Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

Campus Alto Paraopeba - CAP

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Francismara Fernandes Guerra

PROJETO PIBIC-JR PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA JÚNIOR:

CARACTERIZAÇÃO DAS MATRIZES REAIS DE ORDEM 2, NILPOTENTES DE ÍNDICE 2

Recurso educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Campus Alto Paraopeba da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Banca Examinadora:

Profa. Mariana Garabini Cornelissen Hoyos - UFSJ (Orientadora)

Profa. Viviane Ribeiro Tomaz da Silva - (UFSJ)

Prof. Rodrigo Lucas Rodrigues - Universidade Federal do Ceará (UFC)

Ouro Branco
Julho de 2024

RECURSO EDUCACIONAL: PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA JÚNIOR (PIBIC-Jr)

A proposta de recurso educacional aqui apresentada trata-se de um projeto de iniciação científica júnior (PIBIC-Jr). Esse projeto poderá ser utilizado pelos professores de matemática do Ensino Médio para participarem dos editais de Iniciação Científica Júnior lançado pelas FAP's, CAPES, CNPq ou outras agências de fomento, estimulando assim os professores de matemática a incorporarem em seu cotidiano a pesquisa com estudantes do ensino médio, desenvolvendo o pensamento científico e o espírito questionador em seus alunos, ampliando o conhecimento deles na área de matemática e preparando-os para um futuro desempenho profissional e acadêmico através do enfrentamento e resolução de problemas. Além disso, a iniciação científica júnior também pode ser uma fonte de descobertas de novos talentos para a matemática!

Abaixo apresentamos o projeto com seus principais elementos (Título, Introdução, Objetivos, Metodologia, Plano de Trabalho, Cronograma, Referências e no Apêndice: Material de estudo). O professor deve, se necessário, adaptar o projeto abaixo às condições exigidas pelo edital e colocá-lo também na formatação exigida (tamanho da fonte, margens, espaçamento entre linhas, etc).

CARACTERIZAÇÃO DAS MATRIZES REAIS DE ORDEM 2, NILPOTENTES DE ÍNDICE 2

Francismara Fernandes Guerra[1]
Mariana Garabini Cornelissen Hoyos[2]

Introdução

O conceito de matriz não é importante só em matemática, já que matrizes se destacam por sua ampla aplicabilidade em diversas áreas de conhecimento. Matrizes podem ser vistas como tabelas e hoje em dia usamos tabelas em quase tudo! Desde criptografia, modelos populacionais, teoria de grafos, controle de tráfego terrestre, ciência de dados, inteligência artificial, dentre outras diversas aplicações (KUERTEN, 2001; MIRANDA e CASTELO, 2021; e LEITE e FELICE, 2016). Daí a importância do seu estudo e conhecimento da teoria de matrizes.

Podemos definir no conjunto das matrizes as operações de soma e multiplicação. Esse conjunto com as operações usuais de soma e multiplicação apresenta diversas propriedades,

[1]Aluna de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2022
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - Campus Alto Paraopeba - CAP/UFSJ
E-mail: francismara.guerra@ifmg.edu.br
[2]Orientadora do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM, CAP/UFSJ
E-mail: mariana@ufsj.edu.br

algumas delas consideradas “estranhas”à primeira vista. Por exemplo, a multiplicação usual de matrizes não é comutativa, isto é, se A e B são matrizes tais que $A.B$ e $B.A$ estão definidos, podemos ter $A.B \neq B.A$. Além disso, podemos ter um produto de matrizes não nulas igual à zero (matriz nula), o que não acontece nos números reais. Outra propriedade do produto usual é que ele é associativo, isto é, $(A.B).C = A.(B.C)$ para todas as matrizes A, B e C desde que os produtos estejam definidos.

Por outro lado, se definirmos um outro produto entre matrizes, dado por:

$$A \circ B = \frac{1}{2}(A.B + B.A)$$

onde $A.B$ e $B.A$ denotam o produto usual de matrizes, podemos mostrar que esse produto é comutativo, mas não associativo. Entretanto, ele satisfaz a seguinte identidade, conhecida como identidade de Jordan:

$$(A \circ B) \circ (A \circ A) = A \circ (B \circ (A \circ A))$$

para todas as matrizes A e B. O produto acima é conhecido como produto de Jordan e foi exatamente esse produto que foi utilizado por Erns Pascual Jordan, em 1934, para formalizar os princípios da mecânica quântica, utilizados até hoje.

Uma matriz quadrada A é dita nilpotente se existe um inteiro positivo k tal que

$$A^k = \underbrace{A.A.\cdots A}_{k-vezes} = \emptyset$$

onde $\emptyset$ é a matriz nula de mesma ordem de A. O menor k satisfazendo tal condição é dito índice de nilpotência de A.

Observe que se A for uma matriz nula, qualquer produto dela por ela mesma resultará em todos seus elementos nulos. Existe alguma outra matriz cujo produto por ela mesma seja nulo? Quando uma matriz real não nula e quadrada é nilpotente de índice 2? É possível caracterizar as entradas dessa matriz?

Neste projeto estamos interessados em estudar as propriedades dos conjuntos das matrizes utilizando as duas formas de produto apresentadas e também em caracterizar as matrizes de ordem 2, nilpotentes de índice 2, com os dois produtos apresentados: produto usual de matrizes e produto de Jordan.

Objetivo geral

Caracterizar as matrizes reais de ordem 2, nilpotentes de índice 2, considerando o produto usual de matrizes e também o produto de Jordan.

Objetivos específicos

- Estudar as propriedades básicas (comutatividade, associatividade, distributividade, elemento neutro, existência de divisores de zero, dentre outras) do conjunto de matrizes com o produto usual de matrizes e com o produto de Jordan;

- Propiciar o desenvolvimento do raciocínio matemático por meio de exercícios que envolvam matrizes reais de ordem 2 e suas propriedades, com operações usuais e não-usuais;

- Proporcionar ao aluno a aprendizagem de rigor matemático, métodos e técnicas de pesquisa em matemática;
- Desenvolver o pensamento científico e o espírito questionador dos alunos.

Metodologia

Ao início do projeto, o aluno recebe o projeto, o material de estudo, orientações sobre a metodologia da pesquisa e o cronograma de trabalho/estudos. A metodologia do projeto consiste em encontros semanais presenciais entre aluno e orientador, com duração de 2 (duas) horas. Em cada encontro, o professor apresenta um seminário no qual descreve um assunto específico, seguindo a sequência do cronograma estabelecido. Em seguida, aluno e orientador discutem o tema e concluem o encontro com a resolução de exercícios.

Além disso, nesses encontros, também são propostos exercícios avaliativos de desempenho, cuja resolução deve ser entregue ao professor no encontro seguinte. Sempre que houver dúvida, o orientando pode solicitar uma reunião ao orientador, ainda que esta não esteja prevista no cronograma. Cada tarefa proposta deve ser referente ao tema discutido nos encontros tidos, e deve ser corrigida pelo professor no encontro seguinte.

Ao final do projeto, o orientando deverá elaborar um pôster para apresentação em evento compatível com a pesquisa desenvolvida, tal como apresentação em semana de iniciação científica, feira de ciências, etc.

Plano de trabalho

Para o desenvolvimento do projeto, sugere-se o estudo da sequência dos seguintes tópicos:

1. *Matrizes: definição, notação, tipos especiais de matrizes (matriz linha, matriz coluna, matriz quadrada, matriz transposta, matriz diagonal, matriz triangular, matriz identidade), traço de uma matriz, operações com matrizes (adição, multiplicação por escalar e produto usual de matrizes).*

   Para o item acima, sugere-se descrever a notação e as operações, especialmente, das matrizes especiais e das matrizes de ordem n, exemplificando cada caso.

2. *Propriedades das operações com matrizes: associatividade, comutatividade, distributividade, elemento neutro, divisores de zero.*

   Para o item acima, sugere-se verificar se as propriedades acima são válidas para qualquer matriz, principalmente as matrizes reais de ordem n com as operações de soma e multiplicação vistas no item anterior. Em caso afirmativo, deve-se apresentar uma prova desse fato; em caso negativo, deve-se apresentar um contra-exemplo.

3. *Determinante de uma matriz: determinante de matrizes de ordem 2 e 3, determinante de uma matriz de ordem maior por cofator e suas propriedades.*

   Para o item acima, sugere encontrar o determinante de qualquer matriz por redução a determinantes de matrizes de menor ordem até se obter matrizes de ordem 2.

4. *Matriz Inversa: operações elementares (troca de linhas, multiplicação de uma linha por escalar, soma de um produto de uma linha a outra), matrizes elementares, escalonamento de matrizes, matriz escada, posto de uma matriz, matrizes inversíveis, cálculo da matriz inversa por meio da identidade*

   Para os itens 1, 2, 3 e 4, sugere-se a leitura do(s) capítulo(s) de Matrizes e Determinantes de um livro didático para o ensino médio aprovado pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), incluindo a coleção adotada pela escola do aluno, bem como as seguintes referências: Santos (2002), Chiapinotto e Lutz (2020), Filho (2011) e Lima (2021). Recomenda-se também a resolução dos exercícios propostos do livro escolhido em consonância com os temas discutidos. Caso o aluno já tenha visto esse conteúdo em sala de aula, pode-se revisa-lo.

5. *Matrizes Nilpotentes: definição e exemplos. Índice de nilpotência.*

   Para este item, sugere-se a leitura do "Apêndice: Material de estudo", sessão "Matrizes nilpotentes", onde também constam exercícios propostos.

6. *Produto de Jordan: definição e exemplos.*

   Para esse item, sugere-se a leitura do "Apêndice: Material de estudo", sessão "Produto de Jordan", onde também constam exercícios propostos. Sugere-se ainda verificar se as seguintes propriedades: propriedades das operações com o produto de Jordan: comutatividade, distributividade, elemento neutro, divisores de zero. Em caso afirmativo, deve-se apresentar uma prova desse fato; em caso negativo, deve-se apresentar um contra-exemplo.

7. *Matrizes Jordan Nilpotentes: definição e exemplos.* Para este item, sugere-se a leitura do "Apêndice: Material de estudo", sessão "Matrizes Jordan Nilpotentes", onde também constam exercícios propostos.

8. *Caracterização das Matrizes Reais de Ordem 2, nilpotentes de índice 2.*

   Para esse item, sugere-se a leitura do "Apêndice: Material de estudo", sessão "Matrizes reais de ordem 2 nilpotentes de índice 2", onde também constam exercícios propostos. Encontrar qual deve ser o tipo da matriz A, quadrada, com entradas reais, de ordem 2, tal que $A.A$ é igual à matriz nula de ordem 2. Nesse item, o aluno não terá referências bibliográficas. Ele deverá encontrar a solução do problema com a orientação do seu professor.

9. Propriedades das matrizes reais de ordem 2, nilpotentes de índice 2. Para esse item, sugere-se a leitura do "Apêndice: Material de estudo", sessão "Matrizes reais de ordem 2 nilpotentes de índice 2", onde também constam exercícios propostos.

Cronograma

O plano de trabalho apresentado acima tem a proposta de ser desenvolvido em um período de 12 (doze) meses como segue no cronograma apresentado.

Atividade/Mês	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
Tópico 1	x											
Tópico 2	x											
Tópico 3		x										
Tópico 4		x										
Tópico 5			x	x								
Tópico 6					x	x						
Tópico 7							x					
Tópico 8								x	x			
Tópico 9										x	x	
Escrita do pôster												x

Sugere-se flexibilizar a cronograma levando-se em consideração as férias e os recessos escolares.

Referências

CHIAPINOTTO, Elisia L.; LUTZ, Maurício Ramos. Caderno didático 2. Notas de aula. **Colégio Técnico Industrial de Santa Maria, Universidade Federal de Santa Maria,** 2020. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/705093/2/2% 20SII%20Matrizes.pdf. Acesso em 14 de maio de 2024.

FILHO, José Elias dos Santos. Matem atica para o ensino médio iii. Notas de aula. **Centro de Educação Superior a Distância, Universidade Federal de Sergipe,** 2011. Disponível em: https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalago/17502916022012Matem%C3%A1tica_ para_o_Ensino_M%C3%A9dio_III_aula_1.pdf. Acesso em 14 de maio de 2024.

KUERTEN, Cristini. Algumas aplicações de matrizes. **Trabalho de conclusão de curso. Florianópolis**, 2001. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/30377811.pdf. Acesso em 14 de maio de 2024.

JORDAN, Pascual; VON NEUMANN, John; WIGNER, Eugene P. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. In: **The Collected Works of Eugene Paul Wigner: Part A: The Scientific Papers**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1993. p. 298-333.

LEITE, Hugo Marciano; FELICE, Fernando. APLICAÇÃO DE MATRIZES E SISTEMAS LINEARES À ENGENHARIA ELÉTRICA. **Anais do EVINCI-UniBrasil**, v. 2, n. 1, p. 239-239, 2016.

LIMA, Cesar Goncalves de. Álgebra de matrizes. Notas de aula. **Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de S ao Paulo**, 2021. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7605544/mod_ resource/content/1/Apostila%20Matrizes%20%282021%29.pdf. Acesso em 14 de maio de 2024.

MIRANDA, D. da S.; CASTELO, P. de C. **Aplicações de matrizes. Universidade Federal do Amapá**, 2021. Disponível em: https://www2.unifap.br/matematica/files/2017/01/Danilo-da-Silva-Miranda-e-Patr%C3%ADcio-de-Castro-Castelo.pdf. Acesso em 14 de maio de 2024.

SANTOS, Reginaldo J. Um curso de geometria analítica e álgebra linear. **DM-ICEx-UFMG.** Disponível em: http://ninf.org/w/images/c/c5/Sebenta_Algebra_2009.pdf. Acesso em 14 de maio de 2024.

Apêndice: Material de estudo

Como não se encontra material didático específico na literatura existente para os tópicos de 5 a 9, apresentamos neste apêndice uma proposta de estudo com a teoria sobre matrizes nilpotentes e Jordan nilpotentes, incluindo exercícios resolvidos e propostos.

Matrizes nilpotentes

Uma matriz nilpotente é aquela que, quando elevada a alguma potência, resulta em uma matriz nula. Abaixo segue a definição formal.

Definição 1 (Matriz nilpotente) *Uma matriz quadrada A é dita nilpotente se existe um inteiro positivo k tal que*

$$A^k = \underbrace{A.A.\cdots A}_{k-vezes} = \emptyset$$

onde $\emptyset$ é a matriz nula de mesma ordem de A. O menor k satisfazendo tal condição é dito índice de nilpotência de A.

Aqui está um exemplo de uma matriz de ordem 2 nilpotente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso, A é uma matriz nilpotente de índice 2. Como exercício, mostre que $A^2 = \emptyset$.

Considere, agora, a mesma matriz A e façamos A^3. Embora $A^3 = \emptyset$, esta matriz não é nilpotente de índice 3, pois, a menor potência de A que resulta na matriz nula é 2.

Agora, vejamos algumas propriedade de matrizes nilpotentes apresentadas nas proposições a seguir.

Proposição 1 *Se A é uma matriz nilpotente, então $det(A) = 0$.*

Demonstração: De fato, seja A é uma matriz nilpotente, isto é, $A^k = \emptyset$ para um inteiro positivo k. Daí, temos que:

$$det(A^k) = det(\emptyset) = 0.$$

Como:

$$det(A^k) = det(\underbrace{A.A\cdots A}_{k-vezes}) = \underbrace{det(A).det(A)\cdots det(A)}_{k-vezes} = (det(A))^k.$$

Assim, concluímos que $(det(A))^k = 0$, portanto $det(A) = 0$. □

Proposição 2 *As matrizes nilpotentes não são inversíveis.*

Este resultado decorre do fato de que toda matriz nilpotente possui determinante nulo. Como toda matriz, cujo determinante é nulo, é não inversível, segue que as matrizes nilpotentes são não inversíveis.

Exercícios

1. Calcule A^2 e diga se A é nilpotente índice 2.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}$

   (e) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$

   (f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Calcule A^3 para as matrizes da questão anterior e diga se A é nilpotente índice 3.

3. Calcule o determinante das matrizes da questão 1. Dica: use a proposição 1.

4. Calcule A^2, onde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e determine a equação de seu determinante.

Produto de Jordan

Abaixo, apresentamos a definição dada por Jordan, Neumann e Wigner (1993) do que é o produto de Jordan.

Definição 2 (Produto de Jordan) *O produto de Jordan é uma operação, denotada por* $\circ$ *(lê-se bola), que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $A \circ B = B \circ A$ *(comutatividade)*

(ii) $(A \circ B) \circ (A \circ A) = A \circ (B \circ (A \circ A))$ *(identidade de Jordan)*

para todo $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Observe que o produto de Jordan é, por definição, comutativo. Não precisa ser, em geral, associativo, mas deve satisfazer a identidade de Jordan.

Agora, apresentamos o produto de Jordan no conjunto das matrizes reais quadradas $M_n(\mathbb{R})$ que é aplicado neste trabalho.

Proposição 3 *Considere o seguinte produto:*

$$A \circ B = \frac{1}{2}(A.B + B.A)$$

onde $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, e $A.B$ e $B.A$ significam o produto usual de matrizes. Esta operação é um produto de Jordan.

Demonstração: Vamos mostrar que o produto $\circ$ acima definido é um produto de Jordan. Note que, dados A e $B \in M_n(\mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned} A \circ B &= \frac{1}{2}(A.B + B.A) \\ &= \frac{1}{2}(B.A + A.B) = B \circ A \end{aligned}$$

o que prova que $M_n(\mathbb{R})$ é comutativo com o produto $\circ$. Agora, mostremos a identidade de Jordan:

$$\begin{aligned} (A \circ B) \circ (A \circ A) &= \frac{1}{2}(A.B + B.A) \circ \frac{1}{2}(A^2 + A^2) \\ &= \frac{1}{2}[(A.B + B.A) \circ A^2] \\ &= \frac{1}{4}[(A.B + B.A)A^2 + A^2(A.B + B.A)] \\ &= \frac{1}{4}[A.B.A^2 + B.A^3 + A^3.B + A^2.B.A] \\ &= \frac{1}{2}[A\frac{1}{2}(B.A^2 + A^2.B) + \frac{1}{2}(B.A^2 + A^2.B)A] \\ &= A \circ \frac{1}{2}(B.A^2 + A^2.B) \\ &= A \circ (B \circ A^2) = A \circ (B \circ \frac{1}{2}(A^2 + A^2)) \\ &= A \circ (B \circ (A \circ A)) \end{aligned}$$

Portanto, segue que $\circ$ é um produto de Jordan no conjunto das matrizes $M_n(\mathbb{R})$. $\square$

Já sabemos que o produto usual do conjunto das matrizes $M_n(\mathbb{R})$ é associativo e não comutativo, entretanto, vale ressaltar que o conjunto das matrizes munido com esse "novo" produto é comutativo, mas é, em geral, não associativo.

De fato, dadas A, B, C matrizes quadradas de mesma ordem, observe que:

$$\begin{aligned}
(A \circ B) \circ C &= \frac{1}{2}(A.B + B.A) \circ C \\
&= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(A.B + B.A).C + C.\frac{1}{2}(A.B + B.A)] \\
&= \frac{1}{4}A.B.C + \frac{1}{4}B.A.C + \frac{1}{4}C.A.B + \frac{1}{4}C.B.A \\
A \circ (B \circ C) &= A \circ \frac{1}{2}(B.C + C.B) \\
&= \frac{1}{2}[A.\frac{1}{2}(B.C + C.B) + \frac{1}{2}(B.C + C.B).A] \\
&= \frac{1}{4}A.B.C + \frac{1}{4}A.C.B + \frac{1}{4}B.C.A + \frac{1}{4}C.B.A.
\end{aligned}$$

Tomemos, como exemplo, o produto de Jordan das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

encontramos:

$$(A \circ B) \circ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \circ (B \circ C) = \begin{bmatrix} 0 & -3/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

o que ilustra a não associatividade do produto de Jordan. O desenvolvimento desse resultado deve ser feito como exercício.

Exercícios

1. Dadas as matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   calcule e responda.

   (a) $A.(B.C)$

   (b) $(A.B).C$

   (c) $(A \circ B) \circ C$

   (d) $A \circ (B \circ C)$

   Você encontrou $A.(B.C) = (A.B).C$? E $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$? O que conclui disso?

2. Calcule o determinante das matrizes A, B e C da questão acima.

3. Dados $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ e I a matriz identidade de ordem n, mostre que para o produto:

$$A \circ B = \frac{1}{2}(A.B + B.A)$$

temos que:

   (a) a matriz identidade I é o elemento neutro do produto de Jordan, ou seja:

   $$I \circ A = A \circ I = A;$$

   (b) o produto de Jordan é distributivo com relação a soma pela esquerda, ou seja:

   $$(A + B) \circ C = (A \circ C) + (B \circ C);$$

   (c) o produto de Jordan é distributivo com relação a soma pela direita, ou seja:

   $$A \circ (B + C) = (A \circ B) + (A \circ C).$$

4. Determine as potências para $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, usando o produto de Jordan.

   (a) A^2
   (b) A^3
   (c) A^k, onde k é um número inteiro positivo.

5. Dadas as matrizes diagonais abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

calcule e responda.

   (a) $A.B.C$
   (b) $A.C.B$
   (c) $B.A.C$
   (d) $B.C.A$
   (e) $C.A.B$
   (f) $C.B.A$

   Você encontrou $A.B.C = A.C.B = B.A.C = B.C.A = C.A.B = C.B.A$?

6. Para as mesmas matrizes do exercício anterior, calcule e responda.

   (a) $(A \circ B) \circ C$
   (b) $A \circ (B \circ C)$

   Você encontrou $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$? O que conclui sobre matrizes diagonais?

7. Calcule o determinante das matrizes A, B e C da questão 5.

Matrizes Jordan Nilpotentes

Uma matriz Jordan nilpotente é aquela que, quando elevada a alguma potência pelo produto de Jordan, resulta em uma matriz nula. A seguir, apresentamos sua definição formal.

Definição 3 (Matriz Jordan nilpotente) *Uma matriz quadrada A é dita Jordan nilpotente se existe um inteiro positivo k tal que*

$$A^k = \underbrace{((A \circ A)...) \circ A}_{k-vezes} = \emptyset$$

onde $\emptyset$ é a matriz nula de mesma ordem de A. O menor k satisfazendo tal condição é dito índice de Jordan nilpotência de A.

Uma matriz Jordan nilpotente de índice 2 é aquela cujo o produto de Jordan dela por ela mesma resulta em uma matriz nula, isto é, A é Jordan nilpotente de índice 2 quando $A \circ A = \emptyset$.

Proposição 4 *As matrizes nilpotentes de índice 2 (pela multiplicação usual) são Jordan nilpotentes de índice 2.*

Demonstração: De fato, tomemos A uma matriz nilpotente e teremos:

$$\begin{aligned} A \circ A &= \frac{1}{2}(A.A + A.A) \\ &= \frac{1}{2}(A^2 + A^2) \\ &= \frac{1}{2}(\emptyset + \emptyset) \\ &= \frac{1}{2}\emptyset \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

□

Note que, qualquer matriz B que seja o produto de um escalar real α por uma matriz nilpotente A, não nula, de índice 2 também terá o produto de Jordan $A \circ B$ nulo. realmente, se $A.A = \emptyset$ e $B = \alpha A$, segue que:

$$\begin{aligned} A \circ B &= A.B + B.A \\ &= A.(\alpha A) + (\alpha A).A \\ &= \alpha(A.A + A.A) \\ &= \alpha(\emptyset + \emptyset) \\ &= \alpha\emptyset \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Por exemplo, já vimos que a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é nilpotente índice 2. Dessa forma, se multiplicarmos A por qualquer constante, encontraremos outra matriz nilpotente de índice 2. Ou seja, se multiplicarmos A por -1/2, encontraremos:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que também é nilpotente índice 2. Como exercício, mostre que $B^2 = \emptyset$.

Exercícios

1. Mostre que se B é uma matriz real quadrada tal que $B = \alpha A$, onde α é um número real qualquer e A uma matriz Jordan nilpotente de índice 2, então B também será Jordan nilpotente de índice 2.

2. Calcule $A \circ A$ e diga se A é Jordan nilpotente índice 2.

   (a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

   (e) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

   (f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Determine uma matriz B tal que $A \circ B = \emptyset$. Dica: use as questões 1 e 2 acima.

   (a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

Matrizes reais de ordem 2 nilpotentes de índice 2

O objetivo do trabalho é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 1 *As únicas matrizes reais de ordem 2, não nulas, nilpotentes de índice 2 (com o produto usual de matrizes) são as matrizes abaixo:*

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Demonstração: Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz nilpotente de índice 2, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, isto é $A.A = \emptyset$. Dessa forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}.$$

Comparando termo a termo, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a^2+bc=0 & (1) \\ b(a+d)=0 & (2) \\ c(a+d)=0 & (3) \\ bc+d^2=0 & (4) \end{cases}$$

Inicialmente, suponhamos que $b=0$ e $c=0$, consequentemente, por (1) e (4) temos que $a^2=d^2=0$, logo $a=d=0$. Portanto, a matriz encontrada é a matriz nula.
Suponhamos que $b=0$ e $c \neq 0$, assim, por (1) e (4) temos que $a^2=d^2=0$, logo $a=d=0$. Portanto, a matriz nilpotente é da forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, suponhamos que $b \neq 0$ e $c=0$, por (1) e (4) também temos que $a^2=d^2=0$, logo $a=d=0$. Daí, a matriz nilpotente é da forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por fim, suponhamos que $b \neq 0$ e $c \neq 0$, por (2) e (3) tempos que $a+d=0$, logo $d=-a$. Substituindo em (1) e (4), encontramos $c = -\frac{a^2}{b}$. Enfim, a matriz nilpotente é da forma:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}.$$

Portanto, todas as matrizes nilpotentes de ordem 2 e de índice 2 apresentam as características apresentadas acima. $\square$

Além disso, a partir do teorema acima, podemos concluir o seguinte resultado:

Teorema 2 *As únicas matrizes reais de ordem 2, não nulas, Jordan nilpotentes de índice 2 são as matrizes nilpotentes de índice 2 (com o produto usual).*

Demonstração: Seja A uma matriz nilpotente de ordem 2 de índice 2, ou seja, $A \circ A = \emptyset$. Assim, temos o seguinte produto de Jordan:

$$\begin{aligned}
\emptyset &= A \circ A \\
&= \frac{1}{2}(A.A + A.A) \\
&= \frac{1}{2}(A^2 + A^2) \\
&= \frac{1}{2}(2A^2) \\
&= A^2.
\end{aligned}$$

Portanto, se $A^2 = \emptyset$, então A é uma matriz nilpotente de índice 2. $\square$

Podemos concluir que uma matriz Jordan de ordem 2, nilpotente de índice 2 é da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, tais como as matrizes nilpotentes de índice 2.

Exercícios

1. Mostre que as matrizes reais de ordem 2, nilpotentes de índice 2, possuem traço nulo.

2. Mostre que as matrizes reais de ordem 2, Jordan nilpotentes de índice 2, possuem determinante igual a zero. Conclua que as mesmas não são inversíveis.