de um buraco num polígono.

Definição 1.3.1. *Os buracos num polígono simples P, são polígonos simples com vértices em pontos da rede, onde tais buracos são disjuntos, não estão contidos um no outro e, não intersectam o polígono P.*

Exemplo 1.3.2. *A Figura 10 é um exemplo de um polígono simples P com 3 buracos.*

Figura 10 - Polígonos com buracos.



Fonte - O autor.

Proposição 1.3.3. *Seja P um polígono simples cujos vértices estão sobre uma rede no plano e que possui n buracos H_i, $1 \leq i \leq n$. Se B e I denotam o número de pontos no bordo e no interior de P, respectivamente, então*

$$A(P) = \frac{B}{2} + I - 1 + n \tag{1.5}$$

Demonstração. Denote por P_0 o polígono $P \setminus H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$, ou seja, P_0 é P sem os buracos. Considere que o polígono P_0 tem B_0 pontos na borda e I_0 pontos no interior, e, que os pontos localizados na borda e no interior de H_i, são B_i e I_i respectivamente, com $1 \leq i \leq n$. Como $H_1, \ldots, H_n$ e P_0 são polígonos simples, podemos aplicar o Teorema de Pick para cada um deles. Assim,

$$A(P_0) = \frac{B_0}{2} + I_0 - 1$$

$$A(H_i) = \frac{B_i}{2} + I_i - 1, \ \ 1 \leq i \leq n.$$

Por outro lado, podemos calcular a área da região P subtraindo da área de P_0 a soma das áreas dos buracos. Portanto,

$$\begin{aligned}
A(P) &= A(P_0) - A(H_1) - A(H_2) - \ldots - A(H_n) \\
&= \frac{B_0}{2} + I_0 - 1 - \left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1\right) - \left(\frac{B_2}{2} + I_2 - 1\right) - \ldots - \left(\frac{B_n}{2} + I_n - 1\right) \\
&= \frac{B_0}{2} - \left(\frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{2} + \ldots + \frac{B_n}{2}\right) + I_0 - (I_1 + I_2 + \ldots + I_n) - 1 + n \\
&= \frac{B_0 + B_1 + \ldots + B_n}{2} - \left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right) + I_0 - \left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right) - 1 + n \\
&= \frac{B_0 + B_1 + \ldots + B_n}{2} + I_0 - \left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right) - 1 + n
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$B = B_0 + B_1 + B_2 + \ldots + B_n$$

$$I = I_0 - (I_1 + I_2 + \ldots + I_n) - (B_1 + B_2 + \ldots + B_n)$$

Logo, temos que:

$$A(P) = \frac{B}{2} + I - 1 + n$$

Achando a expressão para o cálculo da área de P.

□

Exemplo 1.3.4. *Considerando o polígono P da Figura 10 como exemplo, em que os pontos da borda são os pontos vermelhos e os pontos no interior são os pontos verdes, temos que a sua área é:*

$$A = \frac{53}{2} + 39 - 1 + 3 = 67,5$$

1.4 Teorema de Euler

Nesta seção iremos mostrar a relação entre o Teorema de Pick e o Teorema de Euler para "poliedros planos", que nada mais são do que a justaposição de polígonos simples. Para fins de organização, inicialmente apresentaremos e demostraremos o Teorema de Euler.

Teorema 1.4.1. *Considere P um poliedro plano com F faces, A arestas e V vértices. Para cada duas faces, ou elas são disjuntas ou têm um vértice em comum, ou têm uma ou mais arestas em comum. Então vale a seguinte relação:*

$$F - A + V = 1.$$

Demonstração. Como cada face de P é um polígono simples, podemos decompô-la em triângulos sem acrescentar novos vértices, como demonstramos no passo 4 da demonstração do teorema de Pick. Com isso, para cada aresta acrescentada teremos uma face a mais, e assim, esses aumentos se anulam na expressão $F - A + V$. Além disso, temos que $V = V_i + V_b$, onde V_i são os vértices no interior do polígono P e V_b os vértices na borda do polígono P, e, $A = A_i + A_v$, onde A_i são as arestas no interior do polígono P e A_b são as arestas na borda do polígono P.

Como todos as faces são triângulos, temos que a soma dos ângulos internos desse polígono é igual a:

$$\pi F \tag{1.6}$$

Por outro lado, podemos calcular a soma dos ângulos internos, levando em conta os vértices dos triângulos que coincidem com os vértices do poliedro P. Neste caso, para os vértices do bordo temos que a soma dos ângulos é

$$(V_b - 2)\pi$$

Já para os vértices no interior, temos

$$2\pi V_i,$$

logo, a soma dos ângulos interno é:

$$\pi(V_b + 2V_i - 2). \tag{1.7}$$

Igualando as expressões 1.6 e 1.7 obtemos:

$$\pi F = \pi(V_b + 2V_i - 2),$$

e, portanto,

$$F = V_b + 2V_i - 2.$$

Agora, omo $V_i = V - V_b$, temos que:

$$F = V_b + 2(V - V_b) - 2$$

$$F = 2V - V_b - 2 \tag{1.8}$$

Sabendo que todas as faces são triângulos, e que cada aresta interior é lado de duas faces e que cada aresta de bordo é lado de uma face, temos que:

$$3F = 2A_i + A_b \tag{1.9}$$

Além disso, o número de arestas no bordo é igual ao número de vértices no bordo, portanto:

$$\begin{aligned} 3F &= 2A_i + A_b \\ &= 2(A_i + A_b) - A_b \\ &= 2A - V_b \end{aligned} \tag{1.10}$$

Subtraindo a equação 1.8 da equação 1.10, inferimos que

$$\begin{aligned} 3F - F &= 2A - V_b - (2V - V_b - 2) \\ 2F &= 2A - 2V + 2 \end{aligned}$$

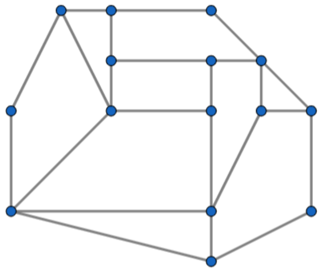
Portanto, concluímos que

$$F - A + V = 1.$$

$\square$

Exemplo 1.4.2. *A Figura 11 mostra um exemplo de um poliedro plano que possui* 9 *faces,* 23 *arestas e* 15 *vértices, e que verifica o Teorema de Euler.*

Figura 11 - Poliedro plano.



Fonte - O autor.

Teorema 1.4.3. *O Teorema de Pick implica o Teorema de Euler para poliedros planos.*

Demonstração. Seja P um polígono com vértices numa rede no plano. Pelo corolário 1.2.2, podemos dividir o polígono P em triângulos fundamentais. Formando assim um poliedro plano com F faces, A arestas e V vértices.

Assim, o número de triângulos fundamentais é igual a F. Pelo corolário 1.2.3, temos que a área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$, logo, a área de P é igual a $\frac{F}{2}$. Por outro lado, o Teorema de Pick nos diz que:

$$A(P) = \frac{B}{2} + I - 1.$$

Igualando as duas expressões para $A(P)$ obtemos,

$$\frac{F}{2} = \frac{B}{2} + I - 1.$$

Portanto,

$$F = B + 2I - 2. \tag{1.11}$$

Agora, o número total de vértices é igual a soma dos pontos na borda com os pontos no interior. Isto é,

$$V = B + I. \tag{1.12}$$

Já o número de arestas na borda é igual ao número de pontos na borda. Logo,

$$A_b = B. \tag{1.13}$$

Além disso, o número de arestas no interior é igual a diferença entre o número total de arestas e o número de arestas na borda. Isto é,

$$A_I = A - B. \tag{1.14}$$

Substituindo as equações 1.13 e 1.14 na equação 1.9, obtemos:

$$3F = 2(A - B) + B,$$

de onde concluímos que

$$A = \frac{1}{2}(3F + B). \tag{1.15}$$

Por fim, substituindo as equações 1.11, 1.12 e 1.15 na expressão $V - A + F$, comcluímos:

$$\begin{aligned} V - A + F &= B + I - \frac{1}{2}(3F + B) + B + 2I - 2 \\ &= B + I - \frac{1}{2}[3(B + 2I - 2) + B] + B + 2I - 2 \\ &= \frac{1}{2}(2B + 2I - 3B - 6I + 6 - B + 2B + 4I - 4) \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

1.5 Aplicação na aritmética

Na aritmética existem as equações diofantinas, que são da seguinte forma:

$$ax + by = c \tag{1.16}$$

onde a, b e c são inteiros dados, x e y são inteiros incógnitas. Elas tem solução se e somente se $m.d.c.(a, b)$ é um divisor de c. È bem conhecido que se a equação 1.16 tem uma solução particular x_0 e y_0, todas as outras soluções tem a forma

$$x = x_0 + \left(\frac{a}{d}\right) t$$

$$y = y_0 - \left(\frac{b}{d}\right) t$$

onde t é um número inteiro e $d = m.d.c.(a, b)$.

Para usar o teorema de Pick, vamos supor que $m.d.c.(a, b) = 1$, o que não faz perder a validade da existência de solução, já que 1 divide c.

Considere AB o segmento de reta em $\mathbf{R}^2$ que liga os pontos $A = (0, 0)$ e $B = (a, b)$. Note que, como a e b são primos entre si, não existem outros pontos de coordenadas inteiras no segmento AB. De fato, suponha que exista um ponto $P = (c, d)$ de coordenadas inteiras no segmento AB. Temos que:

$$|c| < |a| \quad \text{e} \quad |d| < |b| \tag{1.17}$$

Por outro lado a equação cartesiana do segmento de reta AB é dada por:

$$y = \frac{b}{a} x \tag{1.18}$$

Assim, substituindo o ponto $P = (c, d)$ na equação 1.18, obtemos:

$$d = \frac{b}{a} c,$$

de onde segue que

$$ad = bc.$$

Como a e b são primos entre si, concluímos que $a|c$ e $b|d$, logo:

$$|a| < |c| \quad \text{e} \quad |b| < |d| \tag{1.19}$$

Como temos que $|c| < |a|$ e $|d| < |b|$ por 1.17, e usando 1.19, temos um absurdo. Comprovando que os únicos pontos de coordenadas inteiras no segmento AB são os os pontos A e B.

Considere o ponto $C = (m, n)$ de coordenadas inteiras mais próximo do segmento AB, onde A, B e C são vértices de um triângulo fundamental.

Sabemos que a área de um triãngulo pode ser calculada pela fórmula

$$A = \frac{|D|}{2}$$

onde D é o determinante da matriz formada pelas coordenadas dos vértices do triângulo.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 1 \\ m & n & 1 \end{vmatrix}$$

Logo, $D = an - bm$, e, pelo corolário 1.2.3, temos que:

$$\frac{1}{2} = \frac{|an - bm|}{2},$$

de onde concluímos que

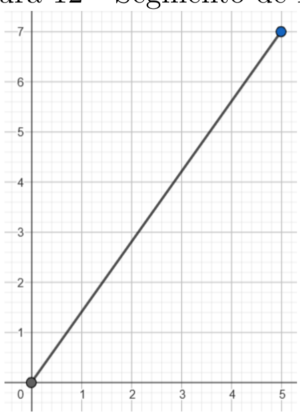
$$|an - bm| = 1. \tag{1.20}$$

Comparando com a equação 1.16 (tomando $c = 1$), notamos que $x = n$ e $y = -m$ ou $x = -n$ e $y = m$. Portanto, um dos pares odenados $(n, -m)$, $(-n, m)$ é solucão da equação 1.16.

Exemplo 1.5.1. *Resolva a equação* $5x + 7y = 8$

Como m.d.c.$(5, 7) = 1$*, então a equação tem soluções inteiras. Agora vamos pegar os dois pontos para formar o segmento de reta, o primeiro é o (0,0), o segundo é obtido da equação* $5x + 7y = 8$*, onde* $a = 5$ *e* $b = 7$*, então temos que o ponto é* $(5, 7)$*.*

Figura 12 - Segmento de reta.



Fonte - O autor.

Observando a Figura 12, notamos que os pontos mais próximos do segmento de reta são $(3,4)$ *e* $(2,3)$. *Considerando um deles, digamos* $(3,4)$, *obtemos, do que foi verificado anteriormente, que ou* $(4,-3)$ *ou* $(-4,3)$ *é uma solução da equação*

$$5x + 7y = 1 \tag{1.21}$$

Agora, por uma verificação simples, notamos que o par $(-4,3)$ *é uma solução para equação 1.21 já que*

$$5(-4) + 7(3) = 1. \tag{1.22}$$

Finalmente, multiplicando por 8 em ambos os lados da equação 1.22 concluímos que:

$$5(-32) + 7(24) = 8.$$

Assim, $x_0 = -32$ *e* $y_0 = 24$ *é uma solução particular da equação do problema. Então, as soluções da equação são* $x = -32 + 7t$ *e* $y = 24 - 5t$, *onde* t *pertence aos naturais.*

2 METODOLOGIA

Nossa pesquisa, de cunho exploratório e delineamento bibliográfico, propõe investigar o ensino do Teorema de Pick em sala de aula a partir de uma revisão bibliográfica, do tipo sistemática integrativa, das dissertações do Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) que abordam o Teorema de Pick e, atravéz dessa revisão, criar uma sequência didática.

Essa pesquisa fortalece a ligação entre teoria e prática no ensino da matemática, utilizando dissertações do PROFMAT. Este programa atende prioritamente

> "Professores de matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência."(site do PROFMAT)

Essas características conferem uma relevância especial à pesquisa, pois os resultados e conhecimentos obtidos são baseados em experiências reais e práticas educacionais concretas. Segundo Gil [6] as teses e dissertações são fontes:"...muito importantes para a pesquisa, pois muitas delas são constituídas por relatórios de investigações científicas originais ou acuradas revisões bibliográficas."(GIL, 2002, p. 66)

A finalidade exploratória deve-se ao pouco conhecimento da existência do Teorema de Pick, embora sua aplicação seja bastante simples. Nosso objetivo é proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito e aprimorar as idéias [6] (GIL, 2002).

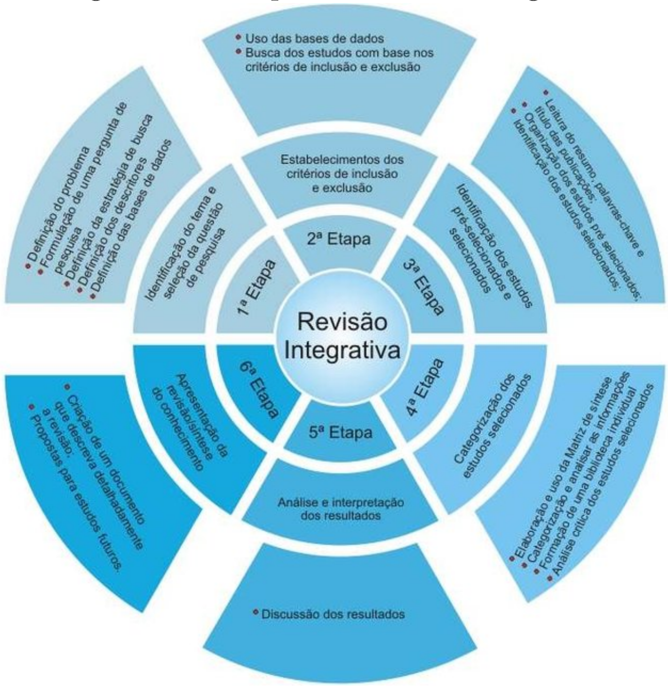
A escolha pelo delineamento bibliográfico se deve as vantagens deste tipo de pesquisa que segundo Gil [6]

> "A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. Essa vantagem torna-se particularmente importante quando o problema de pesquisa requer dados muito dispersos pelo espaço. Por exemplo, seria impossível a um pesquisador percorrer todo o território brasileiro em busca de dados sobre população ou renda per capita; todavia, se tem a sua disposição uma bibliografia adequada, não terá maiores obstáculos para contar com as informações requeridas."(GIL, 2002, p. 59)

Para desenvolver esta pesquisa, adotamos a metodologia da revisão sistemática integrativa. Segundo Botelho, Cunha e Macedo, 2011, essa metodologia: "possibilita a síntese de vários estudos já publicados, permitindo a geração de novos conhecimentos, pautados nos resultados apresentados pelas pesquisas anteriores"(Botelho, Cunha e Macedo, 2011, p. 127). Além disso, a revisão integrativa permite ao leitor avaliar a pertinência dos métodos utilizados na elaboração da revisão. E concluem que a revisão integrativa da literatura torna possível ao pesquisador conhecer a trajetória do tema ao longo do tempo (Botelho, Cunha e Macedo, 2011). Ou seja, a revisão integrativa da literatura nos possibilita sintetizar e analisar os conhecimentos científicos produzidos pelos professores de matemática que cursaram o PROFMAT e fizeram suas dissertação sobre o Teorema de Pick.

Conforme Botelho, Cunha e Macedo : " o processo de revisão integrativa deve seguir uma sucessão de etapas bem definidas." (Boteho, Cunha e Macedo, 2011, p. 129). A figura a seguir descreve brevemente as seis etapas do processo de elaboração da revisão integrativa segundo Botelho, Cunha e Macedo, 2011.

Figura 13 - Etapas da revisão integrativa



Fonte - Botelho, Cunha e Macedo, 2011, p. 129.

2.1 Identificação do tema e seleção da questão de pesquisa

George Pick (1859-1942) foi um matemático austríaco que dentre suas contribuições na matemática se destaca o que hoje chamamos de Teorema de Pick, um resultado sobre o cálculo de áreas de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma rede no plano.

Este teorema ainda é pouco explorado nas escolas, mesmo sendo de fácil compreensão e aplicabilidade. Isto nos motivou a seguinte questão de pesquisa: Como o Teorema de Pick é aplicado nas escolas?

Em busca da resposta para a questão de pesquisa, escolhemos o repositório de dissertações do PROFMAT https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/ para realizar uma revisão sistemática integrativa, pois se tratar de um programa de formação de professores com oferta nacional, e isto favorece este tipo de revisão, visto que são materiais produzidos a partir do contexto natural de professores em diversas instituições de ensino no Brasil.

A revisão integrativa será norteada pelas seguintes perguntas: Quais os benefícios do ensino do Teorema de Pick no aprendizado? Como é a aceitação dos alunos? E, quais as dificuldades de aplicá-lo em sala de aula?

2.2 Estabelecimento de critérios de inclusão e exclusão.

A lista das dissertações de mestrado dos alunos do PROFMAT está disponível no site (https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/). A busca pelos trabalhos disponíveis pode ser realizada através de qualquer um dos seguintes filtros de pesquisa: nome do aluno, nome/sigla da instituição ou título da dissertação. Optamos por buscar as dissertações usando no filtro “título da dissertação”a expressão “Pick”e encontramos 27 dissertações. As dissertações encontradas foram distribuídas na Tabela 1 onde indentificamos a data da defesa, o autor, o título da dissertação e a instituição onde o trabalho foi realizado.

Tabela 1 - Tabela com as dissertações do PROFMAT que possuem no título a expressão “Pick”.

	Defesa	**Autor**	**Título da Dissertação**	**Instituição**
1	29/08/2024	ALTIERRE BORGES SANTOS	TEOREMA DE PICK E APLICAÇÃO EM JOGOS GEOMÉTRICOS	UFG
2	28/12/2023	DAVISON MACHADO MEDEIROS	O TEOREMA DE PICK COMO RECURSO NO ENSINO DO CÁLCULO DE O ÁREAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA	UFPA
3	29/08/2023	CLAUDIO REIS TEIXEIRA	TEOREMA DE PICK: APRESENTANDO UMA FORMA DE CALCULAR ÁREAS E A SUA CONTRIBUIÇÃO PARA O CÁLCULO DE VOLUMES	UFRJ
4	16/06/2023	JOVENILSON MACEDO ALENCAR	UMA PROPOSTA DA UTILIZAÇÃO DO TEOREMA DE PICK PARA ESTIMAR A VEGETAÇÃO NATIVA PERDIDA EM ÁREAS DESMATADAS DO VALE DO SÃO FRANCISCO PERNAMBUCANO	UNIVASF
5	04/03/2022	JOSÉ VALDECI DE SANTANA LIMA JUNIOR	O TEOREMA DE PICK NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ABORDAGEM COM O USO DO GEOGEBRA	UEFS
6	21/02/2022	ADERBAL SOARES DO RÊGO	O TEOREMA DE PICK NO ENSINO-APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA PLANA: CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES	UFPB

	Defesa	Autor	Título da Dissertação	Instituição
7	25/10/2021	ONALDA M. NASCIMENTO DE OLIVEIRA	UMA PROPOSTA DE AÇÃO DIDÁTICA COM O USO DO TEOREMA DE PICK COM APLICAÇÕES AO MEIO AMBIENTE	UNEMAT
8	10/09/2021	JAIRO DE ALMEIDA SANTOS	OFICINA "SALVANDO O PLANETA PENTÁGONO": UMA ABORDAGEM LÚDICA E CONTEXTUALIZADA SOBRE O TEOREMA DE PICK	UESC
9	27/08/2021	WAGNER ROGÉRIO DE OLIVEIRA	UMA PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES USANDO O TEOREMA DE PICK E O APLICATIVO PYTHAGOREA NAS SÉRIES DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	UEM
10	30/07/2021	PAULO HENRIQUE DOROTÉIO	TEOREMA PICK E SUAS APLICAÇÕES	UFV
11	20/04/2021	RUBENS CAIO DE SOUZA	TEOREMA DE PICK COMO PROPOSTA PARA A CONSTRUÇÃO DE AULA DE GEOMETRIA	UNIRIO
12	15/12/2020	WILLIAM DA SILVA SANTOS	A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS E TEOREMA DE PICK	UENF
13	13/04/2020	FRANCISCO ERIVAN DE A. JÚNIOR	JOGO DIGITAL BOMBERPICK: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DO TEOREMA DE PICK	UFRN
14	12/12/2019	RENATO L. COUTINHO	O USO DO TEOREMA DE PICK NOS ENSINOS FUNDAMENTAIS E MÉDIOS	UFF
15	27/04/2019	PEDRO ALBERTO DA CUNHA	CÁLCULO DE ÁREAS ATRAVÉS DO TEOREMA DE PICK PARA O 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	UFAM
16	29/10/2018	CLED VELOSO FREITAS	UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA USANDO O TEOREMA DE PICK	UFMA
17	29/10/2018	MIKE DE SOUZA MORAES	TEOREMA DE PICK: UMA ABORDAGEM PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES ATRAVÉS DO GEOPLANO E GEOGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL	UFAM
18	20/12/2016	FABÍOLA CAROLINE L. SENTO SÉ	O TEOREMA DE PICK E ALGUMAS APLICAÇÕES PARA OS ENSINOS FUNDAMENTAL II E MÉDIO	UFBA
19	09/12/2016	WESLEY DA SILVA CARVALHO	CÁLCULO DAS FÓRMULAS DE EULER E PICK NO GEOPLANO E NO GEOGEBRA	UFG
20	18/06/2016	PAULO DE OLIVEIRA MENESES	TEOREMA DE PICK E TEOREMA ESPACIAL TIPO-PICK: DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO	UFC
21	29/05/2015	RENATA DA COSTA ABREU	TEOREMA DE PICK: UMA ABORDAGEM PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES	UENF
22	09/04/2015	RODRIGO PEREIRA CARVALHO	TEOREMA DE PICK	PUC
23	02/05/2014	IVANA DO MONTE RODRIGUES	ÁREA DE FIGURAS PLANAS E TEOREMA DE PICK: UMA ABORDAGEM DIFERENCIADA PARA ALUNOS DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	UFAM
24	22/02/2014	JOELSON D. V. HERMES	O TEOREMA DE PICK	UFSJ
25	27/09/2013	MARCIO EIJI TAMARI	O TEOREMA DE PICK E APLICAÇÕES	UFABC
26	16/08/2013	FABRICIO OLIVEIRA SOUZA	O TEOREMA DE PICK: UMA NOVA ABORDAGEM SOBRE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS PARA O ENSINO BÁSICO	UFES
27	10/08/2013	FRANCISCO SILVERIO DA SILVA JUNIOR	SOBRE O CÁLCULO DE ÁREAS E O TEOREMA DE PICK	UFAL

A partir da leitura dos resumos e elementos textuais das dissertações encontradas através da estratégia de busca apresentada anteriormente, foi o momento de decidirmos os critérios de inclusão e exclusão.

O foco dessa pesquisa é sobre o Teorema de Pick e como os professores de matemática estão utilizando-o em sala de aula, por este motivo, excluímos aquelas dissertações que não apresentavam proposta educacional. Os trabalhos de Aderbal Soares do Rêgo, Francisco Erivan de Almeida Júnior, Wesley da Silva Carvalho, Rodrigo Pereira Carvalho, Joelson Dayvison Veloso Hermes e Fabricio Oliveira Souza foram excluídos após aplicação deste critério. Após aplicação do critério de exclusão, restaram 21 dissertações para a revisão integrativa.

2.3 Categorização das dissertações selecionadas e análise dos dados

Após a seleção das dissertações, criamos uma planilha na plataforma Google Planilhas com os dados das 21 dissertações. Organizamos estes dados em duas tabelas. Na primeira tabela temos, o autor, o título da dissertação, a instituição e a Unidade Federativa do polo do PROFMAT onde cada dissertação analisada foi produzida.

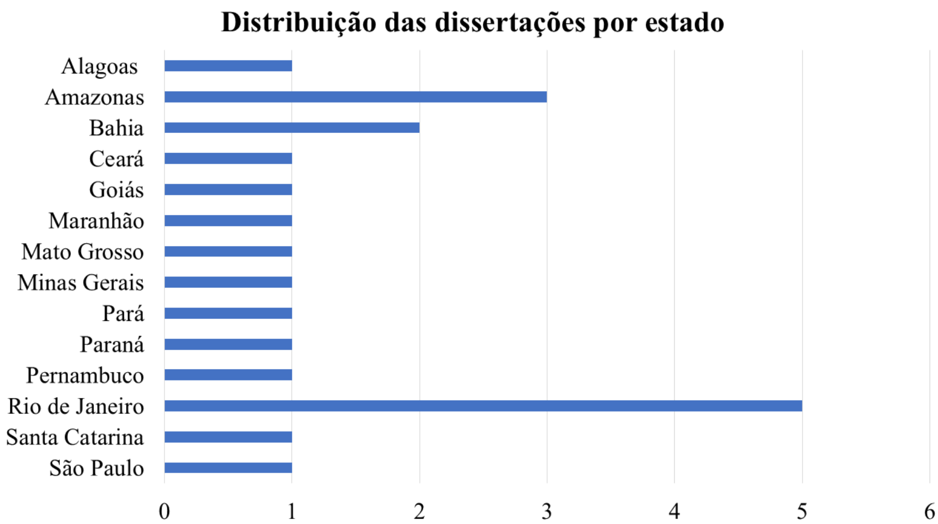
Tabela 2 - Tabela com as dissertações selecionadas para a revisão integrativa.

Autor	**Título da Dissertação**	**Instituição**	**Unidade Federativa**
ALTIERRE BORGES SANTOS	TEOREMA DE PICK E APLICAÇÃO EM JOGOS GEOMÉTRICOS	UFG	GOIÁS
DAVISON MACHADO MEDEIROS	O TEOREMA DE PICK COMO RECURSO NO ENSINO DO CÁLCULO DE O ÁREAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA	UFPA	PARÁ
CLAUDIO REIS TEIXEIRA	TEOREMA DE PICK: APRESENTANDO UMA FORMA DE CALCULAR ÁREAS E A SUA CONTRIBUIÇÃO PARA O CÁLCULO DE VOLUMES	UFRJ	RIO DE JANEIRO
JOVENILSON MACEDO ALENCAR	UMA PROPOSTA DA UTILIZAÇÃO DO TEOREMA DE PICK PARA ESTIMAR A VEGETAÇÃO NATIVA PERDIDA EM ÁREAS DESMATADAS DO VALE DO SÃO FRANCISCO PERNAMBUCANO	UNIVASF	PERNAMBUCO
JOSÉ VALDECI DE SANTANA LIMA JUNIOR	O TEOREMA DE PICK NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ABORDAGEM COM O USO DO GEOGEBRA	UEFS	BAHIA
ONALDA M. NASCIMENTO DE OLIVEIRA	UMA PROPOSTA DE AÇÃO DIDÁTICA COM O USO DO TEOREMA DE PICK COM APLICAÇÕES AO MEIO AMBIENTE	UNEMAT	MATO GROSSO
JAIRO DE ALMEIDA SANTOS	OFICINA ”SALVANDO O PLANETA PENTÁGONO”: UMA ABORDAGEM LÚDICA E CONTEXTUALIZADA SOBRE O TEOREMA DE PICK	UESC	SANTA CATARINA
WAGNER ROGÉRIO DE OLIVEIRA	UMA PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES USANDO O TEOREMA DE PICK E O APLICATIVO PYTHAGOREA NAS SÉRIES DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	UEM	PARANÁ
PAULO HENRIQUE DOROTÉIO	TEOREMA PICK E SUAS APLICAÇÕES	UFV	MINAS GERAIS
RUBENS CAIO DE SOUZA	TEOREMA DE PICK COMO PROPOSTA PARA A CONSTRUÇÃO DE AULA DE GEOMETRIA	UNIRIO	RIO DE JANEIRO

Autor	Título da Dissertação	Instituição	Unidade Federativa
WILLIAM DA SILVA SANTOS	A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS E TEOREMA DE PICK	UENF	RIO DE JANEIRO
RENATO L. COUTINHO	O USO DO TEOREMA DE PICK NOS ENSINOS FUNDAMENTAIS E MÉDIOS	UFF	RIO DE JANEIRO
PEDRO ALBERTO DA CUNHA	CÁLCULO DE ÁREAS ATRAVÉS DO TEOREMA DE PICK PARA O 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	UFAM	AMAZONAS
CLED VELOSO FREITAS	UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA USANDO O TEOREMA DE PICK	UFMA	MARANHÃO
MIKE DE SOUZA MORAES	TEOREMA DE PICK: UMA ABORDAGEM PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES ATRAVÉS DO GEOPLANO E GEOGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL	UFAM	AMAZONAS
FABÍOLA CAROLINE L. SENTO SÉ	O TEOREMA DE PICK E ALGUMAS APLICAÇÕES PARA OS ENSINOS FUNDAMENTAL II E MÉDIO	UFBA	BAHIA
PAULO DE OLIVEIRA MENESES	TEOREMA DE PICK E TEOREMA ESPACIAL TIPO-PICK: DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO	UFC	CEARÁ
RENATA DA COSTA ABREU	TEOREMA DE PICK: UMA ABORDAGEM PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES	UENF	RIO DE JANEIRO
IVANA DO MONTE RODRIGUES	ÁREA DE FIGURAS PLANAS E TEOREMA DE PICK: UMA ABORDAGEM DIFERENCIADA PARA ALUNOS DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	UFAM	AMAZONAS
MARCIO EIJI TAMARI	O TEOREMA DE PICK E APLICAÇÕES	UFABC	SÃO PAULO
FRANCISCO SILVERIO DA SILVA JUNIOR	SOBRE O CÁLCULO DE ÁREAS E O TEOREMA DE PICK	UFAL	ALAGOAS

Analisando a coluna referente as Unidades Federativas, verificamos que o nosso corpus de análise possui boa representatividade com relação às cinco regiões (norte, nordeste, centro-oeste, sudeste e sul) do Brasil, com destaque para o Rio de Janeiro, onde houveram cinco dissertações. Veja o gráfico na Figura 14 a seguir:

Figura 14 - Gráfico com a distribuição de dissertações analisadas por estado



Fonte - Dados da pesquisa.

A análise das dissertações iniciou-se com a observação dos conteúdos que cada dissertação possuía e o estudo das demonstrações usadas para comprovar o Teorema de Pick. Encontramos duas demonstrações distintas: uma por indução, a mesma usada nessa dissertação, e outra usando soma dos ângulos internos de um polígono. Depois, buscamos os trabalhos que apresentavam alguma generalização do teorema e as aplicações: obtivemos sete dissertações com a generalização do Teorema de Pick para polígonos com buracos e a equivalência com o Teorema de Euler para poliedros planos, quatro encontrando o valor aproximado de pi, duas dissertações falando sobre o Teorema de Reeve (veja o APÊNCIDE A) e uma com aplicação na aritmética.

Partindo para o nosso objetivo, fizemos as análises das propostas educacionais. De início, observamos que o GeoGebra[1] e o geoplano (veja o APÊNDICE B) são ferramentas muito úteis para usar ao falar sobre o Teorema de Pick, deste modo passamos a considerar a utilização desles como parte do nossa pesquisa. A segunda tabela contém o autor, se usou o GeoGebra, se usou o geoplano, qual a proposta educacional e se houve alguma amostra, isto é, se a proposta foi aplicada.

Tabela 3 - Tabela com os dados após a revisão das dissertações selecionadas.

Autor	GeoGebra	Geoplano	Proposta educacional	Amostra
ALTIERRE BORGES SANTOS	NÃO	SIM	Jogos envolvendo rede no plano com o objetivo do aluno praticar seus conhecimentos sobre área, pontos colineares, Teorema de Pick e ângulos.	não aplicou
DAVISON MACHADO MEDEIROS	SIM	SIM	Construir polígonos na malha quadriculada e geoplano. Calcular a área de polígonos usando as fórmulas tradicionais e o Teorema de Pick. Calcular a área aproximada de regiões usando um mapa e o geoplano e também usando o Geogebra e Google maps.	não aplicou
CLAUDIO REIS TEIXEIRA	NÃO	NÃO	Usando mapas, folhas com malhas pontilhadas e o Teorema de Pick calcular o valor aproximado das áreas dos diversos estados do Brasil.	9° ano fundamental
JOVENILSON MACEDO ALENCAR	SIM	NÃO	Construir figuras planas no Geogebra e calcular suas áreas usando as fórmulas tradicionais e depois usando o Teorema de Pick. Com o uso do Geogebra, Google maps e o Teorema de Pick calcular o valor aproximado de regiões.	não aplicou
JOSÉ VALDECI DE SANTANA LIMA JUNIOR	SIM	NÃO	Calcular área de polígonos usando malha quadriculada, Geogebra e o Teorema de Pick. Usando o Google Earth, Geogebra e o Teorema de Pick calcular o valor aproximado de regiões.	não aplicou
JAIRO DE ALMEIDA SANTOS	NÃO	SIM	Aulas lúdicas para ensinar o Teorema de Pick, os conceitos e sua demonstração, usando uma história criada (salvando o planeta pentágono) com o auxílio de um Geoplano.	não aplicou
WAGNER ROGÉRIO DE OLIVEIRA	NÃO	NÃO	Calcular área de figuras plana usando . papel quadriculado e o aplicativo Pythagorea	não aplicou

[1]O GeoGebra é um aplicativo de matemático dinâmico que combina geometria, álgebra e cálculo. Ele é uma ferramenta poderosa para o ensino de geometria, permitindo que os alunos vizualizem e manipulem figuras geométricas de maneira interativa. Pode ser acessado através do site: https://www.geogebra.org/classic.

Autor	GeoGebra	Geoplano	Proposta educacional	Amostra
PAULO HENRIQUE DOROTÉIO	SIM	NÃO	Calcular área de figuras plana na malha quadriculada pela contagem de unidade de área. Calcular área de figuras planas usando as fórmulas tradicionais. Calcular área de figuras plana na malha qaudriculada usando Teorema de Pick.	8º ano fundamental
ONALDA MARCIANA NASCIMENTO DE OLIVEIRA	SIM	NÃO	Calcular a área de polígonos criados no Geogebra, primeiro usando as fórmulas tradicionais e depois usando o Teorema de Pick. Com o auxilio do Geogebra construir polígonos irregulares com e sem buracos, e usar o Teorema de Pick para calcular as suas áreas. Utilizando o Geogebra e o Teorema de Pick, encontrar o valor de pi. Usando o Google Maps, o Geogebra e o Teorema de Pick, calcular a área aproximada do estado do Mato Grosso e do bioma amazônico no estado do Mato Grosso. Calcular o volume de Prismas criados no Geogebra, usando o Teorema de Pick para achar o valor da base. Usando a imagem de troncos de árvores, o Geogebra e o Teorema de pick, calcular o volume . de troncos de árvores	não aplicou
RUBENS CAIO DE SOUZA	SIM	SIM	Construir com os alunos geoplanos. Construir figuras planas no geoplano e explicar o que são pontos de borda e fronteira. Decompor polígonos em triiângulos fundamentais e calcular a sua área. Calcular a área dos polígono no geoplano uitlizando o Teorema de Pick. Usando o Geogebra ou uma folha quadriculada com plano cartesiano, construir figuras sendo dadas as coordenaads dos seus vértices e depois calcular a área usando o Teorema de Pick.	não aplicou
WILLIAM DA SILVA SANTOS	NÃO	NÃO	Calcular área de figuras plana na malha quadriculada pela contagem de unidade de área. Depois construir junto com os alunos as fórmulas tradicionais. Aplicar as fórmulas em execícios na malha quadriculada e situações problema. E no final apresentar o Teorema de Pick e aplicar em execícios e questões da OBMEP.	8º ano fundamental
RENATO LUCAS COUTINHO	NÃO	NÃO	Exercícios e questões de exame envolvendo cálculo de área numa malha quadriculada. Para o 3° ano do ensino médio uma turma usou o Teorema de Pick e a outra usou as fórmulas tradicionais para comparar os resultados.	9º ano fundamental 3º ano médio
PEDRO ALBERTO DA CUNHA	SIM	NÃO	Usou a malha quadriculada para construir plígonos simples e calcular as áreas usando as fórmulas tradicionais, e depois repetir o mesmo procedimento só que usando o Teorema de Pick. Calcular áreas de regiões usando seu mapa e o Teorema de Pick. No final um questionário sobre qual seria o melhor método para calcular as áreas.	ensino fundamental
CLED VELOSO FREITAS	SIM	SIM	Usar o geoplano para construir polígonos simples e calcular as áreas por meio das fórmulas clássicas ou quantidade de quadrados. Calcular área de regiões com cerâmicas quadradas. Repetir os dois procedimentos anteriores só que usando o Teorema de Pick. Calcular área de regiões usando o Google Maps e o Geogebra.	não aplicou
MIKE DE SOUZA MORAES	SIM	SIM	Usar o geoplano e malha quadriculada para construir polígonos simples. Calcular a área de polígonos com e sem buracos na malha quadriculada.	não aplicou
FABÍOLA CAROLINE LUZ SENTO SÉ	SIM	NÃO	Calcular área de um polígono usando malha quadriculada, calcular a área de um polígono formado por retas num plano cartesiano e calcular área de um polígono com buraco.	não aplicou
PAULO DE OLIVEIRA MENESES	NÃO	SIM	Utilizar o geoplano para cálculo de área de figura plana e valor aproximado da área do estado de Fortaleza. Utilizar uma grade (cubo) para achar o volume de poliedros.	3º ano médio
RENATA DA COSTA ABREU	NÃO	SIM	Calcular área de um polígono usando malha quadriculada, geoplano e o applet. Encontrar a área aproxiamada do estado do Rio de Janeiro e o valor aproximado de PI.	1º ano médio

Autor	GeoGebra	Geoplano	Proposta educacional	Amostra
MARCIO EIJI TAMARI	NÃO	NÃO	Calcular área de polígonos no papel pontilhado e calcular a área da palma da mão.	não aplicou
IVANA DO MONTE RODRIGUES	NÃO	NÃO	Utilizou-se o tangram para encontrar a fórmula da área de figuras planas e aplicar em exercícios. Depois encontrar os valores das áreas do exercício anterior usando o Teorema de Pick. E por último encontrar a área aproximada de regiões usando mapa e papel quadriculado.	6º ano fundamental
FRANCISCO SILVERIO DA SILVA JUNIOR	SIM	NÃO	Calcular área de polígonos desenhados no papel milimetrado. Calcular a área e um d estado usando o Google Maps e o Geogebra.	não aplicou

Das 21 dissertações analisadas, tivemos 11 que usaram o GeoGebra, e 8 que usaram o Geoplano na sua proposta educacional. Como se pode observar, houve uma preferência pelo GeoGebra. Isso sinaliza, de certa forma, uma maior popularidade e versatilidade dessa ferramenta aplicada ao ensino. Em consequência disso, infere-se que uma certa preferência por ferramentas digitais mais avançadas.

Em 11 das 21 dissertações, a proposta educacional envolvia calcular o valor aproximado da área de regiões como cidades e estados. Para isso foram usados mapas impressos, ou aplicativos como o Google Maps e o Google Earth. Para construir os polígonos aproximados com o contorno das regiões foram usados papel milimetrado, ou GeoGebra, ou Geoplano. Veja na Figura 15 um exemplo de atividade com mapa no Geogebra. Esse tipo de atividade ajuda tanto a fixar o Teorema de Pick, como a trabalhar com os alunos valores aproximados e escalas.

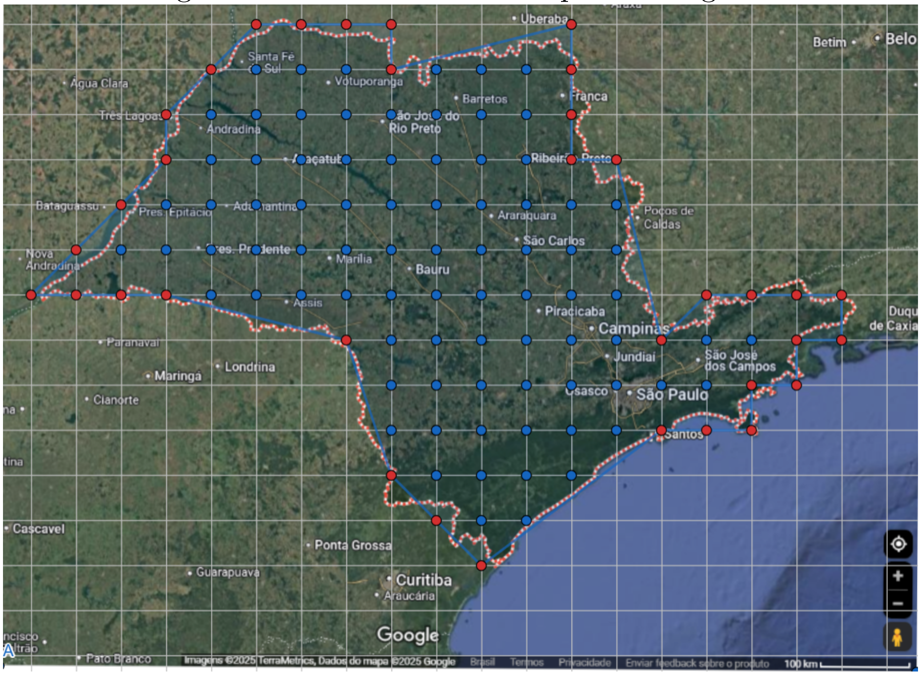
2.4 Análise e interpretação dos resultados

Após a análise das propostas educacionais nas 21 dissertações selecionadas, direcionamos nosso foco àquelas 8 dissertações (veja a Tabela 4 a seguir) com propostas educacionais aplicadas em sala de aula.

A nossa pesquisa obteve uma amostra de 436 alunos, sendo 56,9% do ensino fundamental e 43,1% do ensino médio (Veja o gráfico na Figura 16). A nossa amostra abrange 4 Unidades Federativas sendo elas: Rio de Janeiro, Minas Gerais, Amazonas e Ceará. Contudo, mais de 50% dos alunos são do estado do Rio de Janeiro.

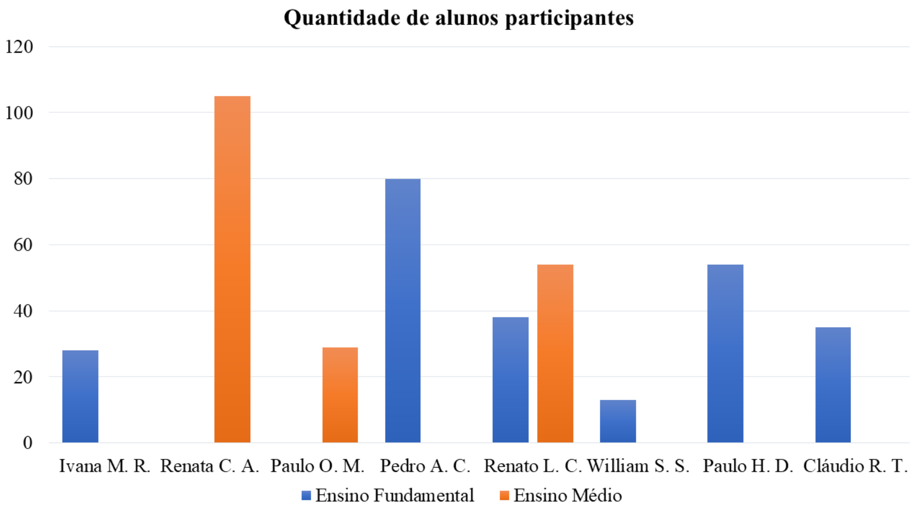
Vamos agora descrever os resultados da aplicação de cada proposta educacional de acordo com as perguntas que norteiam esta revisão integrativa, que são: Quais os benefícios do ensino do Teorema de Pick no aprendizado? Como é a aceitação dos alunos? Quais as dificuldades encontradas ao se aplicar em sala de aula?

Figura 15 - Atividade com mapa no Geogebra.



Fonte: O autor.

Figura 16 - Gráfico com a amostra de cada proposta educacional aplicada



Fonte - Dados da pesquisa.

Na dissertação de Ivana do Monte Rodrigues foi aplicada a proposta educacional para uma turma do 6° ano do ensino fundamental com 28 alunos, de uma escola militar do estado do Amazonas. Depois das atividades realizadas em sala de aula foram feitas duas perguntas, a primeira sobre as vantagens e desvantagens da aplicação do Teorema de Pick, e a segunda sobre a atividade realizada com os mapas. Em relação a primeira pergunta os alunos apontaram que as vantagens são que não precisam usar várias fórmulas, teria uma fórmula única para calcular as áreas, além de conseguir calcular áreas de figuras mais

Tabela 4 - Dissertações onde aplicou-se a proposta educacional.

Autor	**Proposta educacional**	**Amostra**
CLAUDIO REIS TEIXEIRA	Usando mapas, folhas com malhas pontilhadas e o Teorema de Pick calcular o valor aproximado das áreas dos diversos estados do Brasil.	35 alunos 9° ano fundamental
PAULO HENRIQUE DOROTÉIO	Calcular área de figuras plana na malha quadriculada pela contagem de unidade de área. Calcular área de figuras planas usando as fórmulas tradicionais. Calcular área de figuras plana na malha qaudriculada usando Teorema de Pick.	54 alunos 8º ano fundamental
WILLIAM DA SILVA SANTOS	Calcular área de figuras plana na malha quadriculada pela contagem de unidade de área. Depois construir junto com os alunos as fórmulas tradicionais. Aplicar as fórmulas em execícios na malha quadriculada e situações problema. E no final apresentar o Teorema de Pick e aplicar em execícios e questões da OBMEP.	13 alunos 8º ano fundamental
RENATO LUCAS COUTINHO	Exercícios e questões de exame envolvendo cálculo de área numa malha quadriculada. Para o 3° ano do ensino médio uma turma usou o Teorema de Pick e a outra usou as fórmulas tradicionais para comparar os resultados.	38 alunos 9º ano 54 alunos 3º ano médio
PEDRO ALBERTO DA CUNHA	Usou a malha quadriculada para construir plígonos simples e calcular as áreas usando as fórmulas tradicionais, e depois repetir o mesmo procedimento só que usando o Teorema de Pick. Calcular áreas de regiões usando seu mapa e o Teorema de Pick. No final um questionário sobre qual seria o melhor método para calcular as áreas.	80 alunos ensino fundamental
PAULO DE OLIVEIRA MENESES	Utilizar o geoplano para cálculo de área de figura plana e valor aproximado da área do estado de Fortaleza. Utilizar uma grade (cubo) para achar o volume de poliedros.	29 alunos 3º ano médio
RENATA DA COSTA ABREU	Calcular área de um polígono usando malha quadriculada, geoplano e o applet. Encontrar a área aproxiamada do estado do Rio de Janeiro e o valor aproximado de PI.	105 alunos 1º ano médio
IVANA DO MONTE RODRIGUES	Utilizou-se o tangram para encontrar a fórmula da área de figuras planas e aplicar em exercícios. Depois encontrar os valores das áreas do exercício anterior usando o Teorema de Pick. E por último encontrar a área aproximada de regiões usando mapa e papel quadriculado.	28 alunos 6º ano fundamental

complexas e de maneira mais rápida. Enquanto as desvantagens seriam que as figuras precisam estar numa malha quadriculada e ser um polígono com seus vértices coincidindo com os pontos da malha. Em relação a segunda pergunta, os alunos apontaram que gostaram da atividade e que serviu para executar na prática o Teorema de Pick, além de ajudar a fixar o conteúdo.

Na dissertação de Renata da Costa Abreu aplicou-se a proposta educacional para turmas do 1° ano do ensino médio com um total de 105 alunos, de uma escola pública do estado do Rio de Janeiro. Em sua dissertação ela apontou que os resultados foram positivos e houve um envolvimento significativo dos alunos nas atividades. Apontou a falta de pré-requisitos dos alunos, principalmente nas atividades com o mapa e encontrar o valor próximo de pi, o que acabou atrapalhando nas suas resoluções. E também apontou a falta de infraestrutura das escolas, ainda mais quando se precisa da parte tecnológica.

A proposta educacional de Paulo Oliveira Meneses foi dividida em duas partes, a primeira focada em calcular área usando geoplano e a segunda calcular volume de poliedros usando uma grade no formato de um cubo, e foram aplicadas para alunos do 3° ano do ensino médio, num grupo com 24 alunos e outro com 5 alunos, de uma escola particular do estado do Ceará. Em relação ao trabalho de calcular área com o geoplano, os alunos apontaram que usar o Teorema de Pick seria melhor que as fórmulas tradicionais, porque além de ser única, serve para qualquer polígono simples. Em relação ao geoplano apontaram que como ele foi feito com pregos, em alguns momentos ele poderiam se machucar, e que se os pregos fossem mais próximos teria um erro menor em relação a área do mapa, pois o polígono teria um formato mais próximo do mapa. Na atividade de calcular volume, os alunos tiveram facilidade em entender a rede secundária $\mathbb{Z}_n^3$ e contar os seus pontos. Para as figuras construídas que possuíam fórmulas definidas, os alunos acharam mais prático o uso da geometria espacial, enquanto as que não possuem fórmula bem definida na geometria espacial acharam mais viável o Teorema de Reeve. Uma das vantagens citadas é que aprenderam mais uma alternativa para o cálculo de volume, já uma desvantagem é que em algumas figuras a contagem pode demorar.

Pedro Alberto Cunha fez a sua pesquisa em duas turmas do ensino fundamental de uma escola da rede estadual do Amazonas, com 40 alunos cada. No final das atividades os alunos foram questionados sobre qual seria o melhor procedimento para ser aplicado no cálculo de área de figuras planas na malha quadriculada, e preferiram o Teorema de Pick em vez das fórmulas tradicionais, pois acharam mais fácil de usar, além de ser única. Acharam difícil o cálculo de área usando mapa, mas gostaram porque foi um trabalho diferente.

Renato Lucas Coutinho aplicou atividades em uma turma do 9° do ensino fundamental, com 38 alunos, localizado no Rio de Janeiro, e em duas turmas do 3° ano do ensino médio, com 27 alunos cada, de uma escola de Macaé, ambas privadas. As atividades envolviam resolver questões de vestibulares que abordavam o cálculo de área de figura plana numa malha quadriculada. Ele aplicou os mesmos exercícios nas duas turmas do ensino médio, mas só em uma delas foi apresentado o Teorema de pick. Foi observado que na turma que foi dado o Teorema de Pick houve apenas 5% de erro, enquanto na outra turma houve 38% de erro além de demorarem mais tempo para concluir.

A pesquisa de William da Silva Santos foi realizado durante a pandemia e acabou acontecendo de forma remota através do Google Meet, e participaram dessas aulas 13 alunos do oitavo ano, de uma escola pública do estado do Espirito Santo. Ele desenvolveu uma proposta educacional em que os alunos seriam os criadores dos seus próprios conhecimentos. Ele relatou que os alunos se saíram bem durante as atividades, mas alguns tiveram dificuldades nas questões envolvendo problemas, apontando que alguns alunos confundiram área com perímetro, mesmo sem ter mencionado este assunto. Em relação ao Teorema de Pick, os alunos resolveram todas as questões corretamente, e disseram que gostaram pois é uma fórmula única, o que torna mais fácil.

A pesquisa de Paulo Henrique Dorotéio também ocorreu durante a pandemia e a ferramenta ulizada foi o Google Classroom e Google Forms, tendo uma participação de 44 alunos no primeiro momento e 54 em um segundo momento, de uma escola pública do estado de Minas Gerais. Os alunos tiveram um bom percentual de acertos nas questões envolvendo o Teorema de Pick. Em uma das perguntas do formulário a maioria apontou ter mais facilidade para calcular a área usando o Teorema de Pick, e somente um preferiu pelo método da decomposição por já dominar as fórmulas.

Claudio Reis Teixeira aplicou a atividade de calcular a área dos estados brasileiro em uma turma do 9° ano com 35 alunos, em uma escola pública do estado do Rio de Janeiro. Ele apontou que alguns alunos tiveram dificuldades em desenhar o estado no formato poligonal e a contagem de pontos foi demorada e cansativa, causando alguns erros de percentual grande, mas por outro lado teve um aluno que conseguiu chegar a encontrar a área do estado do Ceará com um erro de $0,69\%$ apenas usando um mapa e papel com malha pontilhada. E no final os alunos aprovaram e disseram que gostariam de mais atividades diferenciadas.

As pesquisas mostram que o Teorema de Pick é amplamente apreciado pelos alunos por ser uma fórmula simples e rápida, útil para o cálculo de áreas de figuras planas, com os alunos expressando interesse em atividades mais práticas no futuro. Porém, as dificuldades mais comuns incluem a falta de pré-requisitos, infraestrutura inadequada e o desafio de lidar com ferramentas como mapas e malhas quadriculadas.

Essa pesquisa também mostrou que a proposta do PROFMAT de ser um programa que atende prioritamente professores de matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, tem sido efetivo, já que das 8 dissertações aplicadas em sala de aula, tivemos 5 em escolas públicas.

3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA: TEOREMA DE PICK

Após a análise de todas as propostas didáticas, feitas no capítulo anterior, apresentamos agora uma sequência didática baseada nas boas práticas relatadas nas dissertações em que houveram aplicação em sala de aula.

3.1 Sequência didática

O conceito de Sequência Didática, de acordo com Cabral (2017) [7], originou-se na França com o objetivo de: "...minimizar as dificuldades recorrentes da produção da língua escrita"(CABRAL, 2017, p. 32). Ainda segundo Cabral:

> " No Brasil a concepção surge nos documentos oficiais dos Parâmetros Curriculares Nacionais como "projetos"e "atividades sequenciadas". Atualmente, as sequências didáticas continuam vinculadas ao estudo do gênero textual, porém, mais recentemente tem sido utilizada em diversos contextos de aprendizagem e, portanto, ligada a diferentes objetos do conhecimento.(CABRAL, 2017, p. 32).

Nesse contexto, Zabala (1998) [8] destaca que: "uma sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm início e fim conhecidos"(ZABALA, 1998, p. 21). Ainda, para Dolz, Noverraz, e Schneuwly (2004) [9]: "uma sequência didática é um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero oral ou escrito". (DOLZ, NOVERRAZ e SCHNEUWLY, 2004 p. 97). Por fim, para Cerqueira (2013) [10]:

> " Trata-se de um conjunto de atividades concebidas e organizadas de tal forma que cada etapa está interligada à outra. Ao planejá-la, o professor tem como objetivo ensinar um determinado conteúdo, começando por uma atividade simples até chegar às operações mais complexas. Ou seja, elas são elaboradas de modo a respeitar os graus de dificuldade que os alunos irão encontrar nas tarefas, tornando possível sua superação."(CERQUEIRA, 2013, p. 3).

Sendo assim, percebe-se que a sequência didática é uma estratégia fundamental no planejamento pedagógico, uma vez que organiza o ensino em etapas progressivas e interligadas, garantindo que os estudantes alcancem os objetivos de aprendizagem estabelecidos. Além de organizar o conteúdo a ser ensinado, a sequência didática permite ao professor antecipar e superar possíveis dificuldades que os alunos possam encontrar.

Para Cerqueira:

> "Quando bem elaborada, a sequência didática privilegia os conhecimentos prévios dos alunos, permitindo que eles argumentem e apresentem hipóteses, o que também favorece a boa interação entre colegas e com o professor. Essas atividades devem instigar a curiosidade e motivar o aluno a aprender os novos conceitos."(CERQUEIRA, 2013, p.6)

Portanto, uma das principais vantagens de uma sequência didática bem planejada é a possibilidade de progressão gradual do conhecimento. Ao organizar as atividades de forma crescente em termos de complexidade, o professor permite que os alunos desenvolvam suas competências de forma sistemática e contínua.

Esta sequência didática propõe apresentar o Teorema de Pick utilizando diversas ferramentas digitais e físicas, como o GeoGebra, o geoplano e o Google Maps. Através dessas atividades, os alunos terão a oportunidade de aplicar conceitos matemáticos em contextos práticos e interativos, desenvolvendo uma compreensão mais profunda e engajante da geometria.

Além disso, os alunos serão desafiados a aproximar o valor de π utilizando o Teorema de Pick, conectando a teoria matemática com uma das constantes mais importantes da matemática. Esta abordagem integrada visa não apenas ensinar o teorema em si, mas também estimular o pensamento crítico e a aplicação prática dos conhecimentos prévios e adquiridos.

O contato com processos utilizados para demonstração de resultados em Matemática permite aos alunos entender que a matemática é construída sobre uma base sólida de lógica e evidências. Neste contexto, Cabral destaca:

> "O objetivo não é estabelecer uma demonstração no sentido mais rigoroso da palavra, mas estabelecer um conjunto de argumentos dotados de certas articulações entre si que não "firam" a Matemática como disciplina formal, mas que, ao mesmo tempo, possibilitem ao aluno a reconstrução mais significativa que esteja um pouco além do simples estabelecimento inicial do algoritmo sem qualquer explicaço prévia que justifique os procedimentos algorítmicos adotados mediante um processo de discursivo".(CABRAL, 2017, p. 11-12).

De acordo com a análise feita no capítulo anterior, concluímos que o melhor momento para apresentar o Teorema de Pick é no 9º ano do ensino fundamental devido a alguns pré-requisitos que os alunos precisam saber que estão descritos nas seguintes competências da área de Matemática:

(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do primeiro quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.

(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.

(EF07MA33) Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.

(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

Portanto, essa sequência didática tem como público alvo alunos do 9º ano do ensino fundamental e abrange às seguintes habilidades relacionadas às competências da área de Matemática:

(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Objetivo: Apresentar o Teorema de Pick como uma ferramenta para calcular a área de regiões poligonais. Aplicar esse conhecimento em ferramentas digitais como GeoGebra, geoplano e Google Maps. Além disso, aproximar o valor de π usando o Teorema de Pick.

Materiais necessários:

- Atividades impressas
- Computadores ou tablets com acesso à internet
- Software GeoGebra
- Geoplano físico ou virtual
- Acesso ao Google Maps

Desenvolvimento: A sequência será desenvolvida em 5 aulas de 50 minutos.

3.2 Aula 1: Áreas de polígonos na malha quadriculada

Objetivos

Compreender o conceito de área, encontrar a área de um polígono na malha quadriculada utilizando as fórmulas de cálculo de áreas de quadrados, retângulos e triângulos, compreender como a composição e a decomposição podem ajudar a calcular a área de polígonos.

Recursos

Quadro ou slide, caneta, lápis e material impresso.

Desenvolvimento

Na primeira aula iremos relembrar o conceito da área de um polígono como a medida da superfície delimitada por seus contornos. A medida da unidade de área (u.a.) é o quadrado de uma unidade de comprimento, como por exemplo metros quadrados (m^2). O que seria um polígono simples e um polígono não-simples. As fórmulas para o cálculo de áreas do quadrado, retângulo e triângulo. Como podemos decompor os polígonos em triângulos e retângulos.

Sistematização das aprendizagens

Será distribuída uma folha para cada aluno com exercícios sobre encontrar o valor da área de polígonos simples numa malha quadriculada. A lista de exercícios se encontra no Apêndice C.

3.3 Aula 2 : Apresentação do Teorema de Pick

Objetivos

Apresentar o GeoGebra, compreender o que é um triângulo fundamental, a decomposição de um polígono em triângulos fundamentais e a demonstração do Teorema de Pick. Encontrar a área de polígonos usando o Teorema de Pick.

Recursos

Geogebra, quadro, caneta, lápis e material impresso.

Desenvolvimento

Na segunda aula, os alunos serão levados para a sala de informática e separados em grupos e cada grupo terá disponível um computador. O professor irá apresentar o GeoGebra para os alunos que ainda não conhecem suas funcionalidades.

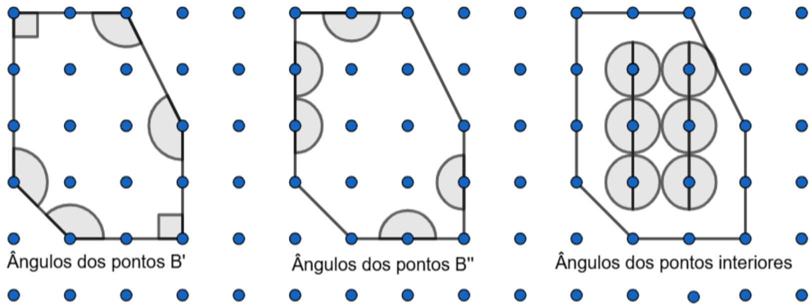
Depois será explicado aos alunos o que é um triângulo fundamental. Em seguida, eles terão que construir alguns deles no GeoGebra. O objetivo é eles deduzirem por repetições que a área de um triângulo fundamental será sempre igual a $\frac{1}{2}$ u.a.. Mais adiante pediremos a eles que desenhem um polígono simples de vários lados, e eles terão que decompor esse polígono em triângulos fundamentais, como foi feito em 1.2.2.

Então será feito a demonstração com os alunos do Teorema de Pick usando soma dos ângulos internos de um polígono.

Demonstração. Seja P um polígono simples, podemos dividir ele em triângulos fundamentais que chamaremos de T, como a área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$, teremos que $A(P) = \frac{T}{2}$.

Sejam B' o número de vértices de P, B'' o número de pontos da rede que estão na borda de P tirando os vértices (temos assim que $B = B' + B''$, onde B é o número de pontos que estão sobre a borda), e, S_B a soma dos ângulos que estão na borda. Seja I o número de pontos do interior do polígono, temos que S_I é soma dos ângulos que estão no interior do polígono, como mostra a Figura 17.

Figura 17 - Representação dos pontos B', B'' e I.



Fonte - O autor.

Assim, temos:

$$S_B = (B' - 2)180^\circ + 180^\circ B''$$

$$S_B = (B' + B'' - 2)180^\circ$$

$$S_B = (B - 2)180^\circ$$

$$S_I = 360^\circ I$$

$$S_B + S_I = (B - 2)180^\circ + 360^\circ I$$

$$S_B + S_I = (B + 2I - 2)180^\circ$$

Como temos T triângulos fundamentais, a soma dos seus ângulos internos é igual a $180^\circ T$, que representa o valor de $S_B + S_I$, logo:

$$180^\circ T = (B + 2I - 2)180^\circ$$

$$\frac{T}{2} = \frac{B}{2} + I - 1$$

$$A(P) = \frac{B}{2} + I - 1$$

$\square$

Sistematização das aprendizagens

Os alunos irão refazer a lista da primeira aula, só que dessa vez irão usar o Teorema de Pick para resolver os exercícios, e então comparar os resultados.

3.4 Aula 3: Uso de geoplano

Objetivos

Apresentar o Geoplano para auxiliar o cálculo de áreas de polígonos simples através da contagem de pontos.

Recursos

Geoplano físico ou virtual, elástico, quadro ou slide, caneta, lápis e material impresso.

Desenvolvimento

Na terceira aula será apresentado o Geoplano para os alunos, a escola que não tiver o Geoplano físico pode usar o virtual. A turma será dividida em grupos de modo que cada grupo tenha um Geoplano e elásticos.

Sistematização das aprendizagens

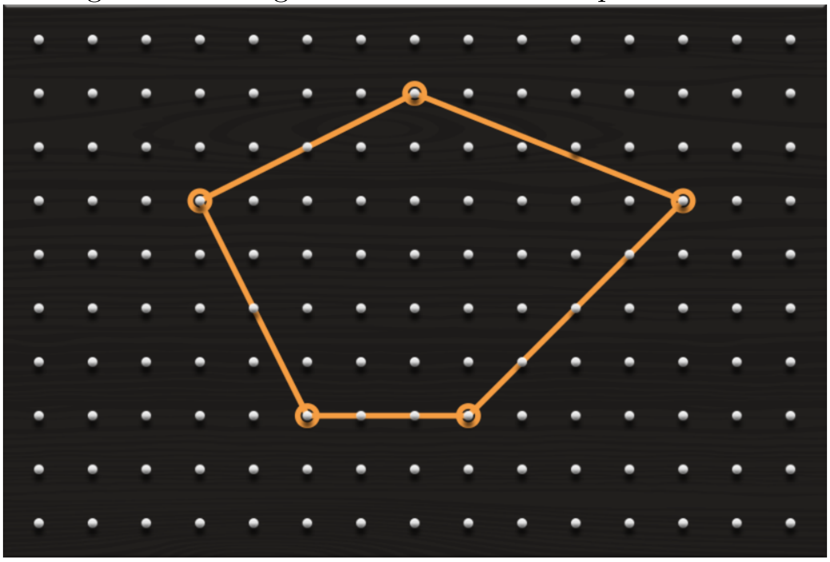
Nessa avaliação iremos considerar que cada prego será uma coordenada inteira, onde a distância de um prego para o mais próximo é igual a $1u.c.$, e o prego do canto inferior esquerdo será a coordenada $(0,0)$. Será entregue uma folha para cada grupo com coordenadas que serão os vértices dos polígonos, depois de terem construído os polígonos com elásticos, usarão o Teorema de Pick para calcular o valor das áreas.

Exemplo 3.4.1. *Seja os pares ordenados* $(3,6)$*,* $(5,2)$*,* $(7,8)$*,* $(8,2)$ *e* $(12,6)$ *os vértices de um polígono, construa ele no Geoplano e use o Teorema de Pick para achar o valor da área.*

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

$$A = \frac{12}{2} + 28 - 1 = 33u.a.$$

Figura 18 - Polígono construído no Geoplano virtual.



Fonte: O autor.

3.5 Aula 4: Calcular a área dos estados brasileiros

Objetivos

Reforçar o conceito de área utilizando o Teorema de Pick para calcular área de regiões representadas em mapas e o conceito de escala.

Recursos

GeoGebra, Google Maps, Quadro ou slide, caneta, lápis e caderno.

Desenvolvimento

Os alunos serão levados para a sala de informática, onde o professor irá explicar para os alunos que eles irão calcular o valor da área dos estados brasileiros, usando o Google Maps e o GeoGebra. O professor irá dividir a turma em grupos de uma maneira que todos tenham acesso ao computador e irá sortear um estado para cada grupo.

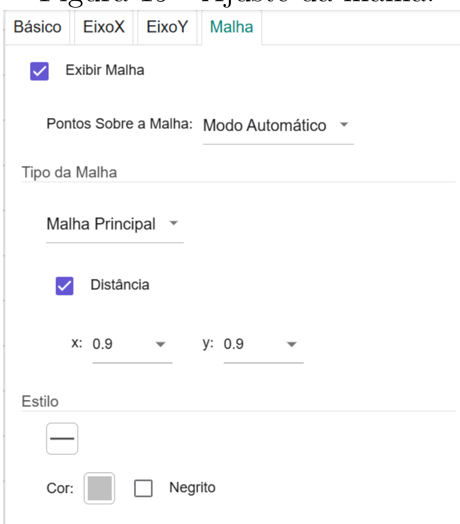
Sistematização das aprendizagens

O professor deverá guiar os alunos durante a atividade através do roteiro a seguir.

- Cada grupo irá procurar o estado sorteado no Google Maps. Em seguida irá tirar um print do mapa apertando as teclas PrtSc + Alt. Nesse print deverá conter todo o contorno do estado mais a escala localizada no canto direito inferior, e salvar o arquivo em alguma pasta.

- Depois, irão abrir o Geogebra e verificar com uma régua se a distância entre os pontos da malha estão igual a $1cm$, se não estiver vamos ajustar para 1 cm, o que ajudará nos cálculos. Para fazer esse ajuste iremos no menu opções que fica no canto direito superior, tirar a opção eixo, marcar malha principal e ir em configurações. Depois seleciona a opção malha e irão ajustar as medidas das distâncias para que no Geogebra fique igual a $1cm$.

Figura 19 - Ajuste da malha.



Fonte: O autor.

Neste trabalho as medidas ficaram ajustadas para $1cm$ na régua com as medidas $x = 0,9$ e $y = 0,9$.

- Em seguida irão em ferramentas e selecionar a opção inserir imagem e escolher a pasta do computador onde está salvo o print. Depois de inserir o print no Geogebra, irão clicar em cima dele e aparecerá 4 opções, irão clicar no item que aparece 3 bolinhas, em seguidas em configurações e marcar a opção imagem de fundo. Os alunos deverão verificar se a barra de escala, localizado no canto esquerdo inferior do print, está em 2 cm usando uma régua, se não estiver, irão ajustar usando um dos pontos que surgiram juntos com o mapa.

- Agora os alunos irão fazer um polígono que se aproxima ao contorno do estado escolhido, onde os vértices são os pontos de encontro da malha. Então, os alunos irão marcar e contar os pontos na borda e os pontos no interior, e usarão o Teorema de Pick para achar o valor da área em cm^2. E por último eles usarão a escala para encontrar o valor aproximado do estado.

Exemplo 3.5.1. *A Figura 15 é o mapa do estado de São Paulo, onde cada* $2cm$ *corresponde* $100km$. *Observe que o polígono construído em volta dele tem 35 pontos da borda e 83 pontos do interior, fazendo que a sua área seja igual a* $99,5cm^2$. *Denotando por* A *a área aproximada de São Paulo, temos que:*

$$\frac{A}{99,5cm^2} = \left(\frac{100km}{2cm}\right)^2$$

$$A = 248.750Km^2$$

O resultado encontrado é um valor bem próximo da área real que, segundo o IBGE, é de $248.219,485km^2$.

3.6 Aula 5: Valor aproximado de π

Objetivos

Relacionar o Teorema de Pick com o valor aproximado de π.

Recursos

GeoGebra, quadro ou slide, caneta, lápis e caderno.

Desenvolvimento

Nessa aula será lembrado junto com os alunos que o π está relacionado com a área do círculo (A_c) pela fórmula:

$$\pi = \frac{A_c}{r^2} \tag{3.1}$$

Explicando então que podemos utilizar o Teorema de Pick para encontrar o valor aproximado de π através de polígonos que se aproximem melhor do círculo.

Sistematização das aprendizagens

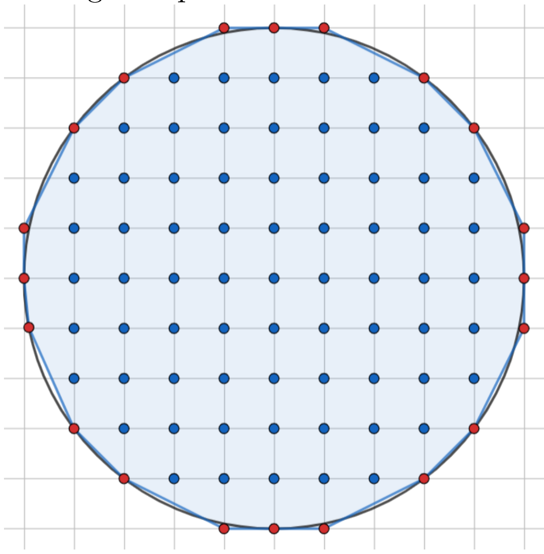
Para essa atividade será usado o Geogebra, onde o alunos irão fazer uma circunferência de raio inteiro e depois fazer o polígono que mais se aproxima dessa circunferência. Então, usarão o Teorema de Pick para encontrar o valor da área do polígono (A_p), e em seguida usarão a fórmula

$$\pi \approx \frac{A_p}{r^2} \tag{3.2}$$

para encontrar o valor aproximado de π. Os alunos poderão construir várias circunferências de forma crescente e observar que quanto maior for o raio, mais próximo vai ser essa aproximação. Ficando como sugestão que o professor escolha 4 raios diferentes para os alunos acharem o valor aproximado de π.

Exemplo 3.6.1. *A Figura 20 é uma circunferência de raio 5, e o icoságono foi o polígono que melhor se aproximou dessa circunferência.*

Figura 20 - Icoságono aproximado da circunferência de raio 5.



Fonte: O autor.

Agora vamos usar o Teorema de Pick para calcular a área do icoságono (A_i)*, onde temos* 20 *pontos na borda e* 69 *pontos no interior, logo:*

$$A_i = \frac{20}{2} + 69 - 1 = 78$$

Usando esse resultado na fórmula 3.2, obtemos que:

$$\pi \approx \frac{78}{25} = 3,12$$

que é uma aproximação bem razoável.

CONCLUSÃO

Este trabalho investigou o uso do Teorema de Pick em sala de aula, sob o seguinte questionamento: Como o Teorema de Pick é aplicado nas escolas? Na busca da resposta para tal pergunta, realizamos uma revisão sistemática integrativa nas produções discentes do PROFMAT que trazem alguma proposta educacional acerca do Teorema de Pick. A revisão foi norteada pelas seguintes perguntas: Quais os benefícios do ensino do Teorema de Pick no aprendizado? Como é a aceitação dos alunos? E, quais as dificuldades de aplicá-lo em sala de aula?

Analisamos um total de 21 dissertações, das quais realizamos um estudo mais detalhado daquelas 8 onde aplicou-se a proposta educacional. Com base nos resultados obtidos em sala de aula, as atividades diferenciadas envolvendo o Teorema de Pick, o uso de materiais concretos como o Geoplano e mapas, e de softwares como Geogebra e Google Maps, se mostraram eficazes para o aprendizado, com os alunos expressando interesse em atividades mais práticas. Todos os trabalhos concluem que o Teorema de Pick é eficaz no aprendizado e mostram que o assunto foi bastante apreciado pelo alunos, principalmente por se tratar de uma fórmula simples e rápida.

No entanto, a preparação, o suporte adequado para os alunos e a infraestrutura escolar ainda são aspectos que precisam ser aprimorados para garantir o sucesso dessa abordagem. Além disso, a falta de alguns pré-requisitos por parte dos alunos foi relatado como um dos problemas em algumas dissertações, o que acaba gerando dificuldades na hora de realizar as atividades.

Após a coleta dos resultados obtidos na revisão, elaboramos uma sequência didática que busca fugir da maneira tradicional de ensinar, a qual visa a memorização e aplicação de fórmulas, e muitas vezes acaba deixando os alunos desinteressados. Além disso, pouco agrega na construção de conhecimento e a solucionar situações do seu cotidiano.

Na sequência didática elaborada, buscamos fazer com que as aulas sejam mais atrativas, dinâmicas e contextualizadas, promovendo mais interação entre os alunos. Para isto, incluímos o uso do material concreto geoplano e da ferramenta digital GeoGebra. Mesmo com a falta de infraestrutura presente em algumas escolas, o uso do Geogebra e do Geoplano podem ser substituído por papel quadriculado.

Portanto, indicamos a inclusão desse conteúdo no planejamento pedagógico como uma alternativa para o cálculo de áreas de polígonos planos, uma vez que o Teorema de Pick é de fácil compreensão e aplicabilidade, além de ser bem aceito por parte dos alunos. Por fim, acreditamos que a aplicação da sequência didática produzida neste trabalho é uma boa opção para apresentar este conteúdo a alunos do 9º ano do ensino fundamental, uma vez que eles possuem todos os pré-requisitos necessários para catingir o objetivo da mesma.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL., M. da E. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: [s.n.], 2018.

[2] BOTELHO, L. L. R.; CUNHA, C. C. de A.; MACEDO, M. O método da revisão integrativa nos estudos organizacionais. *Gestão e sociedade*, v. 5, n. 11, p. 121–136, 2011.

[3] PICK, G. Geometrisches zur zahlenlehre. *Vereines 'Lotos, Praga*, 1899.

[4] STEINHAUS, H.; KLINE, M. *Mathematical Snapshots, 3rd American ed. rev. and enl., 75/83*. [S.l.]: Oxford University Press, 1983.

[5] LIMA, E. *Meu Professor de matematica: e outras historias*. Sociedade Brasileira de Matematica, 1991. (Colecao do professor de matematica). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=e-mxswEACAAJ>.

[6] GIL, A. C. et al. *Como elaborar projetos de pesquisa*. [S.l.]: atlas São Paulo, 2002.

[7] CABRAL, N. F. Sequências didáticas. *Belém-Pará: SBEM/SBEM-PA*, 2017.

[8] ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. [S.l.]: Editora Artmed, 1998.

[9] DOLZ, J. et al. Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento. *Gêneros orais e escritos na escola. Campinas: Mercado de Letras*, p. 95–128, 2004.

[10] CERQUEIRA, D. Estratégias didáticas para o ensino da matemática. *Revista Nova Escola, setembro*, 2013.

[11] REEVE, J. E. On the volume of lattice polyhedra. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Wiley Online Library, v. 3, n. 1, p. 378–395, 1957.

[12] LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 2006.

APÊNDICE A - Teorema de Reeve

Aqui, trataremos sobre o Teorema de Reeve , que é uma extensão do Teorema de Pick para o cálculo do volume de poliedro com pontos numa rede do $\mathbb{R}^3$, onde os vértices do poliedro tem coordenadas inteiras. Este resultado foi demonstrado por E. Reeve em 1957, no artigo "On the volume of lattice polyhedra" [11]. Vamos apresentar algumas definições para compreender os conceitos que iremos trabalhar, a demonstração para um caso específico e um exemplo.

Definições Básicas

Nesta seção apresentaremos algumas definições necessárias para o enuNciado e demonstração do teorema de Reeve.

Definição 3.6.2. *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces, onde:*

a) Cada lado desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

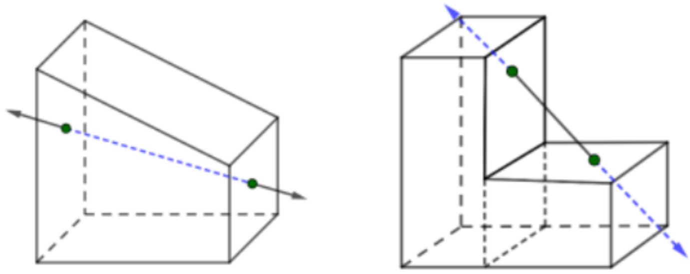
c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um outro ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos. A definição foi considerada como em [12].

Definição 3.6.3. *Poliedro de rede é um poliedro convexo com vértices em* $\mathbb{Z}^3$.

Definição 3.6.4. *Os pontos na borda que no Teorema de Pick se situavam nas arestas do polígono, no teorema de Reeve se situam nas faces do poliedro. Os pontos no interior que no Teorema de Pick se situavam no interior do polígono, no Teorema de Reeve se situam no interior do poliedro.*

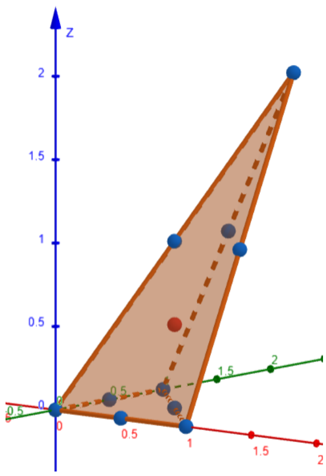
Figura 21 - Poliedro convexo e não-convexo.



Fonte - O autor.

Definição 3.6.5. *Um tetraedro, poliedro com* 4 *faces triangulares, será chamado de fundamental, se as únicas coordenadas inteiras, tanto na borda quanto no interior, forem os vértices do poliedro. Um tetraedro fundamental com vértices de coordenadas* $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *e* $(1,1,r)$, *com* $r \geq 1$ *e* $r \in \mathbb{Z}$ *é chamado de tetraedro de Reeve. A Figura 22 é um exemplo de tetraedro de Reeve com altura 2.*

Figura 22 - Tetraedro de Reeve de altura 2.



Fonte - O autor.

Como o tetraedro de Reeve é fundamental, temos que os únicos pontos de coordenadas inteiras, tanto na borda quanto no inteiror, são os vértices, logo não importa o valor do r, sempre teremos 4 pontos. Mas o volume do tetraedro de Reeve aumenta na mesma proporção que o valor de r aumenta, como mostra a Tabela 5.

Tabela 5 - Volume do tetraedro.

tetraedro de Reeve (T_r)	T_1	T_2	T_3	T_4	T_r
Volume	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{r}{6}$

Ou seja, apenas coordenadas inteiras não são o suficiente para determinar o volume do poliedro. Então para calcular o volume, Reeve criou uma rede secundária denominada $\mathbb{Z}_n^3$.

Definição 3.6.6. $\mathbb{Z}_n^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 / nx \in \mathbb{Z}^3\}, n \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, o ponto $A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \in \mathbb{Z}_2^3$, já que se multiplicarmos A por 2 temos:

$$2\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) = (3, 1, 4) \in \mathbb{Z}^3$$

Os pontos na borda e os pontos no interior do $\mathbb{Z}_n^3$ serão denotados, respectivamente, por B_n e I_n, com $n \in \mathbb{N}$.

Na Figura 22 temos um tetraedro de Reeve com $r = 2$, em que a unidade foi subdividida em duas partes, ou seja, estamos usando a rede secundária $\mathbb{Z}_2^3$. Os pontos azuis representam os pontos na borda (B_2), que no total são 10, e o ponto vermelho representa o ponto no interior (I_2), que no total é igual a 1.

Teorema de Reeve

Teorema 3.6.7. *O volume de um tetraedro fundamental T é dada pela fórmula:*

$$V(T) = \frac{B_n - nB_1 + 2(I_n - nI_1)}{2n^3 - 2n}, n \geq 2.$$

Demonstração. Embora a fórmula seja válida para qualquer $n \geq 2$, mostraremos aqui apenas o caso em que $n = 2$, que é o suficiente para achar o volume do tetraedro fundamental. Logo a fórmula que usaremos e será demonstrada é:

$$V(T) = \frac{B_2 - 2B_1 + 2(I_2 - 2I_1)}{12} \tag{3.3}$$

Sabemos que no tetraedro fundamental, usando a rede secundária $\mathbb{Z}_1^3$, temos que os únicos 4 pontos serão os dos vértices do poliedro, logo temos que $B_1 = 4$ e $I_1 = 0$.

A demonstração será dividida em três passos.

Passo 1: Encontrar o valor de B_2 de um tetraedro fundamental.

Seja ABC a face de um tetraedro e X um ponto pertecente a $\overline{AB}$ que não seja A ou B. Sabemos que X pode ser escrito na forma

$$X = A + t(B - A), \quad \text{para algum} \quad 0 < t < 1. \tag{3.4}$$

Como $\overline{AB}$ é um lado de um triângulo fundamental, temos que $X \notin \mathbb{Z}^3$, então pela equação 3.4 temos que

$$t(B - A) \notin \mathbb{Z}^3 \tag{3.5}$$

Multiplicando a equação 3.4 por 2 obtemos

$$2X = 2A + 2t(B - A) \tag{3.6}$$

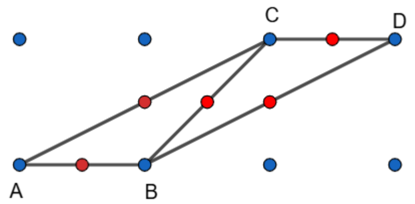
daí, concluímos que se $X \in \mathbb{Z}_2^3$, pela definição 3.6.6, temos que $2X \in \mathbb{Z}^3$, e portanto da equação 3.6 obtemos que

$$2t(B - A) \in \mathbb{Z}^3 \tag{3.7}$$

Agora, como $0 < t < 1$, as equações 3.5 e 3.7 implicam que o único valor possível para t é $\dfrac{1}{2}$, ou seja, X será o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. De forma análoga teremos outros dois pontos pertencente ao $\mathbb{Z}_2^3$, além dos vértices, um localizado no ponto médio do segmento $\overline{AC}$ e outro localizado no ponto médio do segmento $\overline{BC}$, totalizando 6 pontos da rede secundária $\mathbb{Z}_2^3$, os 3 vértices e os outros 3 no ponto médio de cada segmento.

Seja $ABDC$ um paralelogramo feito apartir do triãgulo ABC, como mostra a Figura 23, onde os pontos azuis pertencem ao $\mathbb{Z}^3$ e os pontos vermelhos são o ponto médio dos segmentos, que como já foi visto, pertecem ao $\mathbb{Z}_2^3$.

Figura 23 - Paralelogramo $ABCD$.



Fonte - O autor.

Suponha que existe um ponto $P \in \mathbb{Z}_2^3$ no paralelogramo $ABCD$, além dos outros 9 pontos como mostra a Figura 23. Se P está no paralelogramo $ABCD$, então $\overrightarrow{AP}$ é a combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, logo teremos que

$$\overrightarrow{AP} = t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC}, \quad \text{para certos} \quad t_1, t_2 \in [0,1]$$

Agora, para que $P \in \mathbb{Z}_2^3$ necessitamos que t_1 e $t_2 \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, porém, para esses valores teríamos justamente os 9 pontos mostrados na imagem, ou seja, no triângulo ABC teríamos apenas os 6 pontos já encontrados anteriormente que pertencem ao $\mathbb{Z}_2^3$.

Assim, além dos vértices, teremos um ponto em cada aresta, que são os pontos médios. Como um tetraedro tem 6 arestas e 4 vértices, o total de pontos de bordo (B_2) é igual a 10.

Passo 2: Encontrar o valor de I_2 num tetraedro fundamental de altura r.

Seja $ABCD$ um tetraedro fundamental de base triangular ABC e altura r. Vamos considerar que a base ABC está no plano xy. Denote por X o ponto médio de $\overline{AD}$, Y o ponto médio de $\overline{BD}$ e Z o ponto médio de $\overline{CD}$, como foi verificado no passo 1, esses pontos pertencem a $\mathbb{Z}_2^3$. Podemos escrever X, Y e Z da seguinte maneira:

$$X = A + \frac{1}{2}(D - A) \tag{3.8}$$

$$Y = B + \frac{1}{2}(D - B) \tag{3.9}$$

$$Z = C + \frac{1}{2}(D - C) \tag{3.10}$$

Como A, B e C estão no plano xy, temos que X, Y e Z estão entre o plano xy e o vértice D, ou seja, possuem altura $\frac{r}{2}$. Assim, o triângulo XYZ é paralelo ao triângulo ABC.

Seja $XYZW$ o paralelogramo feito a partir do triângulo XYZ. Suponha que exista um ponto $Q \in \mathbb{Z}_2^3$ nesse paralelogramo, além dos 4 vértices. Como Q está no paralelogramo $XYZW$, o vetor $\overrightarrow{XQ}$ é uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{XY}$ e $\overrightarrow{XZ}$, isto é:

$$\overrightarrow{XQ} = r_1\overrightarrow{XY} + r_2\overrightarrow{XZ}, \quad \text{para certos} \quad r_1, r_2 \in [0,1].$$

Reescrevendo a equação acima obtemos

$$Q = X + r_1(Y - X) + r_2(Z - X). \tag{3.11}$$

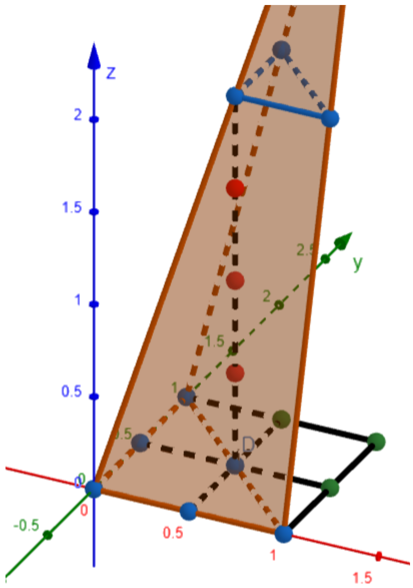
Substituindo na equação 3.11 as expressões de X, Y e Z das equações 3.8, 3.9 e 3.10 respectivamente, obtemos:

$$Q \;=\; \frac{1}{2}(A + D) + \frac{r_1}{2}(B - A) + \frac{r_2}{2}(C - A)$$

Deste modo, para que $Q \in \mathbb{Z}_2^3$ teremos que r_1 e $r_2 \in \{0, 1\}$, mas para esses valores teríamos justamente os 4 vértices do paralelogramo $XYZW$, ou seja, no triângulo XYZ temos apenas os 3 vértices pertencendo a $\mathbb{Z}_2^3$ que, como já foi visto, estão na borda do tetraedro.

Na Figura 24 temos um tetraedro fundamental de altura 4, onde os pontos vermelhos pertencem ao $\mathbb{Z}_2^3$ e estão no interior do tetraedro.

Figura 24 - Tetraedro fundamental de altura 4.



Fonte - O autor.

Pela definição 3.6.5 teremos a inclinação do tetraedro para uma das arestas da base, e apartir do ponto médio dessa aresta se formará uma coluna de pontos no interior pertencente ao $\mathbb{Z}_2^3$ que vai até a metade do tetraedro como mostra a Figura 24. Esses pontos no interior estarão nas alturas $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ..., \frac{r-3}{2}, \frac{r-2}{2}, \frac{r-1}{2}$, e como esses são os únicos pontos no interior achados, teremos um total de $r - 1$ pontos no interior, de onde concluímos que $I_2 = r - 1$.

Passo 3: Substituir os valores de B_1, B_2, I_1 e I_2 na fórmula 3.3 para um tetraedro de altura r.

$$V(T) = \frac{(10) - 2(4) + 2[(r-1) - 2(0)]}{12}$$

$$V(T) = \frac{10 - 8 + 2r - 2}{12}$$

$$V(T) = \frac{r}{6}$$

Que é o volume de um tetraedro com área da base igual a $\frac{1}{2}$ e altura r, comprovando a fórmula.

$\square$

Teorema 3.6.8. *Todo poliedro de rede é uma união de tetraedros fundamentais.*

Demonstração. Como todos os vértices possuem cordenadas inteiras, podemos dividir em parte o polidero em cubos de aresta 1, e apartir deles dividir cada um em 6 tetraedros fundamentais. As partes do poliedro que não deram para dividir em cubo terão faces em comum com os cubos. Essas faces podem ser divididas em triângulos fundamentais, formando novas faces, e junto com os pontos de rede $\mathbb{Z}^3$ formarão novos tetraedros fundamentais. Então teremos o poliedro de rede dividido em tetraedros fundamentais. $\square$

Teorema 3.6.9. ***(Teorema de Reeve)*** *O volume de um poliedro de rede P é dada pela fórmula:*

$$V(P) = \frac{B_n - nB_1 + 2(I_n - nI_1)}{2n^3 - 2n}, n \geq 2.$$

Demonstração. Para a demonstração iremos considerar apenas o caso $n = 2$, portanto demonstraremos a fórmula:

$$V(P) = \frac{B_2 - 2B_1 + 2(I_2 - 2I_1)}{12} \tag{3.12}$$

Vimos no teorema 3.6.8 que podemos decompor um poliedro de rede P como a união de tetraedros fundamentais $T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k$, disjuntos dois a dois, ou seja,

$$P = \cup_{i=1}^{k} T_i.$$

Provaremos a fórmula 3.12 usando indução sobre o número de tetraedros fundamentais na decomposição de P.

Suponha que $P = T_1 \cup T_2$, com T_1 e T_2 tetraedros fundamentais. Como os tetraedros são disjuntos, temos que:

$$V(P) = V(T_1) + V(T_2).$$

Além disso, pelo Teorema 3.6.7 temos que

$$V(T_1) = \frac{B_2(T_1) - 2B_1(T_1) + 2[I_2(T_1) - 2I_1(T_1)]}{12},$$

$$V(T_2) = \frac{B_2(T_2) - 2B_1(T_2) + 2[I_2(T_2) - 2I_1(T_2)]}{12}.$$

Portanto,

$$V(P) = \frac{[B_2(T_1) + B_2(T_2)] - 2[B_1(T_1) + B_1(T_2)] + 2[I_2(T_1) + I_2(T_2)] - 4[I_1(T_1) + I_1(T_1)]}{12}$$

Como a interseção $T_1 \cap T_2$ é uma das faces do tetraedro, temos 6 pontos pertencentes ao $\mathbb{Z}_2^3$ e 3 pontos pertencentes ao $\mathbb{Z}^3$ nessa interseção, que são justamente os pontos nas arestas dessa face como já foi demonstrado no Teorema 3.6.7, logo:

$$B_1(P) = B_1(T_1) + B_1(T_2) - 3 \tag{3.13}$$

$$B_2(P) = B_2(T_1) + B_2(T_2) - 6 \tag{3.14}$$

$$I_1(P) = I_1(T_1) + I_1(T_2) \tag{3.15}$$

$$I_2(P) = I_2(T_1) + I_2(T_2) \tag{3.16}$$

Subtituindo as equações 3.13, 3.14, 3.15 e 3.16 na expressão de $V(P)$ concluímos que:

$$
\begin{aligned}
V(P) &= \frac{B_2(P)+6-2[B_1(P)+3]+2[I_2(P)]-4[I_1(P)]}{12} \\
&= \frac{B_2(P)-2B_1(P)+2[I_2(P)-2I_1(P)]}{12}
\end{aligned}
$$

Mostrando que a fórmula vale para $P = T_1 + T_2$, e que a equação 3.12 é aditiva.

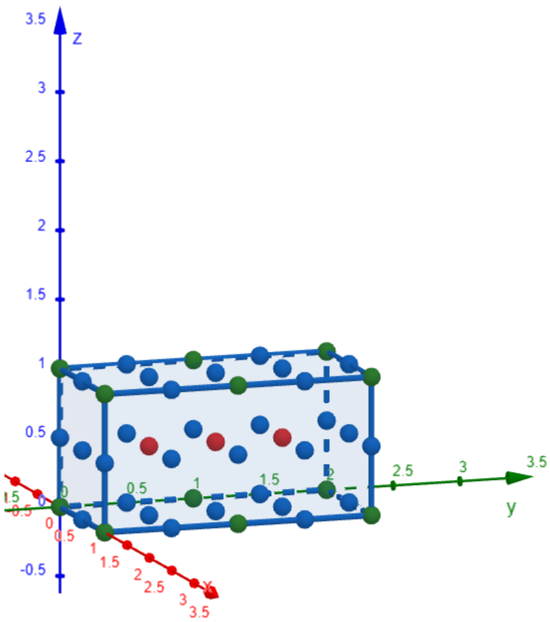
Agora, suponha que a equação 3.12 vale para qualquer poliedro P que possua k tetraedros fundamentais na sua decomposição. Suponha então que $P = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_{k+1}$. Observe que,

$$
\begin{aligned}
P &= T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n \cup T_{k+1} \\
&= (T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n) \cup T_{k+1} \\
&= P' \cup T_{k+1}
\end{aligned}
$$

Por indução, a fórmula é verificada para P' e para T_{k+1}, portanto, pelo aditividade da equação 3.12, concluímos a demostração. Isto mostra que a equação 3.12 vale para qualquer poliedro de rede. $\square$

Exemplo 3.6.10. *Usando a equação* 3.12, *vamos determinar o volume de um paralelepípedo com vértices* $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,2,0)$, $(1,2,0)$, $(1,2,1)$, $(0,2,1)$ *e* $(1,0,1)$, *como mostra a figura* 3.6.10.

Figura 25 - Paralelepípedo.



Fonte - O autor.

Para isso precisamos encontrar os valores de B_1, I_1, B_2 *e* I_2.

Os pontos pertencentes ao B_1 *serão os vértices do poliedro mais os pontos* $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ *e* $(1,1,1)$, *que estão representados pelos pontos verdes, totalizando* 12 *pontos.*

Os pontos pertencentes ao B_2 *serão os pontos de* B_1 *mais os pontos*

$$\left(\frac{1}{2},0,0\right), \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right), \left(0,0,\frac{1}{2}\right), \left(1,0,\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2},0,1\right), \left(0,\frac{1}{2},0\right), \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right), \left(1,\frac{1}{2},0\right),$$

$$\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(0,\frac{1}{2},1\right), \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right), \left(1,\frac{1}{2},1\right), \left(\frac{1}{2},1,0\right), \left(0,1,\frac{1}{2}\right), \left(1,1,\frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2},1,1\right), \left(0,\frac{3}{2},0\right), \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0\right), \left(1,\frac{3}{2},0\right), \left(0,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right), \left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right), \left(0,\frac{3}{2},1\right), \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right),$$

$$\left(1,\frac{3}{2},1\right), \left(\frac{1}{2},2,0\right), \left(0,2,\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}\right), \left(1,2,\frac{1}{2}\right) \quad e \quad \left(\frac{1}{2},2,1\right),$$

que estão representados pelos pontos verdes e azuis, totalizando 42 *pontos.*

Os pontos pertencente ao I_2 *serão os pontos* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$ *e* $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$, *que estão representados pelos pontos vermelhos, totalizando* 3 *pontos. Não temos nenhum ponto pertencente ao* I_1.

Substituindo os valores encontrados na equação 3.12, *temos:*

$$V(P) = \frac{42 - 2(12) + 2[3 - 2(0)]}{12}$$

$$V(P) = 2$$

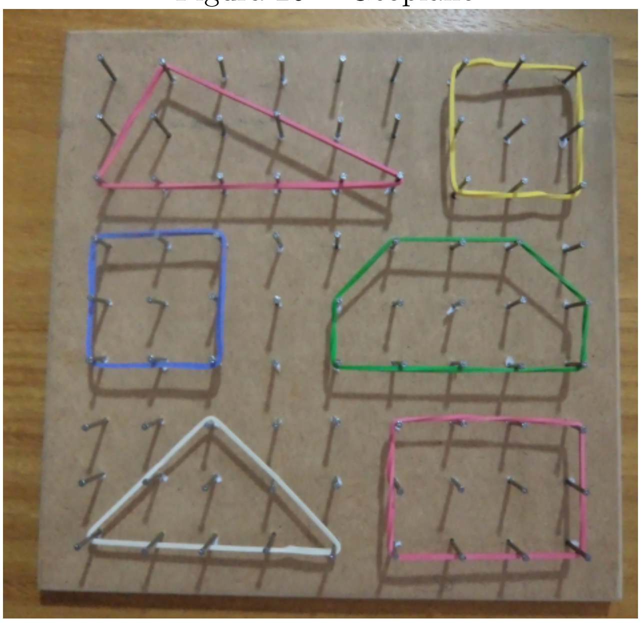
APÊNDICE B - O Geoplano

O Geoplano é um recurso didático-pedagógico dinâmico e manipulativo (construir, movimentar e desfazer). Foi criado pelo professor Caleb Gattegno do Instituto de Educação da Universidade de Londres, na Inglaterra, por volta de 1960. Desde então, passou a ser usado por diversos professores para ensinar Geometria.

Ele é formado por uma placa de madeira e pregos (ou pinos) dispostos formando uma malha, faz parte também desta placa, elásticos ou barbantes de preferência coloridos, com os quais podemos prendê-los aos pregos desenhando e formando figuras geométricas sobre o geoplano.

O material pode ser feito por marceneiros, ou em casa, com uma base plana e lisa. É necessário ter cuidado com as marcações para que fiquem com as mesmas medidas. É importante ressaltar que a distância de um prego para outro, tanto na horizontal quanto na vertical, tem que ser a mesma.

Figura 26 - Geoplano

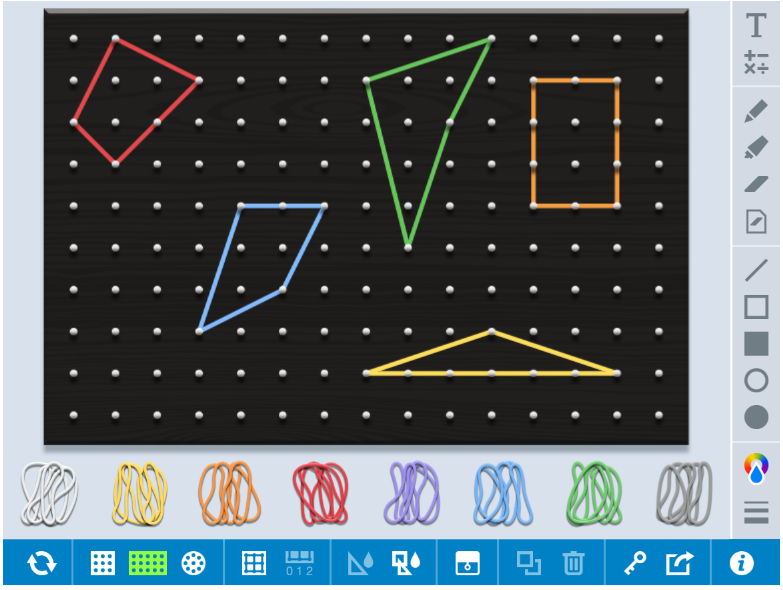


Fonte - https://geoplanos7b.blogspot.com/2015/07/geoplanos.html

Também há a possibilidade de usar o geoplano virtual, que pode ser acessado através do site https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/. A plataframa é muito intuitiva e de fácil ultilização. A Figura 27 apresenta a página inicial do site.

Podemos usar o Geoplano para criar polígonos esticando elástico entre os pinos, permitindo uma compreensão tátil e visual dos conceitos geométricos. Facilitando a con-

Figura 27 - Geoplano Virtual

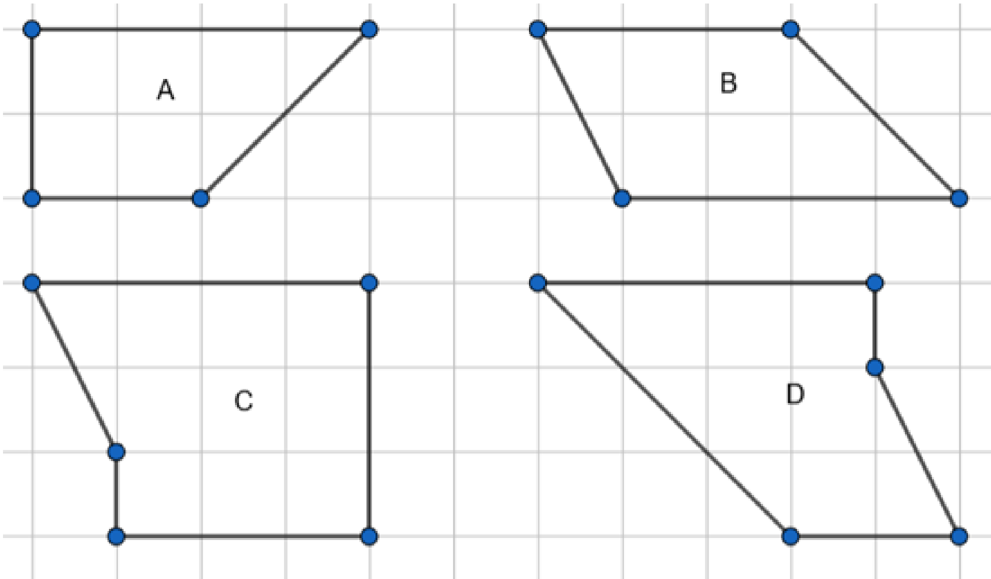


Fonte - O autor

tagem dos pontos do interior e da borda na aplicação do Teorema de Pick. Além disso, ajuda os alunos a desenvolverem habilidades espaciais.

APÊNDICE C - Atividade

1.Encontre a área dos polígonos abaixo:



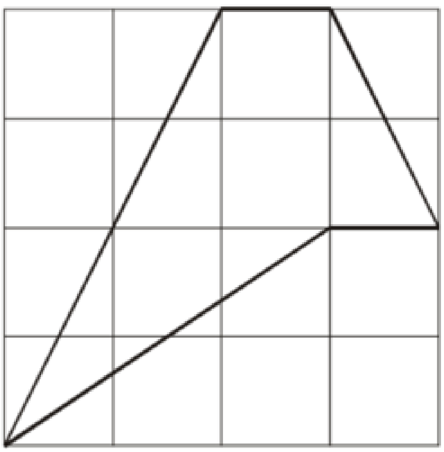
a)Área da figura A=

b)Área da figura B=

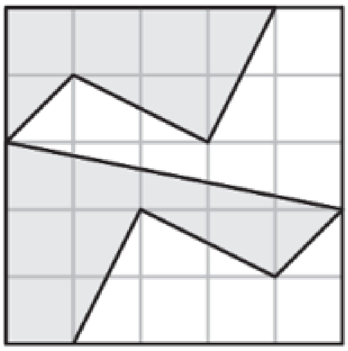
c)Área da figura C=

d)Área da figura D=

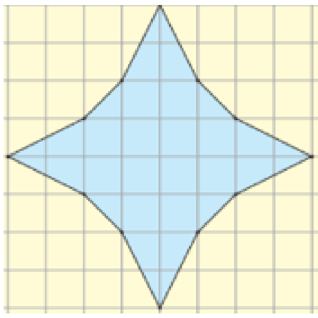
2.(PUC-MG, 2010) De uma placa quadrada de 16 cm², foi recortada uma peça conforme indicado na figura. A medida da área da peça recortada, em centímetros quadrados, é:



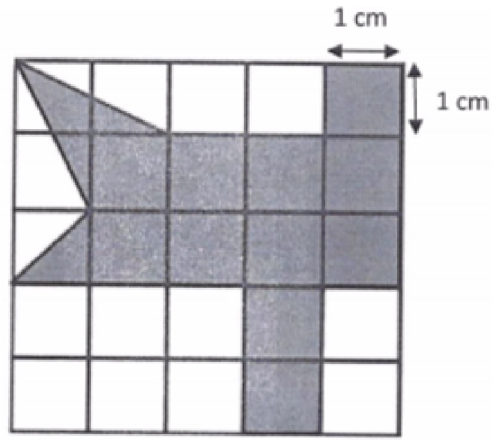
3.(OBMEP, 2011) Na figura, o lado de cada quadradinho mede 1 cm. Qual é a área da região cinza?



4.(OBMEP, 2017) A área da figura azul é igual à soma das áreas de quantos quadradinhos do quadriculado?

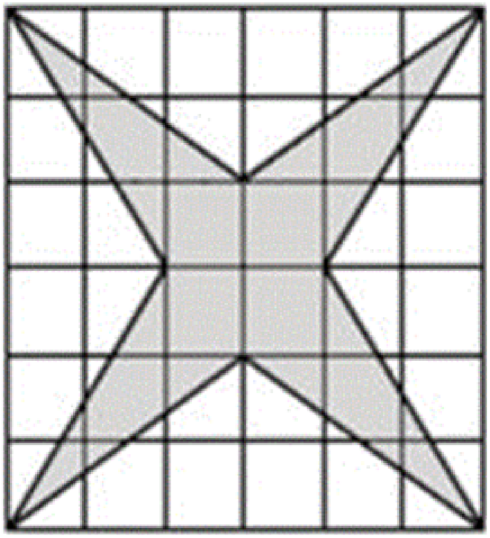


5.(UNIFOR, 2009) A figura abaixo apresenta uma malha quadriculada na qual está destacada uma superfície sombreada.

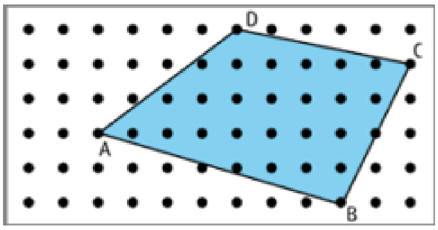


Considerando que o lado de cada quadrado da malha mede 1 cm, a área da superfície da região sombreada, em centímetros quadrados, será:

6. (UFRGS, 2008) Na figura abaixo, a malha quadriculada é formada por quadrados de área 1. Os vértices do polígono sombreado coincidem com vértices de quadrados dessa malha. A área do polígono sombreado é:



7.(UERJ, 2008) Um tabuleiro retangular com pregos dispostos em linhas e colunas igualmente espaçadas foi usado em uma aula sobre área de polígonos. A figura abaixo representa o tabuleiro com um elástico fixado em quatro pregos indicados pelos pontos A, B, C e D.



Considere u.a unidade de área equivalente ao menor quadrado que pode ser construído com vértices em quatro pregos do tabuleiro. Calcule, em u.a área do quadrilátero ABCD formado pelo elástico.