UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PRODUTO EDUCACIONAL

PENSAMENTO COMPUTACIONAL COM MATEMÁTICA: Introduzindo conceitos básicos da programação com atividades desplugadas

NICOLE CRISTINE RECH

JOINVILLE, SC
2024

Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
Programa: MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
Nível: MESTRADO PROFISSIONAL
Área de Concentração: Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática

Título: PENSAMENTO COMPUTACIONAL COM MATEMÁTICA: Introduzindo conceitos básicos da programação com atividades desplugadas
Autora: Nicole Cristine Rech
Orientadora: Profa. Dra. Viviane Maria Beuter
Data: 29/08/2024

Produto Educacional: Caderno Pedagógico
Nível de ensino: Ensino Fundamental II e Ensino Médio.
Área de Conhecimento: Matemática
Tema: Pensamento Computacional

Descrição do Produto Educacional:
Resultado da pesquisa sobre Pensamento Computacional, este caderno pedagógico apresenta atividades para o professor de Matemática que deseja introduzir conceitos de programação por meio de fluxogramas e pseudocódigo em sala de aula. O Pensamento Computacional torna-se um conceito relevante, especialmente no desenvolvimento de habilidades para a resolução de problemas, que também dialoga com a Matemática. O caderno inclui quatro atividades desplugadas, dentre elas alguns desafios lógicos, permitindo ao professor aprimorar as competências de programação junto a seus alunos.

Biblioteca Universitária UDESC: https://www.udesc.br/bu

Publicação Associada: Pensamento Computacional: uma proposta de como introduzi-lo no ensino de matemática na educação básica

URL: http://www.udesc.br/cct/profmat

Arquivo	*Descrição	Formato
4.932KB	**Texto completo**	**Adobe PDF**

Este item está licenciado sob uma Licença Creative Commons
Atribuição - Não Comercial - CompartilhaIgual CC BY-NC-SA

SUMÁRIO

1. LABIRINTOS LÓGICOS

1.1 Objetivos

Objetivo Geral:

Aprimorar o raciocínio lógico utilizando estruturas condicionais em sentenças lógicas simples e compostas.

Objetivos Específicos:

- Compreender operadores lógicos em contextos;
- Identificar passos importantes para chegar ao objetivo (decomposição e reconhecimento de padrões);
- Criar e construir uma estratégia para resolver o labirinto (decomposição e abstração);
- Desenvolver e aplicar uma notação para abstrair os movimentos possíveis no labirinto, simplificando o processo de identificar o caminho que leva à solução (abstração).

Pré-requisitos

- Esta atividade pode ser aplicada em turmas do ensino médio e também para turmas do 8º e 9º ano.
- Conhecimentos matemáticos prévios: identificar números pares e ímpares; multiplicação; desigualdade (comparar números).

1.2 Apresentação dos Labirintos Lógicos

Para andar pelos labirintos lógicos, você usará dois marcadores, que chamaremos de pinos. Esta atividade não é competitiva, ou seja, ambos os pinos pertencem ao mesmo participante, que os utiliza para avançar pelo labirinto. Apenas um pino pode ser movido por vez, mas não é necessário alterná-los — você pode mover o mesmo pino quantas vezes quiser.

Objetivo

O objetivo é realizar os movimentos corretos para que um dos pinos alcance o GOL. Não é necessário que ambos os pinos cheguem ao GOL; basta que um deles o faça para resolver o labirinto.

Para que isso aconteça, você deve seguir o caminho conforme a instrução escrita na caixa. A maioria das caixas contém uma pergunta, e o caminho que o pino seguirá dependerá da resposta a essa pergunta, referente à posição atual do pino.

Se a resposta for "Sim", mova o pino escolhido pelo caminho rotulado como **Sim**; se for "Não", siga o caminho rotulado como **Não**.

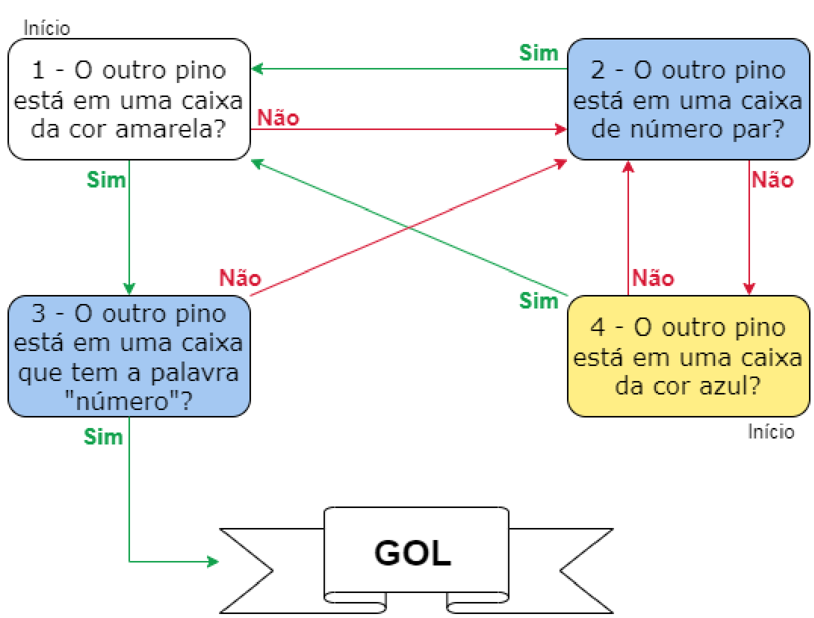
Além disso, a maioria das perguntas nas caixas se refere ao outro pino, ou seja, aquele que você não pretende mover no momento.

Vamos com calma! Este labirinto pode parecer confuso no início, pois é diferente dos convencionais. A regra para fazer um movimento é a seguinte:

- Primeiro, escolha o pino que deseja movimentar. Uma dica é segurá-lo sobre a caixa onde ele está;
- Em seguida, leia a pergunta (ou instrução) que está na caixa deste pino escolhido e siga as instruções.

Vamos aprender usando o labirinto feito como tutorial para esta atividade (Figura 1.1). A posição inicial nesse labirinto (e nos demais também) é com um pino sobre a caixa número 1 e outro pino sobre a caixa número 4.

Figure 1.1: Labirinto - Tutorial



Fonte: Elaborado pela autora

Suponha que você escolheu movimentar o pino que está sobre a **Caixa 4**. A pergunta dessa caixa é: *O outro pino está em uma caixa da cor azul?* Neste caso, o outro pino é o que está sobre a **Caixa**

1, que é branca. Logo, a resposta para a pergunta da Caixa 4 é **Não**. Lembre-se de que o pino que você escolheu movimentar é o que está na Caixa 4, e ele vai seguir pelo caminho **Não**, chegando, assim, à **Caixa 2**.

Agora você tem um pino na Caixa 1 e outro na Caixa 2. Suponha que agora você deseja movimentar o pino que está na **Caixa 1**. A pergunta da caixa é: *O outro pino está em uma caixa da cor amarela?* Agora o outro pino está na Caixa 2, que é azul, então a resposta para a pergunta da caixa 1 é **Não**. Assim, o pino na Caixa 1 vai seguir pelo caminho **Não**, chegando também à **Caixa 2**. Agora ambos os pinos estão sobre a **Caixa 2**.

Pode haver dois pinos na mesma caixa? Sim! E continua sendo possível responder à pergunta, afinal, você primeiro escolhe um pino e só então observa o outro para responder. Escolhendo um dos pinos da **Caixa 2**, a pergunta é: *O outro pino está em uma caixa de número par?* O outro pino também está na Caixa 2, que é par, então a resposta é **Sim**. Um dos pinos seguirá pelo caminho marcado como **Sim**, enquanto o outro permanece. O pino chegará à **Caixa 1**, com o outro pino ainda na **Caixa 2**.

Assim, você seguirá se movimentando no labirinto até que um dos pinos alcance o GOL. Sempre que quiser, você pode retornar à posição inicial (Caixas 1 e 4) para recomeçar, caso sinta que se perdeu no labirinto. Tenho certeza de que, neste labirinto tutorial, você conseguirá encontrar o caminho!

Você já percebeu que, nesta atividade, analisará uma situação e responderá perguntas com respostas apenas de **Sim** ou **Não**. Algumas perguntas terão sentenças simples, como Essa caixa é da cor azul? ou *O outro pino está em uma caixa de número par?*, enquanto outras terão sentenças compostas, como *O outro pino está em uma caixa de número par OU de cor azul?*. Por isso, iniciaremos um breve estudo sobre os operadores lógicos: **e**, **ou** e **não** envolvendo contextos lógicos.

1.3 Operadores lógicos

Os valores **booleanos** são um tipo de dado lógico que pode assumir apenas dois valores: **Verdadeiro** ou **Falso** — frequentemente simplificados para suas iniciais, **V** ou **F**. Nos labirintos lógicos, os valores booleanos são **Sim** ou **Não**, correspondendo, respectivamente, a **V** e **F**.

Operador lógico e

Uma sentença formada com o operador "**e**" resulta em um valor **V** apenas se ambas as condições associadas a ele forem simultaneamente **V**.

Como exemplo, imagine que será realizado um evento na cidade. No entanto, a organização determinou que para participar do evento é necessário pagar uma taxa de entrada "**e**" doar um quilo de alimento não perecível. Observe na tabela a seguir:

Table 1.1: Levou dinheiro **e** alimento?

Levou o dinheiro da entrada?	Levou o alimento?	Pode entrar?
Sim	Sim	Sim
Sim	Não	Não
Não	Sim	Não
Não	Não	Não

Neste caso, temos o conectivo "**e**" relacionado à condição de entrada no evento, pois deve-se levar tanto o valor da entrada quanto um quilo de alimento. Se esquecer de levar qualquer um dos dois itens, não poderá entrar no evento.

Operador lógico ou

Para que uma sentença formada com operador "**ou**" seja **V**, basta que pelo menos uma das condições seja **V**. Se ambas forem **V**, o resultado permanece **V**. O resultado será **F** apenas se ambas as condições forem **F**.

Por exemplo, para entrar na sala de prova do ENEM, é necessário apresentar um documento com foto. No edital, há uma lista de documentos aceitos, entre os quais estão a Carteira de Identidade Nacional (CIN) e a Carteira Nacional de Habilitação (CNH).

Table 1.2: Levou a CIN **ou** a CNH?

Levou a CIN?	Levou a CNH?	Pode entrar?
Sim	Sim	Sim
Sim	Não	Sim
Não	Sim	Sim
Não	Não	Não

Neste caso, temos o conectivo "**ou**", pois basta apresentar um documento para entrar na sala. Não há problema em levar ambos.

Operador lógico não

O operador **não** inverte o valor booleano da condição original. Se era **V**, passa a ser **F**; se era **F**, passa a ser **V**.

Nos labirintos, essa operação é representada pela característica das caixas. Por exemplo: *O outro pino está em uma caixa de cor que **não seja** amarela?*. Neste caso, temos a tabela da seguinte forma:

Table 1.3: A cor da caixa é **não** amarela?

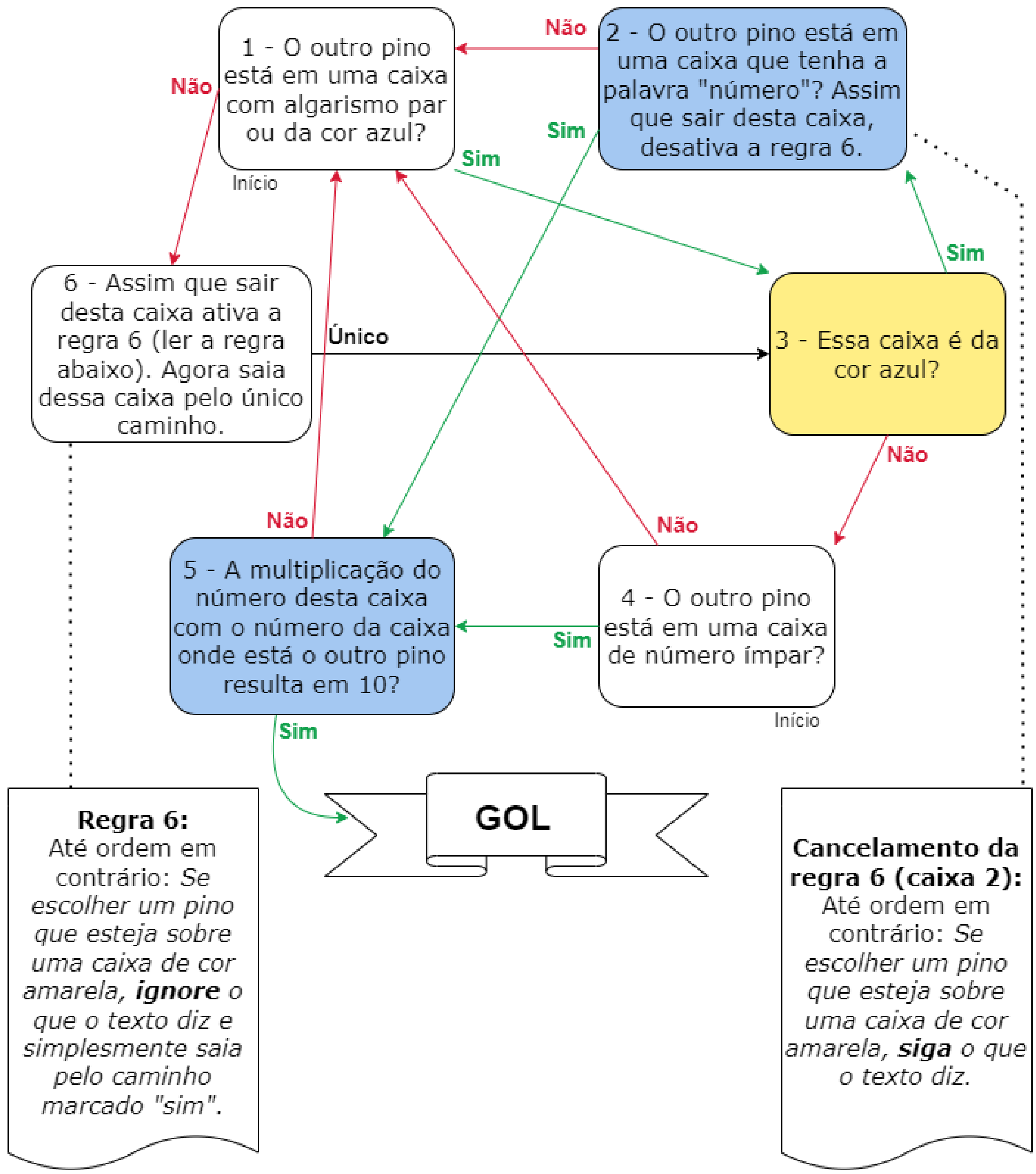
É amarela?	É **não** amarela?
Sim	Não
Não	Sim

1.4 Atividades

Agora, você se aventurará na resolução dos próximos labirintos lógicos. Aborde essa tarefa com atenção e dedicação, faça anotações cuidadosas e analise os resultados obtidos ao longo do caminho para garantir que você chegue ao GOL.

Labirinto 1

Figure 1.2: Labirinto 1



Fonte: Elaborado pela autora

Perguntas sobre o Labirinto 1

Aluno(s): ______________________________________

Responda as seguintes questões:

1 - Você usou alguma estratégia? Qual?

2 - Escreveu ou rascunhou alguma coisa para ajudar a organizar o raciocínio? Como foi feito?

3 - Sabe dizer se existe alguma caixa ou posição dos dois pinos que nunca te leva a solução?

4 - Há apenas um caminho (desde o início) que leva a solução?

5 - Sabe dizer se existe alguma posição dos pinos que nunca irá ocorrer neste labirinto?

6 - No caminho que você encontrou, em algum momento os dois pinos ficam na mesma caixa?

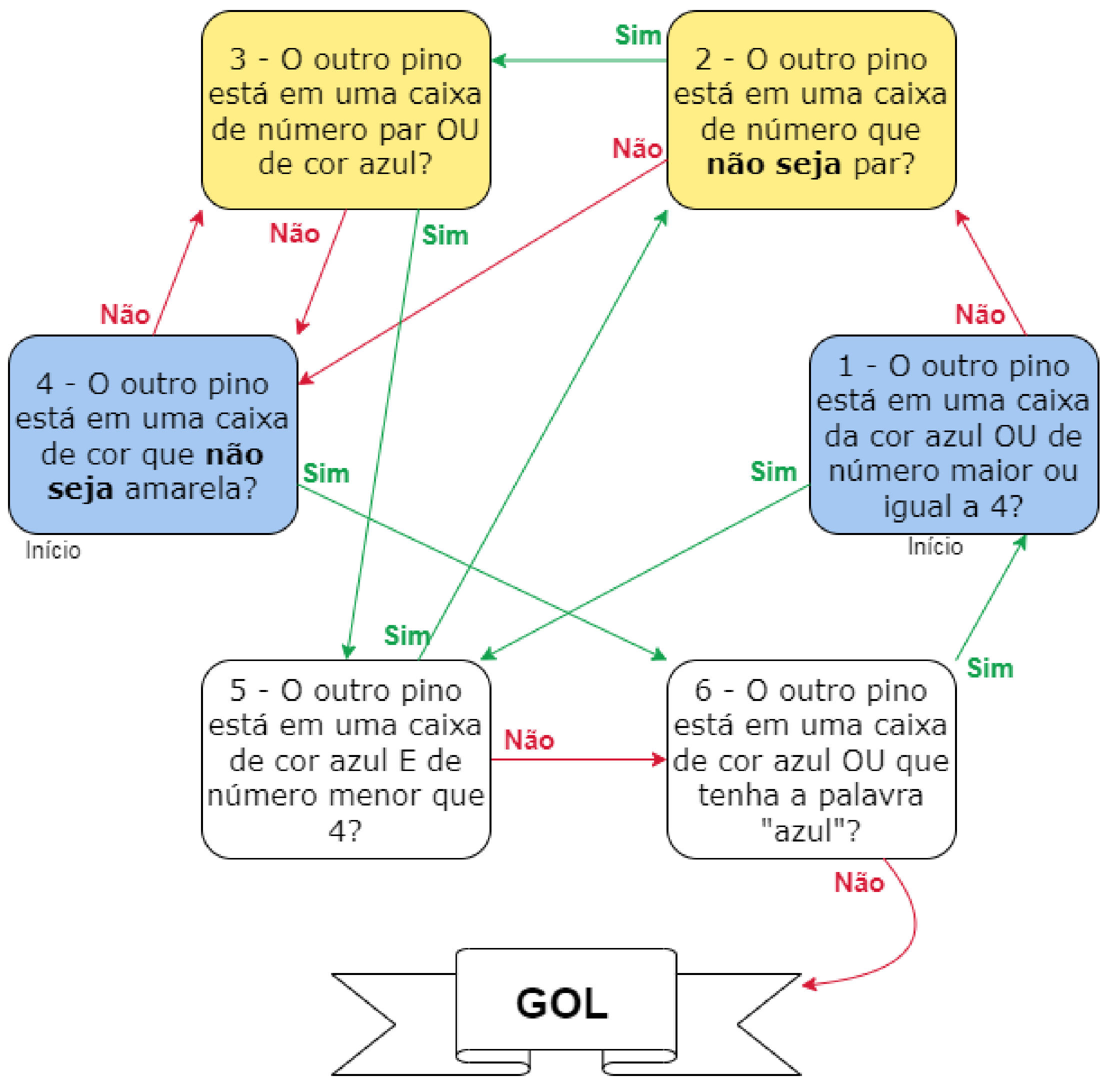
7 - Se a resposta anterior for sim, você consegue encontrar um caminho em que isso nunca ocorra, ou seja, em nenhum momento os dois pinos fiquem juntos na mesma caixa?

8 - Se a resposta à Questão 6 for não, você consegue encontrar um caminho em que, em algum momento, os dois pinos fiquem juntos na mesma caixa?

9 - Você já criou, ou consegue criar, uma notação para que outra pessoa consiga seguir o caminho para chegar à solução do labirinto? Descreva abaixo:

Labirinto 2

Figure 1.3: Labirinto 2



Fonte: Elaborado pela autora

Perguntas sobre o Labirinto 2

Aluno(s): ____

____

Responda as seguintes questões:

10 - Sabe dizer se existe alguma caixa ou posição dos dois pinos que nunca te leva a solução?

____

____

11 - Há apenas um caminho (desde o início) que leva a solução?

____

____

12 - Sabe dizer se existe alguma posição dos pinos que nunca irá ocorrer neste labirinto?

____

____

13 - No caminho que você encontrou, em algum momento os dois pinos ficam na mesma caixa?

____

____

14 - Se a resposta anterior for sim, você consegue encontrar um caminho em que isso nunca ocorra, ou seja, em nenhum momento os dois pinos fiquem juntos na mesma caixa?

____

____

15 - Se a resposta à questão 13 for não, você consegue encontrar um caminho em que, em algum momento, os dois pinos fiquem juntos na mesma caixa?

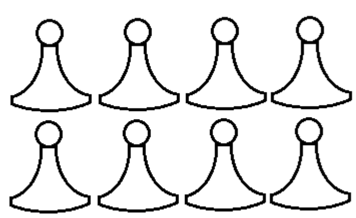
____

____

Figure 1.4: Placa indicadora Regra 6

Fonte: Elaborado pela autora

Figure 1.5: Pinos



Fonte: Elaborado pela autora

1.5 Orientações sobre a atividade para o Professor

A proposta que apresentamos, em resumo, é a seguinte:

1. Labirinto Tutorial: para que os alunos aprendam os movimentos básicos.
2. Labirinto 1: um labirinto um pouco mais elaborado, onde os alunos deverão desenvolver suas próprias estratégias para resolvê-lo.
3. Perguntas sobre o Labirinto 1: o professor entrega questões relacionadas ao labirinto para que os alunos respondam.
4. Estratégia de solução do Labirinto 1: o professor apresenta as estratégias apresentadas na Seção 1.7 para ajudar os alunos a resolver o labirinto e responder às perguntas propostas.
5. Labirinto 2: os alunos terão a oportunidade de resolver um novo labirinto utilizando as estratégias que criaram anteriormente ou as apresentadas pelo professor.

Caso o professor prefira apresentar uma estratégia ou notação diferente da que foi apresentada aqui, pode fazê-lo. Assim como se perceber que algum aluno tenha criado uma estratégia mais interessante, pode ser motivador.

Para realizar esta atividade, nossa sugestão é que seja realizada individualmente ou, no máximo, em duplas.

Labirinto Tutorial

Sugerimos que, no início da atividade, o professor entregue aos alunos uma impressão da Seção Objetivo (1.1 até (inclusive) a Seção Operadores Lógicos (1.3), incluindo dois pinos. As atividades dos labirintos podem ser deixadas para depois.

O professor deve explicar como funciona o labirinto utilizando o Labirinto Tutorial (1.1) e as regras/movimentos descritos na Seção Apresentação dos Labirintos Lógicos (1.2).

É importante permitir que os alunos pensem por si mesmos para encontrar a solução, garantindo que tenham compreendido os movimentos no labirinto.

Quando todos tiverem encontrado a solução, descreva-a oralmente, evitando mostrar a notação apresentada na seção sobre as soluções.

Labirinto 1

Entregue aos alunos o Labirinto 1 (Figura 1.2) e a placa indicadora da Regra 6, para que possam lembrar se a regra está ativa ou não. Os pinos podem ser os mesmos usados no tutorial.

Novamente, incentive os alunos a pensarem por si mesmos sobre a solução e a escreverem qualquer rascunho que considerem útil para a resolução.

Peça aos alunos para anotarem de alguma forma o caminho que percorreram, permitindo que criem seu próprio tipo de notação.

Quando a maioria dos alunos encontrar a solução, entregue as perguntas sobre o Labirinto 1.

Estratégia de solução do Labirinto 1

Neste momento, o professor irá explicar a estratégia para a solução do labirinto, conforme apresentado na Seção Estratégias para solução (1.7). Se preferir, pode apresentar uma estratégia ou notação diferente.

Comece utilizando o Labirinto Tutorial, para que os alunos tenham tempo de aplicar a estratégia no Labirinto 1. Em seguida, apresente os caminhos possíveis do Labirinto 1.

Labirinto 2

Entregue o Labirinto 2 aos alunos. A placa indicadora da regra 6 não será mais necessária.

Permita que os alunos escolham entre utilizar a estratégia apresentada no passo anterior da atividade ou aquela que desenvolveram por conta própria. Além disso, forneça as perguntas sobre o Labirinto 2.

1.6 Discussões e reflexões sobre a atividade para o Professor

Esta atividade trabalha, principalmente, o raciocínio lógico, fazendo com que os alunos exercitem a análise de proposições lógicas que são compostas, indiretamente, de uma estrutura condicional da programação: **se...então**.

Ao responder cada uma das perguntas contidas nos labirintos, os alunos estarão seguindo a instrução: se sim, vou pelo caminho marcado **Sim**; se não, vou pelo caminho marcado **Não**. Além disso, o fato de que a referência estará mudando constantemente faz com que a análise precise ser feita com maior cautela.

O ponto mais marcante na resolução dos labirintos é notar qual é a resposta desejada para que o pino posicionado próximo ao GOL possa alcançá-lo. Por exemplo, no Labirinto 2 (Figura 1.3), na Caixa 6, existe a pergunta: *O outro pino está em uma caixa de cor azul OU que tenha a palavra azul?*. Para que o pino chegue até o GOL, a resposta deverá ser **Não**. Aqui, além de pensar qual a resposta desejada, o aluno deverá analisar uma sentença composta (pois tem o operador lógico **ou**), perceber que o outro pino deverá estar em uma caixa que não seja azul e nem tenha a palavra *azul* (onde a única caixa que se enquadra nesses requisitos é a Caixa 2) e, por fim, planejar um caminho para que consiga formar essa posição no labirinto.

Há diversos aspectos a considerar nesta atividade. Para solucionar um labirinto, podemos relacioná-la ao Pensamento Computacional e seus pilares: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos.

Decomposição

A decomposição é o ato de separar um problema geral em partes menores e, quando possível, buscar formas de resolver cada uma dessas partes, além de observar elementos que podem ser importantes ou irrelevantes na solução do problema.

Nesta atividade dos labirintos lógicos, a decomposição pode ocorrer ao identificar passos essenciais para resolver o labirinto (será descrito mais detalhadamente no pilar seguinte) e também quando se cria uma estratégia para encontrar a solução, que pode ser vista como um exercício de abstração.

Nesse último caso, a decomposição acontece quando os alunos anotam separadamente quais pares de caixas numeradas resultam em respostas **Sim** e quais resultam em **Não**. Por exemplo, ao fixar uma caixa, como a Caixa 1, e supondo que um pino esteja nessa posição, o aluno deve imaginar onde pode estar o outro pino e qual resposta o pino da Caixa 1 seguirá em função desse outro pino.

Para exemplificar:

- Se ambos os pinos estiverem na Caixa 1, o pino que eu escolhi vai pelo caminho **Sim** ou pelo **Não**?

- Se o outro pino estiver na Caixa 2, o pino na Caixa 1 vai pelo caminho **Sim** ou pelo **Não**?
- Se o outro pino estiver na Caixa 3, o pino na Caixa 1 vai pelo caminho **Sim** ou pelo **Não**?
- Se o outro pino estiver na Caixa 4, o pino na Caixa 1 vai pelo caminho **Sim** ou pelo **Não**?
- e assim por diante.

Ou seja, estaria analisando a resposta para todos os pares de caixas possíveis.

Reconhecimento de Padrões

O reconhecimento de padrões consiste em buscar semelhanças entre o problema atual e problemas já solucionados anteriormente. Na atividade dos labirintos lógicos, podemos identificar o reconhecimento de padrões em diferentes aspectos.

Primeiro, pode-se buscar semelhanças entre os labirintos propostos aqui e os labirintos tradicionais, que podemos chamar de *labirintos visuais*. Muitas pessoas, ao ver uma imagem de labirinto e querer solucioná-lo, costumam começar pelo final em busca do início, pois essa abordagem frequentemente ajuda a encontrar o caminho correto mais facilmente do que se começassem pelo início. É claro que essa estratégia só é possível em labirintos desenhados em papel; em labirintos físicos, onde a visão não alcança o final (e nem a maioria dos caminhos), essa tática falharia.

Da mesma forma, ao tentar resolver um labirinto lógico, a pessoa pode ter a ideia de começar analisando o final. Embora não seja tão simples fazer os pinos voltarem à posição inicial do labirinto, essa abordagem permite identificar quais pares devem ser alcançados para chegar ao GOL. Por exemplo, no Labirinto 1, os pinos precisam estar posicionados de modo que um esteja na Caixa 5 e o outro na Caixa 2 (para que a multiplicação resulte em 10). Entretanto, a única maneira de um pino alcançar a Caixa 2 é vindo pela Caixa 3, seguindo o caminho marcado **Sim**. No entanto, a pergunta na Caixa 3 é um absurdo, pois a resposta é sempre *Não*, tornando impossível mover pelo **Sim** (da Caixa 3) a menos que a Regra 6 esteja ativa. Assim, um bom plano foi traçado.

Outra forma de reconhecer padrões, comparando com labirintos visuais, é por meio da estratégia mencionada no livro de Ian Stewart, *Aventuras Matemáticas: Vacas no labirinto e outros enigmas lógicos*, que inspirou esta atividade. Nessa estratégia, qualquer ponto do labirinto em que uma escolha deva ser feita é definido como um **nó**. O procedimento é chamado de *busca em profundidade primeiro* e funciona da seguinte forma:

1. Comece no nó de início.
2. Enquanto for possível, vá até qualquer nó adjacente que ainda não tenha sido visitado.
3. Quando estiver em um beco sem saída, volte até encontrar o último nó próximo a um caminho ainda não visitado. Visite-o e, em seguida, retorne à instrução nº 2.
4. Se você refez algum caminho, nunca mais o utilize.

Isso garante que, pelo menos enquanto não encontrar a saída, todos os caminhos possíveis tenham sido visitados.

Essa estratégia pode parecer inútil no caso dos labirintos lógicos, porém se você criar uma notação para ligar as posições dos pinos (tornando cada posição um nó do labirinto) você verá que ele passará a ter um caminho visual, que parecerá mais como uma árvore genealógica. Neste caso, convém analisar quando os nós se repetem (ou forem invertidos), então você poderá eliminar os que se repetiram, deixando apenas um deles.

Para mais instruções de como fazer isso, veja na Seção Solução (1.7).

Apesar de tudo isso, é possível que alguns alunos não utilizem nenhuma dessas estratégias ao tentarem resolver os labirintos por conta própria. Nesse caso, eles podem reconhecer padrões ao perceber quais tentativas não deram certo e precisarem experimentar de outra forma, ou quando você, professor, apresentar a estratégia mencionada na seção das soluções.

Abstração

A abstração está presente na possibilidade de os alunos criarem uma forma de registrar no papel a solução do labirinto ou na hora de responder às perguntas propostas na atividade.

Caso os alunos não façam nenhum tipo de registro por conta própria durante a atividade com o Labirinto 1, talvez precisem de um exemplo para se basear. Como a proposta da atividade descrita na seção anterior sugere que o professor apresente a estratégia de solução, os alunos poderão exercitar a abstração a partir desse momento.

Para um maior detalhamento sobre a abstração, consulte a seção a seguir, que aborda as estratégias de solução.

Algoritmo

Acontece no momento que os alunos criam uma notação para descrever os movimentos que levam à solução.

1.7 Estratégias para solução

Labirinto Tutorial (e explicações de notação)

Decomposição:

Conforme explicado na Seção 1.6, os alunos podem criar um quadro apenas para anotações, registrando, para cada número, para qual caixa o pina vai quando a resposta for **Sim** e para qual caixa o pina vai quando a resposta for **Não**. Também é importante anotar quais números do outro pino resultam em uma resposta **Sim** e quais números levam a uma resposta **Não**.

Por exemplo:

$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$
$S \to 3; N \to 2$ S: 4 N: 1,2,3	$S \to 1; N \to 4$ S: 2,4 N: 1,3	$S \to GOL; N \to 2$ S: 2,3 N: 1,4	$S \to 1; N \to 2$ S: 2,3 N: 1,4

Observe a primeira coluna. Temos fixo o número 1 (um pino sobre a Caixa 1). Na linha abaixo está simbolizando o seguinte: Quando a resposta for **Sim**, o pino sobre a Caixa 1 irá para a Caixa 3. Quando a resposta for **Não**, o pino sobre a Caixa 1 irá para a Caixa 2.

Na linha seguinte, **S:4** indica que a resposta é **Sim** quando o outro pino está na Caixa 4. Já na última linha, **N: 1,2,3** indica que a resposta é **Não** quando o outro pino está nas Caixas 1, 2 ou 3.

Note que a Caixa 1 no Labirinto Tutorial pergunta: *O outro pino está em uma caixa da cor amarela?*. Como a única caixa amarela é a Caixa 4, a única forma do pino sobre a Caixa 1 ir pelo caminho **Sim** (chegando à Caixa 3) é se o outro pino estiver na Caixa 4. Logo, se o outro pino estiver nas Caixas 1, 2 ou 3, a resposta será **Não**, e o pino chegará na Caixa 2 nesses casos.

Esse método evita a necessidade de analisar constantemente as perguntas sobre cores, números ou palavras nas caixas, permitindo usar essa anotação para saber para qual caixa o pino irá em determinada posição.

Por exemplo, suponha que temos um pino na Caixa 3 e outro na Caixa 4. Se decidirmos mover o pino sobre a Caixa 4, olhamos a coluna do número 4 e verificamos em qual resposta está o número 3. O número 3 está na linha do sim (S: 2,3). Observando a linha de sim, vemos que o caminho **Sim** leva à Caixa 1. Portanto, sem analisar a pergunta, sabemos que, estando na posição (3,4) (isto é, Caixas 3 e 4). se movermos o pino da Caixa 4, iremos para a posição (3,1) isto é, Caixas 3 e 1).

Embora seguir essa tabela possa parecer complicado no início, em labirintos mais complexos, onde seria necessário analisar repetidamente características como cor, paridade, tamanho e palavras nas caixas, essa abordagem torna o processo muito mais direto e evita passos inválidos.

Abstração:

Como já fizemos loga acima, iremos denotar as posições dos pinos como se fossem pares ordenados (porém a ordem aqui é irrelevante). Por exemplo, a posição inicial dos labirintos é um pino na Caixa 1 e o outro pino na Caixa 4, teremos então a notação $(1,4)$ para esta posição.

Como já indicamos anteriormente, denotaremos as posições dos pinos em pares ordenados (embora, neste caso, a ordem não seja relevante). Por exemplo, a posição inicial dos labirintos, com um pino na Caixa 1 e outro na Caixa 4, será representada por $(1,4)$.

Para os próximos passos, exploraremos todas as possibilidades. Primeiramente, mostraremos o resultado ao mover o pino que está à esquerda na nossa notação (partindo da posição $(1,4)$, seria o número 1) e, em seguida, o resultado ao mover o número que está à direita (neste caso, o número 4).

Vamos começar com o Labirinto Tutorial. Abaixo, temos a primeira linha representando a posição inicial $(1,4)$. Em seguida, a segunda linha mostra as duas possibilidades de escolha para o primeiro passo: podemos optar por mover o pino que está na Caixa 1 ou o que está na Caixa 4.

$(1,4)$

$(3,4)(1,2)$

Lendo o que diz a segunda linha, temos que, se escolhêssemos o pino sobre a Caixa 1, ele iria para a Caixa 3 enquanto o outro pino permaneceria na Caixa 4. Por outro lado, se escolhêssemos o pino sobre a Caixa 4, este iria para a Caixa 2 enquanto o outro pino permaneceria na Caixa 1.

Note que, nesta notação, não estaremos mais preocupados com o que está escrito nas caixas, porque já definimos anteriormente para qual caixa o pino 1 vai quando o outro pino está na Caixa 4 (pois vai pelo caminho marcado **Sim**), e o mesmo para o caso em que escolhêssemos o pino sobre a Caixa 4.

Assim, as informações sobre se a caixa é amarela, azul, se o número é par ou ímpar não precisam mais ser analisadas, pois fizemos a *abstração* dessas informações. A partir de agora, basta analisar o par que temos e para qual número o pino escolhido irá.

Prosseguindo com a solução, note que, nesta segunda linha, já temos duas possibilidades de posição para fazer duas escolhas em cada uma delas. Para definir uma divisão entre as escolhas da primeira posição com as escolhas da segunda posição, iremos usar o símbolo ponto e vírgula (;).

$(1,4)$

$(3,4)(1,2)$

$(2,4)(3,1); \quad (2,2)\cancel{(1,4)}$

Os dois primeiros pares se referem ao par $(3,4)$ e os dois últimos se referem ao par $(1,2)$. Note que o par $(1,4)$ foi cancelado, pois ele já existe na primeira linha. Significa que essa escolha fará retornar ao início do labirinto. Seguiremos cancelando os pares que se repetem, analisando todas as linhas anteriores (e caso se repitam na mesma linha, deixando apenas um deles). Lembre que pares com números apenas invertidos, por exemplo $(1,4)$ e $(4,1)$, são considerados como a mesma posição.

A partir do momento que um par é cancelado, não iremos mais abrir suas possibilidades, assim poupa uma quantidade considerável de escrita e espaço no papel.

Quando um par está formado por números repetidos, como é o caso do par $(2,2)$ iremos escrever apenas uma saída.

Seguindo para o próximo passo, teremos:

$(1,4)$
$(3,4)(1,2)$
$(2,4)(3,1);\quad (2,2)\cancel{(1,4)}$
$\cancel{(1,4)}\cancel{(2,1)};\quad \cancel{(2,1)}(3,2);\quad \cancel{(2,1)}$
GOL

Assim, o caminho solução (mais curto) do Labirinto Tutorial é:

$$(1,4)(3,4)(3,1)(3,2)\text{GOL}.$$

Labirinto 1

$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$
$S \to 3; N \to 6$ S: 2,4,5,6 N: 1,3	$S \to 5; N \to 1$ S: 2,4,5 N: 1,3,6	$S \to 2; N \to 4$ S: nunca, exceto Regra 6 N: 1,2,3,4,5,6; exceto Regra 6
$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$S \to 5; N \to 6$ S: 1,3,5 N: 2,4,6	$S \to GOL; N \to 1$ S: 2 N: 1,3,4,5,6	Único$\to$ 3 todos caminho único

Como temos a Regra 6, que permite mudar as regras, especificamente da Caixa 3, iremos denotar com um asterisco (*) para quando a Regra 6 estiver ativa. Assim, um par $(1,2)$ é diferente do par $(1,2)^*$, pois eventualmente pode chegar à Caixa 3 sem ter desativado a Regra 6, e isso fará diferença.

Veja a seguir os caminhos (possibilidades):

$(1,4)$
$(3,4)(1,5)$
$(4,4)(3,5);\quad \cancel{(3,5)}(1,1)$
$\cancel{(1,4)};\quad (4,5)(3,1);\quad (6,1)$
$(5,5)\cancel{(4,1)};\quad \cancel{(4,1)}(3,6);(3,1)^*\cancel{(6,3)}$
$\cancel{(1,5)};\quad (4,6)(3,3)^*;\quad (2,1)^*\cancel{(3,6)^*}$
$\cancel{(1,6)}(4,3)^*;\quad (2,3)^*;\quad \cancel{(1,1)}\cancel{(2,3)^*};\quad (2,6)^*\cancel{(3,3)^*}$
$(5,3)^*(4,2)^*;\quad \cancel{(1,3)}(2,2)^*;\quad \cancel{(1,6)}\cancel{(2,3)^*}$
$\cancel{(1,3)^*}(5,2)^*;\quad \cancel{(1,2)^*}\cancel{(4,5)};\quad \cancel{(5,2)^*}$
GOL$\cancel{(5,5)}$

Há diversos caminhos igualmente curtos, com 10 passos, para a solução:

$(1,4)(3,4)(3,5)(3,1)(3,6)(4,6)(4,3)^*(5,3)^*(5,2)^*\text{GOL}$
$(1,4)(3,4)(3,5)(3,1)(3,6)(3,3)^*(2,3)^*(2,2)^*(5,2)\text{GOL}$
$(1,4)(1,5)(3,5)(3,1)(3,6)(4,6)(4,3)^*(5,3)^*(5,2)^*\text{GOL}$

$(1,4)(1,5)(1,1)(1,6)(3,6)(4,6)(4,3)^*(5,3)^*(5,2)^*$GOL
$(1,4)(1,5)(3,5)(3,1)(3,6)(3,3)^*(2,3)^*(2,2)^*(5,2)$GOL
$(1,4)(1,5)(1,1)(1,6)(3,6)(3,3)^*(2,3)^*(2,2)^*(5,2)$GOL
$(1,4)(1,5)(1,1)(1,6)(1,3)^*(3,3)^*(2,3)^*(2,2)^*(5,2)$GOL
$(1,4)(1,5)(1,1)(1,6)(1,3)^*(1,2)^*(3,2)^*(2,2)^*(5,2)$GOL

Os demais caminhos seriam possíveis de chegar à solução, mas provavelmente, com mais passos.

Labirinto 2

$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$
$S \to 5; N \to 2$ S: 1,4,5,6 N: 2,3	$S \to 3; N \to 4$ S: 1,3,5 N: 2,4,6	$S \to 5; N \to 4$ S: 1,2,4,6 N: 3,5
$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
$S \to 6; N \to 3$ S: 1,4,5,6 N: 2,3	$S \to 2; N \to 6$ S: 1 N: 2,3,4,5,6	$S \to 1; N \to GOL$ S: 1,3,4,5,6 N: 2

Veja a seguir os caminhos (possibilidades):

$(1,4)$
$(5,4)(1,6)$
$(6,4)(5,6)$; $\cancel{(5,6)}(1,1)$
$\cancel{(1,4)}(6,6)$; $\cancel{(6,6)}(5,1)$; $\cancel{(5,1)}$
$\cancel{(1,6)}$; $(2,1)(5,5)$
$(3,1)(2,2)$; $\cancel{(6,5)}$
$\cancel{(5,1)}(3,2)$; $(4,2)$
$(5,2)(3,3)$; $\cancel{(3,2)}(4,4)$
$(6,2)(5,3)$; $(4,3)$; $\cancel{(6,4)}$
GOL$\cancel{(6,4)}$; $(6,3)\cancel{(5,4)}$; $\cancel{(3,3)}\cancel{(4,5)}$

Há alguns caminhos igualmente curtos, com 10 passos, para a solução:

$(1,4)(5,4)(5,6)(5,1)(2,1)(3,1)(3,2)(5,2)(6,2)$GOL
$(1,4)(1,6)(5,6)(5,1)(2,1)(3,1)(3,2)(5,2)(6,2)$GOL
$(1,4)(1,6)(1,1)(5,1)(2,1)(3,1)(3,2)(5,2)(6,2)$GOL

Os demais caminhos seriam possíveis de chegar à solução, mas provavelmente, com mais passos.

Observamos que, para todos os labirintos aqui apresentados, não há uma posição em que, a partir dela, seja impossível solucionar o labirinto. Ou seja, em algum momento, será possível retornar a uma posição que faça parte da solução.

1.8 Respostas às perguntas do questionário

Questionário do Labirinto 1:

1. Você usou alguma estratégia? Qual?
   R: Pessoal
2. Escreveu ou rascunhou alguma coisa para ajudar a organizar o raciocínio? Como foi feito?
   R: Pessoal
3. Sabe dizer se existe alguma caixa ou posição dos dois pinos que nunca te leva a solução?
   R: Todas as caixas ou posições possíveis partindo da posição inicial permitem chegar à solução.
4. Há apenas um caminho (desde o início) que leva a solução?
   R: Não
5. Sabe dizer se existe alguma posição dos pinos que nunca irá ocorrer neste labirinto?
   R: Existem algumas, basta observar se não aparece na descrição de caminhos - possibilidades. Por exemplo, os pares (6,6) e (5,6) (ou (6,5)) não aparecem em nenhum momento.
6. No caminho que você encontrou, em algum momento os dois pinos ficam na mesma caixa?
   R: Pessoal. Note que é possível as duas soluções, conforme o que foi apresentado.
   $(1,4)(3,4)(3,5)(3,1)(3,6)(4,6)(4,3)^*(5,3)^*(5,2)^*$GOL
   é uma das soluções que não ocorre de ter os dois pinos na mesma caixa.
7. Se a resposta anterior for sim, você consegue encontrar um caminho em que isso nunca ocorra, ou seja, em nenhum momento os dois pinos fiquem juntos na mesma caixa?
   R: Pessoal
8. Se a resposta à questão 6 for não, você consegue encontrar um caminho em que, em algum momento, os dois pinos fiquem juntos na mesma caixa?
   R: Pessoal
9. Você já criou, ou consegue criar, uma notação para que outra pessoa consiga seguir o caminho para chegar à solução do labirinto?
   R: Pessoal
   Questionário do Labirinto 2:
10. Sabe dizer se existe alguma caixa ou posição dos dois pinos que nunca te leva a solução?
    R: Todas as caixas ou posições possíveis partindo da posição inicial permitem chegar à solução.
11. Há apenas um caminho (desde o início) que leva a solução?
    R: Não
12. Sabe dizer se existe alguma posição dos pinos que nunca irá ocorrer neste labirinto?
    R: Pela análise dos caminhos possíveis do Labirinto 2, todas as posições são possíveis, partindo do início.
13. No caminho que você encontrou, em algum momento os dois pinos ficam na mesma caixa?
    R: Pessoal. Note que é possível as duas soluções, conforme o que foi apresentado.

    $(1,4)(5,4)(5,6)(5,1)(2,1)(3,1)(3,2)(5,2)(6,2)$GOL é uma das soluções que não ocorre os dois pinos na mesma caixa.

    $(1,4)(1,6)(1,1)(5,1)(2,1)(3,1)(3,2)(5,2)(6,2)$GOL é a única solução (mais curta) que ocorre dois pinos na mesma caixa.
14. Se a resposta anterior for sim, você consegue encontrar um caminho em que isso nunca ocorra, ou seja, em nenhum momento os dois pinos fiquem juntos na mesma caixa?
    R: Pessoal
15. Se a resposta à questão 13 for não, você consegue encontrar um caminho em que, em algum momento, os dois pinos fiquem juntos na mesma caixa?
    R: Pessoal

1.9 Sugestões e bibliografia

Se o professor ou algum aluno tiver interesse em conhecer um labirinto lógico mais elaborado (e complicado), consulte o livro de inspiração para esta atividade:

STEWART, Ian. **Aventuras matemáticas: vacas no labirinto e outros enigmas lógicos.** Tradução Maria Luiza X. de A. Borges. Tradução de: *Cows in the maze (And other mathematical explorations)*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

2. OPERADORES LÓGICOS

2.1 Objetivos

Objetivo Geral:

Desenvolver o domínio do uso dos operadores lógicos: **e**, **ou**, **não** e **xou** com o auxílio dos conhecimentos sobre intervalos reais.

Objetivos Específicos:

- Revisar e consolidar o conhecimento sobre operações com intervalos reais;
- Desenvolver o raciocínio lógico, visando chegar em um objetivo.

Pré-requisitos

- Essa atividade pode ser aplicada em qualquer turma do ensino médio.
- Conhecimentos matemáticos prévios: operações com intervalos (união, interseção, complementar, diferença).

2.2 Intervalos $\times$ desigualdades

Antes de explicarmos o jogo, vamos fazer uma rápida revisão sobre intervalos reais. Relembre que todo intervalo pode ser escrito em termos de desigualdades. Por exemplo,

- $(-3,0] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0\}$;
- $\left(\frac{1}{2},5\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leq 5\right\}$;
- $(-\infty,2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$;
- $[-7,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -7\}$

Para obter sucesso no jogo, o uso das representações gráficas dos intervalos pode ser útil. A Tabela 2.1 apresenta os diferentes tipos de intervalos, sua representação em termos de desigualdades e sua representação gráfica.

Table 2.1: Tipos de intervalos em que $a < b$.

Notação	**Descrição do intervalo**	**Representação gráfica**
(a,b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
$[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a,b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
$(a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
(a,∞)	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
$[a,\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
$(-\infty,b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	
$(-\infty,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	
$(-\infty,\infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos os reais)	

2.3 Apresentação do jogo

Nesta atividade você irá brincar com os operadores lógicos **e**, **ou**, **xou** ou **não**. Se você, estudante, já domina bem as operações de união e interseção de intervalos reais irá compreender facilmente essa parte.

Neste jogo você irá formar sentenças com desigualdades e operadores lógicos que correspondem a um intervalo, ou união de intervalos, que contenha um número o qual você sorteou, que chamaremos de *número-alvo*.

E como vou formar essas sentenças?

Você irá formar utilizando as cartas. Por exemplo, vamos supor que seu número-alvo fosse $x = 3$ e você tivesse as seguintes cartas:

$$\boxed{x > 4} \quad \boxed{2 < x < 5} \quad \boxed{x \leq 2} \quad \boxed{\text{e}} \quad \boxed{\text{ou}} \quad \boxed{\text{não}}$$

Se você organizar elas da seguinte forma:

$$\boxed{2 < x < 5} \quad \boxed{\text{e}} \quad (\boxed{\text{não}}\boxed{x > 4} \quad \boxed{\text{ou}} \quad \boxed{x \leq 2}),$$

que é equivalente a

$$\boxed{2 < x < 5} \quad \boxed{\text{e}} \quad (\boxed{x \leq 4} \quad \boxed{\text{ou}} \quad \boxed{x \leq 2}),$$

o intervalo correspondente dessa sentença será $(2,4]$. Logo o número 3 estará contido neste intervalo.

Atenção! Apenas tome cuidado para não se confundir quando os extremos estiverem aberto! Supondo que seu número-alvo fosse $x = 2$, o intervalo resultante do exemplo acima não o contém. Então você não teria atingido seu objetivo!

Como funciona o operador xou?

Esse operador é parecido com o **ou**, porém ele subtrai o(s) intervalo(s) comum(ns) entre os intervalos que estão sendo operados. Por exemplo,

$$(2 < x < 5 \textbf{ xou } x > 4),$$

corresponde a seguinte operação de intervalos:

$$((2,5) \cup (4,+\infty)) - ((2,5) \cap (4,+\infty)).$$

Assim, teremos

$$((2,5) \cup (4,+\infty)) - ((2,5) \cap (4,+\infty)) = (2,+\infty) - (4,5) = (2,4] \cup [5,+\infty).$$

Isso pode ser muito útil para diminuir o total do comprimento dos intervalos durante o jogo! (Mais adiante você verá por quê).

Comprimento dos intervalos? O que é isso?

Para esse jogo, define-se o **comprimento** de cada um dos intervalos $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$ e $[a,b)$ como sendo a diferença de

$$b - a.$$

No caso da união, o comprimento da união de dois ou mais intervalos disjuntos define-se como a soma do comprimento de cada intervalo.

Vejamos alguns exemplos:

- $(-2,1]$ tem comprimento $1-(-2) = 3$.
- $(-10,10)$ tem comprimento $10-(-10) = 20$;
- $[-4,-1) \cup [3,15]$ tem comprimento $(-1-(-4)) + (15-3) = 3+12 = 15$;
- $[-3,0] \cup (4,5]$ tem comprimento $3+1 = 4$;
- $(-4,2) \cup [3,5)$ tem comprimento $6+2 = 8$.

Observação: Se tiver um único "número avulso" na união de intervalos, por exemplo, $[-1,3] \cup \{4\} \cup (5,7]$, como o número 4 está sem valores próximos, note que ele é apenas um ponto e não tem comprimento, isto é, o conjunto $\{4\}$ tem comprimento 0 (zero), então ele será desconsiderado. Portanto, o comprimento da união de intervalos $[-2,3] \cup \{4\} \cup (5,7]$ é $5+0+2 = 7$

2.4 Regras do Jogo

Número de jogadores:

De 2 a 4 jogadores.

Pontuação e Eliminação:

- **Pontuação Inicial:** Todos os jogadores iniciam com 30 pontos.
- **Redução de Pontos:** A cada partida, a pontuação dos jogadores é reduzida pelo valor definido por aquela partida.
- **Eliminação e vencedor:** Quando a pontuação de um jogador chega a zero ou fica negativa, ele é eliminado do jogo. O último jogador com pontos positivos é o vencedor.

Componentes do jogo:

- **Dado dos operadores lógicos**: **e**, **ou**, **xou** ou **não**;
- **Cartas de número-alvo:** São escritas da forma $\boxed{x = \_\_}$, com algum número real na lacuna;
- **Cartas de desigualdades:** São cartas que apresentam desigualdades, como $\boxed{x < \_\_}$ ou $\boxed{\_\_ < x \leq \_\_}$;
- **Cartas de operadores lógicos:** Estão escritas com um dos operadores lógicos: **e**, **ou**, **xou** ou **não**;
- **Cartas de parênteses:** São apenas parênteses ( );

Objetivo de cada partida

Seu objetivo é obter desigualdades combinadas com operadores lógicos que correspondam a um intervalo, ou união de intervalos, que contenha o seu *número-alvo* definido no início da partida. Além disso, o intervalo deve possuir o menor comprimento possível.
Que tal um exemplo? Suponha que o número-alvo sorteado foi $x = 2$ e que, durante a partida, você obteve $x \geq -5$ **e** $x < 10$. Se você finalizar sua partida assim, o intervalo correspondente é $[-5, 10)$, que contém o número 2, e seu comprimento é 15. Você alcançou seu objetivo, porém o comprimento ainda poderia ser reduzido
Continue lendo as regras a seguir para aprender como melhorar esse intervalo.

Como jogar uma partida

O jogo segue no sentido anti-horário (o próximo jogador é o que está a sua direita). Definam quem começa a jogar.

Sorteando as cartas iniciais

Cada jogador sorteia um *número-alvo* e depois que todos tiverem sorteado, cada jogador irá escolher, sem olhar o que está escrito, uma carta de desigualdade. Essa escolha pode ser feita pegando qualquer carta do monte (não precisa ser a que estiver mais em cima), para isso pode-se abrir o monte de cartas de desigualdades como um leque deixando a parte escrita para baixo e o jogador, em sua vez, escolhe uma.

A partir deste momento, os jogadores analisam o intervalo definido pela carta de desigualdade e seu número-alvo. Seguindo o mesmo sentido, os jogadores podem escolher se desejam pegar mais uma carta de desigualdade ou finalizar sua jogada. Isto é, se o jogador preferir finalizar sua jogada com apenas uma carta de desigualdade e sem usar nenhum operador lógico, ele pode, desde que o intervalo contenha o seu número-alvo.

Não é necessário esconder suas cartas dos outros jogadores, pode colocá-las sobre a mesa.

Pegando mais cartas de desigualdades:

Para cada carta de desigualdade nova que o jogador quiser pegar, ele deverá jogar o dado dos operadores lógicos.
Após jogar o dado, o jogador pega uma carta de operador lógico com o escrito de acordo com o que definido pelo dado e mantém essa carta consigo.
Caso o dado caia no operador **não**, o jogador pode pegar um operador **não** e então jogar o dado novamente até que caia em outro operador, diferente deste. (Se cair em **não** novamente, não poderá pegar mais um operador **não**, apenas joga o dado novamente para definir outro operador que não seja o **não**).

Parênteses são de graça: você pode usar quantos forem necessários, não precisa esperar sua vez de jogar para pegar as cartas de parênteses.

Finalizando a partida:

Com essas cartas, cada jogador deverá formar desigualdades com os operadores lógicos que correspondam a um intervalo, ou união de intervalos, que contenha o seu número-alvo.
Para realizar as operações, os jogadores podem fazer representações gráficas dos intervalos em um papel se necessário, isso certamente ajudará a encontrar a melhor solução.
Os jogadores precisam usar o máximo possível de cartas dentre as que eles pegaram, pois, apesar de não ser obrigatório usar todas as cartas em sua mão, a quantidade de cartas não utilizadas fará com que você perca mais pontos, então pense com sabedoria se vale a pena arriscar pegar uma nova carta!
As únicas cartas que não dão pontuação são os parênteses (lembra que são de graça?) e o operador **não**, este é considerado um curinga no jogo.
Se um jogador decidir parar de pegar cartas novas, então apenas pula sua vez nas rodadas seguintes até que todos tenham terminado de formar suas desigualdades nesta partida.
Assim que todos decidirem parar de definir suas sentenças, encerra-se a partida e inicia a contagem dos pontos.

Contagem dos pontos

A pontuação total da partida de cada jogador é definida pela soma do **comprimento do intervalo (ou união de intervalos) resultante** com o **número de cartas não utilizadas** em sua mão.

Vamos apresentar abaixo um exemplo para ficar mais claro:

Suponha que seu número alvo fosse $x = 3$ e você pegou cartas na seguinte ordem:

- $\boxed{x > 4}$: teu alvo não está aqui;
- $\boxed{x > 2}$ $\boxed{\text{ou}}$: agora você tem o seu alvo, porém não consegue limitar (eliminar o infinito) ainda;
- $\boxed{x \leq 7}$ $\boxed{\text{não}}$ $\boxed{\text{e}}$: aqui você consegue limitar o intervalo (eliminando o infinito).

Se você organizasse as cartas da seguinte forma:

$$\boxed{\text{não}}\ \boxed{x > 4}\ \boxed{\text{e}}\ \boxed{x > 2}$$

O intervalo resultante desta sentença será $(2,4]$ e o número 3 estará contido no intervalo.
O comprimento do intervalo resultante é 2, essa seria a pontuação da partida, porém note que não foram usadas as cartas $\boxed{\text{ou}}$ e $\boxed{x \leq 7}$. Portanto acrescenta 1 ponto para cada carta não utilizada na pontuação da partida.
Então a pontuação dessa partida é 4. E esse número será reduzido dos pontos deste jogador, então note que quanto menor a pontuação em cada partida, melhor é para o jogador!
Lembre-se que caso não utiliza-se a carta do operador **não**, esta não iria contar pontos.

Observação: Caso algum jogador não consiga mais definir uma sentença que resulte um intervalo, contendo seu número-alvo, sem limitar os intervalos (ou seja, não conseguiu “cancelar o infinito”) então a pontuação dele será 25 pontos (caso o jogo tenha começado com 25 pontos cada jogador, ele já estaria eliminado).

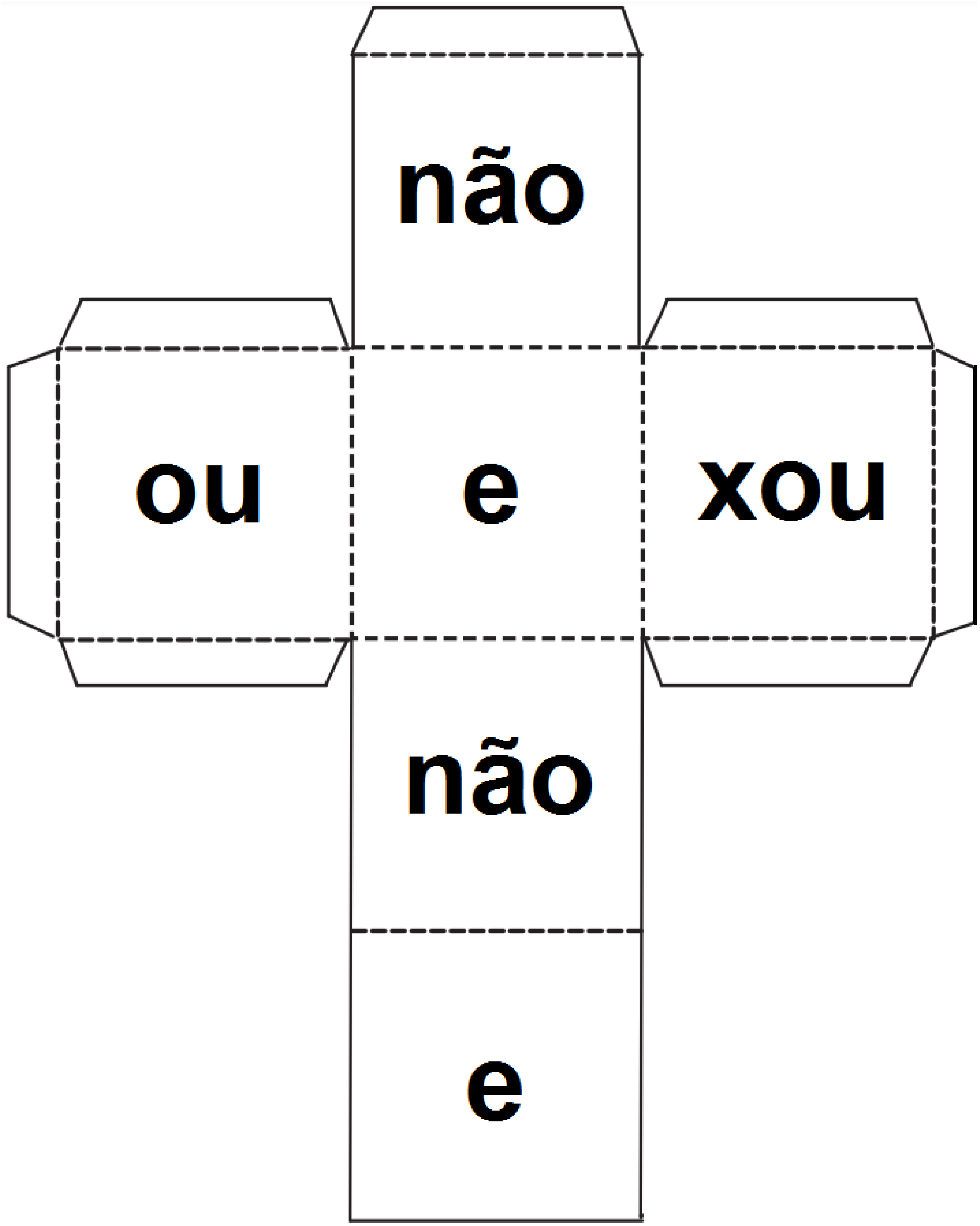
Para registrar as pontuações dos jogadores, anotem em um quadro da seguinte forma:

Partida	Jogador 1	Jogador 2	Jogador 3
Início	25	25	25
1ª	$-4 = 21$	$-6 = 19$	$-8 = 17$
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			
...			

(Os valores acima são apenas exemplos).

2.5 Confecção

Figure 2.1: Dado dos operadores lógicos



Fonte: Elaborado pela autora

Cartas de número-alvo

$x = -7$	$x = -6$	$x = -5$	$x = -4$	$x = -3$
$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$	$x = 6$	$x = 7$
$x = 3$	$x = 2$	$x = -2$	$x = -1$	$x = -1$

Parênteses

(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(
(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(
(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(
(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(
(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(
(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(
(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(	(

Cartas de desigualdades

$-10 < x < 1$	$-9 \leq x < 2$	$-8 < x \leq 3$	$-7 \leq x \leq 4$
$-6 < x < 5$	$-5 \leq x < 6$	$-4 < x \leq 7$	$-3 \leq x \leq 8$
$-2 < x < 9$	$-1 \leq x < 10$	$-10 < x \leq 0$	$0 \leq x \leq 10$
$-10 < x < 2$	$-9 \leq x < 3$	$-8 < x \leq 4$	$-7 \leq x \leq 5$
$-6 < x < 6$	$-5 \leq x < 7$	$-4 < x \leq 8$	$-3 \leq x \leq 9$
$-2 < x < 10$	$-1 \leq x < 9$	$-9 < x \leq 0$	$0 \leq x \leq 9$
$0 < x < 8$	$-7 \leq x < 0$	$-9 < x \leq -1$	$1 \leq x \leq 9$
$x < 3$	$x \leq 4$	$x > 2$	$x \geq 7$
$x < 6$	$x \leq 5$	$x > 4$	$x \geq 3$
$x < 2$	$x \leq 1$	$x > 0$	$x \geq -1$
$x < -2$	$x \leq -3$	$x > -4$	$x \geq -5$
$x < -6$	$x \leq -7$	$x > 5$	$x \geq 4$

Cartas de operadores lógicos

não	**não**	**não**	**não**	**não**
não	**não**	**não**	**não**	**não**
não	**não**	**não**	**não**	**não**
e	**e**	**e**	**e**	**e**
e	**e**	**e**	**e**	**e**
e	**e**	**e**	**e**	**e**
e	**e**	**e**	**e**	**e**
ou	**ou**	**ou**	**ou**	**ou**
ou	**ou**	**ou**	**ou**	**ou**
ou	**ou**	**ou**	**ou**	**ou**
xou	**xou**	**xou**	**xou**	**xou**
xou	**xou**	**xou**	**xou**	**xou**

2.6 Orientações sobre a atividade para o Professor

Professor, ao aplicar esta atividade, é importante revisar com os alunos sobre as operações com intervalos reais.

Na aplicação do jogo é preferível que seja feito em grupos de 4 alunos. Caso os alunos tenham dificuldades, é possível que joguem em duplas, de forma colaborativa, contra outras duplas, permitindo também a inclusão de mais alunos.

Explique o operador **xou** usando a representação gráfica de intervalos. Caso você perceba que os alunos não estejam preparados para usarem este operador, pode solicitar que jogem algumas partidas tratando o **xou** como se fosse apenas **ou** e depois solicitar para que os alunos joguem da forma original, considerando o **xou**.

Se o tempo de aula permitir, pode ser interessante que os grupos que estão jogando anotem quantas partidas foram realizadas até que um vencedor seja definido. Em seguida, compare entre os diferentes grupos qual deles precisou de mais partidas para definir um vencedor, o que indicaria que o grupo conseguiu formar sentenças de forma otimizada, perdendo a menor quantidade de pontos a cada partida em comparação aos outros grupos.

Sugestão extra: Se você tiver grupos de alunos que não se sentem à vontade com jogos competitivos, uma alternativa é ajustar as regras para transformar o jogo em uma *atividade colaborativa*. Nesse formato, em vez de os alunos competirem entre si, eles podem jogar juntos, começando com uma pontuação menor (por exemplo, 15 pontos). Eles continuam jogando até zerar ou ficarem com pontuação negativa, e então recomeçam com a mesma pontuação inicial, mas com o objetivo de fazer o jogo durar mais partidas do que na fase anterior. Assim, de dois a quatro alunos podem jogar com as mesmas cartas e o mesmo número-alvo, colaborando para superar o recorde anterior, ou seja, prolongar o número de partidas.

2.7 Discussões e reflexões sobre a atividade para o Professor

Essa atividade focou na compreensão dos operadores lógicos. Diferentemente da atividade dos *Labirintos Lógicos*, que utiliza os operadores com valores booleanos, aqui os operadores são aplicados a valores numéricos.

Pode ser interessante posteriormente à esta atividade, solicitar aos alunos que escrevam um pseudocódigo utilizando esses conceitos. Por exemplo: um pseudocódigo sobre como um programa de planilha iria fazer para preencher as células da planilha com cores de acordo com os valores das notas de uma turma.

Para mais instruções sobre como escrever pseudocódigo confira o quarto capítulo da dissertação associada a este caderno de atividades.

2.8 Orientações de confecção

A confecção das cartas se dá apenas imprimindo as cartas contidas nas páginas a seguir e destacá-las.

Pode ser interessante fazer com que cada tipo de carta seja impresso em uma cor de folha sulfite diferente, para facilitar a distinção entre cartas de número-alvo, cartas de desigualdades, cartas de operadores lógicos e cartas de parênteses. Isso facilitaria na hora de guardar o material para usar em outra turma, ou usar outro dia, pois as cores diferentes facilitariam em separar os tipos de cartas, caso os alunos venham a misturá-las.

Em relação ao dado, caso considere uma opção melhor, tanto pela praticidade quanto pelo fato de que o dado de papel pode ficar viciado devido ao peso que deve influenciar das abas e cola para montá-lo, é possível também utilizar um dado comum (de 6 faces) e anotar no quadro ou imprimir as seguintes definições para os valor do dado:

1. não,
2. e,
3. ou,
4. e,
5. xou,
6. não.

3. ALGORITMOS

3.1 Objetivos

Objetivo Geral

Escrever um passo a passo (um algoritmo) para resolver um quebra-cabeça dado.

Objetivos Específicos:

- Compreender o conceito de algoritmo;
- Identificar e dividir uma tarefa em etapas menores e essenciais;
- Descrever os passos necessários para completar uma atividade de forma clara e sequencial;
- Antecipar e resolver possíveis ambiguidades na linguagem algorítmica.

Pré-requisitos

- Essa atividade é voltada para alunos do 9º ano.
- Pré-requisito: Os alunos devem conhecer os nomes de determinadas formas geométricas e de termos como: hipotenusa, cateto, ângulo reto, setor circular, etc.

3.2 Apresentação

O que é um algoritmo?
Algoritmo é uma sequência de passos a serem realizados com objetivo de realizar alguma tarefa.

Receitas culinárias são um exemplo prático de algoritmos. Nelas podemos encontrar os ingredientes e as etapas necessárias para fazer uma comida. Veja a seguir dois exemplos de algoritmos:

Algoritmo 3.1: Como ligar um computador

```
Conecte o cabo de energia na tomada;
No torre, pressione o botão de ligar;
Se o monitor estiver desligado, ligue–o;
Selecione o usuário desejado na tela de login;
Digite a senha correspondente ao usuário selecionado;
Pressione a tecla ENTER.
```

Fonte: Elaborado pela autora

O seguinte exemplo apresenta um algoritmo para determinar se um número natural é divisível por 3, assumindo que se sabe a tabuada de 3 (ou seja, sabe-se quais são os múltiplos de 3 entre 0 a 30):

Algoritmo 3.2: Verificar se um número é divisível por 3

```
1 Escolha um número natural inicial.
2 Some todos os algarismos que compõem este número.
3 Verifique se o resultado dessa soma é um número entre 0 e 30:
4     Se não for, retorne ao passo 2 usando o número obtido como o novo número.
5     Se for, siga para o próximo passo.
6 Determine se o resultado é um múltiplo de 3:
7     Se sim, então o número inicial é divisível por 3.
8     Se não, então o número inicial não é divisível por 3.
```

Fonte: Elaborado pela autora

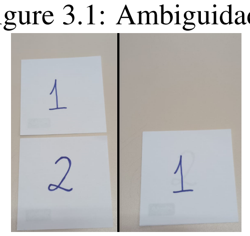
É importante garantir que as instruções sejam claras e precisas, evitando qualquer ambiguidade, para que a interpretação da máquina ou por outra pessoa não ocasione um resulte não esperado. As instruções a seguir, demonstram um exemplo de ambiguidade:

Algoritmo 3.3: Algoritmo com ambiguidade

```
Pegue dois pedaços de papel de mesmo tamanho;
Escreva o número 1 em um papel e o número 2 no outro papel;
Posicione o papel com o número 1 em cima do papel com o número 2.
```

Fonte: Elaborado pela autora

Figure 3.1: Ambiguidade



Fonte: Elaborado pela autora

Ora, aqui temos uma ambiguidade, pois a instrução de colocar o papel 1 "em cima" do papel 2 pode ser interpretada de duas maneiras, observe essas interpretações na Figura 3.1).

Observe que ambos os casos podem ser interpretados como o papel número 1 está em cima do papel número 2, pois não foi definido nenhuma referência para descartar uma das possibilidades. Para descartar, por exemplo, a segunda opção, poderia-se adicionar a instrução: *"Considere as disposições dos papéis apenas sobre o plano da mesa, ou seja, não podendo haver sobreposição dos papéis;"* assim, só poderá existir a primeira opção.

3.3 Atividade

A atividade pode ser realizada em grupos e dividida em 4 etapas, na qual cada grupo receberá um tangram.

Etapa 1: Cada grupo resolve o seu quebra-cabeça.

Etapa 2: Em seguida o grupo deve escrever um algoritmo (as instruções) para a solução do quebra-cabeça. Não pode desenhar.

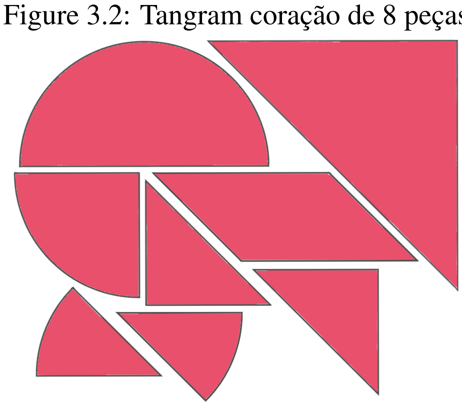
Etapa 3: Os quebra-cabeças devem ser desmontados e trocados entre os grupos com diferentes quebra-cabeças, entregando junto o algoritmo escrito. Cada grupo deve usar o algoritmo elaborado pelo outro grupo para resolver o quebra-cabeça recebido.

Etapa 4: Por fim, dever ser realizada uma discussão com a turma sobre as falhas nos algoritmos, ambiguidades e como melhorar o algoritmo.

Tangram coração - Etapa 1

Este quebra-cabeça é composto pelas seguintes peças: um semicírculo, um setor circular de 90°, dois setores circulares de 45°, um triângulo retângulo grande, dois triângulos retângulos pequenos de mesmo tamanho e um paralelogramo. Conforme a figura a seguir.

Figure 3.2: Tangram coração de 8 peças



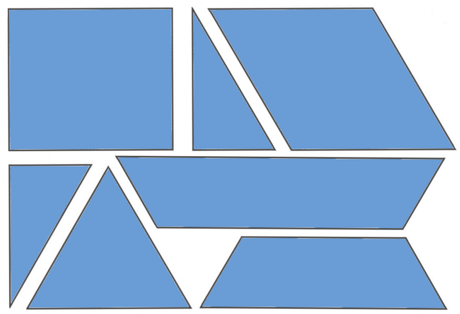
Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo é formar um coração com essas peças. Devem ser usadas todas as peças, sem sobreposição das peças e sem sobrar espaços entre elas.

Tangram triângulo - Etapa 1

Este quebra-cabeça é composto pelas seguintes peças: um quadrado, dois triângulos retângulos de mesmo tamanho, um paralelogramo, um triângulo equilátero, dois trapézios sendo um mais comprido que o outro.

Figure 3.3: Tangram triângulo equilátero de 7 peças



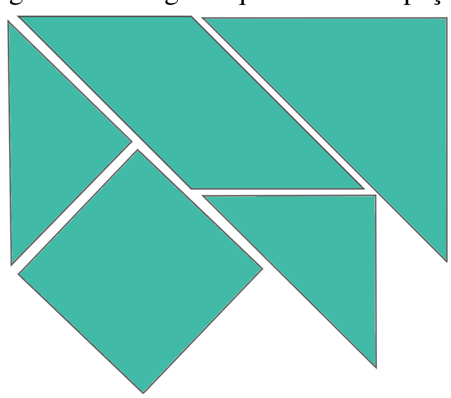
Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo é formar um triângulo equilátero com essas peças. Devem ser usadas todas as peças, sem sobreposição das peças e sem sobrar espaços entre elas.

Tangram quadrado - Etapa 1

Este quebra-cabeça é composto pelas seguintes peças: um quadrado, um paralelogramo, um triângulo retângulo grande e dois triângulos retângulos pequenos.

Figure 3.4: Tangram quadrado de 5 peças



Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo é formar um quadrado com essas peças. Devem ser usadas todas as peças, sem sobreposição das peças e sem sobrar espaços entre elas.

Escrever o algoritmo - Etapa 2

Alunos: ____

____

Pré-definições do algoritmo:

- Considere as disposições das peças apenas sobre o plano da mesa, ou seja, não podendo haver sobreposição das peças;
- Devem ser usadas todas as peças;
- Não deve sobrar espaços entre as peças.

Em equipe, resolvam o quebra-cabeça que foi entregue a vocês. Após completá-lo, elaborem um passo a passo (um algoritmo) que descreva as etapas necessárias para montá-lo. Esse algoritmo deve ser claro o suficiente para que outra equipe possa utilizá-lo para resolver o quebra-cabeça seguindo as instruções fornecidas.

Depois de terminar de escrever o algoritmo, desmonte o quebra-cabeça e entregue as peças junto com o algoritmo para outra equipe (que tenha recebido um quebra-cabeça diferente da sua equipe).

Montar o quebra-cabeça seguindo o algoritmo - Etapa 3

Alunos: ____

____

Equipe de quem vocês receberam o quebra-cabeça e o algoritmo:

____

Tentem resolver o quebra-cabeça seguindo <u>exatamente</u> s instruções do algoritmo elaborado pela equipe de quem vocês o receberam.

Discussão com a turma - Etapa 4

<u>Respondam as seguintes questões:</u>

1 - No quebra-cabeça que sua equipe resolveu e precisou escrever o algoritmo, quais foram as dificuldades que vocês encontraram? (Etapas 1 e 2)

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

2 - Quando sua equipe recebeu o novo quebra-cabeça com o algoritmo escrito pela outra equipe, vocês conseguiram resolver facilmente ao seguir as instruções do algoritmo? (Etapa 3)

____

____

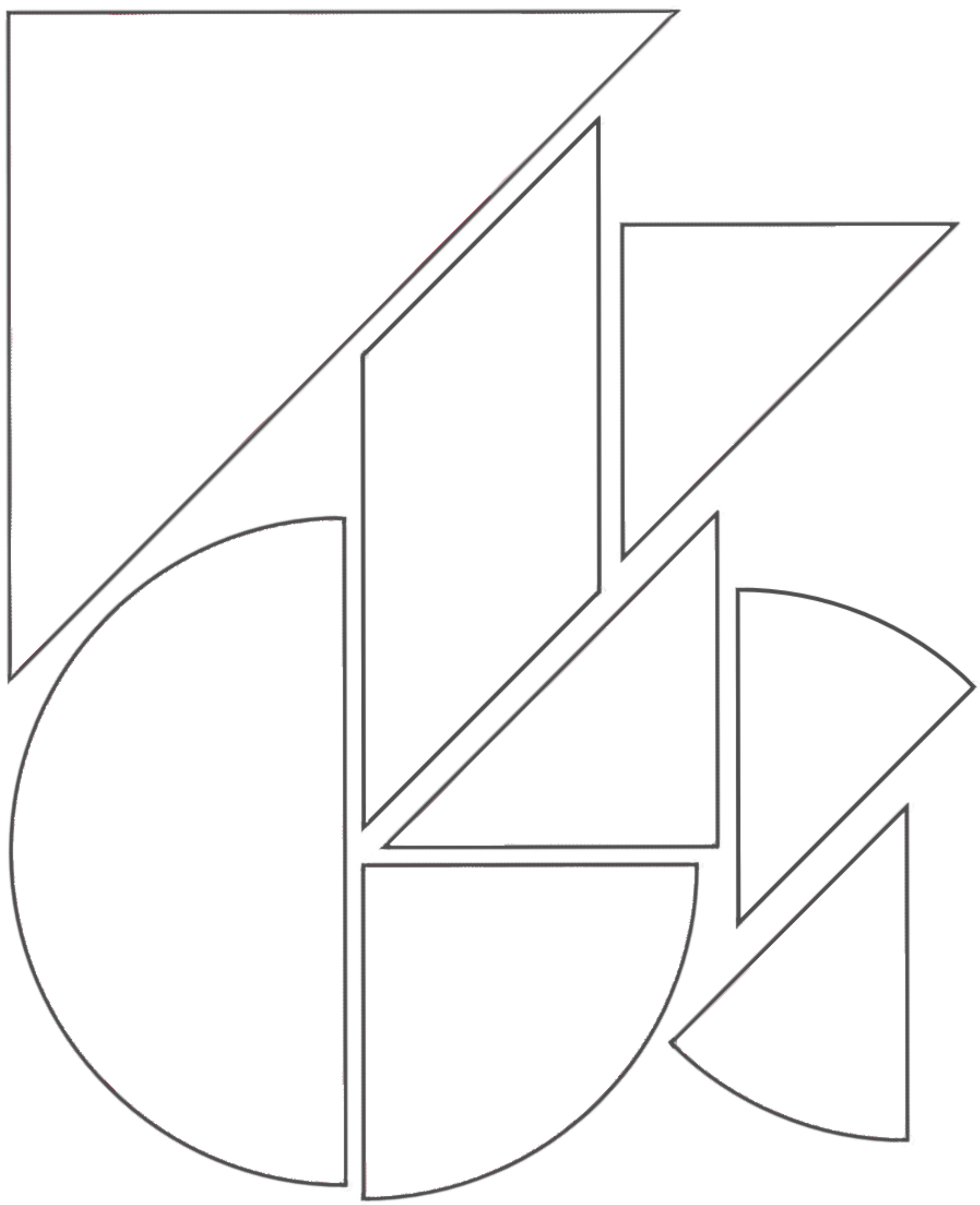
____

3 - Vocês tiveram dúvida sobre alguma etapa do algoritmo (escrito pela outra equipe) que poderia causar interpretações diferentes? (Etapa 3)

4 - Em alguma parte da solução com o algoritmo, vocês precisaram adivinhar a posição de algumas peças por si mesmos? (Etapa 3)

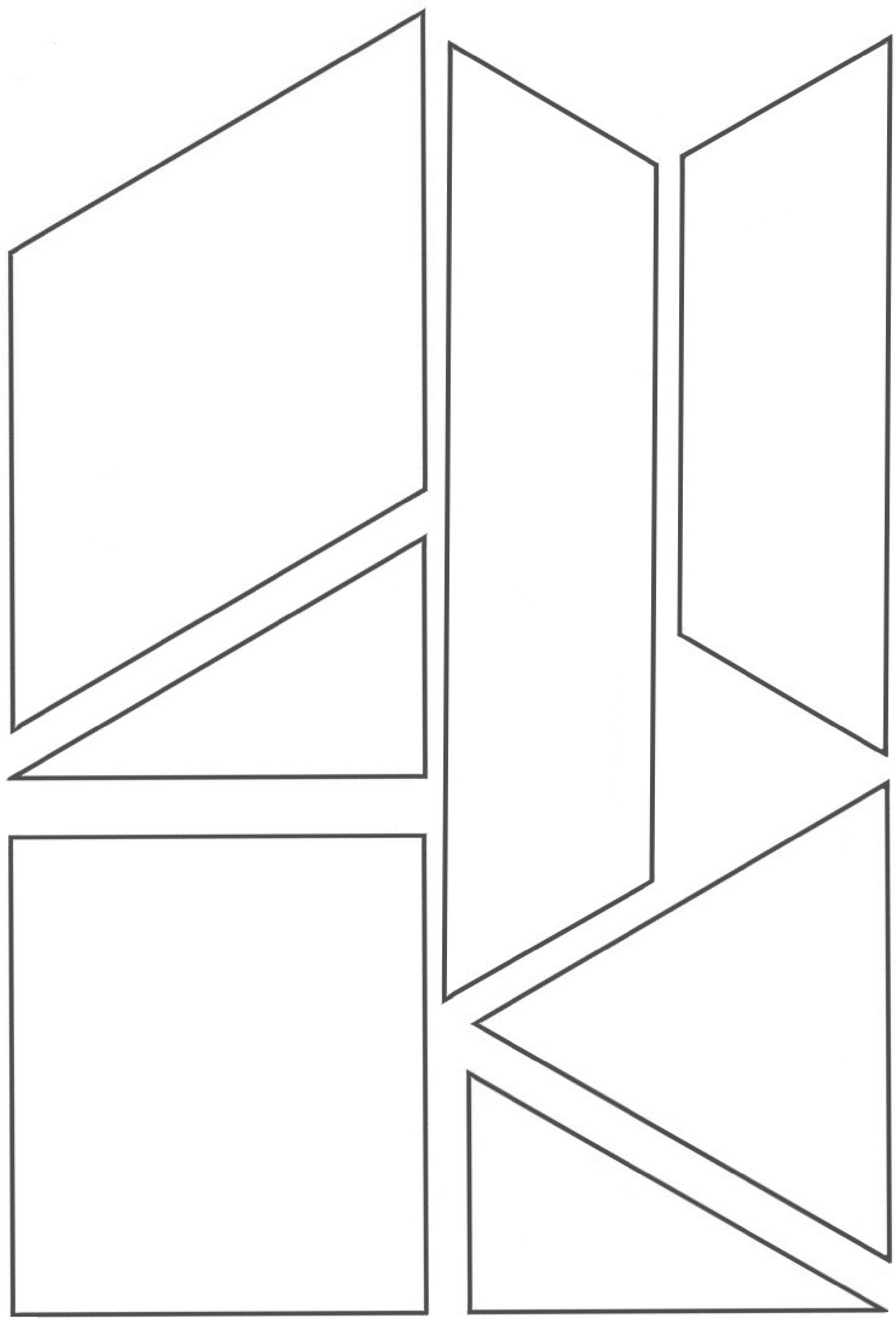
3.4 Confecção

Figure 3.5: Confecção Tangram Coração



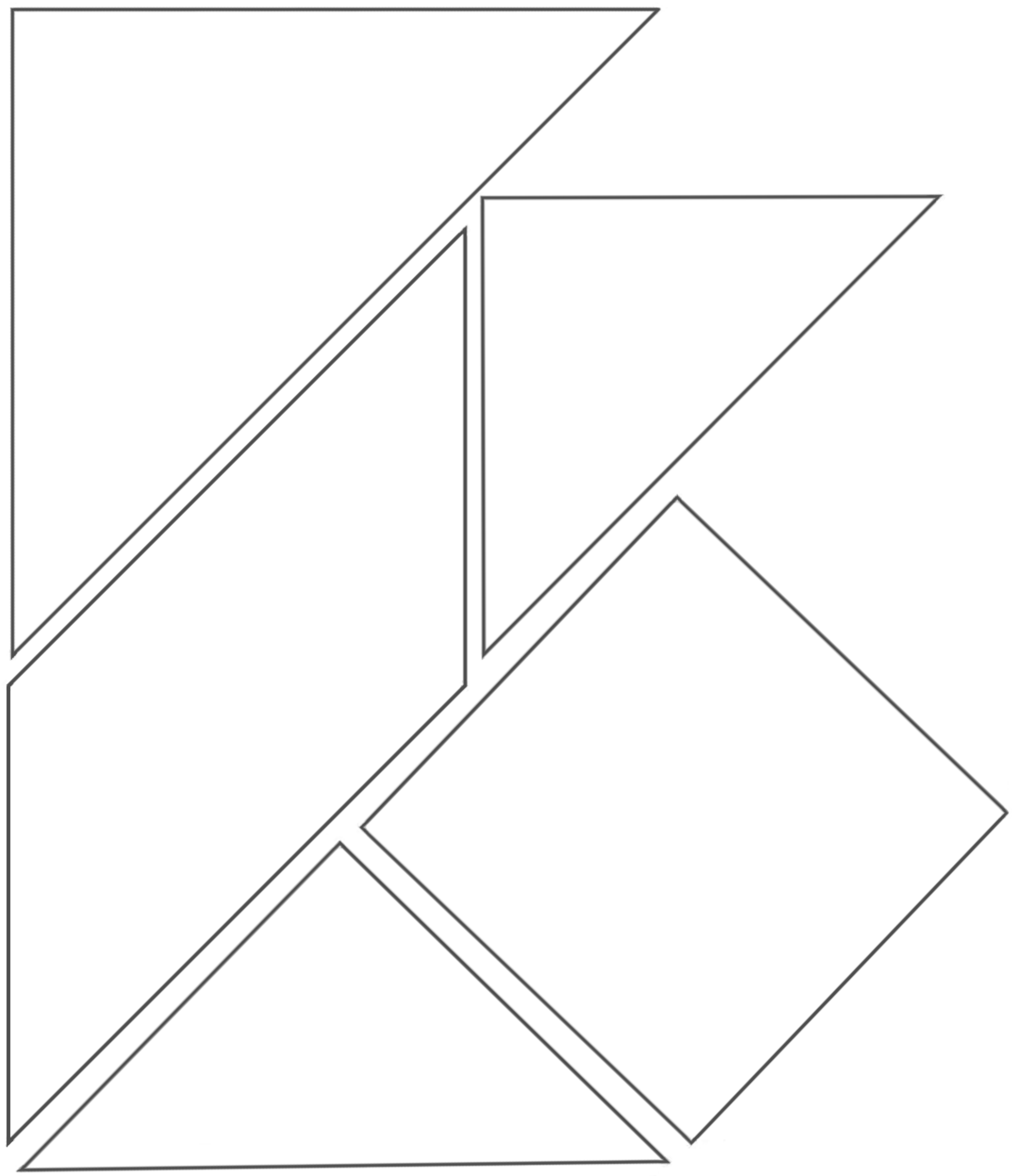
Fonte: Elaborado pela autora

Figure 3.6: Confecção Tangram Triângulo Equilátero



Fonte: Elaborado pela autora

Figure 3.7: Confecção Tangram Quadrado - 5 peças



Fonte: Elaborado pela autora

3.5 Orientações sobre a atividade para o Professor

Apresentação

Na seção da apresentação, já foi instruído aos alunos sobre o que é um algoritmo, mas o professor pode explicar o conteúdo, se preferir, ao invés de solicitar que eles aprendam sozinhos através da leitura.

As equipes podem ser divididas em 3 ou 4 alunos, mas é possível também que trabalhem individualmente ou duplas. Tenha em mente que em equipes muito grandes podem resultar em alguns alunos pouco participativos.

Para complementar a ideia principal desta atividade, pode apresentar o seguinte vídeo com título: "Como ensinar linguagem de programação para uma criança" (é possível clicar no título, pois ele está com hiperlink e será direcionado ao vídeo no YouTube), que apresenta um pai solicitando as filhos para descreverem os passos de como fazer um sanduíche de manteiga de amendoim com geleia, onde o pai segue apenas os passos descritos, tentando encontrar brechas nas instruções que possam resultar em interpretações erradas.

Etapa 1

Imprima os quebra-cabeças apresentados na seção de Confecção. Você pode levar as peças já recortadas ou pedir que os próprios alunos façam o recorte, pois, nessa seção, os quebra-cabeças não estão resolvidos.

Na distribuição dos quebra-cabeças, procure evitar que equipes diferentes que estejam próximas recebam o mesmo quebra-cabeça. Se quiser encontrar outros quebra-cabeças na internet, apenas cuide para que todas as peças sejam figuras geométricas com nomes conhecidos pelos alunos.

No entanto, não é necessário que todas as equipes tenham quebra-cabeças diferentes, inclusive, pode ser interessante na discussão da atividade (última etapa), que equipes diferentes tenham elaborado algoritmos completamente distintos, seja na ordem das peças, na clareza da descrição das etapas, entre outros fatores.

Ao iniciar a execução da atividade, na primeira etapa, onde os alunos resolvem os quebra-cabeças pela primeira vez, é importante que você esteja atento ao tempo disponível para realizar dessa etapa.

Conforme as equipes progridem na solução do quebra-cabeça, se houver algumas com maior dificuldade, o professor pode oferecer pequenas dicas sobre como determinadas peças devem ser posicionadas para facilitar a solução. Por exemplo: "essas peças devem ficar juntas desta forma", "essa parte desta peça é um dos lados do quadrado", ou "esse ângulo reto não pertence a nenhum dos vértices do quadrado que vocês querem montar". Essas dicas podem agilizar a finalização desta etapa, pois a parte principal da atividade é a etapa em que os estudantes irão escrever os algoritmos, e eles precisarão de mais tempo para isso.

Eventualmente, pode acontecer de algumas equipes não conseguirem resolver o quebra-cabeça no tempo determinado. Nessa situação, é preferível que o professor disponibilize apenas a solução visual para essas equipes (sem apresentar o algoritmo que se encontra abaixo da solução visual), solicitando apenas que a equipe elabore o algoritmo para a solução do quebra-cabeça. Portanto, se for perceptível que muitas equipes já terminaram de resolver o quebra-cabeça e começaram a escrever os algoritmos, é aconselhável que o professor intervenha nas equipes que ainda não encontraram a solução.

Etapa 2

Na elaboração dos algoritmos realizada pelos alunos (etapa 2) o professor evita fazer intervenções na escrita. As ambiguidades, caso existam, provavelmente surgirão quando a outra equipe for resolver o quebra-cabeça seguindo apenas o algoritmo escrito. Se for necessário fazer alguma sugestão, isso deve ser direcionado apenas às equipes que estejam mais estagnadas na escrita ou quando os alunos precisarem se lembrar dos nomes dos elementos das figuras geométricas (cateto, ângulo reto, trapézio, base maior, etc.).

Etapa 3

Na execução da etapa 3 da atividade, onde os quebra-cabeças são trocados entre as equipes, pode ser interessante solicitar que os alunos anotem as possíveis ambiguidades que surgirem ao resolver o quebra-cabeça seguindo as orientações do algoritmo elaborado pela outra equipe. Isso ajudará a garantir que eles não esqueçam das dúvidas que tiveram durante a execução do algoritmo, para que possam relatar essas dificuldades na discussão (etapa 4).

Etapa 4

Na etapa final, o professor conduzirá a turma a compartilhar suas experiências tanto na elaboração do algoritmo quanto na execução do algoritmo escrito por outra equipe.

É possível que algumas equipes encontrem trechos do algoritmo que deixem dúvidas sobre a disposição das peças. Instrua os alunos a discutir as ambiguidades existentes, apontando as diferentes possibilidades de interpretação dos comandos escritos e mostrando, com as peças, o que aconteceria em cada caso. Incentive-os a pensar em como poderiam ajustar a escrita do comando para eliminar essas ambiguidades.

3.6 Discussões e reflexões sobre a atividade para o Professor

Observe, professor, que a intenção principal desta atividade é que os alunos elaborem um algoritmo com instruções claras e sem ambiguidades. A necessidade de desenvolver um texto com instruções de forma bem estruturada é justificada pela prática profissional da programação, onde é essencial prever todas as possíveis interpretações de um código por uma máquina, que pode executá-lo de maneira imprevista se houver qualquer ambiguidade. Além disso, programadores muitas vezes criam sistemas que serão usados por clientes e o desafio é torná-los o mais intuitivos possível. Essa tarefa de simplificar e antecipar as ações do usuário nem sempre é fácil!

Nas redes sociais, é muito comum profissionais da programação criarem publicações descontraídas (os famosos *memes*) expressando suas frustrações quando um sistema que parecia intuitivo para eles acaba confundindo um usuário. O programador acredita que o uso do sistema é óbvio, mas encontra usuários que, sem compreender o funcionamento, acabam tentando ações absurdas (do ponto de vista do programador) para realizar uma tarefa simples.

Embora tenhamos comentado sobre a área de Tecnologia da Informação (TI), não concorda que, em qualquer profissão, é fundamental saber se comunicar bem, instruir com clareza e se fazer entender? A capacidade de transmitir instruções claras e precisas é essencial em várias áreas de nossa vida!

Quanto à matemática nesta atividade, observe que espera-se que os alunos utilizem seu conhecimento sobre formas geométricas para construir instruções claras. Sugerimos, no entanto, que os alunos já possuam esses conceitos de geometria para que possam realizar a atividade sem grandes dificuldades. Embora a atividade também possa funcionar como uma revisão de conteúdos geométricos, o foco principal é desenvolver um algoritmo claro e objetivo.

3.7 Orientações de confecção

O professor pode confeccionar esse material imprimindo as imagens apresentadas na seção Confecção. As imagens estão com as peças misturadas, isto é, sem a solução, então o docente pode solicitar que os próprios alunos recortem para destacar as peças, pois eles não terão acesso à solução do quebra-cabeça sem antes tentar montar por si mesmos.

Pode ser interessante fazer a impressão com folhas sulfites coloridas para deixar mais bonito o material. Apenas lembre-se que **não é recomendado trocar as cores de um mesmo quebra-cabeça** (por exemplo, imprimir o quebra-cabeça do coração em várias cores diferentes para que, depois de recortar, seja trocado peças iguais, mas de cores diferentes, com a intenção de deixar o quebra cabeça todo colorido), para que os alunos não usem a identificação das peças através das cores, o interesse aqui é que os alunos definam as peças pelas suas formas geométricas. Se as cores das peças de um mesmo quebra-cabeça forem diferentes, os alunos certamente irão escrever no algoritmo, por exemplo, “Use a peça amarela” ao invés de escrever “Use a peça em forma de setor circular de 90°”.

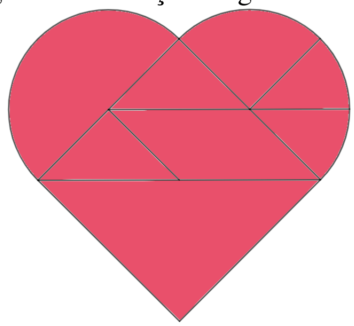
Sugerimos que quebra-cabeças iguais tenham a mesma cor. Por exemplo, todos os quebra-cabeças em forma de coração podem ser impressos em papel sulfite rosa, os quebra-cabeças em forma de triângulo em papel sulfite azul e os quebra-cabeças quadrados de 5 peças em papel sulfite verde. Isso ajuda a identificar rapidamente qual quebra-cabeça cada equipe está montando, evitando que o mesmo quebra-cabeça seja repetido no momento de trocar com outra equipe.

Se preferir, antes de recortar, cole a folha impressa dos quebra-cabeças em um pedaço de papelão (mas que ainda seja fácil de cortar) para deixar as peças mais resistentes, porém isso é opcional.

3.8 Soluções

Nesta seção apresentamos as soluções visuais dos quebra-cabeças e um possível algoritmo que resolve. Note que a escrita do algoritmo não é única, ela serve apenas como base para verificar os detalhes que precisam ser mencionados para não ter ambiguidades de interpretação.

Figure 3.8: Solução tangram coração



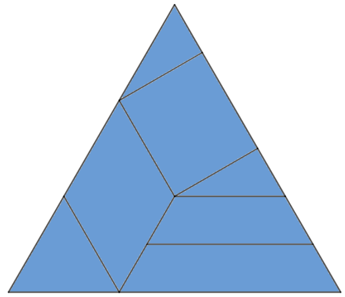
Fonte: Elaborado pela autora

Algoritmo 3.4: Solução do tangram coração

1 A resolução se dá separando o quebra−cabeça em três partes: um quadrado e dois semicírculos.
2 Deixe o semicírculo formado por uma única peça de lado.
3 Forme outro semicírculo com as peças em formato de setor circular: uma peça de setor de 90° e dois setores de 45°.
4   Junte os setores de 45°, formando um setor de 90°.
5   Junte a peça de setor circular de 90° com as peças do passo anterior, formando um semicírculo.
6 Forme um quadrado com as seguintes peças: o triângulo grande, os dois triângulos pequenos e o paralelogramo.
7   Considere quadrado resolvido de forma que suas diagonais sejam paralelas aos lados de uma mesa retangular.
8   Posicione o triângulo maior na parte inferior do quadrado, supostamente resolvido, de forma que o ângulo reto seja coincidente com o vértice do quadrado. E que os catetos desse triângulo sejam os lados adjacentes deste quadrado. Note que a hipotenusa éuma das diagonais do quadrado desejado.
9   Com um dos triângulos menores, mantendo a hipotenusa voltada para baixo, una−o triângulo maior de forma que a hipotenusa do triângulo menor esteja contida na hipotenusa do triângulo maior, ainda que os vértices de ambos os triângulos se coincidam no lado esquerdo.
10   Com a peça em formato de paralelogramo, encaixe de forma que o lado menor coincida com o cateto (direito) do triângulo menor e o lado maior do paralelogramo esteja contido na hipotenusa do triângulo maior.
11   Com o último triângulo pequeno, também de forma que a hipotenusa esteja posicionada para baixo, junte a peça coincidindo a hipotenusa com o lado superior do paralelogramo.
12 Com o quadrado concluído, segue os próximos passos.
13   Pegue o semicírculo de uma peça e encaixe−o no lado superior esquerdo do quadrado, coincidindo o lado do quadrado com o diâmetro do semicírculo.
14   Repita o mesmo processo o outro semicírculo montado com o lado direito superior do quadrado.

Fonte: Elaborado pela autora

Figure 3.9: Solução tangram triângulo



Fonte: Elaborado pela autora

Algoritmo 3.5: Solução - Triângulo

A resolução se dá formando três partes principais do quebra–cabeça, essas partes são trapézios que denominaremos de **trapézios principais**.

Forme o **Trapézio principal 1** usando as duas peças em forma de trapézio:

  Coloque o trapézio menor acima do trapézio maior, de forma que as bases de tamanhos iguais coincidam.

Forme o **Trapézio principal 2** usando as peças em forma de losango e de triângulo equilátero:

  Una um lado do triângulo com um dos lados do losango.

Forme o **Trapézio principal 3** usando as peças restantes, um retângulo e dois triângulos retângulos:

  Una o cateto maior de um dos triângulos com um dos lados menores do retângulo.

  Repita o processo com o outro triângulo, unindo o cateto maior com o outro lado menor do retângulo, de forma que essas três peças formem um trapézio.

Etapa final: Considere o quebra–cabeça resolvido de forma que o triângulo tenha o lado inferior paralelo ao lado inferior de uma mesa retangular.

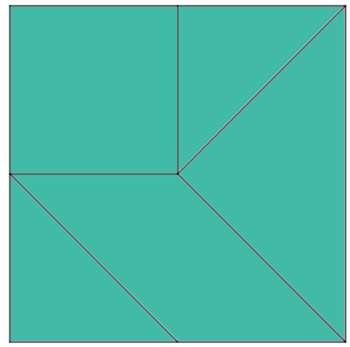
  Posicione o **Trapézio principal 1** no canto inferior direito da mesa de forma que a base maior esteja voltada para baixo. O segmento desta base será a parte da base do do triângulo resolvido, e o vértice inferior direito dese trapézeio será um vértice do triângulo desejado.

  Posicione o **Trapézio Principal 2** de forma que a base menor coincida com o lado esquerdo (não paralelo) do Trapézio principal 1. Um lado não paralelo do Trapézio principal 2, que se encontra na parte inferior do quebra–cabeça, forma um prolongado da base maior do Trapézio principal 1.

  Posicione **Trapézio Principal 3** de forma que a base menor coincida com o lado não paralelo (superior) do Trapézio Principal 2, enquanto o lado não paralelo (inferior) do Trapézio Principal 3 coincide com a base menor do Trapézio Principal 1.

Fonte: Elaborado pela autora

Figure 3.10: Solução tangram quadrado



Fonte: Elaborado pela autora

Algoritmo 3.6: Solução - Quadrado

1 Considere o quadrado resolvido de forma que seus lados sejam paralelos aos lados de uma mesa retangular.
2 Posicione a peça quadrada no canto superior esquerdo da mesa. Um dos vértices deste quadrado também será o vértice do quadrado desejado, e os lados adjacentes a este vértice farão parte dos lados adjacentes do quadrado desejado.
3 Pegue um dos triângulos menores e junte um dos catetos com o lado direito do quadrado posicionado no passo anterior, de forma que o outro cateto forme um prolongado do lado superior do quadrado.
4 Pegue o triângulo maior e junte um dos catetos com a hipotenusa do triângulo posicionado anteriomente. O vértice que contém o ângulo reto do triângulo maior deve se unir ao vértice inferior direito da primeira peça (o quadrado) e também com um dos vértices do triângulo menor.
5 Pegue o paralelogramo e posicione–o de forma que o lado menor coincida com o lado inferior da peça quadrada, e o lado maior coincida com o cateto do triângulo maior.
6 Posicione o último triângulo pequno no canto inferior esquerdo do quebra–cabeça, de forma que a hipotenusa desse triângulo coincida com o maior lado do paralelogramo.

Fonte: Elaborado pela autora

4. FLUXOGRAMA E PSEUDOCÓDIGO

4.1 Objetivos

Objetivo Geral:

Desenvolver a capacidade de compreender e organizar soluções lógicas usando fluxogramas e pseudocódigos de forma clara e compreensível.

Objetivos específicos

- Compreender fluxogramas;
- Usar estruturas condicionais e de repetição;
- Depurar falhas em algoritmos

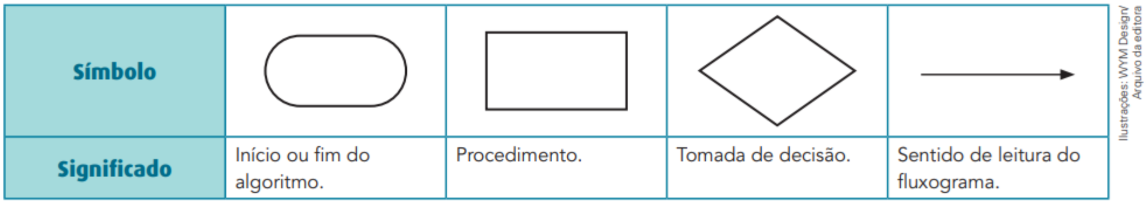
Pré-requisitos

- Essa atividade é voltada para turmas do 9º ano do ensino fundamental em diante.
- Conhecimentos matemáticos abordados nas questões: critérios de divisibilidade; fórmula resolutiva da equação de segundo grau.

4.2 Fluxogramas

Fluxogramas são representações gráficas usadas para visualizar algoritmos. Amplamente utilizados na computação, eles também são comuns em áreas como a administração. Abaixo, veja os símbolos mais utilizados em fluxogramas, que serão aplicados nas próximas atividades:

Figure 4.1: Símbolos para fluxogramas

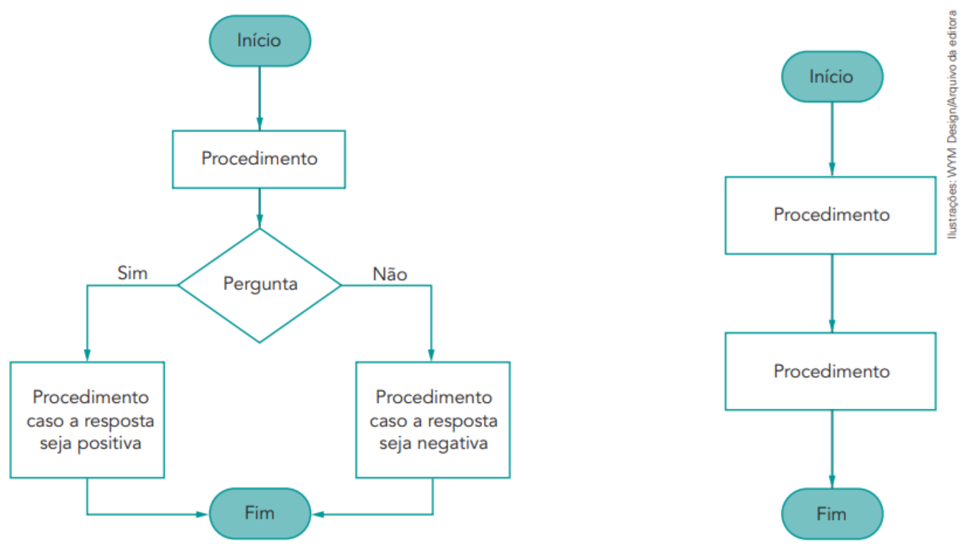


Fonte: Dante (2020)

A figura a seguir apresenta dois exemplos básicos de estrutura de fluxogramas. Note que o fluxograma apresentado à esquerda possui o símbolo de tomada de decisão, que será definido por uma pergunta. Nos códigos de programas de computador essa tomada de decisão costuma ser denotada pelo comando **se...então**. O procedimento caso a resposta seja negativa é um elemento opcional quando nos referimos às estruturas do comando **se...então**, caso tenha um procedimento para a resposta negativa (como mostra na figura abaixo), ele será acompanhado da cláusula **senão** em seu algoritmo.

A figura a seguir apresenta dois exemplos básicos de estruturas de fluxogramas. Observe que o fluxograma à esquerda inclui o símbolo de tomada de decisão, que é definido por uma pergunta. Nos códigos de programas de computador, essa tomada de decisão é geralmente representada pelo comando se... então. O procedimento para a resposta negativa é um elemento opcional nas estruturas do comando se... então; se houver um procedimento para essa resposta (como mostrado na figura abaixo), ele será acompanhado pela cláusula senão no algoritmo.

Figure 4.2: Estrutura básica de fluxogramas

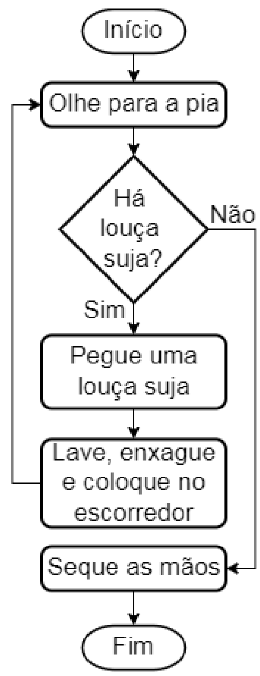


Fonte: Dante (2020)

Questão 1

Veja o fluxograma a seguir que descreve a rotina de lavar a louça.

Figure 4.3: Fluxograma: Lavando louça



Fonte: Elaborado pela autora

Para compreender o fluxograma suponhamos que existem 3 louças na pia para serem lavadas. Veja a sequência de fluxo:

1. Olho a pia;
2. Sim;
3. Pego uma louça;
4. Lavo;
5. Olho a pia;
6. Sim;
7. Pego uma louça;
8. Lavo;
9. Olho a pia;
10. Sim;
11. Pego uma louça;
12. Lavo;
13. Olho a pia;
14. Não;
15. Seco as mãos.

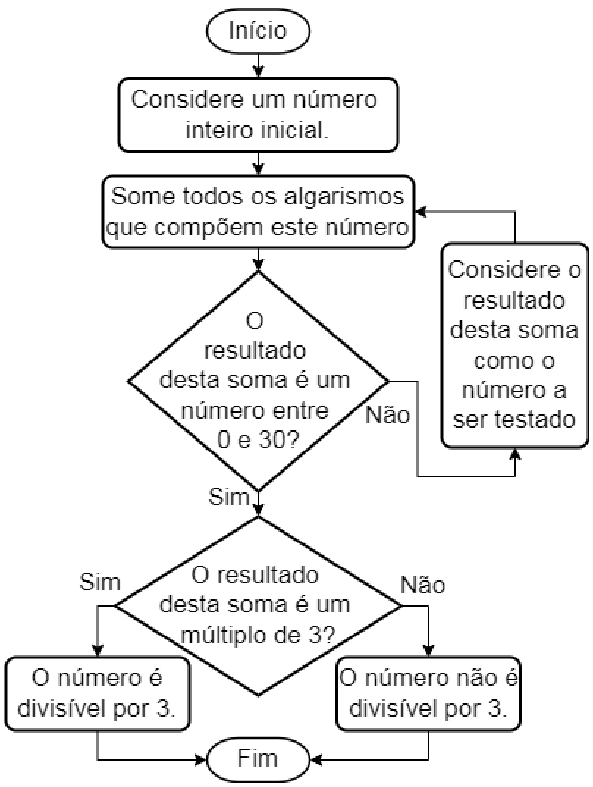
Exercícios: Faça a sequência de fluxo nas seguintes situações:

a) Existe apenas um louça na pia para ser lavada;
b) Existem 4 louças na pia para serem lavadas

Questão 2

Veja o fluxograma a seguir que descreve uma sequência de como determinar se um número natural é divisível por 3 sabendo a tábua do 3 (ou seja, sabendo quais são os múltiplos de 3 entre 0 e 30).

Figure 4.4: Fluxograma: Divisibilidade por 3



Fonte: Elaborado pela autora

Por exemplo, se o número é 2578469 a sequência é:

- Número: 2578469;
- $2+5+7+8+4+6+9=41$;
- Não;
- Número: 41;
- $4+1=5$;
- Sim;
- Não;
- O número 2578469 não é divisível por 3;

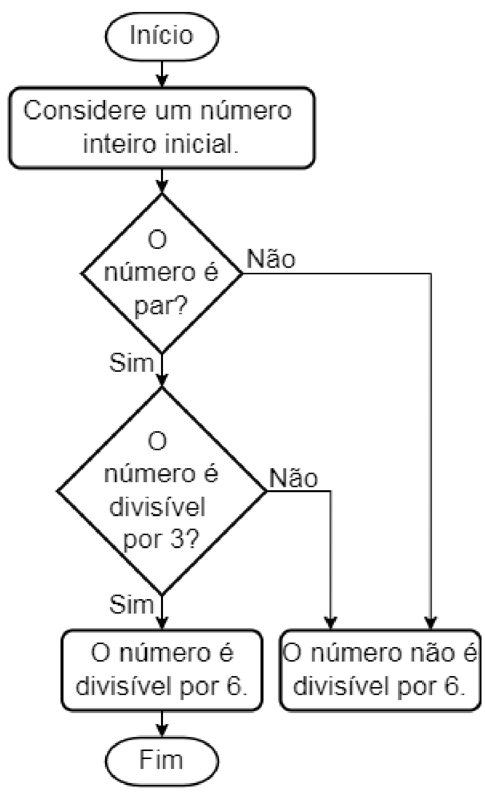
Exercícios: Descreva a sequência gerada a partir do fluxograma para determinar se o número dado é divisível por 3 (como realizado no exemplo acima):

a) 98573469.
b) 2869406.
c) 5768592.

Questão 3

O próximo fluxograma descreve o algoritmo para determinar se um número inteiro é divisível por 6.

Figure 4.5: Fluxograma: Divisibilidade por 6



Fonte: Elaborado pela autora

Exemplo:
O número é 642
Algoritmo:
- Número: 642;
- Sim;
- $6+4+2=12$, Sim;
- O número 642 é divisível por 6;

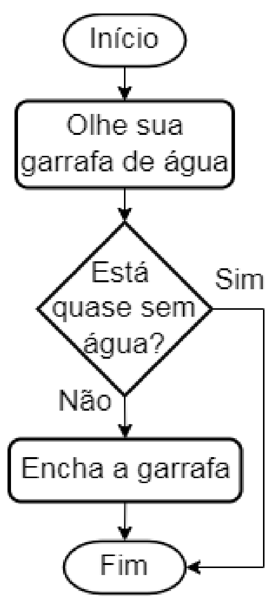
Exercícios
a) O número é 784.
b) O número é 46725.
c) O número é 5768592.
d) O número é 54628.

Questão 4

O fluxograma a seguir apresenta alguns erros. Na programação chamamos de *depuração* o ato de corrigir erros em um código, ou ainda, informalmente, conhecido como *desbugar*, que vem do inglês *bug* popularmente utilizado para informar que há um problema no código, sistema, *hardware*, etc.

Descubra o erro, indicando o que pode acontecer se as instruções forem seguidas conforme é apresentado nos fluxogramas a seguir, e apresente uma sugestão para corrigir.

Figure 4.6: Fluxograma: Decidir se irá encher sua garrafa de água



Fonte: Elaborado pela autora

Há um erro nesse fluxograma. Você consegue descobrir qual?

Responda:

a) O que pode acontecer se alguém seguir as instruções exatamente como se apresentam nesse fluxograma?

b) Apresente uma sugestão para corrigir esse fluxograma.

Questão 5

Na situação do fluxograma abaixo, uma pessoa já está em frente ao bebedouro, com a garrafa em suas mãos.

Figure 4.7: Fluxograma: Enchendo a garrafa de água

Fonte: Elaborado pela autora

Há um erro nesse fluxograma. Você consegue descobrir qual?

Responda:

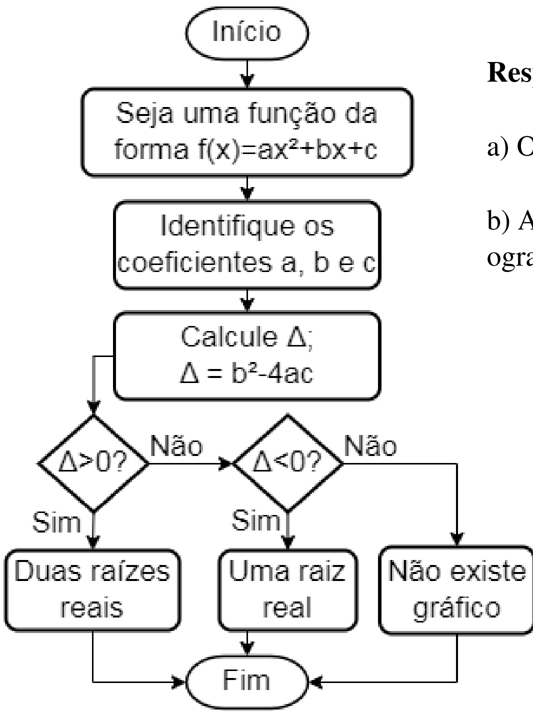
a) O que pode acontecer se alguém seguir as instruções exatamente como se apresentam nesse fluxograma?

b) Apresente uma sugestão para corrigir esse fluxograma.

Questão 6

O fluxograma abaixo representa as instruções para identificar quantas raízes possui uma função de 2º grau.

Figure 4.8: Fluxograma: Quantas raízes tem a função do 2º grau



Fonte: Elaborado pela autora

Há um erro nesse fluxograma. Você consegue descobrir qual?

Responda:

a) O que há de errado nesse fluxograma?

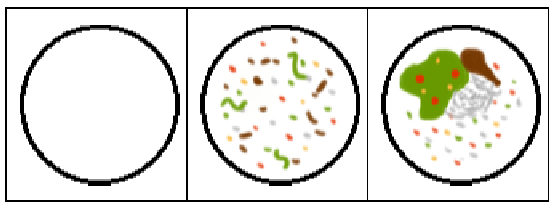
b) Apresente uma sugestão para corrigir esse fluxograma.

4.3 Pseudocódigos

Questão 7

Tina trabalha em um restaurante e sua função é recolher os pratos das mesas para lavá-los. Em determinado momento ela pode encontrar pratos limpos ou sujos. Os pratos limpos, ela apenas higieniza com um pano e um pouco de álcool e depois os guarda nos armários. Os pratos sujos, ela coloca na pia para lavar depois. Porém, há alguns pratos que ainda possuem restos de comida. Esses ela não pode simplesmente colocar na pia para lavar, pois os restos de comida podem entupir o ralo. Para estes pratos, ela deve primeiro esvaziá-los para depois colocá-los na pia.

Apresentamos abaixo a representação desses pratos:



Fonte: Elaborado pela autora

Para essas representações definimos as seguintes identificações:

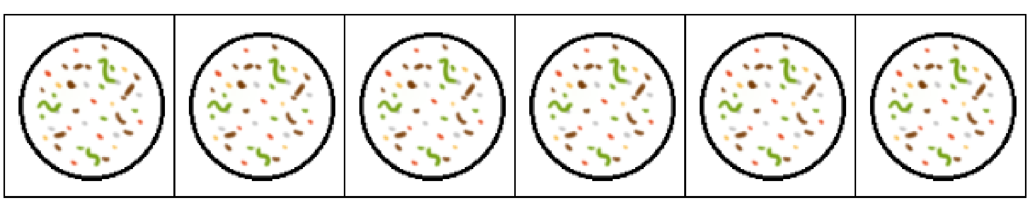
- **Prato limpo:** será denotado por ***limpo***;
- **Prato sujo:** será denotado por ***sujo***;
- **Prato com restos de comida:** será denotado por ***restocomida***.

E teremos os seguintes comandos:

- **guarde**: Higieniza e guarda o prato no armário. Após, segue para o próximo prato à direita;
- **paralavar**: Coloca o prato na pia. Após, segue para o próximo prato à direita;
- **esvazie**: Joga no lixo os restos de comida que estão no prato.

Observe as seguintes sequências, da esquerda para a direita, em que os pratos aparecem e preencha as lacunas dos algoritmos que definem as instruções que a Tina deverá seguir.

a) Para a sequência abaixo



Fonte: Elaborado pela autora

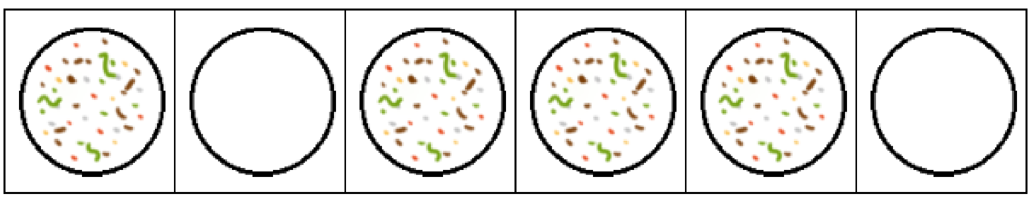
i) Tina deverá seguir o seguinte algoritmo:

```
Início
    paralavar;
    paralavar;
    ___________;
    ___________;
    ___________;
    ___________;
Fim
```

ii) Que tal um atalho? O que falta nesse algoritmo para que tenha o mesmo resultado do algoritmo anterior?

```
Início
    repita __ vezes
        ___________;
Fim
```

b)

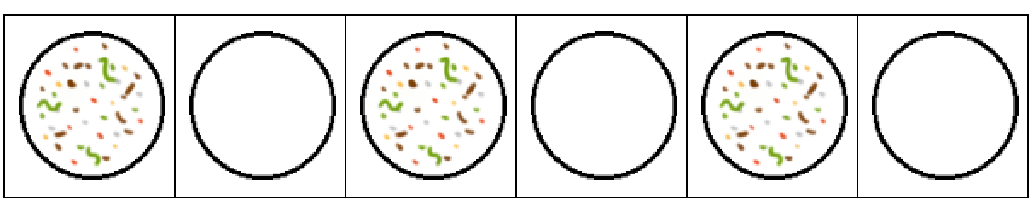


Fonte: Elaborado pela autora

Tina deverá seguir o seguinte algoritmo:

```
Início
    paralavar;
    guarde;
    ___________;
    ___________;
    ___________;
    ___________;
Fim
```

c)

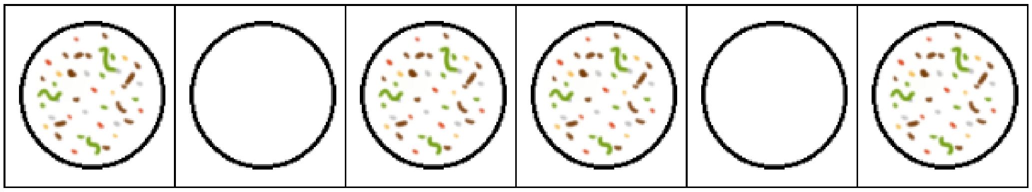


Fonte: Elaborado pela autora

Tina deverá seguir o seguinte algoritmo:

```
Início
    repita __ vezes
    início
        ___________;
        ___________;
    fim
Fim
```

d)

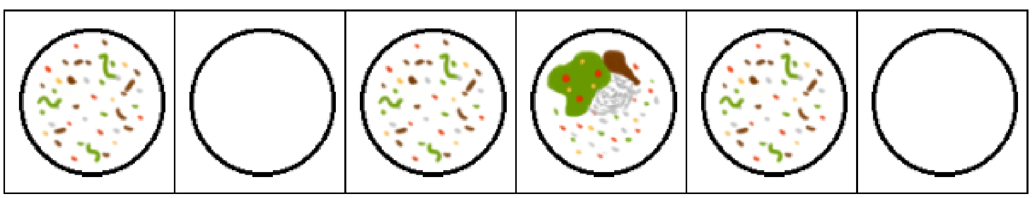


Fonte: Elaborado pela autora

Tina deverá seguir o seguinte algoritmo:

```
Início
    repita __ vezes
    início
        __________;
        __________;
        __________;
    fim
Fim
```

e)



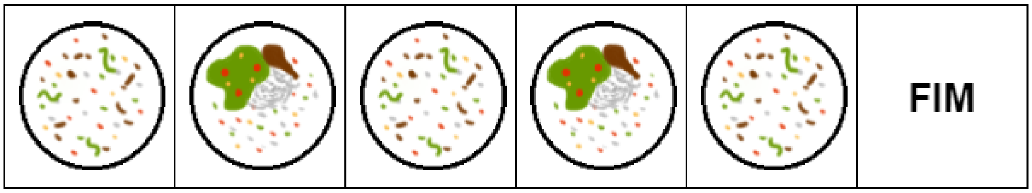
Fonte: Elaborado pela autora

Tina deverá seguir o seguinte algoritmo:

```
Início
    __________;
    __________;
    __________;
    __________;
    __________;
    __________;
    __________;
Fim
```

Dica: Lembre que o comando **esvazie** não foi definido que após esvaziar irá colocar o prato na pia e depois seguir para o próximo prato à direita. Então para o mesmo prato deverá instruir dois comandos!

f) Vamos tentar automatizar a decisão do comando?

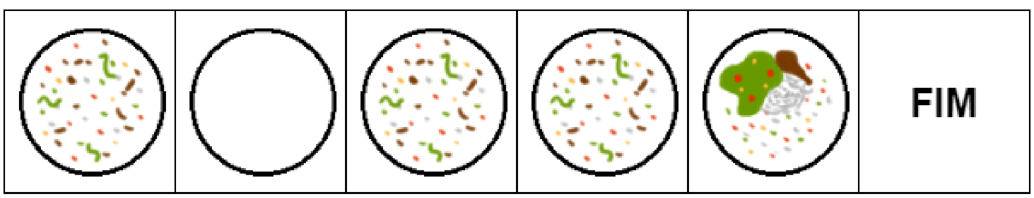


Fonte: Elaborado pela autora

Tina deverá seguir o seguinte algoritmo:

```
Início
    repita até FIM
    início
        se sujo então
            ___________;
        senão
            ___________;
            ___________;
        fim se
    fim
Fim
```

g)



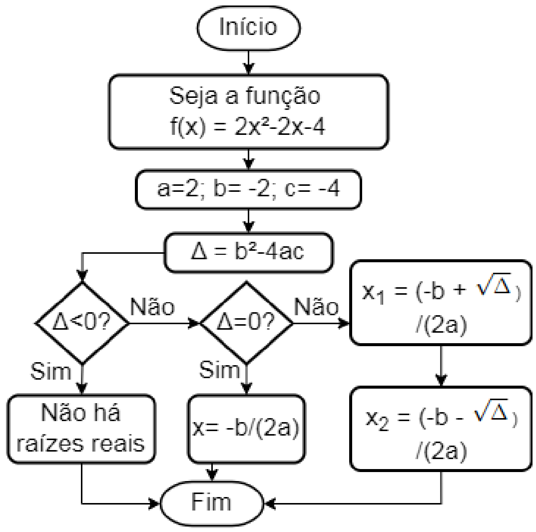
Fonte: Elaborado pela autora

Tina deverá seguir o seguinte algoritmo:

```
Início
    repita até FIM
    início
        se restocomida então
            ___________;
            ___________;
        senão
            se _________ então
                ___________;
            senão
                paralavar;
            fim se
        fim se
    fim
Fim
```

Questão 8

De acordo com o fluxograma a seguir, transcreva-o em algoritmo da forma textual. Para isso preencha as lacunas que faltam do algoritmo.



Fonte: Elaborado pela autora

Algoritmo:

```
var
    a, b, c, delta, x1, x2: real;
Início
    escreva(“Seja a função f(x) = 2x^2 − 2x − 4.”);
    a ← 2;
    b ← __;
    c ← −4;
    delta ← b pot 2 −4∗a∗c;
    se (delta____) então
        escreva(“Não há raízes reais.”);
    senão
        ____ (delta=0) ________
            x1 ← −b/(2a);
            escreva(“A única raiz real é x=”,x1);
        _______
            x1 ← (−b+delta raiz 2)/(2a);
            ____ ← (−b−delta raiz 2)/(2a);
            ___________(“As raízes são x1 =”,x1,“ e x2 =”,x2);
        fim se
    fim se
Fim
```

Observação: O comando **escreva** faz com que o computador apresente na tela, o que está escrito dentro dos parênteses. É uma instrução para que o *computador escreva* para você, usuário, ler. Ou seja, a instrução é para o computador seguir, pois é ele que irá escrever.

4.4 Orientações sobre a atividade para o Professor

Essa atividade pode ser realizada individualmente ou em duplas.

Os alunos podem fazer anotações diretamente na folha impressa (a não ser que o professor solicite o contrário), pois não é necessário que os alunos desenhem os símbolos dos fluxogramas, nem escrevam um código de programa de computador à mão.

As questões são fechadas, para fácil correção a ser realizada pelo professor. Grande parte das questões constituem em preencher lacunas.

A seção Pseudocódigos desta atividade tem a intenção de ensinar os alunos a identificar as estruturas de condição e de repetição em um algoritmo.

Todos os exercícios possuem respostas apresentadas na seção Soluções apresentada a seguir.

4.5 Soluções

Nesta seção apresentamos as respostas dos exercícios propostos acima

Seção - Fluxogramas

Questão 1

Fluxograma: Lavando louça

a)

1. Olho a pia;
2. Sim;
3. Pego uma louça;
4. Lavo;
5. Olho a pia;
6. Não;
7. Seco as mãos.

b)

1. Olho a pia;
2. Sim;
3. Pego uma louça;
4. Lavo;
5. Olho a pia;
6. Sim;
7. Pego uma louça;
8. Lavo;
9. Olho a pia;
10. Sim;
11. Pego uma louça;
12. Lavo;
13. Olho a pia;
14. Sim;
15. Pego uma louça;
16. Lavo;
17. Olho a pia;
18. Não;
19. Seco as mãos.

Questão 2

Fluxograma: Divisibilidade por 3

a) O número é 98573469.

- Número: 98573469;
- $9+8+5+7+3+4+6+9=51$;
- Não;
- Número: 51;
- $5+1=6$;
- Sim;
- Sim;
- O número 98573469 é divisível por 3;

b) O número é 2869406.

- Número: 2869406;
- $2+8+6+9+4+0+6=35$;
- Não;
- Número: 35;
- $3+5=8$;
- Sim;
- Sim;
- O número 2869406 não é divisível por 3;

c) O número é 5768592.

- Número: 5768592;
- $5+7+6+8+5+9+2=42$;
- Não;
- Número: 42;
- $4+2=6$;

- Sim;
- Sim;
- O número 5768592 é divisível por 3;

Questão 3

Fluxograma: Divisibilidade por 6

a) O número é 784.
- Número: 784;
- Sim;
- $7+8+4=19$, Não;
- O número 784 não é divisível por 6;

b) O número é 46725.
- Número: 46725;
- Não;
- O número 46725 não é divisível por 6;

c) O número é 5768592.
- Número: 5768592;
- Sim;
- $5+7+6+8+5+9+2=42$, $4+2=6$, Sim;
- O número 5768592 é divisível por 6;

d) O número é 54628.
- Número: 54628;
- Sim;
- $5+4+6+2+8=25$, Não;
- O número 54628 não é divisível por 6;

Questão 4

Fluxograma: Decidir se irá encher sua garrafa de água

a) A pessoa irá encher a garrafa, mesmo ela já estando cheia. A garrafa irá transbordar. E se a garrafa estiver quase sem água, a pessoa não irá encher a garrafa e ficará sem água e com sede.

b) Trocar de lugar a palavra *Sim* com a palavra *Não* e vice-versa.

Questão 5

Fluxograma: Enchendo a garrafa de água

a) A pessoa apenas irá apertar o botão pra jorrar água sem colocar a garrafa no local adequado. Como a garrafa nunca irá encher, a pessoa continuará apertando o botão eternamente, desperdiçando água.

b) Colocar a caixa que diz “Posicione a garrafa no bebedouro de forma que entre água nela” entre as caixas “Abra a garrafa” e “Aperte o botão para jorrar água”.

Questão 6

Fluxograma: Quantas raízes tem a função do 2º grau

a) A última caixa que diz “Não existe gráfico” está com um erro teórico sobre funções de 2º grau. Quando Δ for negativo, existe gráfico, sim.

b) Substituir o texto “Não existe gráfico” por “Não existem raízes reais”.

Questão 7

a) i) Algoritmo:

```
Início
    paralavar;
    paralavar;
    paralavar;
    paralavar;
    paralavar;
    paralavar;
Fim
```

ii) Algoritmo:

```
Início
    repita 6 vezes
        paralavar;
Fim
```

b) Algoritmo:

```
Início
    paralavar;
    guarde;
    paralavar;
    paralavar;
    paralavar;
    guarde;
Fim
```

c) Algoritmo:

```
Início
    repita 3 vezes
    início
        paralavar;
        guarde;
    fim
Fim
```

d) Algoritmo:

```
Início
    repita 2 vezes
    início
        paralavar;
        guarde;
        paralavar;
    fim
Fim
```

e) Algoritmo:

```
Início
    paralavar;
    guarde;
    paralavar;
    esvazie;
    paralavar;
    paralavar;
    guarde;
Fim
```

f) Algoritmo:

```
Início
    repita até FIM
    início
        se sujo então
            paralavar;
        senão
            esvazie;
            paralavar;
        fim se
    fim
Fim
```

g) Algoritmo:

```
Início
    repita até FIM
    início
        se restocomida então
            esvazie;
            paralavar;
        senão
            se limpo então
                guarde;
            senão
                paralavar;
            fim se
        fim se
    fim
Fim
```

Questão 8

```
var
    a, b, c, delta, x1, x2: real;
Início
    escreva("Seja a função f(x) = 2x^2 − 2x − 4.");
    a ← 2;
    b ← -2;
    c ← −4;
    delta ← b pot 2 −4∗a∗c;
    se (delta<0) então
        escreva("Não há raízes reais.");
    senão
        se (delta=0) então
            x1 ← −b/(2a);
            escreva("A única raiz real é x=",x1);
        senão
            x1 ← (−b+delta raiz 2)/(2a);
            x2 ← (−b−delta raiz 2)/(2a);
            escreva("As raízes são x_1 =",x1," e x_2 =",x2);
        fim se
    fim se
Fim
```