

Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ



Campus Alto Paraopeba - CAP

Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT



Leonardo Bueno Da Silva

Um Modo Fácil de Abordar Recorrências no Ensino Médio

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Campus Alto Paraopeba da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Profa. Dra Gilcélia Regiane De Souza - UFSJ (Orientadora)

Prof. Dr. Maurício Reis e Silva Júnior - UFSJ

Prof. Dr. Rogério Casagrande - UFJF

Ouro Branco - MG

Dezembro - 2024

Um Modo Fácil de Abordar Recorrências no Ensino Médio

Aluno: Leonardo Bueno Da Silva ¹

Orientadora: Gilcélia Regiane De Souza ²

Coorientador: Marcelo Oliveira Veloso ³

Resumo:

Neste trabalho, exploramos a introdução do estudo de recorrências no ensino básico, focando no ensino fundamental e médio. Demonstramos como as recorrências podem ser integradas a outros tópicos já conhecidos da matemática, proporcionando uma abordagem enriquecedora para resolver problemas algébricos e geométricos. O estudo das recorrências está intimamente relacionado ao estudo das sequências numéricas, e uma aplicação relevante do método recursivo é a obtenção de fórmulas fechadas para diversas sequências. Abordamos a utilização de recorrências no contexto da matemática básica, com exemplos como os números figurados, a sequência dos pentágonos inscritos, o Problema da Pizza de Steiner e as sequências recursivas presentes no Triângulo de Pascal. Além disso, discutimos uma aplicação prática das recorrências na Matemática Financeira, ilustrando sua versatilidade e utilidade em diferentes áreas do conhecimento matemático.

Palavras-chave: recorrências; sequências; ensino médio.

Abstract:

In this work, we explore the introduction of the study of recurrences in basic education, focusing on elementary and secondary education. We demonstrate how recurrences can be integrated with other well-known mathematics topics, providing an enriching approach to solving algebraic and geometric problems. The study of recurrences is closely related to the study of numerical sequences, and a relevant application of the recursive method is the obtaining of closed formulas for various sequences. We address the use of recurrences in the context of basic mathematics, with examples such as figurative numbers, the sequence of inscribed pentagons, Steiner's Pizza Problem and the recursive sequences present in Pascal's Triangle. Furthermore, we discuss a practical application of recurrences in Financial Mathematics, illustrating their versatility and usefulness in different areas of mathematical knowledge.

Keywords: recurrences; sequences; high school.

¹ Aluno de Mestrado do PROFMAT, Turma 2022, Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Campus Alto Paraopeba (CAP), leonardo.bueno@educacao.mg.gov.br

² Professora Orientadora, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ, gilcelia@ufs.edu.br

³ Professor Coorientador, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ, veloso@ufs.edu.br

1 Introdução

O estudo das recorrências é um tema que normalmente não faz parte da matemática do ensino médio e na maioria das vezes também não está presente nos cursos superiores de exatas, inclusive nos cursos de licenciatura em matemática. Visto isso, ao longo da elaboração desse trabalho, procuramos mostrar como é possível desenvolver o ensino das recorrências no ensino médio pelos professores de matemática, sendo que as suas resoluções são feitas por técnicas conhecidas e relativamente de fácil compreensão.

A recorrência é uma regra, um modelo matemático, que permite calcular um termo qualquer de uma sequência numérica em função de termos anteriores.

Uma sequência numérica, definida por recorrência, tem a sua lei de formação e um ponto de partida, geralmente os primeiros números da sequência. A lei de formação de uma sequência numérica é a regra que permite encontrar qualquer termo da sequência.

Através da solução de uma recorrência, é possível obter diretamente e exclusivamente qualquer um dos infinitos termos de uma sequência e a posição que ele ocupa.

Visando os alunos do ensino médio, estudantes do ensino superior e professores de matemática que possivelmente tenham o interesse em utilizar esse material, procuramos facilitar a leitura de toda estrutura matemática que envolve as recorrências e o estudo das sequências numéricas de forma recursiva.

Uma importante aplicação das recorrências é a sua aplicação na geometria, podemos por exemplo determinar o número de diagonais ou determinar a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer de forma recursiva.

Para conhecer mais sobre as recorrências e relacioná-las diretamente com a matemática básica, permitindo que o seu uso seja uma prática mais frequente, utilizamos diversos exemplos relacionados com os números figurados (triangulares, quadrados perfeitos, pentagonais, hexagonais e tetraédricos), com cálculos e ilustrações, apresentamos uma sequência com infinitos pentágonos, ampliamos a proposta do problema da Pizza de Steiner, muito utilizado no estudo das recorrências, mostramos as sequências recursivas presentes no Triângulo de Pascal e citamos uma pequena aplicação das recorrências na Matemática Financeira.

Priorizamos o estudo das recorrências lineares de primeira ordem, visto que as suas resoluções e as suas aplicações estão mais relacionadas com os temas do ensino médio, também iniciamos o estudo das recorrências lineares de segunda ordem, com exemplos e aplicações, abrangendo assim, grande parte do estudo das recorrências.

As figuras presentes nesse trabalho foram elaboradas no GeoGebra e no Google Apps Documentos - Gmail.

2 Recorrências

Uma sequência numérica pode ser finita ou infinita, crescente, decrescente ou oscilante, recursiva ou não-recursiva que na maioria das vezes obedece uma lei de formação, com características pré-estabelecidas.

A lei de formação de uma sequência pode ser descrita ou não por uma equação, quando uma sequência numérica pode ser descrita por uma equação, temos uma sequência recursiva, essa equação

é justamente a sua lei de formação, nesse caso podemos representá-la de forma recursiva, dizemos que existe uma relação de recorrência entre os termos dessa sequência. Quando a lei de formação de uma sequência não pode ser descrita por uma equação, temos uma sequência não-recursiva.

Nem sempre a lei de formação é fornecida nos enunciados, portanto precisamos identificar a lei de formação, procurando padrões matemáticos, possibilitando a elaboração de equações, para serem usadas ao longo das resoluções. Um bom exemplo do que estamos falando se vê na Geometria, principalmente na sala de aula com os alunos, quando obtemos os primeiros valores das sequências de forma intuitiva, através de desenhos geométricos, permitindo identificar de forma recursiva a lei de formação.

A sequência dos números triangulares, a sequência de Fibonacci, as progressões aritméticas, as progressões geométricas, são exemplos de sequências que podem ser descritas por equações, são exemplos de sequências recursivas.

A sequência dos números primos:

(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...), não é uma sequência recursiva, apesar de existir uma lei de formação, são números que possuem apenas dois divisores, 1 e ele mesmo.

A sequência finita dos números naturais que são divisores de 100:

(1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100), não é uma sequência recursiva, apesar de existir uma lei de formação, a divisão de 100 pelos números acima não deixam resto.

A sequência finita dos números naturais menores que 100 que possuem o algarismo 9:

(9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99), não é uma recorrência, apesar de existir uma lei de formação.

A sequência dos números triangulares e a sequência de Fibonacci são as mais frequentes no estudo e nas aplicações das recorrências. Os números triangulares e os números de Fibonacci aparecem constantemente em diversos cálculos matemáticos e geométricos, de forma clara ou de forma oculta, o que serviu de motivação para o nosso estudo e é o que vamos abordar ao longo desse trabalho.

2.1 Forma Recursiva e Fórmula Fechada

A forma recursiva de uma recorrência é a equação que relaciona um termo da sequência com o seu antecessor, ou seja, que expressa matematicamente a relação de recorrência entre dois termos consecutivos, já a fórmula fechada é uma função onde cada termo da sequência depende apenas do valor de n , onde o valor de n refere-se a posição de cada termo da sequência.

Uma progressão aritmética é uma sequência onde cada termo é igual ao antecessor adicionado de um valor fixo (razão da P.A.), equacionando temos:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Quando temos a lei de formação de uma sequência descrita por uma equação e o seu termo inicial, temos a sua representação na forma recursiva, o que é necessário para desenvolver e resolver a recorrência e chegar na fórmula fechada, mas apenas com a forma recursiva ainda não é possível obter diretamente um termo qualquer da sequência sem conhecer os outros, chegando na fórmula fechada é possível obter diretamente e exclusivamente qualquer um dos infinitos termos de uma sequência e a posição que ele ocupa, a fórmula fechada é a solução da recorrência, que veremos como obtê-la nas próximas seções.

No exemplo da P.A. a equação $a_{n+1} = a_n + r$ é a forma recursiva inicial e a equação

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

é a fórmula fechada ou solução da recorrência, que conhecemos como a fórmula do termo geral da P.A.

Uma progressão geométrica é uma sequência onde cada termo é igual ao anterior multiplicado por um valor fixo (razão q da P.G.), equacionando temos:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

A equação acima é a forma recursiva inicial da P.G. e a equação

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

é a fórmula fechada ou solução da recorrência, que conhecemos como a fórmula do termo geral da P.G.

As representações a_n , X_n e T_n são as mais usadas para indicar sequências no estudo das recorrências, veja:

A sequência a_n dos números naturais ímpares (1, 3, 5, 7, ...) pode ser descrita por:

$$a_{n+1} = a_n + 2, \text{ com } a_1 = 1.$$

A equação acima é a forma recursiva ou lei de formação que resultará na fórmula fechada:

$$a_n = 2n - 1$$

Se a_{10} é o décimo número ímpar, temos $a_{10} = 2 \cdot 10 - 1 = 20 - 1 = 19$.

A sequência X_n dos números naturais pares (0, 2, 4, 6, ...) pode ser descrita por:

$$X_{n+1} = X_n + 2, \text{ com } X_1 = 0.$$

A equação acima é a forma recursiva ou lei de formação que resultará na fórmula fechada:

$$X_n = 2n$$

A sequência dos números pares, a sequência dos números ímpares e todas as demais progressões aritméticas de razão 2 possuem a mesma lei de formação, mas possuem termos iniciais diferentes e consequentemente terão fórmulas fechadas diferentes.

2.2 Tipos de Recorrências

Identificamos as recorrências:

- como lineares ou não-lineares;
- de acordo com a ordem (de 1^a ordem ou de 2^a ordem);

- como homogêneas ou não homogêneas e
- se os coeficientes de seus termos são constantes (números reais) ou se são funções de n .

Portanto, para identificar o tipo de recorrência que vamos resolver, devemos observar esses quatro aspectos;

Uma recorrência é linear quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é linear, ou seja, uma função do 1º grau (os expoentes dos seus termos são iguais a 1);

O que define a ordem de uma recorrência é a quantidade de termos anteriores que ela depende;

Quando X_{n+1} depende apenas de X_n temos uma recorrência de 1ª ordem;

Quando X_{n+2} depende de X_{n+1} e de X_n , ou seja, de dois termos anteriores, temos uma recorrência de 2ª ordem;

Uma recorrência é homogênea quando não possui termos independentes ou não-homogênea quando possui termos independentes.

Vejamos alguns exemplos, (MORGADO; CARVALHO, 2015):

Exemplo 2.2.1. As recorrências $X_{n+1} = 2X_n$ e $X_{n+1} = 3X_n$ são lineares de 1ª ordem homogêneas com coeficientes constantes.

Exemplo 2.2.2. Recorrências lineares de 1ª ordem homogêneas com coeficientes não-constantes:
 $X_{n+1} = n \cdot X_n$ e $X_{n+1} = (n+1) \cdot X_n$

Exemplo 2.2.3. Recorrências lineares de 1ª ordem não homogêneas com coeficientes constantes:
 $X_{n+1} = 2 \cdot X_n + 3$ e $X_{n+1} = 3 \cdot X_n + 2^n$

Exemplo 2.2.4. Recorrências lineares de 1ª ordem não homogêneas com coeficientes não constantes:

$$X_{n+1} = (n+1)X_n + 3 \quad e \quad X_{n+1} = nX_n + n!$$

Exemplo 2.2.5. Recorrências não lineares:

$$X_{n+1} = (X_n)^2 \quad e \quad X_{n+1} = X_n^3 + n$$

Exemplo 2.2.6. Recorrências lineares de 2ª ordem homogêneas:

$$X_{n+2} - X_{n+1} - 20X_n = 0, \text{ com } X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 2.$$

$$X_{n+1} - 5X_n + 6X_{n-1} = 0, \text{ com } X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 5.$$

Exemplo 2.2.7. Recorrências lineares de 2ª ordem não homogêneas:

$$X_{n+2} + X_{n+1} - 6X_n = 6 - 8n, \text{ com } X_0 = 1 \text{ e } X_1 = 4.$$

$$X_{n+2} - 4X_{n+1} + 4X_n = 2^{n+3}, \text{ com } X_0 = 3 \text{ e } X_1 = 6.$$

2.3 Processo Básico de Resolução de Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Para compreender o processo básico de resolução de recorrências lineares de primeira ordem, vamos utilizar como exemplo, a sequência dos números naturais ímpares:

$$X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 5, X_4 = 7, \dots$$

Cada número natural ímpar a partir do 3 é igual ao valor do seu antecessor acrescido de 2 unidades, ou seja:

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = X_1 + 2$$

Somando as duas equações, temos:

$$X_1 + X_2 = 1 + X_1 + 2$$

Veja que X_1 se anula e obtemos $X_2 = 3$.

Da mesma forma:

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = X_1 + 2$$

$$X_3 = X_2 + 2$$

Somando as três equações, temos:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1 + X_1 + 2 + X_2 + 2$$

Veja que X_1 e X_2 se anulam e obtemos $X_3 = 5$.

Repetindo o processo, ou seja,

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = X_1 + 2$$

$$X_3 = X_2 + 2$$

$$X_4 = X_3 + 2$$

$$\vdots$$

$$X_n = X_{n-1} + 2$$

Somando as n equações, temos:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \dots + X_n = 1 + X_1 + 2 + X_2 + 2 + X_3 + 2 + \dots + X_{n-1} + 2$$

Veja que $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_{n-1}$ se anulam e como o número 2 repete $(n-1)$ vezes no segundo membro da equação, obtemos $X_n = 1 + (n-1).2$

Portanto,

$$X_n = 2n - 1$$

é a fórmula fechada para representar a sequência dos números naturais ímpares.

Utilizamos esse processo de forma intuitiva para resolver as recorrências lineares de 1ª ordem não-homogêneas da forma $X_{n+1} = X_n + C$, onde o coeficiente de X_n é 1 e a parte não-homogênea é uma constante C qualquer.

No exemplo da sequência dos números ímpares, temos a seguinte lei de formação:

$$X_{n+1} = X_n + 2, \quad \text{com} \quad X_1 = 1.$$

Abaixo apresentamos um exemplo ilustrativo, de como resolver uma recorrência linear de primeira ordem, veja que para resolver essa recorrência usamos o cancelamento de termos semelhantes, nessa ilustração, colocamos os termos semelhantes com a mesma cor, onde é possível visualizar como são feitos os cancelamentos:

$$\begin{array}{l}
 x_1 = 1 \\
 x_2 = x_1 + 2 \\
 x_3 = x_2 + 2 \\
 x_4 = x_3 + 2 \\
 x_5 = x_4 + 2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 x_{n-2} = x_{n-3} + 2 \\
 x_{n-1} = x_{n-2} + 2 \\
 x_n = x_{n-1} + 2 \\
 \hline
 x_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 \\
 x_n = 1 + 2n - 2 \\
 x_n = 2n - 1
 \end{array}$$

Figura 1 – Visualização dos termos semelhantes na resolução de uma recorrência

Agora vamos pensar na progressão geométrica de razão 2 e que começa com 1.

Assim, temos:

$$X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 4, X_4 = 8, X_5 = 16, X_6 = 32, X_7 = 64, \dots$$

Como cada termo dessa sequência é o dobro do seu antecessor, montamos uma sequência de equações, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
X_1 &= 1 \\
X_2 &= 2X_1 \\
X_3 &= 2X_2 \\
&\vdots \\
X_{n-2} &= 2X_{n-3} \\
X_{n-1} &= 2X_{n-2} \\
X_n &= 2X_{n-1}
\end{aligned}$$

Multiplicando as n equações, temos:

$$X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdots X_{n-2} \cdot X_{n-1} \cdot X_n = 1 \cdot 2X_1 \cdot 2X_2 \cdot 2X_3 \cdots 2X_{n-3} \cdot 2X_{n-2} \cdot 2X_{n-1}$$

Veja que o número 2 repete $(n - 1)$ vezes no segundo membro da equação, assim temos:

$$X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdots X_{n-2} \cdot X_{n-1} \cdot X_n = 1 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_{n-3} \cdot X_{n-2} \cdot X_{n-1} \cdot 2^{n-1}$$

Veja que $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_{n-3}, X_{n-2}, X_{n-1}$ se anulam e obtemos:

$$X_n = 1 \cdot 2^{n-1}$$

Onde a equação acima é a fórmula fechada da progressão geométrica de razão 2 com termo inicial igual a 1.

Utilizamos esse processo de forma intuitiva para resolver as recorrências lineares de 1ª ordem homogêneas da forma $X_{n+1} = C \cdot X_n$, onde o coeficiente de X_n é uma constante C e sem termos independentes.

No exemplo da progressão geométrica, temos a lei de formação:

$$X_{n+1} = 2 \cdot X_n, \quad \text{com} \quad X_1 = 1.$$

Resumindo o processo básico de resolução de recorrências lineares de 1ª ordem

De posse da equação de lei de formação, que é a forma recursiva da recorrência e com o primeiro termo da sequência, montamos uma sequência de equações da seguinte maneira:

1ª equação: informamos o valor de X_1
 2ª equação: X_2 em função de X_1
 3ª equação: X_3 em função de X_2
 $\vdots$
 equação de posição $(n - 2)$: X_{n-2} em função de X_{n-3}
 equação de posição $(n - 1)$: X_{n-1} em função de X_{n-2}
 enésima equação: X_n em função de X_{n-1}

Após montar a sequência de equações, somamos todas as equações (recorrência linear não-homogênea) ou multiplicamos todas as equações (recorrência linear homogênea), onde os termos semelhantes se anulam, gerando uma única equação. Observe que X_n estará apenas em função de n e a equação será a fórmula fechada ou a solução da recorrência.

Duas aplicações interessantes do processo básico de resolução de recorrências lineares de 1ª ordem, que podemos utilizar nas aulas de matemática do ensino médio, são as deduções das fórmulas do termo geral da progressão aritmética e do termo geral da progressão geométrica, a seguir vamos mostrar como construir essas deduções recursivamente, (IEZZI; HAZZAN, 2004).

- Progressão Aritmética

Como uma progressão aritmética é uma sequência onde cada termo é igual ao antecessor adicionado de um valor fixo (razão da P.A.), podemos elaborar uma sequência de equações da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}a_1 &= a_1 \\a_2 &= a_1 + r \\a_3 &= a_2 + r \\&\vdots \\a_{n-2} &= a_{n-3} + r \\a_{n-1} &= a_{n-2} + r \\a_n &= a_{n-1} + r\end{aligned}$$

Veja que r repete $(n - 1)$ vezes, somando as equações, obtemos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Assim, deduzimos recursivamente a fórmula do termo geral da P.A., expressa pela equação acima.

- Progressão Geométrica

Como uma progressão geométrica é uma sequência onde cada termo é igual ao anterior multiplicado por um valor fixo (razão q da P.G.), podemos elaborar uma sequência de equações da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}a_1 &= a_1 \\a_2 &= a_1 \cdot q \\a_3 &= a_2 \cdot q \\&\vdots \\a_{n-2} &= a_{n-3} \cdot q \\a_{n-1} &= a_{n-2} \cdot q \\a_n &= a_{n-1} \cdot q\end{aligned}$$

Veja que q repete $(n - 1)$ vezes, efetuando o produto das equações, obtemos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Assim deduzimos recursivamente a fórmula do termo geral da P.G., expressa pela equação acima.

3 Sequência dos Pentágonos Inscritos

Quando traçamos as diagonais de um pentágono, obtemos uma estrela de cinco pontas e no interior dessa estrela, obtemos um novo pentágono. Se traçarmos as diagonais desse novo pentágono, obtemos uma 2ª estrela e um 3º pentágono. Podemos repetir esse processo infinitas vezes, obtendo infinitas estrelas e infinitos pentágonos.

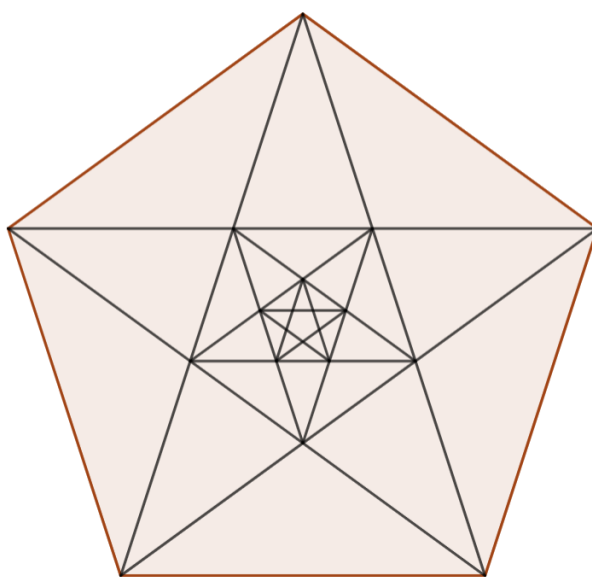


Figura 2 – Infinitos Pentágonos

Logicamente, cada novo pentágono será menor que o anterior e imaginando o desenho da sequência infinita dos pentágonos, teremos infinitas estrelas e infinitos pentágonos cada vez menores, mas matematicamente os pentágonos nunca deixarão de existir.

Considerando que o 1º pentágono é regular, os demais pentágonos também serão regulares, então teremos uma razão de semelhança entre os lados dos pentágonos, se descobirmos quantas vezes menor é a medida do lado do 2º pentágono em relação a medida do lado do 1º pentágono, podemos elaborar uma recorrência e descobrir através da solução da recorrência a medida do lado de qualquer um dos infinitos pentágonos (por menor que seja essa medida).

Da mesma forma, podemos elaborar uma recorrência para as medidas dos lados das infinitas estrelas (infinitos Pentagramas) e uma recorrência para as medidas das diagonais dos infinitos pentágonos, visto que, tanto os lados das infinitas estrelas quanto as diagonais dos infinitos pentágonos possuem a mesma razão de semelhança dos lados dos infinitos pentágonos.

Em cada recorrência, vamos calcular essa razão de semelhança, para mostrar que ela permanece constante, (DOLCE; POMPEO, 1993).

3.1 Recorrência das Medidas dos Lados dos Pentágonos Inscritos

Vamos utilizar a semelhança de triângulos para descobrir quantas vezes menor é a medida do lado do 2º pentágono em relação a medida do lado do 1º pentágono, assim podemos montar a equação da lei de formação da recorrência e chegar na fórmula fechada que fornecerá a medida do lado de qualquer um dos infinitos pentágonos:

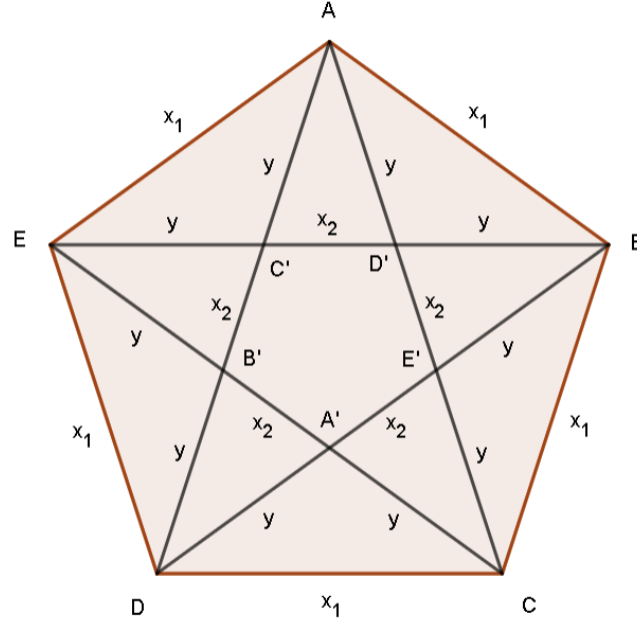


Figura 3 – Pentágono Regular

Considere que o 1º pentágono $ABCDE$ terá lado de medida x_1 e o 2º pentágono $A'B'C'D'E'$ terá lado de medida x_2 e os segmentos AC' , $C'E$, EB' , $B'D$, DA' , $A'C$, CE' , $E'B$, BD' , $D'A$, terão medidas y ;

Observe as Figuras 3 e 4, o $\triangle ABC'$ é isósceles de base AC' pois temos:

Ângulo $C'AB = 72^\circ$, Ângulo $ABC' = 36^\circ$ e Ângulo $AC'B = 72^\circ$,

logo os lados AB e BC' são iguais:

$$AB = BC' \Rightarrow x_1 = x_2 + y$$

Vamos obter a razão de semelhança dos triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle A'CD$, para obter x_2 em função de x_1 :

$$\frac{CD}{A'C} = \frac{BE}{AB}$$

ou seja,

$$\frac{x_1}{y} = \frac{y + x_2 + y}{x_1}$$

como $AB = BC' \Rightarrow x_1 = x_2 + y$, temos:

$$\frac{x_1}{y} = \frac{y + x_1}{x_1}$$

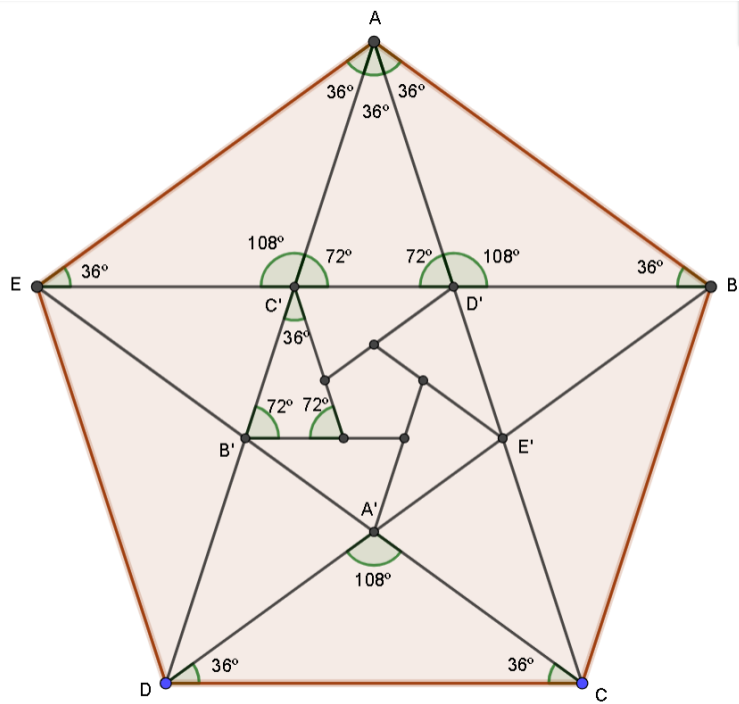


Figura 4 – Ângulos presentes no interior do Pentágono e no Pentagrama

reescrevendo:

$$y^2 + x_1 \cdot y = x_1^2$$

$$y^2 + x_1 \cdot y - x_1^2 = 0$$

Obtendo as raízes da equação:

$$\Delta = x_1^2 - 4(1)(-x_1^2) = 5x_1^2$$

$$y = \frac{-x_1 \pm \sqrt{5x_1^2}}{2}$$

$$y_a = \frac{-x_1 + \sqrt{5}x_1}{2} \text{ e } y_b = \frac{-x_1 - \sqrt{5}x_1}{2}$$

$$y_a = \frac{x_1(+\sqrt{5}-1)}{2} \text{ e } y_b = \frac{x_1(-\sqrt{5}-1)}{2}$$

Como estamos trabalhando geometricamente, x_1 é positivo, assim somente a raiz y_a é válida. Lembrando que $AB = BC'$, ou seja, $x_1 = x_2 + y$, temos:

$$x_2 = x_1 - y$$

$$x_2 = x_1 - \left(\frac{-x_1 + \sqrt{5}x_1}{2} \right)$$

$$x_2 = \frac{2x_1 + 1x_1 - \sqrt{5}x_1}{2}$$

$$x_2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) x_1$$

Logo, o lado do 2º pentágono será $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)$ vezes menor que o lado do 1º pentágono. Procedendo de modo análogo, o lado do 3º pentágono será $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)$ vezes menor que o lado do 2º pentágono e assim sucessivamente.

Como o lado de cada novo pentágono é $(\frac{3-\sqrt{5}}{2})$ vezes menor que o lado do pentágono antecessor, podemos elaborar a lei de formação da recorrência, que será:

$$X_{n+1} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) X_n$$

Veja que essa P.G. é uma recorrência linear de 1ª ordem homogênea (de fácil resolução).

Através da solução da recorrência, podemos determinar a medida do lado de qualquer um dos infinitos pentágonos apenas em função da medida do lado do 1º pentágono, podemos observar também que essa sequência trata-se de uma P.G. de razão $(\frac{3-\sqrt{5}}{2})$ e como $(\frac{3-\sqrt{5}}{2})$ é menor que 1, temos uma P.G. decrescente.

Resolvendo a recorrência:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1 \\ X_2 &= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) X_1 \\ X_3 &= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) X_2 \\ &\vdots \\ X_{n-2} &= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) X_{n-3} \\ X_{n-1} &= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) X_{n-2} \\ X_n &= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) X_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando as equações, obtemos:

$$X_n = X_1 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

Como toda sequência definida por recorrência deve ter um valor inicial, vamos considerar a medida do lado do 1º pentágono igual a 1.

Lei de formação:

$$X_{n+1} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) X_n, \quad \text{com } X_1 = 1.$$

Solução ou fórmula fechada:

$$X_n = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

3.2 Recorrência das Medidas dos Lados das Estrelas Inscritas

Vamos descobrir quantas vezes menor é a medida do lado da 2ª estrela em relação a medida do lado da 1ª estrela, assim podemos montar a lei de formação da recorrência e chegar na fórmula fechada que fornecerá a medida do lado de qualquer uma das infinitas estrelas.

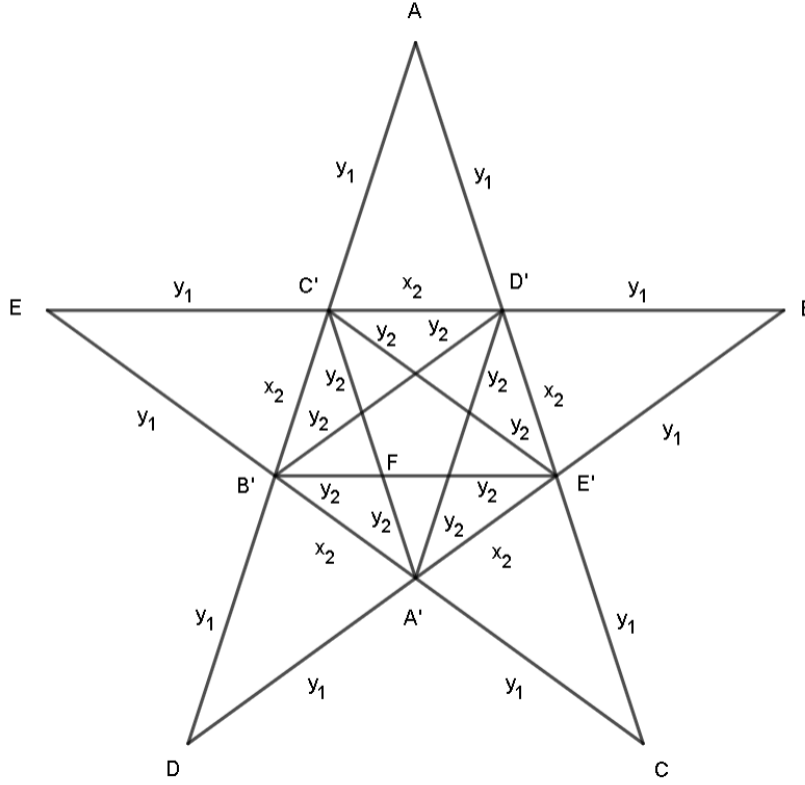


Figura 5 – Estrela

A 2ª estrela é semelhante a 1ª estrela e é semelhante a todas as infinitas estrelas, pois todas são regulares, todas possuem 5 pontas que são ângulos iguais a 36° .

O Âng. $C'AD'$ mede 36° , para obter y_2 em função de y_1 precisaremos do cosseno de 36° .

Vamos aplicar a lei dos cossenos no $\Delta_{C'AD'}$ isósceles de base $C'D'$ para obter o cosseno de 36° .

Como $y_1 = \frac{x_1(\sqrt{5}-1)}{2}$, tomando $x_1 = 1$, obtemos:

$$y_1 = \frac{1 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Como $x_2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)x_1$, tomando $x_1 = 1$, obtemos:

$$x_2 = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cdot 1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Aplicando a lei dos cossenos:

$$(x_2)^2 = (y_1)^2 + (y_1)^2 - 2 \cdot (y_1) \cdot (y_1) \cdot \cos(36^\circ) = 2(y_1)^2(1 - \cos(36^\circ))$$

Assim $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2(1 - \cos(36^\circ))$, donde obtemos

$$\frac{2(7 - 3\sqrt{5})}{2(6 - 2\sqrt{5})} = 1 - \cos(36^\circ)$$

Logo

$$\cos(36^\circ) = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{6 - 2\sqrt{5}} - \frac{(7 - 3\sqrt{5})}{6 - 2\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5} - 1)(3 + \sqrt{5})}{2(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{5} + 2}{2 \cdot 4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

Vamos obter a razão de semelhança dos $\Delta_{C'AD'}$ e $\Delta_{B'C'F}$, para obter y_2 em função de y_1 :

$$\frac{AC'}{C'D'} = \frac{C'B'}{B'F}$$

$$\frac{y_1}{x_2} = \frac{x_2}{y_2}$$

$$y_1 y_2 = (x_2)^2$$

Como $(x_2)^2 = (y_1)^2 + (y_1)^2 - 2 \cdot (y_1) \cdot (y_1) \cdot \cos(36^\circ)$, temos:

$$y_1 y_2 = (y_1)^2 + (y_1)^2 - 2(y_1)^2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$y_1 y_2 = 2(y_1)^2 \left(1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\right)$$

$$y_1 y_2 = 2y_1 y_1 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$y_2 = y_1 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Logo, o lado da 2ª estrela será $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ vezes menor que o lado da 1ª estrela. Procedendo de modo análogo, o lado da 3ª estrela será $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ vezes menor que o lado da 2ª estrela e assim sucessivamente.

Como o lado de cada nova estrela é $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ vezes menor que o lado da estrela antecessora, podemos elaborar a lei de formação da recorrência, que será:

$$y_{n+1} = y_n \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Assim, através da solução da recorrência, podemos determinar a medida do lado de qualquer uma das infinitas estrelas apenas em função da medida do lado da 1ª estrela.

Como já temos a solução da recorrência, a medida do lado de qualquer uma das infinitas estrelas em função do valor de y_1 , será dada pela fórmula fechada:

$$y_n = y_1 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

Vamos considerar a medida do lado da 1ª estrela igual a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, já que consideramos a medida do lado do 1º pentágono igual a 1.

Lei de formação:

$$y_{n+1} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) y_n, \quad \text{com} \quad y_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Solução ou fórmula fechada:

$$y_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

Com as medidas do lado do 1º e do 2º pentágono e do lado da 1ª estrela que encontramos, aplicando a lei dos cossenos e o teorema de Pitágoras (para obter as alturas dos triângulos), podemos obter as medidas do seno e do cosseno dos ângulos 18° , 36° , 54° , 72° e 108° (veja as Figuras 3, 4 e 5).

3.3 Recorrência das Medidas das Diagonais dos Pentágonos Inscritos

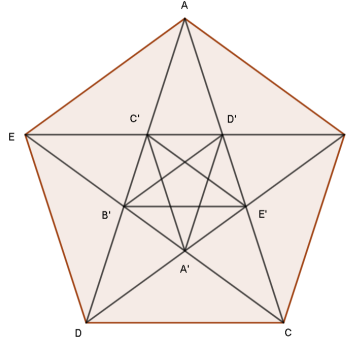


Figura 6 – Diagonais do Pentágono

Observe as Figuras 5 e 6, chamaremos de d_1 e d_2 , as diagonais do 1º e do 2º pentágono respectivamente, vamos obter a razão de semelhança dos triângulos $\Delta_{ACB'}$ e $\Delta_{C'A'B'}$, para obter d_2 em função de d_1 :

$$\frac{AC}{CB'} = \frac{C'A'}{A'B'}$$

$$\frac{d_1}{y_1 + x_2} = \frac{d_2}{x_2}$$

como $y_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $y_1 + x_2 = 1$, temos:

$$\frac{d_1}{1} = \frac{d_2}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$d_2 = d_1 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

Logo, a diagonal do 2º pentágono será $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ vezes menor que a diagonal do 1º pentágono. Procedendo de modo análogo, a diagonal do 3º pentágono será $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ vezes menor que a diagonal do 2º pentágono e assim sucessivamente. Como a diagonal de cada novo pentágono é $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ vezes menor que a diagonal do pentágono antecessor, podemos elaborar a lei de formação da recorrência, que será:

$$d_{n+1} = d_n \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

Através da solução da recorrência, podemos determinar a medida da diagonal de qualquer um dos infinitos pentágonos apenas em função da medida da diagonal do 1º pentágono.

Como já temos a solução da recorrência, a medida da diagonal de qualquer um dos infinitos pentágonos em função do valor de d_1 , será dada pela fórmula fechada:

$$d_n = d_1 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

Observe as Figuras 5 e 6, d_1 terá medida igual a $y_1 + x_2 + y_1$, então:

$$d_1 = 2 \cdot y_1 + x_2$$

$$d_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$d_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Concluindo,

Lei de formação:

$$d_{n+1} = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) d_n, \quad \text{com} \quad d_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Solução ou fórmula fechada:

$$d_n = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

4 Recorrências com os Números Figurados

Números figurados são números que podem ser representados por um conjunto de pontos, criando uma figura geométrica, quando esse posicionamento de pontos forma um polígono, temos um número poligonal ou um número figurado, como por exemplo os números triangulares, quadrados perfeitos, pentagonais, hexagonais, tetraédricos e outros.

4.1 Números Triangulares

Um número triangular é um número natural resultante da soma de um conjunto de pontos que formam um triângulo equilátero, como vemos na Figura 7:

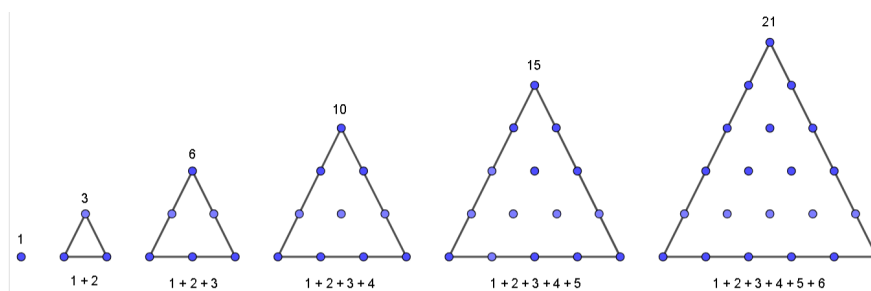


Figura 7 – Números Triangulares

A sequência dos números triangulares representada de forma recursiva, é um ótimo exemplo para entender os passos de como resolver uma recorrência:

$$1_2 \ 3_3 \ 6_4 \ 10_5 \ 15_6 \ 21_7 \ 28_8 \ 36_9 \ 45_{10} \ 55_{11} \ 66_{12} \ 78_{13} \ 91_{14} \ 105_{15} \dots$$

Somente observando a sequência acima e analisando os intervalos entre os números triangulares, conseguimos montar a sequência de equações de forma recursiva:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= a_1 + 2 \\
a_3 &= a_2 + 3 \\
&\vdots \\
a_{n-2} &= a_{n-3} + (n-2) \\
a_{n-1} &= a_{n-2} + (n-1) \\
a_n &= a_{n-1} + n
\end{aligned}$$

Somando, resulta:

$$a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

Ou seja,

$$a_n = \frac{(1+n)n}{2}$$

é a fórmula fechada para encontrar qualquer número triangular.

No processo de construção da lei de formação e na resolução de várias recorrências utilizamos os números triangulares, por exemplo, no Problema da Pizza de Steiner, muito utilizado no estudo das recorrências e abordado nesse trabalho, mostramos diversas aparições da sequência dos números triangulares.

4.2 Números Quadrados Perfeitos

A partir da sequência dos números quadrados perfeitos podemos ver uma sequência recursiva, por exemplo, os intervalos entre os números quadrados perfeitos é a sequência dos números ímpares:

$$0 \text{--} 1 \text{--} 4 \text{--} 9 \text{--} 16 \text{--} 25 \text{--} 36 \text{--} 49 \text{--} 64 \text{--} 81 \text{--} 100 \text{--} 121 \text{--} 144 \text{--} 169 \text{--} 196 \dots$$

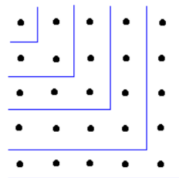


Figura 8 – Números Quadrados Perfeitos

Vemos claramente que a fórmula fechada para a sequência dos números quadrados perfeitos é $X_n = n^2$, mas podemos obtê-la também de forma recursiva:

$$\begin{aligned}
01 &= 1 \\
04 &= 1 + 3 \\
09 &= 1 + 3 + 5 \\
16 &= 1 + 3 + 5 + 7 \\
25 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Montando a sequência de equações de forma recursiva e resolvendo a recorrência, temos:

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = X_1 + 3$$

$$X_3 = X_2 + 5$$

$$X_4 = X_3 + 7$$

$$X_5 = X_4 + 9$$

$\vdots$

$$X_n = X_{n-1} + (2n - 1)$$

Somando, resulta:

$$X_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1),$$

note que temos uma soma de P.A. de razão 2. Assim,

$$X_n = \frac{[1 + (2n - 1)]n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

4.3 Números Pentagonais

Um número pentagonal é um número natural resultante da soma de um conjunto de pontos que formam um pentágono regular, como vemos na Figura 9:

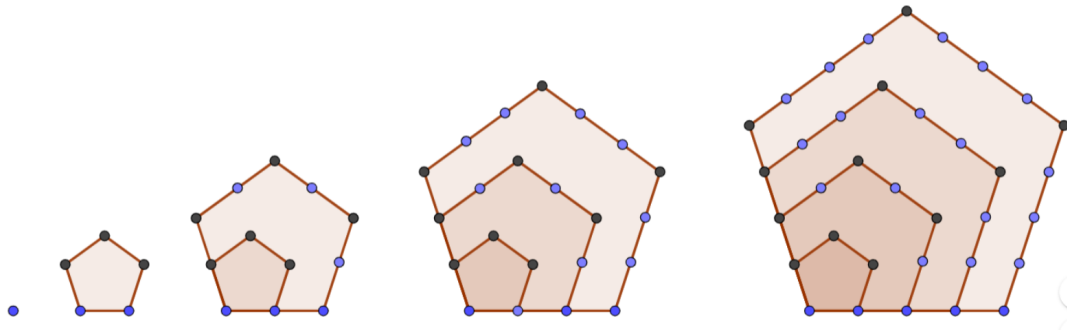


Figura 9 – Números Pentagonais

$$(1, 5, 12, 22, 35, 51, \dots)$$

Como cada número da sequência é o conjunto de pontos que forma cada uma das figuras pentagonais da sequência, podemos montar e resolver a recorrência dos números pentagonais, observando o acréscimo de pontos de uma figura para a outra:

$$P_1 = 1$$

$$P_2 = 1 + 4$$

$$P_3 = 1 + 4 + 7$$

$$P_4 = 1 + 4 + 7 + 10$$

$$P_5 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13$$

$\vdots$

Montando a sequência de equações de forma recursiva e resolvendo a recorrência, temos:

$$P_1 = 1$$

$$P_2 = P_1 + 4$$

$$P_3 = P_2 + 7$$

$$P_4 = P_3 + 10$$

$$P_5 = P_4 + 13 \text{ note que temos uma P.A. de razão } 3$$

$\vdots$

$$P_{n-1} = P_{n-2} + [1 + (n-2).3]$$

$$P_n = P_{n-1} + [1 + (n-1).3]$$

Somando, resulta:

$$P_n = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \dots + (3n-5) + (3n-2)$$

Assim

$$P_n = \frac{[1 + (3n-2)].n}{2} = \frac{(3n-1).n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

é a fórmula fechada para encontrar qualquer número pentagonal.

4.4 Números Hexagonais

Um número hexagonal é um número natural resultante da soma de um conjunto de pontos que formam um hexágono regular, como vemos na Figura 10:

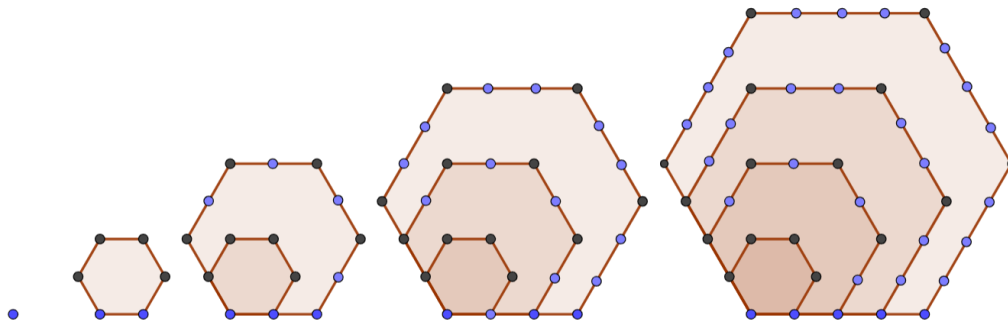


Figura 10 – Números Hexagonais

$$(1, 6, 15, 28, 45, \dots)$$

Como cada número da sequência é o conjunto de pontos que forma cada uma das figuras hexagonais da sequência, podemos montar e resolver a recorrência dos números hexagonais, observando o acréscimo de pontos de uma figura para a outra:

$$H_1 = 1$$

$$H_2 = 1 + 5$$

$$H_3 = 1 + 5 + 9$$

$$H_4 = 1 + 5 + 9 + 13$$

$$H_5 = 1 + 5 + 9 + 13 + 17$$

$\vdots$

Montando a sequência de equações de forma recursiva e resolvendo a recorrência, temos:

$$H_1 = 1$$

$$H_2 = H_1 + 5$$

$$H_3 = H_2 + 9$$

$$H_4 = H_3 + 13$$

$$H_5 = H_4 + 17 \text{ note que temos uma P.A. de razão } 4$$

$\vdots$

$$H_{n-1} = H_{n-2} + [1 + (n-2)4]$$

$$H_n = H_{n-1} + [1 + (n-1)4]$$

Somando, resulta:

$$H_n = 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \dots + (4n-7) + (4n-3)$$

Logo

$$H_n = \frac{[1 + (4n-3)]n}{2} = \frac{(4n-2)n}{2} = \frac{4n^2 - 2n}{2} = 2n^2 - n$$

é a fórmula fechada para encontrar qualquer número hexagonal.

As sequências dos números figurados são exemplos de recorrências que podem ser facilmente trabalhadas em sala de aula com forte ligação com outros assuntos que já são abordados tradicionalmente no ensino básico da matemática.

5 Pizza de Steiner

O Problema da Pizza de Steiner é um clássico problema de geometria e otimização, proposto pelo matemático suíço Jakob Steiner em 1842.

A Pizza de Steiner é um excelente problema que pode ser descrito de forma recursiva, a ideia inicial desse problema consiste em obter sempre o (maior) número de regiões quando se divide um plano, traçando uma sequência de n retas.

Para obter o número máximo de regiões, deve-se traçar uma sequência de retas concorrentes, de modo que a próxima reta a ser traçada sempre corte todas as demais retas anteriormente traçadas e que cada nova reta também não passe por nenhum ponto de intersecção de duas retas anteriormente traçadas.

Essas exigências são importantes, pois fazendo com que cada nova reta traçada corte as demais retas anteriormente traçadas, temos a garantia que não haverá nenhum par de retas paralelas, já que a existência de retas paralelas aumentará o número de regiões, mas não determinará o número máximo de regiões (que é o objetivo do problema).

Além disso, traçar uma nova reta passando por um ponto de intersecção de duas retas anteriormente traçadas aumentará o número de regiões, mas também não determinará o número máximo de regiões (que é o objetivo do problema).

À medida que o número de retas traçadas vai aumentando, torna-se um pouco trabalhoso, esboçar o desenho, visualizar e contabilizar o número de regiões e pontos de intersecções, mas com o desenvolvimento do cálculo por recorrências é possível determinar o número de regiões de acordo com o número de retas para qualquer número de retas.

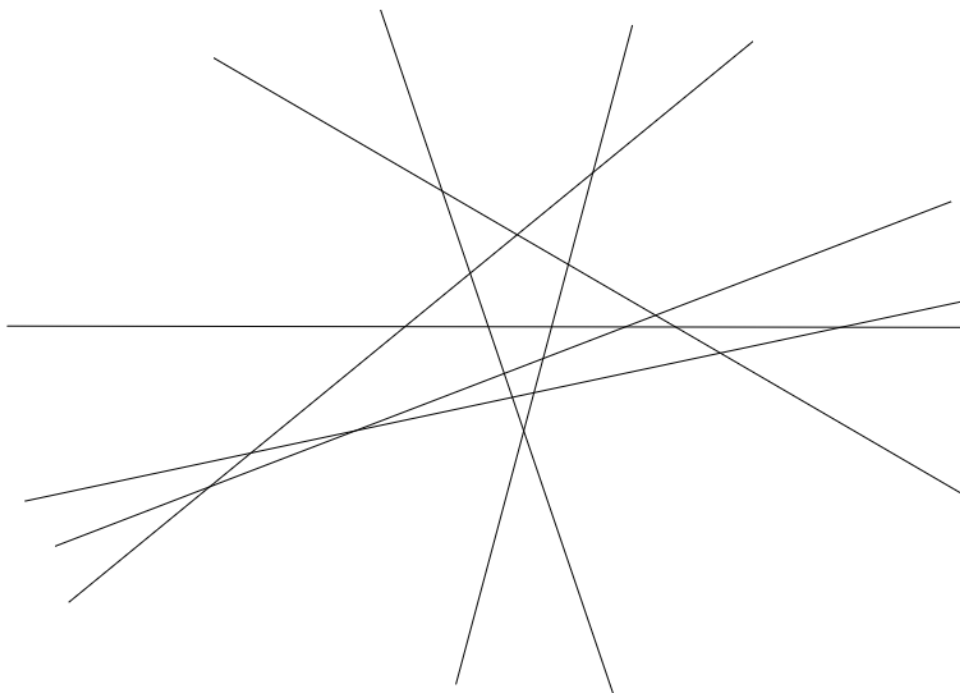


Figura 11 – Pizza de Steiner (7 retas e 29 regiões)

Ao longo da elaboração dessa dissertação, apliquei esse problema em algumas turmas do ensino médio, após esclarecer as regras e os objetivos do problema para os alunos, começamos a esboçar as primeiras retas, identificando e contabilizando as primeiras regiões e os primeiros pontos de intersecções, fomos registrando os primeiros resultados em tabelas e através da sequência dos valores apresentados, os alunos identificaram a relação de recorrência observando os intervalos entre os números, o que permitiu equacionar e elaborar a lei de formação do Problema da Pizza de Steiner.

A primeira tabela obtida foi:

Retas	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Regiões	1	2	4	7	11	16	22	29	...

Diante da sequência do números de regiões obtidas (1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, ...), em cada sala de aula, um dos alunos percebia visualmente o padrão após analisar os intervalos entre os valores e informava aos demais alunos:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & - & 2 & - & 4 & - & 7 & - & 11 & - & 16 & - & 22 & - & 29 & \dots \\ \hline & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & \dots \end{array}$$

O padrão foi citado pelos alunos das seguintes formas:

- O número de regiões está aumentando de acordo com a sequência dos números naturais.
- O acréscimo de regiões a partir de uma nova reta traçada segue a sequência dos números naturais.
- Aumentou 1, aumentou 2, aumentou 3, aumentou 4, aumentou 5, aumentou 6, ...

A partir da tabela, equacionamos a lei de formação.

Sendo R_n o número de regiões obtidas e n o número de retas traçadas, temos:

$$R_0 = 1$$

$$R_1 = R_0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$R_2 = R_1 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$R_3 = R_2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$R_4 = R_3 + 4 = 7 + 4 = 11$$

$$R_5 = R_4 + 5 = 11 + 5 = 16$$

$$R_6 = R_5 + 6 = 16 + 6 = 22$$

$$R_7 = R_6 + 7 = 22 + 7 = 29$$

$\vdots$

$$R_n = R_{n-1} + n$$

$$R_{n+1} = R_n + (n + 1)$$

Portanto, a equação acima é a lei de formação para o Problema da Pizza de Steiner.

Apenas com a equação de lei de formação ainda não é possível determinar o número de regiões obtidas de acordo com o número de retas traçadas (para qualquer número de retas), para isso precisamos resolver a recorrência e obter a sua fórmula fechada:

$$R_0 = 1$$

$$R_1 = R_0 + 1$$

$$R_2 = R_1 + 2$$

$$R_3 = R_2 + 3$$

$$R_4 = R_3 + 4$$

$\vdots$

$$R_{n-2} = R_{n-3} + (n - 2)$$

$$R_{n-1} = R_{n-2} + (n - 1)$$

$$R_n = R_{n-1} + n$$

Somando, resulta:

$$R_n = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n$$

$$R_n = 1 + \frac{(1+n)n}{2} = \frac{2}{2} + \frac{n^2+n}{2}$$

$$R_n = \frac{n^2+n+2}{2}$$

Agora com a solução da recorrência (que é a sua fórmula fechada), podemos determinar o número de regiões obtidas de acordo com o número de retas traçadas (para qualquer número de retas).

Para $n = 7$ retas, por exemplo, temos:

$R_7 = \frac{7^2+7+2}{2} = \frac{49+7+2}{2} = \frac{58}{2} = 29$ regiões (como já avinhamos encontrado pelo desenho e pela tabela).

Para $n = 10$ retas, por exemplo, temos:

$$R_{10} = \frac{10^2+10+2}{2} = \frac{100+10+2}{2} = \frac{112}{2} = 56 \text{ regiões.}$$

Para $n = 100$ retas, seria um pouco trabalhoso esboçar o desenho com as 100 retas traçadas, visualizar e contabilizar o número de regiões obtidas, mas utilizando a solução da recorrência, obtemos rapidamente esse valor:

$$R_{100} = \frac{100^2 + 100 + 2}{2} = \frac{10000 + 100 + 2}{2} = \frac{10102}{2} = 5051 \text{ regiões.}$$

O Problema da Pizza de Steiner, apesar de bastante conhecido, reduzia-se apenas em determinar qual seria o número máximo de regiões obtidas à medida que as retas iriam sendo traçadas de acordo com as regras iniciais do problema, mas à medida que realizei os primeiros desenhos, juntamente com os alunos, encontramos outras relações de recorrências, assim analisamos cada padrão encontrado, também de forma recursiva e ampliamos a proposta inicial do problema.

Os padrões encontrados foram:

- Número de Regiões Abertas (Sequência dos Números Pares), exceto o caso com zero retas, que é o próprio plano original, onde temos 1 região aberta:

Retas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Regiões abertas	1	2	4	6	8	10	12	14	16	...

- Número de Regiões Fechadas ou Limitadas (Sequência dos Números Triangulares), para $n \geq 3$:

Retas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Regiões fechadas	0	0	0	1	3	6	10	15	21	28	...

- Número de Pontos de Intersecção de Retas (Sequência dos Números Triangulares), para $n \geq 2$:

Retas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Pontos de intersecção	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	...

Utilizando o Problema da Pizza de Steiner em sala de aula, além de contabilizar o número máximo de regiões obtidas à medida que as retas estão sendo traçadas (proposta inicial do problema), podemos contabilizar com os alunos, o número de regiões abertas e fechadas e o número de pontos de intersecção de retas também de forma recursiva.

O Problema da Pizza de Steiner é o mais indicado para introduzir o estudo das recorrências no ensino básico da matemática, além de ser um problema geométrico, que envolve os conceitos básicos da geometria (ponto, reta e plano), esse problema também esclarece muito bem o objetivo, a estrutura e a maneira de resolver uma recorrência, permitindo que os alunos possam resolver outros problemas semelhantes ou mais elaborados, utilizando as resoluções por recorrência.

6 Número de Diagonais de um Polígono Convexo

Vamos obter uma equação de forma recursiva, o qual permite calcular o número de diagonais de um polígono convexo qualquer, vamos representar por d_n , o número de diagonais de um polígono de n lados.

Essa maneira é uma alternativa interessante que pode ser usada nas aulas de matemática no ensino básico, desenhando os quatro primeiros polígonos convexos com suas diagonais, podemos fazer com que os alunos de forma intuitiva, percebam o seguinte padrão de recorrência:

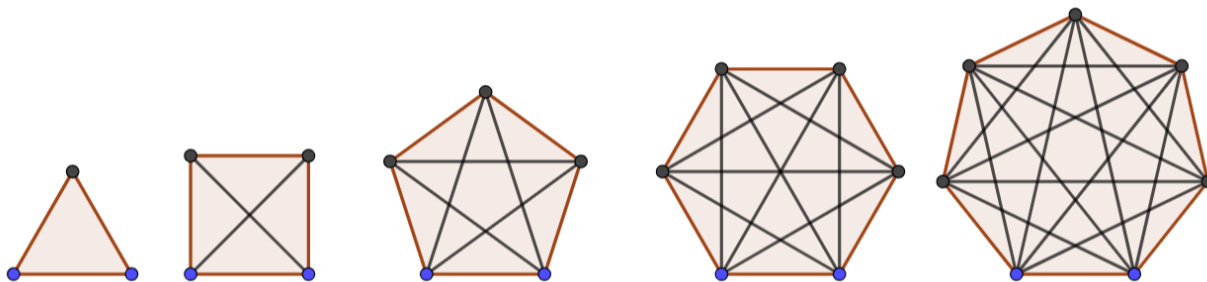


Figura 12 – Número de Diagonais de um Polígono Convexo

- O triângulo não possui diagonais;
- O quadrilátero possui 2 diagonais (2 a mais que o triângulo);
- O pentágono possui 5 diagonais (3 a mais que o quadrilátero);
- O hexágono possui 9 diagonais (4 a mais que o pentágono);

Assim, de forma intuitiva, concluimos que o heptágono terá 14 diagonais (5 a mais que o hexágono). O processo irá se manter com a sequência dos polígonos convexos, o que permitirá elaborar recursivamente a sua lei de formação.

A medida que o número de lados vai aumentando, cada polígono terá o número de diagonais do polígono anterior mais $(n - 2)$ diagonais, ou seja:

- O quadrado (4 lados) teve um acréscimo de $(4 - 2 = 2)$ diagonais em relação ao triângulo;
- O pentágono (5 lados) teve um acréscimo de $(5 - 2 = 3)$ diagonais em relação ao quadrado;
- O hexágono (6 lados) teve um acréscimo de $(6 - 2 = 4)$ diagonais em relação ao pentágono;
- O heptágono (7 lados) teve um acréscimo de $(7 - 2 = 5)$ diagonais em relação ao hexágono;

Assim, temos:

$$d_n = d_{n-1} + (n - 2), \text{ com } d_3 = 0 \text{ e } n \geq 3, \text{ que equivale a}$$

$$d_{n+1} = d_n + (n - 1), \text{ com } d_3 = 0 \text{ e } n \geq 3$$

Resolvendo a recorrência chegamos na fórmula para calcular o número de diagonais de um polígono convexo qualquer:

$$d_3 = 0$$

$$d_4 = d_3 + 2$$

$$d_5 = d_4 + 3$$

$$d_6 = d_5 + 4$$

$$d_7 = d_6 + 5$$

$$\vdots$$

$$d_{n-1} = d_{n-2} + (n - 3)$$

$$d_n = d_{n-1} + (n - 2)$$

note que temos $(n - 3)$ equações de d_4 até d_n , somando as $(n - 3)$ equações, obtemos:

$$d_n = 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n - 3) + (n - 2)$$

$$d_n = \frac{[2+(n-2)](n-3)}{2}$$

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

E $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ é a equação ou a fórmula que permite calcular o número de diagonais de um polígono convexo qualquer de n lados.

7 Soma dos Ângulos Internos de um Polígono Convexo

Vamos obter uma equação de forma recursiva, o qual permite calcular a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer, vamos representar por S_n , a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados.

Essa maneira é uma alternativa interessante que pode ser usada nas aulas de matemática no ensino básico, desenhando os quatro primeiros polígonos convexos e dividindo esses em polígonos em triângulos, podemos fazer com que os alunos de forma intuitiva, percebam o seguinte padrão de recorrência:

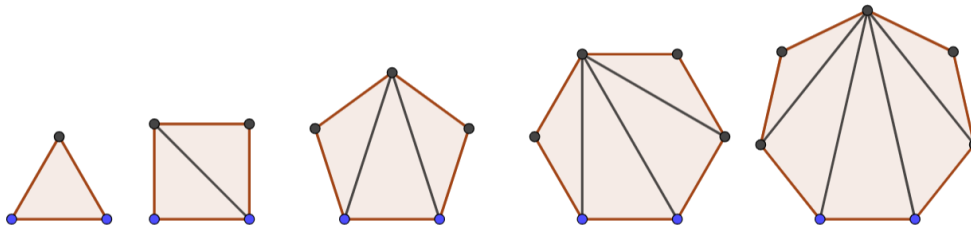


Figura 13 – Soma dos Ângulos Internos de um Polígono Através de Triângulos

Como já sabemos, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180° .

Podemos dividir um quadrilátero qualquer, traçando uma diagonal e assim obtemos dois triângulos, a soma dos ângulos internos do quadrilátero será $180^\circ + 180^\circ$ ou $2 \cdot 180^\circ$.

Podemos dividir um pentágono qualquer, traçando duas diagonais, partindo do mesmo vértice e assim obtemos três triângulos, a soma dos ângulos internos do pentágono será $180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$ ou $3 \cdot 180^\circ$.

Podemos dividir um hexágono qualquer, traçando três diagonais, partindo do mesmo vértice e assim obtemos quatro triângulos, a soma dos ângulos internos do hexágono será $180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$ ou $4 \cdot 180^\circ$.

Assim, de forma intuitiva, concluímos que podemos dividir um heptágono qualquer, traçando quatro diagonais, partindo do mesmo vértice e assim obtemos cinco triângulos e a soma dos ângulos internos do heptágono será $180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$ ou $5 \cdot 180^\circ$. O processo irá se manter com a sequência dos polígonos convexos, o que permitirá elaborar recursivamente a sua lei de formação.

Em cada novo polígono convexo, a soma dos ângulos internos é igual a soma dos ângulos internos do polígono anterior com um aumento de 180° :

$$S_{n+1} = S_n + 180^\circ, \text{ com } S_3 = 180^\circ \text{ e para } n \geq 3.$$

Resolução:

$$S_3 = 180^\circ$$

$$S_4 = S_3 + 180^\circ$$

$$S_5 = S_4 + 180^\circ$$

$$S_6 = S_5 + 180^\circ$$

$$S_7 = S_6 + 180^\circ$$

$\vdots$

$$S_{n-1} = S_{n-2} + 180^\circ$$

$$S_n = S_{n-1} + 180^\circ$$

note que temos $(n - 2)$ equações de S_3 até S_n , somando as $(n - 2)$ equações, obtemos:

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

E $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ é a equação ou a fórmula que permite calcular a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer de n lados.

As deduções das fórmulas para calcular o número de diagonais e para calcular a soma dos ângulos internos de forma recursiva, são ideais para o aluno perceber que é capaz de montar uma fórmula e não apenas utilizá-la já montada, com isso a aprendizagem pode atingir um resultado maior, incentivando assim, a montagem de outras fórmulas quando possível, também de forma recursiva.

8 Recorrências no Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal tem diversas aplicações no ramo da análise combinatória e probabilidade (HAZZAN; HAZZAN, 1993), facilitando cálculos através das suas propriedades, além disso, podemos utilizar o Triângulo de Pascal no estudo das recorrências, é possível identificar visualmente e algebricamente diversas sequências recursivas no Triângulo de Pascal, a seguir vamos apresentar algumas delas.

Maiores detalhes sobre a Teoria do Triângulo de Pascal, podem ser vistos nos livros que utilizamos como referências para a elaboração desse material, os Títulos constam na seção (Referências).

8.1 A 3ª Coluna e a 3ª Diagonal - Números Triangulares

A sequência dos números triangulares é uma sequência recursiva e está presente no Triângulo de Pascal, a terceira coluna e a terceira diagonal é formada pela sequência dos números triangulares, como vemos destacado de vermelho na Figura 14:

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	1

Figura 14 – Números Triangulares Presentes no Triângulo de Pascal

8.2 A 4ª Coluna e a 4ª Diagonal - Números Tetraédricos

Um número tetraédrico ou número piramidal triangular, é um número figurado que pode ser representado por uma pirâmide de base triangular com quatro faces regulares (tetraedro), como vemos na Figura 15:



Figura 15 – Números Tetraédricos - Foto (Acervo Pessoal)

Na Figura 15 temos o número 20, que é o 4º número tetraédrico, formado pela soma dos quatro primeiros números triangulares ($1+3+6+10=20$).

A sequência dos números tetraédricos é uma sequência recursiva e está presente no Triângulo de Pascal, a quarta coluna e a quarta diagonal é formada pela sequência dos números tetraédricos, como vemos destacado de vermelho na Figura 16:

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	1

Figura 16 – Números Tetraédricos Presentes no Triângulo de Pascal

A 4ª coluna e a 4ª diagonal é formada pelos números tetraédricos, que são as somas dos números triangulares de acordo com a respectiva ordem:

- o 2º número da 4ª coluna é a soma dos dois primeiros números triangulares,
- o 3º número da 4ª coluna é a soma dos três primeiros números triangulares,
- o 4º número da 4ª coluna é a soma dos quatro primeiros números triangulares,
- o 5º número da 4ª coluna é a soma dos cinco primeiros números triangulares,
- ⋮

O enésimo número da 4ª coluna é a soma dos n primeiros números triangulares, de fato, veremos isso a partir da recorrência;

Veja:

$$01 = 1$$

$$04 = 1+3$$

$$10 = 1+3+6$$

$$20 = 1+3+6+10$$

$$35 = 1+3+6+10+15$$

$$56 = 1+3+6+10+15+21$$

$$84 = 1+3+6+10+15+21+28$$

⋮

$$T_n = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + \dots + \frac{n(1+n)}{2}$$

Montando a sequência de equações de forma recursiva e resolvendo a recorrência:

$$T_1 = 1$$

$$T_2 = T_1 + 3$$

$$T_3 = T_2 + 6$$

$$T_4 = T_3 + 10$$

$$T_5 = T_4 + 15$$

$$T_6 = T_5 + 21$$

$$T_7 = T_6 + 28$$

⋮

$$T_{n-1} = T_{n-2} + \frac{(1+(n-1))(n-1)}{2}$$

$$T_n = T_{n-1} + \frac{(1+n)n}{2}$$

Somando as equações, obtemos:

$$T_n = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + \dots + \frac{(1+n)n}{2}$$

Note que a soma acima, não é uma soma de P.A. e não é uma soma de P.G., como estamos trabalhando com o Triângulo de Pascal, vamos aplicar a Propriedade das Colunas do Triângulo de Pascal (veja as Figuras 17 e 18), para realizar essa soma.

Segundo a propriedade, a soma dos binomiais de uma coluna, com início no primeiro elemento, tem como resultado o binomial à direita da linha abaixo do último elemento que foi somado, então:

$$T_n = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + \dots + \frac{(1+n)n}{2}$$

$$T_n = C_{2,2} + C_{3,2} + C_{4,2} + C_{5,2} + C_{6,2} + C_{7,2} + C_{8,2} + \dots + C_{n+1,2} = C_{n+2,3}$$

$$T_n = C_{n+2,3} = \frac{(n+2)!}{3!(n+2-3)!} = \frac{(n+2)!}{6(n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)!}{6(n-1)!}$$

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

E $T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ é a fórmula fechada para encontrar qualquer número tetraédrico e a posição que ele ocupa dentro da sequência.

É interessante perceber que além dos recursos utilizados nos exercícios de análise combinatória, o Triângulo de Pascal também contribui para as resoluções dos exercícios de recorrência.

1									
1	1								
1	2	1+							
1	3	3+	1						
1	4	6+	4	1					
1	5	10+	10	5	1				
1	6	15+	20	15	6	1			
1	7	21+	35	35	21	7	1		
1	8	28+	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	=84	126	126	84	36	9	1

Figura 17 – Propriedade das Colunas do Triângulo de Pascal

$C_{0,0}$		Números Triangulares	Números tetraedros
$C_{1,0}$	$C_{1,1}$		
$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$1^o = C_{2,2}$	+
$C_{3,0}$	$C_{3,1}$	$2^o = C_{3,2}$	+ $C_{3,3}$
$C_{4,0}$	$C_{4,1}$	$3^o = C_{4,2}$	+ $C_{4,3}$
$C_{5,0}$	$C_{5,1}$	$4^o = C_{5,2}$	+ $C_{5,3}$
...	...	...	+ ...
$C_{n,0}$	$C_{n,1}$	$(n-1)^o = C_{n,2}$	+ $C_{n,3}$
$C_{n+1,0}$	$C_{n+1,1}$	$(n)^o = C_{n+1,2}$	+ $C_{n+1,3}$
$C_{n+2,0}$	$C_{n+2,1}$	$C_{n+2,2}$	= $C_{n+2,3}$

Figura 18 – Propriedade das Colunas do Triângulo de Pascal

Prova por Indução

Vamos mostrar por Indução que a igualdade

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

é verdadeira:

Seja $P(n) : 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

i) $P(1)$ é verdadeira, visto que $\frac{1(1+1)(1+2)}{6} = \frac{6}{6} = 1$

ii) Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira, para algum n natural. Isto significa que, para este valor de n , temos:

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Somando o próximo termo do somatório, $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, em ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Agora devemos manipular a expressão no segundo membro, de modo a torná-la igual a:

$$\frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

De fato, temos:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

Portanto:

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

o que mostra que $P(n+1)$ é verdadeira;

Assim $P(n)$ implica $P(n+1)$, para todo n natural;

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, $P(n)$ é verdadeira para todo n natural.

8.3 Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci, $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots)$, é uma recorrência linear de 2ª ordem, onde cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos anteriores, sendo que os dois primeiros termos são iguais a 1, descrevendo isso na forma de equação, temos:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ com } F_1 = 1 \text{ e } F_2 = 1.$$

A sequência de Fibonacci é uma sequência recursiva e está presente no Triângulo de Pascal.

A soma dos números de cada uma das diagonais secundárias do triângulo de Pascal, gera a sequência de Fibonacci, como vemos na Figura 19:

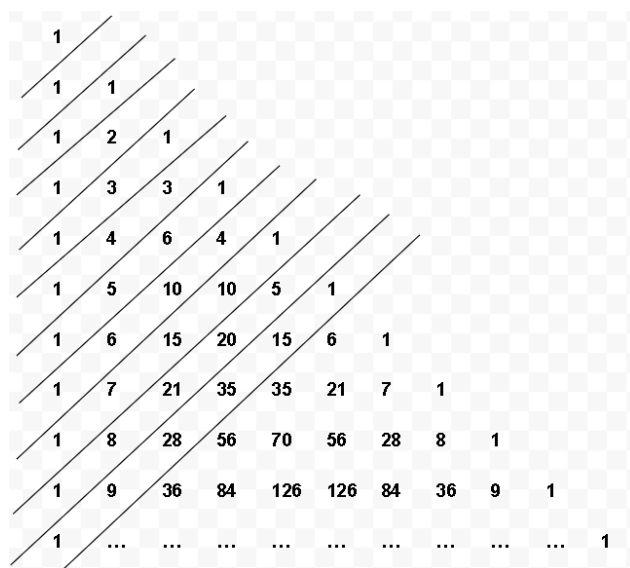


Figura 19 – Diagonais Secundárias do Triângulo de Pascal

Soma dos números por diagonal	Sequência de Fibonacci
1	1
1	1
1+1	2
1+2	3
1+3+1	5
1+4+3	8
1+5+6+1	13
1+6+10+4	21
1+7+15+10+1	34
1+8+21+20+5	55
1+9+28+35+15+1	89
⋮	⋮

8.4 Progressão Geométrica de Razão 2

A progressão geométrica de razão 2 e termo inicial 1 é uma sequência recursiva e está presente no Triângulo de Pascal.

A soma dos números de cada linha do Triângulo de Pascal tem como resultado uma potência de 2 e a sequência dessas somas é a sequência das potências de 2, de acordo com a sequência das linhas, como vemos na tabela:

Soma dos números por linha	Sequência das potências de 2
1	$1 = 2^0$
1+1	$2 = 2^1$
1+2+1	$4 = 2^2$
1+3+3+1	$8 = 2^3$
1+4+6+4+1	$16 = 2^4$
1+5+10+10+5+1	$32 = 2^5$
1+6+15+20+15+6+1	$64 = 2^6$
1+7+21+35+35+21+7+1	$128 = 2^7$
$\vdots$	$\vdots$

A 1ª linha (linha 0) possui 1 números, cuja soma é 2^0 ou 1.

A 2ª linha (linha 1) possui 2 números, cuja soma é 2^1 ou 2.

A 3ª linha (linha 2) possui 3 números, cuja soma é 2^2 ou 4.

A 4ª linha (linha 3) possui 4 números, cuja soma é 2^3 ou 8.

A 5ª linha (linha 4) possui 5 números, cuja soma é 2^4 ou 16.

$\vdots$

A enésima (linha $(n - 1)$) possui n números, cuja soma 2^{n-1} .

A enésima-primeira (linha n) possui $(n + 1)$ números, cuja soma 2^n .

Essa relação é mais conhecida como o Teorema das Linhas do Triângulo de Pascal e consta no Apêndice deste trabalho.

8.5 Números de Mersenne

Os números de Mersenne são os números da forma $M_n = 2^n - 1$

$$(1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, \dots)$$

A forma $M_n = 2^n - 1$ já é a fórmula fechada para a sequência dos números de Mersenne (HEFEZ, 2016), mas vamos mostrar como obtê-la recursivamente. Um fato interessante é que a sequência dos números de Mersenne é uma sequência recursiva e também está presente no Triângulo de Pascal da seguinte forma:

O único número da 1ª linha é o 1º número de Mersenne, que é o número 1;

A soma dos números das 2 primeiras linhas gera o 2º número de Mersenne, que é o número 3;

A soma dos números das 3 primeiras linhas gera o 3º número de Mersenne, que é o número 7;

A soma dos números das 4 primeiras linhas gera o 4º número de Mersenne, que é o número 15;

A soma dos números das 5 primeiras linhas gera o 5º número de Mersenne, que é o número 31;

$\vdots$

A soma dos números das n primeiras linhas gera o n ésimo número de Mersenne, de fato, veremos isso a partir da recorrência;

Veja:

1

1ª linha (1 número), cuja soma é o próprio 1.

1

1 , 1

Duas primeiras linhas (3 números), cuja soma é 3.

$$1 + 2^{2-1} = 1 + 2 = 3$$

1

1 , 1

1 , 2 , 1

Três primeiras linhas (6 números), cuja soma é 7.

$$3 + 2^{3-1} = 3 + 4 = 7$$

1

1 , 1

1 , 2 , 1

1 , 3 , 3 , 1

Quatro primeiras linhas (10 números), cuja soma é 15.

$$7 + 2^{4-1} = 7 + 8 = 15$$

1

1 , 1

1 , 2 , 1

1 , 3 , 3 , 1

1 , 4 , 6 , 4 , 1

Cinco primeiras linhas (15 números), cuja soma é 31.

$$15 + 2^{5-1} = 15 + 16 = 31$$

Veja que cada nova soma (ou cada novo número de Mersenne) é obtida somando o valor da soma anterior (ou o número de Mersenne anterior) com a soma dos números da última linha (ou linha $(n - 1)$), cujo valor coincide com 2^{n-1} , com essa relação podemos elaborar a lei de formação para a recorrência da sequência dos números de Mersenne, que é igual a:

$$M_n = M_{n-1} + 2^{n-1}, \text{ que equivale a}$$

$$M_{n+1} = M_n + 2^n, \text{ com } M_1 = 1$$

Resolvendo a recorrência:

$$M_1 = 1$$

$$M_2 = M_1 + 2^1$$

$$M_3 = M_2 + 2^2$$

$$M_4 = M_3 + 2^3$$

$\vdots$

$$M_{n-3} = M_{n-4} + 2^{n-4}$$

$$M_{n-2} = M_{n-3} + 2^{n-3}$$

$$M_{n-1} = M_{n-2} + 2^{n-2}$$

$$M_n = M_{n-1} + 2^{n-1}$$

Somando, resulta:

$$M_n = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-4} + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1}$$

Note que temos uma soma de termos de uma P.G. de razão 2, com $a_1 = 1$ e n termos.

$$M_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$M_n = 2^n - 1$$

Através da resolução da recorrência chegamos na forma do número de Mersenne ($M_n = 2^n - 1$), que citamos inicialmente.

O 20º número de Mersenne por exemplo ou a soma dos números das vinte primeiras linhas do Triângulo de Pascal é:

$$M_{20} = 2^{20} - 1 = 1.048.576 - 1 = 1.048.575 \text{ ou } S_{20} = 1.048.575$$

Esses são alguns exemplos, utilizando o Triângulo de Pascal, os números figurados e os cálculos por recorrência, que podem ser trabalhados em sala de aula pelos professores de matemática.

9 Matemática Financeira

Os cálculos de juros sobre juros de investimentos, financiamentos, compras a prazo, empréstimos e outras operações financeiras são progressões geométricas e progressões geométricas são recorrências lineares de primeira ordem homogêneas (MORGADO; CARVALHO, 2015), uma alternativa interessante para os professores é mostrar para os alunos esse tipo de cálculo de forma recursiva.

Antes de resolver qualquer cálculo financeiro na sala de aula com os alunos que envolve juros sobre juros, devemos esclarecer de forma intuitiva a ideia que:

Quando a taxa de juros é 1% $\rightarrow$ multiplicamos por 1,01

Quando a taxa de juros é 2% $\rightarrow$ multiplicamos por 1,02

Quando a taxa de juros é 0,5% $\rightarrow$ multiplicamos por 1,005

Quando a taxa de juros é 1,5% $\rightarrow$ multiplicamos por 1,015

Quando a taxa de juros é 10% $\rightarrow$ multiplicamos por 1,10

Quando a taxa de juros é 15% $\rightarrow$ multiplicamos por 1,15

Vamos mostrar de forma recursiva, como uma quantia inicial se comporta em um investimento que rende 1% ao mês:

Chamamos a quantia inicial ou o capital inicial de c , portanto o 1º termo da sequência ou da recorrência será c , ou seja, $X_1 = c$.

Sabemos que quando uma quantia rende 1% ao mês, multiplicamos essa quantia inicial c por 1,01 sucessivamente (mês a mês) até atingir a quantia final desejada.

Assim a lei de formação da recorrência será:

$$X_{n+1} = X_n \cdot 1,01$$

Cada novo valor é igual ao anterior acrescido de 1%.

Resolvendo a recorrência:

$$X_1 = c$$

$$X_2 = X_1 \cdot 1,01$$

$$X_3 = X_2 \cdot 1,01$$

$\vdots$

$$X_{n-1} = X_{n-2} \cdot 1,01$$

$$X_n = X_{n-1} \cdot 1,01$$

Multiplicando as equações, obtemos:

$$X_n = c \cdot 1,01^{n-1}$$

Portanto, a fórmula fechada para um investimento que rende 1% ao mês com um capital inicial c é igual a:

$$X_n = c \cdot 1,01^{n-1}$$

Assim, uma quantia de 100 reais aplicada 12 meses (1 ano) em um investimento que rende 1% ao mês, será igual a:

$$X_{12} = 100 \cdot 1,01^{12-1} = 100 \cdot 1,01^{11} = 100 \cdot 1,1156683467 = 111,56683467 \approx 111,57 \text{ reais.}$$

A disciplina Educação Financeira foi incluída no currículo do Novo Ensino Médio e deve ser ministrada por professores de matemática, como o objetivo principal da utilização das recorrências é descobrir qualquer termo de uma sequência apenas informando a sua posição, podemos calcular o valor de qualquer rendimento ou qualquer prestação de uma operação financeira de forma direta com o uso das recorrências.

10 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Uma recorrência da forma $X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$ é uma (Recorrência Linear Homogênea com Coeficientes Constantes de 2ª Ordem), porque os coeficientes de X_n e X_{n-1} são constantes (A e B respectivamente), é linear porque X_{n+1} , X_n e X_{n-1} , que são os termos da recorrência, tem como expoentes o número 1, é homogênea porque não possui nenhuma parte adicional (não possui nenhum termo independente), e é de 2ª ordem porque o X_{n+1} depende de X_n e também de X_{n-1} , ou seja, de dois termos anteriores.

Na recorrência $X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$, logicamente devemos ter $B \neq 0$, caso contrário, ela seria de 1ª ordem.

Resolvemos uma recorrência de 2ª ordem da forma:

$$X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$$

Observe a recorrência da forma $X_{n+1} = Q.X_n$, como já sabemos, ela é uma recorrência linear homogênea de 1ª ordem, onde Q é o coeficiente de X_n , é linear porque tanto o X_{n+1} quanto o X_n , que são os termos da recorrência, tem como expoentes o número 1, é homogênea porque não possui nenhuma parte adicional (não possui nenhum termo independente), e é de 1ª ordem porque o X_{n+1} depende apenas de X_n .

Observe também que a recorrência $X_{n+1} = Q.X_n$, trata-se de uma progressão geométrica, que tem como solução ou fórmula fechada, a equação:

$$X_n = c_1.Q^{n-1}$$

Onde c_1 é o termo inicial da P.G. e Q é a razão da P.G.

Como $X_{n+1} = Q.X_n$ e $X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$, possuem características semelhantes, diferenciando apenas em relação a ordem, e como já sabemos que $X_n = c_1.Q^{n-1}$ é solução da recorrência de 1ª ordem, podemos considerar que $X_n = c_1.Q^{n-1}$ também seja uma possível solução da recorrência de 2ª ordem.

Então vamos substituir $X_n = c_1.Q^{n-1}$ em $X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$, considerando também que $X_{n+1} = c_1.Q^n$ e $X_{n-1} = c_1.Q^{n-2}$, assim:

$$X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$$

será

$$c_1.Q^n = A.c_1.Q^{n-1} + B.c_1.Q^{n-2}$$

Dividindo $c_1.Q^n = A.c_1.Q^{n-1} + B.c_1.Q^{n-2}$ por $c_1.Q^{n-2}$:

$$\frac{c_1.Q^n}{c_1.Q^{n-2}} = A.\frac{c_1.Q^{n-1}}{c_1.Q^{n-2}} + B.\frac{c_1.Q^{n-2}}{c_1.Q^{n-2}}$$

$$Q^2 = A.Q + B$$

$$Q^2 - A.Q - B = 0$$

Veja que chegamos em uma equação do 2º grau, resolvendo $Q^2 - A.Q - B = 0$ e considerando Δ positivo, encontraremos duas raízes distintas, que chamaremos de r_1 e r_2 .

Toda recorrência linear de 2ª ordem, com coeficientes constantes, da forma

$X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$, pode ser associada uma equação do 2º grau, como fizemos acima

$Q^2 = A.Q + B \Rightarrow Q^2 - A.Q - B = 0$, chamada Equação Característica.

Para o caso do discriminante positivo, teremos duas possíveis soluções:

Uma possível solução em função de $Q_1 = r_1$:

$$X_n = c_1.Q_1^{n-1} \Rightarrow X_n = c_1.r_1^{n-1}$$

$$\text{e } X_{n+1} = c_1.r_1^n \text{ e } X_{n-1} = c_1.r_1^{n-2}$$

E uma possível solução em função de $Q_2 = r_2$:

$$X_n = c_2.Q_2^{n-1} \Rightarrow X_n = c_2.r_2^{n-1}$$

$$\text{e } X_{n+1} = c_2.r_2^n \text{ e } X_{n-1} = c_2.r_2^{n-2}$$

Substituindo as respectivas igualdades acima em $X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$, temos:

$$X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$$

$$c_1.r_1^n = A.c_1.r_1^{n-1} + B.c_1.r_1^{n-2} \text{ e}$$

$$c_2.r_2^n = A.c_2.r_2^{n-1} + B.c_2.r_2^{n-2}$$

Somando as duas equações acima, temos:

$$\underbrace{c_1.r_1^n + c_2.r_2^n}_{X_n} = A.\underbrace{(c_1.r_1^{n-1} + c_2.r_2^{n-1})}_{X_{n-1}} + B.\underbrace{(c_1.r_1^{n-2} + c_2.r_2^{n-2})}_{X_{n-2}}$$

Assim a solução parcial será:

$$X_n = c_1.r_1^n + c_2.r_2^n$$

Onde r_1 e r_2 são as raízes da equação característica $Q^2 - A.Q - B = 0$

Dizemos que a solução X_n é uma combinação linear das soluções $(c_1.r_1^n)$ e $(c_2.r_2^n)$;

Além da lei de formação $X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$, teremos a informação dos valores de X_1 e X_2 ;

Substituindo o valor de X_1 em $X_n = c_1.r_1^n + c_2.r_2^n$ e n por 1, obteremos uma 1ª equação;

Substituindo o valor de X_2 em $X_n = c_1.r_1^n + c_2.r_2^n$ e n por 2, obteremos uma 2ª equação;

Resolvendo o sistema com as duas equações acima, encontraremos os valores de c_1 e c_2 e finalmente teremos a solução completa para a recorrência de 2ª ordem, (esse último passo, será melhor compreendido através dos exemplos).

Assim cada recorrência de 2ª ordem da forma $X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$, terá solução da forma:

$$X_n = c_1.r_1^n + c_2.r_2^n$$

A prova que $X_n = c_1.r_1^n + c_2.r_2^n$ é válida para todo n natural, pode ser feita pelo Princípio da Indução Finita e consta no Apêndice desse trabalho.

- Caso ($r_1 = r_2$)

Na recorrência linear de 2ª ordem com coeficientes constantes $X_{n+2} + p.X_{n+1} + q.X_n = 0$, se as raízes de sua equação característica $r^2 + p.r + q = 0$ forem iguais ($r_1 = r_2 = r$), então X_n será uma combinação linear de $Y_n = r^n$ e $Z_n = n.r^n$:

$$X_n = c_1.Y_n + c_2.Z_n$$

$$X_n = c_1.r^n + c_2.n.r^n$$

A prova pode ser feita por Indução de forma análoga ao caso em que $r_1 \neq r_2$.

Exemplo 10.0.1. *Vamos resolver a recorrência:*

$$X_{n+2} = X_{n+1} + 20X_n, \text{ com } X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 2.$$

Antes de iniciar a resolução, vamos calcular alguns valores iniciais:

$$X_{n+2} = X_{n+1} + 20X_n$$

$$X_{1+2} = X_3 = X_{1+1} + 20X_1 = X_2 + 20X_1 = 2 + 20 \cdot 1 = 2 + 20 = 22$$

$$X_{2+2} = X_4 = X_{2+1} + 20X_2 = X_3 + 20X_2 = 22 + 20 \cdot 2 = 22 + 40 = 62$$

$$X_{3+2} = X_5 = X_{3+1} + 20X_3 = X_4 + 20X_3 = 62 + 20 \cdot 22 = 62 + 440 = 502$$

$$(1, 2, 22, 62, 502, \dots)$$

Resolução: A recorrência $X_{n+2} = X_{n+1} + 20X_n$ tem equação característica igual a $r^2 = 1r + 20$. Cujas soluções são $r_1 = -4$ e $r_2 = 5$. Substituindo $r_1 = -4$ e $r_2 = 5$ na solução da forma $X_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n$, temos:

$$X_n = c_1 \cdot (-4)^n + c_2 \cdot 5^n$$

Agora vamos encontrar os valores de c_1 e c_2 de acordo com $X_1 = 1$ e $X_2 = 2$:

$$X_1 = c_1 \cdot (-4)^1 + c_2 \cdot 5^1 = 1 \Rightarrow -4c_1 + 5c_2 = 1$$

$$X_2 = c_1 \cdot (-4)^2 + c_2 \cdot 5^2 = 2 \Rightarrow 16c_1 + 25c_2 = 2$$

Montando e resolvendo um sistema com as duas equações acima, temos:

$$\begin{cases} -4c_1 + 5c_2 = 1 \\ 16c_1 + 25c_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16c_1 + 20c_2 = 4 \\ 16c_1 + 25c_2 = 2 \end{cases}$$

$$45c_2 = 6 \Rightarrow c_2 = \frac{6}{45} \Rightarrow c_2 = \frac{2}{15}$$

$$-4c_1 + 5 \cdot \frac{2}{15} = 1 \Rightarrow -4c_1 + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow -4c_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{12}$$

Substituindo $c_1 = -\frac{1}{12}$ e $c_2 = \frac{2}{15}$ em $X_n = c_1 \cdot (-4)^n + c_2 \cdot 5^n$, temos a solução da recorrência:

$$X_n = -\frac{1}{12} \cdot (-4)^n + \frac{2}{15} \cdot 5^n$$

Agora vamos calcular novamente os termos iniciais com a solução ou a fórmula fechada da recorrência que encontramos:

$$X_n = -\frac{1}{12} \cdot (-4)^n + \frac{2}{15} \cdot 5^n$$

$$X_3 = -\frac{1}{12} \cdot (-4)^3 + \frac{2}{15} \cdot 5^3 = \frac{64}{12} + \frac{250}{15} = \frac{16}{3} + \frac{50}{3} = \frac{66}{3} = 22$$

$$X_4 = -\frac{1}{12} \cdot (-4)^4 + \frac{2}{15} \cdot 5^4 = -\frac{256}{12} + \frac{1250}{15} = -\frac{64}{3} + \frac{250}{3} = \frac{186}{3} = 62$$

$$X_5 = -\frac{1}{12} \cdot (-4)^5 + \frac{2}{15} \cdot 5^5 = \frac{1024}{12} + \frac{6250}{15} = \frac{256}{3} + \frac{1250}{3} = \frac{1506}{3} = 502$$

$$(1, 2, 22, 62, 502, \dots)$$

Para $n = 10$, temos:

$$X_{10} = -\frac{1}{12} \cdot (-4)^{10} + \frac{2}{15} \cdot 5^{10} = -\frac{1048576}{12} + \frac{19531250}{15} = -\frac{262144}{3} + \frac{3906250}{3} = \frac{3644106}{3} = 1214702$$

$$(1, 2, 22, 62, 502, X_6, X_7, X_8, X_9, 1214702, \dots)$$

10.1 A Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots),$$

possui a seguinte lei de formação:

Cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos anteriores, sendo que os dois primeiros termos são iguais a 1.

Equacionando temos, (LIMA et al., 1997):

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ com } F_1 = 1 \text{ e } F_2 = 1.$$

Resolução:

Associando a recorrência da Sequência de Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ com a sua equação característica $r^2 = 1r + 1$, temos:

$$r^2 - 1r - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-1) = 5$$

$$r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2.1} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Substituindo $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ na solução da forma $F_n = c_1.r_1^n + c_2.r_2^n$, temos:

$$F_n = c_1.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Agora vamos encontrar os valores de c_1 e c_2 de acordo com $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$:

$$F_1 = c_1.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$$

$$F_2 = c_1.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$$

Montando e resolvendo um sistema com as duas equações acima, temos:

$$\begin{cases} c_1.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ c_1.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 - c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ (1 - c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$-c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \frac{2-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[\frac{-1+\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{2}\right] = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)[\sqrt{5}] = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$c_2.\sqrt{5} = 1$$

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$c_1.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$c_1.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}}{5}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$c_1.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{10}{10} - \left(\frac{\sqrt{5}+5}{10}\right)$$

$$c_1.\left(\frac{5-5\sqrt{5}}{10}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

$$c_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{5(1-\sqrt{5})} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})} = \frac{5+5\sqrt{5}-\sqrt{5}-5}{5(1-5)} = \frac{4\sqrt{5}}{-4.5}$$

$$c_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Substituindo $c_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $c_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ em $F_n = c_1 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + c_2 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$, temos a solução da recorrência da Sequência de Fibonacci:

$$\begin{aligned} F_n &= -\frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ F_n &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] \\ F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] \end{aligned}$$

$$F_n = \frac{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}{\sqrt{5}}$$

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \dots)$$

A raiz positiva da equação característica $r^2 = 1r + 1$ da Sequência de Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ é conhecida como o Número de Ouro ou Razão Áurea, representado pela letra grega Φ :

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,6180339887\dots$$

Entre outras curiosidades, a taxa de crescimento dos números da sequência de Fibonacci, que é

$$\frac{F_{n+1}}{F_n},$$

tende ao Número de Ouro, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,6180339887\dots$$

Veja

$$\frac{2}{1} \rightarrow \frac{5}{3} \rightarrow \frac{13}{8} \rightarrow \frac{34}{21} \rightarrow \frac{89}{55} \rightarrow \dots \rightarrow \Phi$$

$$2 \rightarrow 1,6666\dots \rightarrow 1,625 \rightarrow 1,61904\dots \rightarrow 1,61818\dots \rightarrow \dots \rightarrow \Phi$$

10.2 Uma Recorrência com Dominós

- De quantas maneiras diferentes podemos cobrir um tabuleiro $2 \times n$, utilizando peças de um dominó?

Esse tabuleiro seria na verdade uma fileira formada por peças de dominó, teríamos peças em pé e peças deitadas, mas sempre respeitando o formato $2 \times n$.

Durante a elaboração dessa dissertação apliquei esse problema nas turmas de ensino médio da escola onde leciono, esse problema é ideal para mostrar para os alunos o conceito de recorrências de 2ª ordem, visto que sua resolução apresenta uma sequência clássica da matemática;

Os tabuleiros ou as fileiras das formas 2×1 , 2×2 , 2×3 , 2×4 , ..., $2 \times n$, terão 2 linhas e uma quantidade de colunas de acordo com o valor de n ;

Para cobrir um tabuleiro 2×1 ou 2×2 ou 2×3 ou 2×4 ou $2 \times n$, não importa a quantidade de peças de dominó que vamos utilizar, vamos preocupar apenas com a quantidade de maneiras diferentes que podemos cobrir os tabuleiros;

Mais uma vez, juntamente com os alunos, iniciei a resolução do problema através de desenhos e observando os primeiros casos:

- Desenhando o tabuleiro 2×1 , temos 1 maneira de cobrir o tabuleiro;
- Desenhando o tabuleiro 2×2 , visualizamos que existem 2 maneiras diferentes de cobrir o tabuleiro;
- Desenhando o tabuleiro 2×3 , visualizamos 3 maneiras diferentes de cobrir o tabuleiro;
- Antes de desenhar o tabuleiro 2×4 , a resposta mais provável seria que (existem 4 maneiras diferentes de cobrir o tabuleiro), mas não é o que acontece;
- Desenhando o tabuleiro 2×4 , visualizamos 5 maneiras de cobrir o tabuleiro;
- Desenhando o tabuleiro 2×5 , visualizamos 8 maneiras de cobrir o tabuleiro;
- Desenhando o tabuleiro 2×6 , visualizamos 13 maneiras de cobrir o tabuleiro;

Registrando os resultados dos primeiros casos em uma tabela, assim como no problema da Pizza de Steiner, podemos pedir aos alunos que identifiquem alguma relação de recorrência na sequência apresentada e que apontem quais são os próximos valores:

Tabuleiros	2×1	2×2	2×3	2×4	2×5	2×6	2×7	2×8	...
Nº de maneiras de cobrir	1	2	3	5	8	13	?	?	...

A sequência que vemos na tabela é a sequência de Fibonacci, onde cada termo a partir do 3º é a soma dos dois termos anteriores, portanto trata-se de uma recorrência de 2ª ordem;

Mesmo identificando a sequência de Fibonacci, o problema ainda não está resolvido, devemos elaborar a lei de formação e chegar na fórmula fechada que permitirá calcular diretamente o número de maneiras de cobrir um tabuleiro $2 \times n$, para qualquer valor de n , ou seja, para qualquer tamanho de tabuleiro formado por 2 linhas e n colunas;

Nesse problema vamos considerar os termos iniciais (1 e 2) e não (1 e 1) como de costume;

Após o estudo inicial desse problema, podemos oferecer aos alunos a seguinte estratégia para resolver o problema de forma recursiva, que trata-se de como inicia a posição da primeira ou das duas primeiras peças:

No tabuleiro 2×1 , a única peça de dominó está de pé;

No tabuleiro 2×2 , podemos cobri-lo com 2 peças deitadas ou 2 peças em pé;

No tabuleiro 2×3 , podemos começar a cobri-lo de duas maneiras:

1ª) Iniciando com 2 peças deitadas ou

2ª) Iniciando com 1 peça em pé.

→ Iniciando com 2 peças deitadas, resta verificar como se deve preencher o restante do tabuleiro, que será 1 forma;

→ Iniciando com 1 peça em pé, resta verificar como se deve preencher o restante do tabuleiro, que será 2 formas;

→ Ao todo temos $1 + 2 = 3$ formas de preenchimento para o tabuleiro 2×3 .

No tabuleiro 2 x 4, pensamos da mesma forma:

→ Iniciando com 2 peças deitadas, resta verificar como se deve preencher o restante do tabuleiro, esse restante é justamente um tabuleiro 2 x 2, que como já sabemos, existem 2 formas de preenchimento;

→ Iniciando com 1 peça em pé, resta verificar como se deve preencher o restante do tabuleiro, esse restante é justamente um tabuleiro 2 x 3, que como já sabemos, existem 3 formas de preenchimento;

→ Portanto temos $2 + 3 = 5$ formas de preenchimento para o tabuleiro 2 x 4.

Esse processo pode ser usado para todos os seguintes tabuleiros:

No tabuleiro 2 x 5 :

→ iniciando com 2 peças deitadas, o restante é um tabuleiro 2 x 3, que terá 3 formas,

→ iniciando com 1 peça em pé, o restante é um tabuleiro 2 x 4, que terá 5 formas,

→ portanto teremos $3 + 5 = 8$ formas de preenchimento para o tabuleiro 2 x 5.

No tabuleiro 2 x 6, teremos:

5 formas de cobrir referentes ao tabuleiro 2 x 4 (iniciando com 2 peças deitadas) e

8 formas de cobrir referentes ao tabuleiro 2 x 5 (iniciando com 1 peça em pé),

ou seja, $5 + 8 = 13$ formas.

Generalizando essa ideia, temos:

O número de maneiras diferentes de cobrir um tabuleiro (2 por n) é igual ao número de maneiras de cobrir um tabuleiro (2 por $n - 1$) mais o número de maneiras de cobrir um tabuleiro (2 por $n - 2$).

Sendo X_n o número de maneiras diferentes de cobrir um tabuleiro (2 por n), X_{n-1} o número de maneiras de cobrir um tabuleiro (2 por $n - 1$) e X_{n-2} o número de maneiras de cobrir um tabuleiro (2 por $n - 2$), temos a lei de formação da recorrência de 2ª ordem referente ao problema:

$$X_n = X_{n-1} + X_{n-2} , \text{ com } X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 2.$$

Como resolvemos essa recorrência no exemplo anterior, podemos aproveitar a solução:

$$X_n = \frac{[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]}{\sqrt{5}}$$

Porém no exemplo anterior consideramos $X_1 = 1$ e $X_2 = 1$ como termos iniciais e agora consideramos $X_1 = 1$ e $X_2 = 2$, assim a fórmula fechada será:

$$X_n = \frac{[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]}{\sqrt{5}}$$

Para o tabuleiro 2 x 5 ($n = 5$), como exemplo, temos:

$$\begin{aligned} X_5 &= \frac{[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{5+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{5+1}]}{\sqrt{5}} = \frac{[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^6 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^6]}{\sqrt{5}} \\ X_5 &= \frac{[(\frac{6+2\sqrt{5}}{4})^3 - (\frac{6-2\sqrt{5}}{4})^3]}{\sqrt{5}} = \frac{[(\frac{216+216\sqrt{5}+360+40\sqrt{5}}{64}) - (\frac{216-216\sqrt{5}+360-40\sqrt{5}}{64})]}{\sqrt{5}} \\ X_5 &= \frac{\frac{432\sqrt{5}+80\sqrt{5}}{64}}{\sqrt{5}} = \frac{512\sqrt{5}}{64} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{512}{64} \\ X_5 &= 8 \text{ formas.} \end{aligned}$$

Observe que o cálculo através da fórmula fechada, apesar de ser um pouco trabalhoso, sempre fornece um número inteiro positivo como resultado.

A seguir temos a tabela com o número de maneiras possíveis de cobrir os tabuleiros, até o tabuleiro 2 x 17:

Tabuleiros	2 x 1	2 x 2	2 x 3	2 x 4	2 x 5	2 x 6	2 x 7	2 x 8	2 x 9
Nº de maneiras de cobrir	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2 x 10	2 x 11	2 x 12	2 x 13	2 x 14	2 x 15	2 x 16	2 x 17	...
89	144	233	377	610	987	1597	2584	...

Com esse exemplo finalizamos o estudo das recorrências de 1ª e 2ª ordem, com o foco na aplicação nas aulas de matemática do ensino médio e finalizamos também a elaboração deste trabalho, onde abrangemos grande parte do estudo geral das recorrências.

Considerações Finais

De acordo com a orientação da coordenação nacional do PROFMAT e com a orientação inicial da Professora Gilcéia Souza, acreditamos que o objetivo principal do trabalho foi alcançado, que consistia em criar um material apropriado sobre as recorrências e as suas aplicações para os alunos do ensino médio.

Durante a elaboração, apliquei como teste em sala de aula, os exemplos e exercícios presentes neste trabalho, com resultados bem satisfatórios, principalmente em relação aos alunos que possuem aptidão com a matemática, confirmando que é perfeitamente possível introduzir o estudo das recorrências na matemática básica, mesmo sendo um assunto pouco conhecido.

Constatamos também a praticidade de usar o método recursivo no processo de construção de algumas fórmulas matemáticas que utilizamos com frequência em problemas algébricos e geométricos.

Podemos relacionar as recorrências com diversos assuntos tradicionais da matemática, como fizemos com as figuras geométricas e com o Triângulo de Pascal. Outras aplicações das recorrências, que não abordamos nesse trabalho, seriam por exemplo, no estudo das funções e em resoluções de problemas de contagem.

Outros tópicos sobre as recorrências, podem ser vistos por quem interessou e pretende conhecer mais sobre o assunto, nos livros que utilizamos como referências para a elaboração desse material, os Títulos constam na seção (Referências).

Agradecimentos

Agradeço a minha esposa Tereza Batista e a minha filha Lais Bueno pelo incentivo, apoio e compreensão;

Agradeço aos meus Pais, Ângela Maria Carneiro e Aparecido Bueno (in memoriam), e a minha irmã Cristiane Bueno, pelo carinho e o cuidado de sempre;

Agradeço a Professora Gilcéia Regiane de Souza, Coordenadora do PROFMAT (UFSJ-CAP), que me orientou na realização desse trabalho, sempre paciente, disposta e presente em todas as etapas, com dicas e sugestões precisas.

Agradeço aos meus Professores do PROFMAT (UFSJ-CAP) por todos os ensinamentos, que me proporcionaram realizar e concluir esse curso:

Professor Marcelo Oliveira Veloso
Matemática Discreta (MA 12)
Geometria Analítica (MA 23)
Resoluções de Problemas e Preparação para o ENQ (MA 21)
Coorientador do TCC.

Professor Ricardo de Carvalho Falcão
Números e Funções Reais (MA 11)
Fundamentos de Cálculo (MA 22)
Resoluções de Problemas e Preparação para o ENQ (MA 21)

Professor José Eloy Ottoni
Geometria (MA 13)
Resoluções de Problemas e Preparação para o ENQ (MA 21)

Professora Mariana Garabini Cornelissen Hoyos
Aritmética (MA 14)
Resoluções de Problemas e Preparação para o ENQ (MA 21)

Professor Maurício Reis e Silva Júnior
Introdução à Álgebra Linear (MA 33)

Professor Ben Deivide de Oliveira Batista
Probabilidade e Estatística (MA 41)

Agradeço ao Secretário do PROFMAT/CAP, Renato Cesário Barros, sempre atencioso e ágil em fornecer todas as informações e documentos necessários;

Agradeço ao amigo e aluno do PROFMAT, Wagner Chaves Andrade, que me ensinou a fazer as Figuras no GeoGebra, presentes nesse trabalho.

Referências

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana*. [S.l.]: Atual, 1993.

HAZZAN, S.; HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar, 5: combinatória, probabilidade*. [S.l.]: Atual, 1993.

HEFEZ, A. *Aritmética*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2016.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas*. [S.l.]: Atual, 2004.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 2.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática discreta*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2015.

Apêndice

Teorema das Linhas do Triângulo de Pascal

Teorema das Linhas do Triângulo de Pascal:

A linha n do Triângulo de Pascal possui $(n + 1)$ números, cuja soma é igual a 2^n .

Demonstração:

A enésima-primeira (linha n) do Triângulo de Pascal é formada pelos $(n + 1)$ números binomiais:

$$\binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \cdots \binom{n}{n-1} \binom{n}{n}$$

Pelo Binômio de Newton, sabemos que:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 a^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 a^n$$

Tomando $x = a = 1$, temos:

$$(1 + 1)^n = \binom{n}{0} 1^n 1^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} 1^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} 1^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} 1^1 1^{n-1} + \binom{n}{n} 1^0 1^n$$

ou

$$2^n = \binom{n}{0} 1 \cdot 1 + \binom{n}{1} 1 \cdot 1 + \binom{n}{2} 1 \cdot 1 + \cdots + \binom{n}{n-1} 1 \cdot 1 + \binom{n}{n} 1 \cdot 1$$

ou

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Logo, a soma dos $(n+1)$ números binomiais ou a soma dos $(n+1)$ números naturais que compõem a linha n do triângulo de Pascal é igual a 2^n :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Solução da Recorrência de 2ª Ordem Homogênea com Coeficientes Constantes

Se r_1 e r_2 são raízes distintas da equação característica da recorrência de 2ª ordem da forma $X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$, com X_1 e X_2 conhecidos, então a solução da recorrência será da forma:

$$X_n = c_1.r_1^n + c_2.r_2^n$$

Prova por Indução:

Vamos provar por Indução que $X_n = c_1.r_1^n + c_2.r_2^n$ é válida não só para X_1 e X_2 , mas também para todo n natural.

Caso Base: Para $n = 1$ e para $n = 2$.

$$X_1 = c_1.(r_1)^1 + c_2.(r_2)^1$$

$$X_2 = c_1.(r_1)^2 + c_2.(r_2)^2$$

Como os valores de X_1 e X_2 são fornecidos, como r_1 e r_2 são as raízes da equação característica $Q^2 - A.Q - B = 0$, como r_1 e r_2 são distintas e diferentes de zero, o sistema com as duas equações acima sempre terá solução única (devido ao fato das duas equações nunca serem proporcionais), ou seja, sempre encontraremos os valores de c_1 e c_2 , portanto a propriedade é válida para $n = 1$ e $n = 2$.

Vamos supor como hipótese de indução que $X_n = c_1.r_1^n + c_2.r_2^n$ é válida para n e para $(n-1)$.

Para $(n-1)$, temos $X_{n-1} = c_1.r_1^{n-1} + c_2.r_2^{n-1}$

Tese: X_n é válida para $n+1$, ou seja, $X_{n+1} = c_1.r_1^{n+1} + c_2.r_2^{n+1}$

Na igualdade $X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$ vamos substituir X_n por $c_1.r_1^n + c_2.r_2^n$ e X_{n-1} por $c_1.r_1^{n-1} + c_2.r_2^{n-1}$ (por H.I.):

$$X_{n+1} = A.(c_1.r_1^n + c_2.r_2^n) + B.(c_1.r_1^{n-1} + c_2.r_2^{n-1})$$

$$X_{n+1} = A.c_1.r_1^n + A.c_2.r_2^n + B.c_1.r_1^{n-1} + B.c_2.r_2^{n-1}$$

Vamos reorganizar de modo que as duas primeiras parcelas apareçam c_1 e as duas últimas apareçam c_2 :

$$X_{n+1} = A.c_1.r_1^n + B.c_1.r_1^{n-1} + A.c_2.r_2^n + B.c_2.r_2^{n-1}$$

Vamos colocar $c_1.r_1^{n-1}$ e $c_2.r_2^{n-1}$ em evidência:

$$X_{n+1} = c_1.r_1^{n-1}(A.r_1 + B) + c_2.r_2^{n-1}(A.r_2 + B)$$

Vamos somar e subtrair $c_1.r_1^{n+1}$ e $c_2.r_2^{n+1}$:

$$X_{n+1} = c_1.r_1^{n-1}(A.r_1 + B) + c_2.r_2^{n-1}(A.r_2 + B) + c_1.r_1^{n+1} - c_1.r_1^{n+1} + c_2.r_2^{n+1} - c_2.r_2^{n+1}$$

Vamos reorganizar de modo que as duas últimas parcelas sejam $+c_1.r_1^{n+1} + c_2.r_2^{n+1}$:

$$X_{n+1} = c_1.r_1^{n-1}(A.r_1 + B) - c_1.r_1^{n+1} + c_2.r_2^{n-1}(A.r_2 + B) - c_2.r_2^{n+1} + c_1.r_1^{n+1} + c_2.r_2^{n+1}$$

Vamos colocar $-c_1.r_1^{n-1}$ e $-c_2.r_2^{n-1}$ em evidência, preservando $+c_1.r_1^{n+1} + c_2.r_2^{n+1}$:

$$X_{n+1} = -c_1.r_1^{n-1}[-A.r_1 - B + (r_1)^2] - c_2.r_2^{n-1}[-A.r_2 - B + (r_2)^2] + c_1.r_1^{n+1} + c_2.r_2^{n+1}$$

$$X_{n+1} = -c_1.r_1^{n-1}[(r_1)^2 - A.r_1 - B] - c_2.r_2^{n-1}[(r_2)^2 - A.r_2 - B] + c_1.r_1^{n+1} + c_2.r_2^{n+1}$$

Veja que entre os colchetes acima temos a equação característica com as raízes r_1 e r_2 , logo $[(r_1)^2 - A.r_1 - B = 0]$ e $[(r_2)^2 - A.r_2 - B = 0]$, ou seja:

$$X_{n+1} = -c_1.r_1^{n-1}[0] - c_2.r_2^{n-1}[0] + c_1.r_1^{n+1} + c_2.r_2^{n+1}$$

$$X_{n+1} = [0] - [0] + c_1.r_1^{n+1} + c_2.r_2^{n+1}$$

$$X_{n+1} = c_1.r_1^{n+1} + c_2.r_2^{n+1}$$

Assim, pelo Princípio da Indução, a propriedade é válida para $(n + 1)$ e para todo n natural.

Assim cada recorrência de 2ª ordem da forma $X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$, terá solução da forma $X_n = c_1.r_1^n + c_2.r_2^n$.

- No caso $(r_1 = r_2)$, X_n será da forma:

$$X_n = c_1.r^n + c_2.n.r^n$$

A prova pode ser feita por Indução de forma análoga ao caso em que $r_1 \neq r_2$.