



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO PROGRAMA DE PÓS-
GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Alan de Mesquita Rodrigues

MOSSORÓ - RN

2025

ALAN DE MESQUITA RODRIGUES

**O ENSINO DE MATEMÁTICA PELA METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS: APRENDIZADO PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS E
SOLUCIONANDO PROBLEMAS PARA O APRENDIZADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal Rural do Semi-Árido-UFERSA, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Odacir Almeida Neves

Coorientador: Prof. Dr. Walter Martins
Rodrigues

MOSSORÓ - RN

2025

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

R696e

Rodrigues, Alan de Mesquita. O ensino de matemática pela metodologia da resolução de problemas: aprendizado para solucionar problemas e solucionando problemas para o aprendizado. / Alan de Mesquita Rodrigues. - 2025.
105 f. : il.

Orientador: Odacir Almeida Neves.
Coorientador: Walter Martins Rodrigues.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2025.

1. Resolução de problemas. 2. Metodologia de ensino. 3. Aprendizagem. I. Neves, Odacir Almeida, orient. II. Rodrigues, Walter Martins, co-orient. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência

Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva

CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

**O ENSINO DE MATEMÁTICA PELA METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS: APRENDIZADO PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS E
SOLUCIONANDO PROBLEMAS PARA O APRENDIZADO**

Dissertação apresentada a Universidade
Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, junto
ao Programa de Pós-graduação em Matemática
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 19 / 02 / 2025

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **ODACIR ALMEIDA NEVES**
Data: 02/07/2025 18:51:49-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Odacir Almeida Neves – UFERSA
Presidente e orientador

Documento assinado digitalmente
 **WALTER MARTINS RODRIGUES**
Data: 02/07/2025 18:28:32-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues – UFERSA
Coorientador

Documento assinado digitalmente
 **ANTONIA JOCVANIA PINHEIRO**
Data: 01/07/2025 21:49:02-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof.^a Dra. Antonia Jocivania Pinheiro – UFERSA
Membro interno

Documento assinado digitalmente
 **ODIRLEI SILVA JESUS**
Data: 01/07/2025 16:15:17-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Odirlei Silva Jesus – UFRN
Membro externo

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha amada avó, *PETRONILA JOAQUIM DA COSTA* (In Memoriam).

AGRADECIMENTOS

A Deus por estar comigo em todos os momentos da minha vida, sempre a me acompanhar e a me guiar.

Aos meus pais, Pedro Hamilton Veras Rodrigues e Maria Santana de Mesquita Rodrigues por toda a educação que me proporcionaram ao custo de seu suor e trabalho e por construírem um verdadeiro lar de amor, refúgio e descanso para mim e meus irmãos.

Agradeço a minha namorada, Neliane Araujo Braga por toda a sua paciência e compreensão nos momentos em que precisei subtrair nosso tempo juntos para me dedicar a elaboração dessa dissertação.

Agradeço ao meu Orientador Prof. Dr. Odacir Almeida Neves por toda a sua paciência, prestimosidade e interesse em conduzir meus passos e tranquilizar-me a cada percalço durante a execução deste trabalho.

Agradeço ao meu coorientador Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues por toda ajuda na pesquisa bibliográfica e nas sugestões e correções oportunas que vieram enriquecer a feitura deste trabalho.

E finalmente, agradeço aos meus companheiros de turma que dividiram comigo as alegrias e pressões nestes mais de dois anos de viagens cansativas e estudos intensos. Paulo André da Silva Sousa e Antônio Wermerson Pereira Matos, que constituíram meu primeiro grupo de viagem desde o exame de seleção (ENA) e João Djalma Leite Junior, Pedro Lucas Lima da Silva, Diego de Sousa (O brabo) e Anderson Bruno Alves Silva que formaram meu segundo grupo de viagem. Sinto que todos contribuíram para minha formação e sempre serei grato a vocês por isso.

*O que irei fazer no céu, depois de minha morte,
se não me derem uma infinidade de problemas
de Matemática para resolver?*

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

RESUMO

O trabalho retrata esforços em dois caminhos: Primeiro, no sentido de entender melhor o peso do procedimento de ensino pela via da “Resolução de Problemas” na instrução matemática, e por conseguinte se, quando mais amplamente utilizada e bem aproveitada durante as aulas como recurso e(ou) metodologia, torna o ensino de matemática mais atraente e eficaz. Em relação a esta vertente procuramos apresentar inicialmente uma abordagem histórica sobre a função desempenhada pela Resolução de Problemas no desenvolvimento humano e seu emprego no ensino, em seguida estabelecemos a conceituação de um verdadeiro problema e sua distinção de meros exercícios e atividades de fixação e por fim seu uso, suas potencialidades, suas dificuldades de implementação e limitações nas ocasiões de ensino. Nosso segundo intento é fornecer uma coletânea de problemas genuínos, estando eles em acordo com as definições e conceituações de problema apresentadas neste trabalho e que possam servir de material de apoio para uso na instrução matemática do mesmo modo que complemento, aprofundamento ou gancho motivador para a introdução de conteúdos presentes no currículo regular. Tais problemas foram separados em quatro temas que consideramos suficientemente abrangentes: “Problemas Combinatórios”, “Problemas Geométricos”, “Problemas Numéricos” e “Problemas Lógicos”. Os problemas foram coletados nas mais diversas fontes bibliográficas tanto nacionais como estrangeiras, livros, revistas, provas de olimpíadas, concursos e sites da internet.

Palavras-chave: resolução de problemas; metodologia de ensino; aprendizagem.

ABSTRACT

The work portrays efforts in two ways: First, in order to better understand the weight of the “Problem Solving” strategy in mathematics teaching, and consequently whether, when more widely used and well used during classes as a resource and(or) methodology, makes mathematics teaching more attractive and effective. In relation to this aspect, we seek to initially present a historical approach to the role of Problem Solving in human development and its use in teaching, then we establish the conceptualization of a true problem and its distinction from mere exercises and fixation activities and finally its use, its potential, its implementation difficulties and limitations within the teaching-learning process. Our second intention is to provide a collection of genuine problems, which are in accordance with the problem definitions and conceptualizations presented in this work and which can serve as material for use during the application of the teaching methodology through problem solving (as well as a complement, deepening or motivating hook for the introduction of content present in the regular curriculum). These problems were separated into four themes that we consider sufficiently comprehensive: “Combinatorial Problems”, “Geometric Problems”, “Numerical Problems” and “Logical Problems”. The problems were collected from the most diverse bibliographic sources, both national and foreign, books, magazines, Olympiad tests, competitions and websites.

Keywords: problem solving; teaching methodology; learning.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	–	O problema de Susan.....	49
Figura 2	–	O problema de Susan (cont.)	50
Figura 3	–	O problema de Susan (conclusão)	51
Figura 4	–	Rede de ruas.....	52
Figura 5	–	Construção de uma palavra.....	52
Figura 6	–	Mapa.....	53
Figura 7	–	Tabuleiro de xadrez.....	55
Figura 8	–	Torre de palitos.	56
Figura 9	–	Torre de palitos (construção).....	57
Figura 10	–	Triângulo.....	58
Figura 11	–	Triângulo(construção)	58
Figura 12	–	Diagonal e malha quadriculada	59
Figura 13	–	Retângulos.....	60
Figura 14	–	Retângulos (solução).....	60
Figura 15	–	Piscina no parque.....	62
Figura 16	–	Piscina no parque(cont.)	63
Figura 17	–	O problema do lírio aquático	64
Figura 18	–	Cilindros de papel.....	65
Figura 19	–	Folha de papel	66
Figura 20	–	Folha dobrada	66
Figura 21	–	Solução	66
Figura 22	–	Posições possíveis.....	67
Figura 23	–	Quadrados	68
Figura 24	–	Duas rodas	69
Figura 25	–	Folha de cartolina	70
Figura 26	–	Quadro moderno	71
Figura 27	–	Quadro 1	72
Figura 28	–	Quadro 2.....	72
Figura 29	–	Retângulo dividido.....	73
Figura 30	–	Retângulo dividido(solução).....	73
Figura 31	–	Retângulo	74

Figura 32	–	Terreno	75
Figura 33	–	Quadrilátero	76
Figura 34	–	Folha de papel retangular	77
Figura 35	–	Monstro de Loch Ness	79
Figura 36	–	Monstro de Loch Ness(continuação).....	80
Figura 37	–	Mesa	84
Figura 38	–	Tabela	84
Figura 39	–	Quatro subtabelas	85
Figura 40	–	Tabela sendo preenchida	85
Figura 41	–	Duas tabelas como solução	86
Figura 42	–	Encontro	90
Figura 43	–	Encontro(continuação)	91
Figura 44	–	Matriz 1	92
Figura 45	–	Matriz 2	92
Figura 46	–	Matriz 3	93
Figura 47	–	Matriz 4.....	93
Figura 48	–	Matriz 5.....	94
Figura 49	–	Três passagens.....	98
Figura 50	–	Cachorros.....	99

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	–	Etapas da resolução de problemas segundo Polya	32
Quadro 2	–	Proposta de tipificação de problemas segundo Dante	36
Quadro 3	–	Uma sugestão de roteiro para aplicação da metodologia.....	37
Quadro 4	–	Aspectos positivos do uso da metodologia da resolução de problemas.....	41
Quadro 5	–	Resultados obtidos da pesquisa.....	43
Quadro 6	–	Aspectos limitantes do uso da metodologia da resolução de problemas.....	44
Quadro 7	–	Dificuldade dos alunos na resolução de problemas.....	46

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Casos de existência de soluções inteiras.....	76
Tabela 2	–	Dias da semana	97
Tabela 3	–	Solução 1	100
Tabela 4	–	Solução 2	100

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENA	Exame Nacional de Acesso
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática
RPM	Revista do Professor de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

LISTA DE SÍMBOLOS

A, B	Pontos de um plano.
$\overline{AB}$	Segmento com extremos em A e B.
r, s	Retas.
$\therefore$	Sinal de conclusão
$\triangle ABC$	Triângulo de vértices A, B e C.
$ABCD$	Quadrilátero de vértices A, B, C e D.
$\hat{A}BC$	Ângulo com vértice no ponto B.
$\frac{A}{B}$	Fração A sobre B.
$>$	Maior do que
$\geq$	Maior ou igual a que
$<$	Menor do que
$\leq$	Menor ou igual a que

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	18
1.1 JUSTIFICATIVA.....	22
1.2 OBJETIVOS	24
2. ASPECTOS HISTÓRICOS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	25
3. DISTINÇÃO ENTRE EXERCÍCIO E PROBLEMA (O QUE É UM PROBLEMA?).....	28
4. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA.	31
4.1 POTENCIALIDADES DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	40
4.2 DIFICULDADES E LIMITAÇÕES ENFRENTADAS PELA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM SALA DE AULA.....	43
4.3 DIFICULDADES DOS ALUNOS AO “RESOLVEREM PROBLEMAS”.....	45
5. COLETÂNEA DE PROBLEMAS.....	48
5.1 PROBLEMAS COMBINATÓRIOS.....	49
5.1.1- Caminhos perplexos.....	49
5.1.2- Formando palavras.....	52
5.1.3-Pintando mapas.....	53
5.1.4-Haja retângulos.....	55
5.1.5- Torre de palitos	56
5.1.6- Fatiando o triângulo	58
5.1.7- Contando triângulos.....	59
5.1.8- Pintando ladrilhos.....	60
5.2 PROBLEMAS GEOMÉTRICOS	61
5.2.1- Dimensões disfarçadas.....	62
5.2.2- Onde cabe mais areia?	64
5.2.3- Brincando com dobraduras.....	66
5.2.4-Comparando distâncias.....	67
5.2.5-Os dois quadrados.....	68
5.2.6-Duas rodas.....	68
5.2.7-O cubo.....	70
5.2.8-Perímetro e diagonal	71
5.2.9-Quadro moderno	71
5.2.10-Área do retângulo.....	73

5.2.11-Área do triângulo.	74
5.2.12-Um terreno compartilhado.	75
5.2.13-Um quadrilátero especial.	76
5.2.14-Dobrando papel.	77
5.3 PROBLEMAS NUMÉRICOS	79
5.3.1- O monstro de Loch Ness.	79
5.3.2- Corrida de gato e rato.	80
5.3.3- O problema do elevador.	81
5.3.4- Contando números.	81
5.3.5- Notas de matemática.	82
5.3.6- Racional ou irracional?	83
5.3.7- A mesa circular.	84
5.3.8- Soma constante.	84
5.3.9- Qual é o número?	86
5.3.10- Quem é o maior?	87
5.3.11- Multiplicação com letras.	88
5.4 PROBLEMAS LÓGICOS.....	90
5.4.1- Ligação de Cores.....	90
5.4.2- Um Crime perfeito?	94
5.4.3- Uma festa com muitos amigos.	95
5.4.4 – Jogos olímpicos da “adivinhação”.	95
5.4.5 – Uma pesagem inusitada.....	96
5.4.6 – Um casal muito estranho.	97
5.4.7 – Escolhendo às cegas.	97
5.4.8 – Procurando a saída.	98
5.4.9 – Confusão entre cachorros.	99
5.4.10 – Trocando a sorte por lógica.	100
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	102
7. REFERÊNCIAS	103

1 INTRODUÇÃO

O ensino de matemática tanto no cenário mundial como no contexto brasileiro se desenvolveu com uma diversidade de metodologias que são elaboradas e aplicadas nas instituições de ensino visando contribuir para com a realização de um aprendizado verdadeiramente significativo, juntando-se a este fim o intuito de tornar o ensino de matemática mais atrativo. Entende-se que a existência de novas metodologias de ensino não garante que as dificuldades presentes serão completamente sanadas e que estas mesmas metodologias serão adequadas para aplicação em qualquer realidade de educação apresentada. As metodologias, por si, não têm o poder de assegurar a instrução plena do educando, sendo a ação do docente no ambiente de ensino, a sua compreensão sobre o método e do gerenciamento deste junto aos alunos, que leva certa metodologia escolhida a atingir metas de ensino pretendidas. À vista disso, Beatriz D'Ambrosio (D'AMBROSIO, 1993) advoga que não há uma ideia ou cenário terminal, tal como não existe aprendizado que seja cabal, estando teoria e prática intimamente relacionadas. Em virtude do contexto apresentado, e da compreensão de que os conhecimentos que os futuros professores trazem de suas experiências quando estudantes servirá de referência para seu trabalho docente, foi que pensamos em uma metodologia específica, a Resolução de Problemas.

A resolução de problemas foi o gancho que me fisgou em tenra infância e me mantém preso em admiração até hoje. Portanto, houve um impulso advindo de experiências pessoais para o estudo da aplicabilidade, potencialidades e deficiências do método no intuito de, como professor, utilizar o mesmo recurso para aperfeiçoar o trabalho em sala de aula e contribuir para sua divulgação, entendimento e aplicação por outros docentes.

Em meu tempo de estudante do ensino médio os livro-textos eram escassos de verdadeiros problemas. Em sua quase totalidade eram preenchidos por listas de exercícios de fixação, que hoje, como professor, entendo serem necessários para o objetivo que se propunham: assimilar algum método ou técnica e tornando-se hábil em seu uso. No entanto, esses exercícios não traziam nada de novo podendo ser resolvidos pelos caminhos já habituais e que, notoriamente, não me encantavam. Como aluno, eram os problemas que me desafiavam e fascinavam. Ao encarar um problema matemático sentia o impulso de colocar em prática minha curiosidade, intelecto, faculdades inventivas e capacidade de relacionar os dados com o mundo físico que

me rodeava. Em sala de aula sempre procurei proporcionar aos alunos o mesmo efeito positivo que a resolução de problemas interessantes causava em mim, pois tenho a convicção de que se isso sucede em idade conveniente pode-se provocar no aluno um gosto pela atividade intelectual que, acompanhada de disciplina constante, produz os melhores resultados.

A Resolução de Problemas, portanto, surge como sugestão metodológica favorável para a realização de um ensino diferenciado de matemática. A partir da pesquisa realizada sobre parte da vasta bibliografia existente sobre o assunto, foi possível identificar os fundamentos mais importantes do método e algumas limitações referentes ao seu entendimento e aplicabilidade para fundamentar a Resolução de Problemas no ensino de matemática.

Existe um certo consenso entre aqueles que tiveram a experiência de ocupar a posição de professor no ensino básico sobre o quanto é complexa a tarefa de garantir um adequado desempenho dos alunos em matemática, juntando aqui, ao conjunto de dificuldades já numeroso, a aversão a este componente curricular que o educando carrega consigo. A resolução de problemas matemáticos que sejam instigantes e desafiadores, dentro de uma metodologia de ensino adequada que potencialize seus efeitos benéficos, pode contribuir significativamente para transformar esse cenário.

A resolução de problemas surge como um recurso valioso para desenvolver as habilidades de raciocínio do aluno, sua capacidade de induzir, deduzir, organizar as informações e escolher as estratégias mais adequadas. A metodologia de ensino baseada na resolução de problemas torna-se, assim nos parece, um meio que congrega todo um conjunto de habilidades possibilitando ao educando perceber e entender, com o tempo, os necessários processos mentais de raciocínio que ele usa, muitas vezes sem o saber, tanto dentro quanto fora de sala de aula, arrancando da matemática aquela imagem de disciplina árida.

Nada obstante, não podemos negar que há farto número de pesquisas nessa área e, mesmo assim, o desenvolvimento da resolução de problemas em nossos ambientes de ensino tem sido lento e difícil. Mesmo em áreas onde ela é intrinsecamente conectada, como no ensino de matemática, além dos obstáculos inerentes ao tema em si, há inúmeras dúvidas e questionamentos de ordem interpretativa que circundam este assunto, o qual se configura ora como foco, ora como um fundamento ou ainda fornecendo uma lógica para a instrução matemática.

Outro acontecimento também favoreceu a escolha do tema deste trabalho pois me marcou profundamente. Ao longo da preparação para prestar o Exame Nacional de Acesso (ENA) ao PROFMAT, resolvi durante vários meses dezenas de problemas dos mais variados níveis e estilos e durante esse processo duas coisas foram se tornando evidentes. A primeira é que era divertido; a segunda era o quanto se tornava perceptível minha evolução. Era como diz o ditado: “A gente aprende a nadar, nadando!” Participava de grupos de estudo em redes sociais e estava em contato diário com outros candidatos e apreciadores da matemática que igualmente demonstravam entusiasmo pela resolução de problemas. Inúmeras soluções surgiam, cada uma trazendo abordagens diferentes para um mesmo desafio. Isso foi tão enriquecedor que ainda continuo em muitos dos grupos. Acredito que podemos tornar a sala de aula um ambiente tão propício ao crescimento matemático quanto esses ambientes virtuais com uma intensa e salutar troca de visões, ideias e artifícios de resolução, tudo isso acontecendo ao redor do prazer pela resolução de problemas.

Por experiência própria percebi o quanto é salutar enfrentar os mais variados tipos de situações-problema colocando em teste o meu arcabouço de conhecimentos e habilidades. Aritmética, álgebra, geometria, trigonometria, matemática discreta e contínua, enfim, problemas isolados em um destes campos ou reunindo uma miscelânea deles, todos proporcionavam um aperfeiçoamento das minhas capacidades cognitivas que se desenvolviam sutilmente a cada problema resolvido e se tornavam mais evidentes após passar por várias dezenas de desafios, contribuindo com meu fazer pedagógico em sala de aula, pois, de acordo com George Polya (POLYA, 2006), não é possível ensinar aquilo que não se aprendeu, restando ao professor passar e assimilar primeiramente a experiência da descoberta para somente então podê-la transmiti-la ao seu educando.

Algo inusitado foi notar nos problemas que eu não conseguia resolver, estavam os que mais contribuíam para o meu crescimento, uma vez que eram os mesmos que exigiam maior esforço, reflexão e consulta. Sentia também crescer minha capacidade de transpor os problemas para a minha realidade dando significado a eles. Logo notei o evidente benefício de poder associar o conteúdo matemático com a realidade do aluno dando-lhe significado também. Como asseverou Roland Charnay (CHARNAY, 1996, p.44)

O aluno deve ser capaz não só de repetir ou refazer, mas também de ressignificar em situações novas, de adaptar, de transferir seus conhecimentos para resolver novos problemas.

Espera-se que este trabalho contribua para chamar a atenção dos professores a sobre necessidade de promover atualizações que explorem o uso da metodologia em sala numa perspectiva em que essa possa contribuir não apenas para consolidação, mas principalmente para a construção e aquisição significativa do conhecimento dentro da aprendizagem matemática.

Com isso, entendemos justificar-se a importância e a necessidade de abordar o tema em pauta, cabendo levantar questionamentos sobre seu uso em sala, seus benefícios e limitações. Assim, busca-se tratar do emprego da resolução de problemas como método eficaz para o ensino de matemática e, adjunto a isso, coletar e organizar um conjunto de problemas matemáticos que auxilie o trabalho do professor em sala, caso ele deseje adotar esse método, e que:

I) Sejam utilizados como recurso motivador e porta de entrada para a introdução de assuntos constantes ao nível dos anos finais do ensino fundamental (8º à 9º ano) e início do ciclo de ensino médio (1º e 2º ano) mas sem descartar a possibilidade de serem usados nas demais séries do ensino básico.

II) que desperte a curiosidade dos alunos através das mais variadas maneiras possíveis, seja pela enigmática escassez de dados que induzem a acreditar que o problema não é resolvível, seja pelo desenho geométrico apresentado, seja por um enunciado incomum com uma pergunta aparentemente simples, mas que esconde um raciocínio habilidoso, entre outro.

III) que exija o mínimo de formalismo simbólico matemático (mas não os excluindo de todo) poupando o aluno, sempre que possível, da necessidade de memorizar uma coleção de fórmulas.

IV) que não fossem muito simples a tal ponto de excluir certo esforço do aluno e se apresentassem como meros exercícios repetitivos e nem muito complexos de tal modo que frustrasse o educando acarretando sua desistência.

V) que possam ser compreendidos por todos os alunos, ou seja, que seja possível para eles prever uma possível solução para o problema. Mesmo com os diferentes níveis de defasagem.

Em síntese, neste trabalho, apresentamos inicialmente (capítulo 2), um breve contexto histórico da resolução de problemas e sua conexão com o ensino da matemática. Nossa intenção é mostrar como a resolução de problemas e a matemática estão há tempos ligadas, uma vez que a base do seu desenvolvimento surge da necessidade do homem em solucionar problemas. Em seguida (capítulo 3), analisamos diferentes conceituações do que vem a ser problema, apresentando algumas definições a respeito do tema, conferidas por diversos autores. Posteriormente (capítulo 4), apresentamos a resolução de problemas como metodologia de ensino, suas vantagens e limitações bem como as dificuldades de sua implementação em sala de aula. E finalmente (capítulo 5), coletamos e organizamos em seções vários problemas de acordo com o tema que prevalecesse na sua abordagem e seguindo os assuntos que consideramos mais relevantes e gerais ao nível de ensino mencionado anteriormente.

1.1 JUSTIFICATIVA

Procurando trazer para dentro do trabalho realizado em sala de aula, durante as explanações dos conteúdos programáticos, uma abordagem mais motivadora que despertasse o interesse dos alunos durante as situações de aprendizagem, dando significado ao que eles aprendiam ao mesmo tempo que servissem de recurso pedagógico para introdução de novos conteúdos, foi que pensamos na “Resolução de Problemas” como meio de atingir esse fim, baseando-se na ideia de que o estudo de matemática e, em particular, a resolução de problemas, pode gerar o mesmo entusiasmo que praticar um esporte com um time, sem ser necessariamente competitivo. Existem exceções, mas, em geral, tem-se observado que os alunos não encontram interesse nas questões apresentadas nos livros-texto que servem de aplicação e fixação da teoria explanada, pois tais questões muitas vezes não se aproximam de sua realidade ou de seus interesses. Juan Ignacio Pozo (POZO,1998), ressalta a importância de considerar a perspectiva do aluno que pode, diferentemente do professor de matemática, considerar o problema disparatado ou irrelevante, carecendo de significado.

Temos, portanto, como um dos nossos objetivos, enquanto professores, assim como uma das finalidades da educação básica, fomentar nos alunos o gosto pela resolução de problemas bem como a capacidade de que possam tanto formulá-los como também desenvolver as estratégias para resolvê-los. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1998, p.39-40) já se reconhece o quanto é importante inserir a metodologia da resolução de problemas em oposição a simples assimilação de técnicas e métodos de resolução. O documento afirma:

Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.

Nosso objetivo como mediadores entre o aluno e o conhecimento é planejar, buscar e/ou construir situações suficientemente amplas para fazer nascer nos educandos uma salutar procura de formas convenientes não somente para darem resposta a perguntas feitas na rotina dos trabalhos escolares como também, e principalmente, às da sua realidade de vida. Enfatizamos que é necessário o aluno ter certos conhecimentos previamente assimilados, o que faz da memória um recurso valioso, mas não suficiente. Tomemos o exemplo de um aluno que foi colocado diante da situação de descobrir qual jogador de futebol é mais eficiente. Cristiano Ronaldo que marcou 4 gols nas 7 partidas que jogou ou Lionel Messi que marcou 3 gols dos 5 jogos que participou? Aqui o estudante necessita do conhecimento de proporções e do significado na maneira como relacionamos seus termos. Um conhecimento puramente conceitual e que talvez não encante o aluno por diversos motivos, mas que faz parte do cabedal mínimo de saberes que um aluno deve ter para poder começar a usufruir do prazer de resolver problemas que envolvam ferramentas desse tipo.

A importância da resolução de problemas atinge diretamente as capacidades cognitivas do aluno, promovendo seu crescente aperfeiçoamento. Mesmo aqueles problemas em que, para resolvê-los, não é necessário de nada além de bom senso e habilidades computacionais muito simples demonstram contribuir com este objetivo, pois os mesmos princípios usados e desenvolvidos na resolução de problemas nas fases preliminares permitem que sejam possíveis as soluções, mais tarde, de problemas extremamente desafiadores. Como enfatiza novamente Polya (POLYA,2006, p. V) no prefácio de seu livro, declarando o seguinte:

(...) O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

Solucionar um problema não se trata apenas de compreender o que foi enunciado e em encontrar respostas utilizando algoritmos de resolução adequados. Quando o aluno encontra a resposta certa ou que pelo menos faça sentido para ser aceita por apresentar argumentos minimamente convincentes, isto não necessariamente significa que o indivíduo se apropriou do conhecimento que se está sendo trabalhado. De forma concomitante torna-se necessário desenvolver habilidades que permitam demonstrar os resultados obtidos, testar suas consequências, comparar diferentes vias para se obter a solução. Trabalhando dessa maneira, a importância e valor da resposta correta cede lugar para a importância do processo de resolução que está estreitamente ligado ao processo de raciocínio. O aluno tem que ser motivado a questionar sua solução, a modificar o problema reproduzindo novas situações e criando novas abordagens, a analisar o problema sob a luz de novas variáveis e condições. Agir dessa maneira enfatiza uma abordagem de ensino que se distancia da simples repetitividade, mas pela via da ação consciente, refletida que constrói conhecimentos. E é na resolução de problemas que encontramos o campo onde vemos materializar-se tudo isso.

1.2 OBJETIVOS

Com este trabalho, temos o intuito de estimular o apreço pela aprendizagem matemática por meio da resolução de problemas que foram coletados de diversas fontes e organizados em áreas de conhecimento acessíveis aos níveis de escolaridade correspondentes ao final do ensino fundamental e início do ensino médio e mostrar que a matemática, além de ser o mais poderoso instrumento para o desenvolvimento do pensamento lógico, também é agradável. Outros objetivos são:

- Motivar os alunos nas aulas de matemática trazendo situações interessantes.

- Apresentar situações-problemas que examinem e desenvolvam a capacidade crítica e de raciocínio dos alunos estimulando seu raciocínio indutivo, dedutivo, especulativo, etc.
- Apresentar uma matemática desvinculada da forma “manipulação por manipulação” que normalmente é vista nos livros didáticos e nas aulas tradicionais.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas se confunde com a própria história da matemática e do desenvolvimento humano estando ambas fortemente conectadas sob a perspectiva de solucionar questões práticas ligadas as dificuldades enfrentadas no dia a dia dos povos, partindo de conhecimentos empíricos e reconhecimento de padrões. Em Huanca(HUANCA, 2006, p. 20) lemos que

Resolver problemas faz parte da natureza humana. Bem antes da invenção dos números, os primeiros homens tiveram que desenvolver métodos para resolver problemas da vida como, por exemplo, localizar-se no tempo e no espaço e, também, para tentar descrever e explicar o mundo físico. Eles criaram maneiras de comparar, classificar e ordenar, medir, quantificar, inferir os elementos fundamentais que a tradição da cultura nomeia de Matemática.

Problemas como a duplicação do cubo, quadratura do círculo, trissecção do ângulo, a questão da incomensurabilidade, etc., são apenas alguns exemplos com os quais a humanidade foi confrontada e cujo esforço em resolvê-los resultou em novos conceitos, ferramentas e até mesmo nova visão de mundo. O papiro de Ahmes, por exemplo, foi escrito aproximadamente em 1650 a.C., sendo constituído de inúmeros problemas. A resolução de problemas permeia os currículos desde a antiguidade, seja com os egípcios, mesopotâmicos, jônicos, chineses ou gregos (BOYER, 1996). George Polya (1897-1985), já referindo-se ao uso de problemas para o ensino, sustentava que a resolução de problemas já se apresentava como pilar da formação matemática desde tempos remotos.

Vemos assim, como a concepção de problema e suas diferentes formas de serem encaradas remontam aos tempos passados. As diferentes dificuldades do indivíduo no dia a

dia ou mesmo de todo um povo, como a questão da sobrevivência, da diversão ou do passatempo são alguns dos aspectos da vida humana onde a capacidade de resolução de problemas se inseri. Com o desenvolvimento progressivo das ciências foi que tivemos, posteriormente, o uso dos problemas se voltando para o ensino e tomando outras vertentes como a de motivação dos alunos, a contextualização de assuntos ou mesmo a metodologia de ensino.

Roland Charnay (CHARNAY,1996, p.42) assevera que

A história da matemática na complexidade de sua evolução e de suas revoluções (...) tem se construído como resposta a perguntas traduzidas em outros tantos problemas. Tais perguntas tem tido variações em suas origens e em seu contexto: problemas de natureza doméstica (divisão de terras, cálculo de créditos...), problemas formulados em estreita vinculação com outras ciências (astronomia, física...), especulações aparentemente “gratuitas” a respeito de “objeto” pertinentes a própria matemática.

A resolução de problemas foi relegada a um segundo plano com o advento do movimento denominado Matemática Moderna que se propunha reformar o ensino de matemática. Tal iniciativa ascendeu com mais ênfase nas décadas de 1960 e 1970 do século XX quando se difundiram pelo mundo indicações de se ensinar matemática com ênfase no método axiomática, abstrato, apoiando-se na teoria dos conjuntos e estruturas algébricas (ZANATA, 2010). Inicialmente, contou com muitos adeptos, mas com uma abordagem demasiadamente abstrata, sobremaneira rigorosa na linguagem e no simbolismo, preparação inadequada dos profissionais que deveriam implementá-la e a posterior constatação de sua ineficiência, levaram ao aumento do número de opositores culminando em seu abandono, permitindo que a resolução de problemas voltasse com força renovada sendo a partir de então tomada como foco do ensino de matemática.

A pesquisa e o debate sobre a resolução de problemas bem como as iniciativas de considerá-la como uma forma de ensinar matemática e sua importância dentro de um cronograma de ensino ganharam mais ênfase no século XX em especial após a publicação do livro *HOW TO SOLVE IT*, do matemático húngaro George Polya (1887-1985), tomado por muitos como referência necessária para o estudo do tema. A obra tratou especificamente do assunto e de sua importância, destacando-se por elencar as fases que deveriam ser empregadas durante a resolução de qualquer problema: entendimento da situação-problema, feitura de um plano de ação, realização do plano e análise retrospectiva.

Os professores e profissionais da educação, em especial aqueles ligados com educação matemática, passaram a tomar o trabalho de Polya como referência sempre que precisavam lidar com o assunto. Conhecendo seus escritos, notava-se claramente que o objetivo era aperfeiçoar as capacidades dos alunos no sentido de torná-los ótimos solucionadores de problemas pois, para Polya (POLYA,2006), uma significativa descoberta acaba contribuindo para resolver grandes problemas, mas há sempre alguma descoberta durante a resolução de um problema.

Aqui no Brasil temos, já em 1997, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) lançando luz sobre a resolução de problemas matemáticos tomando-os como um meio eficaz de se fazer matemática dentro do ambiente escolar. Os PCN (BRASIL, 1998, p. 40) asseveram explicitamente o seguinte princípio norteador:

(...)a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;

Nos dias de hoje, a resolução de problemas ainda se mantém como foco em diversos encontros da área de matemática bem como em congressos, simpósios ou grupos de pesquisa como os existentes na Universidade Estadual da Paraíba ou na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho onde temos, respectivamente, o grupo de pesquisa “Resolução de Problemas e Educação Matemática” e o grupo de trabalho e investigação “Resolução de Problemas em Educação Matemática”, para citar alguns exemplos, deixando claro como essa temática ainda é corrente e valiosa.

É necessário destacar, neste momento, que exercícios e problemas apresentam conceitos e formas que caminham lado a lado e são facilmente confundíveis, permitindo que, aquilo que pode estar sendo apresentado como um genuíno problema para um indivíduo, pode na verdade estar sendo apenas um simples exercício. Como afirma Pozo (POZO,1998, p.15):

Consequentemente, é importante, antes de começar a analisar as estratégias e processos envolvidos na solução de problemas, estabelecer com a maior nitidez possível a distinção entre um exercício repetitivo e um problema.

Portanto, é importante definir com maior clareza possível a diferença entre um exercício e um verdadeiro problema, o que passaremos a fazer no capítulo a seguir.

3. DISTINÇÃO ENTRE EXERCÍCIO E PROBLEMA (O QUE É UM PROBLEMA?)

Para um melhor entendimento do tema em análise, apresentamos algumas conceituações sobre o que é um problema. É importante definir o que consideramos como um problema para que o objeto não se confunda com outros que lhe são, apenas aparentemente, similares.

Por exemplo, em Lester (LESTER, 1983), um problema é caracterizado como uma circunstância que indivíduos ou grupos de indivíduos demandam solucionar, mas da qual não estão munidos de um caminho rápido e direto para fazê-lo.

Para Onuchic (ONUCHIC, 1999), problema é toda situação da qual se desconhece o meio de resolvê-la ao mesmo tempo que existe o interesse genuíno de encontrar a solução.

Já para Dante (DANTE, 1997) um problema é uma dificuldade que se deseja dirimir sem que haja alguma receita procedimental que nos leve à solução de forma instantânea.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p. 41), um problema é:

(...) uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução.

Estas concepções sobre o significado de um problema apresentam um núcleo comum. Vemos que um verdadeiro problema se caracteriza por não dispormos de um processo automático que possibilite encontrar a solução do mesmo de forma rápida, dispensando um necessário esforço de análise ou uma reflexão sobre quais passos devem ser tomados assim como uma motivação pois deve-se estar interessado em resolvê-lo. Essas características diferenciam um problema genuíno de outras situações que, embora semelhantes, se apresentasse apenas como uma simples repetição de passos conhecidos. Em um artigo de

autoria de George Polya, intitulado “*O ensino por meio de Problemas*” (RPM, 1985, p. 14), temos ênfase nesse aspecto quando, ao referir-se à resolução de problemas, joga-se luz sobre a utilização de situações que se afastam de uma trivial rotina, uma vez que, segundo o autor

O problema que não se resolve por rotina exige certo grau de criação e originalidade por parte do aluno, enquanto o problema de rotina não exige nada disso. O problema a ser resolvido sem rotina tem alguma possibilidade de contribuir para o desenvolvimento intelectual do aluno, enquanto que o problema de rotina não tem nenhuma.

Ou seja, um exercício se distingue de um problema, uma vez que, aquele, necessita apenas da aplicação de mecanismos que nos possibilitam chegar à solução de forma rápida e com mínimo esforço. Isso significa que os exercícios, frequentemente, são utilizados para saber aplicar as técnicas que estão sendo abordadas, em que se explora apenas a realização de cálculos para encontrar resultados. Nos problemas, os alunos são levados a investigar, criar, relacionar, buscar caminhos e soluções consideradas satisfatórias.

Nesta linha de pensamento, Pozo (POZO, 1998) destaca que uma situação passa a ser considerada um problema, caso exista o reconhecimento dela como tal, o que se concretiza à medida que não se dispõe de procedimentos automáticos que gerem, de forma mais ou menos imediata, sua solução. Em acréscimo, lembra que exercício e problema se distinguem pelo fato de que, no primeiro, dispõe-se e utiliza-se de mecanismos que levam, de forma imediata, à solução, enquanto que no segundo, não. Como apontam os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p. 41) ao afirmarem:

O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estrutura ou situação que lhe é apresentada.

Um problema adequado deve conseguir angariar o interesse do aluno na busca de sua solução. Ele deve conseguir ser para o aluno algo interessante, diferente, desafiador, criativo no intuito de conseguir mantê-lo motivado na busca de sua solução. Como vimos

anteriormente, existem diferenças básicas entre um exercício e um problema. No exercício não há a preocupação em se decidir qual caminho é mais adequado escolher. O caminho já é conhecido e o aluno apenas precisa percorrê-lo. Juan Ignacio Pozo (1998, apud, SOARES & PINTO, 2001) corrobora tal posicionamento quando sustenta que aquelas situações em que se explica o uso e aplicação de uma fórmula são úteis para fixar e tecnicizar ferramentas essenciais a solução de problemas futuros.

Dante (DANTE, 1997) igualmente faz essa distinção em que um exercício é aplicado para praticar, para assimilar um determinado algoritmo ou processo através de constante repetição enquanto um problema é a colocação de uma circunstância no qual deseja-se encontrar algo incógnito sem termos previamente nenhum algoritmo que garanta chegarmos à solução. Ainda para Dante (DANTE, 1997), a busca da solução de um problema exige do aluno, em alguma medida, uma postura proativa e certa dose de criatividade, juntamente com o conhecimento e aplicação de algumas estratégias.

Portanto, podemos afirmar que o conceito de problema está ligado ao enfrentamento do novo, ou ao questionamento que traz exigência clara e perceptível. Desta forma, não estaríamos diante de um problema se apenas tivéssemos que repetir uma fórmula pronta ou uma sequência de passos conhecidos. Nossos livros de matemática estão repletos de exercícios e problemas de aplicação que, no todo ou em parte, são elaborados de forma a conter nos seus enunciados, explicitamente, as informações e dados para sua resolução. Esses modelos de “problemas” fazem com que os estudantes sintam dificuldades em lidar com situações diversas que apresentem, diferentemente, muitas informações com dados que não contribuem para solucionar o problema ou que tenham diversas soluções ou mesmo que não possuam solução. Situações estas muito mais próximas daquelas que enfrentarão ao lidarem com a realidade.

Pode-se dizer que para a aprendizagem matemática os alunos necessitam de experiências nos dois sentidos, pois para a resolução de alguns problemas, os exercícios podem ser um instrumento de aquisição, como assinala Pozo (1998) ao dizer que um problema é, em certa medida, uma conjunção inédita ou diversa do que já havia sido visto e na qual é exigido o uso de táticas ou procedimentos conhecidos.

Assim, conforme se pode observar, os problemas e os exercícios constituem-se muito mais num *continuum* do que numa *dicotomia* cujos limites, muitas vezes, não são fáceis de estabelecer. Desta maneira, aceitando que um problema é algo que exige um maior esforço e

análise por apresentar um maior grau de dificuldade em relação a simples exercícios acabamos indo de encontro a ideia de Polya (2006), de acordo com a qual a existência de um problema, para o indivíduo, acarreta a procura consciente de ações que visam alcançar um objetivo certo, porém “não atingível de maneira imediata.”

4. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA.

Na Metodologia de Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é ponto de partida. Os PCN (BRASIL,1998, p. 40) corroboram com este posicionamento quando afirmam explicitamente o seguinte princípio norteador:

A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las.

A tomada da Resolução de Problemas como um método de ensino é assunto que merece especial atenção por todos que ocupam ou se propõem futuramente a ocupar uma função de docência no ensino de matemática. A importância se deve ao fato de que os alunos necessitam adquirir habilidades para o enfrentamento de situações extraclasse e essas habilidades são fortemente desenvolvidas e ampliadas pela resolução de problemas. Como bem coloca Juan Ignacio Pozo (POZO, 1998, p.15) quando afirma que

(...) a aprendizagem da solução de problemas somente se transformará em autônoma e espontânea se transportada para o âmbito do cotidiano, se for gerada no aluno a atitude de procurar respostas para suas próprias perguntas/problemas, se ele se habituar a questionar-se ao invés de receber somente respostas já elaboradas por outros, seja pelo livro-texto, pelo professor ou pela televisão. O verdadeiro objetivo final da aprendizagem da solução de problemas é fazer com que o aluno adquira o hábito de propor-se problemas e de resolvê-los como forma de aprender.

Ao realizar-se o trabalho de ensino-aprendizagem em sala por meio da resolução de problemas os discentes são levados a construir elos entre domínios diversos da matemática

engendrando o surgimento de novos tópicos. Recorremos novamente aos PCN (BRASIL,1998, p. 41), os quais sustentam que

(...) Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular.

A execução da metodologia nos momentos de ensino tem sido empregada principalmente no desdobramento de tópicos de matemática estando seu emprego estreitamente associado as quatro fases elencadas por Polya (POLYA, 2006) em seu livro “*A arte de resolver Problemas*”.

Quadro 1 – Etapas da resolução de problemas segundo Polya.

ETAPAS	DESCRIÇÃO
Compreensão do Problema	Aqui se procura entender o problema no intuito de encontrar sua incógnita
Elaboração de um plano de resolução	Estrutura-se, de posse da compreensão do problema, os caminhos a percorrer no intuito de obter a incógnita.
Execução do Plano de Resolução	Coloca-se em prática o plano elaborado, examinando todos os detalhes decorrentes de sua execução. Caso haja contratempos, retorna-se a fase para elaboração de um novo plano.
Retrospecto ou Verificação dos Resultados	Em consonância com o planejamento inicial, verifica-se o resultado fazendo uma revisão da execução de todo o plano traçado.

Fonte: O autor

Entretanto, autores renomados neste campo de conhecimento, com destaque para Silvanio de Andrade (ANDRADE, 1998), Roger Ruben Huaman Huanca (HUANCA, 2006) e Lourdes de La Rosa Onuchic (ONUCHIC,1999), sustentam ser errôneo tomar a metodologia da

resolução de problemas apenas como prossecução de passos com o intuito de resolver um problema.

Atualmente, talvez por consequência do ensino ao qual foram submetidos e que replicam em suas aulas, diversos docentes adotam o ensino pela resolução de problemas, como meramente colocar o estudante diante de um problema e observa-lo forcejar em busca da solução. Onuchic (ONUCHIC,1999) afirma que, no passado, ensinar a resolver problemas consistia em enunciar uma situação-problema acompanhada de alguns modelos similares já resolvidos. Temos, para ilustrar essa afirmação, um caso típico de problemas dessa espécie coletado no livro didático de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado (1991) intitulado “Matemática e Realidade” - “Observe o exemplo a)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 3x - 1 = 14 \\ & 3x = 14 + 1 \\ & 3x = 15 \\ & x = \frac{15}{3} \\ & x = 5 \\ & V = \{5\} \end{aligned}$$

e resolva as equações de b) até k)”

b) $2x - 3 = 17$	g) $4x + 9 = 27$
c) $5 - 2x = -13$	h) $-11 + 19x = 27$
d) $1 = 2x + 11$	i) $-30 = 2 - 65x$
e) $-3 = 7 + 4x$	j) $31 = 61 - 90x$
f) $-1 = 5 - 9x$	k) $100 = 7x - 12$

Para Onuchic (ONUCHIC,1999) e muitos outros pesquisadores neste campo, é muito limitante tomar a metodologia sob essa ótica. A autora aponta essa conduta como fazer “instrução matemática pela repetição”, onde temos o mestre que pronuncia, os educandos que colhem os dados, registram, relembram e refazem. A resolução de problemas como metodologia tem como centro de sua abordagem as decisões e estratégias empregadas pelo aluno para alcançar o objetivo. É exatamente durante o processo que o aluno interage e se envolve. Segundo Kátia Stocco Smole (SMOLE, 2010) temos um processo estratégico

orientado para a superação de barreiras pelos discentes, não podendo tais dificuldades serem de fácil resolução, mas que possam apresentar uma força contrária à sua solução suficientemente adequada aos esforços empregados no intuito de exigir mobilização de todos os seus recursos cognitivos.

No Brasil, a base do método, em grande parte, encontra-se associada ao desdobramento dos conceitos matemáticos, onde sua aplicação, em suma, compreende organizar grupos na turma de ensino, colocar um problema e acompanhar o trabalho dos alunos no processo de resolvê-lo, instruindo, durante as tentativas, o uso de conhecimentos já assimilados para a formação de novos. Modos mais satisfatórios de esquematizar as condutas durante o ensino por meio da resolução de problemas são apontadas na literatura. Andrade (ANDRADE,1998), argumenta que tal metodologia extrapola o simples aditamento de conteúdos matemáticos. Entende que é fundamental motivar o educando a examinar a configuração social que o circunscreve agindo sobre ela.

Tocante a este ponto, citemos novamente os PCN (BRASIL, 1998, p. 27). que comenta:

Também é importante salientar que a compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais dependem da leitura crítica e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente etc.

Com tudo isso exposto devemos pensar: *como adotar a resolução de problemas na rotina de sala de aula e se desprender das formas já conhecidas?* Para isso é necessário que o professor rompa com o modelo que ele anteriormente adotava e com o qual se sentia provavelmente confortável e reorganize sua rotina pedagógica usando novas formas de lecionar que alterem desde a escolha das atividades didáticas até o ambiente em que elas serão realizadas. Desenvolver um trabalho de ensino através da resolução de problemas de forma alguma segue uma execução inflexível. O professor deve entender que a resolução de problemas é algo fluido e dinâmico que não precisa ser empregada somente depois que ele expor todo o conteúdo, mas que ela pode e deve ser tomada em vários momentos da atividade de ensino como uma alternativa para proporcionar atividades que permitam a construção de conceitos matemáticos.

Assim, é importante lembrar que ao tentar implementar a metodologia da Resolução de Problemas é recomendável ao professor se desprender um pouco daquele modelo clássico de exposição unilateral, necessitando incrementar ao seu repertório de ferramentas de ensino habilidades que são enfatizadas nos próprios PCN (BRASIL, 1998, p. 38), como organizador da aprendizagem:

(...) precisará escolher os problemas que possibilitam a construção de conceitos e procedimentos e alimentar os processos de resolução que surgirem, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir.

Como mediador:

(...)ao promover a análise das propostas dos alunos e sua comparação, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar, contestar. Nesse papel, o professor é responsável por arrolar os procedimentos empregados e as diferenças encontradas, promover o debate sobre resultados e métodos.

Como organizador:

(...)ao estabelecer as condições para a realização das atividades e fixar prazos, respeitando o ritmo de cada aluno.

Como incentivador da aprendizagem:

(...)o professor estimula a cooperação entre os alunos, tão importante quanto a própria interação professor-aluno. O confronto entre o que o aluno pensa e o que pensam seus colegas, seu professor e as demais pessoas com quem convive é uma forma de aprendizagem significativa, principalmente por pressupor a necessidade de formulação de argumentos (dizendo, descrevendo, expressando) e de validá-los (questionando, verificando, convencendo).

Operar o ensino de matemática por meio da resolução de problemas insta uma modificação de condutas por parte de todos os agentes envolvidos. Ao docente, por exemplo, demanda-se conceber, ou coletar, problemas consentâneos ao conceito que tenciona gerar. Concernente a isto, Dante (DANTE,1997) nos apresenta uma sugestão de classificação de exercícios e problemas, conforme apresentado no Quadro 2 abaixo:

Quadro 2 – Proposta de tipificação dos problemas segundo Dante.

TIPO	OBJETIVO	EXEMPLO
Exercício de reconhecimento	Identificar um conceito, uma propriedade.	Dados os números 2 , 5 , 10 , 103 , 156 , 2007, quais são os pares?
Exercício de algoritmo	Aplicar diretamente um algoritmo, ou seja, são resolvidos passo-a-passo	Efetue: a) $128 + 79 =$ b) $101 - 68 =$
Problemas padrão	Transformar o problema em linguagem matemática e em seguida aplicar o algoritmo.	Em uma classe há 17 meninos e 22 meninas. Quantos alunos há na classe?
Problemas-processo ou heurístico	Motivar o aluno a utilizar conhecimentos prévios e a criatividade para encontrar a solução que não está contida no enunciado.	Em uma reunião de equipe há 6 alunos. Se cada um trocar um aperto de mão com todos os outros, quantos apertos de mão teremos ao todo?
Problemas de aplicação	Aplicar conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos para matematizar situações reais.	Como deve fazer o diretor de uma escola para calcular o gasto mensal de cada aluno com a merenda escolar?
Problemas de quebra-cabeça	Desafiar o aluno para problemas que dependam quase sempre de um "truque".	Com 24 palitos de fósforo, forme 9 quadrados. Com fazer para tirar apenas 4 palitos e deixar 5 quadrados?

Fonte: DANTE, 1997(adaptado)

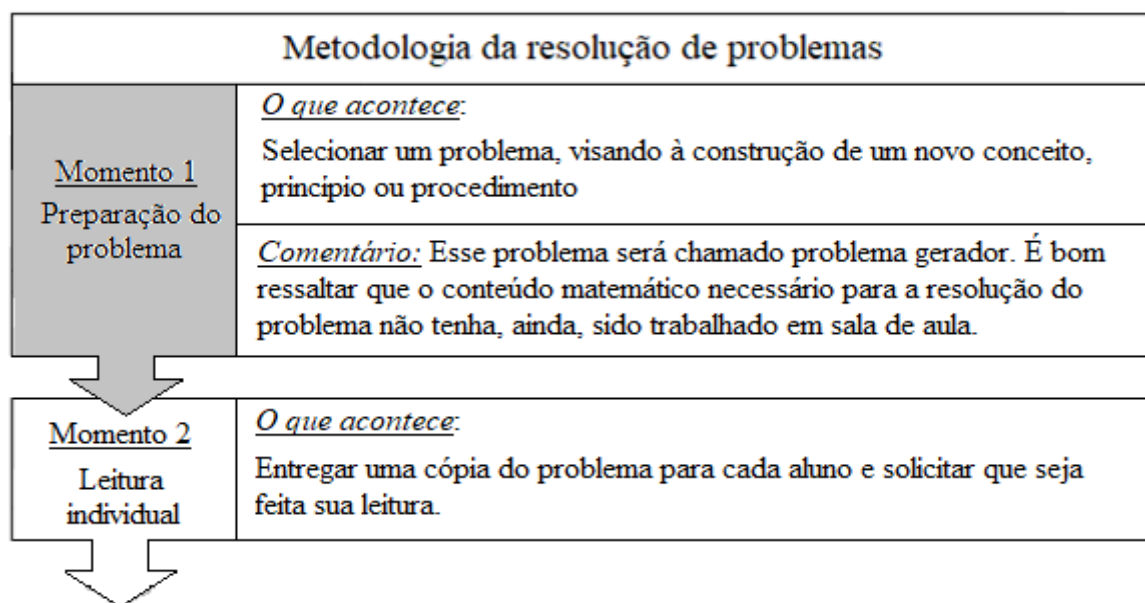
Esta tipificação dos problemas não exclui outras que possam ser encontradas na literatura adequada ou que sejam elaboradas pelo próprio docente de acordo com a sua realidade de sala. Isto permitirá que o professor possa organizar o que é mais adequado submeter ao estudante de acordo com uma avaliação prévia do grau de desenvolvimento e bagagem que o mesmo apresenta. O professor deve ser criterioso em sua seleção nunca esquecendo da distinção entre verdadeiros problemas, que são desafiadores e interessantes, e aquilo que é apenas exercício repetitivo.

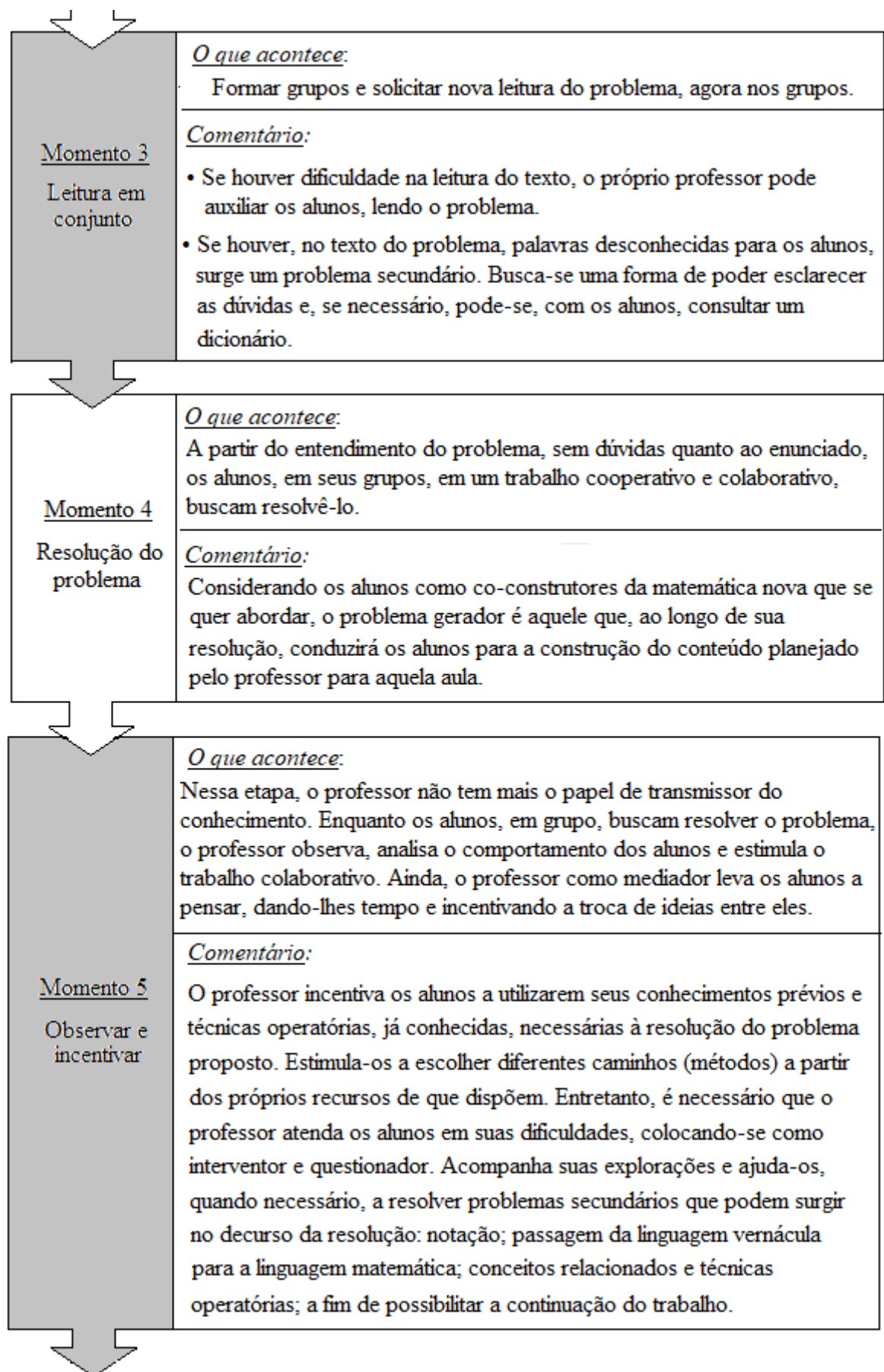
Em Dante (DANTE, 1997), vemos como a resolução de problemas é um tema difícil de ser trabalhado em sala. É notório encontrar alunos que conseguem reproduzir os algoritmos, mas não conseguem resolver um problema que envolva um mínimo de reflexão concomitante a aplicação desses algoritmos aprendidos. Em parte, isso se deve ao exaustivo uso de exercícios de fixação, que automatizam os alunos em uma ação irrefletida ao se depararem com uma questão a se resolver em detrimento do emprego de uma metodologia que enfatiza o raciocínio e a reflexão. O autor afirma que um verdadeiro e bom problema deve:

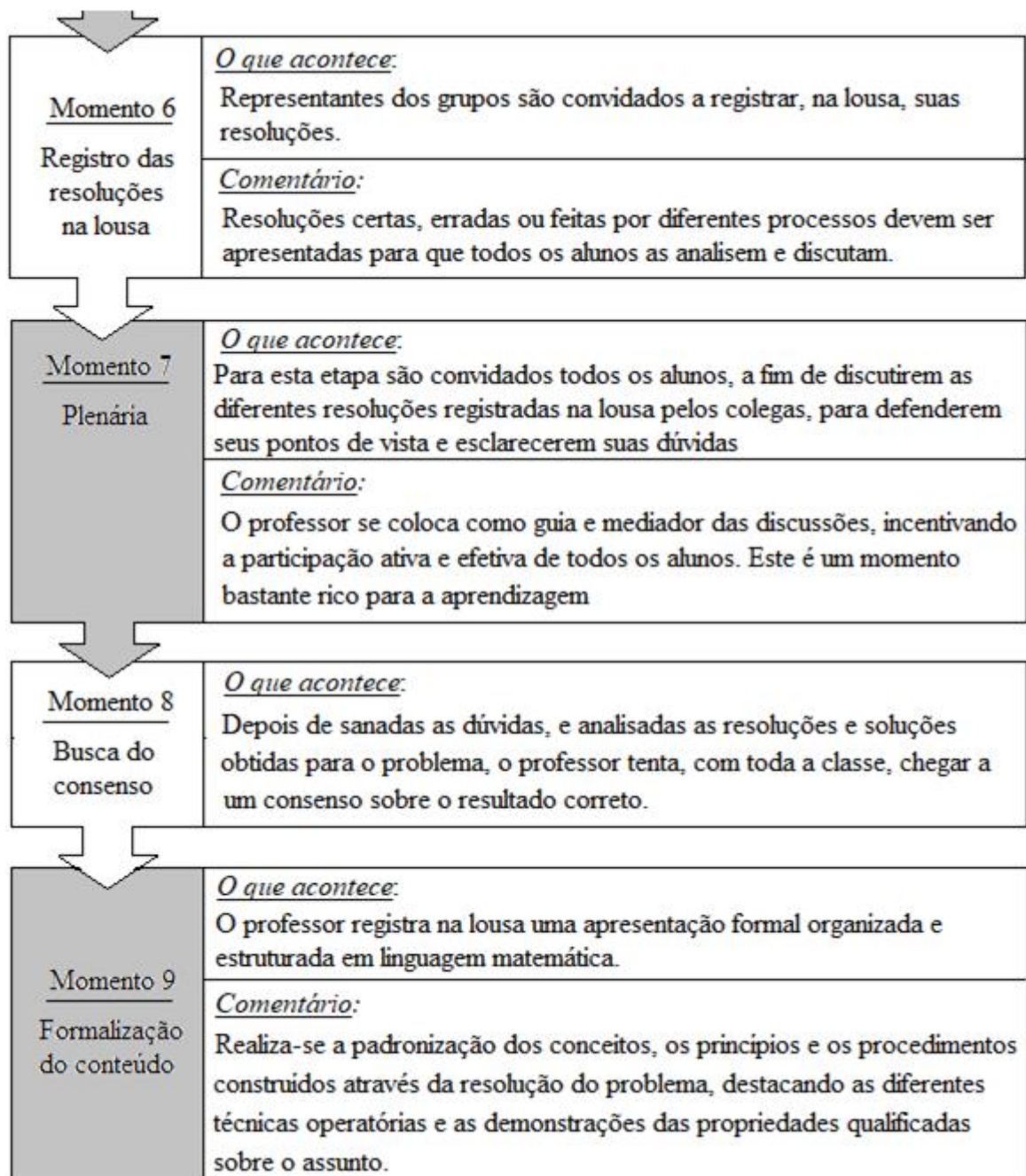
- (I) ser provocador para o aluno;
- (II) ser o componente de uma situação efetivamente inexplorada; desconhecida;
- (III) não se reduzir ao emprego literal de algoritmos aritméticos;
- (IV) ter um grau adequado de dificuldade.

Voltando nossa atenção ao professor e sua postura em sala, é recomendado ao docente abdicar de colocar-se no foco da práxis, transpondo para os educandos um compromisso sério com sua aprendizagem, que ocorrerá se os mesmos tencionarem verdadeiramente aderirem a esse envolvimento. Tal prática clama aos envolvidos, professor e aluno, modificação de conduta que, por vezes, não é fácil alcançar. Com pretensão de auxiliar educadores a lidarem com essa forma de ensino, encontramos nos trabalhos de Lourdes de la Rosa Onuchic (ONUCHIC, 1999) um roteiro de atividades que orienta o uso dessa metodologia e que procuramos esquematizar no Quadro 3.

Quadro 3 – Uma sugestão de roteiro de aplicação da metodologia.







Fonte: o autor

Fortalecemos que, nessa metodologia, os problemas são sugeridos aos alunos anteriormente à descrição categórica dos assuntos ou ferramental teórico que é objetivado ser apresentado pelo professor. Deste modo, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático principiava com uma circunstância problematizada que exprimi o âmago do tema objetivado, ao qual, na busca de solucioná-la, são desenvolvidos os conceitos e em que a avaliação do crescimento dos educandos é feita continuamente, durante as tentativas de resolução do problema. (ONUICHIC, 1999)

4.1 POTENCIALIDADES DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

De acordo com Luiz Roberto Dante (DANTE,1997), existem motivos fortes o suficiente para convencerem qualquer profissional de ensino, em especial os professores, a usar a Resolução de Problemas em sala de aula como opção eficaz para a aprendizagem. O autor enumera como razões o crescente progresso do raciocínio, do pensamento metódico e produtivo e o grande número de situações de desafio que transformam o momento de ensino e aprendizagem em algo mais divertido e atrativo.

A metodologia da resolução de problemas, além do aprendizado dos conceitos matemáticos, viabiliza aos alunos a prática de atributos de conduta como cooperação, liderança e responsabilidade. Segundo Lourdes de la Rosa Onuchic (ONUCHIC,1999) um dos muitos proveitos no uso da instrução de ensino através da resolução de problemas em sala de aula é a ligação entre os conteúdos presentes nos currículos de Matemática. A situação-problema é a origem e a diretriz que conduz a formação dos conceitos matemáticos onde, durante o processo de edificação do conhecimento, os docentes estabelecem os elos entre os diversos campos existentes, delineando novos significados ou concepções.

Consoante a Dante (DANTE, 1997), na Metodologia de Resolução de Problemas o professor aproxima-se dos aprendizes pelo estímulo do desafio que transforma os momentos de aprendizado em situações mais vivas e instigadoras, suscitando o gosto pelo estudo, mais do que a clássica estrutura de explicar, refazer e firmar um conteúdo. A Metodologia pressupõe exercitar nos educandos a faculdade de converter-se em indivíduos críticos e autônomos, capazes de desenvolver métodos e estratégias na solução de problemas por meio de uma postura proativa durante sua formação. Beatriz D'ambrósio (D'AMBROSIO,1993, p. 36) assim assevera:

Difícilmente o aluno de Matemática testemunha a ação do verdadeiro matemático no processo de identificação e solução de problemas. O professor faz questão de preparar todos os problemas a serem apresentados com antecedência; consequentemente, o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno, e o único a conhecer a dinâmica desse processo continua sendo o professor. O professor, com isso, guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante, da descoberta de um caminho produtivo, das frustrações inerentes ao problema considerado e de como um matemático toma decisões que facilitam a solução do problema proposto. O que o aluno testemunha é uma solução bonita, eficiente, sem obstáculos e sem dúvidas,

dando-lhe a impressão de que ele também deverá conseguir resolver problemas matemáticos com tal elegância.

A resolução de problemas como proposta metodológica tem como intento oportunizar a aquisição de habilidades como a capacidade de elaborar estratégias, de elevar o comportamento exploratório, de experimentação e validação de soluções. Essa proposta também tem como foco promover a construção do conhecimento matemático de forma dinâmica envolvendo os alunos. Este aspecto é apresentado nos PCN (BRASIL, 1998, p. 40) que em seu texto faz a seguinte colocação:

A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Nesse processo, são abandonadas as formas de aprendizagem maçantes, em outros termos, aquelas que modelam, unicamente, o hábito de reproduzir o conteúdo e aplicar fórmulas. O ensino que se concretiza via resolução de problemas, auxilia os educandos em sua aptidão de aprender a aprender, aclimatando-o a estabelecer soluções para as interrogações que o confrontam dentro ou fora da escola, diferentemente da postura passiva de se esperar uma resolução do professor (SOARES,2001).

Desta maneira, sintetizando algumas das ideias explicitadas no referencial teórico, podemos esquematizar (ver Quadro 4) certos aspectos positivos do uso da metodologia.

Quadro 4 – Aspectos positivos do uso da metodologia da resolução de problemas.

Aspectos	Referencial teórico
Aspecto motivacional	Segundo Dante (DANTE,1997), na Metodologia de Resolução de Problemas, o professor aproxima-se dos alunos com uma proposta de trabalho que os desafia e torna as aulas de

	matemática mais dinâmicas e motivadoras, fazendo o aluno sentir o prazer de aprender matemática quando consegue resolver um problema por si próprio, mais do que o clássico esquema de explicar, repetir e fixar o conteúdo.
Aspecto de autonomia na aprendizagem	De acordo com Soares (SOARES,2001), ensinar matemática via resolução de problemas [cria] na sala de aula, um clima de suporte que [encoraja] a participação voluntária dos alunos, [estimula] sua curiosidade. Quando se ensina através da resolução de problemas, ajuda-se os alunos a desenvolver sua capacidade de aprender a aprender, habituando-os a determinar por si próprios, respostas às questões que os inquietam, sejam elas questões escolares ou da vida cotidiana, ao invés de esperar uma resposta já pronta, dada pelo professor ou pelo livro-texto.
Aspecto de estabelecer conexões entre o novo conhecimento e o conhecimento já aprendido	Segundo Onuchic (ONUCHIC,2005), uma das vantagens de se usar a Resolução de Problemas em sala de aula é a ligação entre os conteúdos presentes nos currículos de Matemática. O problema é o ponto de partida e orientação para a aprendizagem e os professores através e durante a resolução dos problemas, devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.
Aspecto de aprendizagem	De acordo com Onuchic (ONUCHIC,2005), a Resolução de Problemas desenvolve o poder matemático nos alunos, ou seja, a capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos, (...) desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido. [Ainda] a construção de conhecimentos, relacionados a conceitos e conteúdos matemáticos, se realiza de forma mais significativa e efetiva pelos alunos

Fonte: Revista Espacios, vol 38(nº45), ano 2017, p.18(adaptado)

Além destas contribuições advindas do uso da metodologia de resolução de problemas é preciso que o professor esteja igualmente ciente das dificuldades e limitações que poderá vir a encontrar ao aplicar o método em sala de aula, o que passaremos a tratar a seguir.

4.2 DIFICULDADES E LIMITAÇÕES ENFRENTADAS PELA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM SALA DE AULA

No Quadro 5, apresentamos uma pequena síntese das situações colhidas nos trabalhos de Reis e Zuffi (REIS e ZUFFI, 2007) advindas de pesquisa realizada em uma escola pública de Ensino Médio, do estado de São Paulo em que também se descreve os correspondentes impedimentos e seus desenlaces.

Quadro 5 – Resultados obtidos da pesquisa.

Situações	Dificuldade	Desdobramento
Sala Numerosa	Não era possível dar atenção total a todos os grupos.	Os alunos se habituaram e desenvolveram tentativas de resolver os problemas sozinhos.
Alunos inexperientes com a resolução de problemas	Resistência e reclamação.	Contato frequente com a resolução de problema amenizou a situação.
Defasagem de conhecimento	Lacuna na formação aritmética e algébrica, dificultou os cálculos na resolução dos problemas.	Incentivou a estudarem mais, proporcionando-lhes momentos para exercitarem suas habilidades metacognitivas.

Fonte: (REIS E ZUFFI, 2007) - adaptado

A estes se acrescenta outro fator que dificulta o uso da resolução de problemas em sala de aula; a carga horária excessiva dos professores. Professor com demasiada carga horária acarreta um cenário desfavorável para a implantação do ensino através da resolução de problemas dado que o professor precisa provisionar os elementos para sua realização. A preparação para aplicação do método depreende alcançar clareza do que vai ser realizado e como fazê-lo e isto pleiteia leitura constante, investigação escrupulosa, conferência com outros professores e esquadrinha de situações-problemas com as quais se trabalhar (RODRIGUES e MAGALHÃES, 2011). Tal constatação é reforçada em Redling (REDLING, 2011, p.123) quando a mesma afirma que

As professoras ao serem questionadas a respeito das dificuldades em trabalhar com problemas relataram que a maior dificuldade está relacionada aos problemas de compreensão das situações por parte dos alunos, além da falta de tempo e o compromisso de cumprir os cronogramas.

Ou seja, o diminuto tempo disponível ao preceptor gera um obstáculo para que o mesmo possa alterar sua atuação didática tendo como parâmetro um roteiro de ação que repare os desajustes que surgem durante o fazer pedagógico. Na realização do trabalho em sala de aula, particularmente durante as aulas de matemática, tem-se este contratempo permanente resistindo as muitas considerações acerca de sua solução.

Borba e Penteado (2001, apud Romanatto, 2012) afirmam que, frequentemente, os professores deliberam em realizar seu trabalho em ambiente onde tudo é entrevisto e costumeiro e, resultante a isso, perfeitamente coordenável. Para os autores, a implementação do método empurra os docentes para uma área onde se predomina o acidental, a hesitação, acarretando uma constante averiguação dos resultados advindos de cada prática executada.

Desta forma, assim como fizemos na Seção 4.1, e novamente apoiando-se no referencial teórico, podemos esquematizar certos aspectos limitantes do uso da metodologia da resolução de problemas em sala de aula, sintetizando alguns dos obstáculos e explicitando-os no Quadro 6.

Quadro 6 – Aspectos limitantes do uso da metodologia da resolução de problemas.

Metodologia da resolução de problemas	
Limitações	Referencial teórico
Limitações em contexto de sala de aula	Segundo Reis e Zuffi (REIS e ZUFFI, 2007), as dificuldades encontradas são: salas numerosas, alunos inexperientes com a resolução de problemas e defasagem de conteúdo.
Limitações externas devido a condições de trabalho	De acordo com Rodrigues e Guimarães (RODRIGUES e GUIMARÃES, 2011), um fator que limita o uso da Resolução de Problemas consiste na carga horária dos professores. Professores com carga horária cheia é um cenário negativo para implantação da Resolução de Problemas, uma vez que para tal, o professor necessita de se preparar. Tal preparação pressupõe estudo de temas relevantes, leitura de artigos de Educação Matemática, reunião com outros professores para propor trabalhos interdisciplinares em equipes, elaboração de problemas significativos para os alunos.

O professor não saber conduzir a metodologia	Segundo D'Ambrosio (D'AMBROSIO,2008), é comum o professor "estragar" o problema, eliminando todo o desafio para o aluno. O problema resolvido pelo professor não tem o mesmo efeito daquele resolvido pelos alunos, sem muita intervenção do professor. Professores que alteram a demanda cognitiva de um problema não o fazem por mal, mas em geral o fazem para evitar o desânimo do aluno(...).
Preocupações com cobranças externas (cumprir o programa)	De acordo com Redling (REDLING,2011), os professores quando questionados a respeito das dificuldades em se trabalhar com problemas, relataram que a falta de tempo e o compromisso de cumprir ou seguir o cronograma, limita a utilização da Resolução de Problemas

Fonte: Revista Espacios, vol 38(nº45), ano 2017, p.18(adaptado)

Vale notar que, quanto as limitações, esperava-se encontrar obstáculos para se recorrer ao ensino através da resolução de problemas em contextos ligados aos conteúdos e processos matemáticos, mas, pelo menos dentro do repertório teórico pesquisado, isso não aconteceu. As limitações estão associadas a questões atinentes as confrontadas por outros educadores do ensino básico, como salas numerosas, falta de tempo hábil para preparação das aulas, entre outros.

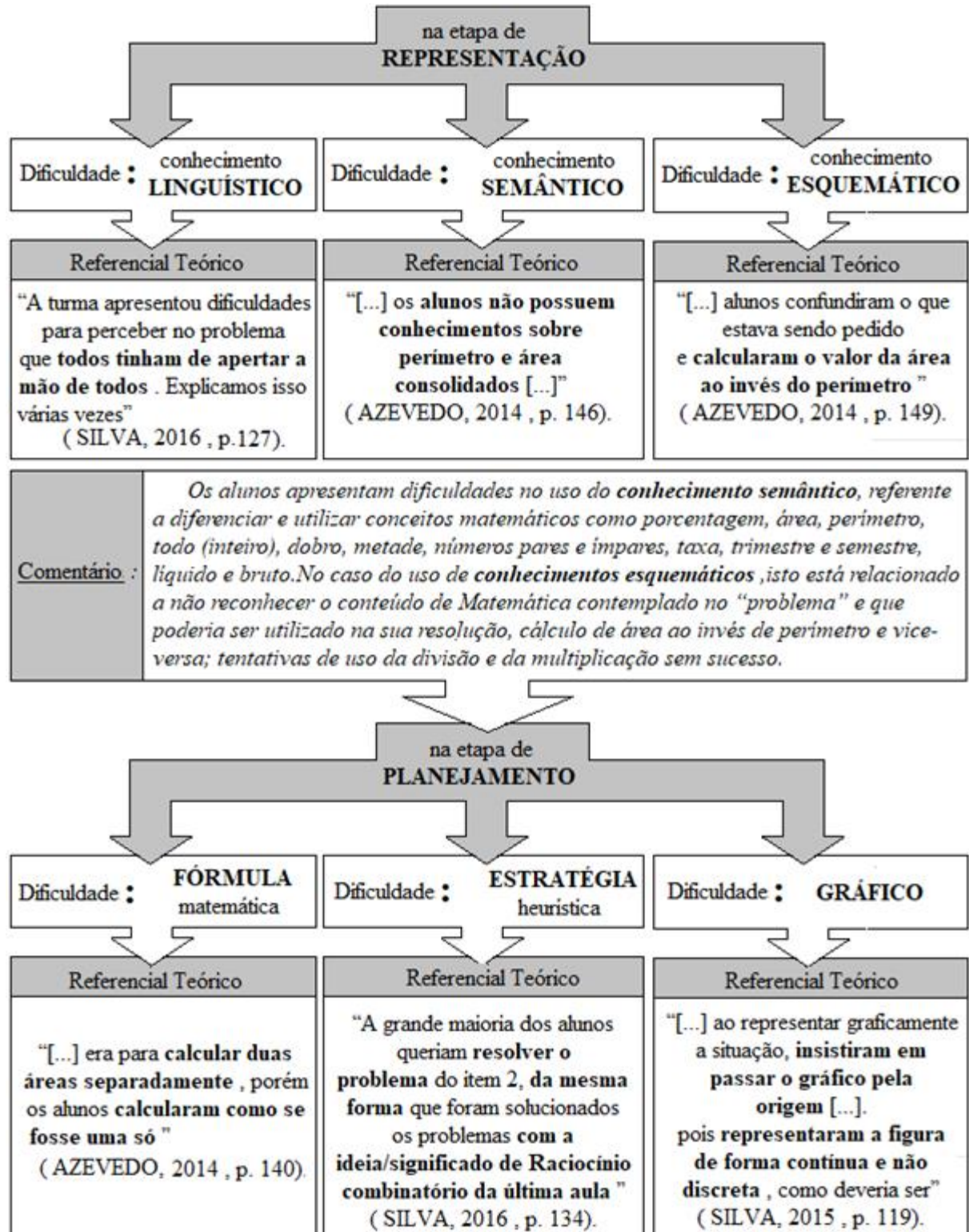
4.3 DIFICULDADES DOS ALUNOS AO “RESOLVEREM PROBLEMAS”.

Na presente seção, comentamos sobre os obstáculos mais evidentes apresentados pelos alunos durante a resolução de problemas, constatados ao longo das leituras realizadas nas pesquisas bibliográficas.

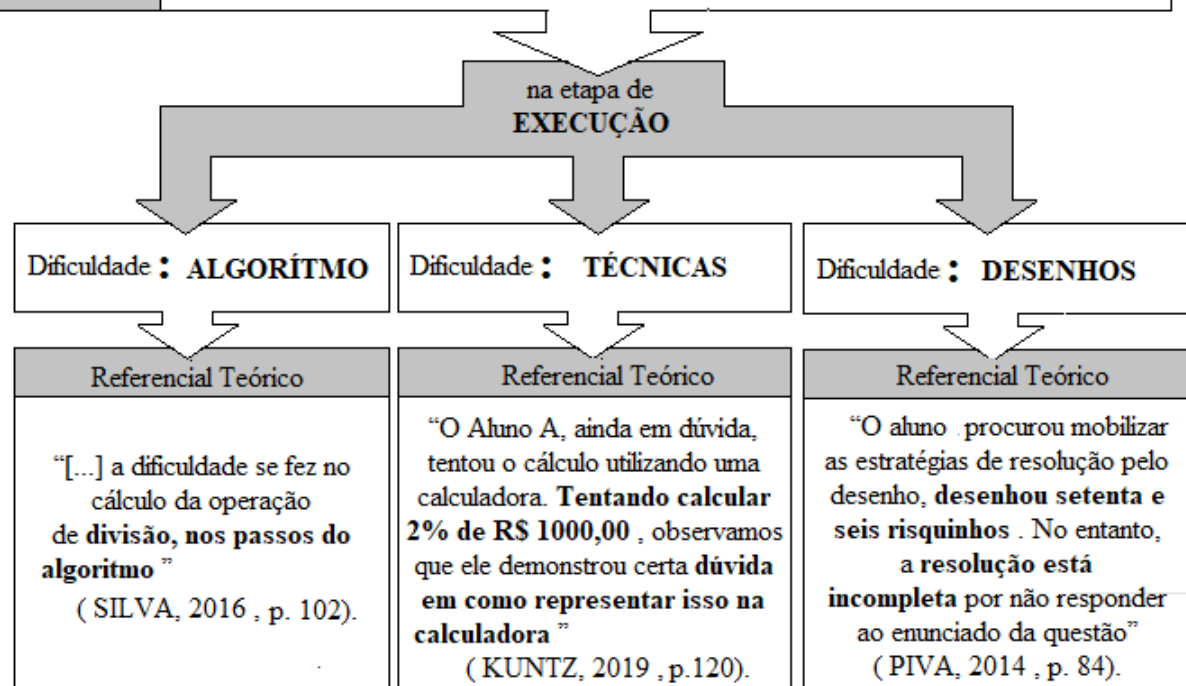
Observou-se que a maior parte das dificuldades se encontram na percepção do que deseja o problema, precisamente por uma elaboração deficiente de noções matemáticas, pelo apedutismo do significado de palavras ou expressões contidas no enunciado assim como contratempos na aplicação de fórmulas e algoritmos.

A seguir, apresentamos no Quadro 7, esquematicamente, uma síntese das dificuldades dos alunos nas etapas de representação (ou compreensão do problema), planejamento, execução e monitoramento (ou retrospecto do problema), respectivamente.

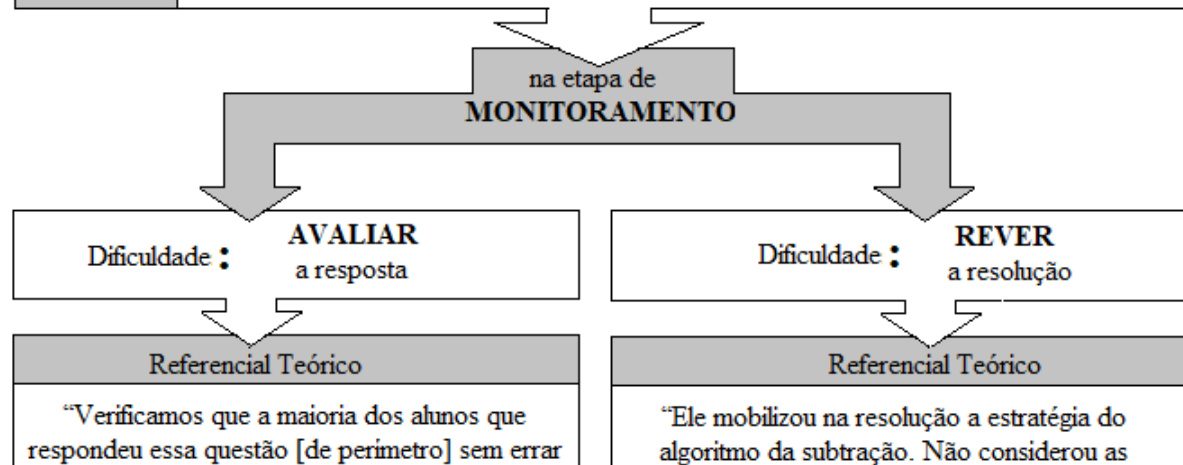
Quadro 7 – Dificuldade dos alunos na resolução de problemas



Comentário :	<i>Há grande ocorrência de dificuldades no uso de fórmula matemática para compor a estratégia de resolução, em relação ao cálculo de áreas, à identificação e ao uso corretos de divisor e dividendo, a perceber e estabelecer o uso correto do tipo de função, a erros em algoritmos e a não saber calcular descontos. Já nas estratégias heurísticas e no uso de gráfico, percebe-se que as dificuldades estavam na relação entre os contextos e a linguagem matemática. Tais dificuldades na etapa de planejamento podem ter origem, segundo estudo de Barroso e Ortiz (2007), no comprometimento do desenvolvimento de componentes afetivos dos alunos devido ao uso exacerbado de regras/fórmulas sem sua devida reflexão. Tal uso pode prejudicar os alunos na elaboração/proposição de estratégias de resolução.</i>
---------------------	---



Comentário :	<i>O uso de algoritmos, de técnicas e de desenhos revelou dificuldades dos alunos nas operações aritméticas, em contagem, em cálculo de porcentagem e em saber utilizar desenhos. O que chama a atenção é que as pesquisas de Silva (2015) e Kuntz (2019) tinham como participantes alunos do Ensino Médio, que, espera-se, não deveriam apresentar dificuldades para operar com cálculos matemáticos. No caso da pesquisa de Piva (2014), também chama a atenção o fato de alunos que estavam no final do 5º ano do Ensino Fundamental revelarem dificuldades em operar com adição, subtração, multiplicação e divisão.</i>
---------------------	--



na contagem conseguiram obter apenas essa resposta, não se atentando ao que estava sendo pedido na questão ” (AZEVEDO, 2014, p. 145).	outras etapas do problema. Dessa forma podemos dizer que não concluiu a resolução ” (PIVA, 2014, p. 82).
<u>Comentário :</u>	O que se verifica é que possivelmente os alunos não se atentaram à relação entre o contexto e suas resoluções, pois não houve um ato de avaliar a resposta, verificando se estava de acordo com a pergunta e seu contexto, nem uma atitude de rever a resolução, também com base no contexto envolvido, para verificar se estava adequada. A iniciativa de avaliar a resposta, isso pode estar relacionado tanto ao aluno quanto à postura do professor. Um exemplo é o estudo de Sousa e Mendes (2017), que mostrou que o participante de sua pesquisa, aluno do 2º ano do Ensino Fundamental, não examinou a solução de quatro dos seis problemas de subtração propostos, ato que, segundo as autoras, “[...] pode estar relacionado com o facto de os alunos não se questionarem ou não serem questionados sobre a solução obtida, pensando de imediato que o primeiro resultado é a resposta correta”

Fonte: o autor

Concluimos aqui que, no intuito de transpor estes obstáculos, deve-se esquivar de implementar uma mera recuperação de assuntos e tópicos curriculares, entendendo-se ser mais proveitoso envolver uma perspectiva de elaboração de noções e processos matemáticos.

5. COLETÂNEA DE PROBLEMAS.

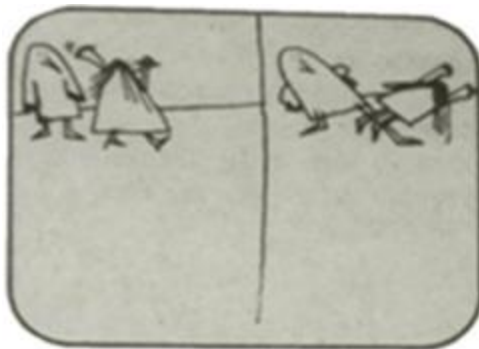
Os problemas listados a seguir estão agrupados em quatro categorias: COMBINATÓRIOS, GEOMÉTRICOS, NUMÉRICOS e LÓGICOS. Houve esforço de nossa parte em agrupá-los convenientemente, mas estas são áreas tão vastas e os problemas muitas vezes mesclam variados conceitos que se torna difícil evitar que ocorram algumas sobreposições e um problema de uma das categorias pode muito bem ser considerado como pertencente a alguma(s) das outras. Este fato não impede nosso objetivo ao propor trabalhar com a Resolução de Problemas e, ao invés disso, possibilita ao profissional de ensino certa flexibilidade ao se utilizar dos problemas apresentados. Nosso desejo aqui é fornecer ao professor material para que possa trabalhar com a resolução de problemas em sala de aula ajudando assim a cortar as rotinas normais, melhorando a capacidade criativa dos educandos.

5.1 PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

A análise combinatória trata-se do estudo de como as coisas podem ser arranjadas. De uma forma menos geral, a análise combinatória consiste no estudo de maneiras de agrupar os elementos de um conjunto sujeitos a regras específicas e no estudo das propriedades desses agrupamentos. Nesta seção, apresentaremos problemas deste tipo com ênfase na realização de contagens.

5.1.1- Caminhos perplexos.

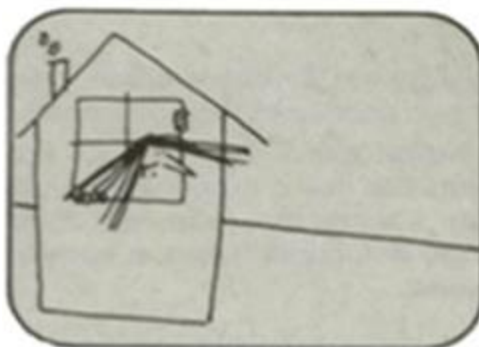
Figura 1 – O problema de Susan



Susan tem um problema. Quando vai para a escola, encontra sempre Stinky.

Stinky: Olá, Susan. Posso ir contigo?

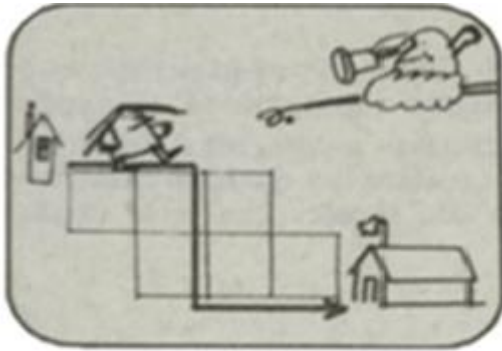
Susan: Não. Por favor, vai-te embora.



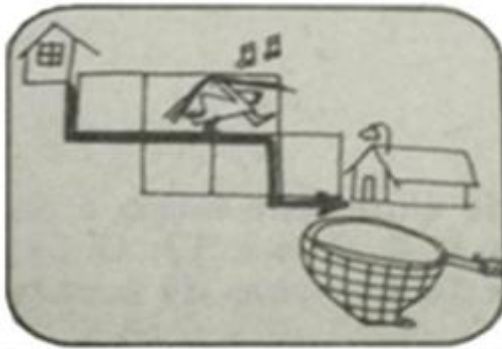
Susan: Já sei o que vou fazer. Vou para a escola por um caminho diferente todas as manhãs. Assim, o Stinky não saberá onde encontrar-me.

Fonte: Gardner, M. (1990)

Figura 2 – O problema de Susan(cont.)



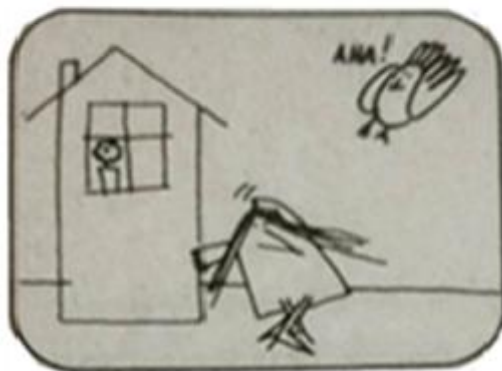
Este mapa mostra todas as ruas entre a casa de Susan e a sua escola. Neste caminho, Susan está sempre a andar para leste ou para sul



Aqui está Susan noutra caminho. Naturalmente, ela não quer andar no sentido oposto à escola. Mas quantos caminhos há?

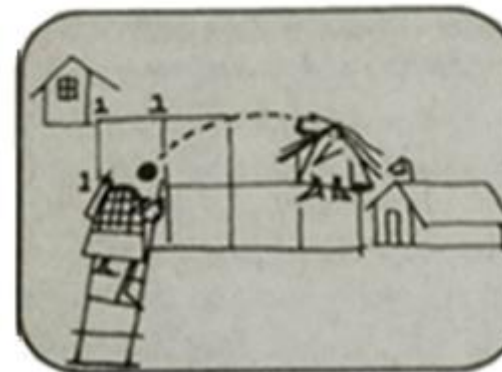
Susan: Imagino por quantos caminhos diferentes posso ir. Vejamos. Hum! Isto vai ser difícil de descobrir. Hum! Não é nada difícil. É simples!

Que discernimento teve Susan?



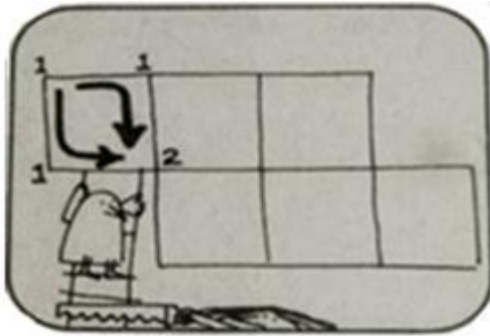
Eis como ela raciocinou:

Susan: Ponho um 1 no canto onde vivo porque tenho apenas um modo de começar. Depois ponho um 1 em cada esquina que esteja a um quarteirão de distância porque é o único modo de lá chegar.

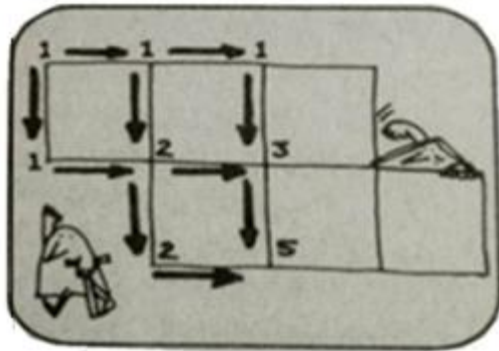


Susan: Agora ponho um 2 nesta esquina, pois posso lá chegar por dois caminhos diferentes. Quando Susan notou que 2 é a soma de 1 e 1, percebeu de repente que o número em cada esquina deve ser a soma dos números mais próximos ao longo dos caminhos que conduzem a essa esquina.

Figura 3 – O problema de Susan(conclusão)



Susan: Cá está. Estão etiquetadas mais quatro esquinas. Acabo rapidamente as outras. Pode ajudar a Susan a completar as etiquetas nas esquinas e dizer-lhe quantos caminhos diferentes pode ela seguir para ir à escola?

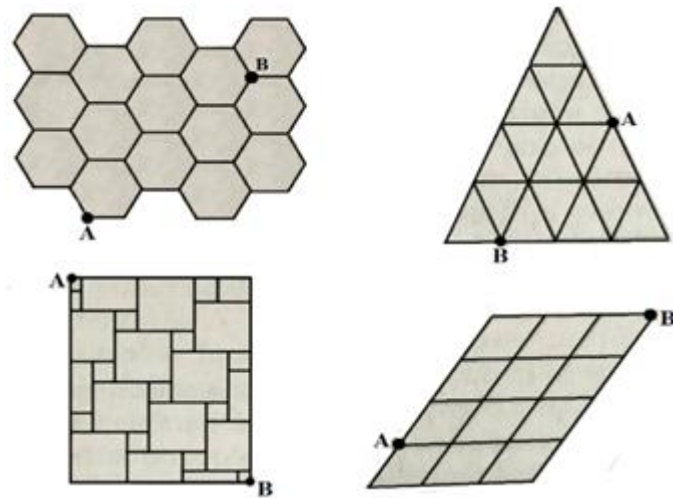


Os cinco vértices restantes, lendo-se de cima para baixo e da esquerda para a direita, têm as etiquetas 1, 4, 9, 4 e 13. O 13, no último vértice, mostra que Susan tem 13 maneiras de ir para a escola pelos caminhos mais curtos.

Fonte: Gardner, M. (1990)

Aquilo que Susan descobriu é um algoritmo simples e rápido para o cálculo do número de caminhos mais curtos da sua casa para a escola. Se ela tivesse tentado desenhar todos esses caminhos e depois contá-los, teria sido cansativo e estaria fora de questão se a rede de ruas tivesse um grande número de células. Apreciar-se-á melhor a eficácia do algoritmo se se traçarem os 13 caminhos. Para testar se percebeu o algoritmo, tente fazer um esquema de várias outras redes de ruas e aplicar o algoritmo para determinar o número de caminhos mais curtos de qualquer vértice 'A' para outro vértice 'B'. A Figura 4 apresenta quatro problemas deste tipo.

Figura 4 – redes de ruas

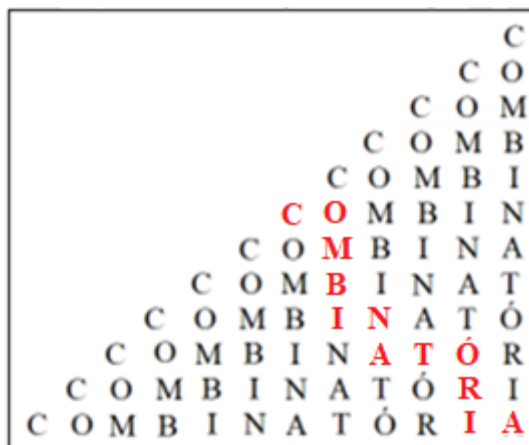


Fonte: Gardner, M. (1990)

5.1.2- Formando palavras

Na Figura 5, de quantas maneiras é possível formar a palavra COMBINATÓRIA partindo-se de um 'C' e indo sempre para a direita ou para baixo?

Figura 5 – construção de uma palavra



Fonte: SATOS, José Plínio O. (2007)

Solução:

Primeiramente, observemos que todas as vezes que formamos a palavra COMBINATÓRIA, finalizamos no ‘A’ situado no canto inferior direito do quadro exibido no enunciado. Assim, podemos analisar as construções de maneira inversa, partindo desse ‘A’ e voltando ao ‘C’ inicial. Note, então, que, antes desse ‘A’, pode ter vindo o ‘I’ situado acima dele ou o ‘I’ situado ao seu lado esquerdo. Estando num dos ‘Is’, notamos que também há duas possibilidades para a letra ‘R’ que se segue a ela. Prosseguindo com este raciocínio, como a palavra em questão tem 12 letras, tivemos 11 passos para voltar do seu ‘A’ final até o seu ‘C’ inicial, donde se tem $2^{11} = 2048$. possíveis maneiras de se formar a palavra COMBINATÓRIA.

Aos professores:

Em problemas de contagem como este é notório que as primeiras tentativas recorram a uma construção e enumeração de todas as possibilidades, o que é comum neste tipo de circunstância. Isso os levará a perceber experimentalmente a impraticabilidade da contagem direta e com isso motivar os alunos na busca de novas ferramentas (aqui o Princípio Fundamental da Contagem). Os professores podem reformular a situação reconstruindo semelhante problemática com poucos elementos permitindo uma análise da mesma construção simplificada.

5.1.3-Pintando mapas.

A Figura 6 mostra um mapa com 5 países:

Figura 6 –Mapa



Fonte: o autor

- (a) Dispondo de ‘ m ’ cores diferentes ($m \geq 5$), de quantos modos esse mapa pode ser completamente colorido de tal maneira que países fronteiriços não sejam pintados da mesma cor?
- (b) Satisfazendo as condições do item (a), qual o menor valor de ‘ m ’ que permite colorir o mapa? Quantas são as maneiras de colorir o mapa nesse caso?

Solução:

- (a) Temos 3 casos a se considerar:

(i) *Cada país é colorido de uma cor diferente;*

São $m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3) \cdot (m - 4)$ maneiras distintas.

(ii) *A cor usada para colorir a Alemanha é igual a usada para colorir a Eslováquia, e as cores da Polônia e da Áustria são distintas, ou vice-versa.*

Temos ‘ m ’ opções de cor para a Rep. Tcheca, $(m - 1)$ opções para colorir os dois países opostos de mesma cor, e $(m - 2) \cdot (m - 3)$ opções para colorir os dois países opostos de cores distintas. Logo, considerando as duas possibilidades, há $2m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3)$ maneiras distintas.

(iii) *A cor usada para colorir a Alemanha é igual a usada para a Eslováquia, e a usada para colorir a Polônia é igual a usada para a Áustria.*

Temos ‘ m ’ opções para colorir a Rep. Tcheca, $(m - 1)$ opções para colorir um dos pares de países opostos e $(m - 2)$ para colorir o outro par de países opostos. Logo, são $m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2)$ maneiras distintas.

Somando os resultados obtidos, chegamos a um total de:

$$m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3) \cdot (m - 4) + 2m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3) + m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) =$$

$$m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot [(m - 3) \cdot (m - 4) + 2(m - 3) + 1]$$

$$m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2)(m^2 - 5m + 7) \text{ maneiras diferentes de colorir o mapa.}$$

- (b) Como vimos no item (iii) de (a), são necessárias pelo menos 3 cores para colorir o mapa. Ainda pela resolução empregada, temos um total de $3 \cdot (3 - 1) \cdot (3 - 2) = 6$ maneiras distintas de colorir o mapa nesse caso.

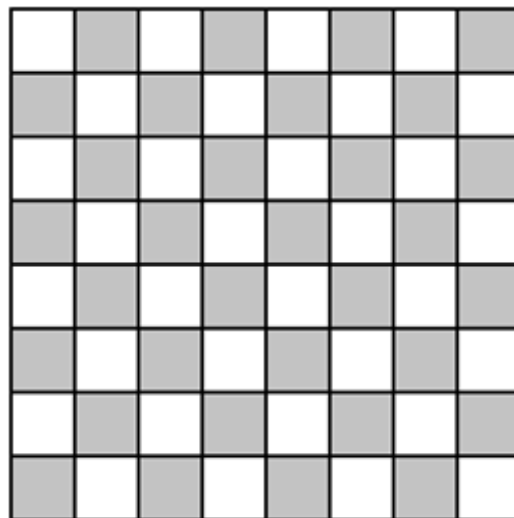
Aos professores:

O problema remete ao famoso “*problema das 4 cores*”, que pode servir de tema para pesquisa e aprofundamento. Recomenda-se trabalhar inicialmente com valores fixados ($m = 5, 6$, etc.) de tal forma que a observação destes casos particulares permita perceber certas regularidades que possibilitem posteriormente lidar com a generalização da situação.

5.1.4-Haja retângulos.

Quantos retângulos podemos formar com um tabuleiro de xadrez de 8×8 casas?

Figura 7 –Tabuleiro de xadrez



Fonte: SANTOS (2007), adaptado

Solução:

Cada retângulo corresponde à escolha de duas retas horizontais e duas retas verticais entre as 9 retas verticais e 9 retas horizontais que contêm bordas de casas do tabuleiro. A escolha das duas retas horizontais pode ser feita de C_2^9 assim como a escolha das duas retas verticais. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, podemos escolher as quatro retas de $C_2^9 \times C_2^9 = 36 \times 36 = 1296$ modos. Assim, há 1296 retângulos.

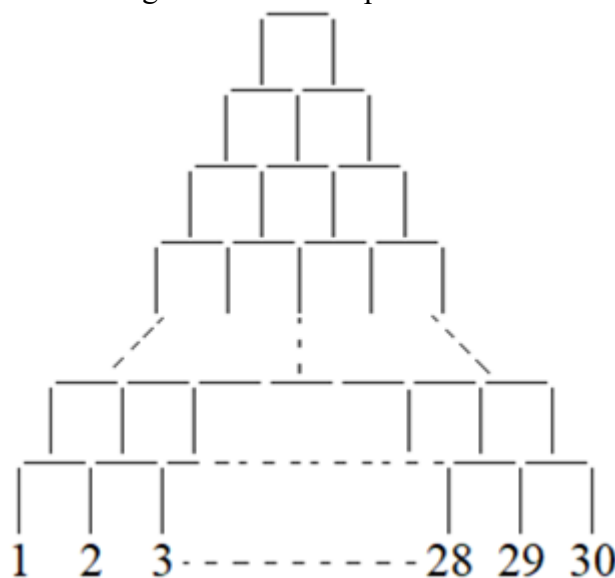
Aos professores:

Reforçamos que os problemas iniciais devem ser elaborados com poucos elementos, através da solução intuitiva e da contagem direta permitindo aos alunos realizarem análises simples para depois enfrentarem casos mais numerosos como este. O problema aqui apresentado é interessante por trazer uma perspectiva diferente de como se fazer a contagem. Aqui, deseja-se contar retângulos, mas não se tomam os retângulos em si. De forma bem engenhosa o foco recai para elementos da figura que, quando tomados, os determinam. Pares de verticais e pares de horizontais. Os estudantes ampliam sua visão depois que percebem esse detalhe.

5.1.5- Torre de palitos

Quantos palitos de fósforo formam o seguinte castelo apresentado na Figura 8?

Figura 8 –Torre de palitos



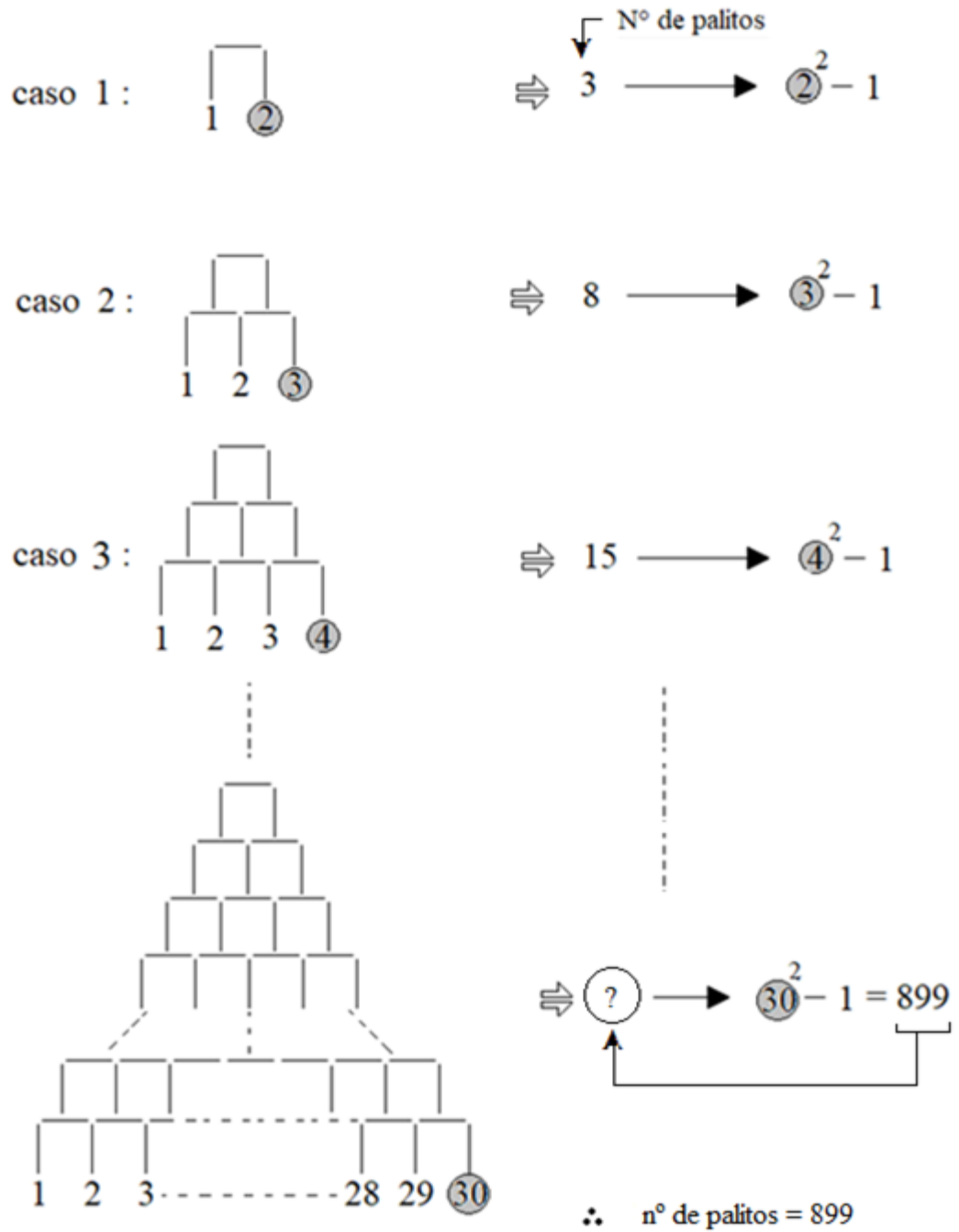
Fonte: o autor

Solução:

É evidente que contar todos os palitos, um por um, não seria apenas tedioso, mas extremamente laborioso. Aqui, olhamos para o fato de que o quantitativo de palitos na torre obedece a uma certa formação que se relaciona com o número de “pés” a cada andar acrescentado e que aumenta com eles. Quando um problema se apresenta como “simples”, mas muito operativo e percebemos que os casos obedecem a uma certa formação recorrente é um forte sinal de que devemos trabalhar com um raciocínio indutivo. Realizaremos uma contagem

por indução neste e nos dois problemas seguintes (5.1.6 e 5.1.7). Vamos pensar de forma indutiva analisando os três primeiros casos mais simples.

Figura 9 –Torre de palitos(continuação)

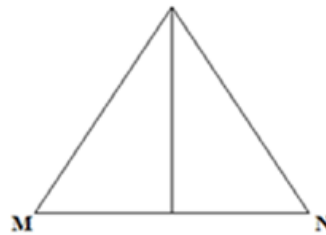


Fonte: o autor

5.1.6- Fatiando o triângulo

Se na Figura 10 traçarmos 50 retas paralelas ao lado $\overline{MN}$ quantos triângulos serão formados no total?

Figura 10 –Triângulo

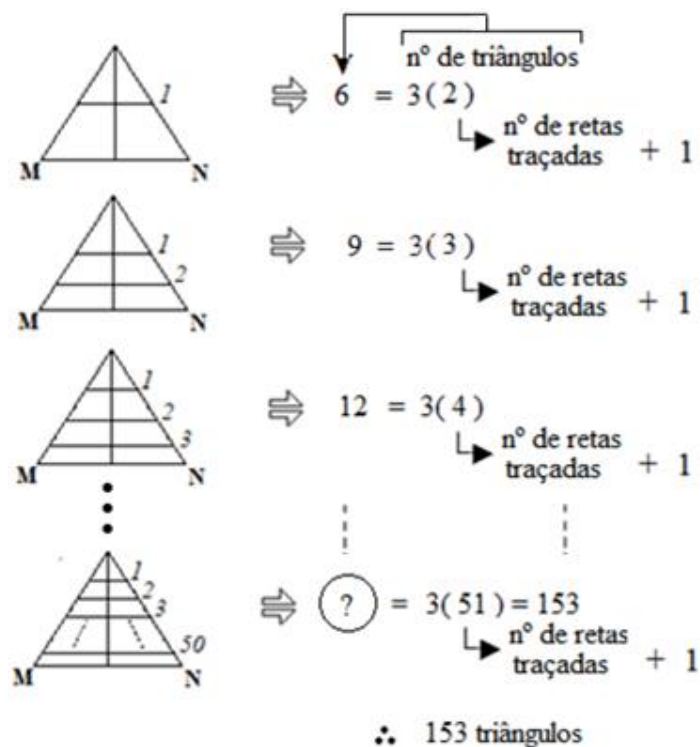


Fonte: o autor

Solução:

Igualmente exaustivo e pouco eficiente seria traçar as 50 retas e fazer uma contagem manual. Então aplicaremos raciocínio lógico indutivo analisando os primeiros casos mais simples.

Figura 11 –Triângulos(construção)



Fonte: o autor

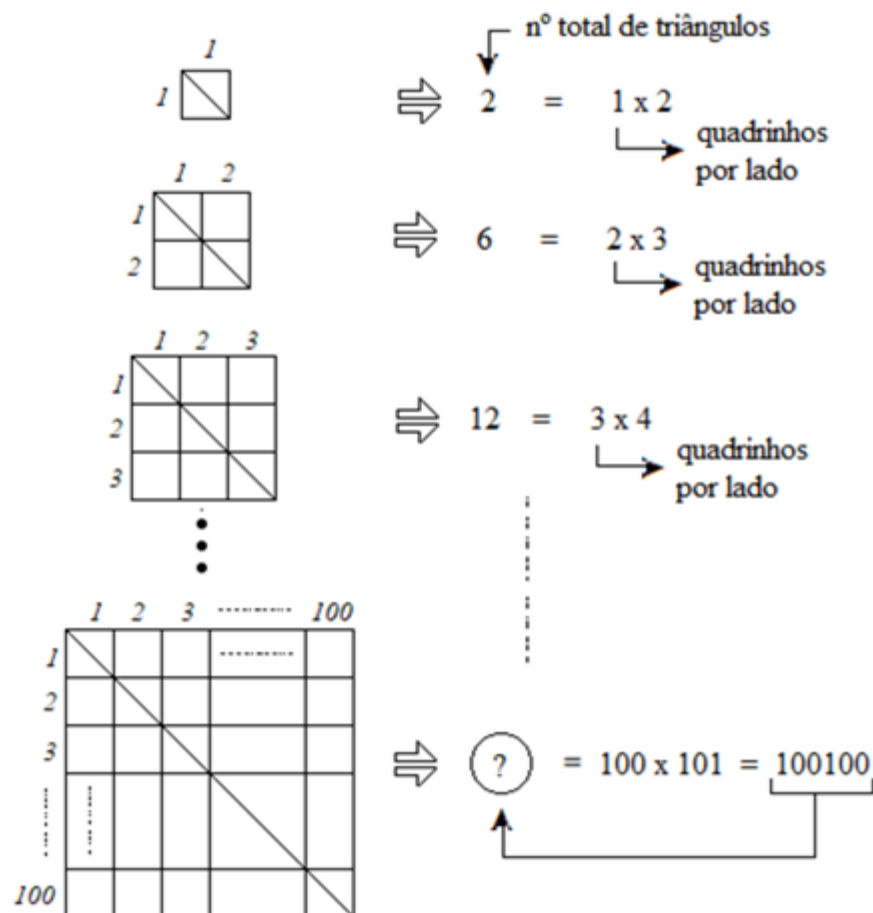
5.1.7- Contando triângulos.

Em uma folha quadrada e quadriculada com 100 quadradinhos por lado se traça uma diagonal principal. Quantos triângulos, no máximo, podem ser contados no total?

Solução:

Seria um trabalho extremamente penoso contar todos os triângulos na folha quadriculada com 100 quadradinhos de lado. Vamos então analisar as situações onde o número de quadradinhos no lado da folha é menor e, aplicando raciocínio indutivo, chegar à solução do problema.

Figura 12 – Diagonal e malha quadriculada



Fonte: o autor

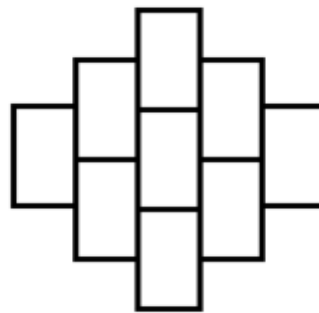
Aos professores:

Nos problemas precedentes (5.1.5, 5.1.6 e 5.1.7) embora também tratem de realizar contagens, usam do raciocínio indutivo, habilidade importantíssima que deve ser fomentada no aluno. Leva-se o estudante a observar as formações iniciais de tal maneira a reconhecerem padrões que os possibilitem estimar uma relação(regra) de formação. Tráz, intuitivamente, noções que remetem ao conceito formal de indução matemática, podendo estes problemas representarem um elo entre os dois tópicos.

5.1.8- Pintando ladrilhos.

Dispomos de 5 cores diferentes para pintar a Figura 13 de modo que os retângulos adjacentes tenham cores diferentes. De quantas maneiras podemos fazer isso se o número de cores utilizados em cada caso é mínimo?

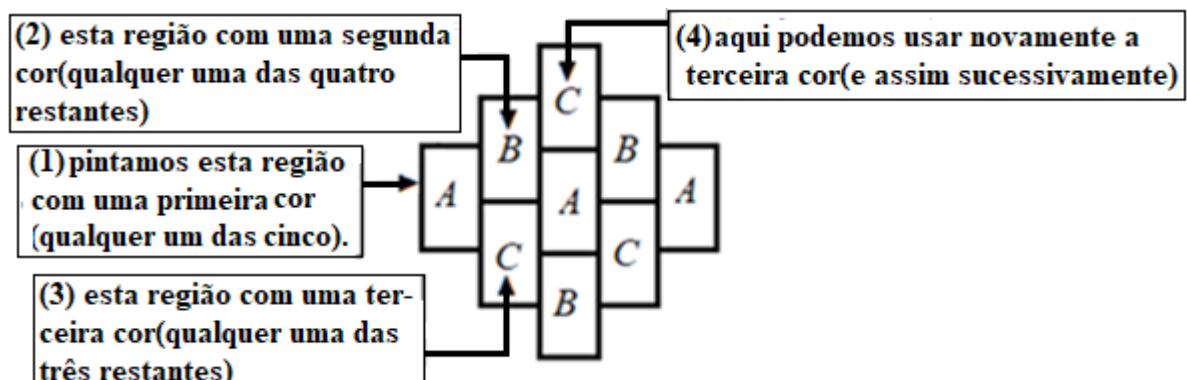
Figura 13 – retângulos



Fonte: o autor

Solução:

Figura 14 – retângulos(solução)



Fonte: o autor

Note que serão necessárias três cores, no mínimo, para pintar a figura apresentada obedecendo as condições estabelecidas. Portanto, o número de maneiras de escolhermos 3 cores dentre as 5 existentes será:

$$\overset{1^{\text{ª}} \text{ cor}}{\widetilde{5}} \times \overset{2^{\text{ª}} \text{ cor}}{\widetilde{4}} \times \overset{3^{\text{ª}} \text{ cor}}{\widetilde{3}} = 60 \text{ maneiras}$$

Aos professores:

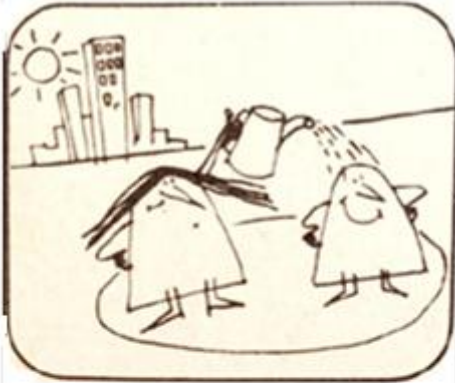
Um problema aparentemente “simples” (que ainda sim exige uma análise cautelosa) mas que permite explorar os conceitos primitivos da Análise Combinatória, neste caso o Princípio Fundamental da Contagem ou o Princípio Multiplicativo, trabalhando de modo intuitivo com o aluno, descrevendo os casos possíveis, formando agrupamentos e contando-os, bem como introduzindo ferramentas de contagem como a árvore de possibilidades. Uma análise adequada dos processos de formação de agrupamentos, pelos alunos, evitará equívocos comuns entre os iniciantes, decorrente da tendência de se querer adivinhar as respostas.

5.2 PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

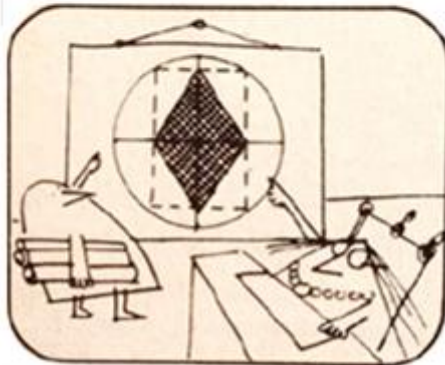
A palavra geometria deriva das palavras gregas *GEOS* (terra) e *METRON* (medida). Os antigos egípcios, chineses, babilônios, romanos e gregos usavam a geometria para topografia, navegação, astronomia e outras aplicações práticas. É importante observar duas perspectivas que a resolução de problemas geométricos nos trazem e que, num primeiro momento, parecem ser contrários mas que, na verdade, se complementam: primeiro, as revelações em geometria, podendo ser “verificadas” com os próprios olhos e mãos ganham mais força de convencimento e convicção; segundo, exigindo comprovações lógicas das conclusões, problemas geométricos conseguem fazer sentir o poder da engenhosidade humana, ou seja, da potencialidade de engenho do próprio aluno. Com isto em mente buscou-se problemas que integrassem a geometria plana com aritmética e álgebra dentro de situações que modelassem problemas do mundo real (ver problema 5.2.12) e(ou) alguma manipulação de material concreto (ver problemas 5.2.2 e 5.2.3) mas não excluindo de todo as situações puramente abstratas. Nesta seção apresentaremos problemas desta natureza.

5.2.1- Dimensões disfarçadas.

Figura 15 – piscina no parque

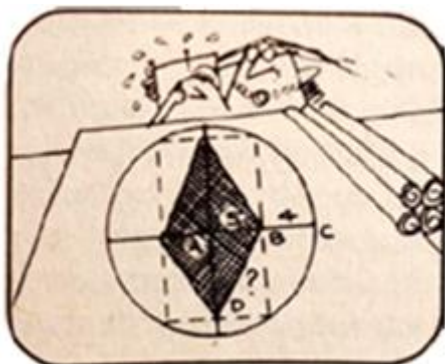


No meio do parque da cidade há uma grande área circular para jogos. A Câmara gostaria de construir uma piscina em forma de diamante dentro da área circular.

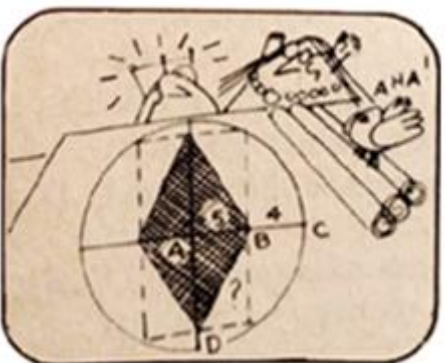


Quando Doris Wright, a presidente da Câmara, viu o projeto, falou com o arquiteto.

Presidente Wright: Gosto da forma rômbrica da piscina e dos azulejos vermelhos, mas qual é o comprimento de cada lado da piscina?



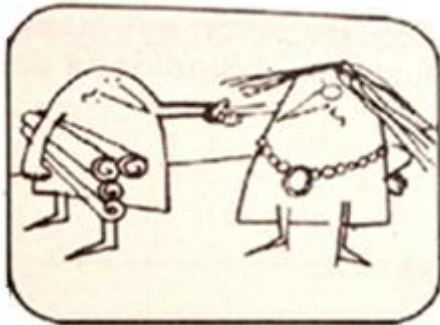
Frank Lloyd Wrong, o arquiteto, ficou confuso. **Sr. Wrong:** Vejamos. São 5 metros de **A** até **B** e 4 metros de **B** a **C**. Hum! Tem de haver uma maneira de encontrar $\overline{BD}$. Talvez tenha de usar o teorema de Pitágoras.



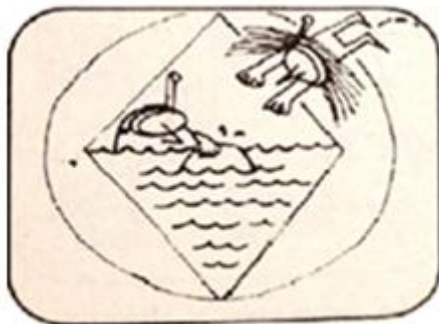
O Sr. Wrong estava quase a desistir quando repentinamente a presidente gritou:

Presidente Wright: Ah! O lado da piscina tem exatamente 9 metros. É evidente!

Figura 16 - Piscina no parque (cont.)



Sr. Wrong: Meu Deus! Tem razão. E eu estou errado.



Que visão tão simples lhes permitiu resolver o problema tão facilmente?

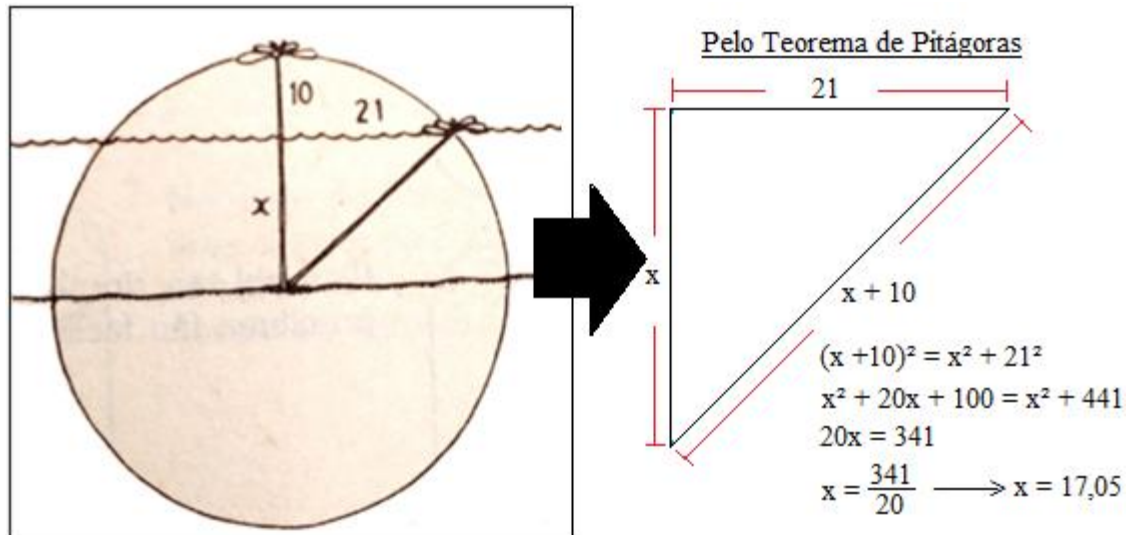
Fonte: Gardner, M. (1990)

A Sra. Wright percebeu, repentinamente, que cada lado da piscina é a diagonal de um retângulo e a outra diagonal é o raio da área circular de jogos. As diagonais de um retângulo são iguais; portanto, o lado da piscina tem o mesmo comprimento que o raio do círculo. O raio é $5 + 4 = 9$ metros; portanto, cada lado da piscina tem 9 metros. Não é necessário aplicar o teorema de Pitágoras.

Pode-se avaliar melhor o valor deste discernimento se tentarmos calcular o comprimento do lado da piscina de uma maneira mais convencional. Se utilizarmos apenas o teorema de Pitágoras e triângulos semelhantes, a solução é longa e trabalhosa. Pode ser ligeiramente melhorada através de um teorema de geometria plana que diz que, se duas cordas se intersectarem dentro de um círculo, o produto das duas partes de uma corda é igual ao produto das duas partes da outra corda. Este teorema dá a altura do triângulo retângulo, $\sqrt{56}$. Aplicando o teorema de Pitágoras, pode calcular-se então a hipotenusa do triângulo retângulo, 9 metros. Um problema muito relacionado com este é um famoso quebra-cabeças sobre um lírio aquático que o poeta Henry Longfellow apresentou no seu livro Kavanagh. Quando o caule do lírio está na vertical, a flor está 10 centímetros acima da superfície do lago. Se se puxar o lírio para um

lado, mantendo o caule direito, a flor toca na água num ponto que dista 21 centímetros do ponto em que o caule cortava inicialmente a superfície. Qual é a profundidade da água?

Figura 17 – Problema do Lírio aquático



Fonte: Gardner, M. (1990)

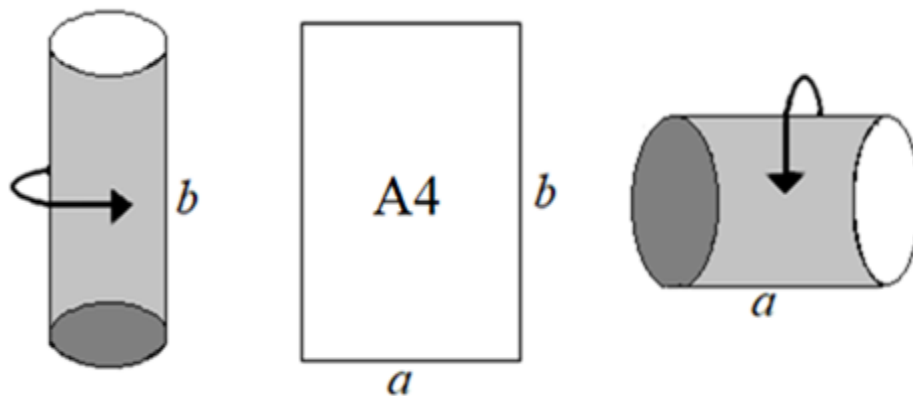
O problema pode ser resolvido desenhando primeiro o diagrama da Figura 17. Este é um diagrama idêntico ao do problema da piscina. A nossa tarefa consiste em determinar o comprimento de X. Assim como o problema da piscina, este também pode ser resolvido de várias maneiras, usando o teorema das cordas, por exemplo, ou, se nos lembrarmos do teorema de Pitágoras, também poderemos resolvê-lo com muito pouco esforço.

A moral de todos estes problemas é: em muitos casos, o discernimento que torna um problema geométrico ridiculamente fácil depende de nos lembrarmos de um teorema fundamental da geometria euclidiana.

5.2.2- Onde cabe mais areia?

Usando uma folha comum de papel A4, podemos construir com ela a lateral de um cilindro, bastando apenas escolher enrola-la no sentido da sua largura ou do seu comprimento e, por fim, juntar as bordas com fita adesiva. Esta construção nos fornece duas possibilidades:

Figura 18 – Cilindro de papel



Fonte: RPM, nº68 (2009)

Nestas duas situações possíveis, qual dos cilindros cabe mais areia?

Solução:

Cilindro de altura a : O raio da base desse cilindro é igual a $\frac{b}{2\pi}$. Logo seu volume V_a é igual a $V_a = \frac{ab^2}{4\pi}$.

Cilindro de altura b : O raio da base desse cilindro é igual a $\frac{a}{2\pi}$. Logo seu volume V_b é igual a $V_b = \frac{a^2b}{4\pi}$.

Portanto, a razão entre os volumes é a razão inversa entre as alturas: $\frac{V_a}{V_b} = \frac{b}{a}$. Ou seja, o cilindro de menor altura tem o maior volume, portanto, mais areia que o cilindro de maior altura.

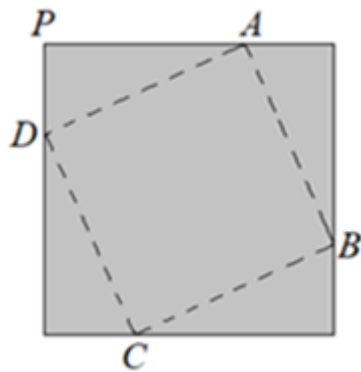
Aos professores:

A simplicidade deste problema esconde a riqueza de conceitos matemáticos que podem ser trabalhados durante seu enfrentamento. Permite ao professor fazer conexões entre figuras de duas e três dimensões quando se lida com a planificação de sólidos geométricos, trabalhar com a capacidade de se fazer estimativas e confrontá-las com as conclusões advindas do uso de fórmulas, conceituar volume, etc. É salutar deixar os alunos construírem os sólidos manipulando as folhas de papel e observar as conclusões a que eles chegam.

5.2.3- Brincando com dobraduras.

Numa folha quadrada de papel de 30cm de lado, branca de um lado e cinza do outro, marcou-se um quadrado $ABCD$ em linhas pontilhadas como na Figura 19. A folha foi dobrada ao longo das linhas pontilhadas e o resultado está mostrado na Figura 20. Onde a parte cinza é um quadrado de área 144cm^2 . Qual é o comprimento do segmento $\overline{PA}$?

Figura 19 – Folha de papel



Fonte: OBMEP (2008)

Figura 20 – Folha dobrada

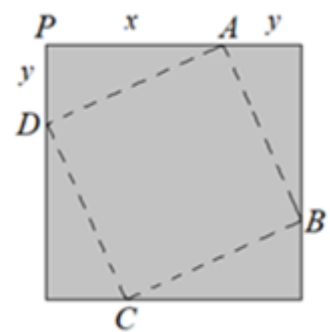


Fonte: OBMEP (2008)

Solução:

Considere x e y como sendo as medidas (em centímetros) de $\overline{PA}$ e $\overline{PD}$, respectivamente. Vemos então que $x + y = 30$ e que o lado do quadrado central da folha dobrada é $x - y$. Como a área desse quadrado é 144cm^2 , segue-se que seu lado mede 12cm, ou seja, $x - y = 12$. Dessas duas equações segue que $x = 21$. O que corresponde ao comprimento do segmento $\overline{PA}$.

Figura 21 – Solução



Fonte: OBMEP (2008)

Aos professores:

Neste problema temos novamente a possibilidade de fazer uso de material simples, barato e acessível (uma folha de papel A4). Os alunos podem ficar inclinados a realizarem uma medição direta (usando uma régua) justificando sua ação por “ser mais fácil assim”. O professor deve enfatizar que a situação se trata de um modelo e que a medição direta nem sempre é viável sendo necessário recorrer aos cálculos para fundamentar o resultado.

5.2.4-Comparando distâncias.

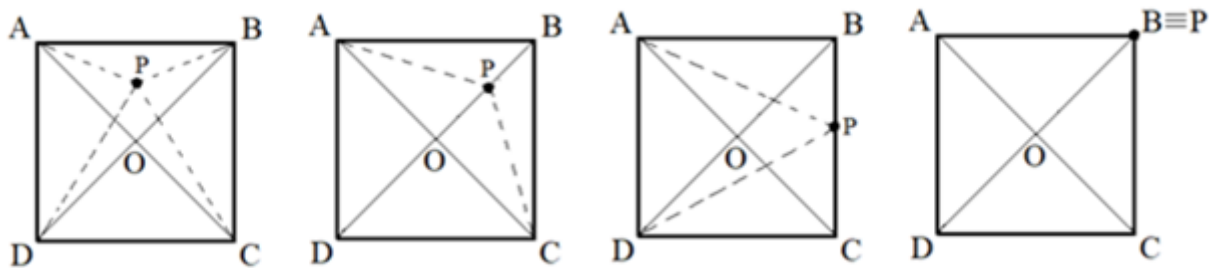
Numa região limitada por um quadrado, ache, justificando, o ponto tal que a soma das distâncias aos quatro vértices do quadrado é a menor possível.

Solução:

Se um ponto P está na região quadrangular $ABCD$ e é diferente do centro O , ponto de encontro das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, temos as desigualdades

$$\overline{PA} + \overline{PC} \geq \overline{AC} \quad e \quad \overline{PB} + \overline{PD} \geq \overline{BD}$$

Figura 22 – Posições possíveis



Fonte: RPM, nº 70 (2009)

Pela desigualdade triangular, uma delas deve ser estrita.

Logo, $\overline{PA} + \overline{PC} + \overline{PB} + \overline{PD} \geq \overline{AC} + \overline{BD}$, no caso de $P \neq O$. Portanto, a soma das distâncias de P aos vértices é a menor possível quando $P = O$.

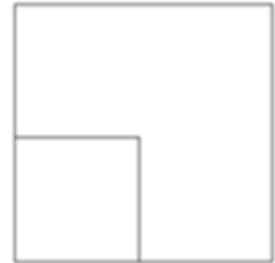
Aos professores:

Este problema torna-se interessante por trazer dificuldades a alunos que estão acostumados a encontrar todos os dados necessários para sua resolução contidos no próprio enunciado do problema. Coloca-se o aluno em uma situação mais similar ao enfrentamento de problemas da vida real. Não há sinais de que tais ferramentas podem ser adequadas exigindo que o aluno percorra todo seu arcabouço de conhecimentos para resolvê-lo. A desigualdade triangular a despeito de ser tema da matemática elementar, surge como ferramenta poderosa para a resolução de inúmeros problemas.

5.2.5-Os dois quadrados.

As medidas em centímetros dos lados de cada um dos dois quadrados são números inteiros. Se o quadrado menor tivesse 2001 cm² a mais de área, os dois quadrados seriam iguais. Quanto pode medir o lado do maior quadrado?

Figura 23 – Quadrados



Fonte: OBMEP (2007)

Solução:

Se a é a medida do lado do quadrado maior e b a medida do lado do quadrado menor, então pelo enunciado temos: $a^2 = b^2 + 2001 \rightarrow 2001 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Como a e b são números inteiros, vemos que $a + b$ e $a - b$ são divisores de 2001. Mas, $2001 = 3 \times 23 \times 29$, segue que $(a + b)(a - b) = 2001 \times 1 = 667 \times 3 = 87 \times 23 = 69 \times 29$. Consequentemente, temos quatro possíveis formas de fatorar 2001 em dois fatores:

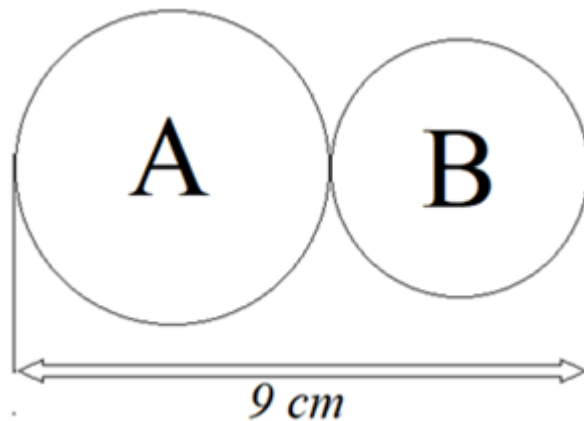
- se $a + b = 2001$ e $a - b = 1 \Rightarrow a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = 1001$
- se $a + b = 667$ e $a - b = 3 \Rightarrow a = \frac{667+3}{2} = 335$
- se $a + b = 87$ e $a - b = 23 \Rightarrow a = \frac{87+23}{2} = 55$
- se $a + b = 69$ e $a - b = 29 \Rightarrow a = \frac{69+29}{2} = 49$

Assim as possibilidades para o lado maior são: 1001, 335, 55 e 49.

5.2.6-Duas rodas.

A roda A gira com 1200 voltas por minuto. A roda B com 1500 voltas por minuto. Calcule o raio das duas rodas.

Figura 24 – Duas rodas



Fonte: OBMEP (2007)

Solução:

Dos dados do problema podemos dizer que, enquanto a roda A dá 12 voltas, a roda B dá 15 voltas, ou equivalentemente, enquanto a roda A dá 4 voltas, a roda B dá 5 voltas. Denotemos por R o raio da roda A e por r o raio da roda B . O comprimento da roda A é $2\pi R$ e o da roda B é $2\pi r$. Logo, o comprimento de 4 voltas da roda A é $4 \times (2\pi R)$ e o comprimento de 5 voltas da roda B é $5 \times (2\pi r)$. Como esses dois comprimentos são iguais então temos que $4R = 5r$. Por outro lado, da figura temos que $2(r + R) = 9$, assim

$$2r + 2\left(\frac{5}{4}r\right) = \left(2 + \frac{5}{2}\right)r = \frac{9}{2}r = 9,$$

Portanto $r = 2$ e $R = \frac{5}{2}$.

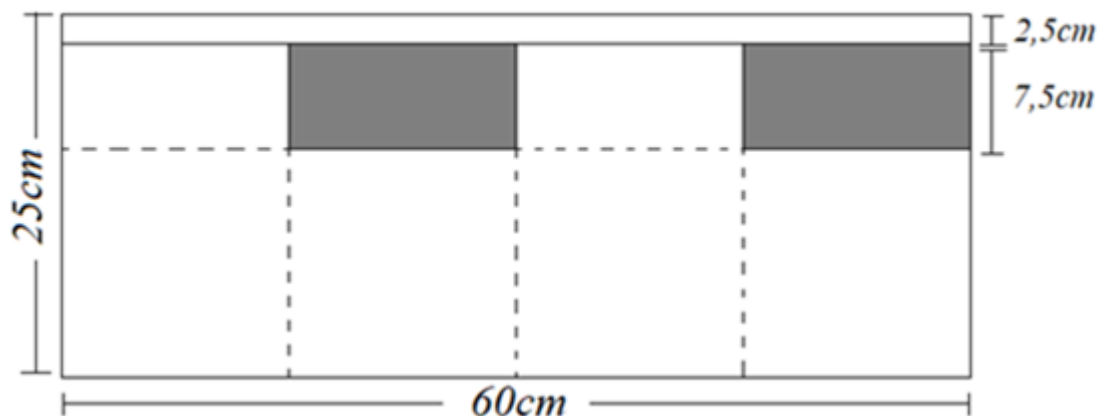
5.2.7-O cubo

Alice tem uma folha de cartolina de 60cm por 25cm . Ela quer cortar a folha para montar um cubo. Qual o cubo de maior volume que ela pode construir?

Solução:

Seja a a aresta do cubo que queremos construir. Como a área lateral do cubo é $6a^2$, devemos ter $6a^2 \leq 25 \times 60$, isto é $a^2 \leq 250$ e assim $a < 16$. Com $a = 15$ temos $4 = 60 \div 15$ quadrados de lado 15cm e sobra um retângulo de 60cm por 10cm .

Figura 25 – Folha de cartolina



Fonte: OBMEP (2007)

podemos cortar um retângulo de 60cm por $2,5\text{cm}$ e os pedaços marcados com  de dimensões 15cm por $7,5\text{cm}$. Assim, na Figura 25, a linha pontilhada indica dobradura e a linha contínua indica corte e com os pedaços de cartolina marcados com  formamos a tampa.

Aos professores:

Aqui temos uma boa oportunidade para a realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos e em “receitas” para resolver exercícios. Trabalhando-se no plano ou no espaço, com figuras planas ou com poliedros, este problema traz a relação entre situações da realidade concreta e ferramentas matemáticas que, em geometria, encontram inúmeros exemplos.

5.2.8-Perímetro e diagonal

O perímetro de um retângulo $ABCD$ é $20m$. Qual é o menor comprimento, em metros, que a diagonal $\overline{AC}$ pode ter?

Solução:

Denotemos por a e b os comprimentos dos lados do retângulo, assim $2a + 2b = 20$. Por outro lado, o quadrado do comprimento da diagonal pode ser calculado usando o teorema de Pitágoras, assim $d^2 = a^2 + b^2$. Como

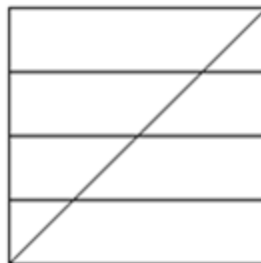
$$\begin{aligned} 2d^2 &= 2a^2 + 2b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2 = \\ &= 100 + (a - b)^2. \end{aligned}$$

Temos que o comprimento da diagonal é mínimo quando $a = b$, neste caso $2d^2 = 100$ e $d = \sqrt{50}$.

5.2.9-Quadro moderno

Para fazer um quadro bem moderno para sua escola, Roberto divide uma tela quadrada em oito partes com quatro faixas de mesma largura e uma diagonal, como na Figura 26. Ele pinta o quadro de azul e verde, de modo que duas partes vizinhas sempre tenham cores diferentes. No final, ele repara que usou mais verde do que azul. Que fração do quadro foi pintada de azul?

Figura 26- Quadro moderno



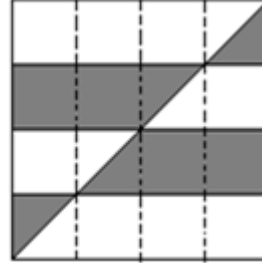
Fonte: OBMEP (2010)

Solução:

Figura 27- Quadro 1



Figura 28- Quadro 2



Fonte: OBMEP (2010)

A Figura 27 mostra como foi pintado o quadrado nas duas cores, mas ainda não sabemos qual dessas partes é azul ou verde. Para isso, dividimos o quadrado em quatro faixas verticais, como na Figura 28, com o que o quadrado ficou dividido em 16 quadradinhos iguais. A parte não hachurada compreende

$$\underbrace{4 \text{ meios quadrados}}_{2 \text{ quadrados}} + 8 \text{ quadrados} = 10 \text{ quadrados}.$$

Logo, a parte não hachurada corresponde a $\frac{10}{16}$ do quadrado, ou $\frac{5}{8}$ e, portanto, a parte hachurada corresponde a

$$\frac{16}{16} - \frac{10}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Assim, a parte hachurada da figura é a que foi pintada de azul e corresponde a $\frac{3}{8}$ do quadro.

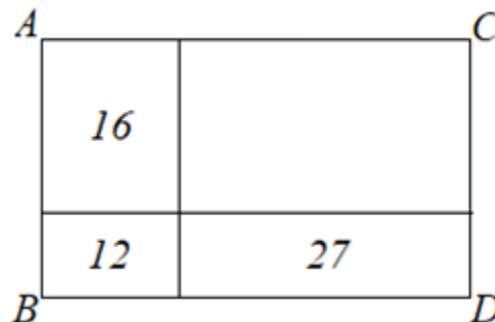
Aos professores:

Neste problema temos o uso da conceituação de fração como partes de uma figura que é a forma como o assunto é introduzido aos alunos do ensino fundamental. O estudante é exigido em sua capacidade imaginativa para decompor a figura em partes iguais bem como seu conhecimento operatório com frações. Pode intrigar os alunos a ausência de dados numéricos no enunciado fazendo-os intuir que a matemática está presente nos mais inusitados lugares mesmo que não seja explicitamente.

5.2.10-Área do retângulo.

Um retângulo $ABCD$ está dividido em quatro retângulos menores. As áreas de três deles estão indicadas na Figura 29. Qual é a área do retângulo $ABCD$?

Figura 29 – Retângulo dividido

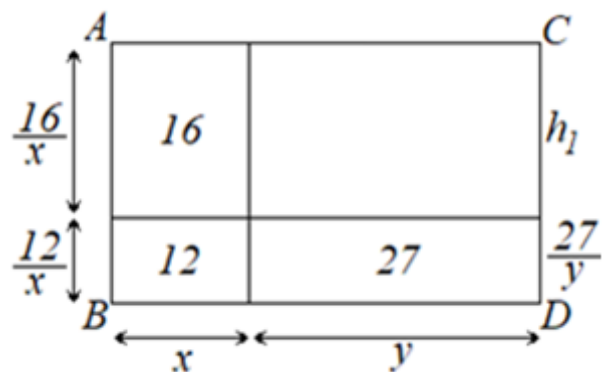


Fonte: OBMEP (2010)

Solução:

Figura 30 – Retângulo dividido(solução)

Sejam x e y lados dos retângulos de áreas 12 e 27, respectivamente, como indicado na Figura 30. Logo os outros lados desses retângulos são $\frac{12}{x}$ (retângulo de área 12), $\frac{16}{x}$ (retângulo de área 16) e $\frac{27}{y}$ (retângulo de área 27).



Fonte: OBMEP (2010)

Assim, o comprimento do retângulo $ABCD$ é $x + y$ e sua largura $\frac{16}{x} + \frac{12}{x} = \frac{28}{x}$.

Claramente $\frac{12}{x} = \frac{27}{y}$, de modo que $\frac{y}{x} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$. A área de um retângulo é produto do

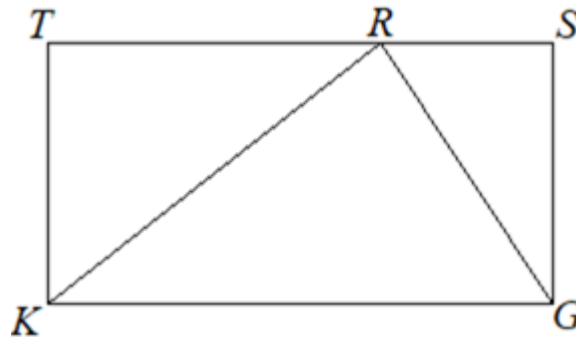
comprimento pela altura. Logo, a área de $ABCD$ é $A = (x + y) \times \frac{28}{x} = 28 + \frac{28y}{x}$.

Assim, $A = 28 + 28 \times \frac{9}{4} = 28 + 7 \times 9 = 91$.

5.2.11-Área do triângulo.

A Figura 31 mostra um retângulo $KGST$ e um triângulo $\triangle KGR$. Os ângulos $\widehat{KRT}$ e $\widehat{RGS}$ são iguais. Se $\overline{TR} = 6$ e $\overline{RS} = 2$, qual é a área do triângulo $\triangle KGR$?

Figura 31 - Retângulo



Fonte: OBMEP (2010)

Solução:

Os triângulos $\triangle TKR$ e $\triangle GRS$ são proporcionais por serem triângulos retângulos com um ângulo agudo igual. Logo, temos $\frac{\overline{RS}}{\overline{TK}} = \frac{\overline{GS}}{\overline{TR}}$. Como $\overline{GS} = \overline{TK}$, segue que $(\overline{TK})^2 = \overline{RS} \times \overline{TR} = 2 \times 6 = 12$, ou seja, $\overline{TK} = 2\sqrt{3}$. Também

$$\overline{KG} = \overline{TR} + \overline{RS} = 6 + 2 = 8$$

Assim, a área do triângulo $\triangle KGR$ mede

$$\frac{1}{2} \underbrace{KG}_{base} \times \underbrace{TK}_{altura} = \frac{1}{2} [8 \times 2\sqrt{3}] = 8\sqrt{3}.$$

5.2.12-Um terreno compartilhado.

Três amigas compraram um terreno quadrado e querem reparti-lo em três terrenos de mesma área, conforme indicado na Figura 32, pois no canto do terreno indicado por A se encontra uma boa fonte de água. A que distância do vértice C do terreno devem ficar os pontos de divisa M e N ?

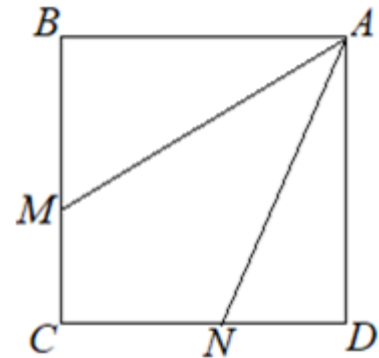


Figura 32 - Terreno

Fonte: OBMEP (2010)

Solução:

Como as áreas dos triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle ADN$ são iguais, temos

$$\frac{1}{2}(\overline{BM} \times \overline{AB}) = \frac{1}{2}(\overline{ND} \times \overline{AD}).$$

Como o terreno é quadrado, temos $\overline{AB} = \overline{AD}$, de modo que $\overline{BM} = \overline{DN}$ e, portanto, a figura $AMCN$ é simétrica em relação à diagonal $\overline{AC}$. Logo, a área do triângulo $\triangle ACN$ é a metade da área do triângulo $\triangle ADN$. Agora, como esses triângulos tem a mesma altura, resulta $\overline{DN} = 2\overline{NC}$ e, por simetria, $\overline{BM} = 2\overline{MC}$. Concluímos que a distância ao vértice C do quadrado dos pontos M e N deve ser $1/3$ do comprimento do lado do quadrado.

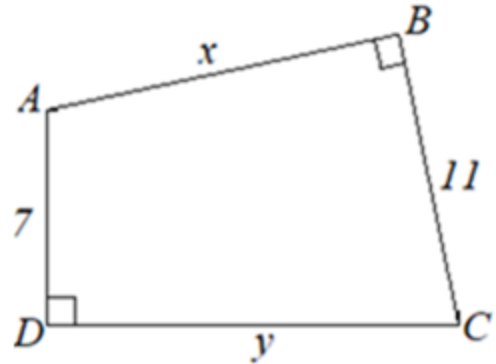
Aos professores:

Um problema onde o professor pode explorar o uso de conceitos e ferramentas matemáticas para solucionar situações que, de fato, poderiam surgir na realidade, uma vez que a natureza do problema é baseada numa circunstância verossímil. Há uma boa possibilidade de que os alunos sejam motivados pelo uso “prático” da matemática elementar aqui presente no uso dos conceitos de área, congruência de triângulos, entre outros.

5.2.13-Um quadrilátero especial.

Figura 33 - Quadrilátero

Os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{CDA}$ do quadrilátero $ABCD$ da Figura 33 são retos e os quatro lados do quadrilátero medem números inteiros que são todos distintos. Se $\overline{AD} = 7$ e $\overline{BC} = 11$, quanto medem os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$?



Solução:

Fonte: OBMEP (2010)

Como os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$ são retângulos e tem a mesma hipotenusa $\overline{AC}$ pelo teorema de Pitágoras temos $x^2 + 11^2 = y^2 + 7^2$, onde $\overline{AB} = x$ e $\overline{DC} = y$. Então,

$$(y - x)(y + x) = y^2 - x^2 = 72 = 2^3 \times 3^2$$

e, portanto, $y - x$ e $y + x$ são divisores de 72. Para cada fatoração de 72, precisamos resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas, como na Tabela 1 a seguir, e identificar os casos em que existem soluções inteiras.

Tabela 1 – Casos de existência de soluções inteiras.

<i>Fator de 72</i>		<i>Medidas de</i>		<i>Observações</i>
$y + x$	$y - x$	x	y	
72	1	—	—	<i>Não há solução inteira</i>
36	2	17	19	<i>Possui solução inteira</i>
24	3	—	—	<i>Não há solução inteira</i>
28	4	12	16	<i>Possui solução inteira</i>
12	6	3	9	<i>Possui solução inteira</i>
9	8	—	—	<i>Não há solução inteira</i>

Fonte: OBMEP (2010)

Assim, há três soluções inteiras para o comprimento dos lados x e y .

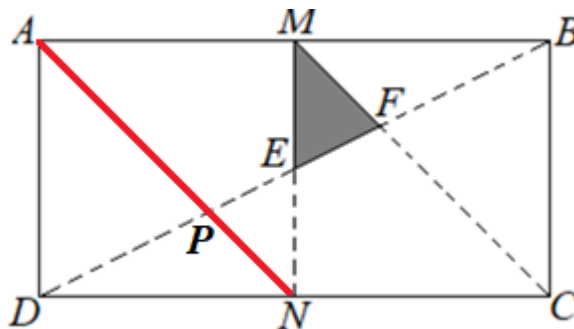
5.2.14-Dobrando papel.

Uma folha $ABCD$ retangular com 1000 cm^2 de área foi dobrada ao meio e, em seguida, desdobrado segundo $\overline{MN}$, conforme a Figura 34. Em seguida, foi dobrada e desdobrada novamente, segundo $\overline{MC}$ e, finalmente, dobrada e desdobrada segundo a diagonal $\overline{BD}$. Calcule a área do pedaço de papel indicado na figura, que é limitado pelos três vincos.

Solução:

Sejam E e F os pontos de intersecção, como na figura 34. Sejam $\overline{AB} = 2a$ e $\overline{BC} = 2b$. Então $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{DN} = \overline{NC} = a$ e $\overline{ME} = \overline{EN} = b$. Traçamos $\overline{AN}$ e denotamos por P o ponto de intersecção dos segmentos $\overline{AN}$ e $\overline{BD}$.

Figura 34 – Folha de papel retangular.



Fonte: OBMEP (2010)

Os segmentos $\overline{AN}$ e $\overline{MC}$ são paralelos uma vez que $AMCN$ determinam um paralelogramo (pois $\overline{AM} = \overline{NC}$ e $\overline{AM} \parallel \overline{NC}$). Como M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{MF} \parallel \overline{AP}$, temos que F é o ponto médio do segmento $\overline{PB}$ (base média do $\triangle APB$), analogamente, P é o ponto médio do segmento $\overline{DF}$ (base média do $\triangle ACF$) e segue que $\overline{DP} = \overline{PF} = \overline{FB}$. Por simetria, verificamos que $\overline{PE} = \overline{EF}$ e, então, $\frac{EF}{FB} = \frac{1}{2}$. Por outro lado, área $(\triangle MBE) = \frac{1}{4} \text{área}(\triangle ABD) = 125$ e, como $\triangle MEF$ e $\triangle MBE$ tem a mesma altura relativamente ao vértice M e a base do primeiro é $\frac{1}{3}$ da base do segundo, concluímos que

$$\text{área}(\triangle MEF) = \frac{1}{3} 125 \text{cm}^2$$

Aos professores:

Novamente um problema que traz a manipulação de material concreto de fácil acesso (folha de papel) que permite “construir” o problema explicitado no enunciado. O cálculo de áreas é um tema vasto dentro da geometria que permite uma grande variedade de situações. Aqui, temos uma problemática onde a aplicação direta da fórmula tradicional para o cálculo de área de triângulos ($A = \frac{b \cdot h}{2}$) é insuficiente motivando os alunos a uma reflexão sobre novos caminhos ou mesmo se o problema é resolvível apenas com o que é apresentado. O professor pode utilizá-lo no intuito de estabelecer novos métodos e relações para o cálculo de áreas.

5.3 PROBLEMAS NUMÉRICOS

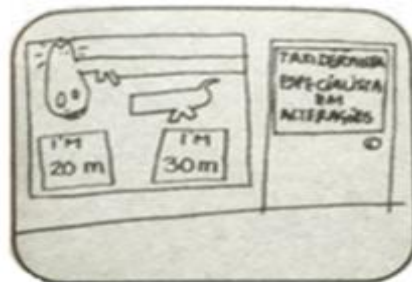
Uma das aptidões mais úteis da cultura matemática é a capacidade em calcular e estimar. Os alunos precisam apropriar-se não apenas do “uso cego” de diferentes maneiras para realizar estes aspectos, mas necessitam também entender os seus fundamentos. É impraticável recordar todos as técnicas, truques e fórmulas empregados no cálculo matemático. Mas é extremamente necessário, e exequível, orientar os educandos a realizarem as coisas por seus próprios meios. A capacidade de desenvolver o raciocínio aritmético rápido e preciso pode ser desenvolvido trabalhando-se com problemas que apresentem dados numéricos específicos como o que agrupamos aqui. Nesta seção reunimos problemas aritméticos que envolvessem números inteiros e racionais aos resultados da adição, subtração, multiplicação e divisão desses números.

5.3.1- O monstro de Loch Ness.

Figura 35 – Monstro de Loch Ness



Bob: Se o comprimento do monstro de Loch Ness for 20 metros mais metade do seu próprio comprimento, quanto mede ele?



Helen: Vejamos, 20 e metade de 20 são 30.

Portanto, ele tem 30 metros



Bob: Helen, estou admirado contigo. Contradisseste-te. Como pode ter ele 20 metros e também 30 metros?

Helen: Tens razão. A única forma de a frase fazer sentido é o comprimento total ser a soma de 20 metros e metade do comprimento, agora é simples. Consegue descobrir o comprimento do monstro?

Fonte: Gardner, M. (1990)

Figura 36 – Monstro de Loch Ness(continuação)



Bob pôs o problema da seguinte maneira: o comprimento do monstro é igual à soma de 20 metros e metade do comprimento do mesmo. Imaginemos o monstro dividido em dois comprimentos iguais. Se o comprimento do monstro for a soma de uma das metades, mais 20 metros, então 20 metros devem ser a outra metade. Portanto, o comprimento total são 40 metros.

Fonte: Gardner, M. (1990)

A equação algébrica é simples. Se x for o comprimento total, então:

$$x = 20 + \frac{x}{2} \rightarrow x = 40.$$

Agora, que podemos ver como a solução é relativamente simples, com que rapidez pode resolver a seguinte variante? Um tijolo num prato de uma balança equilibra exatamente três quartos de um tijolo e três quartos de um quilograma do outro lado. Quanto pesa o tijolo?

O problema do monstro do Loch Ness ilustra a importância de perceber exatamente o que significa uma pergunta antes de tentar responder. Se a sua primeira interpretação de um problema conduzir a uma contradição, ou a pergunta não tem resposta ou você não percebeu bem o problema.

5.3.2- Corrida de gato e rato.

Um gato persegue um rato que tem, inicialmente, uma vantagem de 35 de seus pulos. A cada dois pulos que o gato dá em direção ao rato, este dá 5 pulos; mas os pulos do gato são 3 vezes maiores que os do rato. Quantos pulos o gato deveria dar para alcançar o rato?

Solução:

Seja ' d ' o deslocamento do rato a cada um dos seus pulos. Seja $3d$ o deslocamento do gato a cada um dos seus pulos. A cada 2 pulos, o gato se desloca $6d$; enquanto isto, o rato dá 5 pulos e se desloca $5d$. Portanto, em cada 2 pulos o gato avança d em

relação ao rato, que inicialmente possui uma vantagem de 35 de seus pulos, isto é, $35d$. Se em 2 pulos o gato diminui a distância em relação ao rato de d , então o gato deve dar 70 pulos para diminuir de $35d$, alcançando assim o rato.

5.3.3- O problema do elevador.

Um elevador pode levar 20 adultos ou 24 crianças. Se 15 adultos já estão nesse elevador, quantas crianças podem ainda entrar?

Solução:

Se 20 adultos equivalem a 24 crianças, então 5 adultos equivalem a 6 crianças. Logo, 15 adultos equivalem a 18 crianças e, portanto, podem ainda entrar $24 - 18 = 6$ crianças.

5.3.4- Contando números.

Escrevendo os inteiros de 1 a 1993, inclusive, quantas vezes o algarismo 1 é escrito?

Solução:

Vamos calcular quantas vezes o algarismo 1 ocupa a posição das unidades, das dezenas, das centenas e dos milhares.

- Nas unidades, ele aparece um vez a cada agrupamento de dez inteiros consecutivos.

0001, 0011, 0021, . . . , 0091, 0101, 0111, . . . , 1991,

Portanto, de 0001 até 1990 temos $\frac{1990}{10} = 199$ agrupamento e, conseqüentemente, 199 algarismos 1(um) nas unidades. Acrescentando o algarismo 1(um) pertencente ao inteiro 1991 temos um total de $199 + 1 = 200$ posições.

- Nas dezenas, ele aparece em

0010, 0011, 0012, . . . , 0019,
0110, 0111, 0112, . . . , 0119,
⋮
1910, 1911, 1912, . . . , 1919,

para um total de $20 \times 10 = 200$ posições.

- Nas centenas, ele aparece em

$$\underbrace{0100, 0101, 0102, \dots, 0199}_{100 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{1100, 1101, \dots, 1199}_{100 \text{ vezes}},$$

para um total de $2 \times 100 = 200$ posições.

- Nos milhares, ele aparece em 1000, 1001, 1002, ..., 1993, para um total de 994 posições.

Somando os resultados das quatro posições, obtemos 1594 vezes.

5.3.5- Notas de matemática.

João e Cláudia receberam de volta suas provas de matemática em que os algarismos das notas foram substituídos por símbolos. A nota de João foi $\blacksquare \star$ e a de Cláudia $\star \star$. Juntos eles obtiveram $\star \square \boxplus$. Além disso, Cláudia obteve 13 pontos a mais do que João. Qual foi a nota de cada um?

Solução:

Devemos encontrar os valores dos símbolos na soma

$$\begin{array}{r} \blacksquare \star \\ + \star \star \\ \hline \star \square \boxplus \end{array}$$

As duas notas são números de dois algarismos e a soma deles tem três algarismos, de modo que a soma precisa ser maior do que 100 e menor do que 200. Assim, temos que $\star = 1$. Mas, Cláudia obteve 13 pontos a mais do que João, portanto,

$$\begin{array}{r} \blacksquare \star \\ + 13 \\ \hline \star 1 \end{array}$$

Agora, como a soma de $\star$ e 3 termina em 1, temos que $\star = 8$ e, portanto, $\blacksquare = 6$. Assim, as notas de Cláudia e João são, respectivamente, 81 e 68.

Aos professores:

Nesta situação, quanto na seguinte (Problema 5.3.6), o professor pode surpreender os alunos mostrando como até mesmo daqueles conhecidos exercícios de fixação pode-se formular problemas interessantes e desafiadores que exigem do estudante tanto o conhecimento do algoritmo quanto um raciocínio dedutivo apurado. O educando, ao caminhar em direção a solução, percebe com maior ênfase cada pequeno passo como resultado de uma conclusão lógica que é capaz de descrever.

5.3.6- Racional ou irracional?

O número $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)\sqrt{\sqrt{3} + 2}$ é racional ou irracional? Qual é exatamente seu valor?

Solução:

Observe que, denotando por A , a expressão dada, temos:

$$\begin{aligned}
 A^2 &= [(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)\sqrt{\sqrt{3} + 2}]^2 \\
 &= (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 (\sqrt{3} - 2)^2 (\sqrt{\sqrt{3} + 2})^2 \\
 &= (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 (\sqrt{3} - 2)^2 (\sqrt{3} + 2) \\
 &= (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 (\sqrt{3} - 2)[(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)] \\
 &= (6 + 2\sqrt{12} + 2)(\sqrt{3} - 2)((\sqrt{3})^2 - 2^2) \\
 &= (6 + 2\sqrt{12} + 2)(\sqrt{3} - 2)(-1) \\
 &= (8 + 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \\
 &= 4(2^2 - (\sqrt{3})^2) = 4 \times 1 = 4
 \end{aligned}$$

Assim, $A^2 = 4$ e, portanto, A pode ser 2 ou -2 . Como $\sqrt{3} - 2$ é negativo e os outros dois fatores de A são positivos, temos que A deve ser negativo, ou seja, $A = -2$.

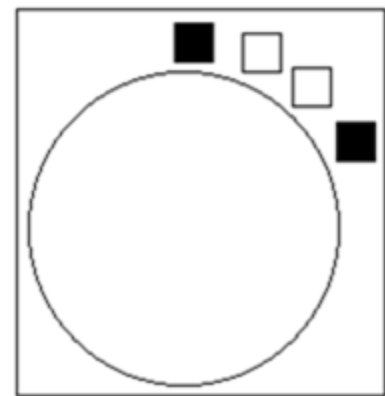
5.3.7- A mesa circular.

Já existem N pessoas sentadas em volta de uma mesa circular com 60 cadeiras. Qual é o menor valor possível para N se a próxima pessoa a se sentar vai ter que se sentar ao lado de alguém?

Solução:

Se a próxima pessoa a se sentar vai ter que se sentar ao lado de uma cadeira ocupada, isso significa que existem, no máximo 2 cadeiras consecutivas desocupadas. (Na Figura 37, as cadeiras ocupadas estão representadas por quadradinhos pretos e as desocupadas por quadradinhos brancos.) Podemos, então, pensar nas cadeiras em grupos ordenados de 3 cadeiras, em que a terceira já está ocupada. Logo, o menor valor de N é $60 \div 3 = 20$.

Figura 37 - Mesa



Fonte: OBMEP (2009)

5.3.8- Soma constante.

Preencha as cinco casas em branco da tabela 3×3 dada na Figura 38 com os números de 3 a 8, sem repeti-los, de modo que as somas dos quatro números escritos nas quatro subtabelas formadas por quadrados 2×2 seja sempre a mesma.

Figura 38- Tabela

1		2
	9	

Solução:

Fonte: OBMEP (2009)

Sejam a, b, c, d, e e f os números que faltam preencher na tabela, ou seja, consideremos

a tabela

1	a	2
b	9	c
d	e	f

, nas quatro subtabelas 2×2 que podemos formar, a saber,

Figura 39-Quatro subtabelas

1	a
b	9

,

a	2
9	c

,

b	9
d	e

,

9	c
e	f

Fonte: OBMEP (2009)

Devemos ter

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + a + b + 9 = a + 2 + 9 + c \\ 1 + a + b + 9 = b + 9 + d + e \\ a + 2 + 9 + c = 9 + c + e + f \end{array} \right. \quad \text{ou seja,} \quad \left\{ \begin{array}{l} b - 1 = c \\ a + 1 = d + e \\ a + 2 = e + f \end{array} \right.$$

Subtraindo a segunda igualdade obtida da terceira, obtemos $1 = f - d$, ou $f = d + 1$. A nossa tabela então é dada como segue

Figura 40-Tabela sendo preenchida

1	a	2
b	9	$b-1$
d	e	$d+1$

Fonte: OBMEP (2009)

Para os números a, b, c, d, e e f temos apenas as opções 3, 4, 5, 6, 7 e 8, sem repetição. Se $a = 3, 4$ ou 5 , resulta $d + e = a + 1 = 4, 5$ ou 6 , o que é impossível para inteiros distintos d e e maiores do que 2. Se $a = 7$, resulta $d + e = a + 1 = 8$ e poderíamos ter $(d, e) = (3, 5)$ ou $(5, 3)$. Se $d = 3$, então $e = 5$, $f = d + 1 = 4$ e, necessariamente, $b = 6$ ou 8 , no entanto, isso é impossível, pois implicaria $c = b - 1 = 5 = e$ ou $c = b - 1 = 7 = a$.

Assim, a não pode ser 3, 4, 5 nem 7, restando, apenas, as alternativas $a = 6$ ou $a = 8$. Usando as relações $a + 1 = d + e$ e $c = b - 1$, obtemos as duas únicas opções de preenchimento da tabela dada, como segue.

Figura 41 – duas tabelas como solução

1	6	2
8	9	7
4	3	5

e

1	8	2
5	9	4
6	3	7

Fonte: OBMEP (2009)

Aos professores:

Este problema permite que o professor explore um pouco a matemática lúdica ao trazer para os alunos toda a historicidade do “quadrado mágico” ao mesmo tempo em que, paralelamente, se trabalha com os conceitos de sistema e verificação das possibilidades por tentativa e erro.

5.3.9- Qual é o número?

Na adição ao lado, letras iguais representam o mesmo algarismo e letras diferentes, algarismos diferentes. Encontre o número $ABCDE$.

$$\begin{array}{r}
 ABCDE \\
 BCDE \\
 CDE \\
 DE \\
 + \quad E \\
 \hline
 AAAAA
 \end{array}$$

Solução:

Note que $5 \times E$ é um múltiplo de 5, e no caso, terminado em A . Como A não pode ser zero, segue que $A = 5$ e E é ímpar. Observe que E não pode ser 1, pois, nesse caso, $4D = 5$, o que é impossível para algarismos. Logo, $E = 3, 5, 7$ ou 9 . Analisemos cada uma dessas possibilidades.

- Se $E = 3$ então $4D + 1$ termina em 5 e, portanto, $D = 1$ ou $D = 6$.
- Se $E = 5$ então $4D + 2$ é par e termina em 5, o que é impossível.

- Se $E = 7$ então $4D + 3$ termina em 5 e, portanto, $D = 3$ ou $D = 8$.
- Se $E = 9$ então $4D + 4$ é par e termina em 5, o que é impossível.

Restam, então, os quatro casos seguintes, de acordo com (D, E) ser dado por $(1, 3)$, $(6, 3)$, $(3, 7)$ ou $(8, 7)$.

$$\begin{array}{r}
 5BC13 \\
 BC13 \\
 C13 \\
 + \quad 13 \\
 \quad 3 \\
 \hline
 55555
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5BC63 \\
 BC63 \\
 C63 \\
 + \quad 63 \\
 \quad 3 \\
 \hline
 55555
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5BC37 \\
 BC37 \\
 C37 \\
 + \quad 37 \\
 \quad 7 \\
 \hline
 55555
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5BC87 \\
 BC87 \\
 C87 \\
 + \quad 87 \\
 \quad 7 \\
 \hline
 55555
 \end{array}$$

1º caso: Se $D = 1$ e $E = 3$, então $3C$ termina em 5 e, como C denota um algarismo, a única opção é $C = 5 = A$, o que não pode ocorrer.

2º caso: Se $D = 6$ e $E = 3$, então $3C + 2$ termina em 5, portanto $3C$ termina em 3. Como C denota um algarismo, a única opção é $C = 1$, resultando $2B = 5$ o que é impossível para um algarismo.

3º caso: Se $D = 3$ e $E = 7$, então $3C + 1$ termina em 5, portanto $3C$ termina em 4. Como C denota um algarismo, a única opção é $C = 8$, resultando $2B + 2 = 5$ o que é impossível.

4º caso: Se $D = 8$ e $E = 7$, então $3C + 3$ termina em 5, portanto $3C$ termina em 2. Como C denota um algarismo, a única opção é $C = 4$, resultando $2B + 1 = 5$ com o que $B = 2$.

Assim, a única solução é $ABCDE = 52487$

5.3.10- Quem é o menor?

Sem usar calculadora, decida qual dentre os números 33^{12} , 63^{10} e 127^8 é o menor?

Solução:

Observemos que:

$$33^{12} > 32^{12} = (2^5)^{12} = 2^{60}$$

$$63^{10} < 64^{10} = (2^6)^{10} = 2^{60}$$

$$127^8 < 128^8 = (2^7)^8 = 2^{56} < 2^{60}$$

Logo, o maior dos números é 33^{12} . Por outro lado, $\frac{127}{63} = 2 + \frac{1}{63}$ garante que

$$\left(\frac{127}{63}\right)^2 = \left(2 + \frac{1}{63}\right)^2 = 4 + \frac{4}{63} + \frac{1}{63^2} < 4 + \frac{5}{63} < 5$$

e, portanto,

$$\left(\frac{127}{63}\right)^4 < 25 < 63$$

Assim, $127^4 < 63^5$, acarretando $127^8 < 63^{10}$. O menor dos três números dados é 127^8 .

Aos professores:

Em matemática, estas perguntas parecem “ingênuas”, mas ajudam os estudantes a aprender como calcular melhor e com mais precisão, e a trabalharem com números “realmente grandes”. É claro que não estamos falando aqui sobre o uso de calculadoras, que não ajudam se queremos ser realmente rigorosos a nossas demonstrações.

5.3.11- Multiplicação com letras.

Na operação dada, as letras a, b e c representam algarismos distintos e diferentes de 1. Determine os valores de a, b e c .

$$\begin{array}{r} a \ b \ b \\ \times \quad \quad c \\ \hline b \ c \ b \ 1 \end{array}$$

Solução:

Como o produto de b por c termina em 1, então $b \times c$ pode ser 21 ou 81 e, portanto, 3×7 ou 9×9 . A única possibilidade de escrever o produto de dois números distintos menores do que 10 é $21 = 3 \times 7$. Assim, temos somente dois casos possíveis.

1º caso: Se $b = 7$ e $c = 3$, deveríamos ter

$$\begin{array}{r} a\ 7\ 7 \\ \times \quad 3 \\ \hline 7\ 3\ 7\ 1 \end{array}$$

mas isso é impossível, pois, $\frac{7371}{3} = 2457$ tem quatro algarismos.

2º caso: Se $b = 3$ e $c = 7$, temos

$$\begin{array}{r} a\ 3\ 3 \\ \times \quad 7 \\ \hline 3\ 7\ 3\ 1 \end{array}$$

e, como $\frac{3731}{7} = 533$, necessariamente $a = 5$.

Logo, a única possibilidade é $a = 5$, $b = 3$ e $c = 7$.

Aos professores:

Assim como no problema 5.3.5, este pode levar os alunos a encarar aqueles exaustivos exercícios de fixação como verdadeiros desafios. O professor deve ressaltar para seus educandos que o enfrentamento do problema exige que se conheça corretamente o algoritmo resolutivo, sem o qual os estudantes ficam desprovidos da base mínima necessária para iniciar seu trabalho de análise. O raciocínio dedutivo é fortemente trabalhado na problemática apresentada nesta situação.

5.4 PROBLEMAS LÓGICOS

Tem-se no desenvolvimento do raciocínio lógico uma das bases para o crescimento cognitivo dos discentes. Dentre os seus muitos benefícios podemos elencar: a organização do pensamento antes da realização de tarefas, desenvolvimento da capacidade de tomar decisões, avanço da aptidão de se ter um pensamento crítico com o intuito de validar argumentos e uma melhoria significativa da agilidade, o que significa menos tempo para o aprendizado de temas complexos.

Nesta seção o foco não está na lógica formal, mas no enfrentamento de problemas que podem ser resolvidos por meio de bom raciocínio sem necessariamente qualquer conhecimento especial de matemática. Existe, é verdade, uma relação íntima entre o tipo de problemas lógicos apresentados aqui e a matemática. Todos os problemas matemáticos são resolvidos através do raciocínio dentro de um sistema dedutivo no qual se encontram incluídas as leis básicas da lógica. Apesar de não ser necessário conhecer e dominar a lógica formal para se resolver qualquer um dos problemas desta seção, o raciocínio informal que os soluciona é essencialmente como o raciocínio que matemáticos e cientistas utilizam em seus trabalhos.

5.4.1- Ligação de Cores.

Figura 42 – encontro

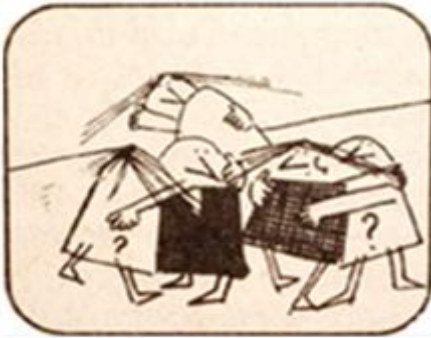


O táxi apanhou três jovens casais e levou-os a uma discoteca. Uma moça estava vestida de PRETO, outra de VERDE e outra de AZUL. Os rapazes tinham roupas das mesmas três cores.

Quando os três casais dançavam, o rapaz de PRETO dançava de costas para a moça de VERDE e falava com ela.

Fonte: Gardner, M. (1990)

Figura 43 – encontro(continuação)

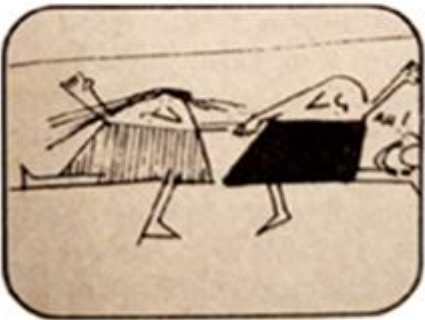


Frank: Não é engraçado, Mabel? Nenhum está a dançar com o parceiro vestido da mesma cor.

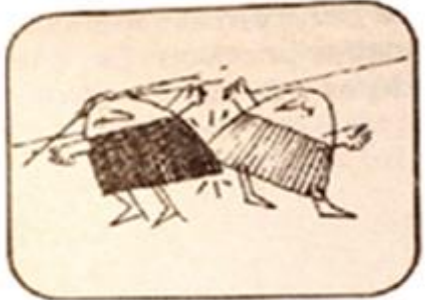
Dada esta informação, consegue deduzir a cor que o parceiro da moça de PRETO está a usar?



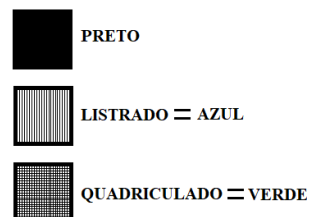
O rapaz de PRETO deve estar com a moça vestida de AZUL. Ela não pode estar de PRETO, senão eles estariam a condizer. E ela não pode estar de VERDE porque o rapaz de PRETO falava com a moça de VERDE quando ela dançava com outro.



O mesmo argumento mostra que a moça de VERDE não pode estar com o rapaz de PRETO nem com o de VERDE. Portanto, ela deve estar com o de AZUL.



Assim, a moça de PRETO está com o rapaz de VERDE e o nosso problema está resolvido, não é?



Fonte: Gardner, M. (1990)

A maior parte das pessoas não acham fácil seguir o raciocínio para a solução deste problema. Não é provável ter-se discernimento sem se compreender completamente o que está a ser declarado em cada afirmação. Uma boa maneira de organizar esta afirmação é classificá-la numa matriz quadrada do tipo mostrado na Figura 44:

Figura 44 – matriz 1

	<i>p</i>	<i>v</i>	<i>a</i>
P			
V			
A			

Fonte: Gardner, M. (1990)

As letras maiúsculas do lado esquerdo da matriz representam as cores dos rapazes: **P** = preto, **V** = verde, **A** = azul. As letras minúsculas de cima representam as cores das moças. Dizem-nos que nenhum rapaz condiz, na cor, com as moças. Podemos, portanto, eliminar três combinações possíveis: **Pp**, **Vv** e **Aa**. Isso indica-se na matriz sombreando as três células correspondentes.

Figura 45 – matriz 2

	<i>p</i>	<i>v</i>	<i>a</i>
P			
V			
A			

Fonte: Gardner, M. (1990)

Como o rapaz de preto dança com a moça de verde, sabemos que ele não está com a moça de verde. Isto permite que eliminemos a célula **Pv**. Agora resta a célula na linha **P**, que prova que o rapaz de preto está com a moça de azul. Indicamos isto pondo um sinal na célula **Pa**. O nosso quadro tem agora este aspecto:

Figura 46 – matriz 3

	<i>p</i>	<i>v</i>	<i>a</i>
P			✓
V			
A			

Fonte: Gardner, M. (1990)

Como sabemos que a moça de azul está com o rapaz de preto, ela não pode estar com nenhum outro. Portanto, podemos sombrear a célula *Va*. Só a célula *Vp* fica aberta na segunda fila. Isto quer dizer que o rapaz de verde está com a moça de preto, pelo que podemos pôr um sinal na célula *p*:

Figura 47 – matriz 4

	<i>p</i>	<i>v</i>	<i>a</i>
P			✓
V	✓		
A			

Fonte: Gardner, M. (1990)

Como a moça de preto está com o rapaz de verde, ela não pode estar com qualquer outro rapaz, pelo que sombreamos a célula *Ap*. Isto deixa aberta apenas a célula *Av*; portanto, o rapaz de azul está com a moça de verde.

O nosso problema foi resolvido:

Figura 48 – matriz 5

	<i>p</i>	<i>v</i>	<i>a</i>
P			✓
V	✓		
A		✓	

Fonte: Gardner, M. (1990)

5.4.2- Um Crime perfeito?

Um crime é cometido por uma pessoa e há quatro suspeitos: André, Eduardo, Rafael e João. Interrogados eles fazem as seguintes declarações:

- André: Eduardo é o culpado.
- Eduardo: João é o culpado.
- Rafael: Eu não sou o culpado.
- João: Eduardo mente quando diz que eu sou o culpado.

Sabendo que apenas um dos quatro disse a verdade, diga se é possível, somente com esses dados, determinar quem foi o culpado. Caso afirmativo, diga quem foi.

Solução:

Considerando a restrição (apenas um dos quatro diz a verdade), conclui-se que:

Eduardo e João dão declarações contrárias. Logo, seguramente, só um deles diz a verdade.

Se Eduardo diz a verdade, então Rafael também diz. O que não pode ocorrer. Logo, Eduardo mente e, conseqüentemente, João diz a verdade.

Se André diz a verdade, então Rafael e João também dizem. Logo, André mente, respeitando a restrição.

No item ii), verificou-se que quem diz a verdade é João, logo todos os outros mentem. Mas se Rafael mente, então ele é o culpado.

Aos professores:

Problemas desse tipo são ricos em oportunizar aos alunos uma proximidade com o *método científico*. O professor deve trabalhar com esta situação-problema de tal forma a fazer o educando compreender que se, durante a análise de uma hipótese, for gerada uma proposição incoerente(incompatível) com qualquer regra do enunciado, ou com qualquer dedução anterior, a hipótese é falsa, e trabalharemos com sua negação, que, com certeza, é verdadeira. Vemos que mesmo não explicitamente apresentadas, os princípios fundamentais da lógica, *princípio da não-contradição* e o *princípio do terceiro excluído*, estão fortemente presentes.

5.4.3- Uma festa com muitos amigos.

Prove que em toda festa (evidentemente com mais de uma pessoa) existem pelo menos duas pessoas com o mesmo número de amigos presentes.

Solução:

Suponha que haja n pessoas na festa, onde $n > 1$. Cada pessoa pode ter um número diferente de amigos na festa. O número de amigos pode variar de 1 (se a pessoa tem apenas amigo na festa) a $n - 1$ (se a pessoa é amiga de todos os outros). Temos n pessoas (elementos) e $n - 1$ possíveis número de amigos (categorias). Se todas as pessoas tivessem um número de amigos diferente, então precisaríamos de n categorias únicas (números de amigos) para acomodar todas as pessoas. No entanto, o número máximo de categorias possíveis é $n - 1$. Se o número de pessoas (elementos) for maior do que o número de categorias (números de amigos), então, pelo menos uma categoria (número de amigos) terá mais de um elemento (pessoa).

Assim, existe pelo menos um par de pessoas que tem o mesmo número de amigos na festa.

5.4.4 – Jogos olímpicos da “adivinhação”.

Um avião regressa dos jogos olímpicos transportando os cinco primeiros classificados numa determinada prova. Eles afirmam:

A) Eu não fui o último.

- B) 'C' ficou em terceiro lugar.
- C) 'A' ficou atrás do 'E'.
- D) 'E' foi o segundo.
- E) 'D' não foi o último.

O primeiro e o segundo classificados mentiram. Qual foi a verdadeira classificação?

Solução:

'A' está dizendo a verdade pois do contrário estaria mentindo e seria último(5º). Mas se está mentindo seria 1º ou 2º. Então 'A' é 3º ou 4º, supondo 3º, então 'B' mente, 'B' é 1º ou 2º. Supondo 1º, verifico que 'D' diz a verdade e 'E' mente. Concluimos que a ordem correta é : *B, E, A, C, D*.

5.4.5 – Uma pesagem inusitada.

Oito bolinhas de gude tem o mesmo tamanho e cor. Sete delas tem o mesmo peso e a restante é mais pesada que as demais. Usando uma balança de dois pratos, como encontrar a bolinha mais pesada, efetuando só duas pesagens?

Solução:

Tomam-se 6 bolinhas quaisquer e colocam-se 3 delas em cada prato, restando 2 bolinhas fora da balança. A partir daí, somente um dos casos seguintes poderia ocorrer:

- (I) Os pratos se equilibram.

Neste caso, seguramente a bolinha mais pesada é uma das duas que ficaram de fora da balança. Assim, basta fazer uma segunda pesagem pondo uma em cada prato para se descobrir qual das duas é a mais pesada.

- (II) Os pratos não se equilibram.

Neste caso, é evidente que a bolinha mais pesada está no prato com o trio mais pesado de bolinhas. Assim, tomam-se duas das bolinhas deste trio para uma segunda pesagem, pondo uma em cada prato e deixando a terceira de fora da balança. A partir daí, somente um dos casos seguintes poderá ocorrer:

- (i) Os pratos se equilibram.

Neste caso, é fácil ver que a bolinha que ficou de fora desta pesagem é a mais

pesada.

(ii) Os pratos não se equilibram.

Neste caso, o problema já está resolvido.

5.4.6 – Um casal muito estranho.

Pedro e Maria formam um estranho casal. Pedro mente às quartas, quintas e sextas-feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Maria mente aos domingos, segundas e terças-feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Certo dia , ambos dizem:

“Amanhã eu vou mentir”

Qual o dia em que foi feita essa afirmação?

Solução:

Com os dados do problema, fazemos a Tabela 9 abaixo, onde ‘V’ representa uma afirmação verdadeira e ‘F’ uma falsa.

Tabela 2 – dias da semana

	D	S	T	Q	Q	S	S
Pedro	V	V	V	F	F	F	V
Maria	F	F	F	V	V	V	V

Fonte: Silva (2000)

Na terça-feira Pedro não mente dizendo: “Amanhã eu vou mentir”.

Na terça-feira Maria mente dizendo: “Amanhã eu vou mentir”.

5.4.7 – Escolhendo às cegas.

No último blecaute, uma pessoa entrou em um quarto, sem enxergar absolutamente nada, e abriu uma gaveta onde havia 20 meias pretas, 15 meias brancas

e 10 meias marrons (e nada mais), misturadas e indistinguíveis ao tato. Qual a quantidade mínima de meias que essa pessoa deve apanhar para que tenha certeza de que apanhou: Um par de meias da mesma cor? Um par de meias brancas?

Solução:

- i) Quatro meias, pois as três primeiras poderão ser cada uma de uma cor diferente; mas a quarta obrigatoriamente formará um par com uma das três primeiras.
- ii) 32 meias, pois as trinta primeiras podem ser somente meias pretas e marrons.

5.4.8 – Procurando a saída.

Sidnelson está perdido dentro de uma assustadora caverna. Consultando um mapa ele encontra exatamente três passagens (1, 2 e 3), como ilustra a Figura 49:

Figura 49 – três passagens



Fonte: Silva (2000)

Para o desespero de Sidnelson, o mapa diz que quem entrar numa passagem onde não esteja a saída não conseguirá voltar, e que cada uma das três passagens possui, além da

numeração, uma única mensagem, mas somente uma das mensagens é verdadeira. Em qual passagem está a saída?

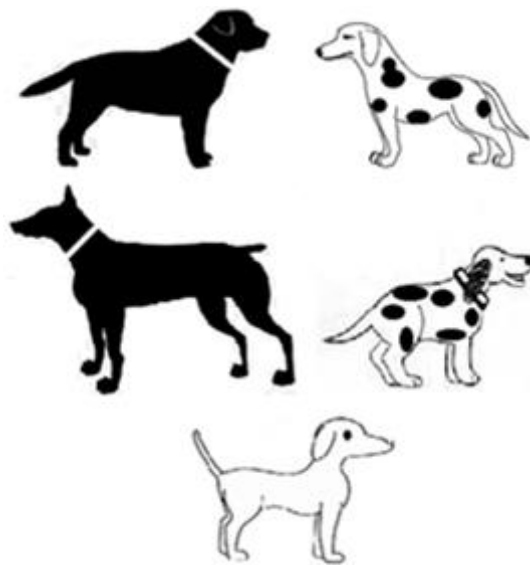
Solução:

Se a saída estivesse na passagem 1, teríamos duas mensagens verdadeiras: as passagens 1 e 2 estariam dizendo a verdade. Se a saída estivesse na passagem 3, teríamos duas mensagens verdadeiras: as passagens 2 e 3 estariam dizendo a verdade. Se a saída estiver na passagem 2, teremos somente uma mensagem verdadeira: as passagens 1 e 2 estarão mentindo. Assim, a saída encontra-se na passagem 2.

5.4.9 – Confusão entre cachorros.

Ambrósio não usa coleira e anda no mesmo sentido que Pafúncio, cujo pelo é igual ao de Jeremias. Jeremias anda no mesmo sentido que Anacleto, cujo pelo é igual ao de Felisberto. Descubra qual é cada um dos cachorros.

Figura 50 - cachorros



Fonte: Silva (2000)

Solução:

Começamos supondo que Ambrósio é o cachorro pintado sem coleira. Obtemos Pafúncio e daí Jeremias. Chegamos a uma contradição com Anacleto e Felisberto.

Ambrósio é então o cachorro branco. Seguindo as condições do problema e supondo que Pafúncio é o cachorro escuro, chegamos à primeira solução:

Tabela 3 - solução 1

Pafúncio	Anacleto
Jeremias	Felisberto
Ambrósio	

Fonte: Silva (2000)

Seguindo as condições do problema e supondo que Pafúncio é o cachorro pintado, chegamos à segunda solução:

Tabela 4 - solução 2

Felisberto	Jeremias
Anacleto	Pafúncio
Ambrósio	

Fonte: Silva (2000)

5.4.10 – Trocando a sorte por lógica.

João não estudou para a prova de matemática; por conta disso, não entendeu o enunciado da primeira questão. A questão era de multipla escolha e tinha as seguintes opções:

- (A) O problema tem duas soluções, ambas positivas.
- (B) O problema tem duas soluções, uma positivas e outra negativa.
- (C) O problema tem mais de uma solução.
- (D) O problema tem pelo menos uma solução.
- (E) O problema tem exatamente uma solução.

João sabia que só havia uma opção correta. Ele pensou um pouco e cravou a resposta certa. Qual a escolha feita por João?

Solução:

- i) Se (A) é correta, então (C) e (D) também o são. Logo, (A) não é correta.
- ii) Se (B) é correta, então (C) e (D) também o são. Logo, (B) não é correta.
- iii) Se (C) é correta, então (D) também o é.
- iv) Mas (D) pode ser correta sem que nenhuma outra alternativa também o seja.
Por exemplo, se a solução for -2 .
- v) Se (E) é correta, então (D) também o é. Logo, (E) não é correta.

Aos professores:

Neste e em outros problemas desta seção, o professor deve orientar os alunos a ler com atenção, tanto enunciado, quanto as alternativas de solução apresentadas para o problema. Primeiro, para que saibamos claramente o que vamos procurar, o que declara as proposições e se podemos chegar a contradições que às refutem; segundo, e principalmente, porque, às vezes, são apresentadas alternativas que nos permitem conclusões preliminares, que, no mínimo, reduzirão a quantidade de hipóteses a serem levantadas e verificadas. Os alunos podem ser levados a “sentir” os benefícios de organizar as informações utilizando tabelas auxiliares que irão preenchendo com suas conclusões parciais.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao apresentar a resolução de problemas como recurso didático ou metodológico buscamos trazer o uso do mesmo de forma diferente daquela que comumente vemos ser utilizada em sala de aula ao qual surge como simples aplicação da teoria exposta, como deveres de classe/casa ou como conclusão do ensino de matemática. Entendemos a resolução de problemas como recurso pedagógico eficaz para angariar o interesse do aluno na aquisição de novos conhecimentos presentes no currículo regular assim como forma de mantê-lo motivado através das atitudes de busca, pesquisa, experimentação de possibilidades, aferição de resultados, compartilhamento de soluções viáveis, etc. Acreditamos então caber ao professor trazer situações para a sala de aula que estejam bem alinhadas tanto com o conteúdo que se deseja trabalhar quanto com o conhecimento prévio do aluno para que este se sinta suficientemente desafiado para tentar e motivado para não desistir diante das dificuldades que possa encontrar. Possa então o professor se afastar do papel de mero “comunicador” ou “apresentador” de algum assunto para tornar-se um “guia” e “motivador” que entende a posição do aluno como co-construtor de sua inerente aprendizagem. O educador então, ao adotar a resolução de problemas como meio de ensino, passa a desempenhar também as funções de mediador, consultor, observador e incentivador, levantando questionamentos a cada ação do aluno permitindo que este construa ou perceba os conceitos matemáticos fazendo-o pensar produtivamente ao mesmo tempo que se instrumentaliza para enfrentar novas situações, passando a identificar e compreender aplicações da matemática dentro e fora do ambiente escolar. Esperamos assim, que as ideias apresentadas neste trabalho sirvam de amparo relativamente ao proveito da metodologia, bem como a difusão e implementação da mesma.

7. REFERÊNCIAS

- ANDRADE, S. Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas. 1998. 295 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.
- BOYER, CARL B. História da Matemática/ Carl B. Boyer; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 27 mai. 2024
- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF: MEC, 2018.
- CHARNAY, R. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, p. 36-47, 1996.
- DANTE, L. R. Didática da resolução de problemas de Matemática. 12ª ed. São Paulo: Ática, 1997
- D'AMBRÓSIO, B. S. Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. Pro-Posições, Campinas, v. 4, n. 1, p. 35-41, mar. 1993.
- GARDNER, Martin - Ah, descobri! jogos e diversões matemáticas. Lisboa: Gradiva, 1990. 289 p.
- HUANCA, R.R.H. A resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática na e além da sala de aula. 198F. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - UNESP. SP, 2006.
- IEZZI, Gelson, Matemática e Realidade: 7ª série/Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antônio Machado. 2ª. Ed. São Paulo: Atual, 1991.
- LESTER, F. K. Tendências e problemas na pesquisa de resolução de problemas matemáticos. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Orgs.). Aquisição de conceitos e processos matemáticos. Nova Iorque: Academic Press, 1983.
- ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas, São Paulo: editora UNESP, 1999.
- POLYA, G. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação ARAÚJO, H. L. de. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POZO, J. I.; ECHEVERRÍA, M. D. P. P. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, Juan Ignacio. A solução de problemas: aprender a resolver, resolver a aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

REDLING, J.P.(2011) A metodologia de resolução de problemas: concepções e práticas pedagógicas de professores de matemática do ensino fundamental, Faculdade de ciências campus de Bauru, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/b2bad2be-af45-4ede-a0a8-08f9c9c0bf2b/content> Acesso em: 21 jul. 2024

REIS, M. M. V., y ZUFFI, E. M. (2007). Estudo de um Caso de Implantação da Metodologia de Resolução de Problemas no Ensino Médio. *BOLEMA*, Rio Claro, v. 20, n. 28, pp.113-138.

RODRIGUES, A., y Magalhães, S. C. (2011). A Resolução de problemas nas aulas de Matemática: diagnosticando a prática pedagógica. *FEOL, Oliveira*, v.1, n.1

ROMANATTO, M. C. (2012). Resolução de problemas nas aulas de Matemática. *Reveduc*, São Carlos, v. 6, n. 1, pp.299- 311.

RPM. Revista do professor de matemática nº 7, p.14, 1985

SANTOS, José Plínio de Oliveira; MELLO, Margarida P.; Murari, Idani T.C. Introdução à Analise Combinatória. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

SANTOS, José Plínio O. e Estrada, Eduardo Luís. Problemas Resolvidos de Combinatória. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

SILVA, Josimar José da. É divertido resolver problemas/Josimar Silva, Luis Lopes. 1ed. – Rio de Janeiro: J. Silva, 2000

SILVA, S. V. P. Ideias/significados da multiplicação e divisão: o processo de aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas por alunos do 5º ano do ensino fundamental. 2016. 170f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016. Disponível em: <https://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/tede/2547/2/PDF%20%20Sheila%20Val%20a9ria%20Pereira%20da%20Silva.pdf> Acesso em: 4 ago. 2024

SMOLE, K. S. Resolução de Problemas e Pensamento Matemático. 2010. Disponível em: <https://pt.scribd.com/document/354064755/A-Resolucao-de-Problemas-Pensamento-Matematico> Acesso em: 8 mar. 2024

SOARES, M. T. C.; PINTO, N. B. Metodologia da resolução de Problemas. 24ª Reunião Anual da ANPED, Caxambu, MG, 2001.

ZANATA, L. A. A. O movimento da matemática moderna, 2010. TCC – Universidade Regional Integrada do alto Uruguai das Missões Uri-Campus de Erechim. Disponível em: https://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/1258.pdf Acesso em: 14 jul. 2024