Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciência
Instituto de Matemática e Estatística

Diogo Mendes Daineze

As Pontes de Königsberg

Rio de Janeiro
2025

Diogo Mendes Daineze

As Pontes de Königsberg

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Guido Gerson Espíritu Ledesma

Rio de Janeiro

2025

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

D133 Daineze, Diogo Mendes.
As pontes de Konigsberg/ Diogo Mendes Daineze. – 2025.
88 f.: il.

Orientador: Guido Gerson Espíritu Ledesma
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Teoria dos grafos - Teses. 2. Matemática - História - Teses. I. Ledesma, Guido Gerson Espíritu. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título

CDU 519.17

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Diogo Mendes Daineze

As Pontes de Königsberg

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 07 de 03 de 2025.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Guido Gerson Espíritu Ledesma (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Dahisy Valadão de Souza Lima
Universidade Federal do ABC

Rio de Janeiro
2025

DEDICATÓRIA

A José Francisco Daineze, que não me verá sendo mendo mestre.

AGRADECIMENTOS

Julia e Camila, minhas amadas filhas. E a Kelly, minha companheira para a vida, meu amor e porto seguro, que me apoiou com paciência e compreensão durante esta jornada. Agradeço por cada sorriso, palavra de incentivo, cada ajuda nas demostrações.

Ferro na boneca, pedrada na vidraça.
Tudo que eu tenho eu conquistei na raça.
Eu não sou simpático a ninguém.
Charlie Brown Jr., 1997

RESUMO

DAINEZE, Diogo Mendes. *As Pontes de Königsberg.* 2025. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2025.

Em 1783, um convite peculiar foi feito a Euler, desafiando-o a resolver um intrigante problema proposto pelos habitantes de Königsberg: a questão da travessia de suas pontes. Esse desafio iniciou um novo campo matemático, repleto de possibilidades fascinantes - o estudo dos grafos. Apesar de inicialmente envolto em uma aura de mistério e complexidade, os grafos revelam-se um tema agradável e de fácil compreensão. Este texto se propõe a explorar história de Königsberg, destacando a relevância das pontes que deram origem ao desenvolvimento do campo dos grafos. Adicionalmente, serão apresentadas definições pertinentes, proporcionando uma base para a compreensão dos conceitos da demonstração do Teorema das Sete Pontes. O coração do texto será dedicado ao renomado Problema das Sete Pontes, que inspirou Euler a formular os princípios fundamentais dos grafos, resultando em uma solução elegante e eficiente. Este texto busca oferecer aos leitores uma introdução envolvente e acessível ao fascinante mundo dos grafos, bem como sugestões de atividades lúdicas para sala de aula.

Palavras-chave: Grafos. Pontes. Königsberg.

ABSTRACT

DAINEZE, Diogo Mendes. *The Bridges of Königsberg.* 2025. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2025.

In 1783, a peculiar invitation was extended to Euler, challenging him to solve an intriguing problem proposed by the inhabitants of Königsberg: the question of crossing its bridges. This challenge initiated a new mathematical field, full of fascinating possibilities - the study of graphs. Despite initially being shrouded in an aura of mystery and complexity, graphs reveal themselves to be a pleasant and easily understood topic. This text aims to explore the history of Königsberg, highlighting the relevance of the bridges that gave rise to the development of the field of graphs. Additionally, relevant definitions will be presented, providing a foundation for understanding the concepts of the Seven Bridges Theorem demonstration. The heart of the text will be dedicated to the renowned Seven Bridges Problem, which inspired Euler to formulate the fundamental principles of graphs, resulting in an elegant and efficient solution. This text seeks to offer readers an engaging and accessible introduction to the fascinating world of graphs, as well as suggestions for playful classroom activities.

Keywords: Graph. Bridges. Königsberg.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

INTRODUÇÃO

Königsberg, uma cidade que desempenhou papéis diversos ao longo do tempo, já foi uma fortaleza, um feudo, um polo intelectual, motivo de diversas disputas territoriais de diversos reinos e países. Lar de algumas figuras notáveis na história e das famosas sete pontes.

Do desejo dos moradores de saber da viabilidade de, passeando, visitar todos seus distritos cruzando suas pontes sem repeti-las, é que aparece o matemático suíço Euler. Na tentativa de resolver este problema ele formulou um método com um ferramenta inovadora: os grafos. Este trabalho foi elaborado para dar uma visão simples ao professor de ensino fundamental da teoria dos grafos, e como é possível trabalhar com os alunos grafos e algumas de suas definições.

O texto, em seu primeiro capítulo, o texto aprofunda a análise histórica, conectando eventos relevantes de Königsberg ao teorema das sete pontes e ao papel crucial desempenhado por Euler, temos então um breve panorama sobre as sete pontes, quede fato, levaram ao desenvolvimento dos conceitos de grafos. Em seguida, o capítulo também oferece um resumo conciso sobre a vida e a obra Euler, uma figura chave na matemática que contribuiu significativamente para a o desenvolvimento da teoria dos grafos.

No segundo capítulo o foco se volta para definições e teoremas importantes sobre grafos, discutindo conceitos fundamentais de forma direta e simples com exemplos ilustrados. Os conceitos fundamentais são apresentados de maneira acessível, com exemplos ilustrativos, seguindo uma ordem lógica e progressiva para facilitar a compreensão. Embora seja, para as demonstrações, recomendado algum conhecimento prévio em matemática, o texto busca tornar esses conceitos acessíveis aos leitores.

Posteriormente, no Capítulo 3, destacamos de fato o Problema das 7 Pontes, revisitando os passos de Euler para a famosa questão, será possível atravessar cada ponte uma vez e voltar ao ponto de partida em Königsberg. Este capítulo serve como uma aplicação prática dos conceitos previamente apresentados para resolver esse quebra-cabeça intrigante de forma direta e simples.

O texto continua, no Capítulo 4, com a discussão de outros problemas relacionados a grafos, expandindo o escopo para além do desafio inicial das sete pontes.

Finalmente, no Capítulo 5, o foco muda para a aplicação dos conceitos de grafos no ensino fundamental. O texto oferece sugestões práticas de atividades realistas que os professores podem incorporar em sala de aula, promovendo uma compreensão sólida dos grafos entre os alunos, sem a necessidade de materiais complexos, e no Capítulo 6, apresentamos uma aplicação prática das atividades do Capítulo 5 em sala de aula.

Dessa forma, o texto visa fornecer uma visão abrangente e acessível da teoria dos grafos, desde sua origem em Königsberg até aplicações tangíveis no contexto educacional.

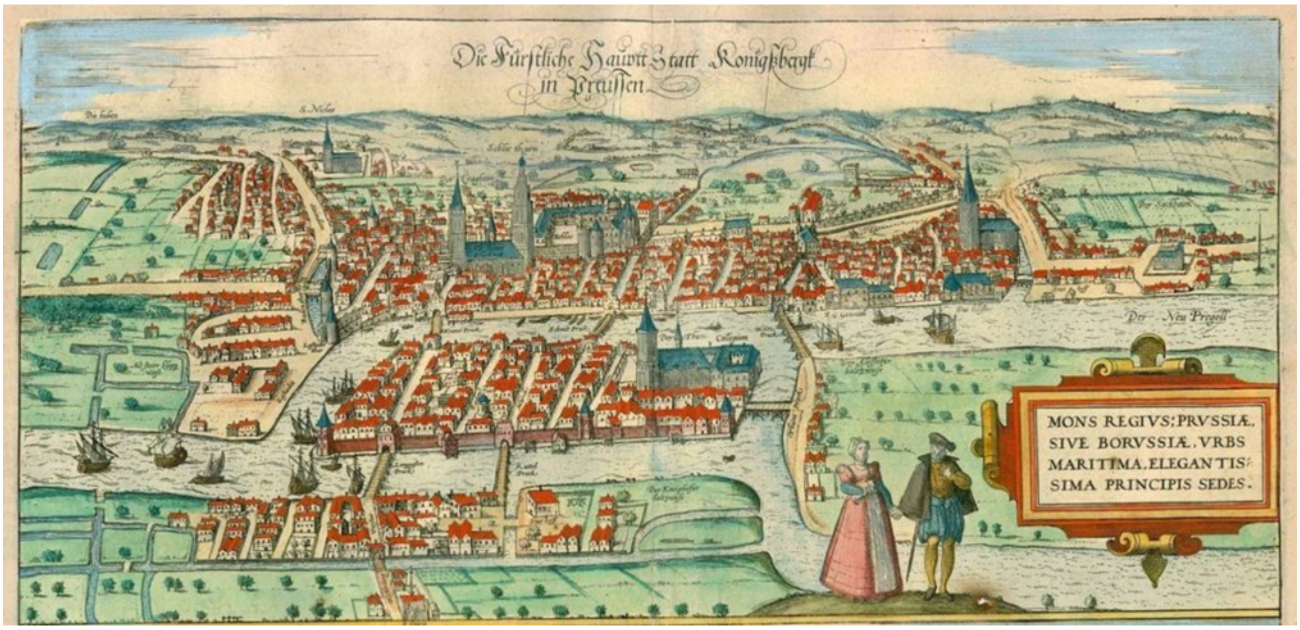
1 HISTÓRIA

Neste capítulo veremos sobre a história da cidade de Königsberg, sobre as pontes e Euler.

1.1 Königsberg

Königsberg (que significa montanha do reis), cidade portuária Prussiana dos Bálticos, cortada pelo rio Pregóia que formam duas ilhas na cidade, hoje em dia Kaliningrado na Rússia.

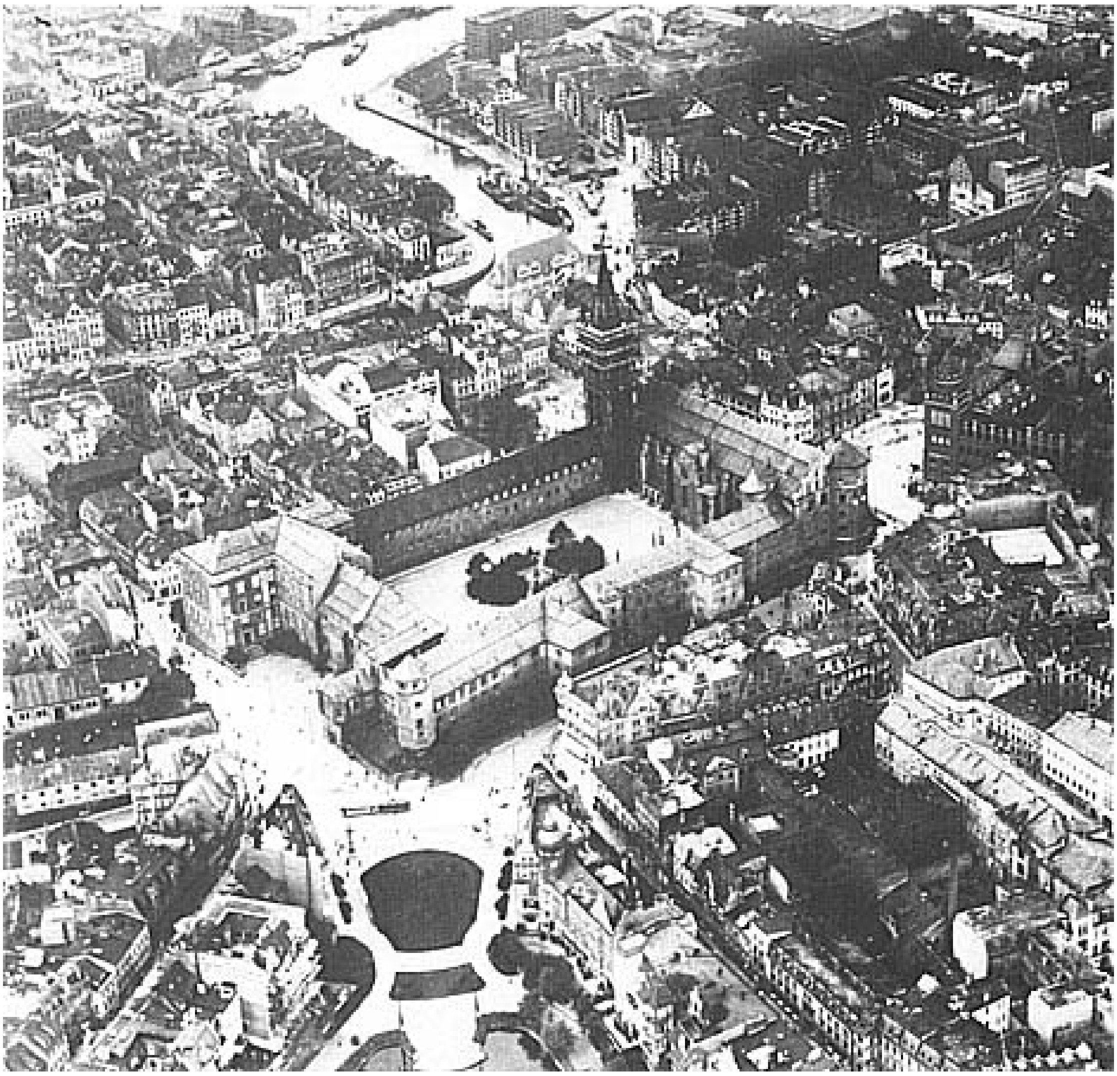
Figura 1 - Cidade de Königsberg.



Legenda: Mapa de Königsberg, Séc XVII.
Fonte: Domínio público.

Fundada, primeiramente como um castelo, em 1255 por cavaleiros teutônicos durante as cruzadas, nomeada em homenagem ao rei Octar II, governante da Boêmia entre 1253 e 1278, logo foram surgindo assentamentos próximos pois o castelo era residência para da alta hierarquia militar e do clero.

Figura 2 - Castelo de Königsberg.



Legenda: Vista area do Königsberger Schloss.
Fonte: Domínio público.

Em meados do séc. XIV tornou-se um porto de extrema relevância para o comercio local. Após a Guerra dos Treze anos[1] tornou-se a capital do Estado da Ordem Teutônica, enquanto este era um feudo da Polônia. No séc XVI, durante a reforma protestante, expulsou os remanescentes Teutônicos tornando-se predominantemente Luterana, convertendo-se totalmente em 1525 pelo Grão-Mestre Alberto de Brandemburgo, sobrinho do Rei polonês.

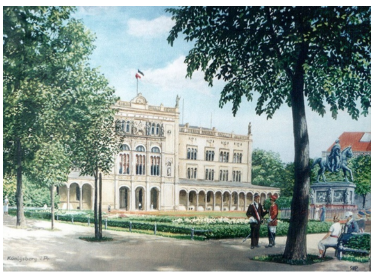
[1] Também chamada de Guerra das Cidades, conflito travado entre 1454−1466 entre as cidades prussianas e a nobreza local para conquistar a independência dos Cavaleiros Teutônicos. Terminou com a vitória da Confederação Prussiana e da Polônia.

Figura 3 - Prussian Homage (Jan Matejko, 1822).

Legenda: Alberto prestando respeito ao rei polonês.
Fonte: Domínio Público.

Tendo autonomia de moeda e legislações próprias, o porto tornou-se relevante e, segundo Kirby, a cidade floresceu através da exportação de trigo, madeira, cânhamo e peles, bem como piche, alcatrão(p. 33). Tornou-se uma cidade universitária no meado do século XVI com a fundação da Universidade Albertina (1544), sendo um polo cultural e intelectual polonês e lituano.

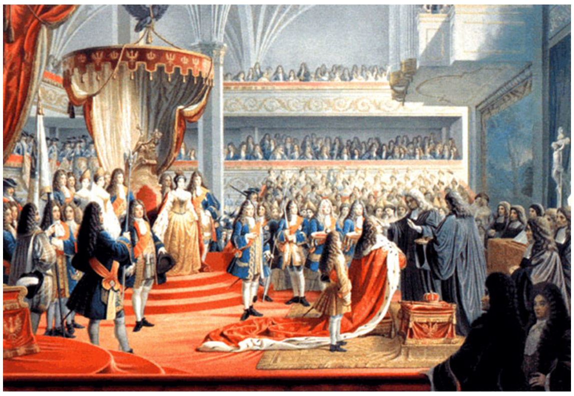
Figura 4 - Universidade de Königsberg.



Legenda: Polo Cultural da Época
Fonte: Domínio Público.

No séc $XVII$ após muitos conflitos locais, jogos políticos e tratados, Königsberg estava agora em território Prussiano, entretanto em 1701, com a coroação de Frederico I[2] , passou a ser a capital do Reino da Prússia, porém não sendo residência fixa de seu governante e, segundo Baedeker, em 13 de junho de 1724, foi criada formalmente a cidade de Königsberg. Com os subúrbios que posteriormente foram anexados a Königsberg. (1904, p.174)

Figura 5 - Coroação de Frederico I



Legenda: Rei da Prússia.
Fonte: Domínio Público.

No ano de 1758 sob o reinado de Elizabeth I, Königsberg anexou-se a Rússia e em 1762 voltou a ser território da Prússia, sendo em 1773 capital da Prússia Oriental. Em 1806 durante a campanha de Napoleão, com a ocupação de Berlim, a comitiva de Frederico Guilherme III (1797 - 1840) se refugiou na fortaleza de Königsberg (Koch, p 160).

Königsberg tornou-se parte do Império Alemão em 1871 durante a unificação da Alemanha, com grande crescimento da população judia. Na Primeira Guerra Mundial, Königsberg e a Prússia Oriental foram separadas da Alemanha pela criação do Corredor Polonês[3]. Em 1934, Hitler discursou na cidade e em 1935 Königsberg tornou-se sede da Wehrkreis[4]I. Seguiu sendo uma das maiores cidades alemãs até a Segunda Guerra Mundial, quando foi severamente bombardeada pelos aliados e ocupada pela União Soviética, sendo anexada, por este, em 1945.

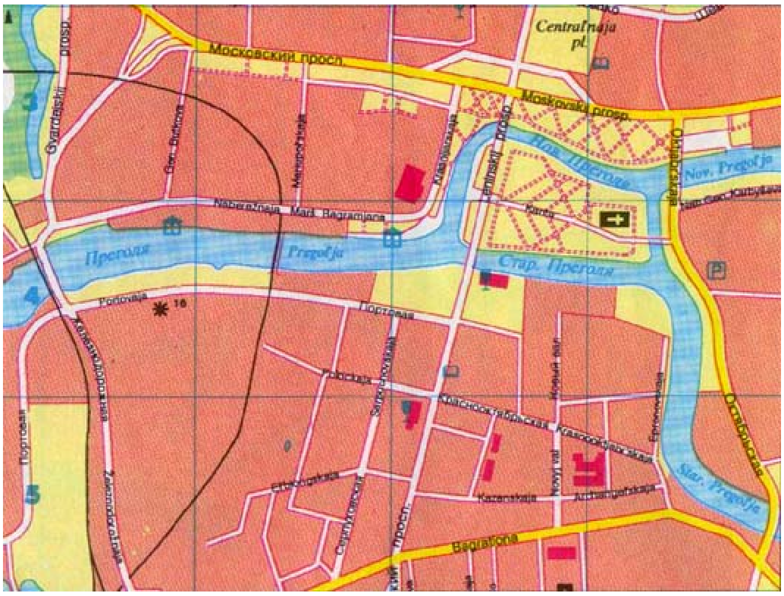
[2] Königsberg, 11 de julho de 1657 – Berlim, 25 de fevereiro de 1713) foi Eleitor de Brandemburgo como Frederico III e também Duque da Prússia em união pessoal de 1688 até 1701, passando então a ser o primeiro Rei na Prússia até sua morte.

[3] faixa de terra transferida da Alemanha para a Polônia no fim da Primeira Grande Guerra para que a Polônia tivesse uma saída para o mar Báltico.

[4] regiões pela qual as forças militares dividiam a Alemanha nazista.

Em 1946, o nome da cidade foi alterado para Kaliningrado, em homenagem a Mikhail Kalinin[5], tendo o idioma oficial alterado para o russo e a população alemã sendo expulsa e o território repovoado com cidadãos soviéticos até o fim da década.

Figura 6 - Kaliningrado



Legenda: Mapa da cidade após a reconstrução.
Fonte: MacTutor History of Mathematics archive.

Em 1950, durante a Guerra Fria, a cidade teve suas fronteiras fechadas para cidadãos não soviéticos servindo como base para parte da frota soviética. Permaneceu parte da União Soviética até sua dissolução em 1991, e desde então tem sido um exclave da Federação Russa.

Dentre alguns exemplos de residentes notáveis de Königsberg podemos citar Ch-

[5] Mikhail Ivanovich Kalinin (1875-1946) um dos quatro fundadores da União das Repúblicas Socialistas Soviéticas, como representante da República Socialista Federativa Soviética da Rússia, serviu como o primeiro chefe de estado da URSS, no cargo de Presidente do Soviete Supremo.

ristian Goldbach[6] (1690 - 1764), E.T.A Hoffmann[7] (1776 - 1822), Kant[8] (1724 – 1804)

Figura 7 - lustres moradores de Königsberg

Legenda: Goldbach, Hoffmann e Kant.
Fonte: O Autor.

[6] Matemático prussiano nascido e criado em Königsberg, estudou matemática, direito e medicina. Correspondia-se com vários matemáticos da época e em uma carta com Euler conjecturou que todo número par maior que 2 pode ser representado como a soma de dois primos. Goldbach também conjeturou que qualquer número ímpar maior que 5 é igual à soma de três primos. O matemático peruano Harald Helfgott demonstrou, em 2013, esta segunda conjectura, conhecida com a Conjectura Fraca de Golbach.

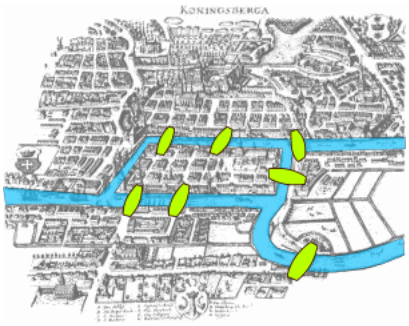
[7] Ernst Theodor Amadeus Wilhelm Hoffmann, escritor, compositor desenhista e jurista. Escritor de Quebra Nozes e o Camundongo Rei (1816) dentre outros.

[8] Immanuel Kant filósofo alemão publicou importantes obras sobre ética, religião, direito, estética, astronomia e história durante sua vida que fizeram dele uma das figuras mais influentes da filosofia ocidental moderna. Estas incluem a História Natural Universal (1755), a Crítica da Razão Prática (1788), a Crítica do Poder de Julgamento (1790), a Religião nos Limites da Mera Razão (1793) e a Metafísica dos Costumes (1797).

1.2 As sete Pontes

Sendo Königsberg cortada pelo rio Prególia, há a formação de duas ilhas interligadas por sete pontes, a ilha de Kneiphof, e o bairro de Lomse. Kneiphof tinha duas pontes para cada margem, Lomse tinha uma para cada margem, e a sétima ponte ligava Kneiphof a Lomse.

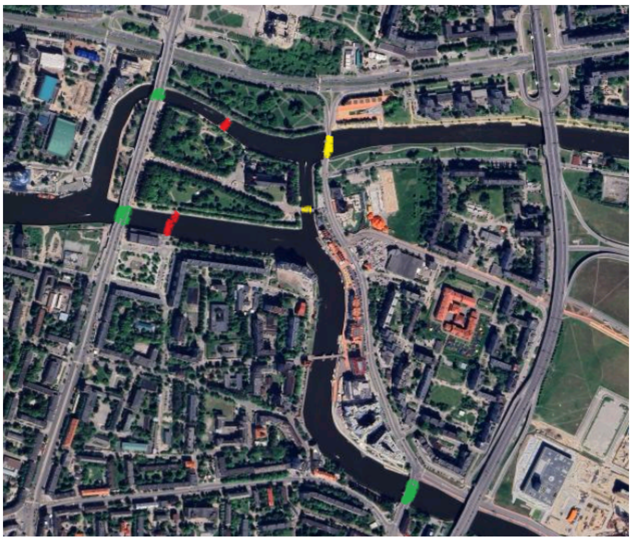
Figura 8 - Königsberg.



Legenda: As sete pontes de Königsberg.
Fonte: MacTutor History of Mathematics archive.

Atualmente em Kaliningrado restam apenas duas pontes originais, duas foram destruídas durante a segunda guerra mundial no bombardeio de agosto de 1944 e outas três foram demolidas para construção de vias mais modernas.

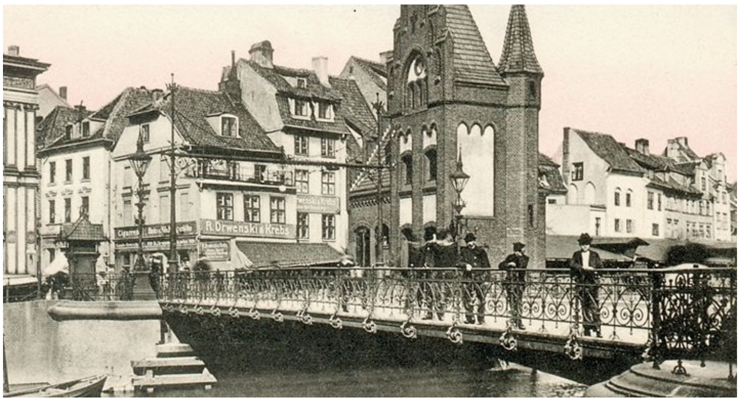
Figura 9 - Kaliningrado.



Legenda: Em verde as pontes reformadas, vermelho as destruidas e amarelo as originais.
Fonte: Google Maps.

As sete pontes originais de Königsberg eram:

Figura 10 - Schmiedebrücke.



Legenda: Ponte do Ferreiro.
Fonte: Domínio público.

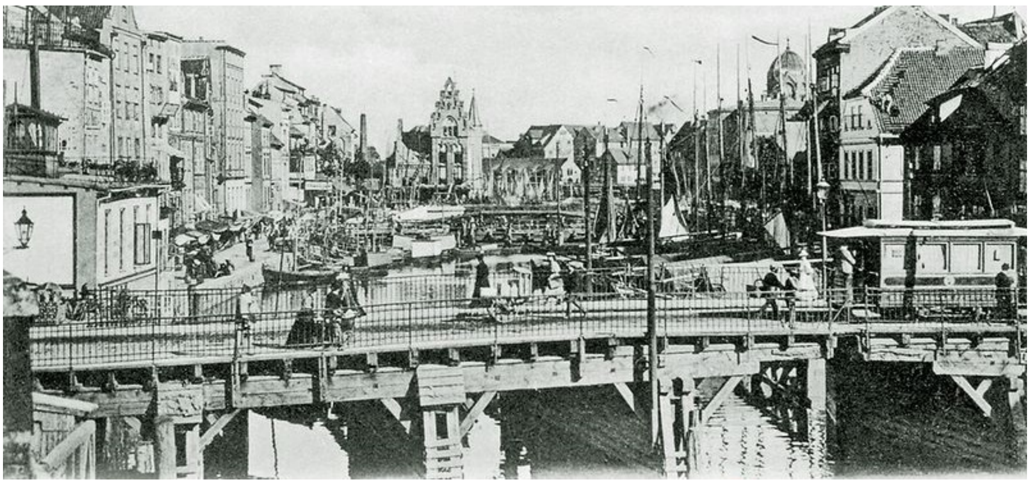
Figura 11 - Köttelbrücke.

Legenda: Ponte Conectora.
Fonte: Domínio público.

Figura 12 - Grüne Brücke.

Legenda: Ponte Verde.
Fonte: Domínio público.

Figura 13 - Krämerbrücke.

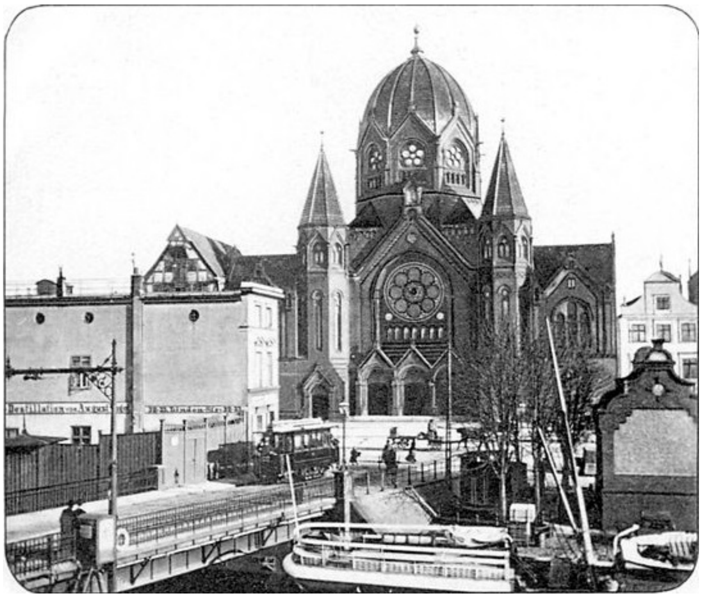


Legenda: Ponte do Mercado.
Fonte: Domínio público.

Figura 14 - Holzbrücke.

Legenda: Ponte de Madeira, ainda existente.
Fonte: Domínio público.

Figura 15 - Hohe Brücke .



Legenda: Ponte Alta.
Fonte: Domínio público.

Figura 16 - Honigbrücke.

Legenda: Ponte do Mel, ainda existente.
Fonte: Domínio público.

1.3 **Euler**

1.3.1 A Vida

Leonhard Euler nasceu na Basileia, Suíça, no dia 15 de abril de 1707. Nascido em uma família estruturada, filho de Paul Euler, pastor da Igreja Calvinista e Margaret Brucker, teve duas irmãs mais novas, Anna Maria e Maria Magdalena.

Figura 17 - Leonhard Euler.

Legenda: Quadro a óleo por Johann Georg Brucker.
Fonte: Domínio público.

Primeiramente foi educado por seu pai, o qual, estudou com seu amigo Jakob Bernoulli[9], aos sete recebia lições de matemática e lia textos diversos sob a tutela de um professor particular.

[9] matemático suíço, 1654-1705, foi um dos muitos matemáticos proeminentes da família Bernoulli. Foi um dos primeiros defensores do cálculo leibniziano, sua contribuição mais importante foi no campo da probabilidade, de onde derivou a primeira versão da lei dos grandes números em sua obra Ars Conjectandi.

Em 1720, com 13 anos, Euler iniciou os estudos na Universidade da Basileia, onde inicialmente estudou Medicina, Teologia e Ciências Humanas. Dois anos mais tarde, nesta mesma universidade, dedicou-se a Matemática (Simmons, 2002), que possuía um famoso departamento de estudos da matemática liderado por Johann Bernoulli. A proximidade da família de Euler com a família Bernoulli talvez seja o que mais influenciou o interesse do jovem pela Matemática (Boyer, 2003).

Em 1723, com 16 anos, recebeu o grau de Mestre em Artes, com uma dissertação que comparava os sistemas de Filosofia Natural de Isaac Newton e de René Descartes, em 1726, Euler completou a sua dissertação sobre propagação do som intitulada de De Sono. Em 1727, foi convidado à cadeira de fisiologia na Academia Russa de Ciências, mais tarde em 1730 foi nomeado professor de Física e de Matemática em 1733 (Simmons, 2002).

Em 1734 casou-se com a suíça Katharina Gsell e juntos tiveram 13 filhos, mas apenas cinco sobreviveram. Nessa época, Euler publicou diversos textos, entre eles, o livro "Mecânica" ($1736-37$), quando apresentou extensivamente a dinâmica Newtoniana na forma de análise matemática. Em 1735, aos 28 anos perdeu a visão do olho direito, em 1741, a convite de Frederico II[10] assumiu a cadeira de matemática na Academia de Berlim, e em 1744 foi nomeado diretor do departamento de matemática.

Em 1766, Euler aceita um convite para voltar à Academia de St. Petersburgo, mesmo ano, segundo Eves, percebeu que, devido à catarata, estava perdendo a visão do segundo olho e, para continuar trabalhando treinou um de seus filhos para escrever enquanto ele ditava. Apesar destas condições, sua memória admirável permitiu que continuasse trabalhando sem parar (2004, p. 306) prova disso é que produziu, em média, um artigo matemático durante todas as semanas do ano 1775 (Simmons, 2002), contando com a ajuda de seus filhos Johann Albrecht Euler, que foi nomeado para a cadeira de física na Academia de São Petersburgo em 1766 e o militar e Christoph Euler, alem do marido de uma de suas netas, Nicolaus Fuss e alguns de seus alunos.

Aos 18 de setembro de 1783, faleceu de hemorragia cerebral enquanto tomava chá e discutia a órbita do, recém descoberto, planeta Urano.

[10] Frederico Roger de Hohenstaufen(1712-1786), governou o Reino da Prússia de 1740 a 1786

1.3.2 A Obra

> Na História da Matemática nenhum outro estudioso produziu tanto (Simmons, 2002).

Além da medicina[11], filosofia e teologia, Euler se debruçou sobre a física e praticamente todos os ramos da matemática existentes na época, especialmente o cálculo diferencial e a análise[12]. Pela quantidade trabalhos e artigos publicados, Boyer (2003, p. 306) afirma que pode ser dito com justiça que Euler fez pela Análise de Newton e Leibniz o que Eu clides fez pela Geometria de Eudoxo e Teaetetus, ou que Viète fizera pela Álgebra de Al-Khowarizmi e Cardano. Euler tomou o Cálculo Diferencial e o Método dos Fluxos e tornou-os parte de um ramo mais geral da Matemática que a partir dai é chamado 'Análise' - o estudo de processos infinitos. Se os antigos Os Elementos constituem a pedra angular da Geometria e Al jabr wa'l muqabalah medieval a pedra fundamental da Álgebra, então a Introductio in Analysin Infinitorum de Euler pode ser considerada como chave de abóbada da Análise.

Também em seus trabalhos e práticas, podemos citar, a introdução da notação $f(x)$ (1734), das notações trigonométricas modernas, de $\sum$ para somatório, i para a unidade imaginária (1777) e o uso da letra π para a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo (1737). Euler provou diretamente as expansões em séries de potência para e e a função da tangente inversa, expressou funções logarítmicas como séries de potencias e a solução do problema das pontes de Königsberg, que abriu caminho para a Teoria dos Grafos e relacionou o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Na física ajudou a desenvolver o modelo de viga de Euler-Bernoulli, determinou orbitas de corpos celestes, em 1757 publicou um trabalho com equações de fluidos, que agora são conhecidas como as Equações de Euler, utilizou curvas fechadas para ilustrar os argumentos conectados, estes diagramas são conhecidos como diagramas de Euler, dentre tantas outras contribuições na análise, teoria dos números, teoria dos grafos, matemática aplicada, probabilidade, mecânica clássica, óptica e astronomia.

A Academia de Ciências de São Petersburgo continuou publicando trabalhos novos de Euler até 50 anos depois da sua morte.

[11] Em 1727, trabalhou, além da cátedra, como médico na Marinha Russa.

[12] Cerca de 40% são sobre matemática.

2 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE GRAFOS

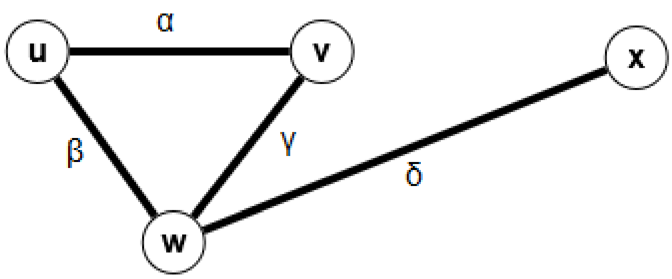
O objetivo deste capítulo é introduzir alguns conceitos básicos sobre grafos, principal ferramenta para a construção da demonstração do problema das sete pontes, bem como alguns resultados que são de relevante importância para a fundamentação dos argumentos das demonstrações que iremos mostrar neste capítulo.

Para definições mais precisas e o início de uma leitura mais aprofundada sobre os teoremas aqui mencionados, recomendamos o livro Wilson, Introduction to Graph Theory.

Definição 1. *Um grafo G é constituído por um conjunto finito não vazio $V(G)$ de vértices e um conjunto $A(G)$ de arestas, e uma função ψG que associa cada aresta de G a um par não ordenado de vértices, não necessariamente distintos, de G.*

Exemplo 1. *Considere o seguinte grafo:*

Figura 18 - Grafo G.



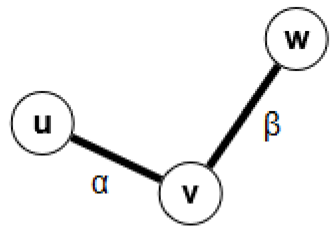
Legenda: Grafo com 4 vértices e 4 arestas.
Fonte: O Autor.

Note na Figura 18, $V(G) = \{u, v, w, x\}$, $A(G) = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $\psi G(\alpha) = \{u, v\}$, $\psi G(\beta) = \{u, w\}$, $\psi G(\gamma) = \{v, w\}$, $\psi G(\delta) = \{w, x\}$ e $G = \{w, \beta, u, \alpha, v, \gamma, w, \delta, x\}$, além disso α é uma aresta e u e v são vértices, então diz-se que α une u e v e escrevemos $\alpha = \{u, v\}$, assim também os vértices u e v são a extremidades de α.

Definição 2. *Dizemos que dois vértices de um grafo são adjacentes se existe uma aresta que os une, da mesma forma, duas arestas distintas são adjacentes se tiverem um vértice em comum.*

Exemplo 2. *Considere o Grafo:*

Figura 19 - Grafo G.



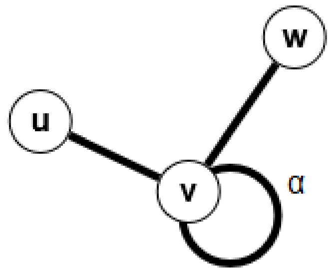
Legenda: Grafo com 3 vértices.
Fonte: O Autor.

Na Figura 19 u é adjacente a v, pois α é uma aresta os ligando, e as aresta α e β são adjacentes, pois tem v como vértice comum.

Definição 3. *Uma aresta é chamada de lacete (ou laço) quando esta liga um vértice a ele mesmo.*

Exemplo 3. *Considere o grafo a seguir:*

Figura 20 - Grafo G.



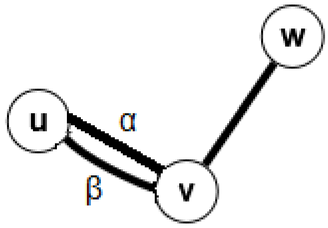
Legenda: Lacete α.
Fonte: O Autor.

Na Figura 20 a aresta α é um lacete, pois liga o vértice v a ele mesmo.

Definição 4. *Diremos que duas arestas são paralelas quando possuem as mesmas extremidades.*

Exemplo 4. *Considere o Grafo:*

Figura 21 - Grafo G.



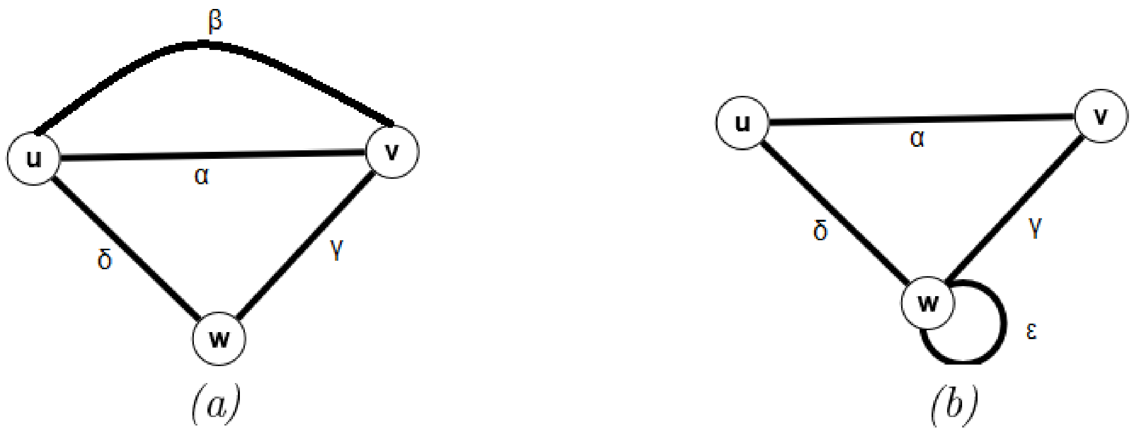
Legenda: α e β unem u e v.
Fonte: O Autor.

As aresta α e β são paralelas, pois tem com extremidades os vértices u e v.

Definição 5. *Chamamos de grafo Simples aquele que não contém lacete nem duas ligações distintas com o mesmo par de extremos (arestas paralelas), caso contrario, chamaremos de multigrafo.*

Exemplo 5. *Considere os grafos (a) e (b):*

Figura 22 - Grafos (a) e (b).



Legenda: Multígrafo.
Fonte: O Autor.

Na Figura 22, o grafo (a) possui as arestas paralelas α e β e o grafo (b) possui o lacete ϵ que os tornam multígrafos.

Nas Figuras 18 e 19 temos exemplos de grafos simples.

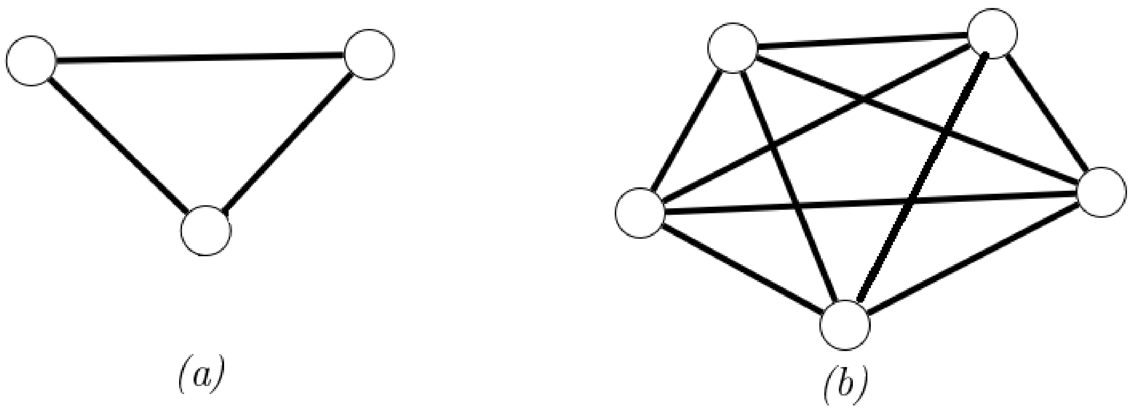
Definição 6. *Grafo Completo é um grafo simples em que quaisquer dois vértices distintos são adjacentes, ou seja, têm uma aresta que os associa. Os grafos completos de n vértices serão denotados por K_n.*

Lema 1. *Seja G um grafo completo com v vértices e a arestas, então $a = v(v-1)/2$.*

Demonstração. Seja G um grafo completo com v vértices e a arestas. Para escolher um vértice em G temos v possibilidades, para escolher um segundo vértice, teremos $v-1$ possibilidades, e o número total de pares de vértices ordenados é dado por $v(v-1)$, com cada par de vértices ligado por uma aresta. No entanto, ao contar as arestas dessa forma, estamos contando cada aresta duas vezes. Para corrigir esta conta vamos dividir o número de pares de vértices por dois, logo $a = \frac{v(v-1)}{2}$. ∎

Exemplo 6. *Considere os grafos da Figura 23 (a) e (b):*

Figura 23 - Grafos (a) e (b).

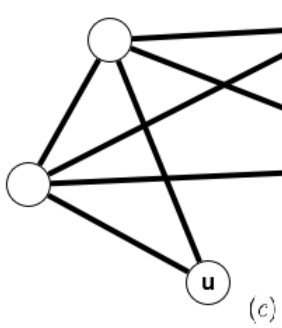


Legenda: Grafo (a) com 3 vértices e (b) com 5 vértices.
Fonte: O Autor.

O grafo (a) é um e Grafo K_3 e o grafo (b) um K_5.

Na Figura 24 não há arestas ligando u a v, logo não é um Grafo Completo, porem este grafo é simples.

Figura 24 - Grafo (c).

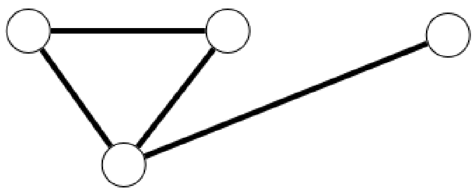


Legenda: Grafo (c) com 5 Vértices.
Fonte: O Autor.

Definição 7. *O tamanho de um grafo G é o inteiro $|V(G)| + |A(G)|$, ou seja, é a soma entre o número total de vértices e o total de arestas do grafo G.*

Exemplo 7. *Considere o grafo G:*

Figura 25 - Grafo G.



Fonte: O Autor.

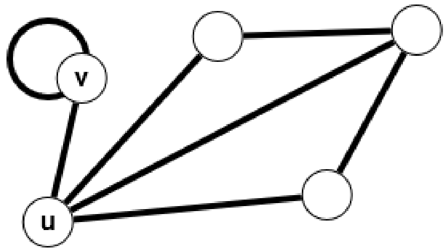
O grafo da Figura 25 possui 4 vértices e 4 arestas, logo o grafo G tem tamanho 8.

Definição 8. *O grau de um vértice u de um grafo G, denotado por $g(u)$ é o número de arestas que incidem em u, com lacetes sendo contados duas vezes. O grau do grafo G, denotado por $g(G)$, é a soma dos graus de seus vértices.*

Exemplo 8. *Considere o grafo G*

O grafo da Figura 26 tem $g(u) = 4$, $g(v) = 3$ e $g(G) = 14$.

Figura 26 - Grafo G.

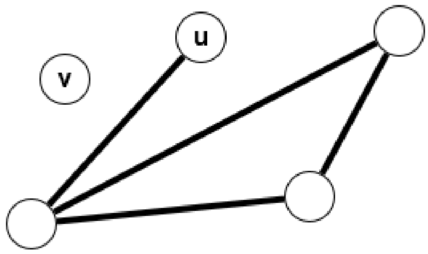


Legenda: v com lacete e u com 4 arestas.
Fonte: O Autor.

Definição 9. *Um vértice de grau* 0 *é um vértice isolado e um vértice de grau* 1 *é um vértice inicial ou final.*

Exemplo 9. *Considere o grafo G*

Figura 27 - Grafo G.



Legenda: v é isolado e u é um vértice de ponta.
Fonte: O Autor.

Note que no grafo da Figura 27 temos $g(v) = 0$ e $g(u) = 1$.

Proposição 1. *O grau de um grafo G é igual ao dobro do número de arestas desse grafo. Ou seja,*

$$g(G) = \sum_{v \in V} g(V) = 2|A(G)|.$$

Demonstração. Como cada aresta possui dois vértices, mesmo se a aresta é um lacete, pois seu extremo v é contado duas vezes, desse modo, se somarmos os graus de todos os vértices obteremos o dobro do número de arestas. ■

Corolário 1. *Em um grafo qualquer, o número de vértices de grau ímpar, é par.*

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 1, pois a soma dos graus dos vértices sempre é um número par. ■

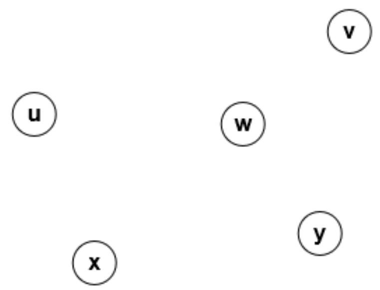
Corolário 2. *Em qualquer grafo G, a soma dos graus de seus vértices é par.*

Demonstração. Basta notar que $\sum_{v \in V} g(v) = 2|A(G)|$. ■

Definição 10. *Diremos que um grafo é nulo quando seu conjunto de arestas é vazio.*

Exemplo 10. *Observe que o grafo G na Figura 28 não possui arestas, logo G é nulo.*

Figura 28 - Grafo Nulo.

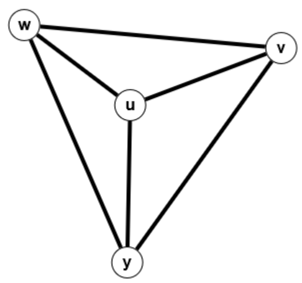


Legenda: Grafo G verifica que $A(G) = \varnothing$.
Fonte: O Autor.

Definição 11. *Um grafo em que cada um de seus vértices tem o mesmo grau é chamado regular. Se cada vértice tem grau g, então chamamos o grafo de g-regular ou regular de grau g.*

Exemplo 11. *Considere o grafo G na Figura 29.*

Figura 29 - Grafo G.



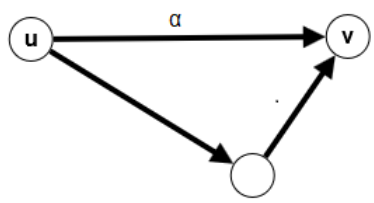
Legenda: Cada vértice tem grau 3.
Fonte: O Autor.

Note que o grafo G possui 3 arestas partindo de cada um de seus vértices, logo G é um 3-regular.

Definição 12. *Grafo orientado, ou dígrafo, é um grafo com setas nas arestas que indicam um sentido, ou seja, suas arestas são pares ordenados, representadas por setas, de maneira que (uv) é diferente de (vu).*

Exemplo 12. *Considere o grafo G.*

Figura 30 - Grafo Orientado.



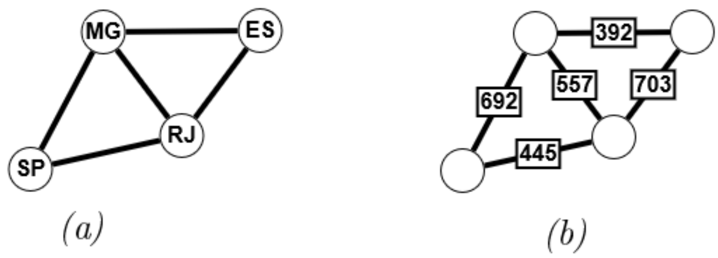
Legenda: Dígrafo G.
Fonte: O Autor.

Na Figura 30 $\alpha = (uv)$. Dizemos que α é divergente em relação ao vértice u e convergente em relação ao vértice v.

Definição 13. *Diremos que um grafo é rotulado quando cada vértice, ou aresta, estiver associado a um rótulo, e diremos que um grafo é valorado quando cada vértice, ou aresta, estiver associado a um valor.*

Exemplo 13. *Na Figura 31, o grafo (a) tem os vértices rotulados com as siglas dos estados que compõem a região sudeste, o grafo (b) tem cada uma de suas arestas tem um peso, as distâncias entre as capitais dos estados que compõem a região sudeste.*

Figura 31 - Grafo Rotulado e Valorado.

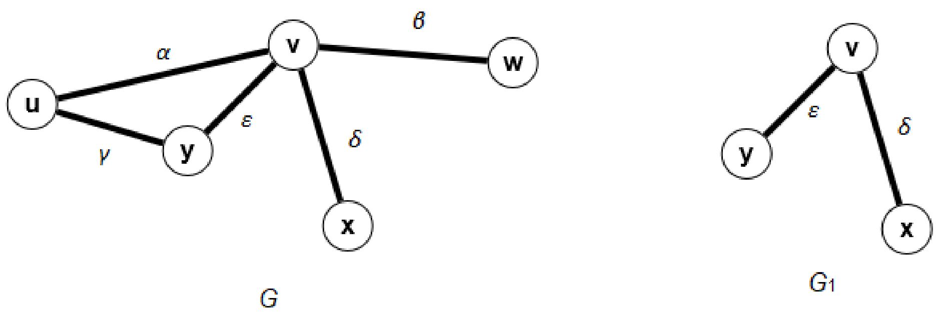


Legenda: Grafos Representando a Região Sudeste.
Fonte: O Autor.

Definição 14. *Um grafo $G_1(V_1, A_1)$ é um subgrafo de um grafo $G(V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de G_1 pertencem a G $(V_1 \subseteq V, A_1 \subseteq A)$, e cada aresta de G_1 possui as mesmas extremidades que em G. Denotamos um subgrafo através da mesma notação usada para conjuntos, isto é $(G_1 \subseteq G)$.*

Exemplo 14. *Seja G o grafo onde $V(G) = \{u, y, v, w, x\}$ e $A(G) = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$, considere $A_1 = \{y, v, x\}$ e $V_1 = \{\epsilon, \delta\}$.*

Figura 32 - Grafos.



Legenda: Grafo G e seu Subgrafo G_1.
Fonte: O Autor.

Assim, na Figura 32, o subgrafo G_1 é gerado por A_1 e V_1, e as seguintes observações podem ser feitas:

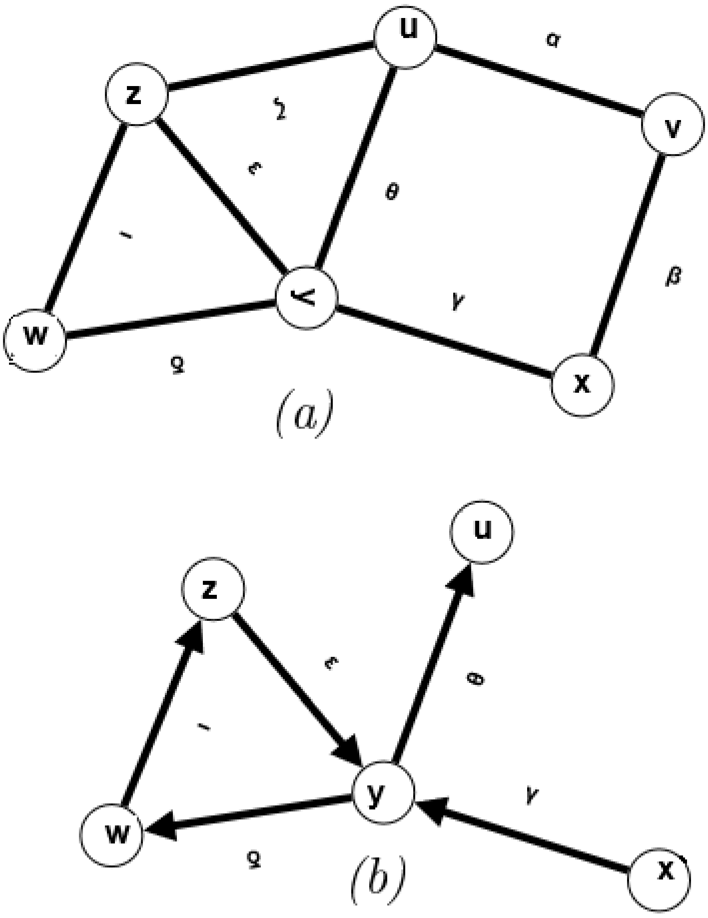
•Todo grafo é um subgrafo de si próprio.
•Um subgrafo de um subgrafo de um grafo G também é um subgrafo de G.
•Um vértice de um grafo G é um subgrafo de G.

Definição 15. *Um passeio em um grafo G é uma sequência não vazia alternada de vértices e arestas $p = \{v_1, a_1, v_2, a_2, ..., v_k\}$ de G com v_i e tal que para todo i, $i \leq n$, v_i e v_{i+1} são extremos de α_i. O tamanho do passeio é definido pelo número de arestas em p.*

Exemplo 15. *Considere o grafo G:*

Na Figura 33, temos o grafo G em (a) e em (b) um passeio p em G, onde $p = \{x, \gamma, y, \delta, w, \iota, z, \epsilon, y, \theta, u\}$ e os vértices x e u extremos de p.

Figura 33 - Grafo (a) e passeio (b).



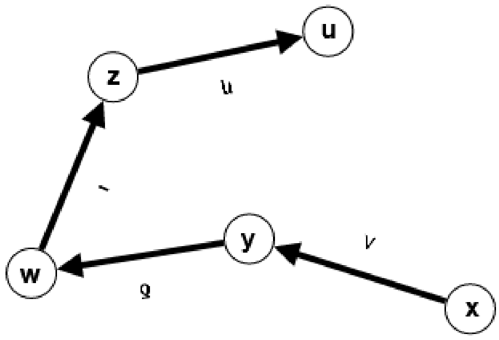
Legenda: Grafo G e passeio p.

Fonte: O Autor.

Definição 16. *Seja p um passeio, então se:*
(a) todos os vértices são distintos em p teremos um caminho;
(b) todas as arestas são distintas em p teremos uma trilha.

Exemplo 16. *(a) Exibimos um caminho para o grafo da Figura 33:*

Figura 34 - Caminho p.

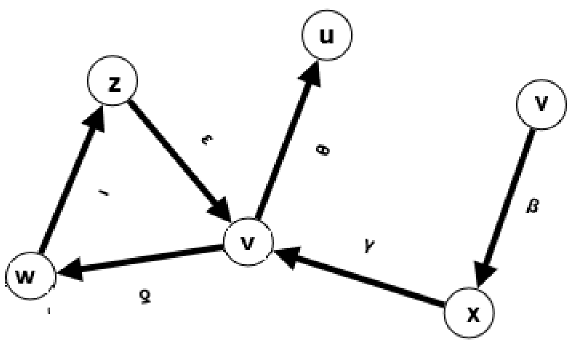


Legenda: $p = \{x, \gamma, y, \delta, w, \iota, z, \eta, u\}$.
Fonte: O Autor.

Note, na Figura 34, que não há vértices percorridos duas ou mais vezes.

Exemplo 17. *(b) Exibimos uma trilha para o grafo da Figura 33:*

Figura 35 - Trilha p.



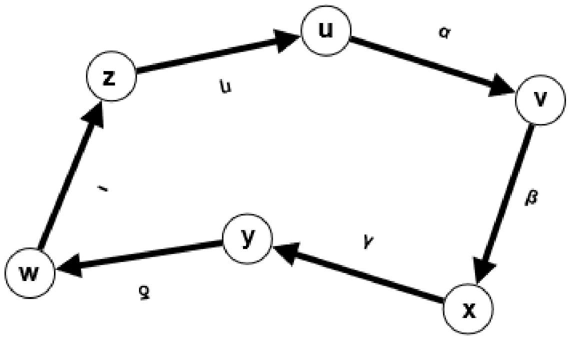
Legenda: $p = \{v, \beta, x, \gamma, y, \delta, w, \iota, z, \epsilon, y, \theta, u\}$.
Fonte: O Autor.

Na Figura 35 temos o vértice y sendo percorrido duas vezes, porem cada aresta é utilizada apenas uma única vez.
Observação. Uma trilha não precisa, necessariamente, ser um caminho.

Definição 17. *Chamaremos de ciclo uma trilha* $P = \{v_1, a_1, v_2, a_2..., v_k\}$ *onde se verifica* $v_1 = v_k$ *e todos os demais vértices são distintos. Teremos o seu comprimento dado pelo número de arestas.*

Exemplo 18. *Um ciclo para o grafo G da Figura 33:*

Figura 36 - Ciclo p.



Legenda: $p = \{u, \alpha, v, \beta, x, \gamma, y, \delta, w, \iota, z, \eta, u\}$.
Fonte: O Autor.

Na Figura 36 temos um ciclo p de comprimento 6.
Observação. Um ciclo com comprimento k é chamado $k - ciclo$. Um 3-ciclo é frequentemente chamado de triângulo, um 4-ciclo de quadrilátero, etc.

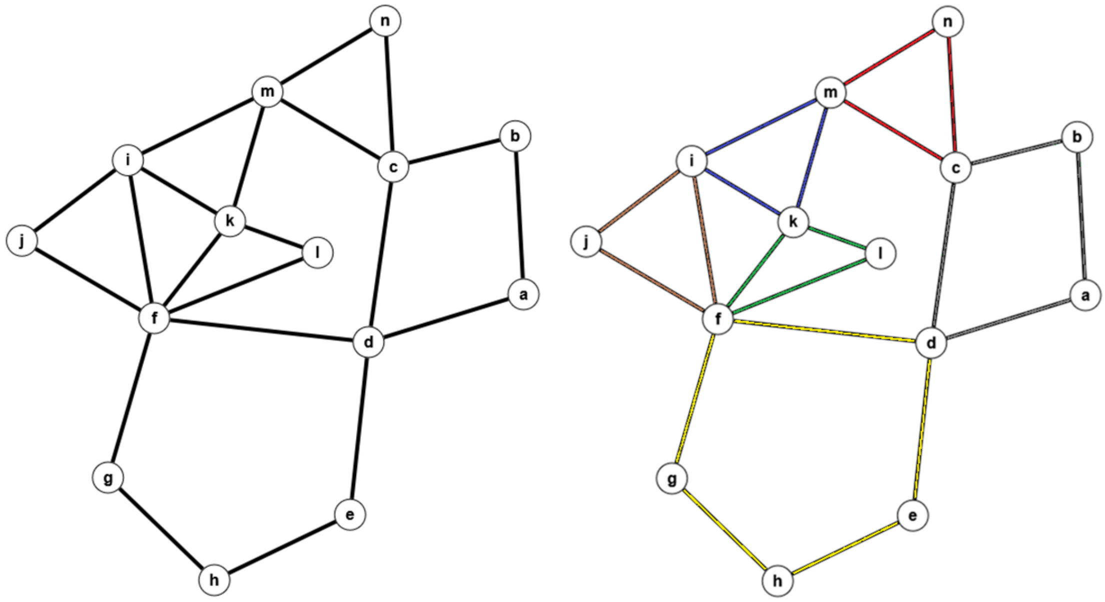
Definição 18. *Chamaremos de acíclico um grafo que não possui ciclos.*

Teorema 1. *Se todo vértice de um grafo G tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo.*

Demonstração. Suponha G um grafo simples, v um vértice de G. Construímos um passeio $p = \{v_0, \alpha, v_1, \alpha_1, \dots\}$ com cada v_i e v_{i+1} adjacente, sendo a existência de tais vértices garantida pela hipótese.
Como G tem apenas um número finito de vértices, devemos eventualmente escolher um vértice que tenha sido escolhido antes. Se v_k for o primeiro desses vértices, então aquela parte do passeio situada entre as duas ocorrências de v_k é o um ciclo.
Por outro lado, se G não é simples, e se houver uma aresta paralela, e esta conecta v a w, então, este caminho forma um ciclo. Ou se existem lacetes em G, podemos considerar o subgrafo G' sem lacetes, ao qual se podem aplicar os argumentos anteriores. ■

Definição 19. *Uma decomposição em ciclos de um grafo G, é uma partição do conjunto* $A(G)$ *tal que cada componente desta partição forma um ciclo em G.*

Figura 37 - Partição em Ciclos Disjuntos.



Legenda: Exemplo de Uma Possivél Partição dos Ciclos.
Fonte: O Autor.

Teorema 2. *Um grafo admite uma decomposição em ciclos se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par.*

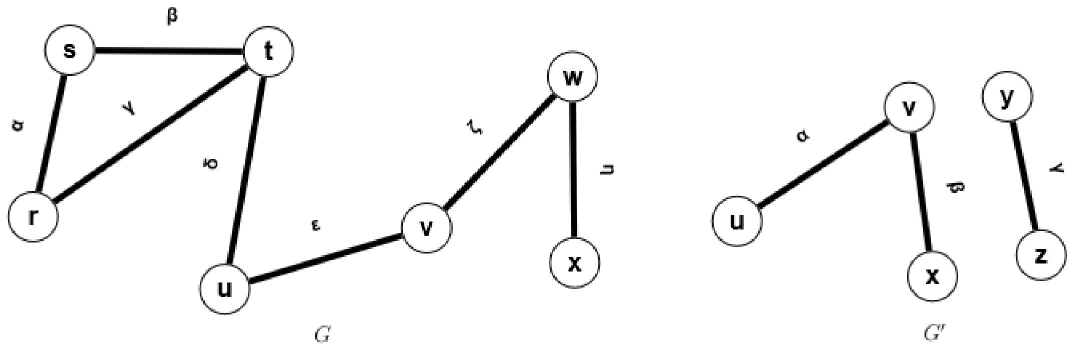
Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha G um grafo que admite decomposição em ciclos disjuntos. Em cada ciclo teremos, que cada vértice tem uma aresta de entrada e uma de saída, sendo assim cada vértice tem grau par. Como a decomposição de G é feita por ciclos sem arestas em comum, e os ciclos cobrem todas as arestas do grafo, o grau total de cada vértice no grafo será a soma de graus pares para cada ciclo em que ele aparece. Portanto, o grau de cada vértice será uma soma de números pares, resultando num número par. Logo todos os seus vértices tem grau par.
($\Longleftarrow$) Suponha G um grafo cujos vértices tem grau par. Tome v_i um vértice do grafo e por uma de suas arestas chegamos ao vértice adjacente v_{i+1} e depois ao vértice v_{i+2}, e como todos os vértices têm grau par, podemos sair desse vértice por uma aresta diferente da que usamos para chegar nele. Como o G é finito, continuado esse processo em algum momento voltaremos a um vértice já visitado, fechando um ciclo. Remova as arestas do ciclo encontrado. Ainda teremos, para o grafo resultante, todos os vértices com grau par. Isso ocorre porque removemos um número par de arestas para cada vértice. Podemos repetir este processo até que não restem mais arestas no grafo. O resultado final será uma coleção de ciclos que decompõem o grafo G.

$\blacksquare$

Definição 20. *Diremos que um grafo não vazio é conexo, se para quaisquer dois vértices diferentes do grafo existe sempre um caminho que os liga, caso contrário, diremos que o grafo é desconexo.*

Exemplo 19. *Considere os grafos G e G':*

Figura 38 - Grafos G e G'.



Legenda: Grafo G Conexo e Grafo G' Desconexo.
Fonte: O Autor.

Na Figura note que, no grafo G', não há caminhos que liguem os vértices u e y, v ou x aos vértices y e z. No grafo G, não há esta restrição.

Definição 21. *Chamaremos de componente conexa o maior subgrafo possível onde o conjunto de vértices estão todos conectados entre si, e não há como conectar nenhum outro vértice a esse conjunto.*

Teorema 3. *Um grafo G é desconexo se, e somente se, seu conjunto de vértices $V(G)$ puder ser particionado em dois conjuntos disjuntos e não-vazios, V_1 e V_2, de forma que não exista uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra extremidade em V_2.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja G um grafo desconexo. Considere um vértice $v \in V(G)$ qualquer, tome o conjunto V_1 com todos os vértices de $V(G)$ que estejam ligados a v por um caminho. Como G é desconexo, V_1 não contém todos os vértices de G. Assim os vértices restantes formam um conjunto não-vazio V_2, e não existe nenhuma aresta de G com uma extremidade em V_1 e outra em V_2. Portanto V_1 e V_2 são conjuntos disjuntos.
($\Longleftarrow$) Suponhamos que exista uma partição de $V(G)$, V_1 e V_2, tal que não existe uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra em V_2 e mostremos que G é desconexo. Considere dois vértices arbitrários v , $w \in V(G)$ tais que $v \in V_1$ e $w \in V_2$. Não pode existir nenhum caminho entre v e w , pois se existisse, haveria uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra em V_2. Portanto, com esta partição, o grafo é desconexo. ■

Lema 2. *Seja G um grafo conexo e que se verifica $A(G) > V(G) - 1$, então G tem um ciclo.*

Demonstração. Se G tem lacete ou ponte, o lema segue de forma trivial. Assim, pode-se supor G simples. Como G é conexo, então precisamos de pelo menos $V(G) - 1$ arestas para conetar os $V(G)$ vértices. Assim por hipótese, existe pelo menos uma aresta a mais em G diferente das usadas para conectar os vértices de G, e como este grafo é simples então esta aresta conecta dois vértices distintos consecutivos, sendo assim temos um ciclo em G. ■

Teorema 4. *Se G é um grafo acíclico com v vértices e $v - 1$ arestas, então G é conexo.*

Demonstração. Suponha que G não é conexo, assim pelo Teorema 3, este tem pelo menos duas componentes conexas. Assim denotamos por $G_1, ..., G_k (k \geq 2)$ as componentes de G. Como G é acíclico, então cada componente G_i é acíclico e, como estas são conexas, então do Lema 2, temos que

$$A(G_i) = V(G_i) - 1, \forall i \in 1, ..., k.$$

E temos que

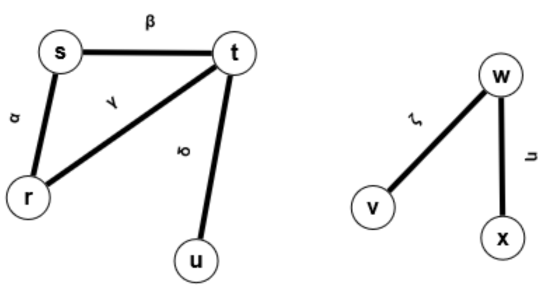
$$v - 1 = A(G) = \sum_{i=1}^{k} A(G_i) = \sum_{i=1}^{k} V(G_i) - 1 = v - k$$

de onde obtemos $v = 1$, o que é um absurdo. ■

Definição 22. *Seja G um grafo conexo. Um corte de arestas é o menor subconjunto de $A(G)$, cuja remoção torna o grafo G desconexo.*

Exemplo 20. *Em relação ao grafo G da Figura 38, ε é uma aresta de corte:*

Figura 39 - Grafo Desconexo.



Legenda: Desconexo por corte de aresta.

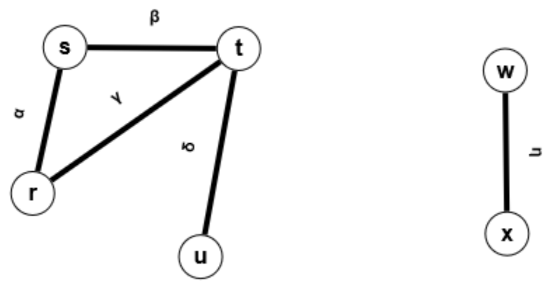
Fonte: O Autor.

Note que, por ser um conjunto mínimo, a remoção das arestas em um corte sempre forma dois subgrafos. Se um conjunto de corte possuir apenas uma aresta, esta é chamada ponte.

Definição 23. *Seja G um grafo conexo. Um corte de vértices é o menor subconjunto de $V(G)$, cuja remoção desses vértices, e suas respetivas arestas, torna o grafo G desconexo.*

Exemplo 21. *Ainda em relação ao grafo G da Figura 38, v é um vértice de corte, eliminando também as arestas ε e ζ:*

Figura 40 - Grafo G.

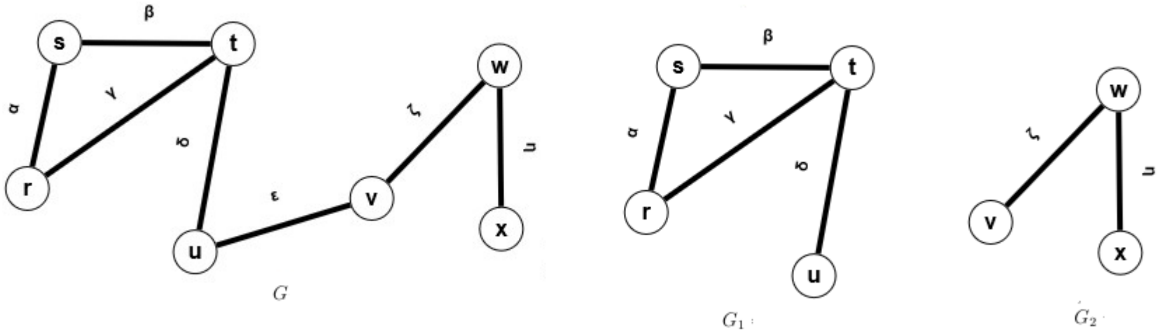


Legenda: Grafo desconexo por corte de vértice.
Fonte: O Autor.

Definição 24. *Cada subgrafo G_i de G, gerado por um corte, é chamado de componente.*

Exemplo 22.

Figura 41 - Grafo Desconexo.



Legenda: Corte de aresta.
Fonte: O Autor.

Na Figura 41 ε é uma aresta de corte, note que temos dois componentes G_1 e G_2.

Teorema 5. *Seja G um grafo simples com v vértices. Se G tem k componentes, então o número a de arestas satisfaz $v - k \leq a \leq \dfrac{(v-k)(v-k+1)}{2}$.*

Demonstração. Seja G um grafo simples com k componentes denotados por G_1, G_2, ..., G_k. Assim para cada G_i, com $i \in \{1, 2, ..., k\}$ denotamos

$$v_i = |V(G_i)| \text{ e } a_i = |A(G_i)|.$$

Temos então que

$$v = \sum_{i=1}^{k} v_i \text{ e } a = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

E como cada G_i é conexo com v_i vértices, temos que $a_i \geq v_i - 1$ e segue que

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} v_i - k \Longrightarrow a \geq v - k.$$

Por outro lado, como G_i é simples temos que

$$a_i \leq \frac{v_i(v_i-1)}{2} \Longrightarrow a \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{v_i(v_i-1)}{2}.$$

E como cada $v_i \geq 1$, temos

$$v_i = v - \sum_{j=1}^{k} v_j (j \neq i) \leq v - k + 1.$$

E teremos

$$a \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{v_i(v_i-1)}{2} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{(v-k+1)(v_i-1)}{2} = \frac{(v-k+1)}{2} \sum_{i=1}^{k} (v_i - 1) = \frac{(v-k+1)}{2}(V-k).$$

E juntando as duas desigualdades temos

$$v - k \leq a \leq \frac{(v-k)(v-k+1)}{2}.$$

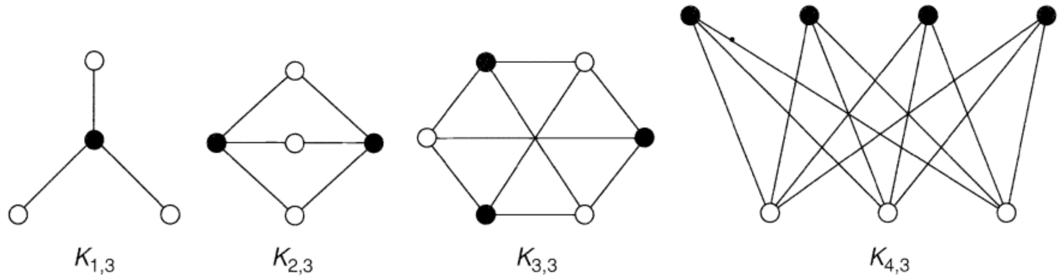
■

Definição 25. *Um grafo $G = (V, A)$ é bipartido se o conjunto de vértices V pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2 de tal forma que cada aresta $a \in A$ conecta um vértice de V_1 a um vértice de V_2. Um grafo bipartido completo é um grafo bipartido no qual cada vértice de V_1 é unido a cada vértice em V_2 por uma aresta. Denotamos o grafo bipartido de s vértices em V_1 e r vértices em V_2 por $K_{s,r}$.*

Exemplo 23. *Considere os grafos bipartidos abaixo:*

Na Figura 42, o conjunto V_1 é formado pelos vértices brancos e o V_2 pelos pretos, além disso, cada aresta do grafo conecta um vértice de um conjunto ao outro conjunto, ou seja, não há arestas conectando vértices do mesmo conjunto.

Figura 42 - Grafos Bipartidos.



Fonte: Wilson, pg 19.

Definição 26. *Seja G um grafo não direcionado, a distância entre dois vértices u e v em G, denotada por $d(u, v)$, é definida como o comprimento do menor caminho entre u e v. É importante observar que a distância entre dois vértices pode não existir caso não haja um caminho que os conecte, ou seja, se eles pertencem a diferentes componentes conexos. Nesse caso, a distância entre esses vértices é considerada infinita.*

Proposição 2. *A distância entre dois vértices em um grafo é uma métrica.*

Demonstração. Sejam u, v e w vértices do grafo G. Por definição, $d(u, v)$ é o caminho mais curto entre u e v. O comprimento de um caminho é o número de arestas, que é sempre um número não negativo. Portanto, $d(u, v) \geq 0$.

Se $u = v$ então não há arestas no caminho entre u e v, logo $d(u, v) = 0$. Por outro lado, se $d(u, v) = 0$ implica em não haver arestas ligando u e v, que só é possível se u e v forem o mesmo vértice. Portanto $d(u, v) = 0$ se, e somente se $u = v$.

Sendo $c(u, v)$ o caminho mais curto de u para v, e como G não é direcionado, qualquer caminho de u para v pode ser percorrido na direção oposta, de v para u, com o mesmo comprimento. Portanto, $d(u, v) = d(v, u)$.

Considere o caminho mais curto de u para v, $c(u, v)$ e o caminho mais curto de v para w, $c(v, w)$. Ao juntarmos esses dois caminhos, obtemos um caminho de u para w que passa por v e cujo comprimento é $d(u, v)+d(v, w)$. Por definição $d(u, w) \leq d(u, v)+d(v, w)$. Concluímos então que $d(u, v)$ é uma métrica. ■

Teorema 6. *Um grafo é bipartido se, e somente se, não contém ciclos ímpares.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja G um grafo bipartido, com A e B bipartições de G. Suponha por absurdo que G contém um ciclo p de tamanho ímpar

$$p = \{v_0, v_1, \ldots, v_k, v_0\}.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $v_0 \in A$, daí $v_1 \in B$, $v_2 \in A$, etc, e deste modo os índices $v_{2n} \in A$ e $v_{2n+1} \in B$, e como k é impar $v_k \in B$. Absurdo pois $v_0 = v_k$ e $A \cap B = \emptyset$.

($\Longleftarrow$) Considere v um vértice do grafo conexo[13] G, e definimos os conjuntos:
$A : \{u \in V(G) | d(u, v)$ é par$\}$
$B : \{w \in V(G) | d(w, v)$ é ímpar$\}$
E segue por conexidade que $A \cup B = V(G)$.

Suponha, por contradição, que existe uma aresta $\{u, w\}$ com u, $w \in A$, logo $d(u, v)$ e $d(w, v)$ são pares. Considere os caminhos mínimos de v a u e de v a w, o ciclo formado pelos caminhos v até u, a aresta u, w, e o caminho w até v terá comprimento

$$d(u, v) + d(w, v) + 1.$$

E como $d(u, v)$ e $d(w, v)$ são pares, $d(u, v) + d(w, v)$ é par e $d(u, v) + d(w, v) + 1$ é ímpar. Isso implicaria que G contém um ciclo ímpar, uma contradição.

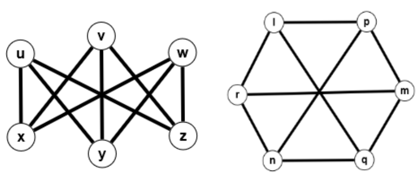
De modo análogo, não podem existir arestas entre vértices dentro do conjunto B. Assim, G é bipartido com partições A e B.

■

Definição 27. *Dois grafos G_1 e G_2 são isomórficos se existe uma correspondência biunívoca entre os vértices de G_1 e os de G_2 tais que o número de arestas que unem quaisquer dois vértices de G_1 é igual ao número de arestas que unem os vértices correspondentes de G_2, ou seja, que preserve a relação de adjacência entre vértices e arestas.*

Exemplo 24. *Considere os grafos (a) e (b), os dois grafos mostrados na figura 43 são isomorfos, com as correspondências $u \leftrightarrow l$, $v \leftrightarrow m$, $w \leftrightarrow n$, $x \leftrightarrow p$, $y \leftrightarrow q$ e $z \leftrightarrow r$. note que u está ligado a z, y e x, bem como seu correspondente l, está ligado aos vértices correspondentes r, q e p.*

Figura 43 - Grafos (a) e (b).



(a) *(b)*

Legenda: Grafos Isomorfos.
Fonte: O Autor.

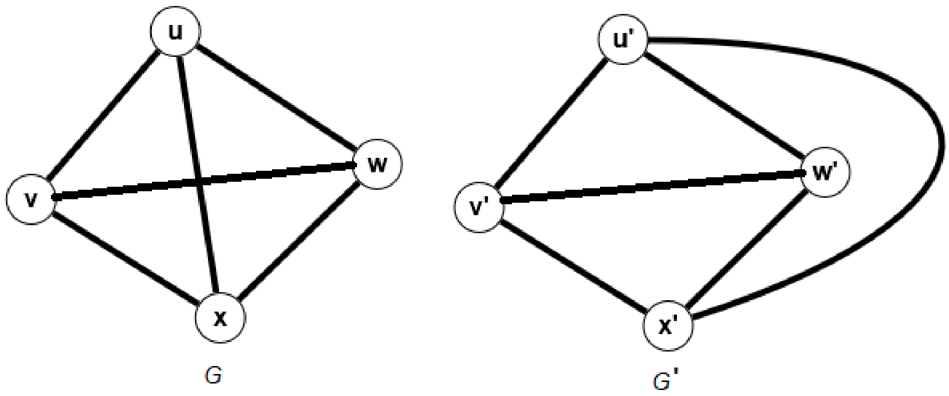
Em outras palavras, é possível obter o grafo G_2 a partir de uma nova rotulação dos vértices de G_1 .

[13] Sendo G desconexo, basta aplicar o raciocínio utilizado em cada uma das componentes conexas de G.

Definição 28. *Um grafo G é dito planar quando é isomorfo a um grafo G' em que não há cruzamento de suas arestas. Caso contrário o grafo é dito não-planar.*

Exemplo 25. *Considere os grafos G e G':*

Figura 44 - Grafos G e G'.



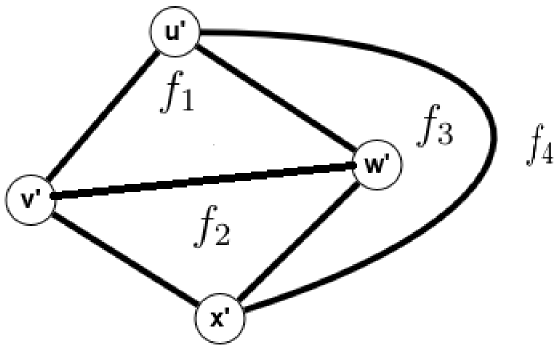
Legenda: Grafos Isomorfos.
Fonte: O Autor.

Temos que o grafo G e o grafo G' são isomorfos, logo G é planar.

Definição 29. *Em um grafo planar G:*
(a) *Chamamos de faces as regiões delimitadas por uma trilha fechada que divide o plano;*
(b) *A região exterior ao grafo também é contada como uma face do grafo, chamada face infinita;*
(c) *O grau da face, $d_G(f)$, é o número de arestas que delimitam esta face, e as estas aresta chamaremos de fronteira.*

Exemplo 26. *O grafo G' da Figura 44 tem 3 faces:*

Figura 45 - Grafo G'.



Legenda: Regiões da Figura 44.
Fonte: O Autor.

A região f_4 da Figura 45 é exterior ao grafo, chamada face infinita. Chamaremos de $F(G)$ o conjunto das faces de um grafo.

Teorema 7. *A soma dos graus das faces de um grafo planar é igual ao dobro do número de arestas no grafo.*

$$\sum_{f \in F(G)} d_G(f) = 2A(G).$$

Demonstração. Seja G um grafo planar, cada aresta pertence a exatamente duas faces. Ao somar os graus de todas as faces do grafo, estamos contando o número de vezes que cada aresta é considerada ao longo das fronteiras de todas as faces, como cada aresta é compartilhada entre duas faces, ela é contada duas vezes na soma total dos graus das faces. Portanto, a soma dos graus das faces é exatamente o dobro do número de arestas. ■

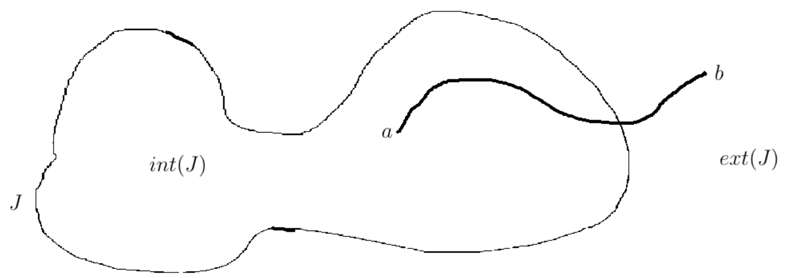
Proposição 3. *Seja f o número de faces de um grafo planar simples G e a seu número de arestas, temos a relação:*

$$3f \leq 2a.$$

Demonstração. Se somarmos os graus de cada face, pelo Teorema 7, sabemos que contamos cada aresta duas vezes, portanto esta soma é precisamente $2a$. Sendo o menor número de arestas que uma face pode ter é três, pois G é simples, então a menor soma do comprimento de cada face pode ser $3f$. Portanto, $3f$ é menor que $2a$. ■

Definição 30. *Curva de Jordan*[14] *é uma curva contínua, que não se auto-intersecta e cujo início coincide com o seu término. Se J é uma curva de Jordan, então J divide o plano em duas regiões, uma interior $(int(J))$ e uma exterior de $(ext(J))$.*

Figura 46 - Curva J.



Legenda: Curva de Joradan.
Fonte: O Autor.

Teorema 8. *Se J é uma curva de Jordan, então dados $a \in int(J)$ e $b \in ext(J)$, qualquer curva ligando a a b intersecta J em algum ponto.*

Demonstração. Ver *"THE CONSTRUCTIVE JORDAN CURVE THEOREM"* (Berg et al., 1975). ■

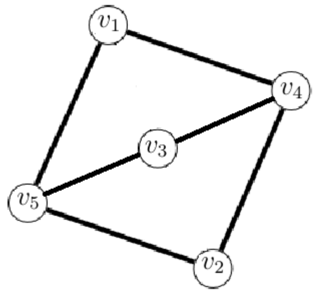
Teorema 9. *O grafo bipartido $K_{3,3}$ é não planar.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $K_{3,3}$ é planar. Sejam os conjuntos disjuntos $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ $B = \{v_4, v_5, v_6\}$ do grafo bipartido G. Pela definição de grafo bipartido, devemos ter v_1 e v_2 conetados a v_4 e v_5 respectivamente, e estas quatro arestas formam o ciclo $p = \{v_1, v_4, v_2, v_5, v_1\}$ que pela definição de curva de Jordan, divide o plano em $int(p)$ e $ext(p)$.

Podemos supor sem perda de generalidade $v_3 \in int(p)$, e as arestas v_4v_3 e v_5v_3 dividem o $int(p)$ em duas regiões delimitadas por $p' = \{v_1, v_5, v_3, v_4, v_1\}$ e $p'' = \{v_2, v_4, v_3, v_5, v_2\}$, e note que ambas as curvas são de Jordan, além disso $v_2 \in ext(p')$ e $v_1 \in ext(p'')$.

[14] Marie Ennemond Camille Jordan (1838—1922), matemático e engenheiro francês, teve vários resultados notáveis na matemática como a medida de Jordan, o teorema de Jordan-Hölder sobre séries de composição, o teorema de Jordan sobre grupos lineares finitos, dentre outros.

Figura 47 - Construção da Demonstração.



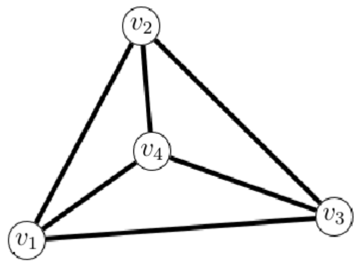
Legenda: Ciclos p, p' e p''.
Fonte: O Autor.

Assim podemos ter $v_6 \in ext(p)$ ou $v_6 \in int(p')$ ou $v_6 \in int(p'')$. Entretanto, se $v_6 \in ext(p)$ a aresta v_6v_3 cruza p, se $v_6 \in int(p')$ a aresta v_6v_2 cruza p' e se $v_6 \in int(p'')$ a aresta v_6v_1 cruza p'', e isso contradiz diretamente o Teorema 8, logo $K_{3,3}$ é não planar. ■

Teorema 10. *O grafo completo de 5 vértices, K_5, não é planar.*

Demonstração. Suponha, po absurdo, que K_5 é planar, e tome $V(K_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Note que o ciclo $p = \{v_1, v_2, v_3, v_1\}$ é uma curva de Jordan que divide o plano em $int(p)$ e $ext(p)$. Podemos supor sem perda de generalidade $v_4 \in int(p)$, então v_1v_4, v_2v_4 e v_3v_4 são arestas interiores a p que dividem p em 3 ciclos $p' = \{v_1, v_2, v_4, v_1\}$, $p'' = \{v_2, v_3, v_4, v_2\}$ e $p''' = \{v_1, v_3, v_4, v_1\}$, e note que ambas as curvas são de Jordan, além disso $v_3 \in ext(p')$, $v_1 \in ext(p'')$ e $v_2 \in ext(p''')$.

Figura 48 - Construção da Demonstração.



Legenda: Ciclos p, p', p'' e p'''.
Fonte: O Autor.

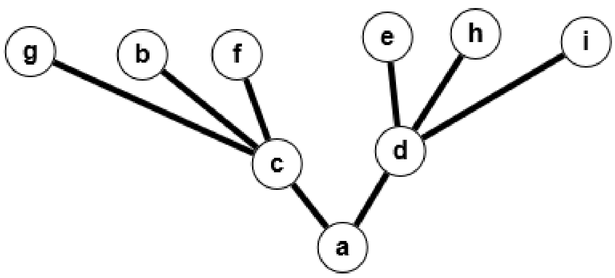
Assim podemos ter $v_5 \in ext(p)$ ou $v_5 \in int(p')$ ou $v_5 \in int(p'')$ ou $v_5 \in int(p''')$. Entretanto, se $v_5 \in ext(p)$ a aresta v_5v_4 cruza p, se $v_5 \in int(p')$ a aresta v_5v_3 cruza p' e se $v_5 \in int(p'')$ a aresta v_5v_1 cruza p'' e se $v_5 \in int(p''')$ a aresta v_5v_2 cruza p''', e isso contradiz diretamente o Teorema 8, logo K_5 é não planar.

■

Definição 31. *Chamaremos de árvore um grafo, com $g(V) \geq 2$ onde para dois vértices distintos sempre haverá um caminho e não há ciclos neste grafo.*

Exemplo 27. *Considere o grafo:*

Figura 49 - Árvore G.



Fonte: O Autor.

Note que sendo G uma árvore, teremos apenas uma região, observando que toda árvore é planar e sem ciclos, por tanto, dada a adição de uma única aresta, se cria um e somente um ciclo. Por outro lado G deixa de ser conexo se uma aresta é suprimida, pois todas as arestas em G são pontes. Chamaremos de folha todo vértice de grau 1 em uma árvore. Segue pelo Teorema 13 que toda árvore tem pelo menos uma folha.

Teorema 11. *Em uma árvore, quaisquer dois vértices são conectados por um caminho único.*

Demonstração. Suponha por absurdo, que em uma árvore G existam dois caminhos distintos p_1 e p_2 conectando u e v em G. Como os caminhos p_1 e p_2 são diferentes, partindo de u, deve haver um último vértice $w \in p_1 \cap p_2$ de modo que o vértice adjacente a w em p_1 não seja o mesmo em p_2. Como p_1 e p_2 terminam no vértice v, existe um último vértice y, após w, que p_1 e p_2 têm em comum, note que é possível que $y = w$. Então com a parte de p_1 de w a y junto com a parte de p_2 de w a y formam um ciclo no grafo acíclico G, uma contradição. Logo $p_1 = p_2$.

■

Teorema 12. *Se G é uma árvore, então $A(G) = V(G) - 1$*

Demonstração. Vamos utilizar indução sobre o número de vértices. Assim, se $V(G) = 2$, então como G é árvore segue que $A(G) = 1$, e verifica-se a igualdade. Agora suponha que para qualquer árvore G com $V(G) \leq n$, esta tem $V(G) - 1$ arestas. Considere um árvore H com $n + 1$ vértices. Removendo uma aresta, esta se divide em dois grafos, cada uma das quais também é uma árvore. Cada uma dessas subárvores terá um número de vértices menor ou igual a n, de modo que, uma subárvore c tem a vértices e a outra subárvore

G_2 tem b vértices, além disso, $a + b = n + 1$ e utilizando a hipótese de indução em cada subárvore temos:

$$A(G_1) = a - 1 \text{ e } A(G_2) = b - 1.$$

Assim temos que

$$A(H) = A(G_1) + A(G_2) + 1 = a + b - 1 = n = V(H) - 1.$$

■

Teorema 13. *Toda árvore possui pelo menos dois vértices de grau* 1*, isto é, tem pelo menos duas folhas.*

Demonstração. Vamos utilizar indução no número de arestas. Para uma árvore com uma única aresta teremos dois vértices conectados, ambos com grau 1, pois cada um está conectado apenas a única aresta. Suponha que toda árvore com n arestas, onde $n \geq 2$, tenha pelo menos dois vértices de grau 1. Considere uma árvore G com $n + 1$ arestas. Remova um vértice folha com sua correspondente aresta, resultando uma árvore G_1 com n arestas, note que a remoção de uma aresta e um vértice mantém a conectividade do resto do grafo. Pela hipótese de indução, esta árvore tem pelo menos dois vértices de grau 1. Ao adicionar de volta o vértice e a aresta que foram removidos, a extremidade livre da aresta é ligada a um vértice v do grafo G_1, assim se $g(v) = 1$, então a adição do vértice e gera uma nova folha, deixando o grafo G com, pelo menos, duas folhas. Por outro lado, se $g(v) \geq 1$, então a adição do vértice e da aresta já incrementa o número de folhas de G_1, logo G tem pelo menos duas folhas.

■

Teorema 14. ***(Equação de Euler para Grafos Planos Conexos)*** *Seja G um desenho plano de um grafo planar conexo, com v vértices, a arestas e f faces de G. Então* $v - a + f = 2$.

Demonstração. Vamos utilizar indução sobre o número de arestas de G. Se $a = 0$, como G é conexo, então $v = 1$ e $f = 1$, o teorema é verdadeiro. Agora suponha válido para todos os grafos com no máximo $a - 1$ arestas. Tomemos então um grafo G com a arestas. Se G é uma árvore, não possui ciclos, então pelo Teorema 12 $a = v - 1$ e $f = 1$, de modo que $v - a + f = 2$. Se G não é uma árvore, seja a' uma aresta em algum ciclo de G. Então $G - a'$ é um grafo planar conexo com v vértices, $a - 1$ arestas, $f - 1$ faces, de modo que pela hipótese de indução $v - (a - 1) + (f - 1) = 2$, assim $v - a + f = 2$. Verificando assim que para todo grafo G planar conexo vale $v - a + f = 2$. ■

Corolário 3. *Seja G um grafo planar com v vértices, a arestas, f faces e k componentes. Então* $v - a + f = k + 1$.

Demonstração. O resultado segue a aplicação da fórmula de Euler a cada componente separadamente. ■

Corolário 4. *(i) Se G é um grafo planar simples conexo com v vértices, com $v \geq 3$ e a arestas, então $a \leq 3v - 6$.*
(ii) Se, além disso, G não tem triângulos (ciclos de comprimento 3), ou seja, $f \geq 4$, então $a \leq 2v - 4$.

Demonstração. (i) Suponha um grafo planar G e utilizando a Proposição 3 junto com o Teorema 14 teremos:

$$\begin{aligned} 3v - 3a + 3f &= 6 \\ 3v - 3a + 2a &\geq 6 \\ 3v - a &\geq 6 \\ -a &\geq -3v + 6 \\ a &\leq 3v - 6. \end{aligned}$$

(ii) Tendo cada face no minimo 4 arestas, pela Proposição 3 temos $4f \leq 2a$, e junto com o Teorema 14 temos:

$$\begin{aligned} 2a &\geq 4(2 + a - v) \\ 2a &\geq 8 + 4a - 4v \\ -2a &\geq 8 - 4v \\ a &\leq 2v - 4. \end{aligned}$$

■

Teorema 15. *Todo grafo planar simples contém um vértice de grau no máximo 5.*

Demonstração. Suponha por absurdo que o grau de cada vértice é maior que 5, da Proposição 1 temos

$$6v \leq \sum_{v \in V} g(v) = 2a.$$

Pelo Corolário 4 (i) temos $2a \leq 6v - 12$, e então dos dois resultados temos

$$6v \leq 6v - 12.$$

Absurdo, assim, deve haver pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5. ■

Teorema 16. *Seja G um grafo com v vértices. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) G é uma árvore.
(ii) G é conexo e tem $v-1$ arestas.
(iii) G não possui ciclos e tem $v-1$ arestas.
(iv) G é conexo e cada aresta é uma ponte.
(v) Todo par de vértice de G está conectado por exatamente um caminho.
(vi) G não contém ciclos, mas a adição de uma aresta produz exatamente um ciclo.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Por hipótese G é uma árvore, logo conexo por definição. Por outro lado o Teorema 12, diz que $A(G) = V(G) - 1$, e segue o resultado.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Seja G um grafo conexo com v vértices e $v-1$ arestas. Suponha por absurdo que existe um ciclo em G. Se há em G um ciclo, podemos remover uma das arestas do ciclo e o grafo continua conexo. Isso porque, mesmo após remover uma aresta, ainda existe um caminho entre os vértices conectados por essa aresta devido ao ciclo, e após remover essa aresta, o número total de arestas do grafo passa a ser $v-2$, mas o grafo continua conexo. Contradição, pois pelo Teorema 2, um grafo acíclico, com v vértices deveria ter no mínimo, $v-1$ arestas para ser conexo, logo não há ciclos em G.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Suponha que G seja um grafo acíclico com v vértices, $v-1$ arestas e não seja conexo. Pelo Teorema 3, pode-se denotar por $G_1, \ldots, G_r$, com $r \geq 2$, as componentes conexas de G. Dado que G é acíclico , segue que cada componente G_i é acíclica, assim cada componente é uma árvore. Pelo Teorema 12, segue que G é conexo.

Suponha agora, que removemos uma aresta α de G. Como G é acíclico, a remoção de qualquer aresta não cria outro caminho alternativo para conectar os vértices originalmente conectados por α, logo esta remoção torna G desconexo. Pela generalidade de α, temos que cada aresta em G é uma ponte, pois sua remoção resulta em um grafo desconexo.
$(iv) \Rightarrow (v)$ Como G é conexo, cada par de vértices está conectado por pelo menos um caminho. Se um determinado par de vértices estiver conectado por dois caminhos, então eles formam um ciclo, contradizendo o fato de que cada aresta é uma ponte.
$(v) \Rightarrow (vi)$ Suponha por contradição que há um ciclo em G, então existe pelo menos um par de vértices u e v que estão conectados por mais de um caminho, no ciclo há o sentido de u para v e o sentido de v para u de forma disjunta. Isto contradiz a hipótese, onde há exatamente um caminho entre qualquer par de vértices, logo não há ciclos em G. Por outro lado ao adicionarmos uma nova aresta α entre dois vértices u e v de G criamos um novo caminho entre os vértices. Agora existindo dois caminhos, o original e um passando pela aresta α, esses dois caminhos formam um ciclo. Podemos afirmar que se forma um único ciclo, porque α é a única aresta nova adicionada, e ela apenas adiciona um ciclo fechado e nenhum outro par de vértices pode formar um novo ciclo sem a aresta α, pois isso contradiz a hipótese que existe somete um caminho.
$(vi) \Rightarrow (i)$ Por hipótese em G não há ciclos. Suponha por contradição que G não é conexo,

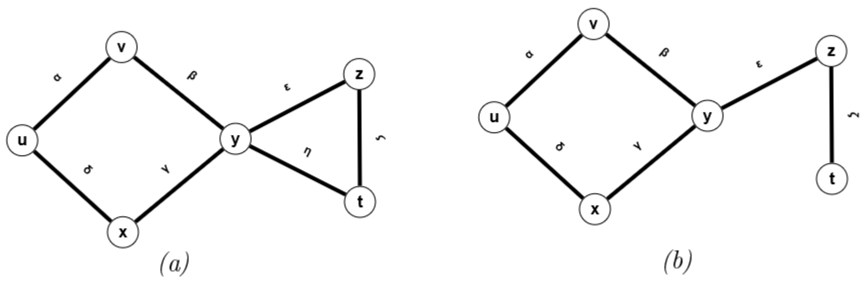
e, pelo Teorema 3, em G existem pelo menos dois componentes conexos. Se adicionarmos uma aresta entre dois componentes diferentes, a nova aresta não pode formar um ciclo, pois não há caminho entre esses componentes antes da adição da nova aresta, mas isso contradiz a hipótese de que a adição de uma aresta a G produz exatamente um ciclo. Logo G é conexo. Sendo conexo e não contendo ciclos, G é uma árvore.

■

Definição 32. ***(Grafos Eulerianos)*** *Um grafo conexo G é euleriano se existe uma trilha fechada contendo todas as arestas e vértices de G, chamada trilha euleriana.*
Um grafo G é semi-Euleriano se existir uma trilha aberta contendo cada aresta de G.

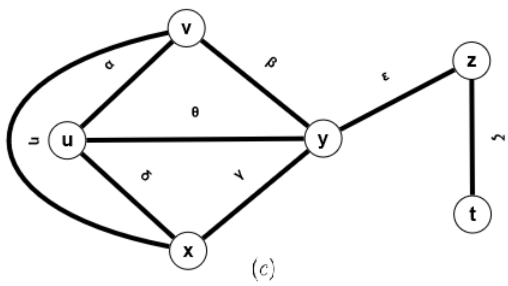
Exemplo 28. *Consideres os grafos da Figura 50, em (a) temos a trilha euleriana $p = \{u, \alpha, v, \beta, y, \epsilon, z, \zeta, t, \eta, y, \gamma, x, \delta, u\}$, então (a) é Euleriano, e em (b) temos a trilha aberta $p = \{t, \zeta, z, \epsilon, y, \gamma, x, \delta, u, \alpha, v, \beta, y\}$, logo (b) é um grafo semi-Euleriano. Na Figura 51 o grafo (c) não possui trilha, aberta ou fechada, sendo assim, não é Euleriano. De maneira bem simples, não há como partir de um vértice e percorrer todas as arestas sem repetição.*

Figura 50 - Grafos (a) e (b).



Fonte: O Autor.

Figura 51 - Grafo (c).

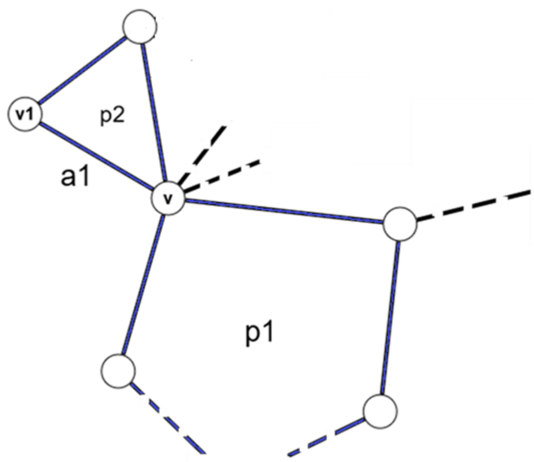


Fonte: O Autor.

Teorema 17. *Um grafo não vazio G é euleriano se e somente se G é conexo e todos os seus vértices tiverem grau par.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se em G possui um circuito euleriano, então é possível percorrer todas as arestas do grafo sem repetir nenhuma e retornar ao ponto de partida, daí todo vértice de G deve ser alcançável a partir de qualquer outro vértice, ou seja, G deve ser conexo. Em uma trilha euleriana, cada vez que passamos por um vértice v, ele deve sair deste vértice através de outra aresta, portanto, o número total de vezes que o circuito entra em v é igual ao número total de vezes que ele sai de v. Isso implica que o grau de cada vértice v deve ser par, pois cada entrada e saída conta como uma aresta. Assim, se G é euleriano, então G é conexo e todos os vértices têm grau par.
($\Leftarrow$) Como G tem vértices de grau par, então pelo Teorema 2, G admite uma decomposição em ciclos, isto é, $A(G)$ é particionado de tal forma que cada aresta está em um único ciclo. Assim, seja $v \in G$ e p_1 um ciclo contendo este vértice. Se todo vértice de G está em p_1, então p_1 será uma trilha euleriana e o teorema está provado, caso contrário existe um vértice v_1 fora de p_1 e uma aresta α_1 com extremos v e v_1, com $v_1 \in p_1$. Pela decomposição em ciclos α_1 está em um ciclo p_2 sem arestas em comum com p_1, assim podemos definir uma trilha t_1 começando em v_1 seguindo p_1 até v_1 e logo fazendo p_2 até v_1 novamente. Como t_1 é uma trilha fechada contendo todos os vértices de p_1.

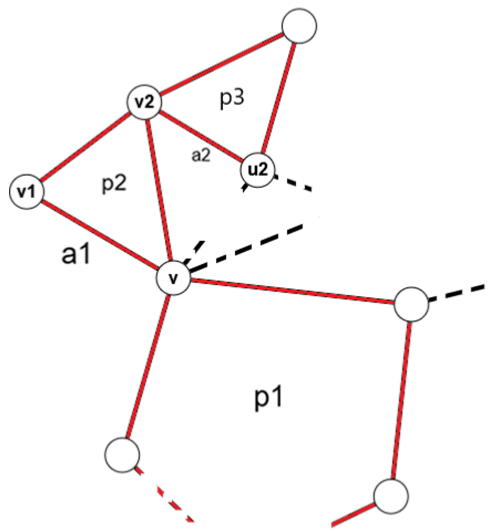
Figura 52 - Construção da Demonstração.



Legenda: p_1, v e v_1.
Fonte: O Autor.

Novamente, caso t_1 não contenha todos os vértices de G, então existe $u_2 \in V(G) \backslash V(t_1)$ e uma aresta α_2 com extremos em u_2 e $v_2 \in t_1$, novamente, pela decomposição em ciclos, existe um ciclo p_3 que contém α_2 e não tem arestas em comum com t_1. Assim, pode-se definir a trilha t_2 começando em v_2 seguindo o ciclo p_2 até v_1 acompanhando o ciclo p_1 até retornar a v_1 e acompanhando o ciclo p_2 até retornar a v_2 e logo terminando de fazer o ciclo p_3 até retornar a v_2. Com isto esta nova trilha é fechada e contém todos os vértices de t_1 e v_2.

Figura 53 - Construção da Demonstração.



Legenda: p_1, p_2 e p_3.
Fonte: O Autor.

Dado que o grafo é finito, após um número finito destes passos, obtemos uma trilha euleriana. Logo G é euleriano.

■

Corolário 5. *Um grafo G é conexo euleriano se e somente se G é uma união de ciclos com aresta disjuntas.*

Demonstração. Segue dos Teoremas 2 e 16.

■

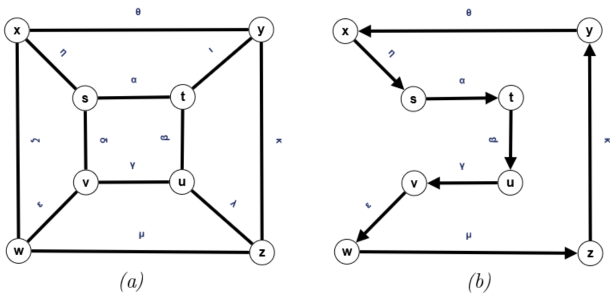
Corolário 6. *Um grafo conexo é semi-euleriano se e somente se tiver exatamente dois vértices de grau ímpar.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha G conexo e semi-euleriano, então existe uma trilha $p = \{v, ..., w\}$, onde v não é adjacente a w. Com a adição de uma resta α ligando v a w teremos o ciclo euleriano $p_1 = \{v, ..., w, \alpha, v\}$. E pelo Teorema 17 todo vértice de p_1 tem grau par. Ao remover α teremos v a w com exatamente uma aresta a menos cada, sendo assim ambos com grau ímpar, logo G tem exatamente dois vértices de grau ímpar.
($\Leftarrow$) Suponhamos G conexo com exatamente 2 vértices, v e w, de grau ímpar. Seja o grafo G' obtido por junção, com a adição de uma resta α ligando v a w, assim ambos agora tem grau par. Como todos os vértices de G' tem grau par, pelo Teorema 17, G' é Euleriano. Apagando α em G', temos em G uma trilha que percorre todas as arestas de G ligando v e w, logo G é semi-euleriano. ■

Definição 33. *Um ciclo é dito Hamiltoniano*[15] *se passa por todos os vértices de G, neste caso diremos que G é um grafo Hamiltoniano. Por outro lado, se em G existe um caminho onde todo vértice de G é percorrido, temos um caminho Hamiltoniano e o grafo G é dito semi-Hamiltoniano. Um grafo é chamado de grafo Hamiltoniano se possui um ciclo Hamiltoniano e semi-Hamiltoniano se possui um caminho Hamiltoniano.*

Exemplo 29. *Considere os grafos:*

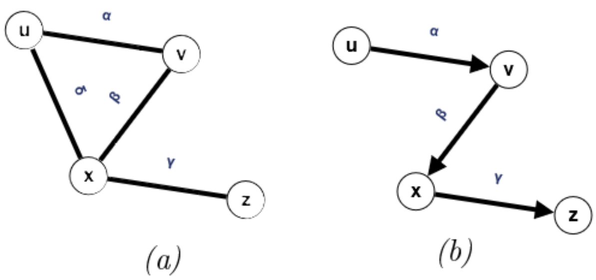
Figura 54 - Grafo Hamiltoniano



Fonte: O Autor

Na Figura 54 temos o grafo Hamiltoniano (a) onde existe o ciclo Hamiltoniano (b) $p = \{s, \alpha, t, \beta, u, \gamma, v, \varepsilon, w, \mu, z, \kappa, y, \theta, x, \eta, s\}$

Figura 55 - Grafo semi-Hamiltoniano.



Fonte: O Autor.

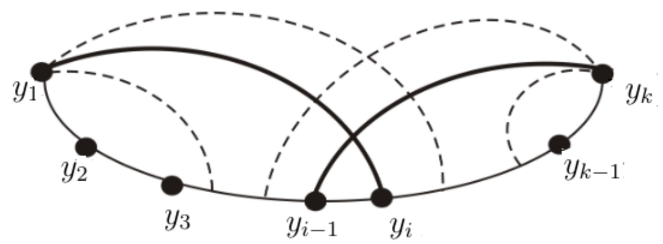
Na Figura 55 temos o grafo semi-Hamiltoniano (a) onde existe o caminho Hamiltoniano (b) $p = \{u, \alpha, v, \beta, x, \gamma, z\}$

15 O nome ciclo Hamiltoniano surge do fato de Sir William Hamilton ter investigado sua existência no gráfico do dodecaedro, embora um problema mais geral tivesse sido estudado anteriormente pelo Rev. T.P. Kirkman. Wilson, pg35

Teorema 18. ***(Ore[16], 1960)*** *Se G é um grafo simples com v vértices e tomados arbitrários u e w, distintos e não adjacentes verificamos que $g(u) + g(w) \geq v$ para $v \geq 3$, então G é hamiltoniano.*

Demonstração. Suponha, por contradição, G, um gafo simples não hamiltoniano, mas tomados arbitrários u e w, distintos e não adjacentes, verifica-se $g(u) + g(w) \geq v$ para $v \geq 3$. A partir de G, construímos um novo grafo G' adicionando arestas, uma a uma, sem criar ciclos hamiltonianos, até que não seja mais possível adicionar nenhuma aresta sem criar um ciclo hamiltoniano, ou seja, G' é um grafo maximal[17] não-hamiltoniano, note que isso não interfere na hipótese. Seja $p = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ o caminho hamiltoniano máximo em G', ou seja, o maior caminho que visita cada vértice exatamente uma vez e tem k vértices. Por hipótese, $g(y_1) + g(y_k) \geq k$, e como y_1 e y_k são extremos de p, eles tem no máximo $k - 1$ vértices não adjacentes cada. Com $g(y_1) = 1$, existe um y_i adjacente a y_1. Note que y_{i-1} não pode ser adjacente a y_n, pois teríamos o ciclo $p = \{\ldots, y_1, y_i, y_{i-1}, y_k, \ldots\}$ em G, como na Figura 56, contradizendo a suposição.

Figura 56 - Construção da Demonstração.



Legenda: Ciclo p'.
Fonte: O Autor.

Como G é simples e tem k vértices, então

$$g(y_k) \leq k - 1 - g(y_1)$$
$$g(y_k) + g(y_1) \leq k - 1$$
$$g(y_k) + g(y_1) < k$$

o que contradiz a hipótese. Logo G é hamiltoniano.

■

[16] Øystein Ore (1899-1968). Matemático norueguês, pesquisador na universidade de Oslo e professor em Yale.

[17] Um grafo que não é um subconjunto próprio de outro grafo.

Corolário 7. ***(Dirac[18], 1952)*** *Se G é um grafo simples com v vértices, onde $v \geq 3$, e se $g(w) \geq \frac{v}{2}$ para qualquer vértice w de G, então G é hamiltoniano.*

Demonstração. Por hipótese temos $g(w) \geq \frac{n}{2}$ para qualquer w. Então tomados u e w, pelo Teorema 18, temos $g(u) + g(w) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, logo para cada par de vértices v e w, adjacentes ou não, temos G hamiltoniano. ■

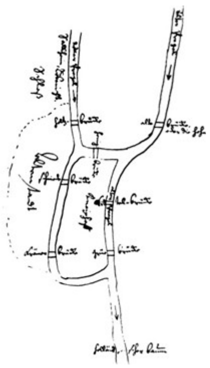
[18] Paul Maurice Dirac (1902-1984). Físico teórico inglês, ganhador do premio Nobel de 1933. Estudioso da mecânica quântica e percursor da eletrodinâmica quântica.

3 O PROBLEMA DAS 7 PONTES

Não se sabe bem ao certo como começou, mas entre os moradores da cidade surgiu uma ideia: cruzar o rio de uma margem à outra passando uma única vez por cada uma das sete pontes, se não conseguissem, deveriam recomeçar, vez após outra, porém com o passar do tempo ninguém obtinha sucesso. As discussões em torno do assunto eram recorrentes, e apesar de ninguém chegar a uma resposta, todos acreditavam que existia uma solução. Em março de 1735, Carl Ehler[19], prefeito de Danzing, conversou com Heinrich Kühn (1690-1769), nascido em Königsberg, sobre o problema. Após não encontrar uma solução, escreveu a um matemático amigo da família para que ele resolvesse a questão.

> [...]Você prestaria a mim e a nosso amigo Kühn o mais valioso serviço, colocando-nos muito em dívida com você, culto Senhor, se você nos enviasse a solução, que você conhece bem, para o problema das sete pontes Könisberg, juntamente com uma prova. [...] Eu adicionei um esboço das referidas pontes... (SACHS; STIEBITZ; WILSON, 1988, p. 134)

Figura 57 - Königsberg.



Legenda: Esboço de Königsberg feito por Ehler.
Fonte: Sachs, Stiebitz e Wilson (1988, p. 135).

O amigo era nada menos que Euler. Inicialmente, Euler dedicou apenas seu tempo livre ao problema, em consideração à família do amigo,

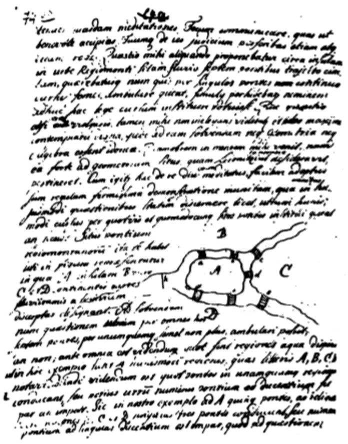
> Este tipo de solução tem pouca relação com a matemática, e não compreendo porque é que se espera que seja um matemático, e não qualquer outra pessoa, que a produza, pois a solução baseia-se apenas na razão e a sua descoberta não depende de nenhum princípio matemático. (Euler, carta de abril de 1736)

[19] Carl Gottlieb Ehler 1685—1753, matemático e astrônomo

porém, quando a dificuldade de achar uma solução para uma brincadeira mostrou-se um desafio complexo, ele pôs-se a trabalhar com dedicação e escreveu a Marinoni[20].

> Um problema me foi apresentado sobre uma ilha na cidade de Königsberg, cercada por um rio, atravessado por sete pontes, e foi me perguntado se alguém poderia atravessar as pontes separadas em uma caminhada contínua de tal forma que cada ponte fosse atravessada apenas uma vez. Fui informado que até então ninguém havia demonstrado a possibilidade de fazer isso, ou mostrado que é impossível. Esta questão é tão banal, mas pareceu-me digno de atenção em que nem a geometria, álgebra, ou mesmo a arte de contar foram suficientes para resolvê-lo (HOPKINS; WILSON, 2004, p. 202)

Figura 58 - Carta de Euler.



Legenda: Explicação do problema de Euler para Marinon.
Fonte: Hopkins e Wilson (2004, p. 203).

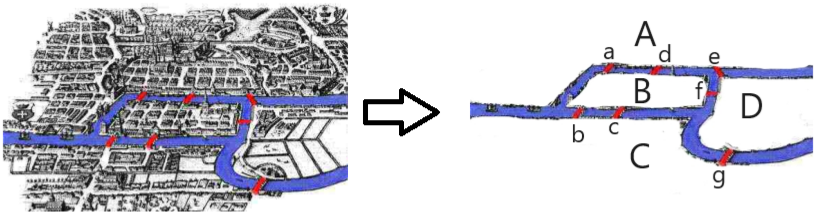
Iniciada no ano de 1736, a solução de Euler só seria publicada em 1741 na *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*[21].

Para a solução do problema, Euler verificou que a geometria e o cálculo em si eram irrelevantes ao problema, então levou em consideração somente o que o problema exigia, abstraiu os elementos não essenciais e focou somente no que parecia mais essencial, nos locais visitados e as pontes utilizadas para tal. Desta forma o problema foi simplificado conforme as ilustrações:

[20] Giovanni Jacopo de Marinoni 1676-1755, matemático e astrônomo austríaco, membro estrangeiro da Academia de Ciências da Prússia e da Academia de Ciências da Rússia.

[21] A solução de um problema relativo à geometria da posição.

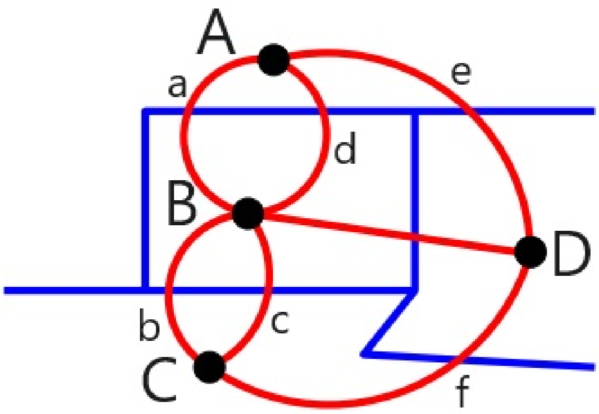
Figura 59 - Königsberg.



Legenda: Representação de Königsberg.

Fonte: O Autor.

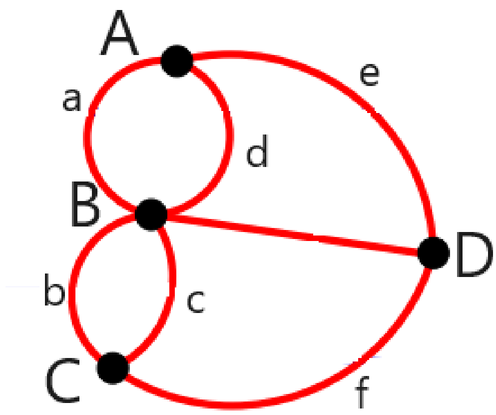
Figura 60 - Königsberg.



Legenda: Representação simplificada de Königsberg.

Fonte: O Autor.

Figura 61 - Königsberg.



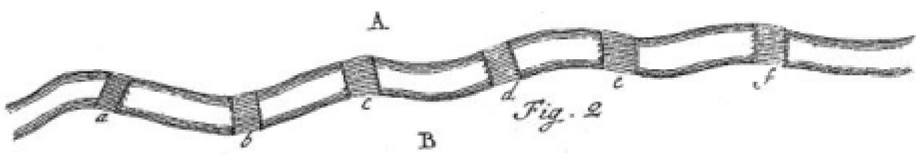
Legenda: Representação em grafos das pontes de Königsberg.

Fonte: O Autor.

Continuando suas análises, Euler ponderou sobre uma região genérica com um número finito de pontes, conforme a tradução de seu artigo:

> Considero, para encontrar tal regra, uma única região A, para a qual conduza um número qualquer de pontes a, b, c, d, etc. Dessas pontes, observo primeiro uma única, a, que conduz à região A. Agora, se o viajor passa por essa ponte, então deve ter estado na região A antes do trânsito, ou chega em A depois do trânsito. Assim, na maneira de designar o trânsito acima estabelecida, é necessário que a letra A ocorra uma vez. Se três pontes, digamos, a, b, c, levam à região A, e o viajor passa por todas as três, então, na designação de sua migração, a letra A ocorrerá duas vezes, seja com início do curso em A ou não. De modo semelhante, se cinco pontes conduzem a A, na designação do trânsito por todas elas a letra A deve ocorrer três vezes. E se o número de pontes for um número ímpar qualquer, e se a esse número for acrescentada uma unidade, sua metade dará quantas vezes a letra A deve ocorrer. (RBHM, Vol. 15, nº 30)

Figura 62 - Figura 2 da demonstração de Euler.



Legenda: Regiões com pontes.
Fonte: Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 15 nº 30 - pág27.

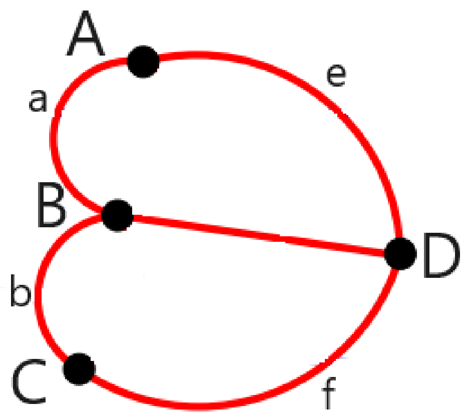
Ou seja, Euler observou que, com o ponto de partida sendo o mesmo de chegada e com uma ponte sendo atravessada exatamente uma vez só é possível se há um numero par de pontes ligando duas regiões, ou seja, todos os vértices necessitam ser de grau par, segundo seu artigo:

> Portanto, proposto qualquer caso, será possível saber, fácil e imediatamente, se o trânsito pode ser feito uma só vez por todas as pontes ou não com a ajuda desta regra. Se houver mais do que duas regiões às quais levam um número ímpar de pontes, então certamente pode-se afirmar que tal trânsito não é possível. Se, porém, o número de pontes que levam a apenas duas regiões for ímpar, então o trânsito poderá ser feito, mas apenas se o curso se iniciar em uma destas duas regiões. Se, por fim, não houver nenhuma região à qual leva um número ímpar de pontes, então o trânsito desejado poderá ser feito com início a partir de qualquer região. Essa regra, portanto, satisfaz plenamente ao problema proposto. (RBHM, Vol. 15, nº 30)

Note que o grafo da Figura 61 não satisfaz esta condição, possui todos os vértices com grau ímpar, logo pelo Teorema 17, que estabelece as condições necessárias e suficientes para a existência de um ciclo euleriano em um grafo, concluímos que não é possível encontrar um caminho que passe por todas as sete pontes de Königsberg exatamente uma vez e retorne ao ponto de partida. Portanto, o problema original não possui solução.

Após a destruição de duas das pontes originais e a reconstrução de outras três, a distribuição das pontes em Königsberg se modificou. Atualmente, duas regiões são conectadas por duas pontes, enquanto outras duas são ligadas por três (Figura 9). Logo, agora, pelo Corolário 6, com essa nova configuração, se torna possível realizar um caminho euleriano na cidade, iniciando na ilha de Kneiphof (B) e finalizando na ilha de Lomse(D) (ou vice-versa). Essa rota especial permite atravessar todas as pontes exatamente uma vez.

Figura 63 - Königsberg hoje.



Legenda: Representação em grafos das pontes de Königsberg nos dias atuais.
Fonte: O Autor.

4 OUTROS PROBLEMAS SOBRE GRAFOS

4.1 O Problema do carteiro chinês

Enunciado, pelo matemático chinês Meigu Guan[22] em 1960, como *o problema da inspeção de rota*, uma generalização do ciclo euleriano, que consiste em encontrar um trajeto fechado que percorre todas arestas de um grafo ao menos uma vez com um menor custo, referindo-se a otimizar a rota de um carteiro.

> Um carteiro tem que entregar cartas em um determinado bairro. Ele precisa percorrer todas as ruas do bairro e voltar ao correio. Como ele pode planejar sua rota de modo que caminhe a distância mais curta?(Kwan, 1960)

Guan formulou formalmente sua teoria:

> Dado um grafo conexo onde $2n$ dos nós são ímpares e todos os outros nós são pares. Suponha que precisamos adicionar algumas arestas ao gráfico com a seguinte propriedade: o número de arestas adicionadas a qualquer nó ímpar é ímpar e o adicionado a qualquer nó par é par. Precisamos minimizar o comprimento total das bordas adicionadas. (Kwan, 1960)

Ou seja, para cada vértice de grau ímpar acrescentamos uma aresta. De forma prática, fazemos o carteiro percorrer as mesmas ruas, porém de forma mínima. O artigo foi traduzido para o inglês em 1962 quando Jack Edmonds[23] o estudou e o nomeou como problema do carteiro chinês em homenagem a Guan.

Com rotas maiores, várias ruas e casas, o problema pode se tornar complicado, porém em 1973, quando Edmonds e Johnson[24], escreveram um artigo propondo que o problema pode ser reduzido à correspondência e, portanto, que é solucionável em tempo polinomial[25]. Esses tipo de resultado era impossível para Kwan em 1960 e inacessível para Euler, mas facilitam a resolução do problema de forma prática.

---

[22] Mei-Ko Kwan, Matemático chinês nascido em Xangai, 1934, especialista em programação matemática

[23] John Robert Edmonds, matemático americano, nascido em 1934. Estudou otimização combinatória, combinatória poliédrica, matemática discreta e teoria da computação. Recebendo em 1985 o Prêmio de Teoria John von Neumann.

[24] Ellis Lane Johnson, 1938, matemático americano contribuiu para otimização discreta e design de software, e suas aplicações práticas para sistemas de distribuição e fabricação.

[25] Ordem dos problemas que podem ser representados de acordo com uma função polinomial.

4.2 O problema das quatro cores

Em 1852, Francis Guthrie [26] estava colorindo um mapa dos condados da Inglaterra. Enquanto fazia isto, tomava o cuidado de não colorir com a mesma cor países que tivessem alguma linha de fronteira em comum. Notou então que apenas quatro cores bastariam para colorir esse mapa. Experimentalmente, conseguiu colorir vários outros mapas fazendo uso de apenas quatro cores, e conjeturou que estas se tratam da determinação do número mínimo de cores necessário para colorir um mapa, de forma que países com fronteira comum tenham cores diferentes. Pela aparente simplicidade do argumento, tentou formular uma demonstração de que quatro cores seriam suficientes para colorir qualquer mapa porém fracassou.

Em 1878, o teorema teve sua primeira referência na literatura matemática, sendo divulgado pela London Mathematical Society. Em 1879 Alfred Kempe[27] publicou um artigo, no American Journal of Mathematics, onde dava uma demonstração para o teorema, entretanto, em 1890, Percy Heawood[28], apontou um contraexemplo para esta demonstração, porém, conseguiu demonstrar que cinco cores eram suficientes para colorir um mapa.

Somente em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken apresentaram uma demonstração do Teorema das Quatro Cores, com 50 dias e mais de mil horas de cálculos de computador IBM 360, onde 1.482 configurações de grafos, 50 páginas contendo texto e diagramas, 85 páginas preenchidas com quase 2500 diagramas adicionais, e 400 páginas de microfichas contendo esquemas tradicionais. (Thomas, 1998, p. 852).

Em Agosto de 1994, no Congresso Internacional de Matemática, em Zurique, apresentaram uma prova simplificada do Teorema das Quatro Cores em cuja formulação foi utilizado o computador, porém conseguiram reduzir drasticamente a quantidade de cálculos, segundo WILSON (2002, p.151), somente 633 configurações.

[26] 1831-1899, advogado, botânico e matemático, formado pela University College em Londres

[27] 1849-1922, matemático britânico, membro da Royal Society e, de 1892 a 1894 presidente da London Mathematical Society.

[28] 1861-1955, matemático britânico, dedicou-se à coloração de mapas.

5 GRAFOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Hoje em dia, o estudo dos grafos e suas aplicações estão em muitos ramos de conhecimento, entretanto o tema está fora da BNCC[29]. Neste sentido, para uma complementação a este trabalho, vamos propor atividades utilizando a teoria dos grafos, porém, sem definições formais. Segundo a BNCC

> O letramento matemático refere-se à capacidade de identificar e compreender o papel da Matemática no mundo moderno, de tal forma a fazer julgamentos bem embasados e a utilizar e envolver-se com a Matemática, com o objetivo de atender às necessidades do indivíduo no cumprimento de seu papel de cidadão consciente, crítico e construtivo. O letramento matemático para o Pisa[30], portanto, não se limita ao conhecimento da terminologia, dos dados e dos procedimentos matemáticos, ainda que os inclua, nem tampouco se limita às destrezas para realizar certas operações e cumprir com certos métodos. As competências matemáticas implicam na combinação desses elementos para satisfazer as necessidades da vida real dos indivíduos na sociedade.

Observando as capacidades de raciocínio, argumentação, solução de problemas, representação, comunicação, modelagem, utilização de linguagem simbólica, técnica e formal e utilização de instrumentos matemáticos, necessárias ao aluno de ensino básico, vemos que os grafos, mesmo que não sejam formalmente definidos ou mencionados, encaixam-se em muitas dessas capacidades e é importante destacar que as próprias orientações curriculares sugerem, explicitamente, a discussão da Teoria dos Grafos

> O termo "combinatória" está usualmente restrito ao estudo dos problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola - são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler. (BRASIL, 2006, p. 94)

Exibiremos agora algumas atividades pertinentes ao ensino básico. A critério do professor, nos momentos finais de cada atividade, sugerimos a apresentação de alguns conceitos básicos sobre grafos ligadas a esta atividade.

---

[29] Base Nacional Comum Curricular é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

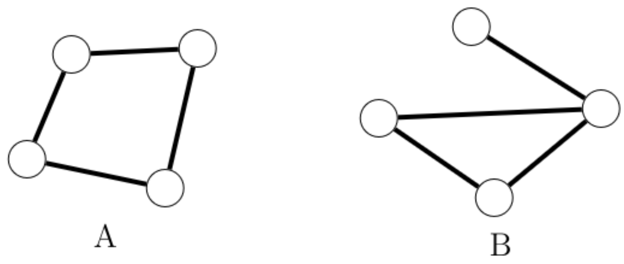
[30] Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, tradução de *Programme for International Student Assessment*, é um estudo comparativo internacional realizado a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE).

5.1 **Atividade** 1

A atividade proposta a seguir é uma adaptação proposta por Farmer e Stanford (2003, p. 9)

Um jogo ao estilo Battle Royale existem dois mapas de início do jogo, A e B com salas e corredores que a interligam (Figura 64).

Figura 64 - Grafo dos Mapas.



Legenda: Mapas A e B.
Fonte: O Autor.

Dois amigos estão jogando online simultaneamente a mesma partida, porém não sabem em qual área de inicio se encontram. Pela comunicação por voz eles trocam as seguintes mensagens:

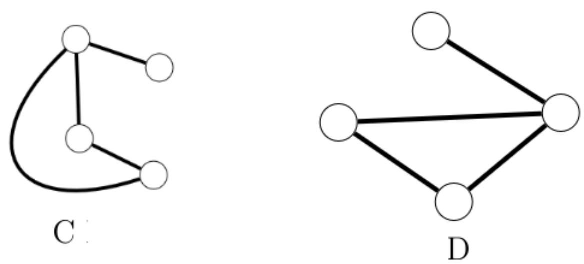
— Há aqui um sala com apenas um corredor!

— Aqui todas as salas tem dois corredores!

— Droga! Estamos em mapas separados...

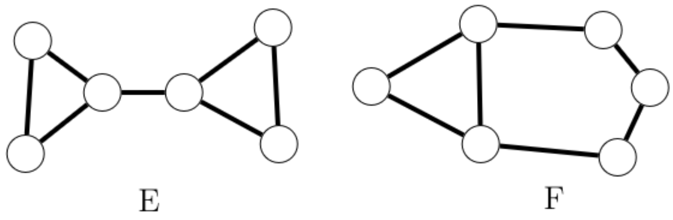
Pelo diálogo entre os jogadores foi possível para ambos compreender que estão em mapas distintos. Apresentamos agora aos alunos os seguintes mapas:

Figura 65 - Grafo dos Mapas.



Legenda: Mapas C e D.
Fonte: O Autor.

Figura 66 - Grafo dos Mapas.



Legenda: Mapas E e F.
Fonte: O Autor.

O objetivo desta etapa consiste na percepção de que, em certas situações, a quantidade de salas e de corredores não é suficiente para diferenciar a estrutura de dois mapas. Nesse sentido, os estudantes são levados a realizar uma análise referente ao modo como as salas estão interligados por meio dos corredores, com a ideia de perceber que estruturalmente sejam diferentes porem os mapas detém as mesmas características.

Como atividade final sugerimos a proposta do aluno desenhar o mapa descrito por um jogador como:

— O meu mapa tem sete salas e nove corredores. A uma das salas está ligada somente um corredor, à outra estão ligada cinco corredores, a outras duas salas estão ligadas três corredores e as demais três salas estão ligados dois corredores!

É muito importante a condução das atividades por parte do professor, que aqui tem o papel de facilitar bem destacado, entretanto é importante que os alunos desenvolvam suas conclusões e resoluções por meio de seus próprios conhecimentos, e analisar sempre as respostas dos alunos que podem trazer variações interessantes aos problemas propostos. A aprendizagem em situações de ação, a troca de informações e de validação dos conhecimentos construídos/desenvolvidos devem sem encorajadas ao máximo.

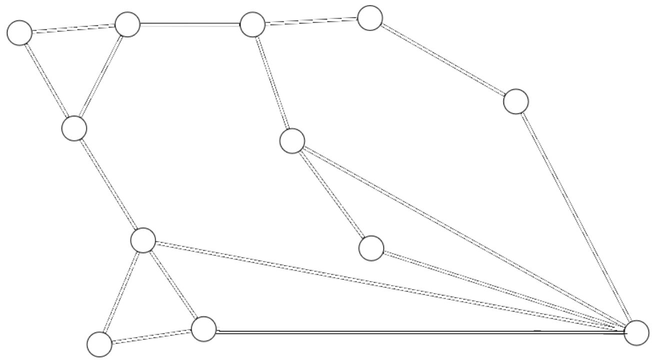
No término deste desafio é o momento para o professor retomar as atividades realizadas e apresentar os resultados esperados, quando estes não foram atingidos.

5.2 Atividade 2

É possível, iniciando de qualquer uma das bolinhas, ir com um lápis pelos caminhos, sem repetir os caminhos, e retornar para a bolinha inicial?

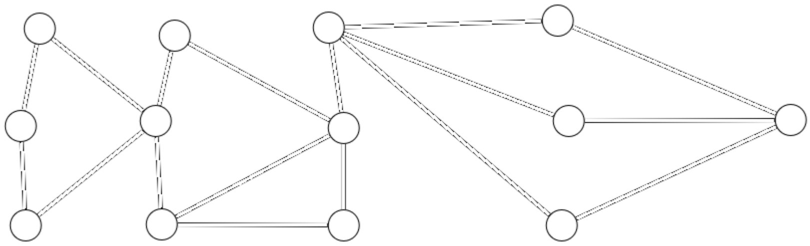
Veja as figuras abaixo:

Figura 67 - Grafo não euleriano.



Legenda: Figura Para Atividade.
Fonte: O Autor.

Figura 68 - Grafo euleriano.



Legenda: Figura Para Atividade.
Fonte: O Autor.

Aqui temos um grafo com um caminho euleriano e outro não, cabendo ao professor auxiliar o aluno com dicas sobre a elaboração dos caminhos.

5.3 Atividade 3

Em uma folha com pontos desenhados e alinhados, preferencialmente em uma grade de linhas e colunas, começamos o jogo com um dos participantes escolhendo duas bolinhas adjacentes e as ligando-as, em seguida o outro jogador faz o mesmo.

Regras:

- Cada jogador joga somente uma vez;
- As linhas que ligam as bolinhas não podem se cruzar;
- Não se pode formar triângulos com as linhas traçadas;
- Perde o participante que formar um quadrado em sua jogada.

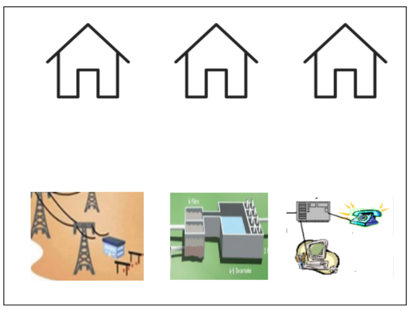
5.4 Atividade 4

(BRIA, 2001): Do grande poeta brasileiro Carlos Drummond de Andrade são os versos "João amava Teresa, que amava Raimundo, que amava Maria, que amava Joaquim, que amava Lili, que não amava ninguém". Represente graficamente esta situação, só com bolinhas e linhas, com a inicial do nome de cada pessoa numa bolinha

5.5 Atividade 5

É possível conectar os 3 serviços luz, água e telefonia às três casas sem haver interseção entre as ligações na figura abaixo?

Figura 69 - Três casas e três serviços básicos.



Legenda: Figura Para Atividade.
Fonte: O Autor.

A resposta para o enigma estrito colocado acima é não, é impossível ligar as três casas com as três diferentes utilidades sem pelo menos uma das ligações cruzarem com as outras.

5.6 Atividade 6

Atividade para dois jogadores, necessário para este jogo: um folha em branco e 4 lápis de cores diferentes. Na folha em branco um jogador desenha uma região qualquer, o próximo jogador pinta a região e desenha uma nova região adjacente, seguindo esses paços até que um jogador não possa pintar de modo que regiões adjacentes tenham cores diferentes.

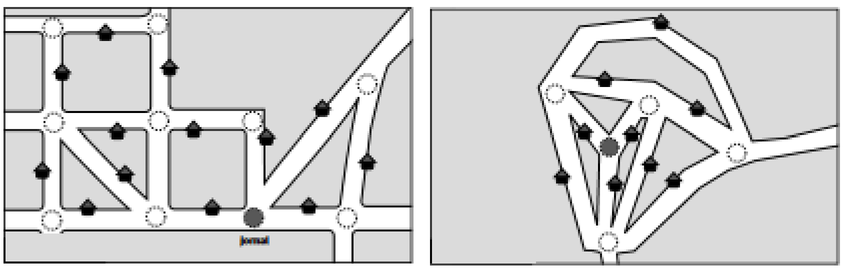
Regras:

- Regiões com apenas um ponto em comum não são consideradas adjacentes;
- Regiões adjacentes devem ter cores diferentes;
- Não é permitido desenhar uma região que contenha uma outra região.

5.7 Atividade 7

Agora vamos pensar no trabalho de um entregador de jornais. Ele deve passar por várias ruas até que abasteça todos os assinantes. A gráfica é seu ponto de partida e deve ser seu ponto de chegada, após entregar todos os jornais. Em cada uma das 2 situações, veja se é possível encontrar um trajeto pelo qual ele entregue todos os jornais, passando apenas uma vez em cada rua. Explique como pensou em cada uma delas.

Figura 70 - 8 pontes em Salvador.



Legenda: Figura Para Atividade.

Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=32829.

5.8 Atividade 8

Represente por meio de um grafo planar essa situação: Em uma rede social Ana conhece Carlos, Débora e Fábio; Beatriz conhece Ana, Carlos e Débora; Erique conhece Fábio, Beatriz, Carlos e Débora.

5.9 Atividade 9

A cidade de Salvador possui oito pontes que conectam diversas partes da cidade. Suponha que essas pontes e as áreas que elas conectam possam ser representadas por um grafo, onde os vértices representam as áreas e as arestas representam as pontes. Determine se é possível fazer um passeio pelas 8 pontes de Salvador, de modo se inicie e termine o passeio no mesmo lugar e que cada ponte só pode ser atravessada exatamente uma vez.

Figura 71 - Google Maps.

Legenda: 8 pontes em Salvador.
Fonte: Figura Para Atividade.

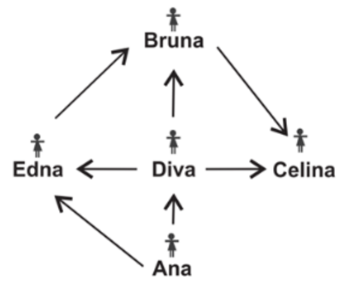
5.10 Atividade 10

Com folhas de papel com desenhos de mapas simples, e utilizando lápis de cor ou canetinhas Pedir aos alunos que cada região do mapa deve ser colorida de tal forma que duas regiões adjacentes (que compartilham uma fronteira) não tenham a mesma cor. Inicie com Os alunos podem usar no máximo 4 cores diferentes. 10 cores, depois 8, depois 6, depois 4 e por ultimo peça com 3 cores distintas.

5.11 Atividade 11

(OBEMEP 2007) A figura mostra como comparar as idades de cinco irmãs, usando flechas que partem do nome de uma irmã mais nova para o nome de uma mais velha. Por exemplo, Edna é mais velha que Ana. Qual é a irmã mais velha?

Figura 72 - Idades das Irmãs.



Legenda: Figura Para Atividade.
Fonte: OBEMEP 2007 Nível 1.

5.12 Atividade 12

(OBMEP 2011 - 2ª fase do Nível 1) Juquinha marca pontos sobre uma circunferência e traça segmentos ligando alguns desses pontos. Ele chama um ponto de ponto-ímpar quando este está ligado a um número ímpar de pontos, e de ponto-par caso contrário. Por exemplo, na ilustração ao lado, ele escolheu cinco pontos e fez quatro ligações.

a) Juquinha marcou cinco pontos sobre uma circunferência e traçou todas as ligações possíveis, exceto uma. Quantos pontos-ímpares foram obtidos?

b) Explique por que Juquinha sempre encontrará um número par de pontos-ímpares, quaisquer que sejam o número de pontos que ele marcar e o número de ligações que ele traçar.

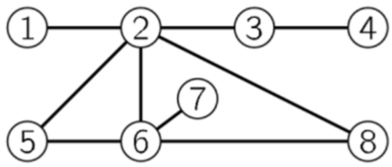
5.13 Atividade 13

(PIC 2016) Em um país há 100 cidades, e sabemos que de cada cidade partem exatamente 4 estradas diretas para outras cidades. Quantas estradas existem no total?

5.14 Atividade 14

(Canguru de Matemática 2019 - Nível C) Pedro vai pintar os oito círculos da figura de vermelho, amarelo ou azul, de modo que dois círculos ligados por um segmento não tenham a mesma cor. Quais são os dois círculos que terão necessariamente a mesma cor?

Figura 73 - Circulos para Colorir.



Legenda: Figura Para Atividade.
Fonte: Canguru de Matemática 2019 - Nível C.

6 APLICAÇÃO DE ATIVIDADE

O ensino da matemática muitas vezes é percebido como desafiador e abstrato, especialmente por alunos que têm dificuldades em compreender conceitos matemáticos complexos. No entanto, uma abordagem lúdica pode ser uma estratégia eficaz para tornar a matemática mais acessível, envolvente e divertida.

As atividades lúdicas proporcionam uma experiência de aprendizado mais dinâmica e interativa, permitindo que os alunos se envolvam de forma ativa na construção do conhecimento matemático. Além disso, essas atividades oferecem uma oportunidade para os alunos aplicarem conceitos matemáticos em contextos práticos e do mundo real, promovendo uma compreensão mais profunda e duradoura.

Neste capítulo, exploraremos a utilização de atividades lúdicas baseadas em grafos, focando especialmente na aplicação das atividades 2 e 5 do Capítulo 6. Essas atividades têm o potencial de enriquecer uma aula de matemática, promovendo o aprendizado significativo e o desenvolvimento de habilidades cognitivas, além de estimular a interação e cooperação entre os alunos.

As atividades foram desenvolvidas e testadas com um grupo de 50 alunos do 8º e 9º ano do ensino fundamental com idades entre 11 e 14 anos. O formato utilizado foi o de uma competição, incentivando a participação ativa e o engajamento dos estudantes. Para implementar atividades em uma aula de matemática, pensamos as seguintes etapas de desenvolvimento das atividades:

- Escolha de atividades que sejam adequadas ao nível de habilidade e interesse dos alunos, e que estejam alinhadas com os objetivos de aprendizagem da aula.
- Apresente a atividade aos alunos, explicando as regras e objetivos. Demonstrar exemplos para garantir que os alunos entendam a totalidade da proposta.
- Esteja disponível para fornecer orientação e suporte conforme necessário, ajudando os alunos a superar desafios e entender conceitos relevantes.
- Promova uma discussão após a conclusão da atividade, incentivando os alunos a compartilharem suas estratégias e descobertas. Refle sobre como a atividade se relaciona com os conceitos matemáticos abordados na aula e como ela pode ser aplicada em situações do mundo real.

Apresentamos agora os planos de aula utilizados:

Atividade 1: Gincana dos Caminhos Eulerianos
Objetivo: Introduzir e aplicar o conceito de caminhos eulerianos de forma divertida e competitiva, promovendo o trabalho em equipe e o raciocínio lógico.
Duração: 2 hora/aula
Materiais Necessários:
• Folha com os caminhos e caneta para cada equipe
• Quadro ou projetor
• Prêmios para a equipe vencedora (opcionais)
Procedimento:
1. Introdução e Formação das Equipes (10 minutos):
• Explique o conceito de caminhos eulerianos de forma breve e acessível.
• Divida a turma em equipes, garantindo uma mistura de habilidades e personalidades em cada equipe.
2. Explicação das Regras (10 minutos):
• Explique as regras da gincana, incluindo o sistema de pontuação e o funcionamento dos desafios.
• Certifique-se de que todos os alunos compreendam as instruções.
3. Desafio Inicial: Problema do Carteiro Chinês (20 minutos):
• Apresente o problema do carteiro chinês como o desafio inicial da gincana, como um exemplo de atividade.
• Cada equipe deve resolver o problema, representando-o como um grafo e determinando se ele possui um caminho.
• Defina um limite de tempo para a resolução do problema.
4. Atividade Prática em Grupo (40 minutos):
• Distribua a folha contendo os grafos.
• As equipes devem trabalhar juntas para resolver os problemas.
• Marcar o tempo dos alunos.
5. Apresentação e Correção (20 minutos):
• Cada equipe apresenta suas soluções e explicações para os problemas resolvidos.
• Corrija e discuta as soluções junto com a turma, destacando estratégias e abordagens diferentes.
6. Pontuação e Premiação (10 minutos):
• Some os pontos de cada equipe com base na precisão das soluções e na rapidez das respostas.
• Anuncie a equipe vencedora e, se aplicável, ofereça prêmios ou reconhecimentos simbólicos.

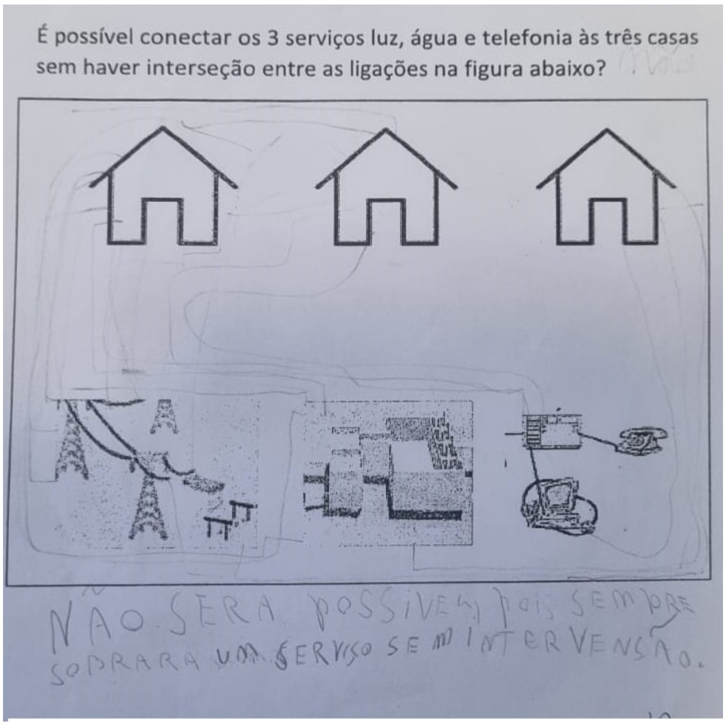
Atividade 2: Conectando os Serviços às Três Casas
Objetivo: Desenvolver habilidades de raciocínio espacial, pensamento crítico e resolução de problemas entre os alunos por meio de uma competição desafiadora.
Duração: 2 hora/aula
Materiais Necessários:
• Quadro ou projetor
• Marcadores
• Papel e lápis para cada equipe
• Imagem das três casas e os serviços (luz, água e telefonia) impressos em folhas separadas para cada equipe
Procedimento:
1. Introdução (20 minutos):
• Apresente o problema aos alunos e explique as regras da competição.
• Descreva o cenário: há três casas e três serviços (luz, água e telefonia) que precisam ser conectados a cada uma das casas sem que as conexões se cruzem.
2. Divisão em Equipes e Explicação das Regras (10 minutos):
• Divida a turma em equipes de 3 alunos
• Explique que cada equipe terá um tempo limitado para planejar e desenhar as conexões sem cruzamentos.
3. Planejamento e Desenho (60 minutos):
• Distribua uma cópia da imagem das três casas e dos serviços para cada equipe.
• As equipes trabalharão juntas para planejar e desenhar as conexões, garantindo que não haja interseção entre elas.
• Encoraje as equipes a discutir estratégias e a colaborar na busca por soluções criativas.
4. Apresentação e Avaliação (20 minutos):
• Peça a cada equipe que apresente sua solução para a classe.
• Avalie as soluções das equipes, verificando se as conexões estão corretas e se não há interseções entre elas.
• Pontue as equipes com base na precisão das conexões e na originalidade das soluções.
5. Discussão e Conclusão (10 minutos):
• Conduza uma discussão sobre as estratégias utilizadas pelas equipes para resolver o problema.
• Destaque a importância do pensamento espacial e da abordagem sistemática na resolução de problemas matemáticos.
• Encoraje os alunos a refletirem sobre como essas habilidades podem ser aplicadas em situações do mundo real

Iniciamos as aplicações com as turmas ano matutino e no total das turmas tivemos 16 trios. No inicio da aula, foi apresentada a dinâmica das atividades, um exercício seria aplicado a cada trio e no dia posterior seria aplicado outro exercício, sendo no segundo dia feita a avaliação e pontuação das atividades, para, após ranquea-los, ser realizada uma premiação.

Após apresentar a atividade 5, explicamos que deveria haver a ligação dos serviços às residências de modo que as linhas de transmissão não se tocassem e foi fornecido a cada trio duas folhas extras com o mesmo esquema das casas para rascunho.

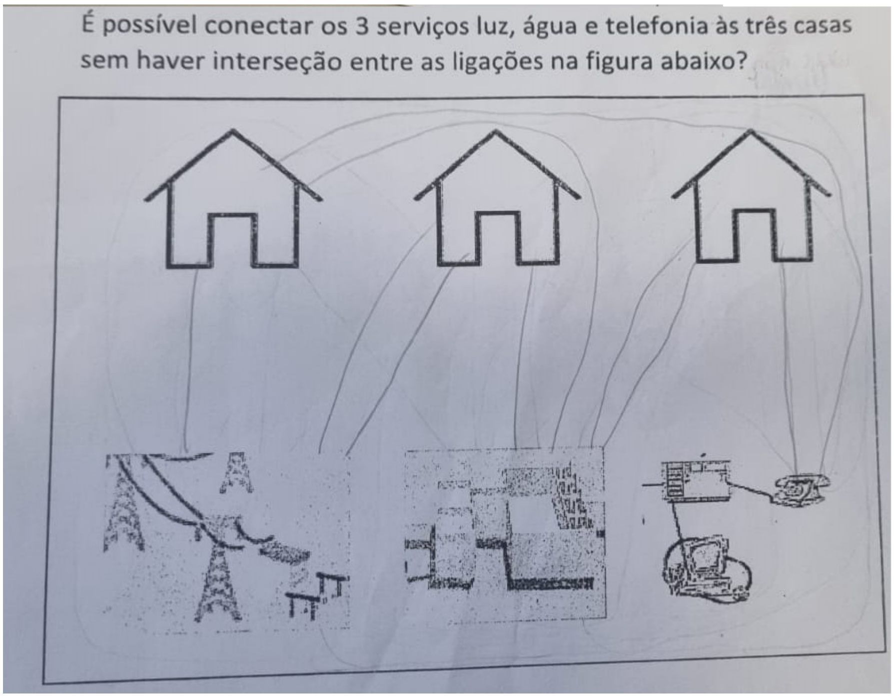
Notamos que houve muita troca entre os alunos, com discussões acaloradas pelo execício, e a todo momento os alunos vinham ao professor para apresentar suas dúvidas. Neste momento, não houve intervenção por parte docente, e deste modo, os alunos demoraram em torno de 50 minutos para apresentar alguma conclusão. Apresentamos agora alguns de seus resultados:

Figura 74 - Atividade produzida por alunos.



Legenda: Três casas e três serviços básicos.
Fonte: O Autor.

Figura 75 - Atividade produzida por alunos.



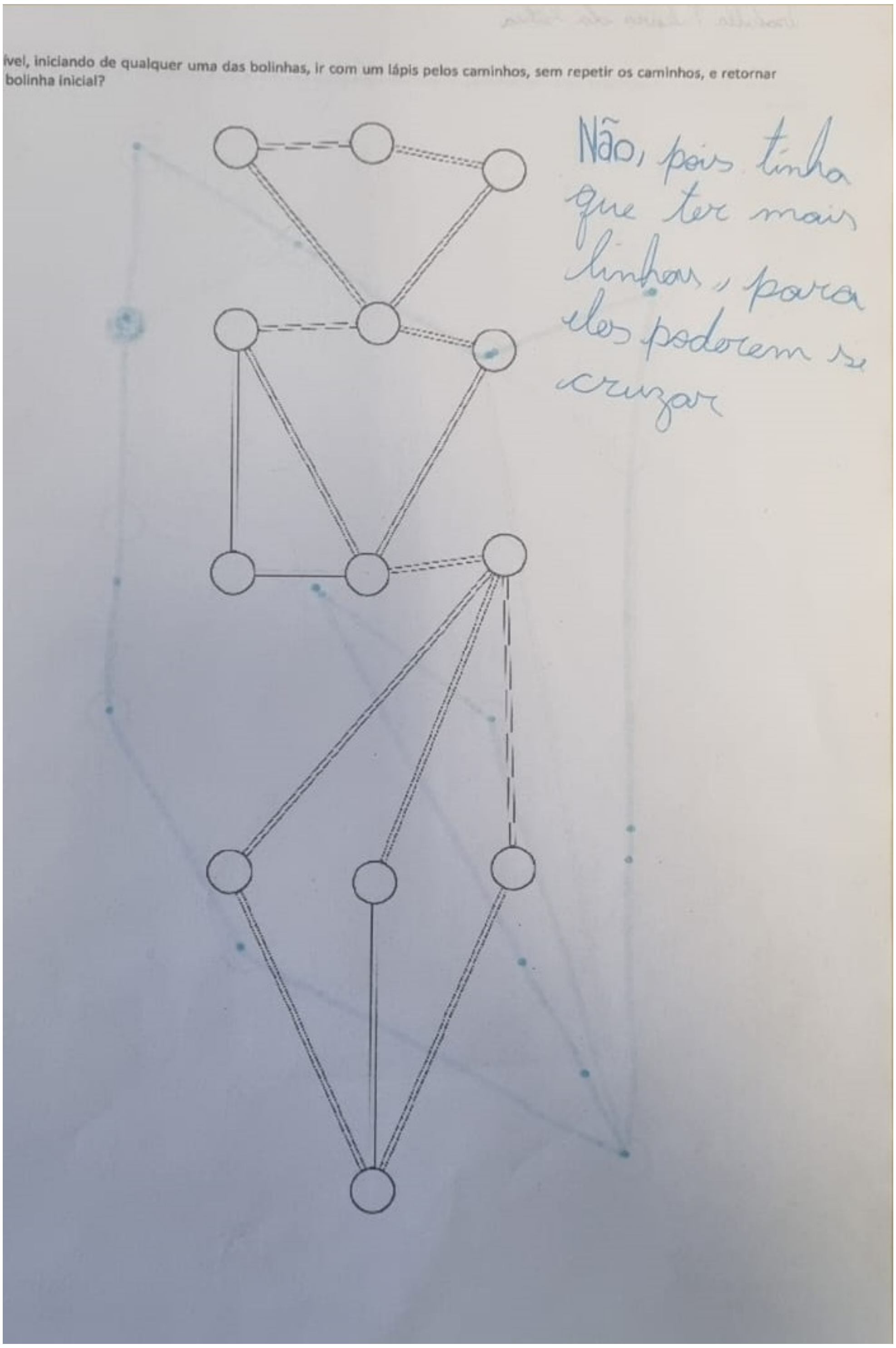
Legenda: Três casas e três serviços básicos.
Fonte: O Autor.

Notamos que em sua maiorias os alunos forçaram uma resposta ao problema, ignorando as condições inicialmente impostas, dos 16 trios, apenas 5 perceberam e , de alguma forma, conseguiram justificar a impossibilidade de tais ligações. Em seguida foi explicado aos alunos a impossibilidade de realizar a proposta da atividade, dando uma reflexão, junto aos alunos, dos motivos de não ser possível tal ação.

Na aula seguinte conseguimos novamente 16 trios, alguns com configuração diferentes, mas nada que atrapalhou a execução da atividade. O exercício foi apresentado, a Atividade 2, sendo entregue a cada trio, uma folha com os dois grafos e mais duas folhas com os mesmos grafos para rascunho. Explicado aos alunos como seria feito o caminho dos grafos, também foi solicitado para os alunos que um seria possível concluir a tarefa e o outro não. Foi solicitado aos alunos a resposta do caminho possível e uma explicação do por que não seria possível a realização de um caminho no outro grafo.

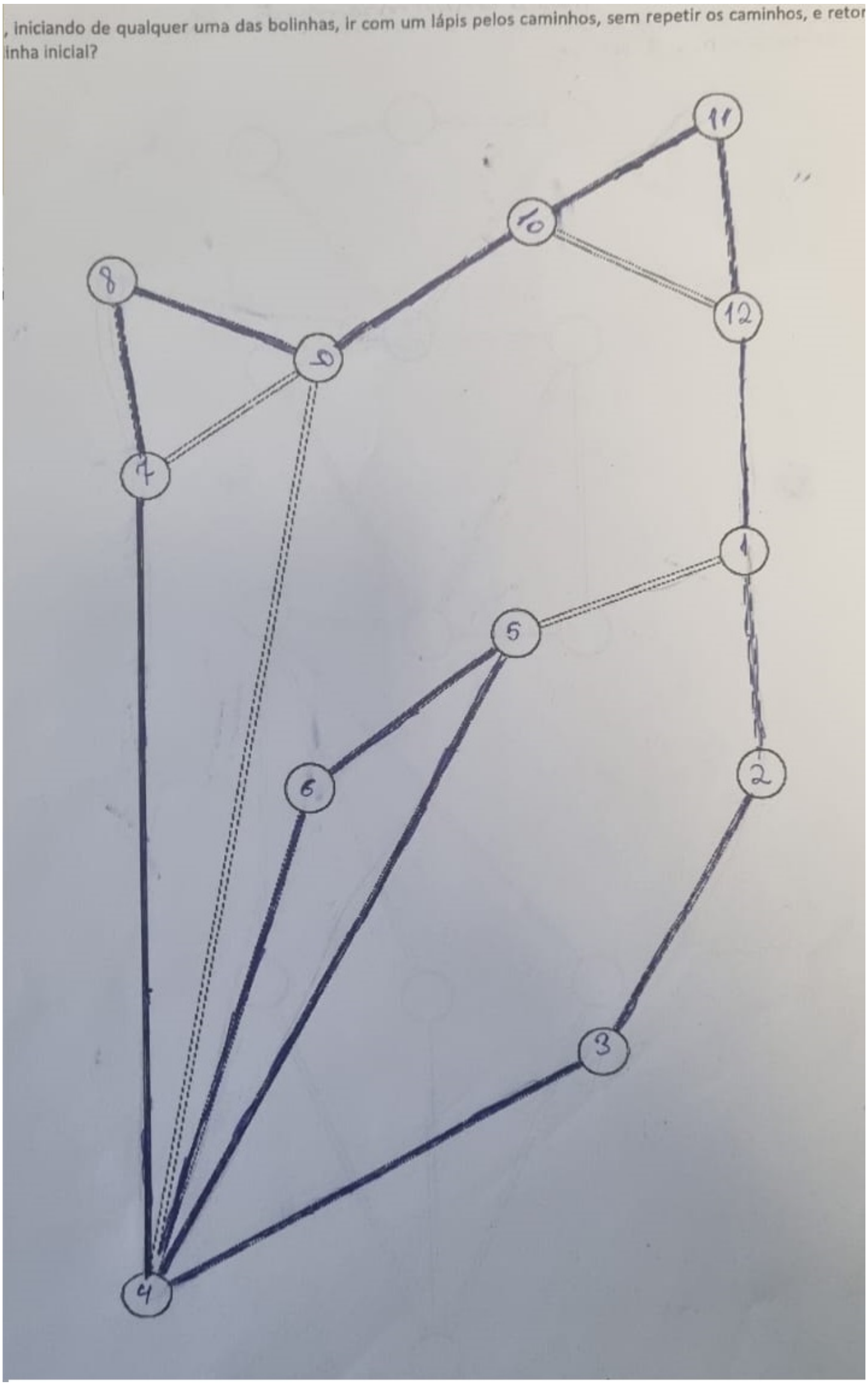
Nesta atividade 12 dos grupos conseguiram chegar a uma resposta satisfatória, tanto para o caminho possível, quanto para a impossibilidade presente no grafo. Apresentamos agora alguns de seus resultados:

Figura 76 - Atividade produzida por alunos.



Legenda: Caminho não Eueriano.
Fonte: O Autor.

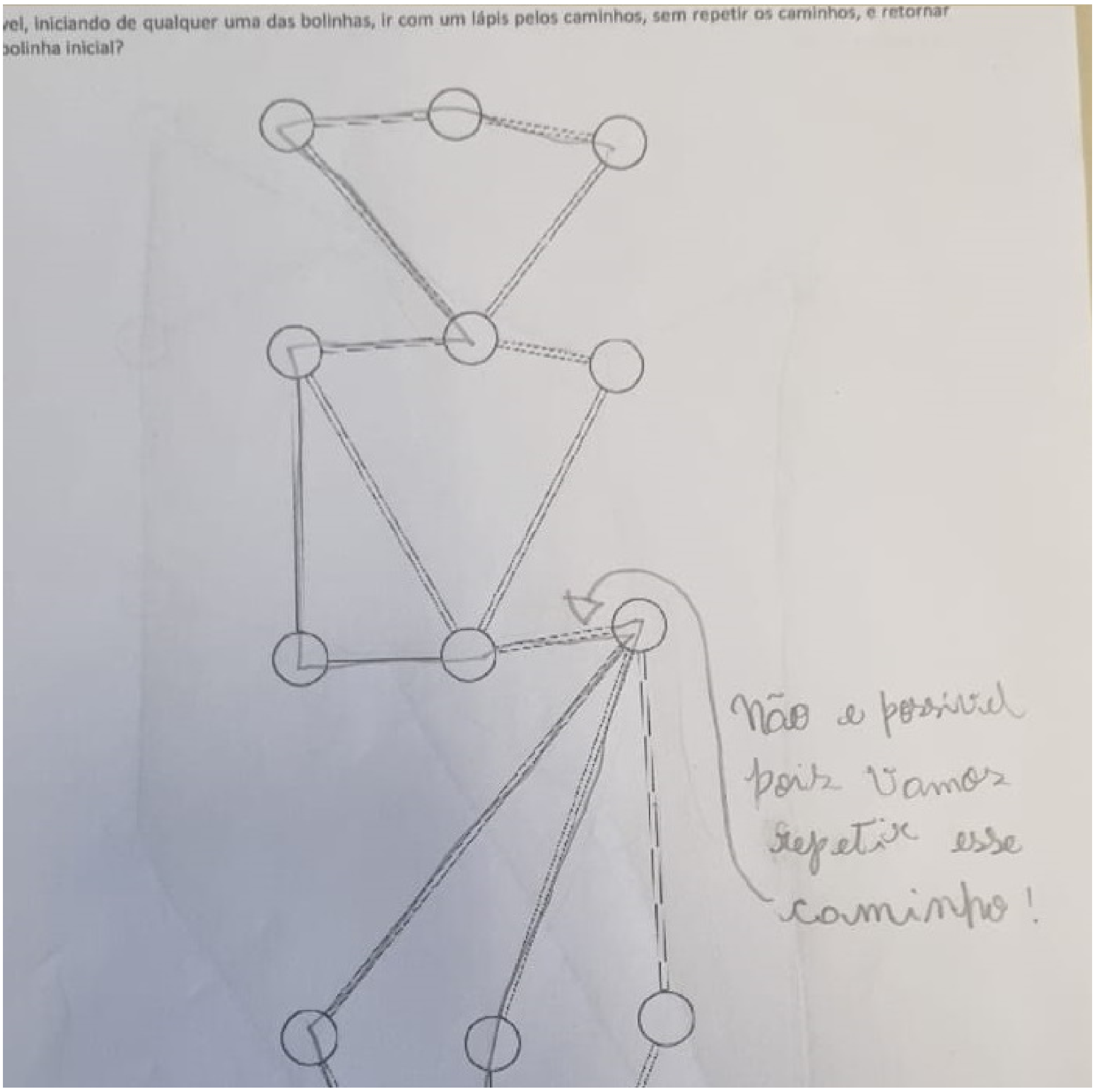
Figura 77 - Atividade produzida por alunos.



Legenda: Caminho Eueriano.

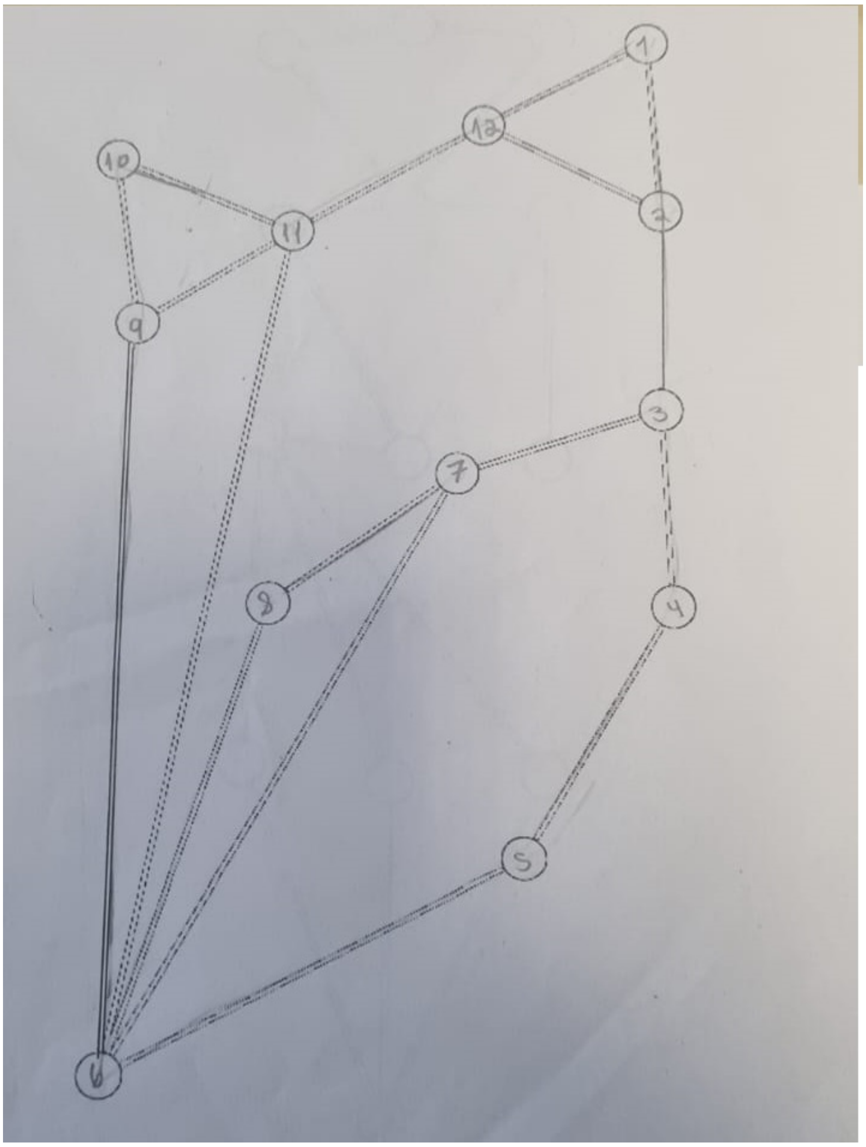
Fonte: O Autor.

Figura 78 - Atividade produzida por alunos.



Legenda: Caminho não Eueriano.
Fonte: O Autor.

Figura 79 - Atividade produzida por alunos.



Legenda: Caminho Eueriano.

Fonte: O Autor.

A pontuação para a premiação dos alunos foi feita, nos dois dias, atribuindo-se nota 10 para o primeiro trio que entregou a atividade com uma resposta satisfatória, 9 para o segundo, 8 para o terceiro e assim por diante. Com a soma dos dois dias foi feita a classificação e posterior premiação dos alunos.

Concluímos que as atividades propostas promoveram um ambiente de aprendizagem ativo e colaborativo entre os alunos. Observamos que, na primeira atividade, a maioria dos trios teve dificuldades em respeitar as condições impostas e, apenas uma pequena parte conseguiu justificar a impossibilidade das ligações, demonstrando a complexidade do exercício. A abordagem sem intervenção docente permitiu que os alunos enfrentassem desafios e discutissem entre si, o que, embora tenha prolongado o tempo de conclusão, favoreceu o desenvolvimento do raciocínio crítico. Na segunda atividade houve uma melhoria significativa no desempenho dos alunos, isso indica que a prática anterior e a reflexão conduzida contribuíram para uma maior compreensão e habilidade na resolução de problemas.

A experiência mostra que a metodologia utilizada, combinando atividades desafiadoras e momentos de reflexão coletiva, é eficaz no desenvolvimento das competências dos alunos e as atividades proporcionaram aos alunos um aprendizado significativo e engajador que, utilizando a resolução de problemas como ferramenta principal, o trabalho em equipe e a colaboração entre os alunos foram essenciais para o sucesso das atividades. As atividades estimularam o pensamento crítico, a criatividade e a capacidade de lidar com desafios, e a experiência demonstra o valor de utilizar metodologias ativas de ensino que colocam os alunos no centro do processo de aprendizagem. Sendo assim para futuras aplicações, é recomendável continuar incentivando a autonomia dos estudantes, proporcionando suporte quando necessário, e promovendo atividades que desafiem suas capacidades analíticas e colaborativas.

CONCLUSÃO

Neste trabalho objetivamos mostrar alguns aspectos e um pouco da história do problema das pontes de Königsberg, a trajetória da cidade e a formulação do problema até sua demonstração, um pouco de grafos e dos teoremas por trás de sua prova, assim como um apanhado das principais demonstrações. Em razão de Euler, um dos maiores matemáticos de sua época, temos o problema das sete pontes como responsável pelo inicio do que se conhece hoje em teoria dos grafos.

Os teoremas e demonstrações contidas neste texto visam uma melhor compreensão por parte do docente de matemática para o enriquecimento de suas prática pedagógicas, sabendo que a utilização de atividades lúdicas de raciocínio lógico pode transformar uma aula de matemática em uma experiência divertida, desafiadora e significativa para os alunos. Ao integrar essas atividades ao currículo, os professores podem ajudar os alunos a desenvolver habilidades matemáticas essenciais, como resolução de problemas, pensamento crítico e criatividade, preparando-os para enfrentar desafios acadêmicos e pessoais com confiança e sucesso.

Neste sentido, trazemos atividades envolvendo o trabalho com grafos que pode ser facilmente aplicada em turmas de nível fundamental do segundo seguimento com pouca, e talvez até nenhum conhecimento prático por parte dos alunos sobre as teorias utilizadas para elaboração dos mesmos. Todas as atividades aqui apresentadas são práticas e necessitam de pouco, e algumas até nenhum, material extra classe. Apresentamos também como é possível o desenvolvimento da aplicação direta de algumas atividades descritas com alunos do ensino fundamental em formato de gincana.

REFERÊNCIAS

BAEDEKER, Karl. **Baedeker's Northern Germany**. New York: Charles Scribner's Sons, 1904.

BERG, Gordon O.; Julian, W.; Mines, R.; Richman, Fred, **The constructive Jordan curve theorem**, The Rocky Mountain Journal of Mathematics 5: 225-236, 1975. Disponível em: https://projecteuclid.org/journals/rocky-mountain-journal-of-mathematics/volume-5/issue-2/The-constructive-Jordan-curve-theorem/10.1216/RMJ-1975-5-2-225.full. Acesso em: 29/dez/2024.

BOYER, C. B. **História do Cálculo** - Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v. 6. São Paulo: Atual, 1992.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2003.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 2017. Disponível em: http://basenacional comum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19/fev/2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Introdução aos Parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC / SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1997.

BRIA, J e Freitas, L Q. **GRAFOS, LIVROS DIDÁTICOS E NOVOS TEMAS**. Caderno Dá Licença, Volume 6, 2007.

BRIA, J. **Grafos no Ensino Fundamental e Médio:** Matemática, Interdisciplinaridade e Realidade. D.Sc. tese, COPPE/UFRJ. 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **EULER, UM MATEMÁTICO MULTIFACETADO.** Revista Brasileira de História da Matemática, São Paulo, v. 9, n. 17, p. 13–31, 2020. DOI: 10.47976/RBHM2009v9n1713-31. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/167. Acesso em: 7/dez/2023.

EULER, L. **De Summis Serierum Reciprocarum**. Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitana e Opera Omnia, 1740.

FARMER, David W.; STANFORD, Theodore. **Nós e superfícies**. Lisboa: Gradiva, 2003.

HOPKINS, B.; WILSON, R. J. **The truth about Konisberg**. The College Mathematics Journal, vol. 35, n. 03, p. 198-207, maio, 2004.

MEI-KO, Kwan, **Programming method using odd or even pints**, Acta Mathematica Sinica 10,1960 , p. 263–266.

THOMAS, Robin. **An Update on the Four-Color Theorem**, Notices of the AMS Volume 45, Number 7, 1978.

WILSON, Robin. **Introduction to Graph Theory**. Edinburgh Gate, Harlow: Longman, 1996

KOCH, Hannsjoachim W. **A history of Prussia**. Longman P4 Kirby, David (1990). Northern Europe in the Early Modern Period: The Baltic World, 1492–1772. London: Longman, 1978. ISBN 0-582-00410-1.