UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA REDE NACIONAL – PROFMAT

Mário Andreaza Fernandes de Sousa

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2° GRAU COM O USO DO MATERIAL DOURADO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MOSSORÓ – RN

2024

Mário Andreaza Fernandes de Sousa

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2° GRAU COM O USO DO MATERIAL DOURADO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino em Matemática

Orientador: Tony Kleverson Nogueira, Prof. Dr.

Coorientadora: Franceliza Monteiro da Silva Dantas, Profª. Dra.

MOSSORÓ - RN

2024

S719r Sousa, Mário Andreaza Fernandes de .
Resolução de equações do 2° grau com o uso do material dourado nos anos finais do ensino fundamental / Mário Andreaza Fernandes de Sousa. - 2024.
96 f. : il.

Orientador: Tony Kleverson Nogueira.
Coorientador: Franceliza Monteiro da Silva Dantas.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em , 2024.

1. metodologia. 2. equações do segundo grau. 3. material dourado. I. Nogueira, Tony Kleverson, orient. II. Dantas, Franceliza Monteiro da Silva, co-orient. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automáto em conformidade com AACR2 e os dados fornecidos pelo) autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC´s) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2° GRAU COM O USO DO MATERIAL DOURADO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino em Matemática

Defendida em: 29 / 08 / 2024.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
TONY KLEVERSON NOGUEIRA
Data: 07/11/2024 19:02:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Tony Kleverson Nogueira, Prof. Dr. (UFERSA)

Documento assinado digitalmente
FRANCELIZA MONTEIRO DA SILVA DANTAS
Data: 08/11/2024 08:51:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Franceliza Monteiro da Silva Dantas, Profª. Dra. (UFERSA)

Documento assinado digitalmente
WANDERLEY DE OLIVEIRA PEREIRA
Data: 06/11/2024 23:18:36-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Wanderley de Oliveira Pereira, Prof. Dr. (UECE)
Membro Externo

Documento assinado digitalmente
KELYANE BARBOZA DE ABREU
Data: 06/11/2024 22:50:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Kelyane Barboza de Abreu, Profª. Dra. (UFERSA)
Membro Interno

Dedicatória: A Deus e a todos os meus familiares e amigos, especialmente a meus irmãos Solange, Márcio, Alexandre, Roseana, Rosângela, Maxsuel e Moabe, meu pai e à memória de minha mãe, Rita Leite.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, que me guiou e me concedeu forças, coragem e ânimo para seguir firme e chegar ao produto final: o título de mestre, além do conhecimento adquirido.

Agradeço aos meus professores e professoras que, de forma atenuante, contribuíram sobremaneira, auxiliando para que eu vencesse mais um obstáculo e melhorasse meu aprendizado.

Agradeço também aos meus colegas de classe, que sempre estavam ali para ajudar, compartilhar conhecimentos e discutir de questões.

Agradeço aos meus orientadores, que muito me auxiliaram no trabalho com suas experiências e contribuições. E também à professora e colega Ayla Paiva, que me ajudou grandemente.

Aos meus pais, que muito contribuíram para meus estudos, assim como meu pai, que mesmo sendo semianalfabeto nunca deixou de incentivar e mostrar que o melhor caminho para o sucesso seriam os estudos e, em especial, à minha maravilhosa, protetora, guerreira, forte e doce mãe (*in memoriam*), que muito desejava que eu viesse a obter o título de mestre. Então, essa conquista dedico à minha mãe, Rita Leite.

À minha família Fernandes, que sempre esteve me auxiliando com palavras de incentivo, de amor, carinho e companheirismo, e assim como também ao meu colega Anderson, que esteve sempre presente.

E, para finalizar, agradeço a todos que contribuíram de forma direta e ou indireta.

RESUMO

O presente estudo tem como tema a Resolução de equações do 2° grau com o uso do Material Dourado nos anos finais do ensino fundamental. O objetivo é aplicar uma sequência didática utilizando o Material Dourado para determinar as raízes da equação do 2º grau em uma turma do nono ano, do turno vespertino de uma escola estadual, localizada na cidade de Mossoró/RN. O questionamento que orienta este trabalho transcorre na utilização de um recurso que favoreça aos alunos a absorção dos conteúdos matemáticos com mais facilidade, levando em conta os desafios que professores enfrentam, em razão da falta de interesse e dificuldade por parte dos alunos em que se deparam ao tentar compreender os conteúdos matemáticos. Nessa dissertação, exigida para a obtenção do título de mestre em Matemática, foi feita uma pesquisa bibliográfica quantitativa, visando compreender se o processo manipulativo proporciona aprendizagem sobre o conteúdo equações do 2º grau, ou seja, se favorece a compreensão das estratégias de resolução de equações quadráticas, em comparação com a fórmula de Bhaskara. Assim, considera-se que as atividades em torno do Material do Dourado se constituem em um recurso didático viável para quem ensina e quem aprende o conteúdo equação do 2° grau, permitindo uma maior compreensão e visualização do mesmo.

Palavras chaves: metodologia; equações do segundo grau; material dourado.

ABSTRACT

This study explores the use of Golden Material as a tool for solving quadratic equations in the upper grades of elementary school. The primary objective is to implement a didactic sequence that employs Golden Material to determine the roots of quadratic equations in a ninth-grade class, in the afternoon session of a state school in Mossoró/RN, Brazil. The central question addressed is whether this resource facilitates a more accessible understanding of mathematical concepts for students, given the challenges teachers often face due to students' lack of interest and difficulty in engaging with mathematical content. This dissertation, conducted as a requirement for a Master's degree in Mathematics, adopts a quantitative bibliographic approach to assess whether the manipulative process enhances students' understanding of quadratic equations and aids in comprehending strategies for solving them, particularly in comparison to the use of the Bhaskara Formula. The findings indicate that incorporating Golden Material into instructional practices offers an effective teaching resource for both educators and students, fostering a deeper understanding and visualization of quadratic equations.

Key words: methodology; quadratic equations; golden material.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Muitos consideram a Matemática uma disciplina difícil e sem muita utilidade no dia a dia. Porém, a matemática é importante e está presente em nossas vidas de várias maneiras, seja na contagem de moedas presenteadas pelo avô ou no percentual de desconto em uma promoção ou, ainda, para saber a carga máxima suportada por uma ponte. A matemática se faz presente em nossas vidas de várias formas e nas mais variadas situações.

Geralmente, as dificuldades de absorção e compreensão da matemática se iniciam com o estudo de Álgebra. Através de observações na prática docente é possível perceber a dificuldade que os alunos possuem a partir do momento que as letras passam representar valor numérico dentro da Matemática. Isso ocorre a partir do 6º ano do Ensino Fundamental II (EF/II) e nos anos seguintes vai aprofundando e, infelizmente, '*complicando*', tornando-se assustadora, incompreensiva e distante da maioria dos alunos. Ao fim do EF/II, um número significativo de alunos nutre uma antipatia pela Matemática e isso se traduz no péssimo rendimento detectado no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – PISA (2022), que atingiu em Matemática apenas 379, diante de 472 como média dos países da Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico – OCDE.

Em paralelo a ampliação do uso da Álgebra nas séries do EF/II, há o crescimento da aversão e o aumento das dificuldades na aprendizagem da matemática. Desta forma, o não entendimento do princípio das noções algébricas ocasiona a falta de aprendizagem das equações do 1° e 2° graus e a dificuldade a assimilação e compreensão desses conteúdos e de outros que venham a utilizá-los (Silva *et al.*,2018).

É por isso, que se torna imprescindível, planejar, criar meios em que o aluno venha compreender, apreender esses conteúdos, desmistificando-o e fazendo a aprendizagem acontecer de forma mais significativa. O uso de material concreto, nesse contexto, se torna uma ótima ideia, ao se entender que a manipulação de material concreto se torna um recurso excelente a ser utilizado como facilitador na aprendizagem.

Por constituir um material concreto, o Material Dourado, idealizado com o objetivo de auxiliar o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração decimal-posicional, as operações fundamentais etc., e posteriormente indicado para o estudo das equações do 1° e 2° graus, consiste num recurso pedagógico que pode ser excelente no estudo desses conteúdos por se transfigurar lúdico.

Diante das dificuldades na aprendizagem das equações, neste trabalho, nos dedicamos a explorar o conteúdo Equações do 2° grau através da manipulação do Material Dourado, a fim de determinar suas raízes. Utilizaremos uma aplicação lúdica, assim o aluno tem a possibilidade de, brincando com as peças do material e sem usar papel e caneta, conseguir determinar as soluções das equações quadráticas.

Almejamos chegar à resposta para a seguinte questão:

Será que o uso do Material Dourado para determinar as raízes da equação do 2° grau contribuirá para uma aprendizagem mais significativa desse conteúdo pelos alunos do 9º ano?

Este trabalho tem como objetivo geral aplicar uma sequência didática utilizando o Material Dourado para determinar as raízes da equação do 2° grau em uma turma do 9° A ano, do turno vespertino, da escola ...

E como objetivos específicos:

- Apresentar o contexto teórico e histórico sobre o conteúdo das raízes da equação do 2° grau;
- Facilitar a fatoração de polinômios e a manipulação de equações de 2° grau com os casos notáveis, assim como na resolução de problemas que envolvam esses conteúdos;
- Analisar os resultados do uso do Material Dourado no conteúdo de raízes da equação do 2° grau.

Para desenvolver esse trabalho, contamos com a colaboração dos alunos da turma do 9° A, do turno vespertino, da escola ... ao longo de 20 aulas, sendo cada uma com duração de 50 minutos, com início no dia 08 de setembro de 2023 e término em 02 de outubro do mesmo ano.

Assim, estruturamos o trabalho que, por sua vez, começamos a introdução com uma pequena contextualização do tema, tendo por base o uso do Material Dourado na determinação das raízes de equação do 2° grau, seguido dos objetivos geral e os específicos e a metodologia.

No capítulo dois, encontram-se os pressupostos teóricos que fundamentam nossa pesquisa. Nele, trazemos uma abordagem do Ensino de Matemática hoje na Educação básica, destacando o baixo desempenho dos estudantes em Matemática, registrados nos documentos oficiais: Exame Nacional de Desempenho de Estudantes – ENADE, Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB, PISA, etc., os egressos do curso de licenciado em Matemática, as aulas de matemática na educação básica, a evasão escolar e o projeto Nacional: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, criado desde 2005 e que vem mostrando excelentes resultados. Trazemos também algumas considerações sobre a utilização de material concreto como auxílio no ensino e aprendizagem de matemática, que, segundo Baerle *et al.* (2023), é uma excelente ideia a ser utilizada, assim como também a escolha do Material Dourado como uma alternativa viável no ensino das resoluções de equações do 2° grau, foco do nosso estudo.

Além disso, apresentamos a biografia da criadora do Material Dourado, a médica e educadora Maria Montessori, seus esforços e feitos na área da educação; finalizando o capítulo falando do Ensino de Equação do 2° grau do 9° ano EF/II, verificado através das análises das pesquisas realizadas por Pereira (2017), Brito *et al.* (2019) e Pereira *et al.* (2023), onde deparamos com um ensino voltado para aulas tradicionais, expositivas e resolução de imensas listas de exercícios; assim como também aulas voltadas a situações-problema do cotidiano do aluno com a finalidade da contextualização e aplicação dos conceitos de equação do 2° grau, porém, com menor frequência. As orientações da Base Nacional Comum Curricular – BNCC sobre o ensino e a aprendizagem de equações do 2° grau nos anos finais do EF/II, também foram mencionadas.

No terceiro capítulo, dedicamos a equação do 2° grau, com sua definição, condição de existência, coeficientes e suas raízes, além de uma breve história da fórmula resolutiva da equação do 2° grau, iniciando com povos da civilização egípcia, passando pelos mesopotâmicos, europeus e finalmente chegando à atualidade, com a dedução da famosa fórmula de Bhaskara, encontrada hoje nos livros de matemática do 9° ano do EF/II. Ainda mencionamos o ensino de equação do 2° grau utilizando o Material Dourado, a apresentação de suas peças, adaptação e aplicação do mesmo na determinação das raízes das equações do 2° grau. Também se elencaram diversos exemplos, exibidos através de desenhos demonstrativos e ilustrações de resoluções das equações quadráticas e a demonstração da fórmula de Bhaskara, mediante o manuseio do Material Dourado e do entendimento do quadrado da soma de dois termos e da fatoração do trinômio quadrado perfeito.

Dentro do capítulo seguinte, expomos a metodologia da investigação, os caminhos da pesquisa, a descrição da mesma, a escola e a turma, a unidade temática, a investigação e estratégias da pesquisa. A intervenção se deu através de aulas expositivas teóricas e práticas.

Por constituir uma sequência didática, no quinto capítulo, falamos da proposta do material, que se deu com uma aula introdutória, manuseio individual ou em grupo do Material Dourado para resolver as equações quadráticas e, assim, obter as raízes das equações, seguida de uma primeira atividade avaliativa bimestral. Posteriormente à atividade avaliativa, houve outra aula introdutória seguida de uma segunda atividade avaliativa bimestral desenvolvida em dupla.

Os resultados do rendimento das atividades avaliativas executadas pelos alunos foram coletados e exibidos através de gráficos de barras, além de suas discussões.

Por fim, nas considerações finais, realizamos uma análise dos resultados e buscamos responder ao nosso questionamento inicial e aos nossos objetivos, geral e específico, verificando se foram atingidos e ao desejo de criarmos uma cartilha para ser entregue nas escolas de Mossoró, que se tornou objeto de estudo para realizações de trabalhos futuros.

2 FALANDO SOBRE A PROBLEMATIZAÇÃO: PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

O ensino de Matemática no Brasil vem sendo discutido especialmente no requisito aprendizagem. Apesar das mudanças metodológicas no decorrer dos anos, os alunos ainda continuam com muitas dificuldades na absorção dos conteúdos da Matemática (VISMARA et al., 2020).

O ensino dessa disciplina, na maioria das vezes, ocorre de maneira abstrata e mecânica, através da memorização de regras, conceitos e da resolução de um número repetitivo de exercícios. O conteúdo de álgebra é um dos mais temidos. As letras aterrorizam sobremaneira os alunos.

O uso de material concreto é uma boa alternativa para se trabalhar conteúdos que envolvem incógnitas, tais como: equações do 1° e 2° graus. Um material concreto usado na resolução de equações do 2° grau, assunto trabalhado no 9° do EF/II, é o Material Dourado, onde iremos utilizá-lo como uma proposta didática.

2.1 O ENSINO DE MATEMÁTICA HOJE

O Ensino de Matemática sempre foi um desafio para professores diante das dificuldades de aprendizagem dos alunos, um problema bastante debatido e preocupante, em que suas causas podem estar relacionadas a fatores exteriores ao indivíduo ou inerentes a ele, decorrendo de situações adversas à aprendizagem como: déficit sensorial, abandono escolar, baixa condição socioeconômica, problemas cognitivos e neurológicos etc. Abaixo, dispomos de análises de alguns artigos e dados do Ministério da Educação e Cultura – MEC sobre o ensino de Matemática hoje no Brasil.

Os rendimentos dos nossos alunos em Matemática ao participar das avaliações nacionais, como Prova Brasil, Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB, Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, Exame Nacional de Desempenho de Estudantes – ENADE, e internacionais como o PISA, entre outras, têm demonstrado um baixíssimo desempenho matemático. Só para termos uma ideia de nossa fragilidade em matemática, na última edição do PISA, em 2022, ficamos na 65ª posição, num ranking de 81 nações.

São vários os fatores que levam o ensino de Matemática a níveis tão baixos, alguns teóricos da Educação: Druck (2003) e Lorenzato (2010); e Educadores Matemáticos como Lemos (2009) e Barasuol (2006) afirmam que faltam metodologias adequadas, falta didática que atenda à diversidade de personalidades e carências cognitivo-afetiva dos alunos. Todavia, Elon (1995), Pressi *et al*, [s.d.], Bassanezi (1999) e Cruz (2013), acham que o maior problema é a falta de domínio dos conteúdos por parte dos professores que ministram aulas de Matemática.

De qualquer modo, no mínimo uma situação é unânime: alguma coisa tem que ser feita para amenizar essa situação em que um considerado número de alunos termina o ensino básico sem dominar nem mesmo as quatro operações básicas (Oliveira, 2013).

Diversos pesquisadores e professores apresentam registros das causas e apontam caminhos que tendem a reduzir esses índices. Druck (2010, p.176) aponta a má formação dos professores dos anos iniciais como um dos motivos por essas dificuldades e esclarece:

> Em geral, os professores recebem durante sua formação uma overdose de teorias pedagógicas, sociologia da educação e psicologia infantil, em detrimento de conteúdos matemáticos e de boas práticas de ensino. A aritmética elementar, raiz de todo o conhecimento matemático, é estudada superficialmente, e os gregos Pitágoras, Thales, Arquimedes e outros estão expulsos das salas de aula pelo pouco domínio da geometria por grande parte dos professores [...] (Druck, 2010, p.176).

Druck (2010) justifica que um dos destacáveis problemas na formação inicial dos professores das séries iniciais é o excesso de disciplinas teóricas em detrimento de uma formação mais direcionada para o domínio de conteúdo.

Indiscutivelmente, quem apresenta, por menor que seja, uma certa habilidade com a matemática, sabe que uma boa compreensão dos conteúdos a serem ministrados em sala de aula é uma condição importante e fundamental para orientar e mediar o processo de ensino e aprendizagem de matemática.

De fato, ninguém pode ensinar aquilo que não sabe ou não aprendeu, muito menos será capaz de propiciar uma aprendizagem relevante de conteúdos que ele mesmo não domina (Oliveira, 2013).

Lemos (2009) e Cruz (2013) também puderam observar que os egressos dos cursos de Licenciatura em Matemática, em razão da formatação do curso, que enfatiza o aprendizado de conjecturas, de teoremas e corolários em detrimento do pedagógico e das experiências, acabam que exibindo dificuldades na articulação do fazer professor, por não terem construído, na formação inicial, habilidades/saberes que assegurem o desenvolvimento das competências profissionais relevantes.

O Bassanezi (1999, p. 16) contemporiza relativamente desses pensamentos e se manifesta expondo-se da seguinte maneira:

> [...] a deficiência do professor de matemática não está no conjunto de conteúdos matemáticos aprendidos - muitas vezes, ele estudou matemática de modo excessivo, tendo como referência os conteúdos que ele precisa ensinar nos cursos do ensino fundamental e médio, mas sim na essência do processo que orientou sua formação. Isto é, em geral, as disciplinas são tratadas de modo independente uma das outras, consideradas como prontas/acabadas, sem origem e sem futuro e, quase sempre apresentadas/desenvolvidas sob o regime formalista dos teoremas e suas demonstrações; as aplicações, quando sugeridas, só dizem respeito ao próprio conteúdo recém-ensinado. Em resumo, a matemática trabalhada, num programa tradicional da Licenciatura, tem sido inteiramente privada de originalidade/ criatividade e apresenta-se desvinculada da fonte geradora dos conteúdos que a constituem (Bassanezi, 1999, p. 16).

Nessa ocasião, o autor apresenta a mesma opinião quando admite que há problemas na formação do professor, porém não acredita que ocorra carência no que diz respeito aos conteúdos, mas sim, na sua qualificação/execução didático-pedagógica baseadas em uma conduta tradicional, formalista de expor os conteúdos em sala de aula.

Os professores por apresentarem dificuldades no domínio dos conteúdos matemáticos acabam que recorrendo a técnicas e criações que afetam cada vez mais este cenário acarretando aulas monótonas, cheias de fórmulas e sem sentido, e como desfecho a consequente falta de interesse e baixíssimo nível de conhecimento matemático dos alunos, como afirma Druck (2010, p. 176).

Barasuol (2006, p.2) aponta que educadores matemáticos têm mostrado frequentemente que a matemática que está se ministrando em sala de aula é sem eficácia para o aluno, é irrelevante para a sua vida, é retrógrada para a época em que vivemos, o que acaba deixando os alunos desestimulados. Com efeito, o cotidiano do trabalho em sala de aula é uma investida de transmissão de um conhecimento fora do interesse dos alunos e isso muitas vezes causa insatisfação nos professores. Segundo Oliveira (2013, p. 19), a matemática está sendo trabalhada distante do cotidiano do aluno, de situações do seu dia a dia, problemas que não dão sentido aos conteúdos e, especialmente, deixando a desejar quanto ao conhecimento matemático que deveria adquirir, objetivando resolver problemas reais de seu cotidiano.

Em vista disso, Druck (2003) exibe algumas inquietações quanto à contextualização ao considerar que muitos professores não detém o pensamento matemático o suficiente para determinar sobre qual matemática está por traz de alguma situação concreta. É de grande desejo da autora o trabalhar a matemática no contexto do aluno, contextualizando, criando propostas didático pedagógicas das mais variadas, porém, adequadas ao seu mundo.

Outro ponto importante para destacar é a forma como muitos professores e matemáticos estão abordando alguns conteúdos matemáticos nas suas aulas. Segundo Lima *et al*. 2001, no seu estudo sobre os principais livros didáticos de Matemática adotados no Ensino Médio, verificou-se que a maioria desses livros exibe, muitas vezes, enunciados, definições que não são demonstrados nem justificados, impedindo assim o desenvolvimento do pensamento crítico, do raciocínio e até mesmo o aprender por parte do aluno.

O Romanatto (2004) trata especificamente que no ensino da Matemática escolar, há a utilização do livro didático, onde o professor tenta abordar, geralmente, todos os conteúdos e temas que são apresentados nas suas respectivas páginas, explorando a partir de exercícios ou listas de exercícios com respostas padronizadas e pré-determinadas, impedindo que professores e alunos estabeleçam um debate ou uma construção dialogada.

Efetivamente, a vivência tem apontado que um ensino baseado na transmissão de conteúdos, onde o aluno recebe passivamente os conteúdos e os reproduz, seguindo as regras e procedimentos, não garante uma aprendizagem ativa. Não importa a área, porém o aluno tem que participar do processo e da construção do conhecimento, tendo o professor como um mediador, aquele que orienta num contexto de erros, de acertos e assim caminhando para a aprendizagem (Oliveira, 2013).

Para potencializar a concepção, em que o aluno tem que construir seu conhecimento através da intervenção, mediação do professor, Chaves e Bisognim ([s.d], p. 1) faz a seguinte consideração:

> Critica-se, no entanto, os conteúdos transmitidos exclusivamente de maneira tradicional. Para essa pedagogia, o aluno atento à explicação e o professor apropriado de uma didática coerente e clara, são fatores

> necessários e suficientes para que se possa assegurar e efetivar o processo de aprendizagem. A prática, no entanto, tem mostrado que não é tão simples assim, que a realidade de uma sala de aula evoca, muitas vezes, por um fazer diferenciado (Chaves e Bisognim [s.d], p. 1).

Podemos perceber que não importa qual método de ensino que o professor venha utilizar, porém seu objetivo será alcançado, quando o professor se conscientizar do seu papel histórico-social na sala enquanto orientador e mediador no processo ensino e aprendizagem, preocupado com a qualidade da educação e que venha a indagar e não concordar com instruções de uma “organização” gradativamente assistencialista e pedante, que visa a quantidade em detrimento da qualidade.

Assim, nenhum método, nenhuma instrução de natureza pedagógica terão êxito se o nosso aluno não estiver estimulado, comprometido com a sua aprendizagem, ou seja, ele tem que exercer sua função de aluno na absorção e construção do conhecimento (Oliveira, 2013, p. 19).

Outro ponto a considerar é a evasão escolar, em que alunos deixam de frequentar a escola das mais variadas situações: por falta de interesse, problema familiar, dificuldades em alguma disciplina e etc. Luscher e Dore (2011, p. 150), afirmam nesse sentido que:

> A evasão escolar tem sido associada a situações muito diversas. Pode se referir à retenção e repetência do aluno na escola; à saída do aluno da instituição; à saída do aluno do sistema de ensino; a não conclusão de um determinado nível de ensino; ao abandono da escola e posterior retorno (Luscher e Dore, 2011, p. 150).

Em consonância com o que se está sendo dito, dados do censo escolar de 2023 do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INEP e Ministério da Educação – MEC, afirmam que a evasão escolar ainda é preocupante e que se acentua entre os jovens. Segundo estudo do Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento – PNUD e a Federação das Indústrias do Estado do Rio de Janeiro/ Serviço Social da Indústria - Firjan SESI a evasão escolar no Ensino Médio atinge meio milhão de jovens por ano no Brasil, em um país com Índice de Desenvolvimento Humano – IDH, considerado alto, perpetuando assim a desigualdade. Segundo o jornal G1 (2017), o Brasil se destaca com a menor média de anos de estudos dentre os países da América do Sul.

Quando se refere ao abandono escolar nos anos iniciais e finais do ensino fundamental, percebe-se uma estagnada, tendo em 2019 (1,2%) passando para 1,0% e atingindo em 2022 uma taxa de abandono escolar de 1,1% (Fundação Abrinq, [s.d.]).

No ano de 2022 houveram, em todo o Brasil, 2 873 019 matrículas realizadas no nono ano do EF/II (Brasil, 2023a), destes, houve uma taxa de abandono mais reprovação de 7,1%, sendo 4,8% de reprovação e 2,3% de abandono escolar (Brasil, 2023b).

Esses dados apontam o quanto é preocupante esta realidade da evasão e abandono escolar no Brasil, e como consequência, isso vem só afligir ainda mais o sistema de educação e aumentar o número de analfabetismo e a pobreza.

Os maiores usuários da escola pública no nosso país são as famílias de baixa renda, e que sabem, que o caminho para um bom sucesso profissional é um bom desempenho escolar, uma boa formação acadêmica. Todavia, nem todos tem a mesma oportunidade de estudar, de se habilitar em uma profissão digna e aperfeiçoar. Apesar dos programas de governo, tem-se que aprender a criticar e reivindicar mecanismos para que se tenha cada vez mais uma educação melhor. A falta de compromisso dos gestores tem gerado uma situação degradante na maioria das escolas públicas.

Um projeto Nacional, criado desde 2005, que vem mostrando excelentes resultado é a OBMEP, que envolve milhões de alunos e milhares de professores e escolas – em 2023, a OBMEP teve cerca de 18,3 milhões de alunos inscritos, em 55,3 mil instituições de ensino e em 5.563 cidades - alcançando 99,87% dos municípios brasileiros (OBMEP, 2024).

Druck (2010) diz que existem vários fatores que levam uma enorme adesão das escolas à OBMEP, e que uma das razões é o compromisso subentendido em que a OBMEP não seja usada como qualquer tipo de avaliação. Acredita-se que uma das maiores contribuições da OBEMP tenha sido enxergar o aprender e o ensinar matemática de forma mais ampla e cativante, proporcionando às escolas a criação de um clima "tempestuoso" para motivar alunos e professores em torno da matemática, introduzindo algo autêntico e interessante para dentro das salas de aula, e criando uma conexão direta entre as escolas públicas e as universidades filiadas, através de bolsas de estudos para os alunos medalhistas.

O projeto da OBMEP está sendo bem sucedido pela importância dos seus princípios dentro das escolas: incentivar e admitir a sua importância independentemente de avaliações; oferecer matemática de excelente qualidade através de materiais didáticos visuais e impressos que são produzidos pela comissão acadêmica do Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA realmente engajada com a qualidade e melhoria do ensino público, podendo muitas vezes esse material ser utilizado como auxílio nas aulas diárias de Matemática (Druck, 2010).

Percebe-se ao longo da história o quanto a Matemática tem sido utilizada na vida cotidiana do ser humano, em contrapartida, ela se tornou uma das mais temidas das disciplinas da grade curricular, por acharem difícil e complicada. No pensamento de Evangelista (2014, p. 41), "os alunos consideram a matemática chata e misteriosa, que assusta e causa pavor, e por consequência, o aluno sente medo, dificuldades e vergonha por não a aprender".

Como resultado dessa situação, acaba que, muitas vezes, ficando com bloqueio ao aprendizado, com aversão a disciplina de Matemática, podendo levar a desistência. O educador deve entrar nesse processo desmistificando, mostrando para este aluno que a matemática não é desagradável, difícil ou irritante.

É importante ressaltar que a Matemática deve ser trabalhada, compreendida de forma mais contextualizada, onde seus teoremas e proposições devem ser conceituados com palavras do cotidiano do sujeito, dessa maneira, o aluno passa a ter um senso crítico de sua realidade, adquirindo a capacidade de compreensão, resolução de problemas, bem como condições e habilidades para solucionar problemas surgidos no dia a dia.

Outro ponto em questão é a metodologia avaliativa das escolas, em que sua grande maioria se dá por meio de provas e notas que são atribuídas aos alunos. Tal critério de avaliação deve ser analisado quando usados isoladamente de outros meios de avaliação, uma vez que nem sempre por si só exibe resultados justos, coerentes e eficazes.

Também algo que se deve comentar é sobre os planejamentos anual e bimestrais e seus objetivos, além da análise dos pontos em que os alunos precisam melhorar.

Enfim, na ação de ensinar, não há enigma nem milagre. Um professor deve passar a matéria com prazer, com eloquência, que possua destacáveis domínio do assunto e que tenha um desejo de transmitir esse conhecimento, além de se interessar pelas dificuldades dos seus alunos, tentar entender por que não estão compreendendo, se situar no lugar deles e entender seus dilemas e ajudar a resolvê-los. Não existe caminhos concreto, a única saída é o empenho honesto e o trabalho diário (RPM, 1995).

2.2 A UTLIZAÇÃO DE MATERIAL CONCRETO

A Matemática é usada diariamente por nós, quer seja para contar moedas recolhidas do bolso, para somar os gastos mensais de casa ou para resolver os problemas da sala de aula de matemática; em qualquer local que seja estaremos fazendo uso de termos ou conceitos da matemática.

Baerle *et al*. (2023, p.109) corrobora, declarando que

> [...] não é possível fugir desses números incríveis que constituem nossas vidas em muitos sentidos no cotidiano, pois são eles que nos levam a dimensionar a qualidade de vida, o desempenho escolar, os gastos, as possibilidades de investimentos, entre tantas outras situações às quais estamos envolvidos (Baerle *et al*., 2023, p.109).

Em virtude disso, reconhecemos a importância da Matemática, pois é uma matéria indispensável no cotidiano do aluno, e entender o básico é fundamental. Por sua vez, a utilização de material concreto se torna uma excelente ideia a ser utilizada como auxílio na aprendizagem (Baerle *et al*., 2023).

Mas o que vem a ser material concreto? Segundo Lorenzato (2006, p. 18) é qualquer instrumento útil à mediação do processo ensino e aprendizagem e que permite, a partir da operacionalização do mesmo, a construção dos conceitos, internalizando de forma lúdica as definições.

Logo, Lucena (2017, p. 27) lista exemplos de materiais concreto, que são: o material dourado; escalas de Cuisenaire, jogos geométricos, dominós, sólidos geométricos, tangram, blocos lógicos, sementes, palitos de picolés, tampinhas, etc. A seguir apresentamos esses objetos (Figura 1 e Figura 2).

Figura 1 – Materiais concretos: tampinhas, palitos de picolés, sementes e etc.

Fonte: INÍCIO·BRINCAR&VIVER·CLIPPING DO BAÚ/ MATEMÁTICA 29: MATERAIS CONCRETOS, 20 de jan. 2020. Tecnologia do Blogger. Disponível em: https://baudeideiasdaivanise.blogspot.com/2020/01/matematica-29-materiais-concretos.html. Acesso em: 16 de ago. de 2023.

Figura 2 – Materiais concretos: blocos lógicos, tangran, escalas de Cuisenaire e etc.

Fonte: Uso do material concreto: Um olhar sobre a alfabetização Matemática, 19 de out. 2019. Disponível em: https://prezi.com/to4sdlcwz2ag/oficina-material-concreto/. Acesso: 18 de ago. de 2023.

Vale destacar a potencialidade do uso do material concreto como um recurso que se torna muito eficiente, proporcionando aprendizagens significativas. Na construção do conhecimento ele se torna muito importante, especialmente nas etapas do desenvolvimento da inteligência.

Segundo Piaget (2003) o desenvolvimento da inteligência da criança passa por várias etapas: sensório-motor (de 0 à 2 anos idade); pré-operacional ou simbólico (dos 2 até os 7 anos); operacional concreto (7 a 12 anos) e por fim o operacional formal (a partir dos 12 anos). É no estágio simbólico que a criança brinca, explora e manuseia objetos ao seu redor, formulando conceitos e estabelecendo o desenvolvimento do conhecimento.

Santos *et al*. (2013, p. 8) corrobora sobre o assunto e declara que

> As crianças quando entram no período do estágio operatório, necessitam manipular objetos concretos para descobrir os conceitos matemáticos que estão sendo ensinados, já que é possível que a matemática envolva ações efetuadas com objetos manipuláveis (Santos *et al.*, 2013, p.8)

Assim deve-se fornecer a criança até aos 12 anos de idade condições para experimentar e descobrir princípios matemáticos e científicos (Piaget, 1998). Por sua vez, a criança carece de iniciar a manipulação de objetos concretos passando posteriormente a trabalhar com ilustração de objetos, figuras, tabelas e gráficos, podendo assim fazer o elo entre as manipulações concretas e os conceitos abstratos (Baerle *et al*., 2023).

Lorenzato (2010) afirma também que o conhecimento matemático deve começar pelo concreto, a partir de objetos físicos, pois a compreensão se torna mais fácil naquilo que seja visível, apalpável, definindo esse processo de experimentação, dizendo que,

> A experimentação é um processo que permite ao aluno se envolver com o assunto em estudo, participar das descobertas e socializar-se com os colegas. [...] é o melhor modo para se conseguir a aprendizagem com significado, uma vez que ela realça o 'porquê', a explicação e, assim, valoriza a compreensão (Lorenzato, 2010, p. 72).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), estabelece a importância da experimentação na aprendizagem de Matemática (Brasil, 2018). O material concreto desempenha esse papel de experimentação do saber matemático, proporcionando ao estudante uma aprendizagem com significado, não apenas memorizando fórmulas e repetindo padrões de resolução, mas compreendendo o caminho para se chegar ao resultado.

Entretanto, segundo Baltazar, Anjos e Quadros [s.d.], o material concreto, por si só, não garante aprendizagem. Os conceitos matemáticos que serão edificados pelos alunos, se tornarão possíveis com a intervenção do professor, onde deverá, ao usar o material concreto como recurso para obtenção de conhecimento, incitar reflexões e discussões para que o aprendizado venha acontecer integralmente.

Além disso, deve-se destacar o cuidado para que o material concreto não se torne um mero brinquedo sem fundamentação teórica. Lorenzato (2006), afirma que a intervenção do professor é essencial nesse processo para assegurar que o uso de tal recurso não desvie do seu foco de ensino ao qual se almeja chegar, em particular, à aprendizagem.

Considera-se que o fracasso escolar na aprendizagem de matemática é ocasionado, muitas vezes, devido à abordagem e não ao conteúdo propriamente dito, ocorrendo principalmente em virtude da mudança acelerada do concreto para o abstrato. Esse processo de transição das etapas do desenvolvimento conflui, enfraquecendo também na mudança do aluno das séries iniciais para as séries finais do Ensino Fundamental, onde há uma diferença acentuada na metodologia e prática pedagógica do professor licenciado em pedagogia e/ou regular superior que administram aulas de matemática facilitando o ensino de matemática com o uso de material concreto, por outro lado, os professores licenciados em matemática que já ministram matemática com abstração (Piaget, 1993).

Assim fazer relações entre a teoria e a prática através da manipulação de materiais, o aluno acaba que abstraindo conceitos matemáticos já estudados. Então o apanhado mostra que se pode ter um facilitador no processo de ensino e aprendizagem quando se trabalha com material concreto, tornando-se um instrumento que favorece construir o saber matemático.

2.3 O MATERIAL DOURADO: UMA ALTERNATIVA VIÁVEL

O material dourado foi idealizado com o objetivo de auxiliar o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração decimal-posicional, as operações fundamentais, frações, decimais, medidas e etc. De acordo com Baerle *et al.* (2023), o Material Dourado consiste num recurso pedagógico que pode ser excelente, transfigurando-o lúdico.

Figura 3 – Material Dourado

Fonte: Próprio autor, 2023.

Através do material a criança tem a possibilidade de fazer uma imagem concreta das relações numéricas que são abstratas, proporcionando o desenvolvimento do raciocínio e o aprendizado muito mais agradável, tornando-se uma alternativa viável.

Embora especialmente elaborado para o trabalho com aritmética, o seu uso não se restringe apenas às operações básicas, podendo ser utilizado, segundo Araujo (2013), Silva e Camargo (2016), Pressi, Barbosa, Smaniotto, [s.d.] e Costa *et al.*, 2018 para o estudo de diversos conteúdos matemáticos, dentre eles, as equações do 2º grau.

A proposta de usar o Material Dourado no ensino de equações quadráticas possibilita trabalhar agregadamente aritmética, geometria e álgebra. Segundo Lorenzato (2010), essa alternativa é importante por atender ao currículo "espiralado", sugerido pela BNCC, que presume que um mesmo assunto seja revisitado pelos estudantes de tempos em tempos, ampliando sempre sua complexidade e o relacionando com o aprendizado adquirido anteriormente, porém com enfoques diferentes. Isso acaba se tornando vantajoso na aprendizagem das equações quadráticas onde interliga diversas unidades do conhecimento matemático que se comunicam, despertando a percepção do aluno no tocante a matemática na sua totalidade e, portanto, de uma parte dela.

Porém o uso do Material Dourado no ensino de equações do 2° grau deve anteceder-se a uma habilidade do professor no domínio da prática e assim incrementá-la em sala de aula. Simplesmente manipular objetos não garante que o alunado entendeu ou absorveu o método de resolução de uma equação quadrática. O professor deve traçar um plano de ensino conveniente que facilite ao estudante aplicar a ideia de concreto no abstrato, adquirindo relações que o levem a pensar, analisar e reagir diante de situações-problemas que inclua o conteúdo equação quadrática.

Ainda segundo Costa *et al*. (2018) *apud* Freitas (2004), além das operações fundamentais, o Material Dourado também pode ser utilizado para o estudo das frações, conceitos e noções de áreas, volumes e seus respectivos cálculos; se utiliza ainda no estudo dos números decimais, potenciações, raízes quadrada e cúbica, dentre outras atividades.

No ensino tradicional, as crianças acabam "dominando" os algoritmos a partir de treinos cansativos, mas sem conseguirem, muitas vezes, compreender o que fazem. O Material Dourado acaba contribuindo para um aprendizado mais eficaz onde a situação muda: as relações numéricas abstratas passam a ter uma imagem concreta, facilitando a compreensão. Obtém-se, então, além da compreensão dos algoritmos, um notável desenvolvimento do raciocínio e um aprendizado bem mais agradável.

Então, utilizamos o Material Dourado como uma alternativa viável no ensino de equações do 2° grau, aproximando o conteúdo à realidade do aluno, uma vez que cria um elo entre o real visível e o que se aprende, facilitando um contato prático com o conhecimento.

2.3.1 Maria Montessori: a médica-educadora

O Material Dourado foi criado, no início do século XX, pela professora Maria Montessori (1870-1952), primeira mulher na Itália a formar-se em Medicina. De origem de família letrada e de classe média estudou na Universidade de Roma, onde se dedica a área da psiquiatria. Daí começa a trabalhar com crianças especiais que eram abandonadas por familiares em hospitais psiquiátricos da região (Pressi, Barbosa, Smaniotto, [s.d.]).

Figura 4 – Maria Montessori

Fonte: Maria Montessori, uma inspiração! – EducarSi**. Pedagogia, Montessori, Superdotação e Talento com Simone Clemens**, 21 de abril de 2016.
Disponível em: https://www.educarsi.com/maria-montessori-era-empoderada/. Acessado em: 25 de ago. de 2023.

Maria Montessori levava para essas crianças objetos em que elas pudessem manusear, sentir, tocar, como por exemplo, letras cortadas de madeira ou acrílico e até mesmo objetos de tamanhos e massas diferentes. Ela observou que esses estímulos as faziam aprenderem rapidamente e com entusiasmo. Foi então que viu que todas as crianças se favoreciam de uma educação que as trouxessem para o centro da atenção, em um ambiente pensado para estimular as habilidades naturais. Ela acreditava que "[...] a Educação nada mais é que proporcionar conhecimentos e ferramentas aos indivíduos para que eles possam entrar no mundo, no lugar em que vivem. Seja com letras e números, seja com vasinhos de plantas e varetas de madeira", explica Talita de Oliveira Almeida, presidente da Associação Brasileira de Educação Montessoriana – ABEM (Nova Escola, 2021, p. 6).

Além das pesquisas médicas, Maria Montessori também estudou Pedagogia, Antropologia e Psicologia, em dedica mais tarde ao estudo na área da educação. O seu envolvimento com a Pedagogia fez com que fosse convidada a supervisionar um grupo de 60 crianças de uma região de baixa renda em Roma chamada de Casa das Crianças, conhecida como *Casa dei Bambini*, em italiano, onde colocava suas criações em prática, explorando a aprendizagem pelos sentidos e pelo movimento (Nova Escola, 2021).

Quando encarregada da educação de crianças com deficiências, verificou que elas aprendiam mais pela ação do que pelo pensamento. Desenvolveu, então, um método e material apropriado de ensino: o Material Dourado (Pressi, Barbosa, Smaniotto, [s.d.]). Sua experiência foi muito bem-sucedida e Montessori concluiu que método semelhante poderia ser empregado com todas as crianças independente das condições neurológicas e faixa etária (Gatto, 2021).

Inicialmente, por decompor-se, o Material Dourado era conhecido como "material das contas". As contas eram douradas e de plástico transparentes possibilitando que as crianças avistassem toda a sua composição e decomposição (Gigante *et al*., pág. 42, [s.d.]). No material as unidades são representadas por pequenas contas amarelas; a dezena (ou número 10) era formada por uma barra de dez contas amarelas em um arame, (Figura 5). Esta barra era repetida dez vezes em dez outras barras ligadas entre si, formando um quadrado, "o quadrado de dez", somando o total de cem. Finalmente, dez quadrados sobrepostos e ligados formavam o cubo "o cubo de dez", isto é 1000 (Cardoso,1998).

Figura 5 – Material Dourado do início do século XX.

Fonte: Explorando o Material Dourado. Metodologia do Ensino de Matemática - EDM 321.Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura. Materiais Pedagógicos para o Ensino de Matemática. Disponível em: http://paje.fe.usp.br/~labmat/edm321/1999/material/_private/material_dourado.htm. Acessado em: 6 de set. de 2023.

Ainda que esse material proporcionasse que as próprias crianças formassem as dezenas e centenas, a imprecisão das medidas dos quadrados e cubos formados constituía num problema ao realizarem atividades com números decimais e raiz quadrada, entre outras aplicações possíveis para o Material Dourado. Em razão disso Lubienska de Lenval (1895-1972), seguidora de Montessori, fez uma modificação no material inicial e o construiu em madeira na forma que encontramos atualmente (Cardoso,1995).

Figura 6 – Material Dourado

Fonte: Próprio autor, 2023

Esse instrumento é composto de 611 peças de madeira na cor natural, sendo 1 cubo de milhar, 10 placas de centena, 100 barras de dezena e 500 cubos de unidade. Mas também existem exemplares em E.V.A (emborrachado), acrílico, entre outros. Independentemente do tipo de material que é produzido, este recurso deve ser estruturado de modo a manter uma forma entre sua estrutura e os agrupamentos lógico-matemáticos das propriedades da base 10. Por este motivo, usualmente, o Material Dourado é utilizado de modo a relacionar a representação geométrica de cada peça com a unidade, a dezena, a centena e a unidade de milhar conforme mostra a Figura 7 (Cardoso,1995).

Figura 7 – Representação geométrica do Material Dourado

Fonte: Representação geométrica do Material dourado. A CONQUISTA. Solução Educacional Positivo, Editora Positivo. Disponível em: https://slideplayer.com.br/slide/1257720/ . Acessado em: 6 de set. de 2023.

O Material Dourado pode ser adaptado para uma versão planificada em papel. Neste caso, não possui o cubo grande, o que é uma desvantagem, pois não possibilita representar a unidade de milhar (Cardoso, 1998).

2.4 O ENSINO DE EQUAÇÃO NO 2° GRAU DO 9° NO ENSINO FUNDAMENTAL – EF

É nos anos iniciais do Ensino Fundamental (1° ao 5° ano), que o aluno tem o seu processo de alfabetização iniciado, acessando atividades lúdicas que proporcionam o seu desenvolvimento motor, cognitivo e social.

Os anos finais do Ensino Fundamental (6° ao 9°) é uma fase que necessita uma maior maturidade dos alunos e que apresenta conteúdos mais complexos. Além do mais, é considerada uma etapa importante por constituir uma base para a complexidade que será apresentada no Ensino Médio – EM.

No 9º ano do Ensino Fundamental, na disciplina de Matemática, geralmente se começa a trabalhar equação do 2° grau, conteúdo bastante relevante, uma vez que o mesmo é retomado em todo o EM e em disciplinas não só como a Matemática, mas em Química e Física.

Segundo a pesquisa do Pereira (2017), o ensino das equações quadráticas se dá através de exercícios mecânicos e repetitivos, além de enfatizar a Fórmula de Bhaskara, assim conhecida no Brasil, como Método Resolutivo. A sua pesquisa foi realizada através da análise do conteúdo das equações do 2° grau entre três livros didáticos de Matemática destinado ao 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública.

Os livros ***Matemática e Realidade*** (Lezzi; Dolce; Machado, 2009), ***Vontade de Saber*** (Souza; Pataro, 2012) e ***Praticando Matemática*** (Silveira; Marques, 2013), apresentam a resolução das equações quadráticas associando à Fórmula de Bhaskara.

A técnica utilizada segue de um embasamento teórico, alguns exemplos e uma quantidade considerada de exercícios a serem resolvidos. O uso dessa metodologia tem acarretado uma defasagem e aversão matemática a esse conteúdo, desassociando do cotidiano do aluno. E depois, contribui para o surgimento de dificuldades inerentes ao conteúdo algébrico, uma vez que sua abstração não é exemplificada por meio de um aprendizado concreto (Soares; Leal; Serra; Barbosa, 2022).

Além disso, Brito *et al.* (2019) diz que na maioria das vezes as aulas de equação quadrática no Ensino Fundamental são tradicionais ou expositivas, ou seja, os professores iniciam pela definição do conteúdo matemático, e, em seguida, apresentam exemplos e exercícios do assunto.

Pereira *et al.* (2023) remete que os livros ***A conquista da matemática*** (Giovanni Júnior, J. R. Castrucci, 2018), ***Apoema: Matemática*** (Longen, A., 2018), ***Araribá mais: matemática*** (Gay, M. R. G.; Silva, W. R., 2018), ***Convergências matemática*** (Chavante, E. R., 2018), ***Geração Alpha Matemática*** (Oliveira, C. N. C de; Fugita, F., 2018), ***Matemática Bianchini*** (Bianchini, E., 2018), ***Matemática: compreensão e prática*** (Silveira, Ê., 2018), ***Matemática essencial*** (Pataro, P. M.; Balestri, R., 2018), ***Matemática: realidade & tecnologia*** (Souza, J. R. de, 2018), ***Teláris matemática*** (Dante, L. R., 2018) e ***Trilhas da matemática*** (Sampaio, F. A., 2018) do 9° ano do Ensino Fundamental pouco trazem situações, como por exemplo: o conceito de queda livre, através de experimentos em que a velocidade seja nula, explicitado com o salto de um paraquedista, por exemplo, e sua relação com Galileu Galilei; o conceito de áreas de regiões retangulares mediante fotografias obtidas via satélite, fazendo referência a lei da gravitação de Isac Newton e a ringues de luta, que são importantes ferramentas de contextualização e aplicação dos conceitos de Equação do 2° grau.

Foi observado nesses livros a presença de situações de matemática que envolvem a tradução da linguagem numérica para a linguagem algébrica, trazendo com regularidade a introdução do conteúdo recorrendo-se da resolução de situações-problema com a finalidade de aplicar ou definir Equação quadrática, dado como exemplos mais comuns: a determinação das dimensões de figuras retangulares, conhecendo o valor da área da região, cujo conceito remete a uma equação em sua forma fatorada; há também situações de contagem, que, explora-se a descoberta do número de lados de um polígono por meio da quantidade de diagonais ou do número de equipes esportivas, desde que se conheça o total de partidas disputadas em um campeonato. Outra abordagem, pouco encontrada nos livros do 9° ano do Ensino Fundamental é a introdução do conteúdo recorrendo à explicação do processo resolutivo de equações do 2° grau incompleta usando os princípios aditivo, multiplicativo e o algoritmo da fatoração (Pereira *et al.*, 2023).

A BNCC (Brasil, 2018), orienta que o ensino e a aprendizagem de equação do 2° grau nos anos finais devem fundamentar-se no desenvolvimento das habilidades de resolver e elaborar problemas que possam ser simbolizados por equações polinomiais do 2° grau do tipo $ax^2 = b$, como também compreender as etapas de fatoração de expressões algébricas, com base nas relações dos produtos notáveis e assim resolver e elaborar problemas que venham ser representados por equações polinomiais quadráticas.

Em estudos do Brito *et al.*, (2019), Gonçalves e Proença (2020) *apud* Pereira *et al.*, (2023), alunos do primeiro ano do EM, revelam que têm dificuldades em reconhecer equações do 2° grau, em empregar as formas resolutivas, assim como em resolver situações problemas contextualizadas que envolvam o uso do conteúdo, todavia isso pode ter ocorrido devido a um ensino que se orientava à memorização sem a devida compreensão.

As dificuldades para resolver problemas algébricos se manifestam a partir do momento que os estudantes têm que resolver cálculos que exigem transformar os dados numéricos para linguagem algébrica, justificando-se o fato de que os estudantes tem limitações na aprendizagem da Aritmética, o que traz consequência para aprendizagem da Álgebra.

Um aluno que cursava o 8° ano de uma escola X e que participou de uma pesquisa a respeito ao aprendizado da Álgebra, escreveu sobre: “É muito difícil e, apesar de muito instrutiva, noventa por cento das vezes é frustrante” (House, 1995, p.1).

Vê-se, muitas vezes, que os alunos não conseguem o real entendimento e propósito de uma variável em qualquer que sejam as expressões matemáticas, o que nos encaminham a compreender que o conteúdo de equações do 2° grau deve ser tratado com uma metodologia que visa superar essas dificuldades (Soares; Leal; Serra; Barbosa, 2022).

Percebeu-se que nenhum dos livros didáticos consultados induzia tratar o conteúdo de equações quadráticas com objetos manipulativos. Contudo, conforme abordado anteriormente, o Material Dourado, é um recurso bastante útil que oferece uma aprendizagem sobre o conteúdo. Sendo assim, a ideia dessa proposta, sobressai como um método eficaz para proporcionar aprendizagem, ainda pouco explorado nos livros didáticos e que nos deixa uma oportunidade para criar um espaço favorável a uma proposta e uma pesquisa que vinculem esses dois temas (Soares; Leal; Serra; Barbosa, 2022).

Adiante faremos um breve comentário sobre o método manipulativo que poderá favorecer a aprendizagem.

3 EQUAÇÃO DO 2° GRAU

A seguir apresentamos uma breve viagem histórica da equação do 2° grau, assim como também de uma fórmula para a determinação de sua solução.

Iniciemos primeiro com sua definição e representação genérica, contida nos livros do Ensino Fundamental Maior. Depois retorna-se no tempo e embarcamos à alguns séculos antes do nascimento de Cristo, onde civilizações já tentavam resolver equações similares, por exemplo, do primeiro grau.

Passamos pelos egípcios, mesopotâmicos, europeus e etc. e chegamos ao século XIX, onde determina-se a fórmula da equação do 2° grau que é utilizada nos livros de Matemática atualmente quando retrata o conteúdo ou até mesmo em outras disciplinas que usam o conteúdo através de aplicações.

3.1 UMA BREVE HISTÓRIA DA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO 2° GRAU

Vamos iniciar conceituando equação quadrática ou equação do 2° grau, como é mais conhecida. Ricardo, [s.d.], descreve: Imagine um balanço balançando para frente e para trás. Se você estivesse olhando de um lado para o outro, que tipo de forma ele parecia esboçar? Por que, não é um arco de algum tipo? Ou tem a forma de um círculo parcial? Sim e sim!

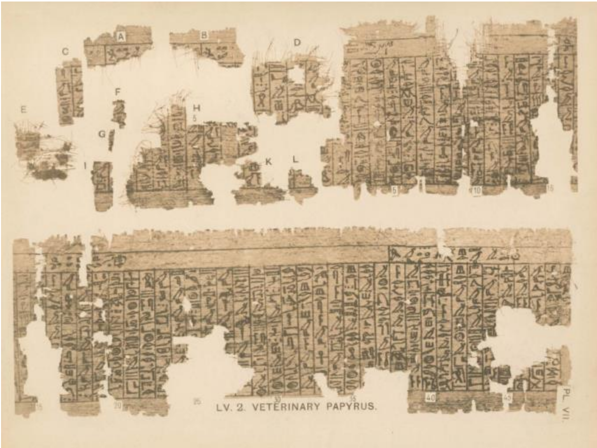
Esta configuração desenhada pelo balanço representa um exemplo do gráfico de uma equação quadrática. Definimos, em Matemática, uma equação quadrática como uma equação de grau 2, o que significa que o maior expoente da incógnita desta equação é 2. A sua representação genérica é dada por $ax^2 + bx + c = 0$, com *a*, *b* e *c* sendo números reais, com a condição de *a* diferente de 0 e o x a incógnita, a variável ou a letra desconhecida (Bianchini, 2022, p. 147).

Um método resolutivo da equação quadrática, ou seja, uma fórmula para determinar os valores de x que viessem satisfazer a igualdade levou-se muito tempo. Historiadores matemáticos acreditam que no papiro de Kahun [1](Figura 8), já continha

[1] Papiro da 12ª dinastia egípcia (1991 -1786 a. C.), atualmente em Londres.

estudos sobre esse assunto. Essa crença consiste no fato de terem encontrado resolução para equações, hoje escritas como $x^2 + y^2 = k$ e $y = a \cdot k$, onde o número **k** e **a** devem ser positivos. Esse método ficou conhecido como "falsa posição", desenvolvido pelos egípcios para resolverem equações do 1° grau (Filho, 2016).

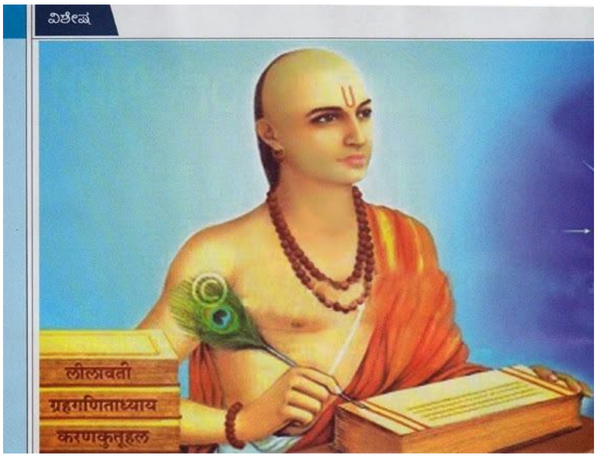
Figura 8 – Papiro de Kahun



Fonte: P*apiro de Kahun*. Matemática no Planeta Terra/Matemática no Egito, José Gaspar - Projeto Educacional II – 2013. Disponível em: https://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm. Acessado: 18 de mai. de 2024.

Inúmeros estudos foram feitos pelas civilizações a respeito das equações e de uma Fórmula Resolutiva da equação do 2° grau, conhecida no nosso país como Fórmula de Bhaskara, nome dado aqui no Brasil, erroneamente, na década de 1960, pela Literatura Matemática Brasileira. Esse nome foi atribuído em homenagem à Bhaskara Acharya (Figura 9), descendente de uma família tradicional de astrólogos indianos. Acharya nasceu em 1114, na cidade de Vijayapura, na Índia. Dedicado à Matemática e a Astronomia se torna, com apenas 20 anos, chefe do Observatório Astronômico de Ujjain, escola de Matemática bem renomada na época (Pressi *et al*., [s.d.]).

Figure 9 – Bhaskara Acharya – Índia



Fonte: Bhaskara’s II contributions to mathematics – India. Great Indian Mathematician & Astronomer, speak2world, 2018. Disponível em: https://speak2world.wordpress.com/2014/10/09/great-indian-mathematician-astronomer/. Acessado em: 18 de ma. De 2024.

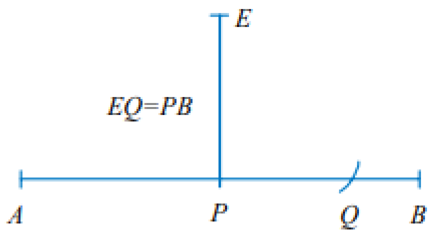
Segundo Fragoso (2000), registros babilônios, egípcios e gregos, datados antes do nascimento de Cristo, continham escritos/textos e figuras/símbolos usados como dispositivos que auxiliavam na resolução dessas equações. A matemática era escrita com palavras; tanto os problemas como suas resoluções, ou seja, não existia “letras” que representassem os termos desconhecidos. Os mesopotâmicos ou babilônicos foram um dos pioneiros, que se tem registro, a resolver problemas que hoje chamamos de equação do 2° grau, data de 1700 a.C. A equação e sua resolução eram enunciadas, mais ou menos, assim:

> Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870? (o que hoje se escreve: $x^2 – x = 870$). E a “receita” era: Tome a metade de 1 (coeficiente de x) e multiplique por ela mesma, (0,5x0,5 = 0,25). Some o resultado a 870 (termo independente). Obtém-se um quadrado ($870{,}25 = 29{,}5^2$) cujo lado somado à metade de 1 vai dar (30) o lado do quadrado procurado (Fragoso, 2000, p. 21).

Já os gregos (500 a 200 a.C.), por apreciar geometria, resolviam geometricamente muitos problemas matemáticos, dentre os quais a resolução da equação do 2° grau. Um dos métodos que hoje se tem notícia e usado, por exemplo, na equação que atualmente se escreve $x^2 – 10x + 9 = 0$ era feito do seguinte modo (Fragoso, 2000):

Trace o segmento AB = 10. Por P, médio de AB, levante o segmento perpendicular PE = 3 (igual à raiz quadrada de 9) e, com o centro em E e raio PB, trace um arco de circunferência que corta AB, no ponto Q. A raiz desejada será dada pelo comprimento AQ.

Na prática, por construção, a medida do segmento AQ será $\frac{10}{2}$ + $\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - \sqrt{(9)^2}}$ e corresponde à raiz 9 da equação. A sua representação geométrica é:



(Fragoso, 2000, p.21).

Após um longo período a Matemática esteve concentrada as margens do Mar Mediterrâneo (Grécia) e nos vales dos rios Tigres e Eufrates (Mesopotâmia) e a beira do Rio Nilo (Egito). A Índia, sobretudo o Império Árabe, trouxeram importantes contribuições para a matemática (Silva, 2019), destacando o indiano Bhaskara (1114 – 1185) que formula um modelo para representar a equação do segundo grau, sendo atualmente apresentada como $ax^2 + bx = c$, além de construir um molde para obter as raízes da equação, (Filho, 2016) que originou a fórmula atual (Silva, 2019).

Segundo Pedroso, H. A., (2010), Bhaskara representava as equações usando as seguintes notações:

ya (abreviação de *yavattavat*) era a primeira incógnita;

ka (*kalaka* ou "negro") era a segunda incógnita;

v (*varga*) significava "quadrado";

˙ Um ponto sobre o número indicava que ele era negativo;

bha (bhavita) significava "produto";

k(a) representava karana ("irracional" ou "raiz");

ru representava rupa (número "puro" ou "comum").

O primeiro membro da equação era escrito em uma linha e o segundo membro na linha abaixo;

Incógnitas adicionais seriam expressas mediante o uso de abreviações para cores adicionais, assim: ni para nilaca ("azul"), pi para pitaca ("amarelo"), *pa* para *pandu* ("branco") e *lo* para *lohita* ("vermelho").

Exemplo: *ya v 1 ya 10˙* traduz-se por $x^2 - 10x = -9$.

ru 9˙

Assim, Pedroso (2010), apresenta a resolução de um problema construindo um paralelo entre a ótica da matemática Hindu e ao mesmo tempo da matemática atual.

Exemplo: A raiz quadrada do número de abelhas de um enxame voou rumo a um jasmineiro, enquanto 8/9 do enxame permaneceu atrás; e uma abelha fêmea ficou voando em torno de um macho que se encontrava preso numa flor de lótus para a qual foi atraído à noite por seu doce odor. Diga-me adorável mulher, qual é o número de abelhas. Na tabela que segue, na coluna da esquerda tem-se a solução de Bhaskara e na da direita a tradução atual.

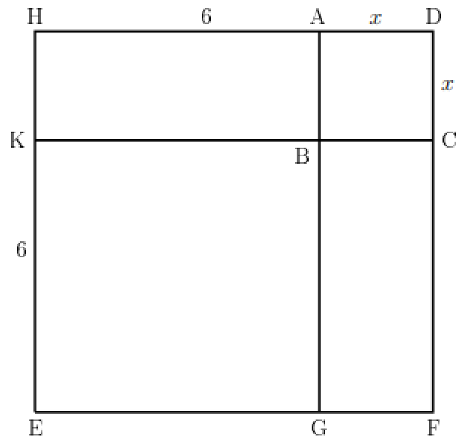
Seja *ya v* 2 o número de abelhas do enxame	Seja $2x^2$ o número de abelhas do enxame
A raiz quadrada da metade desse número é *ya* 1	$\sqrt{\frac{2x^2}{2}} = x$
Oito nonos de todo o enxame é *y a v*$\frac{16}{9}$	Oito nonos de todo o enxame é $\left(\frac{16}{9}\right) x^2$
A soma da raiz quadrada com a fração e o casal de abelhas é igual à quantidade de abelhas do enxame, isto é, *ya v* 2	$x + \left(\frac{16}{9}\right) x^2 + 2 = 2x^2$

Reduzindo-se ao mesmo denominador os dois membros da equação e eliminando o denominador, a equação transforma-se em *ya v* 18 *ya* 0 *ru* 0 *ya v* 16 *ya* 9 *ru* 18	$\frac{9x + 16x^2 + 18}{9} = \frac{18x^2}{9} \Longleftrightarrow$ $18x^2 = 16x^2 + 9x + 18$
Após a subtração a equação torna-se *ya v* 2 *ya* 9 *ru* 0 *ya v* 0 *ya v* 0 *ya ru* 18	$18x^2 - 16x^2 - 9x =$ $16x^2 + 9x + 18 - 16x^2 - 9x$ $2x^2 - 9x = 18$
Portanto *ya* é 6	Portanto x = 6
Donde *ya v* 2 é 72	Donde $2x^2 = 2 \cdot 62 = 72$

Fonte: (Pedroso, 2010, p. 7)

Posteriormente destaca-se o grande sábio muçulmano Mohamed ibn-Musa al-Khowarizmi (780 – 850), o maior matemático árabe de todos os tempos, que além de outras obras, escreveu, em 825, *Hisab al-jabr wa 'lmuzabalah*, obra de grande potencial didático, traduzida como *Ciência das equações* (Fragoso, 2000). Nessa obra, al-Khowarizmi apresenta a equação quadrática, bem como sua resolução, de forma retórica, além de uma comprovação geométrica denominada *método de completar quadrados*, método geométrico distinto do utilizado pelos gregos. Em muitos casos apresentava, tal como seus precursores somente uma raiz (positiva) (Pedroso, 2010). Além do mais, vejamos abaixo um exemplo do método de completar quadrado desenvolvido por Al - Khowarizmi, um dos maiores contribuidores de sua época.

Exemplo: Encontrar a solução para $x^2 + 12x = 64$.



Fonte: Pedroso, 2010, p. 9

Na figura acima tem-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = x$ e que $\overline{AH} = \overline{CF} = 6$. Consequentemente a área do quadrado ABCD é dada por $A_q = x^2$ e a área dos retângulos HKBA e BGFC é dada por $A_r = 6x$. A soma dessas áreas é $x^2 + 6x + 6x = x^2 + 12x$. Completa-se o quadrado HEFD com o quadrado KEGB, cuja área é dada por $A_q^{'} = 36$. A área do quadrado HEF D é dada por $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36 = 64 + 36 = 100$, o que resulta $x = 4$.

Al-Khowarizmi só considerava as raízes positivas, mas, ao contrário dos gregos, admitia a existência de duas raízes (Pedroso, 2010).

Por volta de 1303, um grande matemático chinês da época, Chu Shih-chieh, apresenta uma técnica especial para resolução da equação quadrática, baseada em aproximações sucessivas, de grande precisão, denominada método *fan-fan*, que foi apresentada de forma retórica e chega a uma única raiz, porém, positiva. Segundo Fragoso (2000), o método *fan-fan* usado para encontrar a solução da equação hoje escrita como $x^2 + 252x - 5292 = 0$, consistia no seguinte:

> [...] ele partia de uma solução aproximada, no caso, $x = 19$ (a raiz positiva dessa equação está entre 19 e 20), e usava o *fan-fan*, no caso, a transformação $y = x - 19$, para obter a equação $y^2 + 290y = 143$ em y, cuja solução está entre 0 e 1. Identificando y^2 com y, obtinha-se uma solução aproximada para essa equação: $y = 19 + 143/291$, e assim o valor inicial de x era corrigido para: $x = 19 + 143/291 = 19{,}49$. A ideia era repetir o processo a partir desse novo resultado até chegar a um número que não mais se modificasse. No caso, fazendo $z = x - 19{,}49$, obtinha-se a equação em z, $z^2 + 290{,}98z = 0, 66$ e, daí: $z = 0, 66/ 291, 98 = 0{,}0022$, o que já confirmava as 2 casas decimais do valor encontrado no passo anterior (com efeito, os primeiros dígitos dessa raiz são 19, 49226). (Fragoso, 2000, p. 23)

Durante muito tempo foi utilizada a técnica desenvolvida pelo matemático hindu Bhaskara e muitos matemáticos se destacaram em desenvolver outros formatos, bem como alguns bem diferentes do utilizado atualmente para determinar a resolução da equação do 2° grau, contribuindo grandemente com suas produções no campo da matemática (Silva, 2019). É nesse contexto sobre métodos desenvolvidos para resolver equações do 2° grau, que, ressalta-se o pensamento dado por Viéte seguido do de Descartes.

O famoso matemático francês François Viète (1540-1603), (Figura 10) apaixonado por álgebra, foi o responsável pela introdução da primeira notação algébrica nas equações que contribuiu para a teorização da resolução das equações e generalização da fórmula de Bháskara, (Pressi, *et al.*, [s.d.]), que utilizou uma vogal e uma consoante para representar uma grandeza ou um número supostamente conhecido ou dado (Amaral, 2016, p. 18).

Figura 10 – François Viète

Fonte: François Viète. Az Quotes/ Quotes for All Occasions. Disponível em: https://www.azquotes.com/author/65233-Francois_Viete. Acesso em 26 de mai. de 2024.

Pedroso H. A. (2010) expõem que para resolver a equação $x^2 + 2ax = b$, François Viète propôs uma mudança de variáveis, que transformava a equação inicial em uma equação incompleta. Os passos por ele utilizados, na notação atual, são:

1. Seja $x + a = u$
2. Então $u^2 = x^2 + 2ax + a^2$
3. Pela equação dada $x^2 + 2ax = b$, ou seja, $u^2 = b + a^2$
4. Logo $(x + a)^2 = u^2 = b + a^2$ e $x = \sqrt{b + a^2} - a$.

Para uma equação geral da forma $ax^2 + bx + c = 0$, o método de Viète seria:

1. Seja $x = u + z$

2. Então substituindo em $ax^2 + bx + c = 0$, tem-se $a(u + z)^2 + b(u + z) + c = 0$, ou seja, $au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0$.

3. Se $2az + b = 0$, tem-se $z = \frac{-b}{2a}$.

4. Substituindo $z = \frac{-b}{2a}$ em $au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0$, tem-se $au^2 + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) = 0$, ou seja, $au^2 = \frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, ou ainda, $u = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$

5. Finalmente substituindo os valores $z = \frac{-b}{2a}$ e $u = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$ em $x = u + z$, tem-se $x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}$, ou seja, $x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Fragoso, (2000) afirma que essa façanha revolucionou a álgebra garantindo a François o título de "Pai da Álgebra".

Enquanto, o François Viète começou a representação das equações empregando letras, assim como também na "receita" da resolução, haja visto acima que antes as equações eram representadas por textos e sua resolução seguia a receita de Bhaskara, o René Descartes (1596-1650) apresentou a equação que diferia da atual apenas o termo independente e a expressão da resolução da fórmula de Bhaskara, basicamente conforme usamos atualmente (Fragoso, 2000).

Figura 9 – René Descartes

Fonte: *René Descartes*. Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes. Acessado em: 26 de mai. De 2024.

No apêndice *La Géométrie* de sua obra *O Discurso do Método*, Descartes resolveu equações do tipo: $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$, sempre com **b** e **c** positivos. Por exemplo, para resolver equações do tipo $x^2 = bx + c^2$, usou o seguinte método, Pedroso, H. A., (2010):

Traça-se um segmento LM, de comprimento c, e, em L, levanta-se um segmento NL igual a b/2 e perpendicular a LM. Com centro em N, constrói-se um círculo de raio b/ 2 e traça-se a reta por M e N, que corta o círculo em O e P.

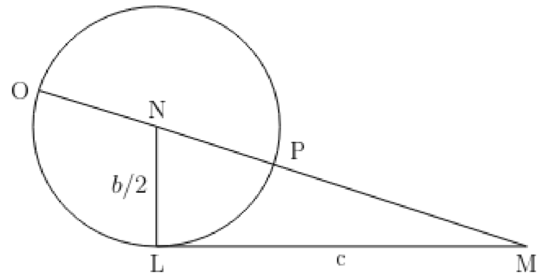


Figura: Representação geométrico dos europeus para solução a equação do 2º grau.

Então a raiz procurada é o segmento OM. Com efeito, no triangulo MLN, se OM = x, tem-se:

$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2$e daí: $x^2 - bx = c^2$.

Fonte: (Fragoso, 2010, p.11)

Hoje, sabe-se que a segunda raiz é – OM, mas Descartes não considerava a raiz negativa (Pedroso, 2010, p. 10).

Pode-se notar que Descartes desenvolveu um método mais geométrico para a resolução da equação $x^2 = bx + c$, enquanto Viète embrenhou-se para sua representação algébrica.

Atualmente, ao estudarmos essa equação, usamos a representação herdada dos europeus, especialmente a dos matemáticos François Viète e René Descartes e a solução fornecida pelos hindus, que culminou na famosa e bastante utilizada nas escolas brasileiras a Fórmula de Bhaskara ou “Fórmula do delta”: $x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4\,ac}}{2a}$, onde o valor associado a expressão b^2 - 4ac é definido como discriminante. O discriminante define se a equação possui uma, duas ou nenhuma solução dentro dos números reais. Esse discriminante, é representado pela letra grega (Δ), chamada de Delta, de modo que a fórmula $x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, passou a ser escrita como sendo, $x = \frac{-b \pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, em que adotamos que Delta será escrito como: $\Delta = b^2 - 4ac$ (Filho, 2016).

Mesmo depois da descoberta da Fórmula Resolutiva da Equação do 2° grau os matemáticos continuavam e continuam ainda estudando sobre o assunto, analisando os coeficientes e sua relação com as raízes, a representação geométrica e algébrica da equação, sua aplicação e etc. (Silva, 2000).

3.2 O ENSINO DE EQUAÇÃO DO 2° GRAU UTILIZANDO O MATERIAL DOURADO

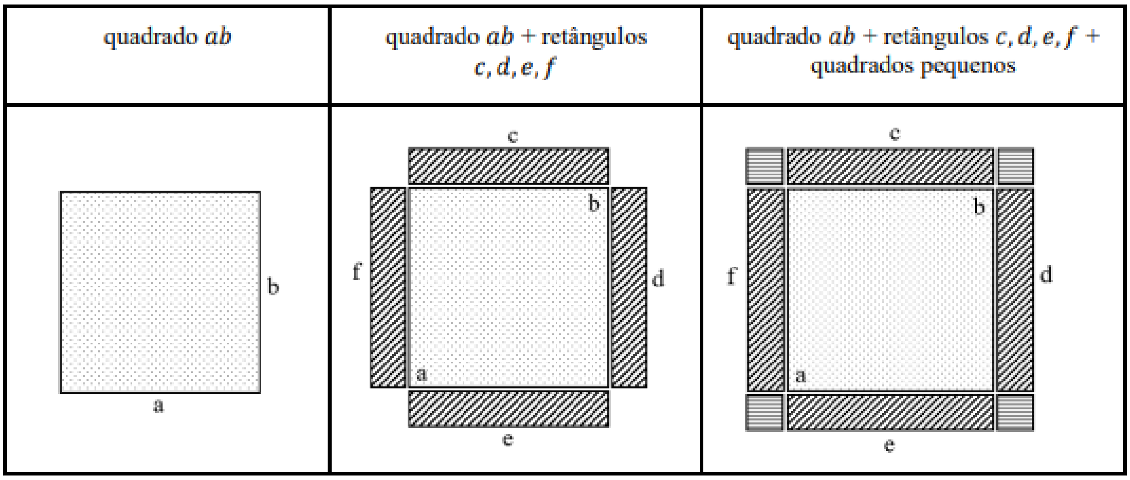
Uma fórmula que viesse determinar as raízes da equação do 2° grau foi motivo de muitas pesquisas, de muitos estudos, de muitos erros e acertos até finalmente chegar a famosa fórmula de Bhaskara, conforme enunciado anteriormente. Porém, faremos a resolução da equação do 2° grau com o uso do Material Dourado, combinando álgebra com geometria e, assim, verificando geometricamente a solução.

O método de completar quadrado é atribuído a Al-Khwarizmi e se encontra em uma de suas obras intitulada de “Al-Jabr Wa’l muqabalh”(BOYER, 1974), conforme mencionado anteriormente. No livro há os estudos direcionados a métodos algébricos e geométricos para a resolução da equação do 2° grau, todavia, apenas com raízes positivas, uma vez que os números negativos e o zero só viriam a ser descobertos depois (Soares; Leal; Serra; Barbosa, 2022). Consideremos o exemplo da equação $x^2 + 10x = 39$ e sua ilustração com a Figura 12, em que Al-Khwarizmi, descreve:

> Traça um quadrado ab para representar x^2 [quadrado pontilhado], e sobre os quatro lados desse quadrado coloca retângulos **c**, **d**, **e** e **f**, cada um com largura 2 ½ [retângulos com listras diagonais]. Para completar o quadrado maior é preciso acrescentar os quatro pequenos quadrados nos cantos, cada um dos quais tem uma área de 6 ¼ unidades [quadrados com listras horizontais]. Portanto, para “completar o quadrado” somamos 4 vezes 6 ¼ unidades ou 25 unidades, obtendo, pois, um quadrado de área total 39 + 25 = 64 unidades (conforme está óbvio no segundo membro da equação). O lado do quadrado grande deve, pois, ser de 8 unidades, do que subtraímos 2 vezes 2 ½ ou 5 unidades, achando x = 3 (Boyer, 1974, p.168).

Apresentando geometricamente o texto acima, temos:

Figura 10 – Representação geométrica



Fonte: (Soares; Leal; Serra; Barbosa, 2022)

De modo semelhante ao método de completar quadrados, iremos utilizar o Material Dourado para resolver equações do 2° grau. Para executar a resolução das equações quadráticas devemos apresentá-las na forma reduzida, ou seja, no tipo

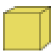
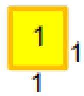
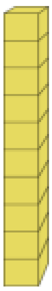
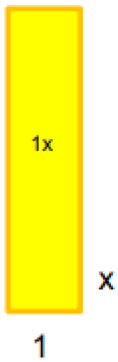
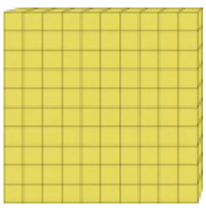
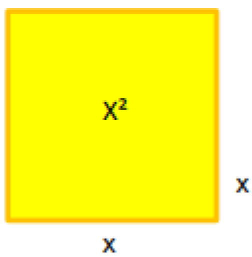
$$ax^2 + bx + c = 0$$

ou até mesmo incompletas e isso ocorre quando o coeficiente *b* e/ou *c* forem iguais a zero. Das peças que compõem o Material Dourado, utilizamos: a placa, a barra e o cubinho. Por possuírem três dimensões: comprimento, altura e largura, todavia, desconsideremos esta última grandeza.

Vamos admitir a placa com as medidas largura e altura iguais a x; a barra com a largura igual a uma unidade e comprimento x e o cubinho menor, com largura e comprimento unitários. Calculando as áreas das peças acima mencionadas, temos respectivamente, x^2, x e 1 (Quadro 1).

Os coeficientes a, b e c da equação $ax^2 + bx + c = 0$, indicarão a quantidade de placas, barras e cubinhos, respectivamente que se deve utilizar para formar um retângulo ou quadrado. Nos casos em que algum dos coeficientes da equação for negativo, readaptamos o jogo, pintando as peças de duas cores: as peças de cor azul representam os coeficientes positivos e as peças de cor vermelha os coeficientes negativos. A placa, que representa o coeficiente **a** da equação, conservemos na cor original. Os exemplos com o coeficiente **a** negativo, toma-se o oposto dos coeficientes, uma vez que se multiplica toda a equação por -1. Porém, quando na equação quadrática o coeficiente *b* for igual a zero, tomam-se barras duplas e opostas, ou seja, o mesmo número de barras azuis será o mesmo da vermelha para, assim, reunir com as peças determinadas, respectivamente, pelos valores dos coeficientes *a* e *c* e, assim, formar o quadrado ou o retângulo. Por considerar apenas duas dimensões do Material Dourado, adotaremos o emprego de um desenho demonstrativo conforme o Quadro 1.

Quadro 1 – Material Dourado e sua representação na equação do 2° grau

Material Dourado	**Desenho Representativo**
 →	
 →	
 →	

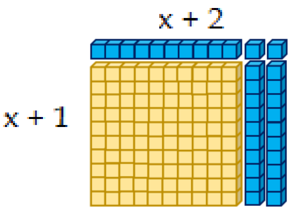
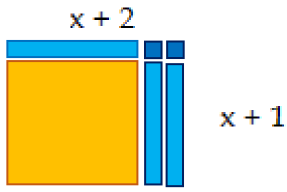
Fonte: (Silva e Camargo, 2016)

Agora podemos fazer alguns exemplos mostrando como representar e solucionar uma equação do 2° grau por meio do Material Dourado. Resolvemos dividir os exemplos em 6 casos, de acordo com o grau de dificuldades.

<u>1° Caso</u>: Da equação $\mathbf{x^2 + 3x + 2 = 0}$, temos como coeficientes $a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$, assim teremos uma placa para representar o x^2, 3 barras para caracterizar o x e 2 cubinhos que representam o termo independente da equação. Com tais peças, devemos construir um quadrado ou retângulo qualquer, de modo que as barras e os cubinhos sejam colocados somente em duas laterais consecutivas da placa. As raízes da equação serão determinadas com o cálculo da área da figura formada. Tal procedimento nos dará um produto de expressões algébricas dos dois lados consecutivos da configuração formada, por sua vez, teremos: $(x + 2) \cdot (x + 1)$. Como essa expressão é obtida a partir da equação quadrática acima, então o produto de seus fatores se anula, o que resulta a equação $(x + 2) \cdot (x + 1) = 0$. Daí determina-se as raízes, igualando cada fator a zero, obtendo-se o conjunto solução $\{-2, -1\}$.

Abaixo foi representado o processo resolutivo através do Quadro 2.

Quadro 2 – Representação da equação $x^2 + 3x + 2 = 0$ com Material Dourado e o seu desenho representativo com a referida resolução

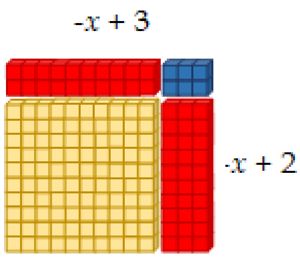
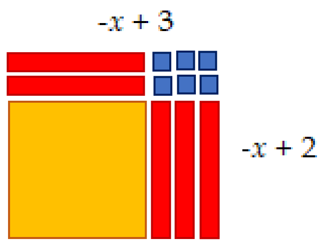
Material Dourado	Desenho Geométrico	Solução Numérica
		$(x + 2) \cdot (x + 1) = 0$ $x + 2 = 0 \qquad x + 1 = 0$ $x = -2 \qquad x = -1$ $S = \{-2, -1\}$

Fonte: Próprio Autor, 2024

<u>2° caso</u>: Para exemplificar, tomemos a equação $-x^2 + 5x - 6 = 0$, que corresponde a $x^2 - 5x + 6 = 0$, após multiplicada por -1. Os seus coeficientes são $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$. Utilizando uma placa para representar o x^2, 5 barras vermelhas para representar o x (pois o coeficiente b é negativo) e 6 cubinhos azuis em que representam o termo independente (pois o coeficiente c é positivo); daí construímos um retângulo, em que sempre atentemos que as barras e cubinhos devem ser colocados em duas laterais consecutivas da placa. Barras de cores diferentes nunca devem ficar juntas, pois, como representam números opostos, ao se adicionarem, anulam-se. Conforme a medida do comprimento da barra vermelha é x e por ser negativa tem-se -x, o qual representa o coeficiente b, que na equação é -5, enquanto que os cubinhos são azuis, ou seja, o termo independente é positivo. Como as raízes serão determinadas com o cálculo da área da figura construída, então resolvemos o produto $(-x + 2) \cdot (-x + 3) = 0$ em que representa a própria equação acima, resultando no conjunto solução {2, 3}.

Uma configuração do processo resolutivo se encontra no quadro 3 abaixo.

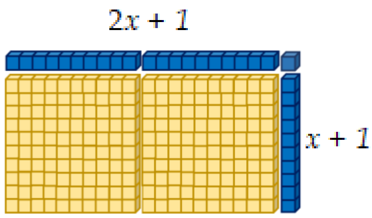
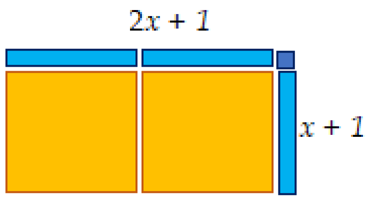
Quadro 3 – Representação da equação com Material Dourado e o desenho representativo

Material Dourado	Desenho geométrico	Solução numérica
		$(-x + 2) \cdot (-x + 3) = 0$ $-x + 2 = 0$ $\quad$ $-x + 3 = 0$ $x = 2$ $\quad$ $x = 3$

Fonte: Próprio Autor, 2024

<u>3° caso</u>: Outro exemplo que achamos ser desafiador para os alunos foi a determinação das raízes da equação $2x^2 + 3x + 1 = 0$. Os seus coeficientes são $a = 2$, $b = 3$ e $c = 1$. Utilizamos do Material Dourado duas placas que representam x^2, 3 barras azuis representando x e um cubinho azul que corresponde ao termo independente. A determinação das raízes é através do cálculo da área do retângulo abaixo construído (Quadro 4), que se anula por ser obtida a partir da equação do 2° grau acima. Igualando cada fator a zero, encontramos como raízes -1/2 e -1. O conjunto solução é {-1/2, -1}. O processo será representado na figura abaixo.

Quadro 4 – Representação da equação $2x^2 + 3x + 1 = 0$ com Material Dourado e o seu desenho representativo com a referida resolução numérica

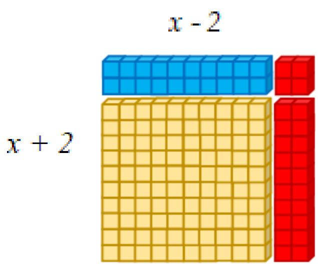
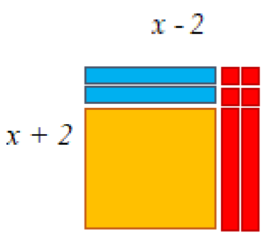
<table>
<tr><th>Material Dourado</th><th>Desenho geométrico</th><th>Solução numérica</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>$(2x + 1) \cdot (x + 1) = 0$
$2x + 1 = 0 \quad x + 1 = 0$
$x = \frac{-1}{2} \quad x = -1$</td>
</tr>
</table>

Fonte: Próprio Autor, 2024

O quarto exemplo, a seguir, retrata uma equação quadrática incompleta, como o quinto exemplo, também.

<u>4°caso</u>: O exemplo $x^2 - 4 = 0$ foi bastante debatido pelo professor e alunos. As peças utilizadas do Material Dourado seriam a placa que corresponde x^2 e 4 cubinhos vermelhos para designar o termo independente – 4. Porém, como na equação o coeficiente *b* é igual a zero, há a necessidade da adição de barras, (2 duplas de barras opostas); sendo, duas barras azuis (positivas) e outras duas vermelhas (negativas), tornando-se, desse modo, viável a construção do quadrado ou do retângulo. A duplicidade de barras opostas, refere-se à conservação da igualdade na equação, em que, se adicionar quantidades iguais opostas em uma equação, a igualdade é mantida. A expressão alcançada após o cálculo da área da figura foi $(x - 2) \cdot (-x - 2) = 0$, que se anula, por ser obtida a partir da equação $x^2 - 4 = 0$, o que resultou, após a resolução, no conjunto solução $\{-2,2\}$. Observamos esse processo no Quadro 5.

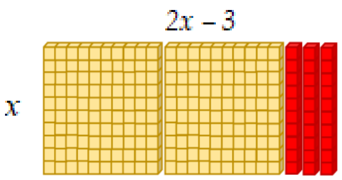
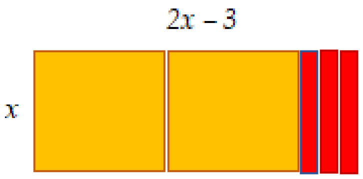
Quadro 5 – Representação da equação $x^2 - 4 = 0$ com Material Dourado e o seu desenho representativo com a referida resolução

<table>
<tr><th>Material Dourado</th><th>Desenho geométrico</th><th>Solução numérica</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>$(x - 2) \cdot (x + 2) = 0$
$x - 2 = 0 \quad x + 2 = 0$
$x = 2 \quad x = -2$</td>
</tr>
</table>

Fonte: Próprio Autor, 2024

<u>5° caso</u>: Para o exemplo $2x^2 - 3x = 0$, se observa como coeficientes, a = 2, b = -3 e c = 0. Tomemos duas placas que representam o x^2 e três barras vermelhas para representar o coeficiente x e, assim, formar o retângulo ou o quadrado com as peças da mesma cor juntas do material dourado. Como o coeficiente c é nulo, não usamos os cubinhos. As raízes da equação são determinadas através do cálculo da área da figura formada. Daí encontrando como área $x \cdot (2x - 3)$. Tal expressão advém da equação do 2° grau acima, em que o produto de seus fatores se anula, ou seja, $x \cdot (2x - 3) = 0$. As suas raízes serão determinadas, igualando os fatores a zero, obtendo como conjunto solução {0, 3/2}. Podemos analisar os cálculos no Quadro 6.

Quadro 6 – Representação da equação $2x^2 - 3x = 0$ com Material Dourado e o seu desenho representativo com a referida resolução

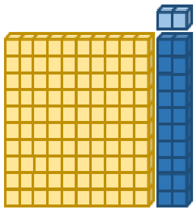
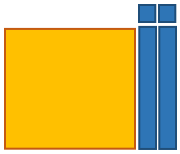
Material Dourado	Desenho Geométrico	Solução numérica
		$x \cdot (2x - 3) = 0$ $x = 0 \qquad 2x - 3 = 0$ $x = 3/2$

Fonte: Próprio Autor, 2024

<u>6° caso</u>: Trouxemos $x^2 + 2x + 2 = 0$ como último exemplo dessa etapa, destacando como coeficientes a = 1, b = 2 e c = 2. Do Material Dourado tomou-se uma placa que representa x^2, duas barras azuis que correspondem x e dois cubinhos azuis que representam o termo independente, todavia, barras e cubinhos são azuis em virtude dos respectivos coeficientes *b* e *c* da equação serem positivos. As raízes serão determinadas através da área do retângulo ou quadrado formado. No entanto não se conseguiu formar tal figura geométrica com as peças estabelecidas, nem sequer tomando peças extra do material e, óbvio que mantendo a igualdade, porém mesmo assim não foi possível a construção, então, consequentemente, não existe produto de duas expressões binomiais que venham gerar a equação precitada acima, ou seja, não há raízes dentro do conjunto dos números inteiros.

A ilustração será retratada no Quadro 7 a seguir.

Quadro 7 – Representação da equação $x^2 + 2x + 2 = 0$ com Material Dourado e o seu desenho representativo com a referida resolução

Material Dourado	Desenho Geométrico	Solução numérica
		*Não há produto de duas expressões que resultem a equação* $x^2 + 2x + 2 = 0$

Fonte: Próprio Autor, 2024

Depois do entendimento por parte dos alunos do uso do Material Dourado no auxílio da determinação das raízes da equação quadrática; faltava apresentar e manipular a Fórmula Resolutiva da Equação do 2° grau, todavia carregada de vários cálculos e operações. Para demonstrar e expor a 'Fórmula de Bhaskara', usamos o mesmo direcionamento dos exemplos das resoluções das equações anteriores: o método de completar quadrado.

A seguir, faremos uma revisão dos conteúdos: quadrado da soma e quadrado da diferença de dois termos, assim como da Fatoração do Trinômio Quadrado Perfeito, conteúdos que iremos utilizar para fazermos a demonstração.

Como é um conteúdo trabalhado na série anterior, ou seja, no 8° ano, então resolvemos fazer uma breve revisão sobre o assunto.

3.2.1 Produtos Notáveis: quadrado da soma de dois termos e quadrado da diferença de dois termos

Vamos considerar o exemplo bem comum no nosso cotidiano:

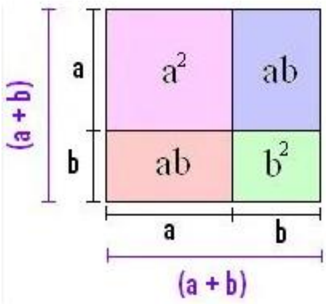
Se queremos comprar um papel decorativo para ornamentar uma parede de um quarto que tem como medidas 35 dm de comprimento por 35 dm de altura, devemos então calcular a área dessa parede, fazendo $35 \cdot 35 = 35^2 = 1225\ dm^2$.

Agora suponha uma parede de lado medindo (a + b) de comprimento por (a + b) de largura, então a área dessa parede será dada por $(a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Assim, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Geometricamente, é o mesmo que calcular a área de uma região quadrada de lado (a + b) (Dante, 2012).

Figura 11 – Quadrado da soma



Fonte: *Quadrado da soma.* Brasil Escola – UOL.[2]

Vejamos outros exemplos:

I) $(2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$

II) $(ax + b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$

III) $(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$

Obs.: O quadrado da diferença é de modo análogo.

3. 2. 2 Trinômio Quadrado Perfeito

Conforme visto acima o quadrado da soma de dois termos nos dá um trinômio quadrado perfeito. Por exemplo:

---

[2] Disponível em: https://www.google.com/imgres?imgurl=https://s1.static.brasilescola.uol.com.br/be/e/prod%2520notavel2.JPG&tbnid=q95YE32kjvoBkM&vet=1&imgrefurl=https://brasilescola.uol.com.br/49atemática/quadradosoma.htm&docid=BOQih0OaeRUd7M&w=205&h=183&source=sh/x/im/m5/1&shem=uvafe2&safe=active&ssui=on. Acessado: 22 de out. de 2023.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

O caminho inverso é a fatoração do trinômio quadrado perfeito (Dante, 2012). Veja:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

quadrado de **a** | quadrado de **b**

o dobro do produto de **a** e **b**

Observe outros exemplos:

I) $4a^2 + 4a + 1 = (2a + 1)^2$

II) $a^2x^2 + 2abx + b^2 = (ax + b)^2$

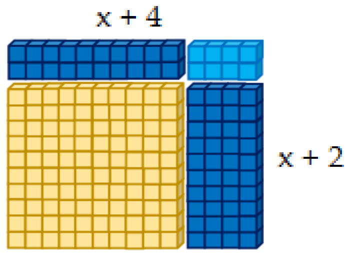
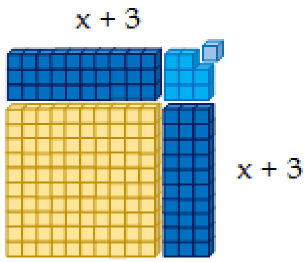
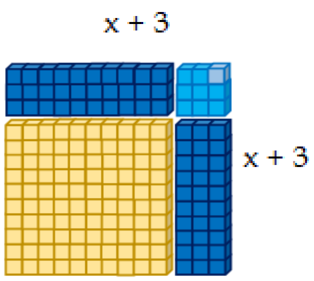
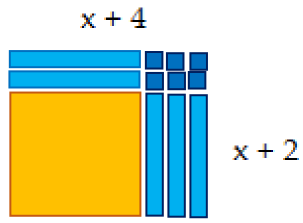
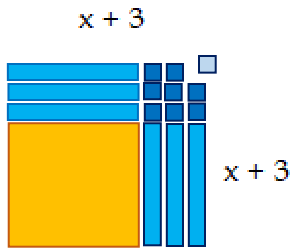
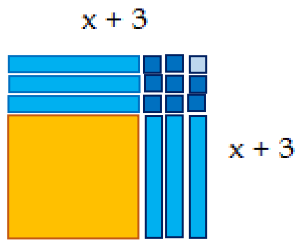
III) $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$

Depois da revisão do quadrado da soma de dois termos e do trinômio quadrado perfeito, retornemos a dois exemplos de equação do 2° grau para que os alunos determinassem as raízes ainda usando o Material Dourado.

O primeiro exemplo foi $x^2 + 6x + 8 = 0$. Conforme as execuções anteriores, os alunos construíram o retângulo e determinaram suas raízes, porém foi sugerido que construíssem um quadrado com as peças do retângulo formado. Porém, não sendo possível, foi sugerido pelo professor que adicionassem o menor número de peças, ou seja, que fossem acrescentando cubinhos até ser possível a construção do quadrado (Quadro 8). Após a composição, determinou-se as raízes, onde os alunos perceberam que coincidiam com a resposta anterior.

No momento de executar o cálculo, alguns se perguntaram se não sofreria alteração por adicionar um valor qualquer na equação. Certamente, alguém respondeu: ora, se adicionarmos quantidades iguais em membros de uma igualdade, o resultado não sofrerá alteração. Mas outra pergunta surgiu: E por que se adicionou o 1 e não um outro número inteiro qualquer? A escolha foi feita na tentativa de formar um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro. Ora, todo quadrado perfeito culmina em um quadrado da soma de dois termos. As raízes da equação $x^2 + 6x + 8 = 0$ apresentam como conjunto solução $S = \{-4, -2\}$. Veja no Quadro 8.

Quadro 8 – Representação da equação $x^2 + 6\,x + 8 = 0$ com Material Dourado e o seu desenho representativo assim como os passos do completar o quadrado e com a referida resolução

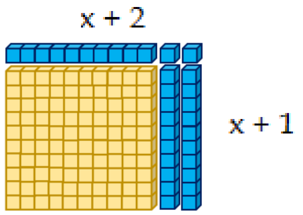
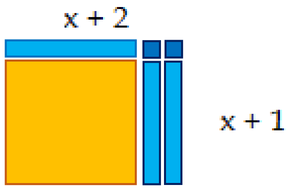
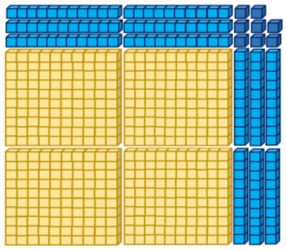
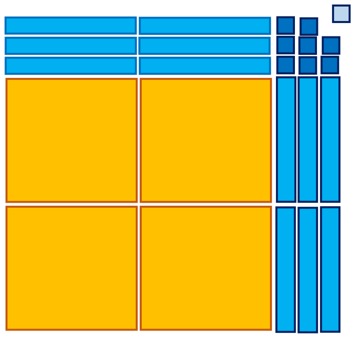
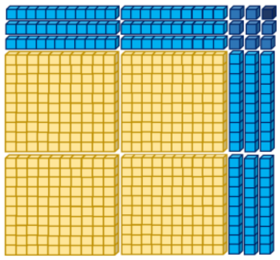
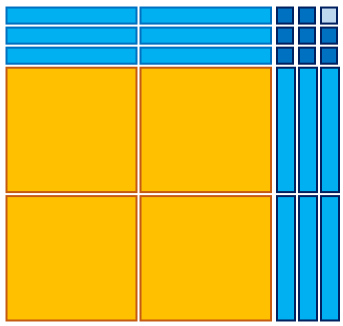
Material Dourado	Desenho Geométrico	Cálculo Numérico
 Adição de 1 cubinho  Com a adição de 1 cubinho, temos: 	  	$(x + 4) \cdot (x + 2) = 0$ $x + 4 = 0 \quad x + 2 = 0$ $x = -4 \quad x = -2$ $S = \{-4, -2\}$ $x^2 + 6x + 8 = 0$ $x^2 + 6x + 8 + 1 = 1$ $x^2 + 6x + 9 = 1$ $(x + 3) \cdot (x + 3) = 1$ $(x + 3)^2 = 1$ $x + 3 = \pm 1$ $x + 3 = 1 \quad x + 3 = -1$ $x = 1 - 3 \quad x = -1 - 3$ $x = -2 \quad x = -4$ $S = \{-4, -2\}$

Fonte: Próprio Autor, 2024

Um outro exemplo sugerido foi $x^2 + 3x + 2 = 0$, com coeficientes $a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$, onde utiliza-se uma placa para representar o x^2, 3 barrinhas azuis para representar o coeficiente do x e 2 cubinhos que correspondem ao termo independente. Com as peças formaram um retângulo, conforme visto anteriormente, pois esse exemplo foi feito no início da oficina (1°caso); porém, agora desejávamos construir um quadrado com as peças utilizadas na construção do retângulo. Percebemos que apenas adicionando cubinhos seria impossível a construção do quadrado, ou seja, obter um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação. Na tentativa de obter o trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação, a multipliquemos por 2, 3 e 4, obtendo do último produto $4x^2 + 12x + 8 = 0$, mas ainda não representava um trinômio. Percebeu-se que adicionando 1 em ambos os membros se obteria o que se almejava: o quadrado perfeito. Daí teríamos $4x^2 + 12x + 8 + 1 = 1$, que equivale $4x^2 + 12x + 9 = 1$, e que por sua vez $(2x + 3)^2 = 1$. Desenvolvendo temos $2x + 3 = \pm \sqrt{1}$, onde $2x + 3 = \pm 1$, que escrevemos $2x + 3 = -1$ e $2x + 3 = 1$. Resolvendo essas equações obtemos $x = -2$ e $x = -1$. Assim o conjunto solução da equação é $S = \{ -2, -1\}$. Observe o procedimento no Quadro 9 abaixo.

Quadro 9 – Representação da equação $x^2 + 3x + 2 = 0$ com Material Dourado, seus passos de completar o quadrado perfeito e o seu desenho representativo com a referida resolução

Material Dourado	Desenho Geométrico	Solução Numérica

		$(x + 2) \cdot (x + 1) = 0$ $x + 2 = 0 \qquad x + 1 = 0$ $x = -2 \qquad x = -1$ $S = \{-2, -1\}$
Multiplicando por 4 temos: 		$x^2 + 3x + 2 = 0$ $x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \cdot (+4)$ $4x^2 + 12x + 8 = 0$ $4x^2 + 12x + 8 + 1 = 0 + 1$ $4x^2 + 12x + 9 = 1$ $(2x + 3)^2 = 1$ $(2x + 3) = \sqrt{1}$ $(2x + 3) = \pm 1$ $2x + 3 = -1 \qquad 2x + 3 = 1$
Adicionando 1 teremos 		$2x = -1 - 3 \qquad 2x = 1 - 3$ $2x = -4 \qquad 2x = -2$ $x = -4/2 \qquad x = -2/2$ $x = -2 \qquad x = -1$ $S = \{-2, -1\}$

Fonte: Próprio Autor, 2024

Para finalizar ainda foi sugerido que os alunos determinassem as raízes da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Como teríamos que tentar construir um quadrado com *a* placas que representam o x^2, *b* barras que representam o x e *c* cubinhos que representam o termo independente, então teríamos que obter um quadrado perfeito no 1° membro da equação e isto representaria a área do quadrado. Para isso fomos executando alguns cálculos: subtraímos o racional c em ambos os membros da equação, depois multipliquemos por 4a ao resultado e em seguida adicionamos b^2 em ambos os membros. Tal procedimento é representado abaixo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c - c = 0 - c \text{ (Adicionando } - c)$$

$$ax^2 + bx = -c \text{ (Multiplicando por 4a)}$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \text{ (Adicionando } b^2\text{)}$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

O primeiro membro é um trinômio perfeito, onde fatoramos e obtemos:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Então as raízes da equação são $x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e seu conjunto solução é $S = \{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ; \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \}$.

E desse modo, obtemos o lado do quadrado que é 2ax + b, assim como a fórmula resolutiva da equação do 2° grau.

Finalizando essa ação, os próprios alunos apontaram que, com o uso do Material Dourado, conseguiram perceber a diferença entre as equações completas e incompletas. Para a construção de uma equação completa, utilizamos sempre as três peças do Material Dourado (placa, barra e cubinho), enquanto que nas equações incompletas nem sempre empregamos todas as peças.

Observaram também que pelo método de completar quadrados, só podem resolver equações que formam quadrados ou retângulos, e como nem todas as equações formam essas figuras, então necessita-se do uso da fórmula resolutiva, apresentada acima. Com a fórmula em "mãos" e para que os alunos pudessem familiarizar-se com ela, os mesmos foram verificar os resultados das equações já realizadas.

A forma lúdica utilizada para determinar as raízes da equação do 2° grau, que se deu através da manipulação das peças do Material Dourado, se tornou bem divertida e dinâmica, sem contar que os alunos aprenderam brincando a resolver as equações. A seguir detalhamos sobre como se deu nossa pesquisa, assim como o campo de intervenção e sujeitos da pesquisa.

4 METODOLOGIA: OS CAMINHOS DA PESQUISA

Do tipo bibliográfica, que, segundo Severino (2013), é toda investigação que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses e etc., e utiliza-se de dados ou de esferas teóricas já trabalhadas por outros pesquisadores e que são devidamente registradas. Os textos configuram-se como fontes dos temas a serem analisados, em que o pesquisador se embrenha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos.

A investigação deu-se no ambiente do pesquisador, na Escola ... e foi aplicada em uma turma do nono ano do Ensino Fundamental do turno vespertino. Foi selecionado o conteúdo Equação do 2° grau, por perceber, depois de anos de docência que os alunos apresentavam dificuldades com relação ao conteúdo. Ela deu-se através de 20 aulas expositivas, explicações, execução e aplicações de experimentos. Se usou o Material Dourado, que por meio da relação da equação do 2° grau com a sua respectiva construção geométrica e sua área, pudéssemos determinar as raízes da equação, sem, em um primeiro momento, a necessidade de se utilizar fórmulas. Nas barras do Material Dourado contornou-se fita isolante de cor vermelha e azul para representar, respectivamente, o coeficiente *b*, quando negativo ou positivo, enquanto que a placa e cubinhos permaneceram na cor original. Essa adaptação foi para evitar de pintar as peças, pois o material é do laboratório da própria escola ... Posteriormente, veio o momento de se calcular as raízes, após novas aulas expositivas, porém sem o uso do material concreto, recorrendo-se, agora, da fórmula resolutiva, ou seja, da Fórmula de Bhaskara. Após os experimentos registrados, foi feita a análise, comparando a determinação das raízes com o uso do material manipulado e através do uso da fórmula resolutiva.

4.1 A DESCRIÇÃO DA PESQUISA

Esta seção apresenta as principais fases executadas ao longo deste estudo, tendo início em 8 de setembro de 2023 e finalizando em 2 de outubro do mesmo ano, com uma breve descrição e o relacionamento entre estas etapas. A primeira etapa deu-se através de aulas expositivas. Durante essas aulas, foi ministrado o conteúdo "Introdução de equação do 2° grau", evidenciando a definição e condição de existência de uma equação do 2° grau; identificação dos coeficientes e conceito de raízes de uma equação do 2° grau. Na segunda etapa, apresentamos o Material Dourado, explicando o mesmo, sua adaptação, e o real objetivo do seu uso e como deveríamos aplicá-lo, exemplificando através de exemplos projetados na lousa. Na oportunidade, retomou-se a determinação de áreas de retângulos e quadrados, considerando o material como bidimensional.

Na terceira etapa, foi sugerido formações de grupos para que estes discutissem e, usando o Material Dourado, determinassem as raízes da equação do 2° grau dos exemplos propostos, primeiramente, com todos os coeficientes positivos.

Na quarta fase, deu-se início a determinação das raízes das equações do 2° grau completa, com pelo menos um coeficiente negativo, porém, adaptando a barra e o cubinho do Material Dourado, circundando partes das peças com fitas azuis e vermelhas. Todavia, sendo as peças de azul para representar coeficientes positivos e de vermelho para se referir a peças negativas.

A quinta fase explorou-se as raízes das equações do 2° grau com o coeficiente b ou c nulo. Nos exemplos propostos para o coeficiente b igual a zero foi necessário a intervenção do professor na grande maioria dos grupos enquanto nos exemplos em que o coeficiente c foi igual a zero os alunos se saíram muito bem. Também, foram colocados exemplos em que não existia raízes dentro dos números reais ou até mesmo quando o discriminante não pertencia ao conjunto dos números inteiros, contudo os alunos alegaram não conseguirem construir o retângulo ou quadrado com as peças do Material Dourado.

A primeira Atividade Avaliativa ocorreu na sexta fase, onde os alunos tiveram que responder em dupla 5 questões referente ao que se havia estudado. As atividades foram desenvolvidas em duplas objetivando a interação dos alunos, a discussão sobre a matéria e aplicação ao material concreto, tornando o conteúdo lúdico, interativo e dinâmico.

Como faltava discutir a fórmula Resolutiva da Equação do 2° grau, logo foi necessário ainda 5 encontros, em que um dos desafios foi a correlação da fórmula com o Material Dourado. Então, tomamos a representação genérica da equação do 2° grau ($ax^2 + bx + c = 0$) e a partir de cálculos algébricos, conseguimos um trinômio quadrado perfeito e, deste, obtemos o quadrado da soma de dois termos, ou seja, a área de um quadrado de lado ($2ax + b$), resultando na fórmula resolutiva para as equações do 2° grau. Exemplos diversos foram executados pelos alunos, em que praticaram bastante o emprego da fórmula.

A última intervenção veio com a segunda Atividade Avaliativa em que os alunos responderam as mesmas questões da atividade 1, porém utilizando a fórmula de Bhaskara.

4.2 A ESCOLA CAMPO DE INTERVENÇÃO

Desenvolvemos a pesquisa na escola ... Esta possui atualmente o Ensino Fundamental e Médio nos turnos matutino e vespertino. Quando inaugurada em 1972 funcionava nos três turnos: o Fundamental Menor (do Pré-escolar ao 5° ano), o Fundamental Maior (do 6° ao 9° ano) e o Ensino Médio formado pelas 3 séries (1ª, 2ª e 3ª) e o Ensino Profissionalizante. Este oferecia os cursos de Assistente de Administração, Auxiliar de Escritório, Auxiliar de Enfermagem (1988 passa a Técnico), Secretariado Executivo, Técnico de Secretariado Escolar, Técnico de Contabilidade, Técnico de Agropecuária (Esse curso funcionava em regime de Inter complementaridade com a Escola Técnica de Jundiaí e posteriormente com a Escola de Agricultura de Mossoró, (Escola Superior de Agricultura de Mossoró – ESAM, hoje UFERSA).

A escola conta com laboratórios de química, biologia, informática, física, matemática, estes dois últimos, desativados há dois anos por questões estruturais de outras salas da escola e, assim, foram cedidas para salas de aulas comum; um auditório, uma biblioteca, um audiovisual, pátios de recreio, uma cantina e um ginásio de esporte sem cobertura. Há apenas 2 banheiros coletivos, sendo o masculino com 6 sanitários e 3 mictórios e o banheiro feminino possui 6 sanitários. Tem-se ainda 2 banheiros coletivos para os funcionários sendo cada um com dois sanitários.

Depois de 50 anos de história, sem passar por reformas aparentes, a escola se encontra muito deteriorada, tendo salas, banheiros e um bloco desativados. Uma reforma está para se concretizar. Constituem a escola 922 alunos, 85 professores e 34 funcionários. A escola possui 20 salas de aula, sendo 31 turmas, distribuídas em 19 no turno matutino e 12 no turno vespertino.

A escolha desta escola para a realização da nossa pesquisa foi determinada pelo fato de fazermos parte do quadro de professores e trabalhar com turmas do 9° ano. Desse modo, temos conhecimento, de seu planejamento, funcionamento da sua estrutura, disciplina, que me dão base para enriquecer a pesquisa. A escola se manifestou aberta para a mesma, concedendo-nos a autonomia para fazer as análises e a aplicação da testagem, mantendo-nos a disposição para ajudar no que fosse necessário.

4.3 OS SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada no ano de 2023, na escola ... da rede pública de ensino, localizada na cidade de Mossoró – RN e são sujeitos da pesquisa alunos do 9° ano do Ensino Fundamental, pois nesta série, geralmente, se inicia o estudo do Equação do 2° grau.

Os alunos que compõem essa turma do 9° ano não apresentam, na sua grande maioria, um bom poder aquisitivo, porém todos tem acesso à internet. Entretanto, e em menor quantidade, tem alguns que vieram de escolas particulares; distribuídos pelos bairros circunvizinhos ao da escola, mas também tem alguns que moram em regiões rurais, sendo levados para a escola pelos pais ou por transporte escolar e/ou vão de bicicleta juntamente com amigos da própria sala ou de outras turmas. Grande maioria dos alunos estudam na escola desde o 6° ano. Há nesta turma um certo respeito por parte dos alunos em relação à prestação de serviços da escola. Possuem o entendimento de que professor está ali para ensinar e normalmente apresentam bom comportamento em sala. A grande maioria dos alunos, cumprem as regras básicas estabelecidas pela escola e pelos professores. Aderem as exigências e demonstram interesse em aprender regras para um bom convívio. A idade média destes alunos é de 14 anos e participaram da pesquisa 22 alunos.

4.4 O CONTEÚDO EXPLORADO

O conteúdo que resolvemos explorar nessa pesquisa foi Equação do 2° grau, dando ênfase na determinação de suas raízes, conteúdo este ministrado no 9° ano do Ensino Fundamental. Diante da nossa experiência como docente, vimos o quanto os alunos sentiam dificuldades na aplicação da fórmula resolutiva da equação do 2° grau, além do número de operações e cálculos que se deve executar para obtenção das raízes.

De início, estudamos a definição de equação do 2° grau e a identificação dos coeficientes, assim como sua classificação quanto a sua completude: completa ou incompleta, precedida da verificação se representa ou não uma equação do 2° grau. A forma reduzida das equações quadráticas também foi mencionada.

O conceito de raízes da equação do 2° grau foi estudado assim como sua determinação que se deu através do Material Dourado, seguida do uso da fórmula resolutiva, sendo observado tanto nas equações incompletas quanto nas completas. Com o Material Dourado ainda exploramos o conceito de áreas de retângulos, além de expressões algébricas e suas operações, especialmente a adição algébrica e a multiplicação. Foi explorado também Produto Notável, destacando-se o quadrado da soma de dois termos e dos casos de Fatoração o do trinômio quadrado perfeito.

4.5 INTERVENÇÃO

Através de aulas teóricas e expositivas iniciamos nossa intervenção, onde tivemos vários encontros explicando, conceituando e estudando sobre equações do 2° grau e suas raízes. Depois apresentamos, adaptamos e usamos o Material Dourado para determinar os zeros das equações. Para finalizar a nossa intervenção, introduzimos a fórmula resolutiva da equação quadrática contida nos livros do 9° ano para poder também se determinar as raízes das equações.

5 PROPONDO UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O MATERIAL DOURADO

Constituída de 20 aulas, com duração de 50 minutos cada, culminando em 12 encontros, nossa sequência didática propõe a determinação das raízes das equações do 2° grau através do uso do Material Dourado, possibilitando trabalhar agregadamente aritmética, geometria e álgebra.

Iniciamos a proposta utilizando quatro aulas. Começamos com uma introdução do conteúdo, que decorreu com um problema do cotidiano do aluno, seguida da definição e representação genérica da equação do 2° grau, assim como a identificação dos seus coeficientes e condição de existência. Também foi mencionado a classificação quanto sua completude: completa e incompleta. Exercícios sobre o conteúdo ministrado foi sugerido para ser feito pelos alunos e posteriormente discutidos em sala.

Após a introdução do conteúdo, tomou-se duas aulas para se definir o conteúdo Raiz de uma equação do 2° grau e responder alguns exercícios do material didático do aluno.

A apresentação do Material Dourado, assim como sua adaptação e manipulação do mesmo, transportou-se em 6 aulas. Após o primeiro manuseio do material por parte dos alunos, exemplos foram exibidos na lousa pelo professor, explicando a técnica, conforme é exibida no subcapítulo 3.2. Posteriormente, equações do 2° grau foram projetadas na lousa para que os alunos determinassem as raízes. Os exemplos foram sendo exibidos e solucionados no decorrer das aulas, obedecendo o grau de dificuldade que variava da equação completa com coeficientes positivos, passando por coeficientes negativos às equações incompletas ou com discriminante negativo e ou não representasse um quadrado perfeito.

Durante as aulas práticas, após alguns exemplos realizados pelos alunos, houve a inquietação por parte de alguns: não podia ainda ser mais prático, não necessitando, sequer, executar qualquer espécie de cálculo para resolver as equações do 1º grau? Por que não apenas fazer o desenho geométrico das respectivas equações, identificar e anotar as raízes? Então, pensemos e sugerimos aos alunos que após ‘representar’ as equações com o Material Dourado, que culminava em um produto de equações do 1° grau, não as resolvessem conforme se calcula a raiz de uma equação do 1° grau com uma incógnita, mas, seguissem os seguintes passos:

* Transformar as equações do 2° grau em um produto de duas equações do 1° grau, usando o Material Dourado (mostrado acima no subcapítulo 3.2, através dos 6 casos);

* Para resolver as equações do 1° grau com a técnica desenvolvida na sala pela necessidade de transformá-la em uma metodologia lúdica, divertida, tomou-se os 6 casos acima e foi-se executando conforme consta abaixo:

I) Para o **1° caso** os alunos executaram o exemplo proposto sem dificuldades, ou seja, construíram o retângulo através da equação tranquilamente. Em seguida, falamos para os alunos que das expressões $x + 2$ e $x + 1$, considerassem o oposto da parte numérica, ou seja, das laterais do retângulo formado, tomassem o oposto da quantidade de unidades 1 da lateral do cubinho, obtendo -2 de um dos lados e -1 no outro. Não importando qual lado do retângulo viesse admitir, o conjunto solução seria o mesmo. As raízes da equação $x^2 + 3x + 2 = 0$ são { -2, -1}.

II) No **2° caso** mais uma vez partindo do pressuposto em que os alunos queriam obter as soluções assim que montassem o retângulo, todavia sem o uso da caneta e do papel. Então, para resolver as equações do primeiro grau $-x + 2 = 0$ e $-x + 3 = 0$ e obter as suas respectivas raízes, fez-se: tomemos o oposto da quantidade de unidade 1 no lado $-x + 2$, obtendo – 2. Como a barra é negativa, ou seja, menos x, então faremos o jogo do sinal com o menos do 2, obtendo 2, que representa uma das raízes. A outra raiz é obtida de modo análogo ao procedimento anterior, toma-se o oposto da quantidade de unidades 1 do lado $-x + 3$, obtendo - 3. Fazendo o jogo do sinal do menos do 3 com o menos do x, finalmente encontra-se o 3, a segunda raiz da equação. O conjunto solução da equação $-x^2 + 5x - 6 = 0$ é {2, 3}.

III) Enquanto no **3° caso**, na execução em sala, os alunos determinaram as raízes observando as laterais do retângulo formado, ou seja, resolveram as equações $2x + 1 = 0$ e $x + 1 = 0$, fazendo da seguinte maneira: pegou-se o oposto da quantidade de unidades 1 do lado do retângulo $2x + 1$, resultando - 1. Como há duas barras, essa quantidade passa a dividir o número -1, resultando a primeira raiz: -1/2. A segunda raiz é obtida, tomando o oposto da quantidade de unidades 1 do lado $x + 1$, que dá – 1 e este é dividido pela quantidade de barras que no lado considerado há apenas uma barra. Por sabermos que dividir qualquer número por 1, resulta naquele qualquer número, então -1 dividido por 1 resulta em -1, que será a segunda raiz. O conjunto solução da equação $2x^2 + 3x + 1 = 0$ é {-1/2, -1}.

IV) Prosseguimos e no **4° caso** os alunos determinaram as raízes da equação $x^2 - 4 = 0$ através das medidas dos dois lados do retângulo. Do lado $x - 2$, tomou-se o oposto da quantidade de unidades -1, obtendo +2. Como o sinal do x é positivo em virtude de a barra ser azul, então fazendo o jogo do sinal ficaria positivo, logo a primeira raiz é x = 2. De $x + 2$ tomou-se o oposto da quantidade de unidades 1, resultando em -2, que representa a segunda raiz da equação. Então as raízes da equação são -2 e 2.

V) Já no **5° caso** os alunos determinaram as raízes da equação $2x^2 - 3x = 0$, através das medidas da lateral do retângulo do Quadro 6. Do lado 2x – 3, tomou-se o oposto da quantidade de unidades -1, resultando em 3. O número 2 que representa a quantidade de placas, passa a dividir o número 3, formando assim a primeira raiz da equação: x = 3/2. Como não há unidades, então representamos a ausência de valores usando o zero, logo a outra raiz é nula. O conjunto solução da equação é {0, 3/2}.

VI) E para finalizar tivemos o **6° caso** em que os alunos alegaram que não conseguiram formar retângulo nem quadrado com as peças, inclusive tomando peças extra e obedecendo aos critérios de construção, ou seja, se tomassem peças azuis, o mesmo número de peças vermelhas deveria ser pego, isso para manter a igualdade; porém nem assim foi possível a formação. Os alunos escreveram que não havia solução para a equação $x^2 + 2x + 2 = 0$. Foi destacado pelo professor que existem equações que não é possível determinar as raízes através da operacionalização do material utilizado, assim como tem outras que nem raízes possuem dentro do conjunto dos números reais.

Após a realização de uma atividade avaliativa, retomou-se a discussão sobre as equações que não são possíveis determinar as soluções com o Material Dourado. Introduziu-se a Fórmula Resolutiva da equação do 2° grau, conhecida também como Fórmula de Bhaskara, sua origem, demonstração, além de registrá-la como ‘mecanismo’ capaz de resolver todas as equações, inclusive as que não são possíveis com o Material Dourado. Diversos exemplos foram realizados na sala, determinando as raízes utilizando a Fórmula de Bhaskara. Uma variedade de exercícios do livro do aluno foi discutido e resolvido. Para essas tarefas, foram utilizadas 4 aulas. Finalizou-se com uma segunda atividade avaliativa.

5.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Apresentamos os conteúdos: definição de equação do 2° grau; representação genérica; coeficientes da equação do 2° grau; equação completa e incompleta; cálculo numérico da equação quadrática. Iniciemos nossa ação apresentando a definição de Equação do 2° grau, que se deu através de exemplos contextualizados. E nos encontros posteriores discutimos condição de existência e raízes de uma equação quadrática. Nos momentos seguintes fizemos o resgate do conhecimento dos alunos sobre áreas de quadriláteros, ou seja, sobre as áreas do retângulo e do quadrado. Um questionário foi entregue para ser debatido em sala.

O uso do Material Dourado adaptado para resolver as equações foi o nosso foco, onde finalizamos com a apresentação e emprego da fórmula resolutiva da equação do 2° grau.

5.1.1 Apresentando o conteúdo – Aula Introdutória (4 aulas)

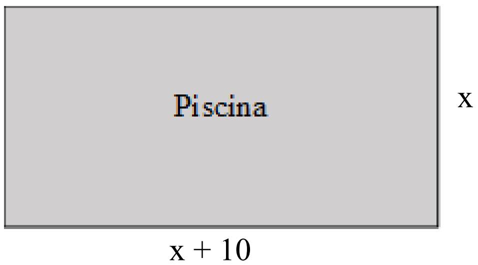
Equação do 2° grau - Definição

Considere a situação a seguir. O engenheiro Vítor recebeu uma encomenda para a construção de uma piscina retangular, com duas exigências:

1ª) comprimento medindo 10 m a mais que a largura;

2ª) área medindo 144 m^2. Para determinar as medidas da largura e do comprimento dessa piscina, Vítor representou a da largura por x, e a do comprimento por x + 10 (Figura 13).

Figura 12 – Planta da piscina



Fonte: O próprio autor, 2024.

Como a medida da área de um retângulo é o produto das medidas da largura e do comprimento, ele escreveu:

$$x \cdot (x + 10) = 144 \text{ ou } x^2 + 10x - 144 = 0.$$

Observe que a equação obtida, $x^2 + 10x - 144 = 0$, tem uma só incógnita (x), cujo maior expoente é 2. Ela é um exemplo de equação do 2º grau com uma incógnita (Bianchini, 2022), ou seja, a **equação do segundo grau** recebe esse nome porque é uma equação polinomial cujo termo de maior grau está elevado ao quadrado. Também chamada de equação quadrática, é representada por:

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, em que a, b, c são números reais e $a \neq 0$.

O valor do maior expoente da letra x define de qual grau será a equação. Quanto aos números reais a, b e c, são denominados de coeficientes, de modo que:

* o coeficiente **a** está multiplicando a incógnita x^2;

* o coeficiente **b** está multiplicando a incógnita x;

* o coeficiente **c** o termo independente.

Observe os exemplos a seguir e determine quais são os que representam uma equação e qual o grau:

I) $x + 2 = 3$	II) $x^2 - 3x + 4 = 0$	III) $3x^2 - 12 = 0$
IV) $m^2 + 4x > 0$	V) $a^3 - 27= 0$	VI) $n^2 + 7n = 0$

O exemplo I é uma equação, pois possui letra, números, operações matemáticas e o sinal da igualdade. Como o expoente da incógnita é 1, logo, equação do 1° grau;

Do exemplo II temos uma equação e do 2° grau, visto que possui a letra x, números, operações matemáticas, o sinal da igualdade e o maior expoente da letra é 2;

Enquanto o exemplo III há letra, números, operações matemáticas, sinal da igualde e o maior expoente da incógnita é 2, assim é uma equação do 2° grau;

No exemplo IV tem-se letra, números, operações matemáticas e não há o sinal da igualde, logo não é uma equação;

Já no exemplo V temos letra, números, operações matemáticas e o sinal da igualdade, assim é uma equação, porém do 3°, visto que o expoente da letra é 3;

Quanto ao exemplo VI por ter letra, números, operações matemáticas e sinal de igualdade, logo representa uma equação. Como o maior expoente das letras é 2, assim uma equação do 2° grau.

Uma equação do 2º grau é considerada completa quando os coeficientes b e c são diferentes de zero, e é incompleta quando b = 0 ou c = 0, ou, ainda, b = 0 e c = 0 (Bianchini, 2022).

Das equações do 2° grau do exemplo anterior, determine seus respectivos coeficientes e classifique-as quanto a sua completude: completa ou incompleta.

II) $x^2 - 3x + 4 = 0$, onde a = 1; b = -3 e c = 4. Equação completa.

III) $3x^2 – 12 = 0$, com a = 3, b = 0 e c = -12. Equação incompleta.

VI) $n^2 + 7n = 0$, assim a = 1, b = 7 e c = 0. Equação incompleta.

Segue um exercício Extra classe do Livro de Matemática (Bianchini, 2015).

Figura 13 – Exercícios de equação do 2º grau

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

2. a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ b) $x^2 + 4x - 3 = 0$ c) $y^2 - 8y = 0$ d) $-5x^2 - 30x - 40 = 0$ e) $3x^2 - 10x + 2 = 0$ f) $x^2 - 6x - 4 = 0$

1 No caderno, verifique quais das equações a seguir são do 2º grau e identifique os coeficientes a, b e c. alternativas a, d, e, f

a) $8x^2 + 17x + 4 = 0$ $a = 8; b = 17; c = 4$

b) $3x - 5 = 0$

c) $0x^2 + 10x - 8 = 0$

d) $-\frac{y^2}{5} - 25 = 0$ $a = -\frac{1}{5}; b = 0; c = -25$

e) $4y^2 - 5y = 0$ $a = 4; b = -5; c = 0$

f) $-9 + x^2 = 0$ $a = 1; b = 0; c = -9$

2 Escreva as equações do 2º grau a seguir na forma reduzida e classifique-as em completa ou incompleta.

a) $2x^2 - 5x = -2$ completa

b) $x^2 + 6x = 2x + 3$ completa

c) $y^2 = 8y$ incompleta

d) $-5x^2 = 30x + 40$ completa

e) $3x \cdot (x - 2) = 2 \cdot (2x - 1)$ completa

f) $(x + 4) \cdot (x - 5) = 5x - 16$ completa

CAPÍTULO 4 | EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Dados os coeficientes a, b e c, escreva as equações do 2º grau correspondentes.

a) $a = 5; b = -7; c = 0$ $5x^2 - 7x = 0$

b) $a = -1; b = 3; c = -4$ $-x^2 + 3x - 4 = 0$

c) $a = 2; b = 0; c = 4$ $2x^2 + 4 = 0$

d) $a = -\frac{1}{2}; b = \frac{5}{7}; c = \sqrt{2}$ $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{7}x + \sqrt{2} = 0$

4 Para que valor de n a equação $(5n + 2)x^2 - 4nx + n = 0$ não é do 2º grau? $n = -\frac{2}{5}$

Fonte: (Bianchini, 2015, p. 109 – 110)

5.1.2 Raízes de uma equação do 2° grau - (2 aulas)

Definimos como soluções ou raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ os valores de x que fazem com que essa igualdade seja verdadeira. Uma equação do 2° grau pode ter no máximo dois números reais que representam suas raízes.

Exemplo: Dos números –4, -2, 3 e 1, quais são raízes da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Para x = - 4, temos $(\mathbf{-4})^2 + 3 \cdot (\mathbf{-4}) - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$, todavia -4 é uma raiz.

Para x = -2, temos $(\mathbf{-2})^2 + 3 \cdot (\mathbf{-2}) - 4 = 4 - 6 - 4 = -6 \neq 0$, porém não é uma raiz;

Para x = 3, temos $\mathbf{3}^2 + 3 \cdot \mathbf{3} - 4 = 9 + 9 - 4 = 14 \neq 0$, assim o 3 não é uma solução.

Para x = 1, temos $\mathbf{1}^2 + 3 \cdot \mathbf{1} - 4 = 1 + 3 - 4 = 0 = 0$, logo 1 é uma raiz da equação;

Portanto, o conjunto solução da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$ é {-4, 1}.

Mas para se determinar as raízes da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$ tivemos que analisar os 4 números inteiros, executar cálculos e identificar as raízes. Todavia, não teria um método simples e eficaz para determinar as raízes e assim evitar essa busca dentre a infinidade de números reais? Claro que temos alguns métodos, Fórmula resolutiva, soma e produto, completar quadrados, etc., porém tentaremos usar o Material Dourado para

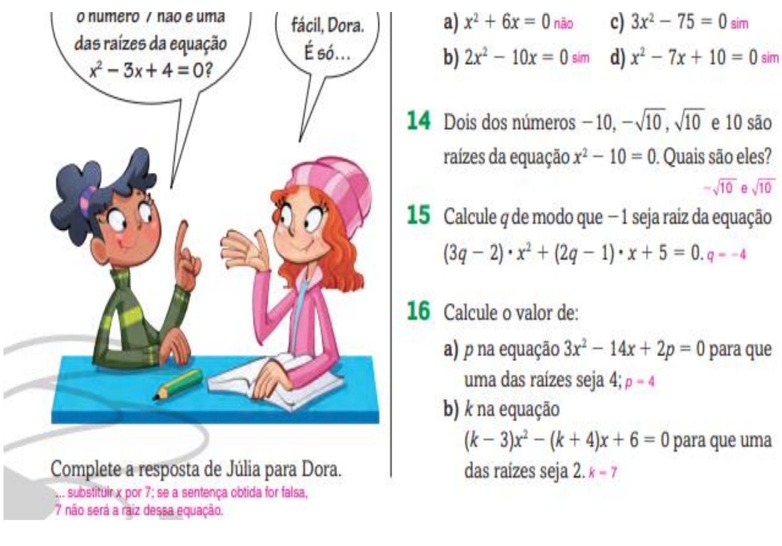
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

11 Observe o diálogo entre Júlia e Dora.

12 Verifique, entre os números 2, −5, 9 e 10, quais são raízes da equação $x^2 - 11x + 18 = 0$. 2 e 9

Figura 14 – Atividade realizada na sala - raízes da equação do 2º grau



Complete a resposta de Júlia para Dora. ... substituir x por 7; se a sentença obtida for falsa, 7 não será a raiz dessa equação.

a) $x^2 + 6x = 0$ não
b) $2x^2 - 10x = 0$ sim
c) $3x^2 - 75 = 0$ sim
d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ sim

14 Dois dos números -10, $-\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$ e 10 são raízes da equação $x^2 - 10 = 0$. Quais são eles? $-\sqrt{10}$ e $\sqrt{10}$

15 Calcule q de modo que -1 seja raiz da equação $(3q - 2) \cdot x^2 + (2q - 1) \cdot x + 5 = 0$. $q = -4$

16 Calcule o valor de:

a) p na equação $3x^2 - 14x + 2p = 0$ para que uma das raízes seja 4; $p = 4$

b) k na equação $(k - 3)x^2 - (k + 4)x + 6 = 0$ para que uma das raízes seja 2. $k = 7$

determinar essas raízes. Abaixo (Figura 16) foi solicitado uma atividade que seria realizada na sala para os alunos exercitarem seus conhecimentos.

Fonte: Bianchini, 2015, p.112.

5.1.3 Apresentação e manipulação do Material Dourado - (6 aulas)

Nessa aula apresentamos o Material Dourado, suas peças, adaptações e objetivo do uso. Dos 20 alunos em sala, foi sugerido pelo professor que fizessem duplas. Em seguida, tomassem o Material Dourado e manuseassem cada peça. As orientações foram repassadas pelo professor. Alguns alunos já conheciam o material, falaram que professores em séries anteriores usaram quando trabalharam conteúdos como unidade, dezena e centena, especialmente na alfabetização e na primeira série.

A partir da apresentação, exemplos são explicados e outros são sugeridos para que os alunos, utilizando o Material Dourado, calculem as raízes das equações. Os exemplos sugeridos foram:

Aulas II e III: Ex.1: $x^2 + 3x + 2 = 0$ Ex.2: $x^2 + 5x + 4 = 0$

Ex.3: $x^2 + 7x + 6 = 0$ Ex.4: $x^2 – 3x + 2 = 0$

Ex.5: $x^2 - 5x + 4 = 0$ Ex.6: $x^2 + x - 12 = 0$

Ex.7: $x^2 - 9x - 7 = 0$ Ex.8: $x^2 + 3x + 5 = 0$

Aulas IV e V: Ex.9: $x^2 – 5x = 0$ Ex.10: $3p^2 + 2m = 0$

Ex.11: $x^2 – 4 = 0$ Ex.12: $x^2 – 16 = 0$

Ex.13: $2x^2 + 3x = 0$ Ex.14: $3x^2 + 4x + 1 = 0$

Ex.15: $– x^2 – 9x + 20 = 0$ Ex. 16: $5t^2 – 9t + 4 = 0$

Aula VI: Ex.17: $4p^2 – 20p + 25 = 0$ Ex.18: $x^2 + 14x + 49 = 0$

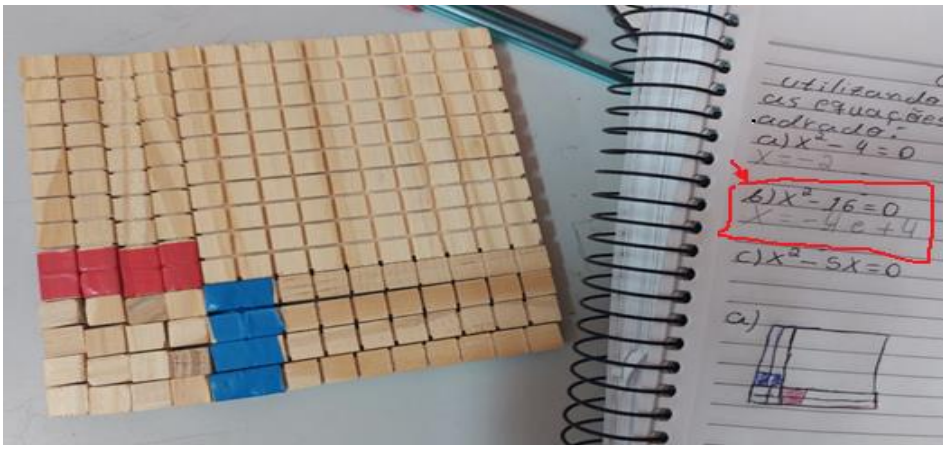
Ex.19: $5y^2 – 9y – 2 = 0$ Ex.20: $2y^2 + 7y + 6 = 0$

Ex.21: $5y^2 – 9y – 2 = 0$ Ex.22: $x^2/2 + 8 = 5x$

Todos os exemplos foram executados pelos alunos em sala durante as 6 aulas. Abaixo há algumas fotografias das construções.

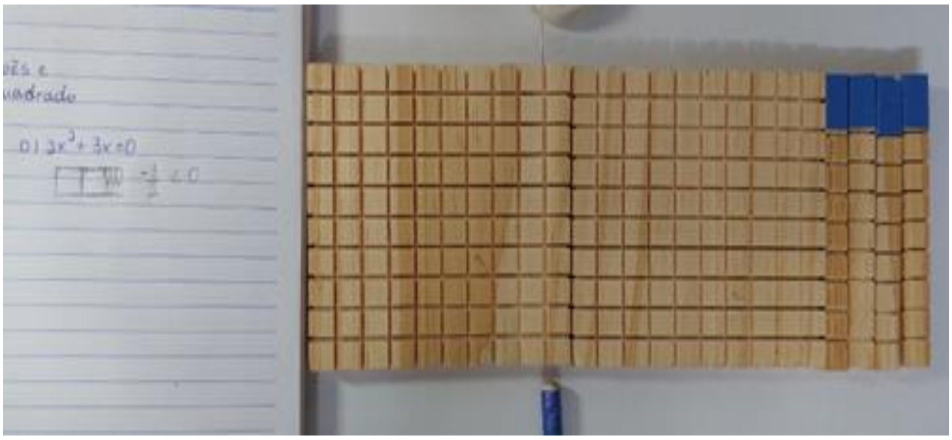
Nas Figuras 17, 18 e 19 há a construção geométrica e as soluções das equações $x^2 - 16 = 0$, $2x^2 + 3x = 0$ e $3x^2 + 4x + 1 = 0$, respectivamente, através do uso do Material Dourado, executadas durante uma aula prática pelos alunos. Esta aula foi uma preparação para a primeira atividade avaliativa. Enquanto que na Figura 20 tem-se os desenhos e soluções de alguns exemplos sugeridos na lousa de um dos grupos realizado no decorrer da aula de orientação. Todos os alunos faziam a construção com o uso do Material Dourado e em seguida desenhavam nos seus respectivos cadernos, além de determinar as soluções das equações do 2° grau.

Figura 15 – Registro da atividade de um grupo durante a aula de orientação: equação x^2 - 16 = 0.



Fonte: Próprio Autor, 2024

Figura 16 – Registro da atividade de um grupo durante a aula de orientação: equação $2x^2 + 3x = 0$.

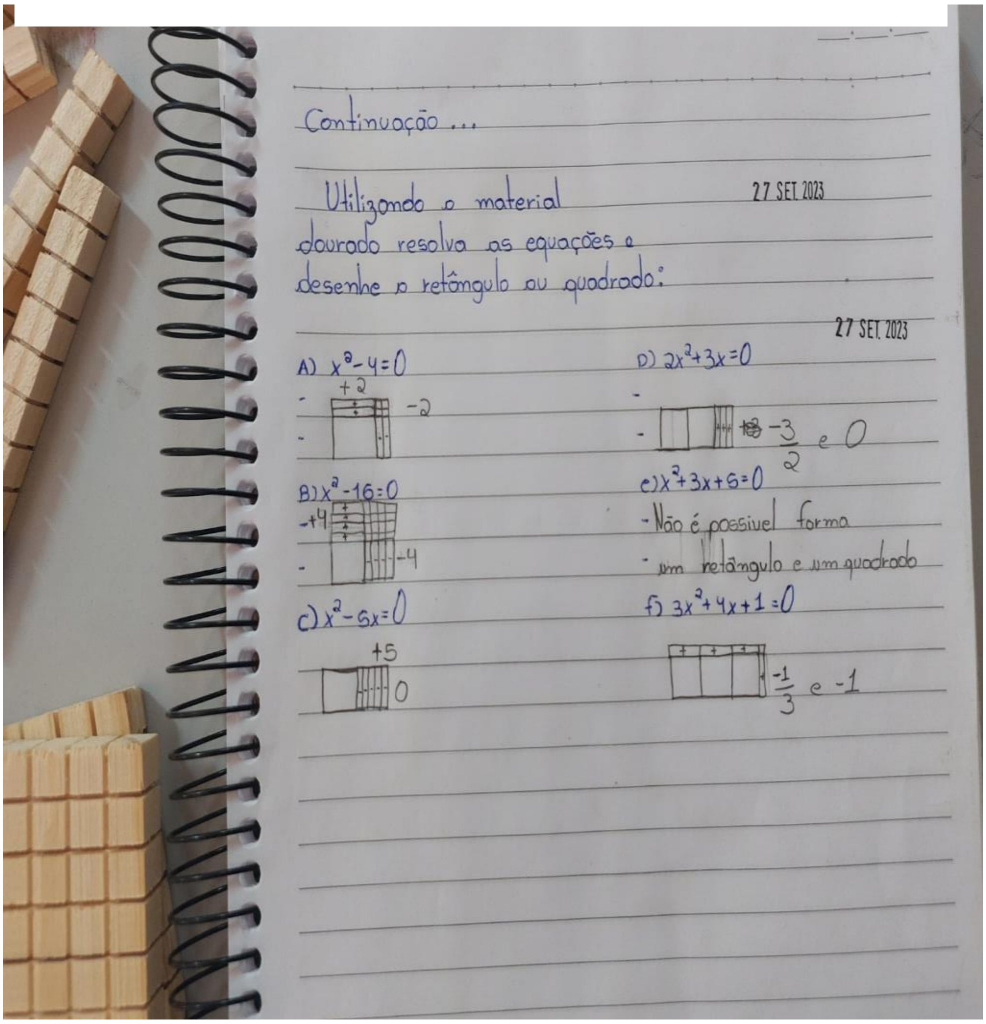


Fonte: Próprio Autor, 2024

Figura 17 – Registro da atividade de um grupo durante a aula de orientação: equação $3x^2 + 4x + 1 = 0$.

Fonte: Próprio Autor, 2024

Figura 18 – Registro da atividade de um grupo durante a aula de orientação: equações $x^2 - 4 = 0$; $x^2 - 16 = 0$; $x^2 - 5x = 0$; $2x^2 + 3x = 0$; $x^2 + 3x + 5 = 0$ e $3x^2 + 4x + 1 = 0$ mediante a manipulação do Material Dourado.



Fonte: Próprio Autor, 2024.

Após a aula e os alunos se considerarem aptos a realizarem a Atividade Avaliativa Bimestral -TESTE, marcou-se então a realização para o próximo encontro.

5.1.4 Atividade Avaliativa Bimestral – TESTE – 1ª PARTE - (2 aulas)

Nessas duas aulas foi aplicada a atividade avaliativa bimestral. Foi desenvolvida em dupla ou individual e objetivava avaliar a compreensão dos alunos na determinação das raízes da equação do 2° grau, utilizando como recurso o Material Dourado. A atividade deveria ser executada durante as duas aulas, sendo de 50 minutos cada. Os alunos deveriam determinar as raízes das equações que estavam em uma folha impressa, entregue pelo professor. De modo geral, responderam as 5 questões sem muitas dificuldades. Porém tiveram alunos que se destacaram mais, em que, rapidinho concluíram, enquanto que outros utilizaram o tempo inteiro determinado para a execução da atividade. A atividade Avaliativa Bimestral se encontra no Anexo I.

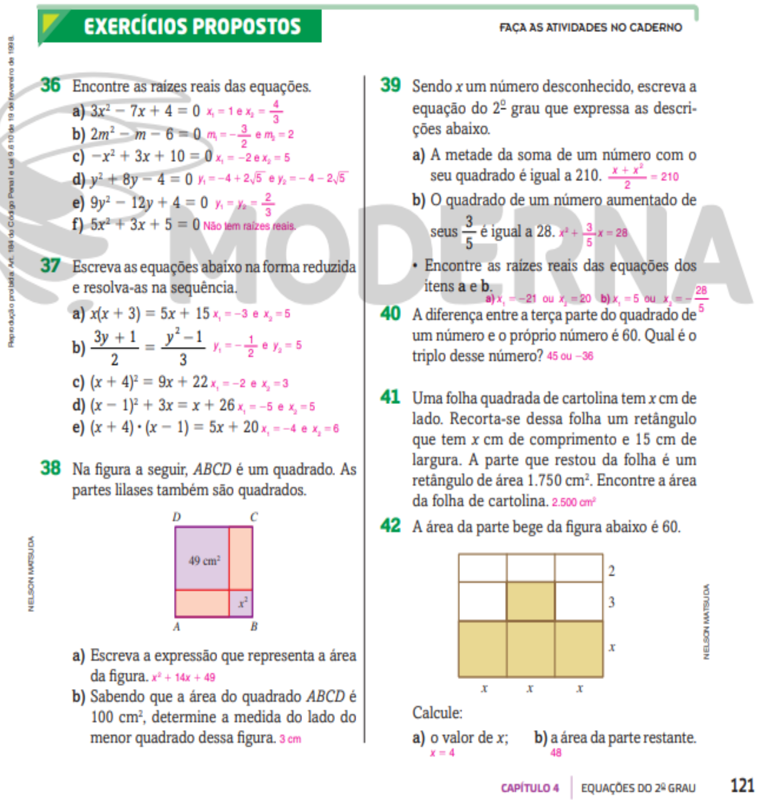
5.1.5 A fórmula resolutiva de uma equação do 2° grau – (4 aulas)

Voltamos para mais uma aula expositiva com o intuito de mostrar e aplicar a Fórmula Resolutiva da Equação do 2° grau contida nos livros do 9° ano do Ensino Fundamental. Tentamos aqui correlacionar a fórmula com o material concreto. Após a demonstração da fórmula, houve uma variedade de exemplos projetados e discutidos na lousa, aplicando-a.

Depois foram exibidos vários exemplos e pediu-se para que os alunos determinassem as raízes, agora com o uso da Fórmula Resolutiva.

Como tarefa de casa foram sugeridos alguns exercícios do livro didático do próprio aluno (Figura 20).

Figura 19 – Exercícios: Determinando as raízes com a fórmula resolutiva



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

36 Encontre as raízes reais das equações.

a) $3x^2 - 7x + 4 = 0$ $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{4}{3}$

b) $2m^2 - m - 6 = 0$ $m_1 = -\frac{3}{2}$ e $m_2 = 2$

c) $-x^2 + 3x + 10 = 0$ $x_1 = -2$ e $x_2 = 5$

d) $y^2 + 8y - 4 = 0$ $y_1 = -4 + 2\sqrt{5}$ e $y_2 = -4 - 2\sqrt{5}$

e) $9y^2 - 12y + 4 = 0$ $y_1 = y_2 = \frac{2}{3}$

f) $5x^2 + 3x + 5 = 0$ Não tem raízes reais.

37 Escreva as equações abaixo na forma reduzida e resolva-as na sequência.

a) $x(x + 3) = 5x + 15$ $x_1 = -3$ e $x_2 = 5$

b) $\frac{3y + 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3}$ $y_1 = -\frac{1}{2}$ e $y_2 = 5$

c) $(x + 4)^2 = 9x + 22$ $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$

d) $(x - 1)^2 + 3x = x + 26$ $x_1 = -5$ e $x_2 = 5$

e) $(x + 4) \cdot (x - 1) = 5x + 20$ $x_1 = -4$ e $x_2 = 6$

38 Na figura a seguir, *ABCD* é um quadrado. As partes lilases também são quadrados.

a) Escreva a expressão que representa a área da figura. $x^2 + 14x + 49$

b) Sabendo que a área do quadrado *ABCD* é 100 cm², determine a medida do lado do menor quadrado dessa figura. 3 cm

39 Sendo *x* um número desconhecido, escreva a equação do 2º grau que expressa as descrições abaixo.

a) A metade da soma de um número com o seu quadrado é igual a 210. $\frac{x + x^2}{2} = 210$

b) O quadrado de um número aumentado de seus $\frac{3}{5}$ é igual a 28. $x^2 + \frac{3}{5}x = 28$

• Encontre as raízes reais das equações dos itens **a** e **b**.

a) $x_1 = -21$ ou $x_2 = 20$ b) $x_1 = 5$ ou $x_2 = -\frac{28}{5}$

40 A diferença entre a terça parte do quadrado de um número e o próprio número é 60. Qual é o triplo desse número? 45 ou −36

41 Uma folha quadrada de cartolina tem *x* cm de lado. Recorta-se dessa folha um retângulo que tem *x* cm de comprimento e 15 cm de largura. A parte que restou da folha é um retângulo de área 1.750 cm². Encontre a área da folha de cartolina. 2.500 cm²

42 A área da parte bege da figura abaixo é 60.

Calcule:

a) o valor de *x*; $x = 4$

b) a área da parte restante. 48

CAPÍTULO 4 | EQUAÇÕES DO 2º GRAU 121

Fonte: Bianchini, 2015, p. 121.

No encontro seguinte foram corrigidas as questões dos Exercícios da aula anterior, preparando-os melhor para a segunda Atividade Avaliativa Bimestral.

5.1.6 Atividade Avaliativa Bimestral – TESTE – 2ª PARTE – (2 aulas)

Essa atividade foi realizada em sala e em dupla, facilitando o diálogo, a cooperação e socialização do conteúdo, apesar que houve alunos que escolheram fazer individualmente. A atividade foi composta de 5 questões, que pedia para se determinar as raízes das equações usando a Fórmula Resolutiva de Bhaskara. O tempo determinado para a realização dessa atividade foi de 2 aulas de 50 minutos cada. Utilizando caneta, papel e a fórmula os alunos deveriam encontrar as raízes. As questões foram iguais a da primeira Atividade Avaliativa Bimestral. Durante a realização a maioria dos discentes utilizaram o tempo destinado para a realização, enquanto que alguns nem concluíram no tempo estipulado, mas mesmo assim teve-se que ser recolhida. O modelo dessa tarefa se encontra no Anexo II.

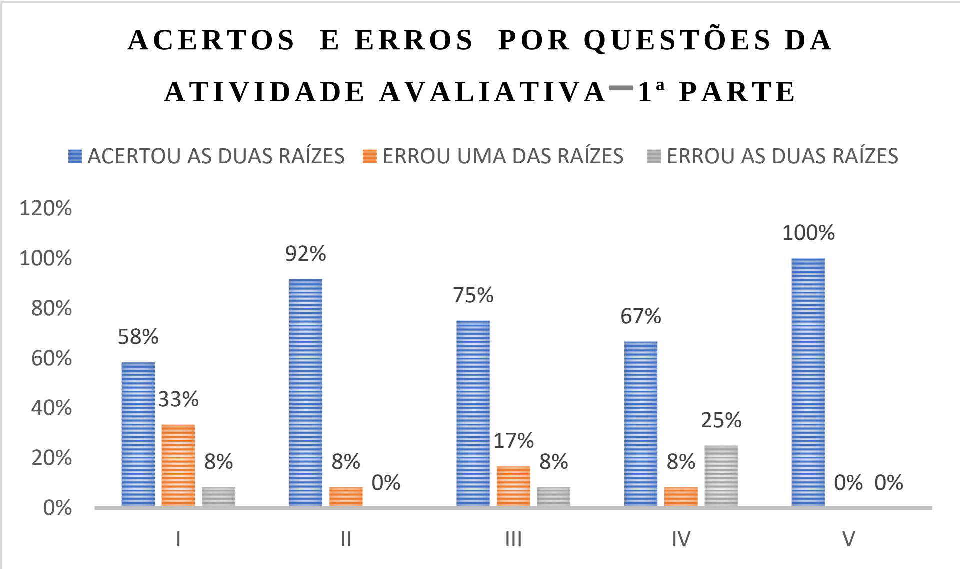
5.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com as Atividades Avaliativas Bimestrais 01 e 02 em mãos, fomos corrigi-las, colher os dados, analisá-los e comparar qual o método em que os alunos se saíram melhor.

Os resultados são apresentados em gráficos que contém as notas de desempenho dos alunos, assim como por questões das Atividades Avaliativas Bimestrais 01 e 02, desenvolvidas durante as aulas.

A Atividade Avaliativa Bimestral continha 5 questões de equações do 2° grau: a questão I) constava da equação $2x^2 - 3x + 1 = 0$, com todos os coeficientes diferente de zero e o coeficiente **a** diferente de 1; a questão II) foi $x^2 + 3x = 0$ em que o coeficiente **c** é nulo; a III) veio como $x^2 + 5x + 6 = 0$ e trazia todos os coeficientes diferentes de zero e o coeficiente **a** igual a 1; a questão IV) trouxe a equação $m^2 - 9 = 0$ e apresenta o coeficiente **b** nulo. Todos os exemplos apresentavam as equações com soluções dentro dos reais, exceto a equação V), escrita como $x^2 + 4x + 7 = 0$, sendo impossível a construção do retângulo ou quadrado com o Material Dourado. Através da manipulação do material concreto os alunos resolveram as equações da Atividade Avaliativa Bimestral – TESTE – 1ª PARTE, onde conseguiram:

Gráfico 1 – Acertos e erros por questões da Atividade Avaliativa Bimestral – 1ª parte – Material Dourado



Próprio Autor, 2024

* Na questão I), 58% acertam as duas raízes, 33% detectaram umas das raízes e 8% não conseguiram identificá-la, porém conseguiram formar o quadrado ou o retângulo com as peças do material concreto.

* A questão II) veio com 92% dos alunos que acertam as raízes contra 8% em que só conseguem acertar uma. Ninguém errou as duas raízes.

* Com 75% acertando as duas raízes temos a questão III), onde 17% acertam pelo menos uma raiz e 8% erram ou não acertam nenhuma.

* Junto a questão IV) os alunos apresentaram um sucesso de 67%, enquanto que 8% erram uma das raízes contra 25% que erram a questão, apesar de terem conseguido a representação geométrica através da manipulação do Material Dourado.

* A surpresa veio na questão V) onde todos obtiveram êxito na sua resposta, afirmando que a equação $x^2 + 4x + 7 = 0$ não possui raízes, pelo fato de não conseguirem construir o quadrado ou retângulo com as peças do material.

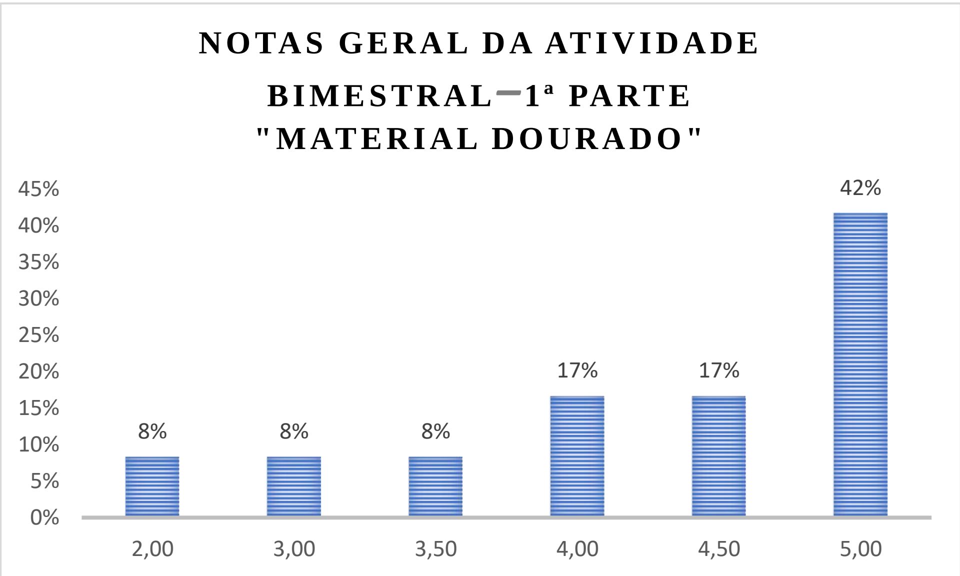
Assim podemos perceber que a coluna representativa dos acertos (coluna na cor hachurada de azul) por questões sempre se sobressai em todas as perguntas. Os gráficos que representam as questões erradas ou parcialmente erradas surgem com bem menor intensidade ou nem aparecem, ou seja, os alunos se saíram muito bem em cada questão, resolvendo-as geometricamente através do uso do Material Dourado, desse modo, souberam identificar as raízes por meio do recurso utilizado em sala, além de terem demonstrado compreensão e apreensão do conteúdo.

Das duas equações completas, a que possui o coeficiente $a = 1$ os alunos apresentaram um percentual de 75% de êxito, enquanto que na com o coeficiente $a = 2$, houve uma redução nos acertos, passando a 58% de aproveitamento. Nas duas incompletas os resultados foram bem distintos: na que apresenta o coeficiente $b = 0$ tivemos 67% de acertos contra 92% de sucesso na equação com o coeficiente $c = 0$. Comparando as equações completas e incompletas conclui-se que nas incompletas os alunos se saíram melhor, havendo uma maior porcentagem nos acertos.

Depois fomos analisar as notas que os alunos obtiveram na execução dessa Atividade Avaliativa Bimestral, em que variava de 0 a 5 pontos.

No Gráfico 2 há as notas e porcentagens das duplas de alunos que executaram a tarefa: resolver as equações do 2° grau expostas ou sugeridas pelo professor usando o Material Dourado.

Gráfico 2 – Notas geral da Atividade Avaliativa Bimestral – 1ª parte – com o uso do Material Dourado



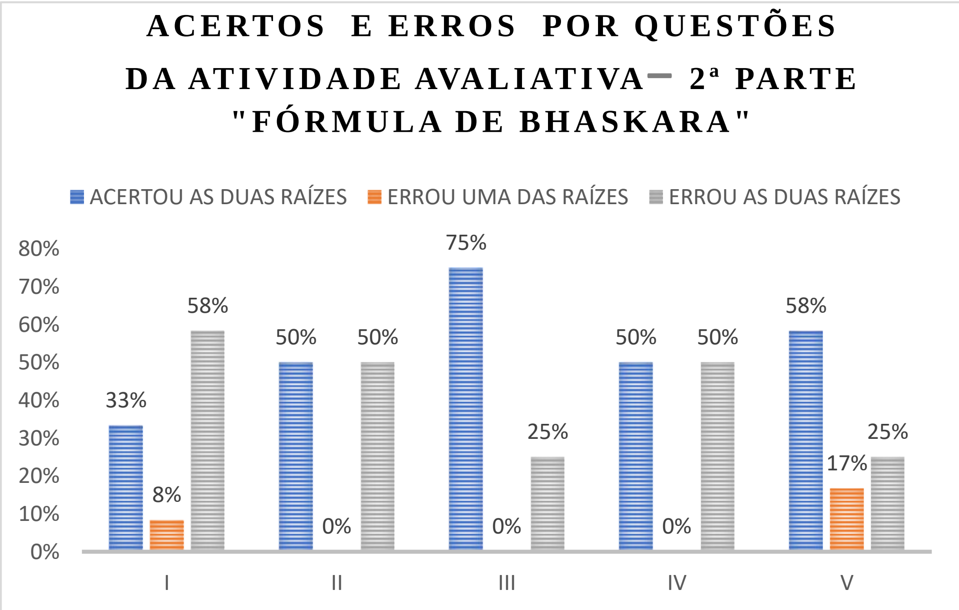
Próprio Autor, 2024

Destacamos um bom rendimento na resolução das equações do 2° grau com o uso do Material Dourado, obtendo com nota máxima 42% dos 20 alunos submetidos ao exame. Os demais com notas variando de 2,0 (como nota mínima, ou seja, todos acertaram alguma questão) a 4,5. Podemos admitir que 84% dos alunos obtiveram notas bastante relevante, haja visto que a atividade tinha como nota máxima o 5; isso quando se faz uma média das notas que variam de 3,50 a 5,00.

Agora empregamos a Fórmula de Bhaskara para resolver as equações do 2° grau e analisaremos em seguida em qual método houve um melhor rendimento e aprendizagem por parte dos alunos.

Veremos agora os dados da Atividade Avaliativa contidos no Gráfico 3, em que há os acertos e erros por questões; depois os das notas (Gráfico 4) da atividade dos alunos na determinação das raízes das equações com a Fórmula de Bhaskara. Nos acertos e erros por questões identificamos que:

Gráfico 3 – Acertos e erros por questões da Atividade Avaliativa Bimestral – 2ª parte – "Fórmula de Bhaskara"



Próprio Autor, 2024

* Na questão I) houve 33% que acertam todas as raízes contra 58% que erraram tudo, enquanto que 8% conseguiram identificar uma das raízes.

* Nessa questão II) vê-se que metade dos alunos acertaram todas as raízes, enquanto que a outra metade errou todas. Não houve alunos que conseguiram acertar uma das raízes.

* Destaque merece a questão III), com 75% de acertos e 25% que erraram tudo.

* Na questão IV) vemos que 50% dos alunos acertaram todas as duas raízes e o restante errou todas.

* 58% dos alunos acertaram a questão V) por inteiro, afirmando que não havia solução dentro dos números reais porque o discriminante ($\Delta = -12$) é negativo. Dos 17%

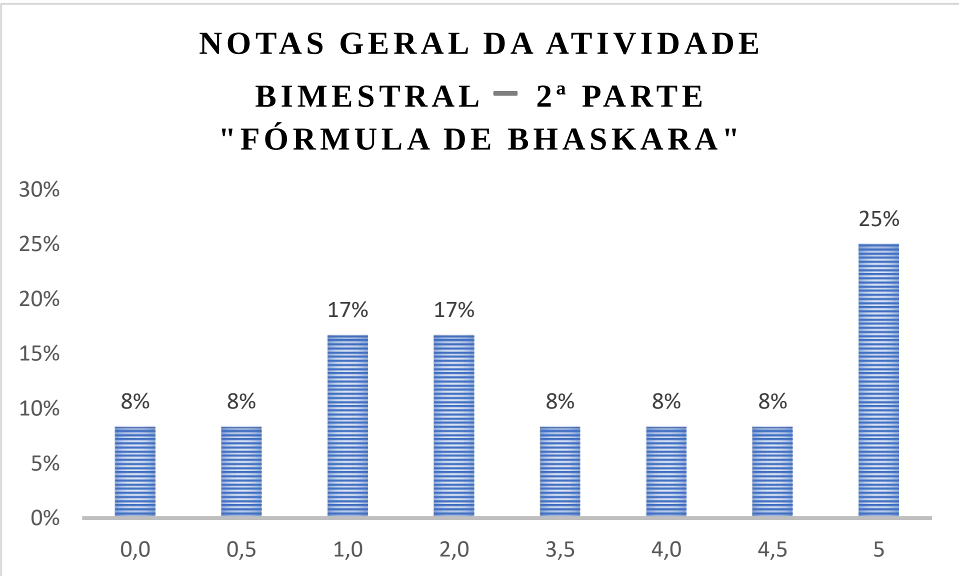
que acertaram metade da questão consideramos os que obtiveram um valor diferente do discriminante, porém afirmaram que não existia raízes nos reais pelo fato do valor encontrado ser negativo.

Comparando as equações completas e incompletas, vê-se que nas incompletas os alunos tiveram, em média, 50% de acertos, respectivamente, nas com os coeficientes *b* e *c* nulos. Nas completas que possuem raízes dentro dos reais, tem-se: a em que o coeficiente $a = 2$, que apresentou uma redução no número dos acertos (33%) contra a com o coeficiente $a = 1$, em que houve um salto bem considerado, sobressaindo com seus 75% de acertos. A que não possui raízes teve 58% de êxito, em que alunos admitiam que o discriminante era negativo e, portanto, não existia raiz. Todavia, os alunos se saíram melhor quando resolviam as equações completas, fazendo uma média de aproximadamente 56% de acertos contra 50% das incompletas.

Observamos que as colunas representativas dos erros nas questões surgem e são destacadamente salientes, ultrapassando ou até igualando a dos acertos, sobretudo implicando que houve muitos erros por questões na atividade com o uso da Fórmula de Bhaskara. A coluna laranja, que corresponde a acertar metade da questão só veio a aparecer em dois momentos: na questão I e na questão II. Então ou o aluno acertava todas a raízes ou errava a questão por inteira.

Vamos analisar as notas que os alunos obtiveram na Atividade Avaliativa Bimestral 02, em que variava de 0 a 5 pontos. Com o uso da Fórmula de Bhaskara, temos:

Gráfico 4 – Notas geral da Atividade Bimestral – 2ª parte – Fórmula de Bhaskara



Próprio Autor, 2024

Uma grande variedade de notas pode ser observada, variando de 0, como nota mínima e que indica que o alunado não conseguiu acertar nenhuma questão, à máxima que era de 5 pontos. Pode-se ver que metade da turma se saiu muito mal, tendo nota igual ou inferior a 2 pontos. Com 25% dos alunos com nota máxima, seguindo com 4,5; 4,0 e 3,5 apresentando, respectivamente, 8% cada. Ainda temos alunos com 2,0 e com 1,0 que correspondem a 17% cada, o que corresponde a notas baixas. Continuando a analisar o Gráfico 4, deparamos com 8% dos alunos com nota zero, ou seja, não conseguiram aplicar a fórmula sequer para encontrar o determinante. E ainda 8% em que acertaram metade de uma questão, conseguindo encontrar uma das raízes da questão.

Diante do exposto, pode-se notar que os alunos apresentaram dificuldades na aplicação da Fórmula Resolutiva da Equação do 2° grau para determinação de suas raízes. No uso da Fórmula Resolutiva, apenas 25% dos alunos obtiveram nota máxima, inclusive, houve alguns que chegaram a notas muito baixas, como, por exemplo, 0 e 0,5 pontos, mostrando, assim, dificuldades no emprego da fórmula. Eles alegavam que havia muitas etapas e cálculos para se chegar à resolução.

Enquanto que com o uso do Material Dourado, todos os alunos conseguiram, no mínimo, resolver duas questões corretamente. A menor nota foi 2,0 pontos, enquanto que 42% dos alunos obtiveram nota máxima, ou seja, acertaram todas as questões da Atividade Avaliativa Bimestral. Vê-se que mais de 90% acertaram acima da metade da atividade que usou a manipulação do material concreto, ao passo que com o uso da fórmula tivemos apenas 50% que apresentaram as mesmas características, ou seja, acertaram mais da metade das questões.

Assim, concluímos que, através da manipulação do material concreto, os alunos apresentaram mais habilidade, um considerável rendimento na determinação das raízes em detrimento do uso da fórmula.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nossa pesquisa, projetamos responder o quanto o Material Dourado, aliado à resolução de problemas envolvendo equações do 2º grau, poderia contribuir no processo de ensino e aprendizagem, além de ampliar os conhecimentos acerca de metodologias, processo de formação e etc. Esta ocorreu com a participação dos alunos do 9° ano do ensino fundamental da escola ... de Mossoró, município do estado do Rio Grande do Norte, com os quais foram aplicadas duas tarefas avaliativas de bimestrais.

No transcorrer dos encontros e aplicação das atividades, os alunos evidenciaram, em primeiro momento, um bom desempenho com relação às respostas encontradas para os problemas propostos bem como com relação aos procedimentos adotados, tendo em primeiro momento a manipulação de um material concreto, todavia, mostraram dificuldades com relação a construção dos dados e resoluções dos cálculos na fórmula resolutiva de Bhaskara.

Diante dos resultados obtidos, pode-se assegurar que o uso do Material Dourado, uma das propostas da pesquisa, contribuiu para o ensino do conteúdo Resolução de Equação do 2°grau na turma do 9° ano, pois os alunos tiveram a oportunidade de utilizar esse recurso didático, manipulando-o de diversas formas e realizando questionamentos no decorrer dos encontros. Depreende-se que os resultados obtidos confirmam a hipótese levantada nas inquietações que levou a pesquisa, no que se refere à relevância da utilização do material concreto para a apropriação de conceitos matemáticos. Os encontros com os alunos e a aplicabilidade das atividades proporcionaram uma análise mais aprofundada.

Os alunos realizaram atividades em grupo, tratando da geometria. Construíram quadrados e retângulos utilizando o Material Dourado e, de forma divertida, proporcionou aprender vários conceitos matemáticos: raízes da equação do 1° e 2° grau, produtos notáveis, fatoração e área de retângulo.

A metodologia empregada transcorreu com uma abordagem quantitativa, na qual aplicou-se o mesmo questionário em dois momentos. A atividade continha perguntas que foram resolvidas pelos alunos usando recursos diferentes, de modo a permitir a construção de um panorama no que se refere à utilização de material concreto no ensino da equação do 2° grau no 9° ano dos anos finais.

No final da pesquisa, pode-se constatar que o material utilizado pelo professor, os momentos de ensino e sua prática pedagógica contribuíram positivamente para a aprendizagem do aluno.

Através dessa pesquisa e experiências vivenciadas, pude verificar como estão sendo desenvolvidas as aulas de Equação do 2° grau do 9° ano das escolas e como podem ser inovadas com reflexões nas práticas pedagógicas, motivando novas produções e ampliando estudos que se baseiam em pesquisas bem fundamentadas através de mecanismos que auxiliem cada vez mais os conteúdos da matemática, desmistificando-a por parte dos professores, de forma a beneficiar todos os envolvidos e contribuir para que se reduza a aversão à Matemática e à criação de jogos que possam dinamizar as aulas de Matemática, melhorando a absorção e aprendizagem dos conteúdos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMARAL, João Tomas do. MÉTODO DE VIÈTE PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2° GRAU. Revista do Professor de Matemática. nº 13. Disponível em: < http://www.rpm.org.br/cdrpm/13/4.htm >. Acesso em: Acesso em: 25 de mai. de 2024.

ARAUJO, A.F. Solução de equações do 2º grau com material concreto. In: VII CIBEM – Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática. Anais eletrônicos. Montevideo, 2013. Disponível em: http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/148.pdf. Acessado em: 28 de mai. de 2024.

BAERLE, Lucilene Dal Medico; KUIAWINSKI, Cláudia Fátima; DIAS, Kescy de Paula; RODRIGUES, Paulina. A Utilização do Material Concreto para o Ensino de Matemática: um Relato de Experiência no Ensino Fundamental, Blumenau/SC, Vol. 4, N. 6, julho/dezembro 2023. Disponível em: https://doi.org/10.21166/ctp.v4i6.3247. Acesso em: 23 de jan. de 2024.

BALTAZAR, Mara Cristina; ANJOS, Sabrini Micheli da Silva; QUADROS, Zilmara Raupp de. O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. [s.d.]. Disponível em: http://matinterdisciplinar.pbworks.com/w/file/fetch/87893530/O%20artigo%20materiais%20manipul%C3%A1veis%20como%20recurso%20did%C3%A1tico%20na%20forma%C3%A7%C3%A3o%20de%20professores%20de%20matem%C3%A1t.pdf. Acesso em: 18 agost. 2023.

BARASUOL, Fabiana Fagundes. Modelagem Matemática: Uma Metodologia Alternativa para o Ensino da Matemática. UNIrevista, p. 01 - 06, 01 abr. 2006.

BASSANEZZI. Rodney C. Modelagem Matemática: Uma Disciplina Emergente nos Programas de Formação de Professores. Biomatemática IX. Campinas. 1999. Disponível em: < www.ime.unicamp.br/~biomat/bio9art_1.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2023.

BIANCHINI, Edwaldo. Matemática Bianchini/ Edwaldo Bianchini. - 8. ed. - São Paulo: Moderna, 2015.

BIANCHINI, Edwaldo. Matemática Bianchini: 9° ano: manual do professor/ Edwaldo Bianchini. - -10. ed. - - São Paulo: Moderna, 2022.

BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Sistema de Avaliação da Educação Básica. Brasília: SAEB, 2018.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Sinopse Estatística da Educação Básica 2022. [online]. Brasília: Inep, 2023a. [citado 22/11/2023]. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/acesso-a-informacao/dados-abertos/sinopses-estatisticas/educacao-basica>. Acesso em: 16 de agost. de 2023.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Censo da Educação Básica 2022b/INEP. Taxa de rendimento escolar- Brasil, Regiões Geográficos e Unidades da Federação - 2022. Brasília: Inep, 2023b. [citado 19/05/2023]. Disponível em: < https://www.gov.br/inep/pt-br/acesso-a-informacao/dados-abertos/indicadores-educacionais/taxas-de-rendimento-escolar/2022>. Acesso em 17 de agost. de 2023.

BRITO, Ramon Gabriel Santos de; BRANCO, Maurício Neves; BRITO, Estela Márcia Santos de. Dificuldade de estudante em resolver equação quadrática no ensino médio: uma pesquisa quantitativa. **Science and Knowledge in Focus**, v. 2, n. 1, p. 05-17, 2019. Doi: 10.18468/sc.knowl.focus.2019v2n1. p.05-17. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/233924452.pdf. Acesso em: 28 de mar. de 2024.

CARDOSO, V. C. ***Materiais Didáticos para as quatro operações***. 4. ed. São Paulo: Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática/ IME/ US, 1998.

CARDOSO, Virgínia Cardia. *Materiais Didáticos para as quatro operações*, São Paulo, 2ª edição, IME-USP, 1995.

CHAVES, Cristina M. de Souza; BISOGNIM, Eleni. A Modelagem Matemática na sala de aula: uma forma de diversificar o ensino. [s.d]. Disponível em: < http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro_Gaucho_Ed_Matem/cientificos/CC11.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2013.

COSTA, Priscila Kabbaz Alves da; PRZYBYVIZ, Fabíola; NASCIMENTO, Jéssica Karolinne Medeiros; STACHESKI, Jaqueline Meni; UCOSKI, Lillyan Fernanda. Uma proposta para o ensino de equações do segundo grau utilizando diferentes recursos didáticos. Encontro Paranaense de Tecnologia na Educação Matemática - EPTEM; Apucarana - PR, 22 a 24 de novembro de 2018. Disponível em:<https://www.researchgate.net/profile/Priscila-Kabbaz-Alves-Da-Costa/publication/329360810_UMA_PROPOSTA_PARA_O_ENSINO_DE_EQUACOES_DO_SEGUNDO_GRAU_UTILIZANDO_DIFERENTES_RECUSOS_DIDATICOS/links/5c04672f45851523d159aae9/UMA-PROPOSTA-PARA-O-ENSINO-DE-EQUACOES-DO-SEGUNDO-GRAU-UTILIZANDO-DIFERENTES-RECUSOS-DIDATICOS.pdf>. Acesso em: 21 de out. de 2023.

CRUZ, Lélia de Oliveira. A formação do professor: a visão do licenciando e do egresso do curso de Licenciatura em Matemática do CESC/UEMA sobre a formação oferecida pelo curso para o exercício da docência. / Lélia de Oliveira Cruz. – Canoas, 2013. 141 f.: Il. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, 2013. Disponível em: http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/166/159. Acessado em: 19 de fev. de 2024.

DRUCK, Suely. O drama do ensino da matemática. **Folha Online**. São Paulo, 25 mar. 2003. Disponível em:< http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u343.shtml>. Acesso em: 18 fev. 2024.

______. **Sobre o ensino da matemática no Brasil**. Sessão: Ciência e Matemática nas Escolas e Educação Tecnológica. Parcerias Estratégicas, n. 31, Parte 5, p. 175- 180, dez. 2010.

ELON, Lages Lima. REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA - RPM. Sobre o ensino de Matemática, Elon Lages Lima, n° 28, 2° quadrimestre de 1995.

Evangelista, Antônia Dinamária Gomes Regras matemáticas e suas justificativas: breve histórico sobre o ensino de matemática no Brasil e uma reflexão acerca da inclusão de demonstrações na prática docente / Antônia Dinamária Gomes Evangelista, – 2014. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/9158/1/2014_dis_adgevangelista.pdf. Acesso em: 28 de fev. de 2024.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. 5. ed. Tradução: Hygino H.Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FILHO, Vicente de Freitas. Uma abordagem histórica da equação do 2° grau. Martins, 2016. 70f. Monografia (Especialização em Ensino Médio de Matemática), Centro de Ciências Exatas e da Terra, UFRN - Polo Martins. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/43805/2/UmaAbordagemHistoricaEquacao_FreitasFilho_2016.pdf. Acesso em: 20 de mai. De 2024.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. UMA ABORDAGEM HISTÓRICA DA EQUAÇÃO DO 2° GRAU. Revista do Professor de Matemática 43, 2000. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM. Disponível em:http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM43/RPM43_04.PDF. Acessado em: 12 de dez. de 2023.

FUNDAÇÃO ABRINQ: OBSERVATÓRIO DA CRIANÇA E DO ADOLESCENTE. **Taxa de abandono nos anos iniciais e finais do ensino fundamental**. Disponível: https://observatoriocrianca.org.br/cenario-infancia/temas/ensino-fundamental/551-taxa-de-abandono-nos-anos-iniciais-e-finais-do-ensino-fundamental?filters=1,1431;5,1431. Acesso em: 06 de mar. de 2024.

G1-Tempo de estudo no Brasil é inferior ao de países de Mercosul e Brics, aponta IDH. Brasília, 31 de mar. 2017. Disponível em: https://g1.globo.com/mundo/noticia/tempo-de-estudo-no-brasil-e-inferior-ao-de-paises-de-mercosul-e-brics-aponta-idh.ghtml Acesso em: 05 de mar. de 2024.

GATTO, Márcia Cristina. O uso do material dourado como recurso no ensino da adição e da subtração no primeiro ano do ensino fundamental: uma reflexão a partir dos livros didáticos. /Márcia Cristina Gatto. – Cruz Alta, 2001. 52F.: Il. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Estadual do Rio Grande do Sul, Curso de Licenciatura em Pedagogia, Unidade de Cruz Alta,2021. Disponível em: https://repositorio.uergs.edu.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1643/_tcc_marcia_-_biblioteca.pdf?sequence=-1&isAllowed=y. Acesso em: 14 set. de 2023.

GIGANTE, Ana Maria Beltrão; SILVA, Maria Rejane Ferreira da; SANTOS, Monica Bertoni dos. Matemática e suas Tecnologias/ Ensino Fundamental e médio, [s.d.]. Lições do RIO GRANDE. CADERNO DO PROFESSOR. Disponível em: https://servicos.educacao.rs.gov.br/dados/refer_curric_prof_vol3.pdf. Acessado em: 04 de nov. de 2024.

HOUSE, P. A. Álgebra: ideias e questões. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

INEP/MEC. CENSO ESCOLAR DA EDUCAÇÃO BÁSICA 2023. Brasília, 31 de jan. 2023. Disponível em: https://download.inep.gov.br/censo_escolar/resultados/2022/apresentacao_coletiva.pdf. Acesso em: 07 de mar. 2024.

LEMOS, J. C. G. Do encanto ao desencanto, da permanência ao abandono: o trabalho docente e a construção da identidade profissional. 2009. 315 f. Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/10133/1/Jose%20Carlos%20Galvao%20Lemos.pdf. Acessado em: 23 de jan. de 2024.

LIMA, E. L. et al. Exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: SBM/ IMPA, 2001.

______. A Matemática do Ensino Médio. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.v.1

LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Campinas: Autores associados, 2006.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. 3. ed. São Paulo: Autores Associados, 2010.

Lucena, Regilania da Silva. Laboratório de Ensino de Matemática / Regilania da Silva Lucena. - Fortaleza: UAB/IFCE, 2017. 94 p. ISBN: 978-85-475-0058-0 1. Matemática – Ensino - Laboratório. 2. Ensino-Aprendizagem. 3. Formação docente. I. Título. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/429642/2/Laborat%C3%B3rio%20de%20Ensino%20de%20Matem%C3%A1tica.pdf. Acessado em: 12 set. de 2023.

LÜSCHER, A. Z.; DORE, R. Política educacional no Brasil: educação técnica e abandono escolar. **Revista Brasileira de Pós-Graduação**, *[S. l.]*, v. 8, n. 1, 2011. DOI: 10.21713/2358-2332.2011.v8.244. Disponível em: https://rbpg.capes.gov.br/rbpg/article/view/244. Acesso em: 12 nov. 2023.

OBMEP – IMPA 2024: 19ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. 18ª OBMEP bate recorde de escolas e municípios inscritos. Disponível em:<http://www.obmep.org.br/noticias.DO?id=867#:~:text=Realizada%20pelo%20Instituto%20de%20Matem%C3%A1tica,alunos%20v%C3%A3o%20participar%20da%20competi%C3%A7%C3%A3o>. Acesso em: 08 de mar. de 2024.

OLIVEIRA, Antônio Josimário Soares de. **O ensino e a aprendizagem de função exponencial em um ambiente de modelagem matemática.** /Antônio Josimário Soares de Oliveira. – Mossoró-RN: 2013. 95f.:il. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação.

Disponível em: https://ppgmat.ufersa.edu.br/wp-content/uploads/sites/58/2016/02/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Ant%C3%B4nio-Josim%C3%A1rio.pdf. Acessado em 18 fev. 2024.

PEDROSO, Hermes Antônio. **Uma breve história da equação de 2° grau**. REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA, 2010. Nº 02. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/uma-breve-historia-da-equacao-do-2-grau.pdf. Acesso em: 26 de mai. De 2024.

PEREIRA, Fernando Francisco; DONEZE, Iara Souza; Proença, Marcelo Carlos de. Livros Didáticos do PNLD e a BNNC: Análise da Organização do Ensino de Equações de 2° grau. **Perspectiva da Educação Matemática**, v.16, n.41 – 2023. DOI 10.46312/pem.v16i41.16528. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/16528/12622. Acesso em: 30 de marc. de 2024.

PEREIRA, João Luiz Ribas. Análise de livros didáticos: Comparando Álgebra com enfoque na equação do segundo grau em três livros de matemática do 9º ano do ensino fundamental II. 2017. 35 p. Tese (Mestrado em Especialização para Professores de Matemática,) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/BUOS-AU2J28/1/monografia_joaoribas.pdf:. Acesso em: 15 de set. 2023.

PIAGET, J. Seis Estudos de Psicologia. Forense Universitária. Rio de Janeiro, 1993. Disponível em: https://atividadeparaeducacaoespecial.com/wp-content/uploads/2015/01/SEIS-ESTUDOS-DE-PSICOLOGIA-JEAN-PIAGET.pdf. Acessado em: 15 de mar. 2024.

_____ Psicologia e pedagogia. Tradução de Dirceu Accioly Lindoso e Rosa Maria Ribeiro da Silva. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1998.

_____Seis estudos de psicologia. Tradução Maria Alice Magalhães D´ Amorim e Paulo Sergio Lima Silva. 24 ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2003.

PNUD E FIRJAN SESI - EVASÃO ESCOLAR NO ENSINO MÉDIO ATINGE MEIO MILHÃO DE JOVENS POR ANO E PERPETUA DESIGUALDADE, ALERTA ESTUDO DO PNUD E FIRJAN SESI. United Nations Developmente Programme-PNUD, 18 de abr. 2023.Disponível em: https://www.undp.org/pt/brazil/news/evasao-escolar-no-ensino-medio-atinge-meio-milhao-de-jovens-por-ano-e-perpetua-desigualdade-alerta-estudo-do-pnud-e-firjan-sesi. Acesso em: 06 de mar. de 2024.

PRESSI, Ailê; BARBOSA, Maria Angelita; SMANIOTTO, Maristela Regina**.** A UTILIZAÇÃO DO MATERIAL DOURADO COMO FERRAMENTA NA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE 2° GRAU, [s.d.]. Disponível em: https://www2.faccat.br/portal/sites/default/files/A%20UTILIZACAO%20DO%20MATERIAL%20DOURADO.pdf. Acessado em: 20 de dez. de 2023.

REVISTA NOVA ESCOLA, E-book Mulheres que ensinam: Maria Montessori, a médica que mudou a Educação. Publicado em 26/02/2021 por Ingrid. Disponível em: https://box.novaescola.org.br/etapa/2/educacao-fundamental-1/caixa/249/xadreztambem-e-das-meninas-como-trabalhar-o-jogo-em-sala/conteudo/20156. Acesso em 20 de jan. de 2024.

RICARDO, Rodrigo. ESTUDYANDO/SABER MÁS. SENTIRSE MEJOR, Biologia. Por Rodrigo, [s.d.]. O que é uma equação quadrática? – Definição e exemplos. Disponível: https://pt.estudyando.com/o-que-e-uma-equacao-quadratica-definicao-e-exemplos/#. Acessado em 06 de set. de 2023.

ROMANATTO, Mauro Carlos. O livro didático: alcances e limites. In: VII ENCONTRO PAULISTA DE MATEMÁTICA, 7., 2004, São Paulo. Anais... São Paulo: Faculdade de Educação - Universidade de São Paulo – USP. Disponível em: www.sbempaulista.org.br/epem/anais/meses.../mr19-Mauro.doc.Acesso em: 24 fev. 2024.

SANTOS, Anderson Oramisio; OLIVEIRA, Camila Rezende; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de. MATERIAL CONCRETO: UMA ESTRATÉGIA PEDAGÓGICA PARA TRABALHAR CONCEITOS MATEMÁTICOS NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL. Itinerarius Reflectionis, Goiânia, v. 9, n. 1, 2013. DOI: 10.5216/rir.v1i14.24344. Disponível em: https://revistas.ufj.edu.br/rir/article/view/24344. Acesso em: 25 de jan. de 2024.

SEVERINO, Antônio Joaquim, 1941- . Metodologia do trabalho científico [livro eletrônico] / Antônio Joaquim Severino. -- 1. ed. -- São Paulo: Cortez, 2013.

SILVA, Eva Aparecida Carvalho e; CAMARGO, Joseli Almeida. O Material Dourado aplicado ao ensino e aprendizagem da Equação do 2º Grau. Paraná: Cadernos PDE, 2016. v. 1. ISBN 978-85-8015-093-3. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_uepg_evaaparecidacarvalhoesilva.pdf. Acessado em 6 de set. de 2023.

SILVA, Jeyson Barbosa de Araujo. Equações de 2° grau: sua história e abordagens didáticas / Jeyson Barbosa de Araujo Silva. - João Pessoa, 2019. 64 f.: il. Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/14879. Acessado em 23 de fev. de 2024.

SILVA, M. H. F. da et al. Dificuldades no aprendizado de Álgebra e estratégias para a sua aprendizagem. In: VII ENCONTRO NACIONAL DAS LICENCIATURAS, 2018, Fortaleza/CE. Universidade do Estado do Ceará – UECE. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/enalic/2018/443-55311-28112018-205731.pdf. Acesso em 09 de set de 2024.

SOARES, Thamires Silva; LEAL, Deuseliane Patrícia Oliveira; SERRA, Yara Letícia Pereira; BARBOSA, Mauro Guterres. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU COM USO DO MATERIAL DOURADO. Revista REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuibá, Brasil, v. 10, n. 3, p. e22072, set./dez., 2022. DOI: 10.26571/reamec.v10i3.14243. Disponível em:

https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/14243. Acesso em: 04 de set. de 2023.

VISMARA, Lilian de Souza, et al. DIFICULDADES NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA, SOB A ÓTICA DE ALUNOS E PROFESSORES DE DOIS VIZINHOS-PR. Anais do CIET:EnPED:2020 - (Congresso Internacional de Educação e Tecnologias | Encontro de Pesquisadores em Educação a Distância), São Carlos, ago. 2020. ISSN 2316-8722. Disponível em: <https://cietenped.ufscar.br/submissao/index.php/2020/article/view/1444>. Acesso em: 25 nov. 2023.

FIGURAS

FIGURA 1: INÍCIO·BRINCAR&VIVER·CLIPPING DO BAÚ/ MATEMÁTICA 29: MATERAIS CONCRETOS, 20 de jan. 2020. Tecnologia do Blogger. Disponível em: https://baudeideiasdaivanise.blogspot.com/2020/01/matematica-29-materiais-concretos.html. Acesso: 16 de ago. de 2023.

FIGURA 2: Oficina Material Concreto by Andressa Martins on Prezi/Uso do material concreto: Um olhar sobre a alfabetização Matemática, 19 de out. 2019. Disponível em: https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fprezi.com%2Fto4sdlcwz2ag%2Foficina-material-concreto%2F&psig=AOvVaw0MajLPZSqV04H2eDAsyMVj&ust=1711362476312000&source=images&cd=vfe&opi=89978449&ved=0CBQQjhxqFwoTCLDX0cScjoUDFQAAAAAdAAAAABAE. Acesso: 18 de ago. de 2023.

FIGURA 3: Imagem do Material Dourado. Próprio autor, 2023.

FIGURA 4: Maria Montessori, uma inspiração! – EducarSi. Pedagogia, Montessori, Superdotação e Talento com Simone Clemens, 21 de abril de 2016.

Disponível em: https://www.educarsi.com/maria-montessori-era-empoderada/. Acessado em: 25 de ago. de 2023.

FIGURA 20: Material dourado do início do século xx. Explorando o Material Dourado. Metodologia do Ensino de Matemática - EDM 321.Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura. Materiais Pedagógicos para o Ensino de Matemática. Disponível em: http://paje.fe.usp.br/~labmat/edm321/1999/material/_private/material_dourado.htm. Acessado em: 6 de set. de 2023.

FIGURA 21: Material dourado. Fonte do próprio autor, 2023.

FIGURA 7: Representação geométrica do Material dourado. A CONQUISTA. Solução Educacional Positivo, Editora Positivo. Disponível em: https://slideplayer.com.br/slide/1257720/ . Acessado em: 6 de set. de 2023.

FIGURA 8: P*apiro de Kahun*. Matemática no Planeta Terra/Matemática no Egito, José Gaspar - Projeto Educacional II – 2013. Disponível em: https://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm. Acessado: 18 de mai. de 2024.

FIGURA 9: *Bhaskara's II contributions to mathematics – India.* Great Indian Mathematician & Astronomer, speak2world, 2018. Disponível em: https://speak2world.wordpress.com/2014/10/09/great-indian-mathematician-astronomer/. Acessado em: 18 de ma. De 2024.

FIGURA 10: François Viète. Az Quotes/ Quotes for All Occasions. Disponível em: https://www.azquotes.com/author/65233-Francois_Viete. Acesso em 26 de mai. de 2024.

FIGURA 10: Representação da planta de uma piscina. Fonte do próprio autor, 2024.

FIGURA 11: *René Descartes*. Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes. Acessado em: 26 de mai. De 2024.

FIGURA 12: Representação geométrica. Fonte: (Soares; Leal; Serra; Barbosa, 2022).

FIGURA 13: *Quadrado da soma.* Brasil Escola – UOL. Disponível em: https://www.google.com/imgres?imgurl=https://s1.static.brasilescola.uol.com.br/be/e/prod%2520notavel2.JPG&tbnid=q95YE32kjvoBkM&vet=1&imgrefurl=https://brasilescola.uol.com.br/88atemática/quadradosoma.htm&docid=BOQih0OaeRUd7M&w=205&h=183&source=sh/x/im/m5/1&shem=uvafe2&safe=active&ssui=on. Acessado: 22 de out. de 2023.

APÊNDICE

APÊNDICE 1 - ATIVIDADE AVALIATIVA BIMESTRAL – TESTE - 1ª PARTE

PROF. ELISEU VIANA	Aluno(a) 1:			
	Aluno(a) 2:			
	Professor: **Mário Andreaza**		N°1:	N°2:
	Disciplina: **Matemática**		Data: **28.09.2023**	
	Turma: **9° ANO B**	Turno: **Vespertino**	Nota:	

ATIVIDADE AVALIATIVA DO 3° BIMESTRE-TESTE-1ª PARTE

Utilizando-se do material dourado determine as raízes das equações do 2° grau abaixo, desenhando sua representação geométrica e explicando sua solução.

I) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

II) $x^2 + 3x = 0$

III) $x^2 + 5x + 6 = 0$

IV) $m^2 - 9 = 0$

V) $x^2 + 4x + 7 = 0$

APÊNDICE 2-ATIVIDADE AVALIATIVA BIMESTRAL – TESTE – 2ª PARTE

PROF. ELISEU VIANA

Aluno(a) 1:			
Aluno(a) 2:			
Professor: **Mário Andreaza**		N°1:	N°2:
Disciplina: **Matemática**		Data: **23.10.2023**	
Turma: **9º ANO B**	Turno: **Vespertino**	Nota:	

ATIVIDADE AVALIATIVA DO 3º BIMESTRE-TESTE-2ª PARTE

Utilize a Fórmula resolutiva de Bháskara e os métodos de resolução das equações incompletas, determine as raízes das equações do 2° grau abaixo:

I) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

II) $x^2 + 3x = 0$

III) $x^2 + 5x + 6 = 0$

IV) $m^2 - 9 = 0$

V) $x^2 + 4x + 7 = 0$