

Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ



Campus Alto Paraopeba - CAP

Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT



Patrícia Janaína Gonçalves Pacelli

Divisibilidade Descomplicada: um aplicativo interativo para o Ensino Fundamental

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Campus Alto Paraopeba da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre(a) em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Humberto Cesar Fernandes Lemos - UFSJ (Orientador)

Prof.^a Dr.^a Mariana Garabini Cornelissen Hoyos - UFSJ (Coorientadora)

Prof. Dr. José Eloy Ottoni - UFSJ

Prof. Dr. Rogério Casagrande - UFJF

Ouro Branco
Janeiro de 2025

Divisibilidade Descomplicada: um aplicativo interativo para o Ensino Fundamental.

Patricia Janaina Gonçalves Pacelli ¹

Humberto Cesar Fernandes Lemos ²

Mariana Garabini Cornelissen Hoyos ³

Resumo: Este trabalho explora o tema divisibilidade, e é voltado para professores e alunos do Ensino Fundamental, em especial para o sexto ano, propondo uma abordagem interativa e contextualizada. A narrativa se desenvolve a partir de uma feira escolar, onde uma aluna representa Hipátia, guiando os participantes por meio de um aplicativo educacional. A personagem interage com Euclides, destacando conceitos históricos e matemáticos para ajudar os alunos a vencerem diferentes fases, resolvendo exercícios ligados ao tema proposto, até chegarem ao desafio final, o “Chefão”. Ao longo das fases, os usuários do aplicativo são introduzidos a conceitos ligados ao tema, como a divisão euclidiana, a própria divisibilidade, divisores e múltiplos, máximo divisor comum (MDC) e mínimo múltiplo comum (MMC), dentre outros. Essa abordagem integra conceitos históricos, práticas pedagógicas e recursos tecnológicos, proporcionando aos professores uma ferramenta didática diferenciada. Nessa dinâmica, os educadores assumem o papel de orientadores, enquanto os alunos se tornam protagonistas ativos no processo de aprendizagem.

Palavras-chave: Critérios de divisibilidade, Algoritmo de Euclides, MDC, MMC.

Abstract: This work navigates through the topic of divisibility, and it is aimed to teachers and students of Elementary School, specially of sixth-grade, and it proposes an interactive and contextualized approach. The narrative starts in a school fair, where a student lays the role of Hypatia, guiding participants through an educational app. Hypatia interacts with Euclid, highlighting historical and mathematical concepts to help students progress through different levels by solving exercises related to the proposed theme, ultimately reaching the final challenge, the “Big Boss”. Throughout the levels, app users are introduced to concepts related to the topic, such as Euclidean division, divisibility, divisors and multiples, greatest common divisor (GCD), and least common multiple (LCM), among others. This approach integrates historical concepts, pedagogical practices, and technological resources, offering teachers a unique didactic tool. In this dynamic, educators take on the role of facilitators, while students become active protagonists in the learning process.

Keywords: Divisibility rules, Euclid’s algorithm, GCD, LCM.

¹ Aluno(a) de Mestrado do PROFMAT, Turma 2022, Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Campus Alto Paraopeba (CAP), prof.patricia.janaina@gmail.com

² Professor Orientador, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ, humbertolemos@ufs.edu.br

³ Professora Coorientadora, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ, mariana@ufs.edu.br

1 Introdução

1.1 Desafios do ensino de Matemática no Brasil

O ensino de matemática no Brasil convive com desafios demonstrados por diversas estatísticas, onde se destacam alguns dados relevantes como:

- O desempenho do Brasil em avaliações internacionais, segundo os dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA⁴), revelou que, em 2022, o país ficou abaixo da média dos países da OCDE (Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico), não somente em matemática, como também em outras áreas avaliadas. Dados fornecidos pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) (INEP, 2022).
- As taxas de evasão escolar, uma vez que frequentemente alunos justificam desistir de estudar por não assimilarem os conteúdos matemáticos. A falta de domínio dos conteúdos matemáticos gera desmotivação quanto aos estudos, dados do ministério da Educação (MEC) (MEC, 2022).
- Os índices de reprovação em matemática no Ensino Fundamental, especialmente nos anos finais, têm sido elevados, refletindo desafios significativos na aprendizagem dos conteúdos matemáticos, conforme estabelecido pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (MEC, 1997).

Outra estatística desfavorável onde o desafio da educação matemática é evidenciado vem dos resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) de 2023 (INEP, 2023), onde as escolas públicas do estado de Minas Gerais, em âmbitos municipais, estaduais e federais, não atingiram as metas em nenhuma das etapas de ensino. O desempenho insuficiente dos alunos em matemática nas avaliações externas que compõem a taxa do IDEB demonstra a falta de conhecimento matemático básico que acompanha o aluno até o ensino médio.

Diante de um cenário com desafios no ensino da matemática no ambiente nacional, estadual e municipal, podemos identificar nas escolas uma abordagem de conceitos matemáticos para um perfil de aluno que “segue o exemplo”, sem buscar aprofundar o entendimento nos conteúdos e sem visualizar a aplicabilidade matemática no cotidiano. Os alunos, por sua vez, ao seguirem o exemplo sem o domínio do conteúdo, distanciam-se dos conceitos matemáticos e, quando questionados, em sua maioria, demonstram falta de habilidade nos mais simples conceitos, gerando desmotivação com a disciplina, alegando que se sentem incapazes e frustrados quanto à aplicação da aprendizagem. Ao mesmo tempo, consideram a matéria importante, até mesmo rotulando como “mais inteligentes” aqueles que gostam e dominam o conteúdo.

Por outro lado, temos professores com um extenso conteúdo programático, grande carga horária, buscando suprir a falta de investimento financeiro na categoria e, em muitos casos, sem atualização na formação acadêmica.

Com alunos e professores desanimados, frustrados e inseguros, torna-se um grande desafio para o professor relacionar os conteúdos, buscando que o aluno construa o conhecimento lógico-matemático após visualizar o conteúdo abordado.

⁴ Do inglês *Programme for International Student Assessment*.

Uma das grandes dificuldades para o professor de matemática é motivar o aluno no processo de ensino-aprendizagem, exigindo que muitas vezes o mesmo busque na literatura a importância para essa motivação. De acordo com (BZUNECK, 2009)

Toda pessoa dispõe de certos recursos pessoais, que são tempo, energia, talentos, conhecimentos e habilidades, que poderão ser investidos numa certa atividade. A maneira como vão utilizar esses recursos vai ser diferente de uma pessoa para outra. Cabe, ao professor, estabelecer maneiras de ativar esses recursos em seus alunos e motivá-los a participar e estar atentos às aulas.

Em busca de ativar os recursos pessoais, bem como motivar e atrair a atenção e o interesse dos alunos, cresceu a necessidade da utilização de tecnologias para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem.

O cotidiano na escola pública e particular permitiu observar que tanto os professores como os alunos utilizam tecnologias em seu dia-a-dia, mas pouco utilizam essas ferramentas na sala de aula. Hoje existe uma recomendação constante para integrar tecnologias no processo de aprendizagem. Os professores das escolas estaduais de Minas Gerais receberam *Chromebooks* que são um novo tipo de computador que executam o *ChromeOS*, um sistema operacional que tem armazenamento em nuvem, com acesso às ferramentas do *Google Workspace for Education*, como o *Docs*, o *Sheets* e o *Meet*, bem como o programa “Wi-fi nas Escolas”, que proporcionou a modernização da infraestrutura de rede sem fio, de modo que professores e alunos terão acesso à internet.

Com base na infraestrutura disponibilizada pela escola e nos dados de uma pesquisa realizada em sala de aula, constatou-se que, em média, 27 dos 30 alunos utilizam celulares regularmente, enquanto os outros 3 acessam a internet por outros meios. Diante desse cenário, surgiu a proposta de desenvolver um aplicativo que reúna os conteúdos do sexto ano do Ensino Fundamental, promovendo uma aprendizagem mais acessível, contínua e dinâmica. O aplicativo poderá ser utilizado tanto no laboratório de informática da escola quanto em casa, integrando tecnologia ao processo educacional de forma acessível, contínua, dinâmica e eficiente.

Hoje o material didático sugere atividades em programas específicos que normalmente poderiam ser utilizados nos laboratórios de informática. Na maioria das salas de ensino fundamental nas escolas públicas, ir para o laboratório de informática não é uma tarefa tão prática. São turmas com no mínimo 30 alunos, não existe um técnico de informática para auxiliar o professor, as aulas são de 50 minutos onde, no mínimo, 15 a 20 minutos seriam usados para organizar os alunos (com 10 e 11 anos) nos computadores. Essa inviabilidade quanto ao laboratório acaba influenciando os professores a seguir práticas didáticas tradicionais voltadas para o uso do livro e do quadro, e que se mostram pouco atrativas para os alunos.

1.2 Um aplicativo para tornar o aprendizado mais interativo e dinâmico

A tecnologia tem transformado o processo educacional ao oferecer ferramentas que tornam o aprendizado mais acessível e envolvente. Nesse contexto, o aplicativo desenvolvido propõe uma jornada matemática interativa, estruturada em 7 fases, cada uma cuidadosamente projetada para explorar conceitos fundamentais de maneira dinâmica e prática.

Buscando facilitar a utilização do aplicativo, será disponibilizado um link que o aluno poderá ter acesso no celular como atividade para casa, ou se preferir a professora poderá usá-lo em sala de aula, seja no computador com a internet da escola, ou até mesmo espelhando na televisão. O mais indicado, no entanto, seria levar a turma para o laboratório quando as aulas forem geminadas, caso a professora tenha conhecimento básico e/ou algum auxílio profissional da escola, dependendo da quantidade de alunos.

Ao acessar o aplicativo com login e senha, o aluno terá acesso a 7 fases sequenciais projetadas para introduzir conceitos matemáticos de forma diversificada. Cada fase aborda um tópico específico e inclui atividades interativas que permitem ao aluno aplicar e testar seus conhecimentos, seja no laboratório de informática da escola ou em casa, utilizando computador ou celular. O design do aplicativo incentiva um progresso dinâmico e envolvente, com questões geradas de forma randômica, permitindo que o aluno revise fases já concluídas com novos desafios. Essa abordagem promove a fixação do conteúdo de maneira prática, lúdica e personalizada. Na figura abaixo, temos o ambiente onde o aluno irá fazer o login e visualizar o caminho a ser percorrido.



Figura 1 – Tela inicial: login do aluno no aplicativo.

Este trabalho tem como objetivo apresentar um aplicativo de matemática que permita aos alunos interagir, tanto na sala de aula quanto em casa através do celular, com alguns conceitos de divisibilidade ensinado no sexto ano do Ensino Fundamental. O aluno será conduzido na construção do conhecimento em divisibilidade através de uma ferramenta que permite ao professor individualizar sua aula, acrescentar informações e exercícios, sendo o orientador de uma forma diferenciada, onde o aluno é o centro da aprendizagem.

O ambiente comum a todas as fases é um mapa com alguns países da Europa e Egito, onde se destaca a Biblioteca de Alexandria e a personagem central Hipátia, que na primeira fase explica o contexto do aplicativo, bem como as instruções de navegação.

A definição do público alvo, que são os alunos do sexto ano, está relacionada ao conteúdo de divisibilidade estudado em aritmética, abordado no programa profissional de matemática – PROFMAT. A divisibilidade é um dos conteúdos abordados no sexto ano e, após pesquisa com outros professores do referido ano, identifiquei a necessidade de se visualizar conhecimentos fundamentais que serão abordados, inclusive, no ensino superior.

Ao entrar no aplicativo, serão disponibilizadas sete fases, cada uma com seu mapa conforme a figura 2 abaixo. O aplicativo é um jogo retrô inspirado em clássicos como *Super Mario World* e

outros títulos do Super Nintendo, proporcionando uma experiência nostálgica para fãs de games das gerações passadas, ao mesmo tempo que oferece uma abordagem simplificada e acessível para a nova geração. Assim como nos jogos antigos, ele apresenta níveis desafiadores, com dificuldade progressiva que testa as habilidades do jogador. Um destaque especial é o conceito de “chefão” – figuras ou desafios icônicos que surgem ao final de determinadas fases para avaliar o domínio do jogador. Esses “chefões” vão além de adversários comuns: eles possuem padrões de ataque únicos e demandam estratégias específicas para serem superados, criando momentos de tensão e conquista, características marcantes dos jogos que definiram gerações. Em nosso projeto, o Chefão se apresenta como uma sequência de exercícios organizados de forma aleatória, desafiando o jogador a fixar os conceitos aprendidos, que até então eram trabalhados de forma linear dentro de cada fase. Neste momento, os desafios passam a abranger conteúdos de diferentes fases, permitindo uma avaliação mais ampla da aprendizagem do aluno.



Figura 2 – Mapa do aplicativo

- **Início:** Hipátia explica que ela se encontra em uma mostra de ciências de uma escola, na qual a turma dela é responsável por explicar a divisibilidade, bem como apresentar o contexto histórico e apresentar alguns personagens, que de alguma forma contribuíram na história da matemática.
- **Fase I:** Divisão euclidiana – será apresentada um pouco de história da matemática, com foco no algoritmo desenvolvido pelo matemático grego Euclides, destacando a importância pedagógica da operação de divisão. Além disso, serão propostas quatro atividades que visam estimular o raciocínio dos alunos, preparando-os para a fase I do aplicativo.
- **Fase II:** Escrita dos números na base 10, ou sistema de numeração decimal – Nesta fase, será revisado o sistema decimal posicional, uma etapa essencial para garantir a compreensão dos critérios de divisibilidade.
- **Fase III:** Critérios de Divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000 – Os critérios de divisibilidade serão explorados por meio de padrões matemáticos, com a utilização da decomposição de números no sistema decimal e adição de frações, possibilitando a construção teórica antes da apresentação de uma regra prática.

- **Fase IV:** Números primos e compostos: crivo de Erastóstenes – serão abordados os conceitos de números primos e compostos, a relação entre os números primos e a criptografia, incluindo métodos e testes para a identificação de números primos. Entre os métodos apresentados, destaca-se o Crivo de Erastóstenes, um algoritmo eficiente para encontrar números primos. Além disso, serão exploradas técnicas de decomposição de números compostos em fatores primos, proporcionando uma compreensão prática do tema. Para consolidar o aprendizado, serão propostas três atividades de fixação, acompanhadas de suas respectivas resoluções.
- **Fase V:** Divisores – O conteúdo abordará a definição de divisores e a aplicação da decomposição em fatores primos na determinação da quantidade e da identificação dos divisores de um número composto. Além disso, serão apresentados métodos para calcular a soma dos divisores por meio de uma fórmula adaptada ao 6º ano do Ensino Fundamental, bem como o conceito de números perfeitos, proporcionando uma abordagem integrada e prática do tema.
- **Fase VI:** Máximo divisor comum (MDC) – O conceito de Máximo Divisor Comum (MDC) será apresentado, juntamente com a demonstração de suas aplicações práticas e os métodos de determinação, incluindo o Algoritmo de Euclides. Serão analisadas as vantagens e desvantagens de cada método, complementadas por uma tabela resumo que organiza as informações e uma bateria de exercícios para reforçar o aprendizado.
- **Fase VII:** Mínimo múltiplo comum (MMC) – O conteúdo terá início com uma breve revisão do conceito de múltiplo, destacando suas propriedades e incluindo atividades de fixação. Em seguida, será apresentado o conceito de Mínimo Múltiplo Comum (MMC), com a demonstração de suas aplicações práticas e métodos de determinação. Entre os tópicos abordados, será explorada a relação entre o produto de dois números naturais e o produto do Máximo Divisor Comum (MDC) e do MMC. As aplicabilidades serão sintetizadas em uma tabela resumo para facilitar a compreensão e a aplicação em diferentes contextos. Além disso, os métodos para determinar o MMC serão analisados, apresentando suas vantagens e desvantagens, complementados por uma tabela comparativa e uma bateria de exercícios que reforçam o aprendizado.
- **“Chefão”:** Coletânea de exercícios com atividades referentes a todas as fases. Esta fase marca o encerramento do conteúdo sobre divisibilidade, sendo também a última etapa do aplicativo para o tema. Cabe ao aluno resolver as questões propostas para percorrer todos os ‘caminhos’ da divisibilidade. Realizar as atividades antes de utilizar o aplicativo permitirá ao aluno compreender o quanto precisará se desenvolver para ‘vencer’ a última etapa, preparando-o de maneira eficaz para o desafio final.

1.2.1 Tela Inicial

Esse ambiente é uma introdução ao aplicativo. Nele, a personagem principal irá se apresentar como Hipátia de Alexandria, uma homenagem a uma das primeiras mulheres que se dedicou ao estudo de ciências no mundo antigo. Ela explicará que o aplicativo se passa em uma Mostra de Ciências na escola, e que ela e outros personagens da história da matemática irão, juntamente com

os alunos, seguir uma trilha de conhecimentos sobre o conceito de divisibilidade. Para desvendar a trilha, é necessário que o estudante adquira conhecimento para mudar de fase.

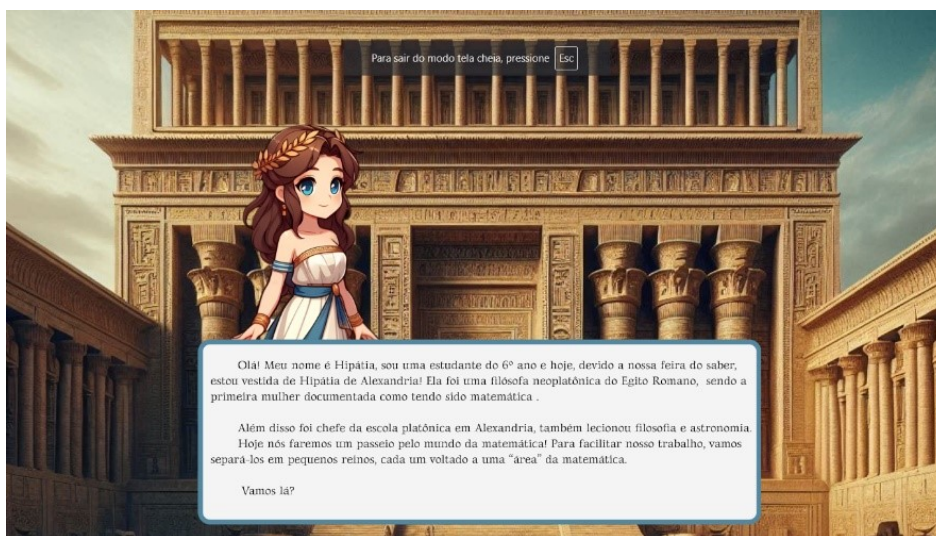


Figura 3 – Apresentação inicial feita pela personagem Hipátia.

Durante todas as fases, o professor poderá trabalhar conteúdos referentes a história da matemática, então neste capítulo faremos um breve relato sobre a importância da contextualização histórica, bem como a história de Hipátia de Alexandria. Ainda será disponibilizado o link da biblioteca de Alexandria a título de contexto histórico da matemática.

São diversas as práticas pedagógicas e estudos educacionais que apresentam ênfase na importância da contextualização histórica no ensino de matemática. O ensino contextualizado busca tornar o aprendizado mais significativo. Assim, podemos citar alguns aspectos que incentivam a contextualização histórica em atividades cotidianas na sala de aula:

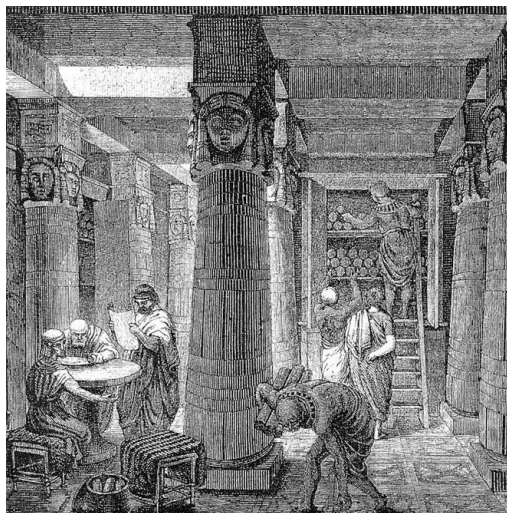
- Auxilia na desconstrução da ideia de que matemática é apenas uma coleção de fórmulas e procedimentos abstratos, humanizando o conhecimento matemático.
- Estimula os alunos a pensar criticamente sobre a construção de um conhecimento.
- Estabelece um elo entre diversas áreas como ciências, filosofia e história, criando conexões sobre o aspecto científico.
- Fortalece o progresso do conhecimento como um esforço coletivo, envolvendo contribuições de diferentes épocas e culturas, afastando a ideia que matemáticos não trabalham em equipes.
- Portanto, a contextualização histórica no ensino é uma ferramenta que busca tornar o aprendizado mais significativo, atraente e crítico, proporcionando uma visão mais integral do conhecimento humano.

1.3 Uma homenagem a Hipátia de Alexandria - História de Alexandria

A cidade de Alexandria, localizada no Egito, foi construída para ser uma cidade com representatividade cultural e econômica. Transformou-se em um centro cultural por onde passaram grandes matemáticos, filósofos, poetas e especialistas de áreas diversas. Foi em Alexandria que o Rei e

General Ptolomeu I construiu a Biblioteca de Alexandria, famosa não só pelo seu acervo como pelos alunos e professores que por ali passaram.

Infelizmente, um grande incêndio no ano de 48 a.C. destruiu grande parte do acervo da biblioteca. Apesar de muitas obras terem sido transferidas, houve perdas de obras importantíssimas, e outras obras foram roubadas no decorrer da história da Biblioteca. Em 2002, o Egito inaugurou uma moderna biblioteca em Alexandria.



(a) Vista interna da Biblioteca de Alexandria. Figura de domínio público, disponível em ([PANEQUE, 2020](#)).



(b) Edifício atual da Biblioteca de Alexandria. Domínio público, 2010, disponível em ([WIKIPEDIA, 2024a](#)).

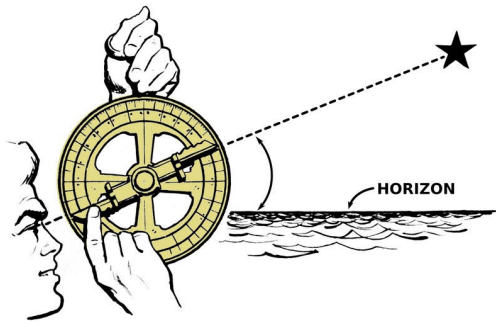
Figura 4 – Biblioteca de Alexandria

Atualmente, a biblioteca de Alexandria pode ser visitada no aplicativo “Museu Virtual de Antiguidades” ([ALEXANDRINA, 2023](#)).

1.3.1 Hipátia de Alexandria (dc. 360 – 415 d.C.)

A história de Hipátia sempre esteve ligada ao conhecimento: seu pai, Teon de Alexandria, tinha como habilidade a matemática e filosofia, sendo professor e diretor na Escola Neoplatônica de Alexandria. Hipátia era natural de Alexandria, sendo agraciada com uma educação privilegiada, e tal qual seu pai se destacou em áreas diversas do conhecimento como matemática, astronomia, filosofia, religião, poesia e arte. Foi professora e transmitiu seus conhecimentos para alunos de diversas partes do Mediterrâneo. Aos 30 anos já havia sucedido seu pai na direção da Academia de Alexandria, onde fizera a maior parte dos estudos. Ela desempenhou um grande papel na preservação e transmissão do conhecimento clássico. É considerada a primeira mulher a fazer contribuições significativas à ciência e à filosofia.

Apesar de seus escritos terem se perdido no decorrer da história, ela é reconhecida por comentários em obras de grandes matemáticos e também por suas criações. Criou um método eficiente para fazer grandes divisões, melhorou consideravelmente o astrolábio, uma espécie de calculadora astronômica usada até o século 19, dentre outros projetos e estudos, como, por exemplo, alguns instrumentos usados na Física e na Astronomia, e possivelmente criou o hidrômetro.



(a) Astrolábio, figura de domínio público. Disponível em (WIKIPEDIA, 2015).



Detalhe de hidrômetro. Aparelho que mede o consumo de água em residências. Foto: Marcos Santos / USP Imagens

(b) Hidrômetro. Figura retirada de USP Imagens (SANTOS, 2010).

Figura 5 – Astrolábio e hidrômetro: avanços científicos atribuídos a Hipátia de Alexandria

A opção pelo conhecimento fez com que Hipátia sofresse a perseguição de pessoas poderosas, o que resultou em uma morte trágica em uma emboscada. A vida de Hipátia foi contada no filme “Ágora” (2009), dirigido por Alejandro Amenábar.

2 Fase I – Divisão Euclidiana

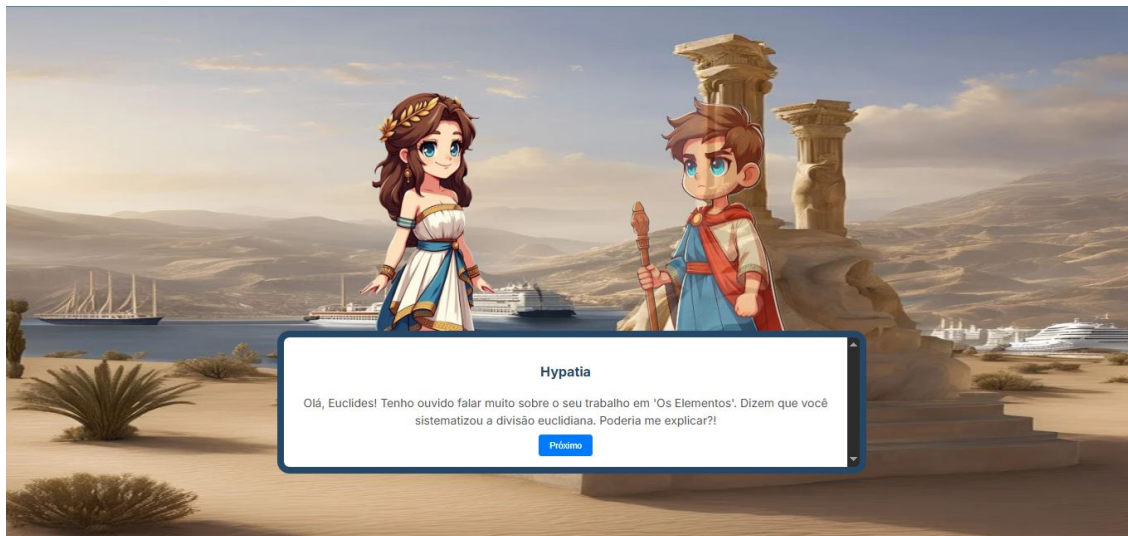


Figura 6 – Fase 1 do aplicativo educativo "Matematicando".

Na fase I o aluno terá que resolver algumas atividades referentes à divisão euclidiana. Em busca de um melhor aproveitamento do aplicativo, bem como buscando dar suporte ao professor, abordaremos um pouco do contexto histórico da divisão que poderá ser abordado pelo professor e que será explanado no aplicativo. Teremos exemplos de aplicações, propriedades, falaremos sobre a importância pedagógica e daremos sugestões de atividades para o aluno fazer no caderno antes de ter acesso à primeira fase do aplicativo.

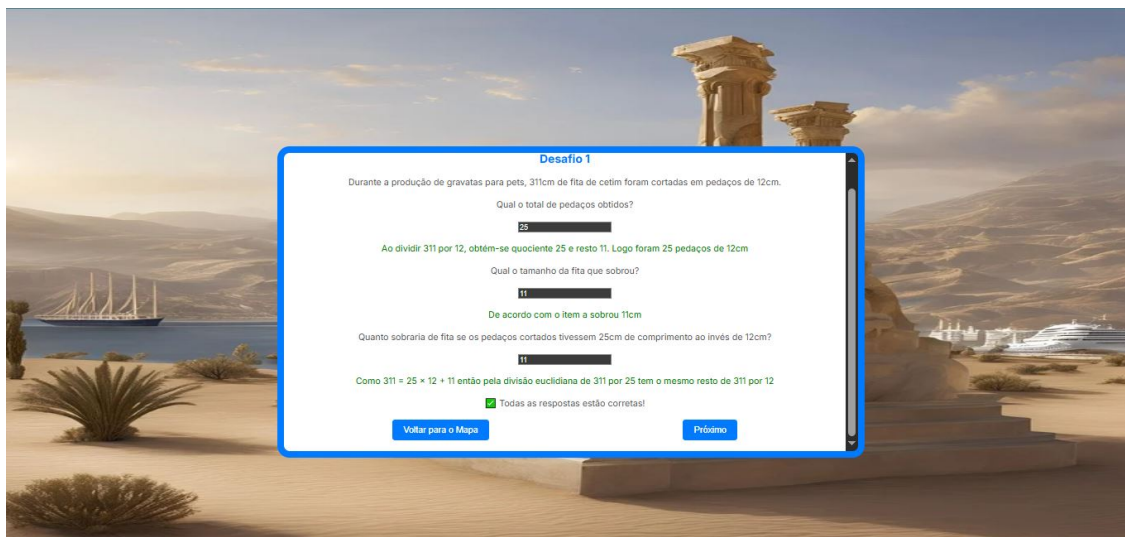


Figura 7 – Tela inicial de desafios da Fase I, com foco na divisão euclidiana.

2.1 Um pouco de história

A divisão é uma operação fundamental, muito antiga e praticada por civilizações como a do Antigo Egito e da Mesopotâmia, sendo uma maneira prática para distribuir por igual uma certa quantidade de objetos, e ainda estimar se sobriariam objetos. Apesar de eficientes, as divisões não se apresentavam como um método de fácil aplicação, sendo utilizados durante muito tempo métodos intuitivos usando estimativas ou aproximações.

A busca por um algoritmo estruturado e que pudesse ser generalizado rendeu frutos por volta de 300 a.C. pelo matemático grego Euclides, autor da obra “Os Elementos” (Euclides, 2009), que apresentava de forma sistematizada conhecimentos de geometria e aritmética da época. Euclides abordou em sua obra o conceito de dividir números inteiros (dividendos) por um número inteiro (divisor), tendo como resultado partes inteiras (quocientes) e deixando um resto que sempre é menor que o divisor.

2.2 O algoritmo da divisão euclidiana

O ensino do algoritmo da divisão euclidiana no sexto ano tende a ter um maior êxito nas turmas onde as operações de subtração e multiplicação estão consolidadas, fazendo-se necessário, muitas vezes, uma revisão nas operações fundamentais. Começaremos definindo a divisão entre dois números inteiros positivos.

Definição 2.2.1. *Se a e b são dois números inteiros positivos, o **quociente** da **divisão** de a por b é o maior número inteiro q tal que $bq \leq a$. O **resto** da **divisão** de a por b é o número r dado por $r = a - bq$.*

Da definição acima, segue que $0 \leq r < b$. Quando $r = 0$, dizemos que a divisão é **exata**. Neste caso, dizemos que a é **múltiplo** de b , e também que b é um **divisor** de a . É possível provar que, dada a definição 2.2.1 acima, o quociente e o resto são únicos (HEFEZ, 2022).

A figura abaixo nos mostra um exemplo de como o algoritmo da divisão é ensinado aos estudantes do sexto ano.

$$\begin{array}{r}
 \text{dividendo} \quad \text{divisor} \\
 \begin{array}{r}
 36 \\
 -3 \downarrow \\
 \hline
 06 \\
 -6 \\
 \hline
 0 \text{ resto}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \hline
 12 \\
 \text{quociente}
 \end{array}$$

Fonte: Secretaria Municipal de Educação de Goiânia (SME), 2025.

Figura 8 – Dados dois inteiros a e b , com $b \neq 0$, existem inteiros únicos q e r , com $0 \leq r < |b|$ tais que $a = b \cdot q + r$. Na figura temos $a = 36$, $b = 3$, $q = 12$ e $r = 0$. Fonte: Secretaria Municipal de Educação de Goiânia (GOIÂNIA, 2021).

2.2.1 Importância pedagógica.

O ensino da divisão euclidiana no sexto ano tende a desenvolver nos alunos diversas habilidades cognitivas além das matemáticas, acrescentando uma importância pedagógica que transcende a sala de aula. Listamos abaixo algumas das habilidades matemáticas e cognitivas que são desenvolvidas com o estudo da divisão euclidiana.

- I. É a base para conteúdos como frações, múltiplos, divisores, bem como a aritmética modular, conceito aprendido na graduação e nas especializações.
- II. Organiza de maneira lógica o raciocínio do aluno que aplica outras operações para verificar se o quociente e o resto são corretos, verificando que o resto é sempre menor que o divisor, sabendo assim determinar quantos e quais são os possíveis restos para qualquer divisor inteiro.
- III. Permite, dentro do conceito de múltiplos e divisores, entender o processo de decomposição em fatores primos, conhecimento dos critérios de divisibilidade que são estudados em aritmética, criptografia e aplicações diversas.
- IV. A divisão de dividendos e divisores com uma quantidade maior de algarismos proporciona ao aluno uma “familiarização” com a aplicação do algoritmo, estimulando o raciocínio com operações fundamentais como a soma, multiplicação e subtração.
- V. Possibilita a aplicabilidade da matemática em situações cotidianas, no processo de divisão, na resolução de problemas e em áreas diversas como engenharia, administração e tecnologia, passando a ser observada como ferramenta do mundo real.
- VI. O domínio da divisão euclidiana, onde o universo é o conjunto dos números inteiros, permite que o aluno compreenda a aplicação do algoritmo da divisão longa, ou seja, a divisão com casas decimais. Assim, o ensino da divisão euclidiana no sexto ano vai muito além de simplesmente aprender a dividir. Ele ajuda a construir uma base sólida para o pensamento matemático, além de fomentar habilidades práticas e cognitivas que serão úteis ao longo da vida acadêmica dos alunos.

Buscando um maior entendimento das questões usadas no aplicativo, seguem modelos de exercícios que contemplam o conteúdo da fase 1 com as devidas resoluções.

2.3 Atividades com resolução

Questão 1: Durante a produção de gravatas para pets, 311 cm de fita de cetim foram cortadas em pedaços de 12 cm.

- a) Qual o total de pedaços obtidos?
- b) Qual o tamanho da fita que sobrou?
- c) Explique porque sobraria o mesmo tamanho de fita se os pedaços cortados tivessem 25 cm de comprimentos.

Resolução:

- a) Ao dividir 311 por 12, obtém-se quociente 25 e resto 11. Logo foram 25 pedaços de 12 cm.
- b) De acordo com item a), sobraram 11 cm de fita.
- c) Como $311 = 25 \cdot 12 + 11$, então por definição a divisão euclidiana de 311 por 12 tem o mesmo resto da divisão de 311 por 12.

Questão 2: Arthur trabalha em uma fábrica de equipamentos eletrônicos. Sabe-se que em um determinado componente são instalados 32 parafusos. Considere que Arthur instale 1.680 parafusos por hora. Com base nessas informações faça o que se pede:

- a) Determine a quantidade de componentes inteiros montados por hora.
- b) Arthur usa uma caixa com 2.000 parafusos. Determine quantos componentes podem ser montados com os parafusos dessa caixa e quantos parafusos sobram na caixa após o máximo de montagens com essa quantidade de parafusos.
- c) Buscando evitar desperdício, a empresa de Arthur resolveu colocar nas caixas uma quantidade de parafusos entre 3.525 e 3.560, na qual não restasse nenhum parafuso após a montagem dos componentes. Determine a quantidade de parafusos por caixa.

Resolução:

- a) A cada hora são utilizados 1680 parafusos, sendo 32 em cada componente. Assim $1680 = 52 \cdot 32 + 16$, ou seja, a cada hora são montados 52 componentes inteiros.
- b) O aluno deverá usar o algoritmo da divisão. Assim espera-se que ele encontre que $2000 = 62 \cdot 32 + 16$. Chegando a conclusão que são montados 62 componentes e restam 16 parafusos.
- c) Sabendo que na caixa deve conter de 3.525 e 3.560 parafusos, o aluno deverá dividir 3.525 por 32, encontrando um resto igual a 5. Logo após se sobraram 5 parafusos, e portanto precisamos de mais $32 - 5 = 27$ parafusos para obtermos um quociente com resto zero. Assim sendo, a caixa deverá conter 3.552 parafusos, pois $3.525 + 27 = 3.552$.

Questão 3: Na divisão do número natural x pelo número natural y , encontramos o quociente 15 e o resto igual a 11. Qual o menor valor do dividendo dessa divisão?

Resolução: Para obtermos o menor dividendo a , temos que o resto r deve ser o maior valor natural possível. Logo, se o resto é o maior possível, então o divisor b será $b = r + 1 = 11 + 1 = 12$. Portanto, $a = 12 \cdot 15 + 11 = 191$.

Questão 4: Numa divisão inexata de números naturais, o divisor é o triplo de cinco. Se acrescentarmos uma unidade ao dividendo e não alterarmos o divisor, o resto desta nova divisão passa a ser o maior possível. Se adicionarmos mais uma unidade ao novo dividendo e mantivermos ainda o divisor inicial, o quociente passa a ser 14. Qual a soma dos algarismos do dividendo inicial é?

Resolução: Pela última afirmação, temos que $a + 2 = 15 \cdot 14 = 210$. Portanto, o dividendo anterior será $210 - 2 = 208$. Assim, a soma dos algarismos será $2 + 0 + 8 = 10$.

3 Fase II – Sistema de numeração decimal

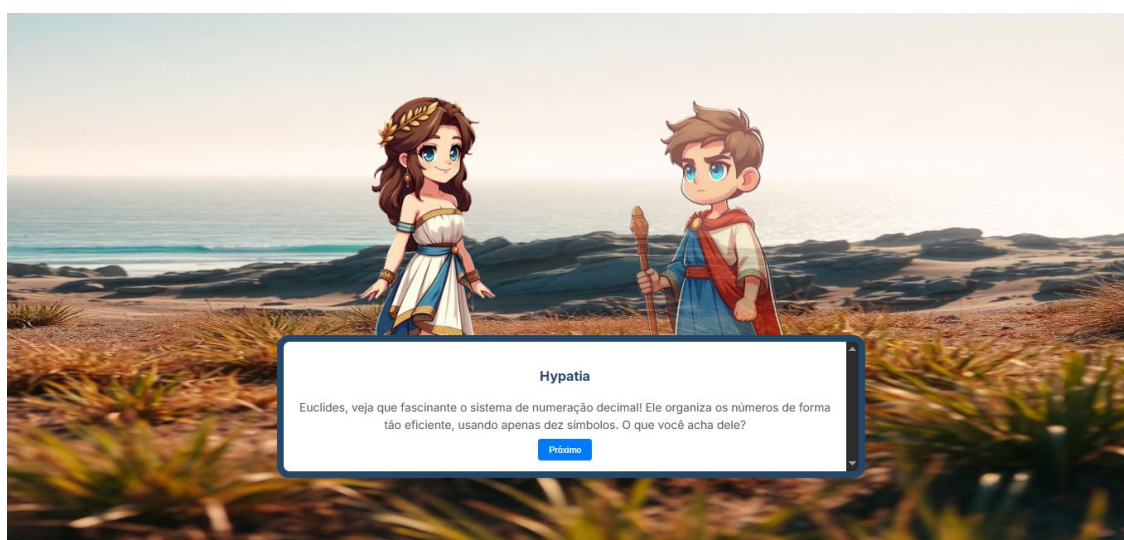


Figura 9 – Sistema de numeração decimal da Fase II.

A revisão da base do nosso sistema de numeração é essencial para compreender como os números são organizados e representados. Essa etapa é fundamental para que os alunos desenvolvam uma compreensão sólida dos critérios de divisibilidade, facilitando a identificação de padrões e características dos números.

3.1 Ordens e classes

Definição 3.1.1. O *sistema de numeração decimal* é um sistema de numeração posicional que é o nosso sistema padrão de numeração. É formado por 10 algarismos, a saber $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, com os quais podemos escrever todos os números. É decimal por formar grupos de 10, e é posicional porque o valor de cada algarismo depende da posição do algarismo no número. Os números apresentam uma ordem contada da direita para a esquerda e a cada três ordens, também contadas da direita para a esquerda, temos uma determinada classe.

A figura a seguir detalha o funcionamento do sistema de numeração decimal.

Classe dos milhões			Classe dos milhares			Classe das unidades		
9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centenas de milhões	Dezenas de milhões	Unidades de milhões	Centenas de milhares	Dezenas de milhares	Unidades de milhares	Centenas	Dezenas	Unidades
100.000.000	10.000.000	1.000.000	100.000	10.000	1000	100	10	1
10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

Figura 10 – Sistema de numeração decimal, até a ordem das centenas de milhões.

3.2 Atividades com resolução

Questão 1: Represente cada número abaixo no quadro de ordens e classes, e depois decomponha de acordo com o sistema de numeração decimal:

- a) 1.692 c) 323.827.470 e) 8.048.010 g) 12.459.520
 b) 2.034.586 d) 5.079.610 f) 50.300.000 h) 999

Classe dos milhões			Classe dos milhares			Classe das unidades		
centenas de milhões	Dezenas de milhões	unidades de milhões	centenas de milhares	dezenas de milhares	unidades de milhares	centenas	dezenas	unidades

Resolução:

Classe dos milhões			Classe dos milhares			Classe das unidades		
centenas de milhões	Dezenas de milhões	unidades de milhões	centenas de milhares	dezenas de milhares	unidades de milhares	centenas	dezenas	unidades
					1	6	9	2
		2	0	3	4	5	8	6
3	2	3	8	2	7	4	7	0
		5	0	7	9	6	1	0
		8	0	4	8	0	1	0
	5	0	3	0	0	0	0	0
	1	2	4	5	9	5	2	0
						9	9	9

Questão 2: De acordo com o sistema de numeração decimal, é possível fazer a decomposição de um número, como: $8.573 = 8 \times 1.000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3$. Faça a escrita na base 10 dos números a seguir:

- a) 796
- b) 9.634
- c) 120.234
- d) 458.752
- e) 1.111.111

Resolução:

- a) $796 = 7 \times 100 + 9 \times 10 + 6$
- b) $9.634 = 9 \times 1.000 + 6 \times 100 + 3 \times 10 + 4$
- c) $120.234 = 1 \times 100.000 + 2 \times 10.000 + 0 \times 1.000 + 2 \times 100 + 3 \times 10 + 4$
- d) $458.752 = 4 \times 100.000 + 5 \times 10.000 + 8 \times 1.000 + 7 \times 100 + 5 \times 10 + 2$
- e) $1.111.111 = 1 \times 1.000.000 + 1 \times 100.000 + 1 \times 10.000 + 1 \times 1.000 + 1 \times 100 + 1 \times 10 + 1$

Questão 3: Escreva os números a partir da decomposição:

- a) _____ = $3 \times 100 + 5 \times 10 + 7$
- b) _____ = $8 \times 1.000 + 0 \times 100 + 2 \times 10 + 5$
- c) _____ = $9 \times 100.000 + 8 \times 10.000 + 5 \times 1.000 + 2 \times 10 + 7$
- d) _____ = $5 \times 1.000 + 7 \times 100 + 3 \times 10 + 2$
- e) _____ = $1 \times 10.000 + 1 \times 1.000 + 1 \times 100 + 1 \times 10 + 1$

Resolução:

- a) $357 = 3 \times 100 + 5 \times 10 + 7$
- b) $8.025 = 8 \times 1.000 + 0 \times 100 + 2 \times 10 + 5$
- c) $985.027 = 9 \times 100.000 + 8 \times 10.000 + 5 \times 1.000 + 2 \times 10 + 7$
- d) $5.732 = 5 \times 1.000 + 7 \times 100 + 3 \times 10 + 2$
- e) $11.111 = 1 \times 10.000 + 1 \times 1.000 + 1 \times 100 + 1 \times 10 + 1$

4 Fase III – Divisibilidade

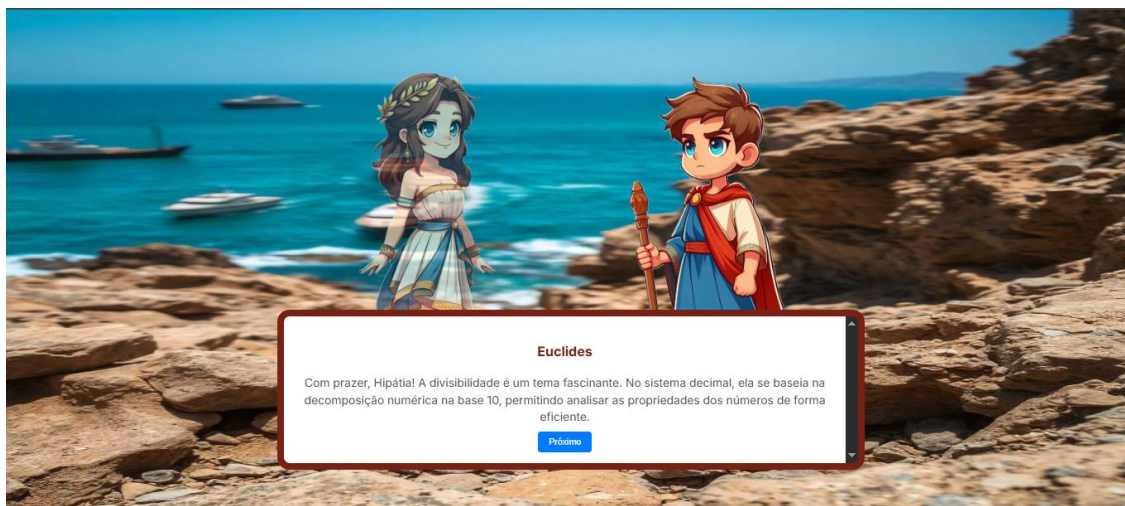


Figura 11 – Critérios de divisibilidade da Fase III.

Os critérios de divisibilidade determinam, através de regras, se um número natural é divisível por outro número natural, sem precisarmos efetuar os cálculos. Essas regras são usualmente colocadas para que os estudantes as memorizem, sem nenhuma demonstração. Acreditamos tratar-se da perda de uma excelente oportunidade de que os estudantes entendam o funcionamento lógico da matemática, e por isso a fase III é um momento central do aplicativo proposto aos alunos.

4.1 Divisibilidade

O sistema de numeração decimal possibilita a compreensão dos critérios de divisibilidade, permitindo que o aluno construa conhecimento sobre esse tema por meio da decomposição numérica na base 10, ensinada nos anos finais do ensino fundamental I e abordada na fase II do aplicativo, vide seção 3.

Introduzir os critérios de divisibilidade sem considerar uma abordagem adaptada ao conhecimento prévio do aluno significa perder uma oportunidade valiosa de incentivar questionamentos, engajamento e construção ativa do aprendizado. Essa abordagem também permite ao professor assumir o papel de orientador, utilizando operações básicas como embasamento teórico para demonstrar a aplicabilidade e a importância da escrita numérica na base 10.

O objetivo não é desestimular o uso de regras práticas que facilitam cálculos diversos, mas sim garantir que o aluno compreenda a estrutura lógica que fundamenta essas regras. Todas as demonstrações apresentadas foram desenvolvidas com base na escrita decimal e no uso de frações.

4.2 Critérios de divisibilidade

Divisibilidade por 2: No sistema decimal, todas as ordens, com exceção das unidades, são escritas como múltiplos de 10 e, portanto, são divisíveis por 2, uma vez que $10 = 2 \cdot 5$. Consequentemente, um número será divisível por 2 se, e somente se, o algarismo das unidades for divisível por 2. Portanto, é suficiente e necessário que o algarismo da unidade tenha um dos valores a seguir: 0, 2, 4, 6 ou 8. Em outras palavras, o número precisa ser par.

Exemplo 4.2.1. O número 8 é divisível por 2. Com efeito, usando a definição 3.1.1, temos que

$$8 = 4 \cdot 2.$$

Fazendo a divisão por 2 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\frac{8}{2} = 4,$$

logo 8 é divisível por 2.

Exemplo 4.2.2. O número 38 é divisível por 2. Com efeito, usando a definição 3.1.1, temos que

$$38 = 3 \cdot 10 + 8.$$

Fazendo a divisão por 2 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\frac{38}{2} = \frac{3 \cdot 10}{2} + \frac{8}{2} = 3 \cdot 5 + 4 = 19,$$

logo 38 é divisível por 2.

Exemplo 4.2.3. O número 738 é divisível por 2. Com efeito, usando a definição 3.1.1, temos que

$$738 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8.$$

Fazendo a divisão por 2 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\frac{738}{2} = \frac{7 \cdot 100}{2} + \frac{3 \cdot 10}{2} + \frac{8}{2} = 7 \cdot 50 + 3 \cdot 5 + 4 = 369,$$

logo 738 é divisível por 2.

Exemplo 4.2.4. O número 735 **não** é divisível por 2. Note que os três algarismos que compõem o número são ímpares,. Procedendo como no exemplo 4.2.3, temos que

$$735 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5.$$

Fazendo a divisão por 2 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\frac{735}{2} = \frac{7 \cdot 100}{2} + \frac{3 \cdot 10}{2} + \frac{5}{2} = 7 \cdot 50 + 3 \cdot 5 + \frac{5}{2}.$$

Mesmo que os algarismos 7 e 3 sejam ímpares, vemos acima que, como eles estão respectivamente na ordem das centenas e das dezenas, esses números representam 700 e 30, que são ambos pares. No entanto, como o algarismo das unidades é ímpar, vemos acima que não é possível fazer a divisão exata de 5 por 2. Concluímos que o número 735 não é divisível por 2.

Portanto, podemos concluir que

Um número será divisível por 2 quando ele terminar em 0, 2, 4, 6, ou 8, ou seja, quando ele for par.

Divisibilidade por 3: Um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos, considerados os seus valores absolutos, for divisível por 3.

Exemplo 4.2.5. O número 9 é divisível por 3. Usando novamente a definição 3.1.1, temos que

$$9 = 3 \cdot 3.$$

Fazendo a divisão por 3 e escrevendo na forma de fração, podemos ver que

$$\frac{9}{3} = 3.$$

Já podemos ver que 9 será divisível por 3 se, e somente se, 9 for o resultado de uma multiplicação por 3.

Exemplo 4.2.6. O número 81 é divisível por 3. Usando novamente a definição 3.1.1, temos que

$$81 = 8 \cdot 10 + 1 = 8 \cdot (9 + 1) + 1$$

Da propriedade distributiva da multiplicação, segue

$$81 = 8 \cdot 9 + (8 + 1).$$

Fazendo a divisão por 3 e escrevendo na forma de fração, podemos ver que

$$\frac{81}{3} = \frac{8 \cdot 9}{3} + \frac{8 + 1}{3} = 8 \cdot 3 + \frac{8 + 1}{3}.$$

Já podemos ver na expressão acima que 81 será divisível por 3 se, e somente se, $8 + 1$ for divisível por 3. Como $8 + 1 = 9$, então temos que 81 é divisível por 3. Com efeito

$$81 = 8 \cdot 3 + \frac{9}{3} = 24 + 3 = 27.$$

Exemplo 4.2.7. O número 738 é divisível por 3. Usando novamente a definição 3.1.1, temos que

$$738 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 = 7 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (9 + 1) + 8.$$

Da propriedade distributiva da multiplicação, segue

$$738 = 7 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + (7 + 3 + 8).$$

Fazendo a divisão por 3 e escrevendo na forma de fração, podemos ver que

$$\frac{738}{3} = \frac{7 \cdot 99}{3} + \frac{3 \cdot 9}{3} + \frac{7 + 3 + 8}{3} = 7 \cdot 33 + 3 \cdot 3 + \frac{7 + 3 + 8}{3}.$$

Já podemos ver na expressão acima que 738 será divisível por 3 se, e somente se, $7 + 3 + 8$ for divisível por 3. Como $7 + 3 + 8 = 18$, então temos que 738 é divisível por 3. Com efeito

$$738 = 7 \cdot 33 + 3 \cdot 3 + \frac{18}{3} = 246.$$

Exemplo 4.2.8. O número 737 **não** é divisível por 3. Vamos proceder como no exemplo 4.2.7 acima

$$737 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7 = 7 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (9 + 1) + 7.$$

Da propriedade distributiva da multiplicação, segue

$$737 = 7 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + (7 + 3 + 7).$$

Fazendo a divisão por 3 e escrevendo na forma de fração, podemos ver que

$$\frac{737}{3} = \frac{7 \cdot 99}{3} + \frac{3 \cdot 9}{3} + \frac{7 + 3 + 7}{3} = 7 \cdot 33 + 3 \cdot 3 + \frac{17}{3}.$$

Vemos na expressão acima que 737 não é divisível por 3, uma vez que não é possível fazer a divisão exata de 17 por 3.

Os exemplos 4.2.7 e 4.2.8 reforçam a conclusão abaixo.

Um número será divisível por 3 quando a soma de seus algarismos for divisível por 3.

Divisibilidade por 4: No sistema decimal, todas as ordens, com exceção das unidades e das dezenas, são escritas como múltiplos de 100 e, portanto, são divisíveis por 4, uma vez que $100 = 4 \cdot 25$. Consequentemente, um número será divisível por 4 se, e somente se, o algarismo das dezenas e das unidades, consideradas sua grandeza posicional, formarem um número divisível por 4.

Exemplo 4.2.9. O número 3.300 é divisível por 4. Com efeito, usando a definição 3.1.1, temos que

$$3.300 = 3 \cdot 1.000 + 3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 0.$$

Fazendo a divisão por 4 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\begin{aligned} \frac{3.300}{4} &= \frac{3 \cdot 1.000}{4} + \frac{3 \cdot 100}{4} + \frac{0 \cdot 10 + 0}{4} = \\ &= 3 \cdot 250 + 3 \cdot 25 + \frac{00}{4} = 825 + \frac{00}{4}. \end{aligned}$$

Assim podemos ver que o número 3.300 será divisível por 4 se, e somente se, 00 for divisível por 4. Uma vez que $00/4 = 0$, temos que 3.300 é divisível por 4, e que $3.300/4 = 825$.

Exemplo 4.2.10. O número 73.388 é divisível por 4. Com efeito, usando a definição 3.1.1, temos que

$$73.388 = 7 \cdot 10.000 + 3 \cdot 1.000 + 3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 8.$$

Fazendo a divisão por 4 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\begin{aligned} \frac{73.388}{4} &= \frac{7 \cdot 10.000}{4} + \frac{3 \cdot 1.000}{4} + \frac{3 \cdot 100}{4} + \frac{8 \cdot 10 + 8}{4} = \\ &= 7 \cdot 2.500 + 3 \cdot 250 + 3 \cdot 25 + \frac{88}{4} = 18.325 + \frac{88}{4}. \end{aligned}$$

Assim podemos ver que o número 73.388 será divisível por 4 se, e somente se, 88 for divisível por 4. Uma vez que $88/4 = 22$, temos que 73.388 é divisível por 4, e que $73.388/4 = 18.347$.

Exemplo 4.2.11. O número 773.388 é divisível por 4. Com efeito, usando a definição 3.1.1, temos que

$$773.388 = 7 \cdot 100.000 + 7 \cdot 10.000 + 3 \cdot 1.000 + 3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 8.$$

Fazendo a divisão por 4 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\begin{aligned} \frac{773.388}{4} &= \frac{7 \cdot 100.000}{4} + \frac{7 \cdot 10.000}{4} + \frac{3 \cdot 1.000}{4} + \frac{3 \cdot 100}{4} + \frac{8 \cdot 10 + 8}{4} = \\ &= 7 \cdot 25.000 + 7 \cdot 2.500 + 3 \cdot 250 + 3 \cdot 25 + \frac{88}{4} = 193.325 + \frac{88}{4}. \end{aligned}$$

Assim podemos ver que o número 773.388 será divisível por 4 se, e somente se, 88 for divisível por 4. Uma vez que $88/4 = 22$, temos que 773.388 é divisível por 4, e que $773.388/4 = 193.347$.

Exemplo 4.2.12. O número 398 **não** é divisível por 4. Com efeito, procedendo como no exemplo 4.2.11, temos

$$389 = 3 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 8.$$

Fazendo a divisão por 4 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\frac{773.388}{4} = \frac{3 \cdot 100}{4} + \frac{9 \cdot 10 + 8}{4} = 3 \cdot 25 + \frac{98}{4} = 75 + \frac{98}{4}.$$

Uma vez que a divisão de 98 por 4 não é exata, temos que 398 não é divisível por 4.

Assim

Um número será divisível por 4 quando seus dois últimos algarismos formarem um número divisível por 4.

Divisibilidade por 5: No sistema decimal, todas as ordens, com exceção das unidades, são escritas como múltiplos de 10 e, portanto, são divisíveis por 5, uma vez que $10 = 2 \cdot 5$. Consequentemente, um número será divisível por 5 se, e somente se, o algarismo das unidades for divisível por 5. Logo, é suficiente e necessário que o algarismo da unidade tenha um dos valores a seguir: 0 ou 5.

Exemplo 4.2.13. O número 35 é divisível por 5. Com efeito, usando a definição 3.1.1, temos que

$$35 = 3 \cdot 10 + 5.$$

Fazendo a divisão por 5 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\frac{35}{5} = \frac{3 \cdot 10}{5} + \frac{5}{5} = 3 \cdot 2 + 1 = 7,$$

logo 35 é divisível por 5.

Exemplo 4.2.14. O número 735 é divisível por 5. Com efeito, usando a definição 3.1.1, temos que

$$735 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5.$$

Fazendo a divisão por 5 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\frac{735}{5} = \frac{7 \cdot 100}{5} + \frac{3 \cdot 10}{5} + \frac{5}{5} = 7 \cdot 20 + 3 \cdot 2 + 1 = 147,$$

logo 735 é divisível por 5.

Exemplo 4.2.15. O número 8.730 é divisível por 5. Com efeito, usando a definição 3.1.1, temos que

$$8.730 = 8 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 0.$$

Fazendo a divisão por 5 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\frac{8.730}{5} = \frac{8 \cdot 1000}{5} + \frac{7 \cdot 100}{5} + \frac{3 \cdot 10}{5} + \frac{0}{5} = 8 \cdot 200 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 2 + 0 = 1746,$$

logo 8.730 é divisível por 5.

Exemplo 4.2.16. O número 738 **não** é divisível por 5. Com efeito, procedendo como no exemplo 4.2.15, segue

$$738 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8.$$

Fazendo a divisão por 5 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\frac{738}{5} = \frac{7 \cdot 100}{5} + \frac{3 \cdot 10}{5} + \frac{8}{5} = 7 \cdot 20 + 3 \cdot 2 + \frac{8}{5},$$

e como a divisão de 8 por 5 não é exata, então 738 não é divisível por 5.

Um número será divisível por 5 quando o algarismo da ordem das unidades for 0 ou 5.

Divisibilidade por 6: Sabendo que 6 pode ser escrito como o produto de dois números primos, a saber $6 = 2 \cdot 3$, então, para que um número seja divisível por 6, é suficiente e necessário que ele seja divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo, isto é, o número tem que ser par e divisível por 3.

Exemplo 4.2.17. O número 738 é divisível por 6, pois já sabemos dos exemplos 4.2.3 e 4.2.7 que ele é divisível por 2 e por 3.

Exemplo 4.2.18. Contra-exemplos da divisibilidade por 6 podem ser construídos diretamente dos critérios de divisibilidade por 2 e 3. Por exemplo, 735 não é divisível por 6 por não ser par, embora seja divisível por 3 ($7+3+5=15$). Já 736, mesmo sendo par, não é divisível por 6 por não ser divisível por 3 ($7+3+6=16$). Já 247 não é divisível nem por 2 nem por 3 ($2+4+7=13$), logo com mais razão não é divisível por 6.

Um número será divisível por 6 quando ele for divisível por 2 e por 3, ou seja, quando ele for par e a soma de seus algarismos for um número divisível por 3.

Divisibilidade por 8: No sistema decimal, todas as ordens, com exceção das unidades, das dezenas e das centenas, são escritas como múltiplos de 1.000 e, portanto, são divisíveis por 8, uma vez que $1.000 = 8 \cdot 125$. Consequentemente, um número será divisível por 8 se, e somente se, os algarismos das centenas, das dezenas e das unidades, consideradas sua grandeza posicional, formarem um número divisível por 8.

Exemplo 4.2.19. O número 773.000 é divisível por 8. Com efeito, usando a definição 3.1.1, temos que

$$773.000 = 7 \cdot 100.000 + 7 \cdot 10.000 + 3 \cdot 1.000 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 0.$$

Fazendo a divisão por 8 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\begin{aligned} \frac{773.000}{8} &= \frac{7 \cdot 100.000}{8} + \frac{7 \cdot 10.000}{8} + \frac{3 \cdot 1.000}{8} + \frac{0 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 0}{8} = \\ &= 7 \cdot 12.500 + 7 \cdot 1.250 + 3 \cdot 125 + \frac{0}{8} = 96.625 + \frac{0}{8}. \end{aligned}$$

Assim podemos ver que o número 773.000 será divisível por 8 se, e somente se, 000 for divisível por 8. Uma vez que $0/8 = 0$, temos que 773.000 é divisível por 8, e que $773.000/8 = 96.625$.

Exemplo 4.2.20. O número 773.000 é divisível por 8. Com efeito, usando a definição 3.1.1, temos que

$$773.456 = 7 \cdot 100.000 + 7 \cdot 10.000 + 3 \cdot 1.000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6.$$

Fazendo a divisão por 8 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\begin{aligned} \frac{773.456}{8} &= \frac{7 \cdot 100.000}{8} + \frac{7 \cdot 10.000}{8} + \frac{3 \cdot 1.000}{8} + \frac{4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6}{8} = \\ &= 7 \cdot 12.500 + 7 \cdot 1.250 + 3 \cdot 125 + \frac{456}{8} = 96.625 + \frac{456}{8}. \end{aligned}$$

Assim podemos ver que o número 773.456 será divisível por 8 se, e somente se, 456 for divisível por 8. Uma vez que $456/8 = 57$, temos que 773.456 é divisível por 8, e que $773.456/8 = 96.682$.

Exemplo 4.2.21. O número 773.457 **não** é divisível por 8. Seguindo o exemplo 4.2.20, temos

$$773.457 = 7 \cdot 100.000 + 7 \cdot 10.000 + 3 \cdot 1.000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7.$$

Fazendo a divisão por 8 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\begin{aligned} \frac{773.457}{8} &= \frac{7 \cdot 100.000}{8} + \frac{7 \cdot 10.000}{8} + \frac{3 \cdot 1.000}{8} + \frac{4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7}{8} = \\ &= 7 \cdot 12.500 + 7 \cdot 1.250 + 3 \cdot 125 + \frac{457}{8} = 96.625 + \frac{457}{8}. \end{aligned}$$

Dado que a divisão de 457 por 8 não é exata, temos que 773.457 não é divisível por 8.

Portanto

Um número será divisível por 8 quando seus três últimos algarismos formarem um número divisível por 8.

Divisibilidade por 9: Um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos, considerados os seus valores absolutos, for divisível por 9.

Exemplo 4.2.22. O número 738 é divisível por 9. Usando novamente a definição 3.1.1, temos que

$$738 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 = 7 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (9 + 1) + 8.$$

Da propriedade distributiva da multiplicação, segue

$$738 = 7 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + (7 + 3 + 8).$$

Fazendo a divisão por 9 e escrevendo na forma de fração, podemos ver que

$$\frac{738}{9} = \frac{7 \cdot 99}{9} + \frac{3 \cdot 9}{9} + \frac{7 + 3 + 8}{9} = 7 \cdot 11 + 3 \cdot 1 + \frac{7 + 3 + 8}{9}.$$

Já podemos ver na expressão acima que 738 será divisível por 9 se, e somente se, $7 + 3 + 8$ for divisível por 9. Como $7 + 3 + 8 = 18$, então temos que 738 é divisível por 9. Com efeito

$$738 = 7 \cdot 11 + 3 \cdot 1 + \frac{18}{9} = 82.$$

Exemplo 4.2.23. O número 733 **não** é divisível por 9. Seguindo o exemplo 4.2.22,

$$733 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 = 7 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (9 + 1) + 3.$$

Da propriedade distributiva da multiplicação, segue

$$738 = 7 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + (7 + 3 + 3).$$

Fazendo a divisão por 9 e escrevendo na forma de fração, podemos ver que

$$\frac{738}{9} = \frac{7 \cdot 99}{9} + \frac{3 \cdot 9}{9} + \frac{7 + 3 + 3}{9} = 7 \cdot 11 + 3 \cdot 1 + \frac{13}{9}.$$

Concluimos que 733 não é divisível por 9, pois a divisão de 13 por 9 não é exata.

Um número será divisível por 9 quando a soma de seus algarismos for divisível por 9.

Divisibilidade por 10: No sistema decimal, todas as ordens, com exceção das unidades, são escritas como múltiplos de 10 e, portanto, são divisíveis por 10. Conseqüentemente, um número será divisível por 10 se, e somente se, o algarismo das unidades for divisível por 10. Portanto, é suficiente e necessário que o algarismo seja 0.

Exemplo 4.2.24. O número 730 é divisível por 10. Com efeito, usando a definição 3.1.1, temos que

$$730 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 0.$$

Fazendo a divisão por 10 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\frac{730}{10} = \frac{7 \cdot 100}{10} + \frac{3 \cdot 10}{10} + \frac{0}{10} = 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + 0 = 73,$$

logo 730 é divisível por 10.

Exemplo 4.2.25. O número 731 **não** é divisível por 10. De modo similar ao feito no exemplo 4.2.24 anterior, temos que

$$731 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1.$$

Fazendo a divisão por 10 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\frac{731}{10} = \frac{7 \cdot 100}{10} + \frac{3 \cdot 10}{10} + \frac{1}{10} = 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + \frac{1}{10},$$

logo 731 não é divisível por 10, pois a divisão de 1 por 10 não é exata.

Logo

Um número será divisível por 10 quando o algarismo da ordem das unidades for 0.

Divisibilidade por 100: No sistema decimal, todas as ordens, com exceção das unidades e das dezenas, são escritas como múltiplos de 100 e, portanto, são divisíveis por 100. Conseqüentemente, um número será divisível por 100 se, e somente se, os algarismos das dezenas e das unidades forem ambos iguais a 0.

Exemplo 4.2.26. O número 7.300 é divisível por 100. Com efeito, usando a definição 3.1.1, temos que

$$7.300 = 7 \cdot 1.000 + 3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 0.$$

Fazendo a divisão por 100 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\begin{aligned} \frac{7.300}{100} &= \frac{7 \cdot 1.000}{100} + \frac{3 \cdot 100}{100} + \frac{0 \cdot 10 + 0}{100} = \\ &= 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + \frac{0}{100} = 73. \end{aligned}$$

Assim podemos ver que o número 7.300, que termina em 00, é com efeito divisível por 100.

Exemplo 4.2.27. O número 7.301 **não** é divisível por 100. Com efeito, usando a definição 3.1.1, temos que

$$7.301 = 7 \cdot 1.000 + 3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 1.$$

Fazendo a divisão por 100 e escrevendo na forma de fração, temos

$$\begin{aligned} \frac{7.301}{100} &= \frac{7 \cdot 1.000}{100} + \frac{3 \cdot 100}{100} + \frac{0 \cdot 10 + 1}{100} = \\ &= 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + \frac{1}{100}. \end{aligned}$$

Assim podemos ver que o número 7.301 não é com efeito divisível por 100, uma vez que a divisão de 1 por 100 não é exata.

Um número será divisível por 100 quando os algarismos da ordem das unidades e das dezenas forem ambos iguais a 0.

Espera-se, a partir deste ponto, que o estudante seja capaz de associar a divisibilidade pelas potências de 10 com a quantidade de algarismos 0 no final de um número.

4.3 Atividade proposta no desafio do aplicativo com resolução

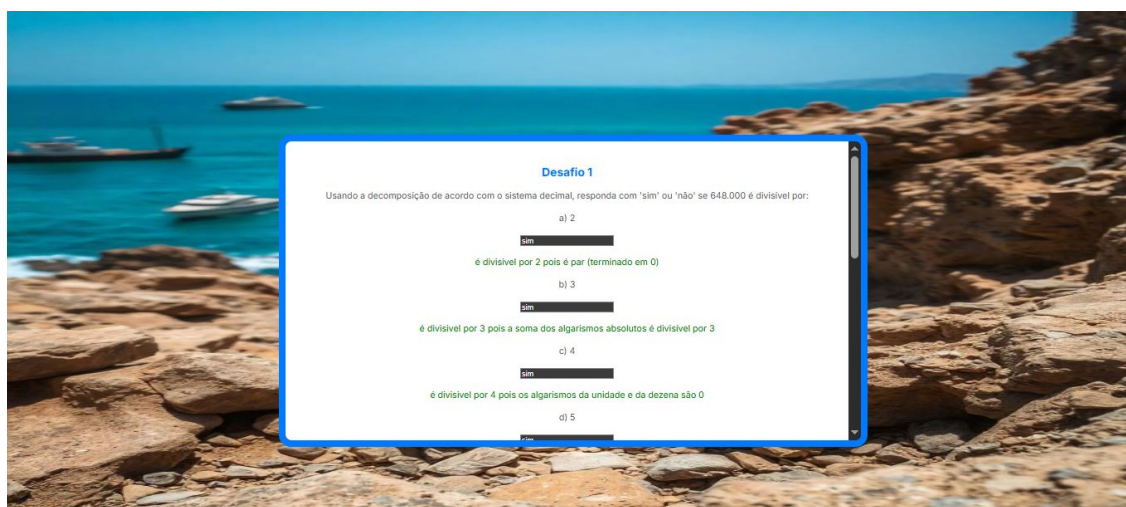


Figura 12 – Divisibilidade da Fase III.

Questão 1: Usando a escrita na base 10, mostre que 648.000 é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.

Resolução: A ideia desta questão é que o estudante mostre a divisibilidade do número dado sem utilizar os critérios de forma decorada. Ao decompor o número como

$$648.000 = 6 \cdot 100.000 + 4 \cdot 10.000 + 8 \cdot 1.000, \quad (1)$$

pode-se demonstrar a divisibilidade do número por cada fator. Começando por 2, temos que

$$\frac{648.000}{2} = \frac{6 \cdot 100.000}{2} + \frac{4 \cdot 10.000}{2} + \frac{8 \cdot 1.000}{2}$$

logo 648.000 é divisível por 2.

5 Fase IV – Números primos e compostos

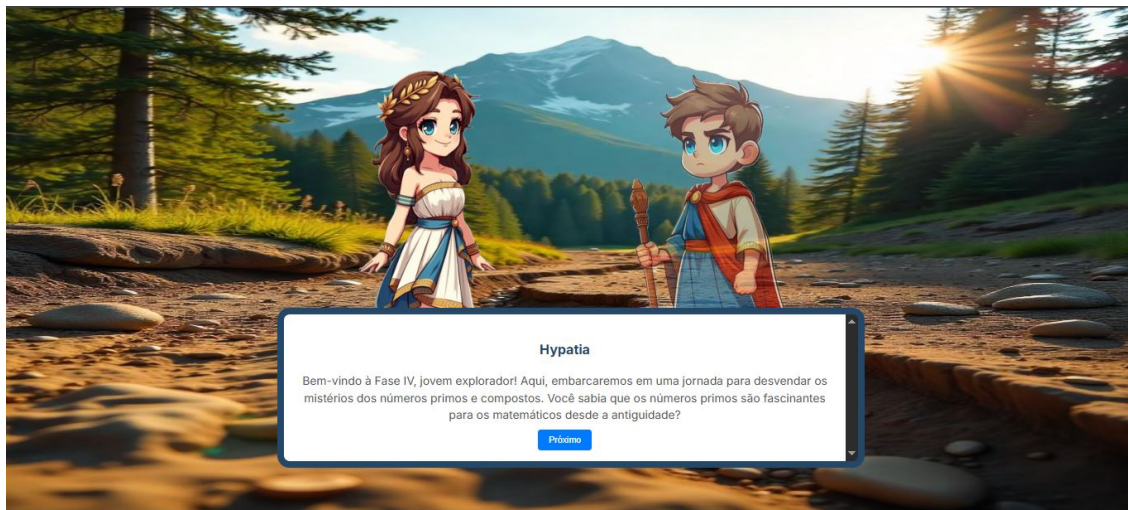


Figura 13 – Números Primos Fase IV.

5.1 Números primos

Definição 5.1.1. Os *números primos* são aqueles que possuem exatamente dois divisores distintos, 1 e o próprio número. O número que possui mais de dois divisores distintos, ou seja, que não é primo, é denominado *número composto*. O número 1 não é primo nem composto.

Os números compostos podem ser escritos como um produto de números primos. Os números primos são objetos de estudo desde a antiguidade, despertando o interesse de matemáticos como Euclides e Eratóstenes. Uma das perguntas da antiguidade era se existia um maior número primo, e Euclides demonstrou o teorema: O conjunto dos números primos é infinito. Coube a ele também a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética, conforme enunciado a seguir.

Teorema 5.1.2 (Teorema Fundamental da Aritmética). *Todo número inteiro maior que 1 pode ser escrito como um produto único de números primos.*

A demonstração pode ser encontrada em (HEFEZ, 2022). Portanto, Euclides, em sua obra, demonstrou que todos os números compostos podem ser escritos como o produto de números primos.

Existem campos de estudo, na matemática da atualidade, que analisam a existência de um padrão para os números primos. Dado um número inteiro $n \geq 2$, a decomposição citada no teorema 5.1.2 pode ser escrita como

$$n = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}, \quad (2)$$

onde p_1, p_2, \dots, p_k são fatores primos distintos, usualmente colocados em ordem crescente⁵, e n_1, n_2, \dots, n_k são os seus respectivos expoentes. Vejamos alguns exemplos simples, mas que nos serão importantes adiante:

Exemplo 5.1.3. *Todo número primo p é trivialmente fatorado como*

$$p = p^1. \quad (3)$$

Exemplo 5.1.4. *O número 35 é composto, pois é fatorado como*

$$35 = 5 \cdot 7 = 5^1 \cdot 7^1. \quad (4)$$

Iremos discutir técnicas de fatoração mais adiante no texto. Continuemos, no momento, com mais alguns exemplos:

Exemplo 5.1.5. *O número 12 é composto, e é fatorado como*

$$12 = 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^1. \quad (5)$$

Exemplo 5.1.6. *O número 360 é composto, e sua fatoração é*

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1. \quad (6)$$

5.2 Como Identificar Números Primos

Existem métodos para identificar se um número é primo ou composto, sendo importante analisar o tamanho do número, bem como a finalidade de seu uso para escolher o melhor método de identificação. Segue abaixo uma lista simplificada com alguns métodos para identificar se um número é primo ou não.

- **Teste da divisibilidade simples:** É um método básico adequado para números pequenos, onde um número n é dividido por todos os números primos menores que n . Se existir um número primo tal que esta divisão deixe resto zero, então o n será composto. Caso contrário, podemos afirmar que n é primo.
- **Algoritmo de Divisão Otimizada:** É um método baseado no teste da divisibilidade simples, onde se reduz a quantidade de verificações da divisibilidade de n , visto que testa-se se n é divisível pelos números primos p tais que $1 < p \leq \sqrt{n}$.
- **Reconhecimento por Características:** Também usado para números pequenos, verifica-se por propriedades da divisibilidade para os números primos 2, 3, 5, 7, 11.

⁵ Isto é, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$.

- **Teste por Decomposição em Fatores:** : Esse método consiste em decompor um número em seus fatores primos para determinar se ele é primo ou composto. Se, ao fatorá-lo, encontrarmos divisores além de 1 e dele mesmo, então ele é um número composto. Caso contrário, ele será primo.
- **Método Baseado em Fatoração Primal:** Nesse método, tenta-se escrever o número como um produto, não necessariamente de números primos. Se for possível, então o número será composto.
- **Algoritmos Computacionais Avançados:** São testes elaborados para números muito grandes, como por exemplo, o Teste de Primalidade de Miller-Rabin, o Teste AKS (Agrawal-Kayal-Saxena) e o Crivo de Atkin, uma forma moderna e aprimorada do crivo de Eratóstenes.
- **Crivo de Eratóstenes:** É um método simples, que recebeu esse nome em homenagem ao matemático grego Eratóstenes, sendo aplicado para determinar os primos contidos em um conjunto com n elementos. Consiste em organizar uma lista dos n primeiros números naturais, identificar um número primo e cortar os múltiplos desse número. O processo se repete até que a lista apresente somente os números que não foram cortados, que são os números primos.

O crivo é um processo simples, que não é eficiente para determinar se um número grande é primo ou composto, porém ele é de fácil compreensão para os alunos. Com o crivo de Eratóstenes, podemos determinar todos os números primos presentes em uma lista de números naturais de 1 até n . O processo é iterativo e pode ser descrito da seguinte maneira:

1. Inicialmente, determina-se o maior número a ser verificado. Ele corresponde à raiz quadrada do valor limite, isto é \sqrt{n} , arredondado para baixo.
2. Crie uma lista de todos os números naturais de 2 até o n .
3. O número 2 é primeiro número da lista, e ele é um número primo. Remova da lista todos os múltiplos de 2, exceto ele próprio, até o valor limite n .
4. O próximo primo da lista, denominado p , é o primeiro número não removido após a iteração. Remova da lista todos os múltiplos de p , exceto ele próprio, até o valor limite n .
5. Repita o passo 4 enquanto for $p \leq \sqrt{n}$.
6. Os números não removidos da lista são todos os primos de 1 até n .

Exemplo 5.2.1. *O exemplo abaixo foi retirado de (WIKIPEDIA, 2024b). Na figura 14 abaixo, podemos ver o crivo com todos os números primos de 1 a $n = 120$. Uma vez que $\sqrt{n} = \sqrt{120} \approx 10,95$, devemos repetir o processo descrito acima para todos os primos $p \leq 10$, ou seja, o processo será feito apenas para $p = 2, 3, 5, 7$.*

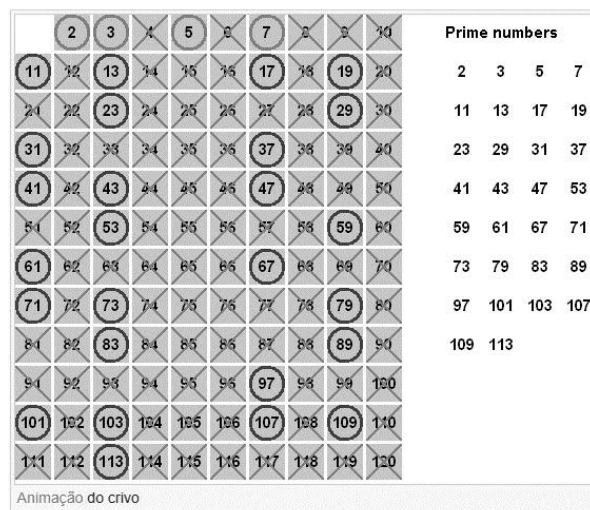


Figura 14 – Crivo de Eratóstenes para $n = 120$. (WIKIPEDIA, 2024b)

Recomendamos a visita à página (WIKIPEDIA, 2024b), onde pode-se ver uma versão animada da figura abaixo, na qual podemos visualizar o processo de obtenção dos primos no crivo de Eratóstenes.

5.3 Decomposição em fatores primos

Dentre outros motivos, os números primos são objetos de estudo porque ainda não foi definido um padrão para sua distribuição entre os números naturais. Portanto, geralmente é um problema muito difícil determinar se um número grande é primo ou composto, e sendo ele composto, outro problema difícil pode ser achar os seus fatores primos.

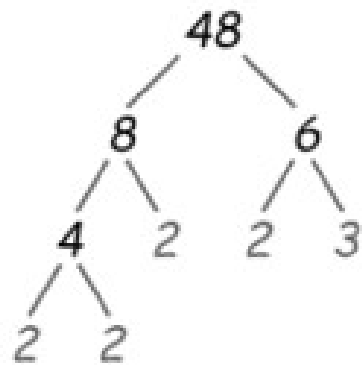
Nisto baseia-se o sistema criptográfico RSA⁶, um dos sistemas mais usados e seguros do mundo. É um dos primeiros algoritmos de criptografia assimétrica, que utiliza duas chaves – uma pública e uma privada. De modo bastante simplificado, um usuário do RSA cria e divulga uma chave pública baseada em dois números primos grandes, junto com um valor auxiliar. Os números primos devem ser mantidos secretos. Qualquer um pode usar a chave pública para encriptar a mensagem, mas se a chave pública for muito grande, apenas alguém com o conhecimento dos números primos pode decodificar a mensagem de forma viável. Quebrar a encriptação RSA seria achar a decomposição da chave pública em seus fatores primos.

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, todo número inteiro maior que 1 pode ser escrito como um produto único de números primos, e a técnica de decomposição é usada no ensino básico (divisores, simplificação de frações, m.m.c. e m.d.c.) e em atividades como criptografia. As regras usadas na divisibilidade tendem a auxiliar o aluno na decomposição, facilitando identificar alguns divisores primos como 2, 3, 5, 7, 11. Algumas técnicas são:

- **Decomposição sucessiva:** consiste em escrever o número como um produto de números naturais sucessivamente buscando escrever o produto somente com fatores primos. O resultado é apresentado em uma árvore de fatores. A árvore de fatores é uma representação onde o número inicial é colocado no topo, e abaixo são colocadas ramificações com decomposições

⁶ RSA é composto das letras iniciais dos sobrenomes de Ron Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, os quais foram os primeiros a descrever o algoritmo em 1978.

sucessivas do número. É uma estrutura didática que facilita a visualização do aluno, mas não é uma construção prática.



$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

Figura 15 – Árvore de fatores do número 48.

- **Método prático de fatoração de um número natural:** consiste em dividir o número natural pelo menor fator primo sucessivamente, até que o quociente da divisão seja 1. É uma construção fácil que poderá ser usada na determinação dos divisores, mínimo múltiplo comum (m.m.c.) e do máximo divisor comum (m.d.c).

Número	fatores Primos
420	2 → Divisor
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Quociente ←

Figura 16 – Fatoração do número $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

É esperado que, ao final dessa fase, o aluno domine o processo de aplicação do crivo de Eratóstenes, da decomposição em fatores primos e reconheça a importância dos números primos dentre as diversas áreas da matemática.

5.4 Atividades com resolução

Questão 1: Determine todos os números primos até 130, usando a tabela abaixo. Depois responda o que se pede.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130

1. Quantos são os números primos entre 1 e 130? _____
2. Liste esses números: _____
3. Qual é o único número primo par? _____

Resolução: Seguindo as instruções do texto, devemos verificar quais são os primos $p \leq \sqrt{130} \approx 11,4$. Ou seja, quando sobraem apenas números maiores do que 11, podemos parar com o processo iterativo do crivo. A solução é

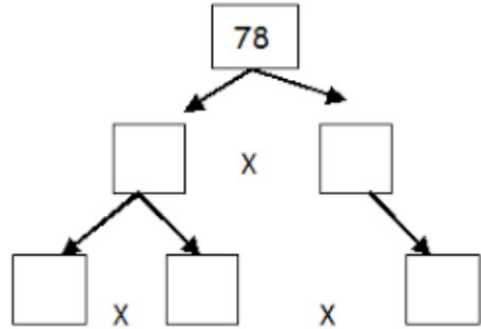
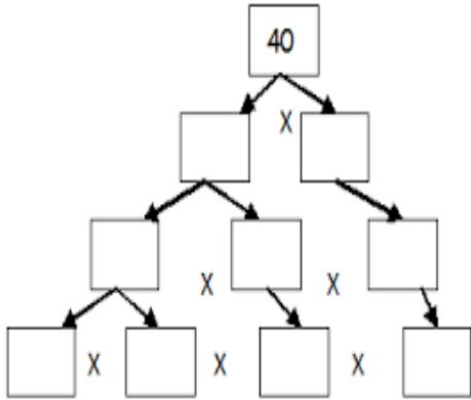
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130

Logo, as respostas às perguntas são:

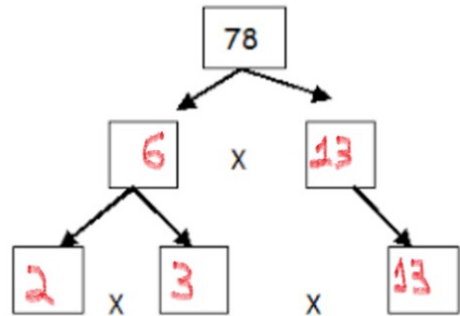
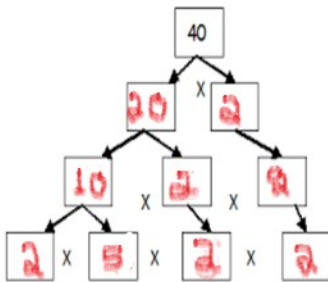
1. Quantos são os números primos entre 1 e 130? **31 números.**
2. Liste esses números: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127.**

3. Qual é o único número primo par? 2.

Questão 2: Use a árvore de fatores (divisões sucessivas) e decomponha os números dados abaixo em fatores primos.

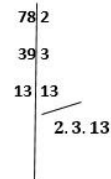
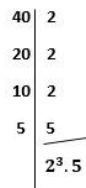


Resolução:



Questão 3: Decomponha os números 40 e 78 pelo método prático de fatoração.

Resolução:



Questão 4: Decodifique algumas mensagens utilizando o código dado na tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F
0	1	2	3	4	5

G	H	I	J	K	L
6	7	8	9	10	11

M	N	O	P	Q	R
12	13	14	15	16	17

S	T	U	V	W	X
18	19	20	21	22	23

Y	Z
24	25

a) 3 - 4 - 2 - 14 - 12 - 15 - 14 - 18 - 8 - 2 - 0 - 14: _____

b) 5 - 0 - 19 - 14 - 17 - 0 - 2 - 0 - 14: _____

c) 3 - 8 - 21 - 8 - 18 - 8 - 1 - 8 - 11 - 8 - 3 - 0 - 3 - 4: _____

Resolução:

a) 3 - 4 - 2 - 14 - 12 - 15 - 14 - 18 - 8 - 2 - 0 - 14: **DECOMPOSICAO.**

b) 5 - 0 - 19 - 14 - 17 - 0 - 2 - 0 - 14: **FATORACAO.**

c) 3 - 8 - 21 - 8 - 18 - 8 - 1 - 8 - 11 - 8 - 3 - 0 - 3 - 4: **DIVISIBILIDADE.**

Questão 4: Use a tabela abaixo para codificar as mensagens dadas:

A	B	C	D	E	F	G	H
5	x	w	z	11	a	b	2

I	J	K	L	M	N	O	P
t	13	m	i	3	m	k	7

Q	R	S	T	U	V	W	X
q	17	r	s	2	e	h	j

Y	Z	espaco
19	c	A

a) História da matemática: _____

b) Preciso concentrar: _____

c) Eu estudo a criptografia: _____

Resolução:

a) História da matemática: **2 t r s k 17 t 5 A z 5 A 3 5 s 11 3 5 s t w 5**

b) Preciso concentrar: **7 17 11 w t r k A w k m w 11 m s 17 5 17**

c) Eu estudo a criptografia: **11 2 A v r s 2 z k A w 17 t 7 s k b 17 5 a t 5**

6 Fase V – Divisores de um número

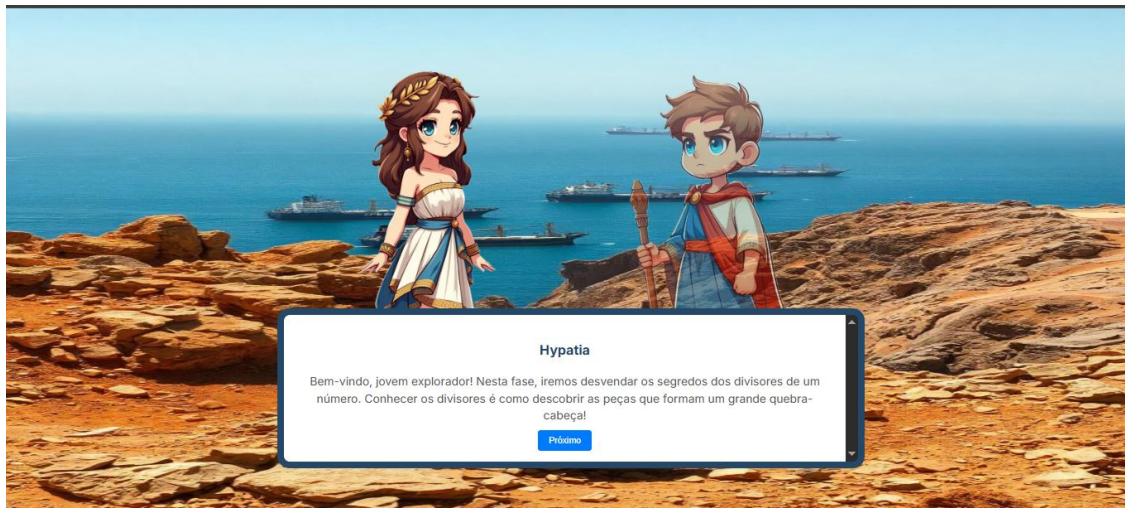


Figura 19 – Divisores de um número Fase V.

Compreender os divisores permite consolidar o aprendizado e preparar os estudantes para a fase VI, na qual o foco será o Máximo Divisor Comum (MDC). Ao entenderem a identificação e o papel dos divisores, os alunos estarão mais aptos a aplicar esse conhecimento na organização e nos cálculos em contextos diversos. Assim, esta fase reforça a continuidade do conteúdo e promove uma visão integrada do sistema de aprendizagem.

6.1 Calculando a quantidade de divisores de um número natural

A definição de divisores de um número já foi discutida na seção 4, mais especificamente após a definição 2.2.1. Abaixo apenas rephraseamos a definição

Definição 6.1.1. *Os **divisores** de um número natural n são todos os números naturais pelos quais ele pode ser dividido de forma que o resto seja zero.*

Quando fatoramos um número natural n , conforme equação (2), podemos determinar a quantidade de divisores desse número usando a fórmula

$$Q(n) = (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1), \quad (7)$$

onde recordamos que n_1, n_2, \dots, n_k são os expoentes dos fatores primos da decomposição (2) de n . Vamos exemplificar o uso da fórmula (7) em um exemplo, e depois damos uma explicação.

Exemplo 6.1.2. *Quantos são os divisores do número 40? Vamos fatorar o número.*

$$\begin{array}{r|l}
 40 & 2 \\
 20 & 2 \\
 10 & 2 \\
 5 & 5 \\
 1 & 2^3 \cdot 5
 \end{array}$$

Figura 20 – Fatoração de 40

Vemos portanto, da decomposição acima, que $40 = 2^3 \cdot 5$. Usando (7), temos que

$$Q(40) = (3 + 1) \cdot (1 + 1) = 8,$$

logo 40 possui 8 divisores.

É importante não esquecermos o motivo de somarmos 1 a cada expoente na fórmula (7). Ao decomposmos 40 e encontrarmos que $40 = 2^3 \cdot 5$, temos que 40 é divisível pelas seguintes potências de 2: $2^0, 2^1, 2^2$ e 2^3 , logo são 4 fatores. De forma análoga, 40 é divisível pelos 2 fatores a seguir: 5^0 e 5^1 . As combinações possíveis levam aos oito divisores, a saber: $1 = 2^0 \cdot 5^0$, $2 = 2^1 \cdot 5^0$, $4 = 2^2 \cdot 5^0$, $5 = 2^0 \cdot 5^1$, $8 = 2^3 \cdot 5^0$, $10 = 2^1 \cdot 5^1$, $20 = 2^2 \cdot 5^1$ e $40 = 2^3 \cdot 5^1$. Portanto, os divisores de 40 são $D(40) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$.

Embora o exemplo 6.1.2 não tenha pedido *quais* são os divisores de 40, fizemos isso para elucidar a ideia de como obter a fórmula (7) para a quantidade de divisores de um número. Na próxima subseção iremos ver alguns métodos práticos para obtermos os divisores de um número natural n dado.

6.2 Calculando os divisores de um número natural

Listamos a seguir alguns métodos para obtermos os divisores de um número natural n .

I. Método direto para determinar os divisores de um número n : Este primeiro método tem a vantagem de ser bem direto e de fácil compreensão. A desvantagem é que ele não é nada prático para números grandes.

1. Verifique quais números de 1 até n são divisores de n .
2. Liste os valores obtidos.

Vamos ilustrar a sua utilização em um exemplo simples.

Exemplo 6.2.1. Determinar os divisores de $n = 8$. Lembremos antes que $8 = 2^3$, e portanto por (7) o número 8 possui 4 divisores. Para achar quem são eles, o passo 1 é testar se cada número do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ divide 8. Fazendo um a um, temos que a divisão de 8 por 1 tem resto 0 (divide), por 2 tem resto 0 (divide), por 3 tem resto 2 (não divide), por 4 tem resto 0 (divide), por 5 tem resto 3 (não divide), por 6 tem resto 2 (não divide), por 7 tem resto 1 (não divide), e finalmente por 8 tem resto 0 (divide). Logo, os divisores de 8 são $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$.

II. Método reduzido para determinar os divisores de um número n : Este método apresenta uma pequena melhoria em relação ao método anterior.

1. Determine \sqrt{n} para diminuir as possibilidades de testes.
2. Verifique quais números de 1 até \sqrt{n} por falta dividem n .
3. Liste os valores obtidos, considerando os dois fatores obtidos em cada divisor.

Um exemplo para esclarecer o uso do método.

Exemplo 6.2.2. Determinar os divisores de $n = 28$. Inicialmente, temos que $\sqrt{28} \approx 5,3$, logo devemos testar quais são os divisores de 28 dentre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Temos que 3 e 5 não dividem 28, e para os divisores temos: $28 : 1 = 28$, $28 : 2 = 14$ e $28 : 4 = 7$, assim os divisores de 28 são $D(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$.

III. Método prático para determinar os divisores de um número n por sua decomposição em fatores primos: Uma outra maneira de encontrar os divisores de n é, como diz o nome, usando sua fatoração em primos.

1. Decompor o número em fatores primos, usando o algoritmo conhecido.
2. Multiplicar, sucessivamente, todos os fatores primos pelo divisores já listados acima dele, desconsiderando resultados repetidos.

Exemplo 6.2.3. Vamos achar novamente os divisores de $n = 28$, porém desta vez por sua fatoração.

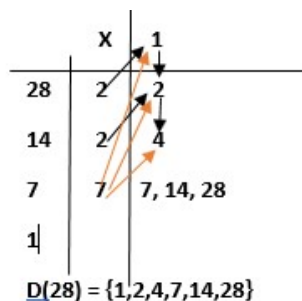


Figura 21 – Divisores de 28

7 Fase VI – Máximo Divisor Comum

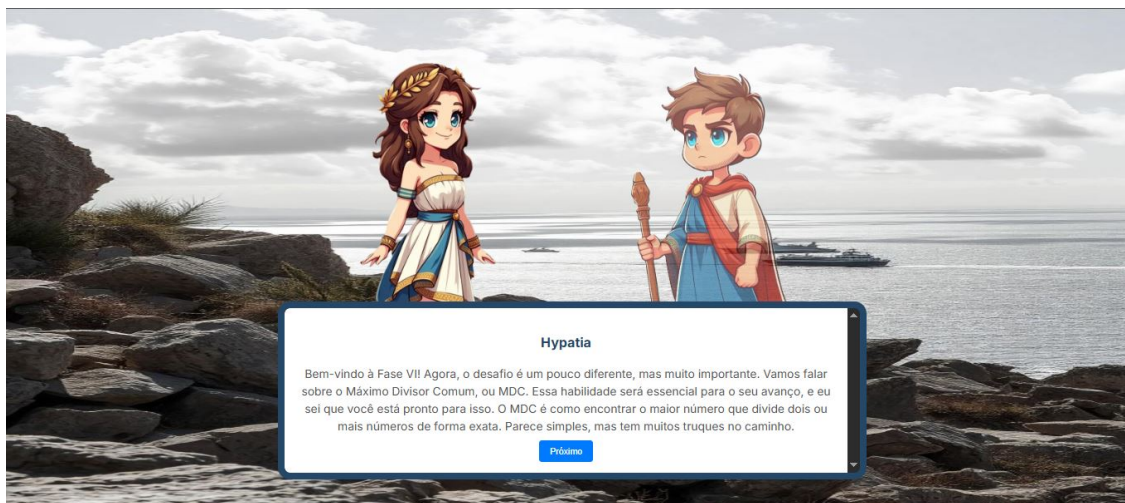


Figura 22 – Máximo Divisor Comum Fase VI.

Na seção 6, vimos alguns métodos para obter todos os divisores de um número natural n . Uma aplicação direta para isso é o estudo do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum de dois números naturais, que revisaremos respectivamente nesta e na próxima seção.

7.1 Definição e aplicabilidade do Máximo Divisor Comum

Definição 7.1.1. *O máximo divisor comum (MDC) entre dois ou mais números naturais é o maior número natural que seja fator de todos esses números.*

Dados os números naturais n, m , denotamos o MDC de n e m por $\text{mdc}(n, m)$. Analogamente, o MDC de n_1, \dots, n_m é denotado por $\text{mdc}(n_1, \dots, n_m)$.

A busca pelo maior divisor comum foi objeto de estudo da matemática na Grécia Antiga. A formalização de um algoritmo para obtenção do MDC deve-se a Euclides, na sua obra “Os Elementos” (Euclides, 2009). O eficiente método para o cálculo do MDC entre dois números é conhecido como o Algoritmo de Euclides, sendo usado até a atualidade, mas não é o único atualmente abordado nos livros didáticos. O uso do MDC permite a resolução de problemas com frações, proporções, a construção de figuras geométricas, e até na construção de elaborados algoritmos de criptografia, usados no passado de forma intuitiva por diversos povos, como, por exemplo, os babilônios e os egípcios.

Um tópico importante no ensino do Máximo Divisor Comum, porém pouco abordado em livros didáticos, é a aplicabilidade prática e teórica do MDC. São diversas as aplicabilidades do MDC, como:

- **Simplificação de frações:** Dividir o numerador e o denominador pelo máximo divisor comum permite determinar a fração irredutível.
- **Problemas de divisões:** Usado para dividir quantidades diferentes em um máximo número de elementos iguais.

- **Em problemas com períodos cíclicos:** O Máximo Divisor Comum (MDC) permite determinar o maior intervalo de tempo no qual diferentes ciclos ocorrem simultaneamente. Esse conceito é amplamente utilizado em diversas áreas, como astronomia, efemérides e tempos musicais.
- **Criptografia e teoria dos números:** Usado em algoritmos com RSA, que são instruções detalhadas escrita em linguagem de programação, que permitem a comunicação segura através de duas chaves usadas para criptografar e descriptografar mensagens. Exemplos de algoritmos com RSA: a comunicação por e-mail e aplicativos, assinaturas digitais e protocolos de segurança entre outros.
- **Redução de problemas na computação:** Usado em algoritmos que simplificam cálculos, como por exemplo, na solução de problemas em redes computacionais.
- **Planejamento de materiais e produção:** Permite determinar um tamanho máximo de peças iguais, evitando desperdício.

7.2 Métodos para determinar o máximo divisor comum

I. Método dos divisores comuns: O máximo divisor comum é determinado listando os divisores de cada número e determinando o maior comum entre eles.

- Liste todos os divisores de cada número.
- Identifique o maior divisor comum.

Exemplo 7.2.1. *Determine o máximo divisor comum de 36 e 120. Podemos usar qualquer um dos métodos da subseção 6.2 para encontrar a lista de divisores. Por exemplo*

	X	1
36	2	2
18	2	4
9	3	3, 6, 12
3	3	9, 18, 36

D (36) = {1,2,3,4,6,9,12,18, 36}

	X	1
120	2	2
60	2	4
30	2	8
15	3	3, 6, 12, 24
5	5	5,10,20,15,30, 60, 120

D (120) = {1,2,3,4,5,6,10,12,15, 20,24,30,40,60,120}

Figura 23 – Obtendo os divisores de 36 e 120.

Das listas de divisores acima, obtemos que $D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, \mathbf{12}, 18, 36\}$ e $D(120) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, \mathbf{12}, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$, onde já destacamos em negrito o maior número em comum das duas listas, logo $\text{mdc}(36, 120) = 12$.

A principal vantagem deste método é que ele é simples e pode ser determinado apenas listando os divisores, e não necessariamente exige o conhecimento de métodos como a decomposição em fatores

primos. A desvantagem é que não é prático para números grandes, pois necessita da comparação manual entre as listas de todos os divisores de cada número.

II. Método da fatoração em números primos: O máximo divisor comum é determinado pelo produto dos fatores primos comuns, usando-se o menor expoente de cada um deles.

- Fatorar cada número.
- Identificar os fatores comuns com o menor expoente de cada fator.
- Multiplicar os fatores comuns elevados ao menor expoente acima obtido.

Exemplo 7.2.2. *Determine novamente o máximo divisor comum de 36 e 120, usando desta vez o método II. Fatorando os dois números:*

$$\begin{array}{r|l}
 36 & 2 \\
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 \hline
 1 & 2^2 \cdot 3^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 120 & 2 \\
 60 & 2 \\
 30 & 2 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 \hline
 1 & 2^3 \cdot 3 \cdot 5
 \end{array}$$

Figura 24 – Fatorando os números 36 e 120.

Das fatorações $36 = 2^2 \cdot 3^2$ e $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, vemos que os fatores comuns são 2 e 3, e seus menores expoentes são, respectivamente, 2 e 1, logo $\text{mdc}(36, 120) = 2^2 \cdot 3 = 12$, conforme já sabido do exemplo 7.2.1.

As principais vantagens deste método são: i) ele aplica o teorema fundamental da aritmética 5.1.2, sendo um processo onde o aluno visualiza os fatores primos e sua importância, ii) pode ser aplicado sucessivamente para vários números, e iii) revisa o conceito de decomposição em fatores primos e potências. As desvantagens são: i) não é prático para números grandes, ii) é necessário dominar as técnicas de decomposição em fatores primos, iii) é particularmente difícil identificar fatores primos grandes, e iv) é lento para aplicações computacionais.

III. Método das divisões sucessivas por fatores comuns: Para determinar o MDC a fatoração é simultânea e apenas pelos números primos comuns.

1. Identifique o menor número primo comum a dois ou mais números
2. Divida todos os números pelo fator comum
3. Repita o processo até que não exista mais fatores comuns.
4. O máximo divisor comum será o produto dos números primos comuns.

Exemplo 7.2.3. *Determine novamente o máximo divisor comum de 36 e 120, usando desta vez o método III. Fatorando os dois números simultaneamente*

$$\begin{array}{r|l}
 36, 120 & 2 \\
 18, 60 & 2 \\
 9, 30 & 3 \\
 3, 10 & \underline{12}
 \end{array}$$

Figura 25 – Fatoração simultânea de 36 e 120.

Da fatoração simultânea ilustrada na figura acima, temos diretamente que $\text{mdc}(36, 120) = 12$.

As vantagens são: i) fica clara a redução dos números, ii) diminui a quantidade de fatores, visto que serão apenas os fatores comuns, iii) requer apenas o conhecimento prévio de números primos e de divisões.

As desvantagens: i) ainda é um processo não eficiente para números grandes, e ii) visualmente pode parecer confuso para números com grande diversidade de fatores primos.

IV. Algoritmo de Euclides: É um método que usa divisões sucessivas para determinar o MDC. Foi desenvolvido por Euclides e é eficiente para números grandes, sendo talvez o mais antigo algoritmo usado na atualidade. É importante que o aluno tenha conhecimento sobre divisão e resto. Os atuais livros didáticos do sexto ano não apresentam esse método para a determinação do máximo divisor comum.

- Divida o número maior pelo menor e obtenha o resto.
- Caso o resto seja não nulo, substitua o maior número pelo menor e o menor pelo resto.
- Repita o processo até o resto ser zero.
- O último divisor não nulo é o MDC.

O processo pode ser visualizado na figura abaixo



Figura 26 – Figura esquemática do algoritmo de Euclides.

Exemplo 7.2.4. *Determine novamente o máximo divisor comum de 36 e 120, usando desta vez o método IV. Aplicando o algoritmo de Euclides*

quociente	3	3	
120	36	12	→ MDC
resto	12	0	

Figura 27 – Algoritmo de Euclides para determinar o MDC de 36 e 120.

A aplicação direta do algoritmo nos dá que $\text{mdc}(36, 120) = 12$.

As principais vantagens: i) é um processo mais rápido, principalmente para números grandes, e ii) por ser um algoritmo é fácil de ser aplicado em qualquer linguagem de programação, tornando-se uma ferramenta para criptografia. As desvantagens: i) é necessário que o aluno domine a técnica da divisão bem como o conceito de resto, e ii) o algoritmo apresenta o MDC mas não apresenta os fatores primos, o que pode ser necessário para alguns problemas.

Segue abaixo uma tabela comparativa entre os principais métodos para calcular o Máximo Divisor Comum (MDC):

Critério	Método dos Divisores Comuns	Método da Fatoração em Primos	Método dos Fatores Comuns	Algoritmo de Euclides
Definição	Listar os divisores de cada número e determinar o maior divisor igual comum aos números.	Decompor os números em fatores primos. Multiplicar apenas os fatores comuns com seus menores expoentes	Decompor simultaneamente os números apenas pelos fatores primos comuns, até que não haja mais divisores comuns.	Usa divisões sucessivas para reduzir os números, calculando o resto até chegar ao MDC.
Facilidade de entendimento	Simple, é ideal para iniciantes. É necessário saber identificar divisores.	Requisito saber fatoração e números primos.	Fácil, pois lida apenas com divisões sucessivas de fatores comuns.	Requer conhecimento básico de divisão e restos.
Vantagem principal	Simplicidade para números pequenos e ensino básico.	Clareza na estrutura dos números.	Fácil de entender e aplicar manualmente.	Alta eficiência e rapidez em cálculos.
Desvantagem Principal	Ineficiente para números grandes.	Trabalhoso para números grandes com muitos fatores primos.	Pouco prático para números grandes ou com muitos fatores diferentes.	Requer domínio de operações de divisão e do conceito do resto.

Tabela 1 – Tabela comparativa dos métodos para determinar o máximo divisor comum (MDC).

7.3 Atividades com resolução

Questão 1: Liste os divisores de 120.

- a) Quais desses números também são divisores de 90?
 b) Qual o máximo divisor comum entre 90 e 120?

Como 90 e 120 são números relativamente pequenos, vamos resolver listando os divisores. Primeiramente, obteremos os divisores

	X	1
90	2	2
45	3	3, 6
15	3	9, 18
5	5	5, 10, 15, 30, 45, 90
1		

	X	1
120	2	2
60	2	4
30	2	8
15	3	3, 6, 12, 24
5	5	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120
1		

Figura 28 – Obtendo os divisores de 90 e 120.

Respondendo às perguntas, temos $D(120) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, \mathbf{30}, 40, 60, 120\}$, $D(90) = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, \mathbf{30}, 45, 90\}$ e portanto $\text{mdc}(120, 90) = 30$.

Questão 2: Sendo $a = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^4$ e $b = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13^4$, calcule $\text{mdc}(a, b)$.

Como a e b já são apresentados em suas respectivas formas fatoradas, então o MDC é simplesmente o produto dos fatores primos em comum, cada um com seu menor expoente, a saber

$$\text{mdc}(a, b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360.$$

Questão 3: Uma loja comprou 640 litros de detergente, 280 litros de sabão líquido e 500 litros de água sanitária. A gerente deseja colocar esses produtos, sem misturá-los, em recipientes menores, porém iguais, e na maior quantidade possível de cada um. Qual deverá ser a capacidade de cada recipiente e quantas unidades serão necessárias?

Queremos o MDC de 640, 280 e 500. O método da fatoração simultânea por números primos comuns vai facilitar a resolução do problema.

640, 280, 500	2
320, 140, 250	2
160, 70, 125	5
32, 14, 25	20

Figura 29 – Fatoração simultânea de 640, 280 e 500.

A capacidade de cada recipiente será o MDC, ou seja, 20 litros. Teremos 32 recipientes com detergente, 14 recipientes com sabão líquido e 25 recipientes de água sanitária, num total de $32+14+25= 71$ recipientes.

Questão 4: Para estocarmos em caixas com quantidades iguais 144 garrafas de água, 96 garrafas de refrigerantes e 72 garrafas de suco caixas, com o maior número possível de garrafas, sem misturá-las e sem sobrar ou faltar garrafas, qual deve ser a quantidade de garrafas por caixa?

Para determinar a quantidade de garrafas, é necessário calcular o MDC. Vamos decompor cada quantidade e escrever como o produto de potências de fatores primos, e depois fazer a multiplicação dos fatores comuns com seus menores expoentes.

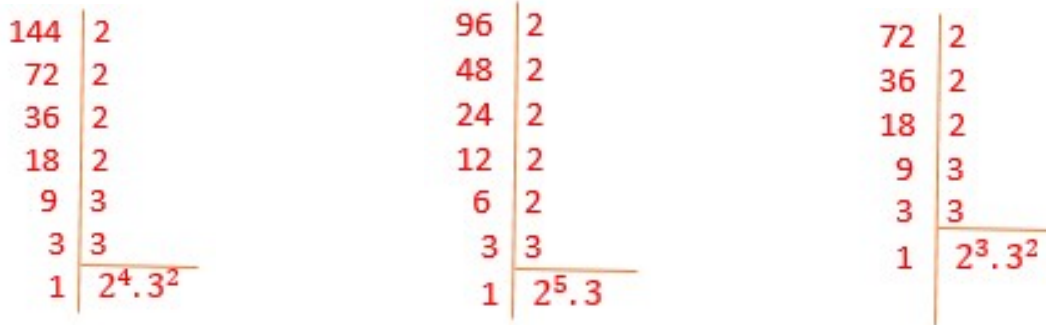


Figura 30 – Fatorando 144, 96 e 72.

Logo o MDC é $\text{mdc}(144, 96, 72) = 2^3 \cdot 3 = 24$, logo devemos estocar 24 garrafas por caixa.

Questão 5: Calcular, usando o método mais prático para números maiores, o máximo divisor comum dos seguintes pares de números:

- a) $\text{mdc}(2536, 938)$
- b) $\text{mdc}(12578, 6248)$
- c) $\text{mdc}(1589, 3584)$

Espera-se que o estudante escolha o algoritmo de Euclides

a) $\text{mdc}(2536, 938) = 2$

Quociente	2	1	2	2	1	2	17
2536	938	660	278	104	70	34	2
Resto	660	278	104	70	34	2	0

b) $\text{mdc}(12578, 6248) = 2$

Quociente	2	76	5	8
12 578	6248	82	16	2
Resto	82	16	2	0

c) $\text{mdc}(1589, 3584)$

Quociente	2	3	1	10	1	3
3.584	1589	406	371	35	21	7
Resto	406	371	35	21	7	0

8 Fase VII – Mínimo Múltiplo Comum

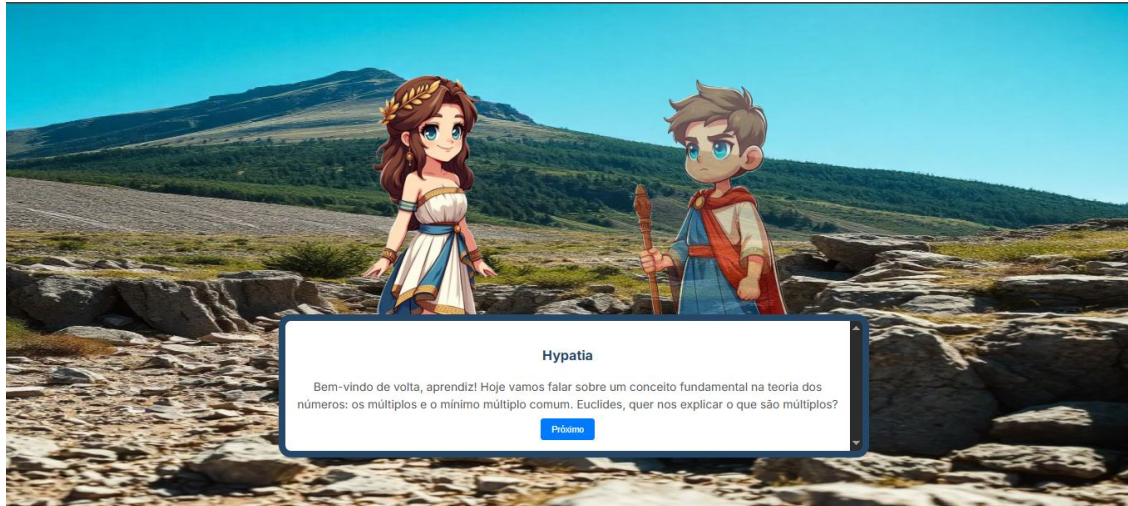


Figura 31 – Mínimo Múltiplo Comum Fase VII.

8.1 Múltiplos de um número

No texto subsequente à definição 2.2.1, já explicamos os conceitos de divisores e múltiplos, e podemos perceber que eles apresentam uma relação complementar diretamente relacionada com a divisão. É importante que o aluno entenda isso ao assimilar o conceito de divisibilidade. Vamos repetir a definição de múltiplo abaixo para os números naturais.

Definição 8.1.1. *Sejam a, b números naturais, dizemos que a é um **múltiplo** de b caso exista um número natural k tal que $a = b \cdot k$.*

Seguindo a lógica de nosso texto, apresentamos a definição de múltiplo para os números naturais, mais adequada para os alunos do sexto ano do ensino fundamental. A partir do sétimo ano os alunos trabalham com a definição no conjunto dos números inteiros. Enfatizamos que da definição acima, da definição 2.2.1, temos que a é múltiplo de b se, e somente se, b é divisor de a .

Exemplo 8.1.2. *O número 300 é múltiplo de 3, pois $300 = 3 \cdot 100$. Consequentemente, 3 é um divisor de 300.*

Listamos abaixo algumas propriedades dos múltiplos de um número:

- I. Todo número n é múltiplo de si mesmo, pois $n = n \cdot 1$.
- II. Zero é múltiplo de qualquer número, pois $0 = n \cdot 0$.

- III. Os múltiplos de um número são infinitos, pois $n \cdot k$ é múltiplo de n para todo $k \in \mathbb{N}$ (ou para todo $k \in \mathbb{Z}$).
- IV. A soma ou subtração de dois múltiplos de um número n terá como resultado um múltiplo de n . Com efeito, se N_1 e N_2 são múltiplos de n , então existem k_1 e k_2 tais que $N_1 = n \cdot k_1$ e $N_2 = n \cdot k_2$. Assim, $N_1 + N_2 = n \cdot (k_1 + k_2)$, logo a soma é múltiplo de n . A demonstração da subtração é análoga⁷.
- V. O produto de um número natural m arbitrário e de um múltiplo de n também é um múltiplo de n . De fato, temos $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot k) \cdot n$.

8.2 Definição e aplicabilidade do Mínimo Múltiplo Comum

Definição 8.2.1. *O mínimo múltiplo comum (MMC) de dois números naturais a e b é o menor inteiro positivo que é múltiplo simultaneamente de a e de b .*

Dados os números naturais n, m , denotamos o MMC de n e m por $\text{mmc}(n, m)$. Analogamente, o MDC de n_1, \dots, n_m é denotado por $\text{mdc}(n_1, \dots, n_m)$. A busca pelo menor múltiplo comum, assim como o estudo dos divisores, foram objetos de estudo de povos antigos para a resolução de problemas cotidianos e operações com frações. Por exemplo, os povos babilônicos, indianos e egípcios usavam o menor múltiplo comum de forma intuitiva, mas Euclides, em sua obra “Os Elementos” (Euclides, 2009), formalizou as definições de divisores e múltiplos. Ele cita o mínimo múltiplo comum quando relaciona o produto de dois números com o máximo divisor comum, isto é

$$\text{mmc}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{mdc}(a, b)}, \quad (8)$$

onde a e b são dois números naturais não nulos.

Algumas aplicações do MMC:

- **Determinação de frações semelhantes:** Determinar frações semelhantes permite a operação de soma e subtração de frações com denominadores diferentes.
- **Sincronização de ciclos:** Permite determinar o menor tempo que eventos em intervalos diferentes irão coincidir, eclipses...
- **Engenharia e Mecânica:** Para calcular o número de rotações necessárias para engrenagens retornem à posição inicial.
- **Programação de computadores:** Usado para gerenciar eventos que ocorrem com intervalos ou frequências diferentes, sincronização de tarefas periódicas, ciclos de animação.
- **Matemática Financeira:** Na interpretação financeira para controle de pagamentos tanto pessoa física quanto jurídicas com períodos diferentes.
- **Resolução de problemas práticos:** Problemas cotidianos são solucionados muitas vezes de forma intuitiva, mas o mínimo múltiplo comum é uma ferramenta que pode auxiliar nos cálculos de sincronização de eventos, planejamento de intervalos repetitivos, organização de turnos, gestão de estoque e produção, planejamento de viagens.

⁷ Se estivermos restritos aos números naturais, devemos tomar cuidado na ordem da subtração para não obtermos um número negativo.

8.3 Métodos para determinar o mínimo múltiplo comum

Os métodos descritos a seguir são análogos aos usados para a obtenção do MDC e descritos na subseção 7.2. Comentaremos a diferença em cada caso.

I. Método das listas comuns: O mínimo múltiplo comum é determinado listando os múltiplos de cada número e determinando o menor comum entre eles. Note que a lista de múltiplos é infinita, ao contrário das listas de divisores.

- Liste os múltiplos de cada número.
- Identifique o menor múltiplo comum.

Exemplo 8.3.1. *Determine o mínimo múltiplo comum de 8 e 12. Os múltiplos de 8 são $M(8) = \{8, 16, \mathbf{24}, 32, 40, \dots\}$, ao passo que os múltiplos de 12 são $M(12) = \{12, \mathbf{24}, 36, 48, 60, \dots\}$. Já destacamos em negrito o primeiro múltiplo comum entre eles, ou seja $\text{mmc}(8, 12) = 24$.*

Principais vantagens: i) simples de indicar os múltiplos, ii) visualização do comportamento dos múltiplos, e iii) prático para números pequenos. Desvantagens: i) não é prático para números grandes, ii) trabalhoso e demorado para números com múltiplos distantes, iii) a listagem tende a erros, e iv) não é prático para o MMC de uma maior quantidade de números.

II. Método da fatoração em números primos: Assim como feito para o MDC, calcula-se o MMC pela fatoração dos números dado. Entretanto, devemos considerar todos os fatores primos, e cada qual com o seu maior expoente.

- Fatorar cada número dado, escrevendo como um produto de potências dos fatores primos.
- Identificar todos os fatores, cada um com o seu maior expoente.
- Multiplicar todos os fatores obtidos no passo anterior.

Exemplo 8.3.2. *Determine o mínimo múltiplo comum de 8, 12 e 20. Fatorando cada número*

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \mathbf{2^3} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \mathbf{2^2 \cdot 3} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \mathbf{2^2 \cdot 5} \end{array}$$

Figura 32 – Fatorando os números 8, 12 e 20.

Das fatorações acima, temos $\text{mmc}(8, 12, 20) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

Vantagens: i) é prático e direto para números com poucos dígitos, ii) possui regra clara e direta, iii) pode ser facilmente executado para mais de dois números. Desvantagens: i) não é prático para números grandes, ii) é necessário dominar as técnicas de decomposição em fatores primos, iii) exige atenção para identificar fatores primos comuns com maior expoente e os fatores não primos, e iv) lento para aplicações computacionais.

III. Método da decomposição simultânea: Para determinar o MMC, efetuamos a fatoração simultânea, porém até que todos os quocientes sejam 1.

- Escreva os números lado a lado, separados por vírgulas.
- Identificar o menor número primo que divide um ou mais números a serem fatorados.
- Repita o processo até que todos os quocientes sejam 1.
- Multiplique todos os divisores primos para determinar o MMC.

Exemplo 8.3.3. *Determine o mínimo múltiplo comum de 8, 12 e 20, desta vez usando o método III. Fazendo a fatoração simultânea*

$$\begin{array}{r|l}
 8,12,20 & 2 \\
 4,6,10 & 2 \\
 2,3,5 & 2 \\
 1,3,5 & 3 \\
 1,1,5 & 5 \\
 1,1,1 & 2^3 \cdot 3 \cdot 5
 \end{array}$$

Figura 33 – Fatoração simultânea de 8, 12 e 20.

Já obtemos diretamente, conforme figura acima, que $\text{mmc}(8, 12, 20) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

Vantagens: i) a apresentação visual é fácil, ii) pode determinar o mínimo múltiplo comum para uma maior quantidade de números, iii) só necessita que multiplique os fatores primos. Desvantagens: i) ainda é um processo não eficiente para números grandes, ii) exige atenção para não deixar de dividir um número pelo seu fator primo, iii) pode ser demorado para números que apresentam números primos grandes.

IV. Método da relação entre MDC e MMC: Conforme o próprio nome diz, usa a relação entre o MDC e o MMC dada pela equação (8). Foi desenvolvido por Euclides em sua obra “Os Elementos” (Euclides, 2009), e é eficiente para números grandes. Pode-se usar qualquer um dos métodos para o cálculo do MDC, como os citados na subseção 7.2. É importante que o aluno domine alguma técnica para determinar o MDC. Alguns livros didáticos do sexto ano apresentam essa relação.

- Calcule o produto dos números.
- Se o MDC não for dado, calcule-o com o método que achar mais favorável.
- Divida o produto dos números pelo MDC.

Exemplo 8.3.4. *Determine o MMC de 8 e 12 usando a relação com o MDC.*

Podemos usar qualquer método para obter $\text{mdc}(8, 12) = 4$. Assim

$$\text{mmc}(8, 12) = \frac{8 \cdot 12}{\text{mdc}(8, 12)} = \frac{8 \cdot 12}{4} = 24,$$

de acordo com o exemplo 8.3.1.

Vantagens: i) é um processo rápido quando se conhece o MDC, ii) revisa o conceito de divisão, iii) é adaptável para a linguagem computacional, iv) reduz o problema de múltiplos números para uma sequência de cálculos de dois números, v) apresenta-se de forma sistemática.

Desvantagens: i) tem que calcular o MDC se não existir essa informação, ii) em caso de mais de dois números tem que usar o MMC para calcular o próximo MDC, iii) dificuldade de multiplicar números grandes, iv) o processo manual é trabalhoso para números grandes ou para uma quantidade maior de números.

Este método é mais elaborado, usado principalmente para números grandes e processos automatizados, mas pode ser útil didaticamente para uma sequência de poucos números, de preferência dois. Muito fácil quando se conhece previamente o MDC, pode ser utilizado para fixar nos estudantes o conceito de MDC e as técnicas para o cálculo do mesmo. Também podemos fazer de forma inversa e usar a relação (8) para calcular o MDC quando se conhece o mínimo múltiplo comum dos números dados.

Segue uma tabela comparativa dos métodos apresentados

Método	Descrição	Vantagens	Desvantagens	Aplicabilidade
Lista de Múltiplos	Listar os múltiplos de cada número determinar o menor múltiplo comum.	Simples. Usado para iniciantes ou números pequenos.	Não é prático para números grandes, listas podem ser longas e propensas a erros manuais.	Nos primeiros exercícios, com números pequenos.
Fatoração em números primos	Depois de decomposto, fazer o produto de todos fatores primos, cada um com o seu maior expoente.	Sistemático, pode ser usado para determinar o MMC de uma quantidade maior de números sem maiores dificuldades.	Maior dificuldade na decomposição de números grandes, requer atenção aos expoentes, menos visual para iniciantes.	Para a decomposição em primos de dois ou mais números de tamanho moderado.
Decomposição simultânea	Divide os números simultaneamente, diminuindo a quantidade de passos no processo.	Visual, organizado e adequado para a decomposição de mais de dois números.	Trabalhoso para números grandes, depende de divisores corretos, pode ser repetitivo.	Ensino básico, em problemas envolvendo vários números pequenos ou médios.
Relação entre MDC e MMC	Usa a relação (8).	Rápido e eficiente, ideal para números grandes (computacional).	Exige o cálculo prévio do MDC, ideal para calcular o MMC de dois números.	Programação e cálculos envolvendo números grandes ou operações automatizadas.

Tabela 2 – Tabela comparativa dos métodos para determinar o mínimo múltiplo comum (MMC)

8.4 Atividades com resolução

Questão 1: Classifique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada uma das afirmativas abaixo:

- 240 é múltiplo de 8 18 é divisor de 72 14 divide 280
 10 é divisor de 450 16 é múltiplo de 48 345 é múltiplo de 15
 72 é divisível por 18 48 é múltiplo de 16 15 é divisor de 345

Resposta:

- 240 é múltiplo de 8 18 é divisor de 72 14 divide 280
 10 é divisor de 450 16 é múltiplo de 48 345 é múltiplo de 15
 72 é divisível por 18 48 é múltiplo de 16 15 é divisor de 345

Questão 2: Qual é o primeiro múltiplo de 9 maior que 2000?

Resolução: Pelo critério de divisibilidade por 9, um número é divisível por 9 quando a soma dos algarismos é um número múltiplo de 9. Assim $2+0+0+0=2$ $9-2=7$ então o primeiro número será $2000 + 7 = 2007$.

Questão 3: Escolha dois múltiplos positivos de 8:

- a) Calcule a sua soma
b) Determine a diferença entre o maior e o menor.
c) Qual é o produto desses múltiplos?
d) Os valores encontrados nas alternativas acima são múltiplos de 8? Porque? Isso acontecerá com os múltiplos de qualquer outro número natural?

Resolução: Suponhamos que o aluno escolheu 16 e 32.

- a) $16 + 32 = 48$.
b) $32 - 16 = 16$.
c) $16 \times 32 = 512$.
d) Sim. $6 \times 8 = 48$, $2 \times 8 = 16$, $64 \times 8 = 512$. Portanto todos são múltiplos de 8, em acordo com as propriedades dos múltiplos de um número que determina que a soma, subtração e produto dos múltiplos de um número terão como resultado múltiplos desse número.

Questão 4: Pense nos múltiplos de 3.

- a) Indique quais são menores que 39.
b) Dos números encontrados no item a), quais são múltiplos de 4?
c) Qual é o mínimo múltiplo comum entre 3 e 4?

Resolução:

a) $M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39\}$.

b) São eles: $\{0, 12, 24, 36\}$.

c) $\text{mmc}(3, 4) = 12$.

Questão 5: Sou maior que 200 e menor que 340. Sou múltiplo de 20 e de 50. Quem sou eu?

Vamos fazer o mínimo múltiplo comum de 20 e 50. Determinar os múltiplos do MMC e verificar qual deles é maior que 200 e menor que 340.

20,50		2
10,25		2
5,25		5
1,5		5
1,1		100

Figura 34 – MMC de 20 e 50.

Os múltiplos de 100 são $M(100) = \{0, 100, 200, 300, 400, 500, \dots\}$, logo o número procurado é 300.

Questão 6: Para cada item, determine os valores das letras para que as decomposições fiquem corretas e, em seguida, calcule o MMC dos pares de números:

30, A		2
B, 9		C
D, E		3
5, 1		F
1, 1		

(a) Item a)

A, 350		2
150, B		C
D, 175		3
E, F		5
5, G		5
1, 7		H
1, 1		

(b) Item b)

Resolução:

a) $A = 9 \times 2 = 18$, $B = 30 : 2 = 15$, $C = 9 : 3 = 3$, $D = 15 : 3 = 5$, $E = 3 : 3 = 1$, $F = 5$. Logo, o MMC é $\text{mmc}(30, 18) = 2 \times C \times 3 \times F = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$.

b) $A = 150 \times 2 = 300$, $B = 350 : 2 = 175$, $C = 2$, $D = 150 : 2 = 75$, $E = 75 : 3 = 25$, $F = 175$, $G = 175 : 5 = 35$, $H = 7$. Assim, o MMC é $\text{mmc}(300, 350) = 2 \times C \times 3 \times 5 \times 5 \times H = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2100$.

Questão 7: Em uma cesta há menos de 70 ovos. Sabemos que:

- Se tirarmos de 4 em 4, sobram 2 ovos

- Se tirarmos de 10 em 10, sobram 2 ovos
- Se tirarmos de 15 em 15, sobram 2 ovos

Quantos ovos há na cesta?

Resolução: Se o número de ovos é n , sabemos que $n - 2$ é múltiplo de $4 = 2^2$, de $10 = 2 \cdot 5$ e de $15 = 3 \cdot 5$, e portanto $\text{mmc}(4, 10, 15) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Como há menos de 70 ovos, então $n = 62$.

Questão 8: Se $\text{mdc}(b, c) = 4$ e $\text{mmc}(b, c) = 1008$, e sabendo-se que $b = 36$, qual o valor de c ?

Resolução: Reescrevendo a equação (8), obtemos

$$b \cdot c = \text{mdc}(b, c) \cdot \text{mmc}(b, c) \Rightarrow c = \frac{\text{mdc}(b, c) \cdot \text{mmc}(b, c)}{b} = \frac{4 \cdot 1008}{36} = 112.$$

9 Fase Final – “Chefão”

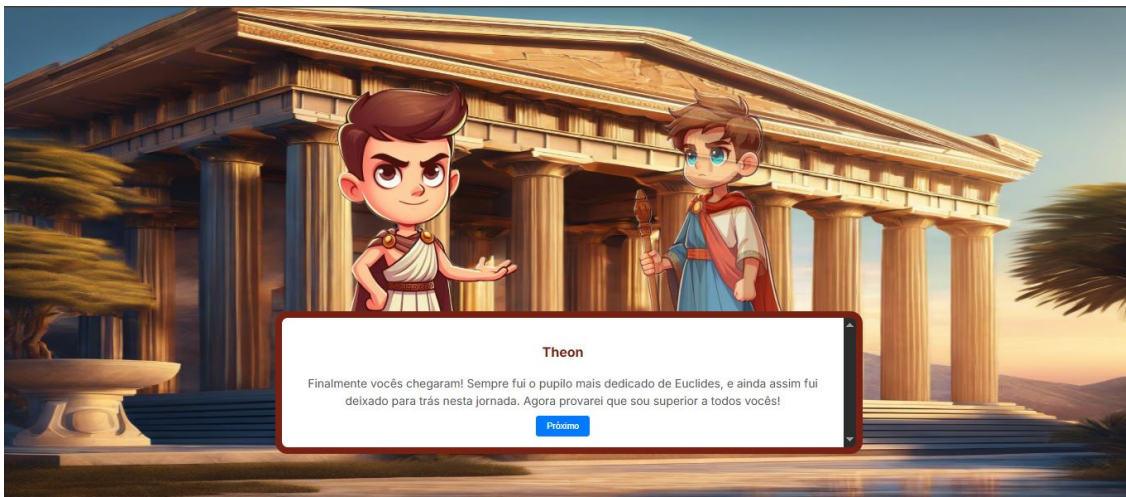


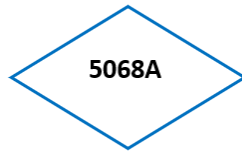
Figura 36 – Chefão - o Desafio Fase VIII.

A fase do Chefão representa um momento crucial dentro do contexto do jogo. Nela, Teon, o melhor pupilo de Euclides, surge para desafiar o aluno que chegou até essa etapa. Sentindo-se injustiçado por Hipátia ter percorrido a jornada ao lado de Euclides e não ter sido escolhido por seu mestre, Teon propõe um duelo de conhecimentos. Para avançar, o aluno deve superar esse desafio e conquistar o direito de entrar na Biblioteca de Alexandria.

Nessa etapa uma bateria de exercícios que permitirá ao professor avaliar a aprendizagem do aluno de forma mais detalhada. Esse diagnóstico será essencial para identificar possíveis lacunas e garantir que o aluno, ao utilizar o aplicativo, não se sinta desmotivado por desconhecer a teoria ou os modelos de exercícios. Um diferencial desta fase é que o aluno, diferentemente das etapas anteriores, precisará identificar por conta própria qual teoria deve ser aplicada para resolver cada exercício.

9.1 Atividades com resolução

Questão 1: Considere A o algarismo das unidades do número abaixo. Qual deve ser o menor valor atribuído a essa letra para que esse número seja divisível por 2 e 9, simultaneamente?



Resolução: Pelos critérios de divisibilidade, temos:

Para ser divisível por 2, o número tem de ser par, ou seja, os possíveis valores de A são: 0, 2, 4, 6, 8.

Para ser divisível por 9, a soma dos algarismos tem de ser múltiplo de 9. Uma vez que $5 + 0 + 6 + 8 = 19$, o múltiplo de 9 imediatamente superior a 19 é 27, então $27 - 19 = 8$.

Portanto para ser múltiplo de 2 e de 9, temos $A = 8$.

Questão 2: Sabe-se que a decomposição em fatores primos de 7200 pode ser escrita como $7200 = 2^x \times 3^y \times 5^z$. Qual o valor de $x + y + z$?

Resolução: Vamos decompor 7200 em fatores primos.

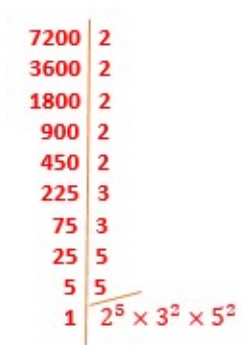


Figura 37 – Fatoração de 7200.

Temos $x = 5$, $y = 2$ e $z = 2$, logo $x + y + z = 5 + 2 + 2 = 9$.

Questão 3: Descubra a senha de três dígitos, observando as dicas:

1. Divisível por 20.
2. É um número entre 100 e 150
3. Possui exatamente 12 divisores.

A senha encontrada foi: _____

Resolução:

1. Se é divisível por 20 e tem 3 dígitos, então é múltiplo de 20, dentro desse intervalo temos: $\{100, 120, 140, 160, \dots\}$.

2. Sendo um número entre 100 e 150, temos: $\{120, 140\}$.

3. $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, assim $Q(120) = (3 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 4 \times 2 \times 2 = 16$, logo não é o número 120. Confirmando a outra possibilidade, sabemos que $140 = 2^2 \times 5 \times 7$, portanto $Q(140) = (2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 \times 2 = 12$.

4. 140 é par.

A senha procurada é 140.

Questão 4: Represente cada número no quadro de ordens e classes, e depois decomponha cada um de acordo com o sistema de numeração decimal.

a) 2.874

d) 40.094.697

b) 827.484.470

e) 68.720

c) 9.086.253

f) 543.210

Classe dos milhões			Classe dos milhares			Classe das unidades		
Centenas de milhões	Dezenas de milhões	Unidades de milhões	Centenas de milhares	Dezenas de milhares	Unidades de milhares	Centenas	Dezenas	Unidades

Tabela 3 – Tabela posicional

Resolução:

Classe dos milhões			Classe dos milhares			Classe das unidades		
Centenas de milhões	Dezenas de milhões	Unidades de milhões	Centenas de milhares	Dezenas de milhares	Unidades de milhares	Centenas	Dezenas	Unidades
					2	8	7	4
	4	0	0	9	4	6	9	7
8	2	7	4	8	4	4	7	0
				6	8	7	2	0
		9	0	8	6	2	5	3
			5	4	3	2	1	0

Tabela 4 – Resolução tabela posicional

temos:

a) $2874 = 2 \times 1000 + 8 \times 100 + 7 \times 10 + 4 \times 1$

b) $40094697 = 4 \times 10000000 + 9 \times 10000 + 6 \times 100 + 9 \times 10 + 7 \times 1$

- c) $827484470 = 8 \times 100000000 + 2 \times 10000000 + 7 \times 1000000 + 4 \times 100000 + 8 \times 10000 + 4 \times 1000 + 4 \times 100 + 7 \times 10$
- d) $68720 = 6 \times 10000 + 8 \times 1000 + 7 \times 100 + 2 \times 20$
- e) $9086253 = 9 \times 1000000 + 8 \times 10000 + 6 \times 1000 + 2 \times 100 + 5 \times 10 + 3 \times 1$
- f) $543210 = 5 \times 100000 + 4 \times 10000 + 3 \times 1000 + 2 \times 100 + 1 \times 10$

Questão 5: Divida 1458 por 34 e responda o que se pede.

- a) Qual é o resto da divisão?
- b) Qual valor deve ser subtraído de 1458 para que o quociente permaneça o mesmo e a divisão por 34 seja exata?
- c) Qual o menor valor que se deve somar a 1458 para que a divisão fique exata?

Resolução:

$$\begin{array}{r}
 1458 \overline{) 34} \\
 - 136 \quad 42 \\
 \hline
 98 \\
 - 68 \\
 \hline
 30
 \end{array}$$

Figura 38 – Divisão de 1458 por 34

- a) O resto da divisão é 30
- b) Deverá subtrair do dividendo o valor do resto, ou seja, $1458 - 30 = 1428$.
- c) Como já temos um resto de 30 unidades e precisamos que o total seja divisível por 34, é necessário somar mais 4 unidades a 1458, pois $30 + 4 = 34$, que é divisível por 34.

Questão 6: Em uma competição de matemática, os participantes foram desafiados a analisar o número 16.632. Uma das tarefas propostas é determinar quantos divisores esse número possui. Resolva o desafio e encontre a quantidade total de divisores de 16.632.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l}
 16\ 632 & 2 \\
 8\ 316 & 2 \\
 4\ 158 & 2 \\
 2\ 079 & 3 \\
 693 & 3 \\
 231 & 3 \\
 77 & 7 \\
 11 & 11 \\
 1 & \\
 \hline
 & 2^3 \times 3^3 \times 7 \times 11
 \end{array}$$

De acordo com (7)

$$D(16.632) = (3 + 1) \times (3 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 64$$

O número 16.632 possui 64 divisores.

Questão 7: Fernanda está organizando sua coleção de livros. Ela percebeu que:

- Quando coloca os livros em pilhas de 6, sobra 1 livro.
- Quando coloca os livros em pilhas de 7, não sobra nenhum.

Sabendo que a quantidade total de livros está entre 20 e 70, quantos livros Fernanda tem?

Resolução:

Listar os múltiplos de 6 no intervalo de 20 a 70.

Listar os múltiplos de 7 no intervalo de 20 a 70.

Somar uma unidade a cada múltiplo de 6.

Determinar a interseção do novo conjunto como os múltiplos de 7.

$$M(6) = \{24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66\}$$

$$M(7) = \{21, 28, 35, 42, \mathbf{49}, 56, 63\}$$

$$M(6) + 1 = \{25, 31, 37, 43, \mathbf{49}, 55, 61, 67\}$$

Fernanda tem 49 livros.

Questão 8: O dono de um estacionamento, apaixonado por conceitos matemáticos, decidiu inovar em seu estabelecimento, que aceita apenas carros. Ele instalou um placar que exibe o número de rodas dos veículos estacionados e a capacidade máxima do estacionamento.

Quantidade de rodas estacionadas: 2084
Capacidade do estacionamento: 550 carros

De acordo com as informações do placar, responda:

- Quantos carros estão estacionados?
- Com a informação do placar, quantos carros ainda podem entrar nesse estacionamento?
- Qual a capacidade desse estacionamento em quantidade de rodas?

Resolução:

$$\begin{array}{r} 2084 \quad | \quad 4 \\ - 20 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ 08 \\ - 08 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ 04 \\ - 04 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ 0 \end{array}$$

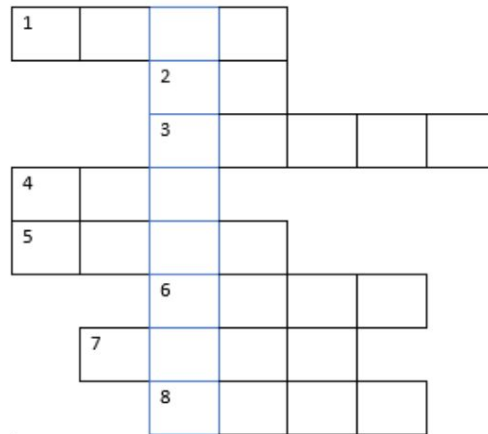
Figura 39 – Divisão de 2084 por 4

- Existem 521 carros estacionados.
- $550 - 521 = 29$
Ainda existem vagas para 29 carros.
- $29 \times 4 = 116$
 $2084 + 116 = 2200$
Existe uma capacidade para 2.200 rodas.

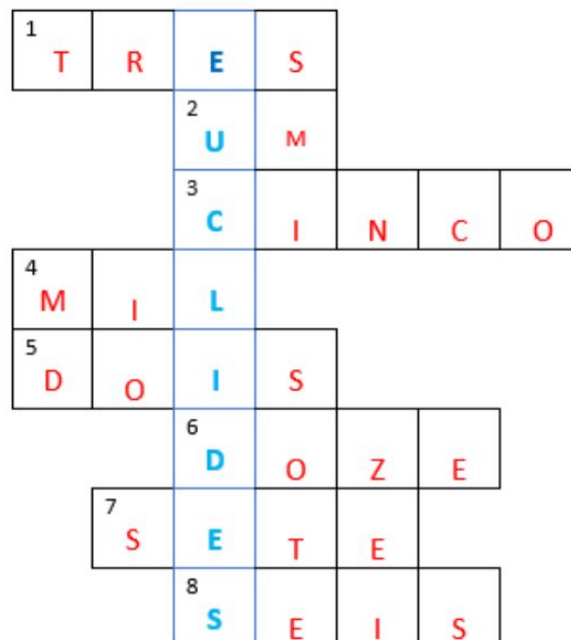
Questão 9: Escreva as respostas das questões da cruzadinha por extenso, utilizando palavras ao invés de números ou abreviações. Após concluir, responda às perguntas propostas

- Qual o divisor de 18 cujo quociente é 6 e resto é zero?
- Qual o menor número natural, divisor de qualquer número?
- Determine o resultado da potência de base 5 e expoente 1.

4. Quanto representa uma unidade de milhar em valor numérico?
5. Qual o menor número primo existente?
6. Calcule o mínimo múltiplo comum (M.M.C.) entre 3 e 4.
7. Qual o máximo divisor comum (M.D.C) entre 245 e 847?
8. Quantos divisores possui o número 45?



Resolução:



Questão 10: Dados os números $A = 2^4 \times 3^5 \times 5^3 \times 13$ e $B = 2^3 \times 3^2 \times 5^4 \times 11$. Calcule escrevendo na forma fatorada.

$$MDC(A, B) =$$

$$MMC(A, B) =$$

$$MDC(A, B) \times MMC(A, B) =$$

Resolução:

Devemos determinar o produto dos termos comuns de menor expoente, o exercício pede para deixar na forma fatorada.

$$MDC(A, B) = 2^3 \times 3^2 \times 5^3.$$

Devemos determinar o produto dos termos comuns de maior expoente e os não comuns, o exercício pede para deixar na forma fatorada.

$$MMC(A, B) = 2^4 \times 3^5 \times 5^4 \times 11 \times 13.$$

Usando a propriedade do produto de potências de bases iguais, devemos multiplicar a base e somar os expoentes

$$MDC(A, B) \times MMC(A, B) = 2^7 \times 3^7 \times 5^7 \times 11 \times 13$$

Questão 11: Um grupo de amigos com interesse em astronomia periodicamente se encontra para observar dois fenômenos de astronomia. O primeiro evento ocorre a cada 4 anos, nos anos bissextos. O segundo evento ocorre a cada 10 anos, em um dia especial para observar eclipses raros. Se os dois eventos foram realizados juntos pela última vez em 2005, em que ano os dois eventos ocorrerão juntos novamente?

Resolução: Para determinar o menor tempo possível para os eventos ocorrerem juntos vamos fazer o m.m.c. (4,10).

$$\begin{array}{r|l} 4, 10 & 2 \\ 2, 5 & 2 \\ 1, 5 & 5 \\ 1, 1 & 20 \end{array}$$

Figura 40 – Fatoração de 4 e 10

$$\text{Próximo ano : } 2000 + 20 = 2020$$

O evento ocorrerá novamente no ano de 2020.

Questão 12: Uma professora de matemática passou o seguinte desafio na sala de aula. “A idade de meus filhos atualmente são dois números primos. Se o produto das idades é 323”. Qual a idade dos meus filhos?

Resolução: Sabemos o valor do produto das idades. Então fatorando 323 temos. Temos os seguintes números primos: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...} Queremos um produto onde a unidade é 3 por tentativa e erro temos:

$$11 \times 13 = 143 \text{ Não convém}$$

$$17 \times 19 = 323 \text{ Convém}$$

Portanto os filhos da professora tem 17 e 19 anos.

Questão 13: Codifique ou decodifique as mensagens utilizando o código fornecido na tabela. Observe atentamente a relação entre os símbolos, números ou letras e aplique as regras **corretamente** para transformar a mensagem de acordo com o objetivo (codificar ou decodificar)."

A	B	C	D	E	F	G	H
5	x	w	z	11	a	b	2

I	J	K	L	M	N	O	P
t	13	m	i	3	m	k	7

Q	R	S	T	U	V	W	X
q	17	r	s	2	e	h	j

Y	Z	espaco
19	c	A

Figura 41 – codificação e decodificação

- a) z - t - e - t - r - k - 17 - 11 - r:
- b) Numeros Primos:
- c) 5 - s - t - e - t - z - 5 - z - 11 - r:
- d) Matematica:

Resolução:

- a) DIVISORES
- b) m - 2 - 3 - 11 - 17 - k - r - A - 7 - 17 - t - 3 - k - r
- c) ATIVIDADES
- d) 3 - 5 - s - 11 - 3 - 5 - s - t - w - 5

Questão 14: Em uma aula sobre divisores, o professor pede aos alunos que determinem a soma de todos os divisores do número 1960. Qual é o valor correto que os alunos deverão encontrar ao realizar esse cálculo?

Resolução:

1960	2
980	2
490	2
245	5
49	7
7	7
1	$2^3 \times 5 \times 7^2$

Figura 42 – fatoração de 1960

$$S[D(n)] = \left(\frac{b_1^{\text{exp}+1} - 1}{b_1 - 1} \right) \times \left(\frac{b_2^{\text{exp}+1} - 1}{b_2 - 1} \right) \times \dots \times \left(\frac{b_k^{\text{exp}+1} - 1}{b_k - 1} \right)$$

$$S[D(1960)] = \left(\frac{2^{3+1} - 1}{2 - 1} \right) \times \left(\frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1} \right) \times \left(\frac{7^{2+1} - 1}{7 - 1} \right)$$

$$S[D(1960)] = \left(\frac{2^4 - 1}{1} \right) \times \left(\frac{5^2 - 1}{4} \right) \times \left(\frac{7^3 - 1}{6} \right)$$

$$S[D(1960)] = \left(\frac{15}{1} \right) \times \left(\frac{24}{4} \right) \times \left(\frac{342}{6} \right)$$

$$S[D(1960)] = \left(\frac{15}{1} \right) \times \left(\frac{24}{4} \right) \times \left(\frac{342}{6} \right)$$

$$S[D(1960)] = 15 \times 6 \times 57$$

Considerações Finais

Este trabalho apresentou a proposta de um aplicativo educacional de matemática, desenvolvido para envolver alunos do sexto ano do Ensino Fundamental em uma jornada interativa e divertida. Além de apresentar o aplicativo, a monografia atuou como um suporte pedagógico, fornecendo uma base teórica sólida antes que os alunos tivessem contato com as fases do aplicativo. O conteúdo foi estruturado com conceitos, exemplos e demonstrações adaptados ao conhecimento prévio de estudantes dessa etapa, buscando transformar demonstrações matemáticas, muitas vezes apresentadas como regras a serem “decoradas”, em aprendizados significativos e compreensíveis.

Essa abordagem não apenas visou garantir a compreensão dos conceitos, mas também buscou preparar os alunos para se sentirem confiantes e aptos a superar as etapas do aplicativo. Durante a jornada, eles foram incentivados a aplicar, de forma eficaz, todo o conhecimento adquirido, consolidando o aprendizado e fortalecendo sua autoconfiança na matemática.

Portanto, o aplicativo proposto não apenas contribui para o aprendizado matemático dos alunos, mas também promove o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, estimula a curiosidade e incentiva a autonomia na aprendizagem. Ao conectar o conteúdo matemático à história e ao desenvolvimento de competências, o aplicativo propõe uma transformação do ensino tradicional, tornando o aprendizado de matemática uma experiência mais envolvente e significativa para os estudantes.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus por me conceder a persistência necessária para vencer os obstáculos e por colocar pessoas especiais em meu caminho, que contribuíram de maneira significativa para esta conquista.

Agradeço aos meus pais, que sempre me proporcionaram uma educação de qualidade. Em especial, à minha mãe, Nildete, que renunciou ao seu sonho acadêmico para dedicar-se à educação dos filhos e que, hoje, se prepara para concluir sua tão sonhada graduação em Direito.

Ao meu grande amor, Carlos Pacelli, minha eterna gratidão por sua cumplicidade, dedicação e pela confiança que sempre depositou em mim, mesmo nos momentos em que duvidei de minha própria capacidade. Você nunca deixou de enfatizar que eu poderia recomeçar, mas que desistir não era uma opção. Obrigada por estar ao meu lado, me acompanhando até a faculdade todas as sextas-feiras, por aliviar meu cansaço e desânimo, e por vibrar mais do que todos quando fui aprovada no Exame Nacional de Qualificação (ENQ). Essa vitória será sempre nossa; jamais teria conseguido sem você.

Ao meu filho Arthur, meu companheiro e grande incentivador, que foi fundamental para a implementação do aplicativo apresentado como produto desta monografia. Você sempre foi e sempre será meu maior orgulho.

À Professora Mariana Garabini, minha coorientadora, que me inspirou com seu vasto conhecimento, dedicação e respeito, sempre lecionando aulas brilhantes.

E um agradecimento especial ao meu orientador, Professor Humberto Lemos, que acreditou em um projeto voltado para alunos de 6º ano e se destacou como um orientador presente, competente e eficiente. Que ao compartilhar minhas dúvidas sobre continuar, com serenidade, respondeu: ‘o mais difícil já passou’. E ele estava certo. Um professor que, com sua dedicação e comprometimento, me inspirou a sonhar em um dia, ser uma professora capaz de fazer a diferença na vida de seus alunos, assim como ele fez na minha.

Aos meus colegas do Profmat, que compartilharam conhecimentos, companheirismo e ofereceram apoio nos momentos de dificuldade ao longo do curso.

Aos professores do Curso Profmat-UFSJ-CAP, que contribuíram de forma significativa para minha formação acadêmica.

Ao Renato Cesário, secretário do Profmat-CAP, por todo o suporte eficiente, pela gentileza e agilidade em seu atendimento.

À Capes, pelo apoio financeiro que tornou a realização deste sonho possível.

Referências

ALEXANDRINA, B. *Virtual Antiquities Museum*. 2023. <<https://sidequestvr.com/app/13381/virtual-antiquities-museum>>. Acessado em: 11/12/2024.

BZUNECK, J. A. *A motivação do aluno: contribuições da psicologia contemporânea*. [S.l.]: Petrópolis: Vozes, 2009.

Euclides. *Os elementos*. [S.l.]: Unesp, 2009.

GOIÂNIA, S. M. E. *Operações matemáticas básicas com números naturais: múltiplos e divisores*. 2021. <https://sme.goiania.go.gov.br/conexaoescola/ensino_fundamental/matematica-operacoes-matematicas-basicas-com-numeros-naturais-multiplos-e-divisores/>. Acessado em: 02/12/2024.

HEFEZ, A. *Aritmética*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2022.

INEP. *Divulgados os resultados do PISA 2022*. 2022. <<https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/acoes-internacionais/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022>>. Acessado em: 25/10/2024.

INEP. *Resultados do IDEB 2023*. 2023. <https://download.inep.gov.br/ideb/apresentacao_ideb_2023.pdf>. Acessado em: 14/01/2025.

MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. 1997. <<https://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acessado em: 25/10/2024.

MEC. *Evasão escolar no Brasil*. 2022. <<https://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/evasao-escolar>>. Acessado em: 25/10/2024.

PANEQUE, C. G. *La Alejandría que diseñó Alejandro Magno*. 2020. <<https://americanuestra.com/la-alejandria-que-diseno-alejandro-magno/>>. Acessado em: 11/12/2024.

SANTOS, M. *Hidrômetro*. 2010. <<https://imagens.usp.br/editorias/objetos-categorias/agua-potavel-2/attachment/aguafotomarcossantos020/>>. Acessado em: 11/12/2024.

WIKIPEDIA. *Astrolábio*. 2015. <[https://en.wikipedia.org/wiki/Mariner%27s_astrolabe#/media/File:Astrolabe_\(PSF\).png](https://en.wikipedia.org/wiki/Mariner%27s_astrolabe#/media/File:Astrolabe_(PSF).png)>. Acessado em: 11/12/2024.

WIKIPEDIA. *Biblioteca de Alexandria*. 2024. <https://pt.wikipedia.org/wiki/Biblioteca_de_Alexandria>. Acessado em: 11/12/2024.

WIKIPEDIA. *Crivo de Eratóstenes*. 2024. <https://pt.wikipedia.org/wiki/Crivo_de_Erat%C3%B3stenes>. Acessado em: 11/12/2024.