UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ALISSON DE AMORIM FERREIRA

INTRODUÇÃO A TEORIA DOS GRAFOS: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA LÚDICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS

JUAZEIRO - BA

2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ALISSON DE AMORIM FERREIRA

INTRODUÇÃO A TEORIA DOS GRAFOS: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA LÚDICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, campus Juazeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alison Marcelo Van Der Laan Melo

JUAZEIRO - BA

2025

FiCHA CATALOGRÁFICA

Ferreira, Alisson de Amorim.
F383i Introdução a Teoria dos Grafos: uma Proposta de Sequência Didática Lúdica para o Ensino Fundamental Anos Finais / Alisson de Amorim Ferreira. Juazeiro-BA, 2025.
xvi, 81 f.: il. 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Alison Marcelo Van Der Laan Melo.

1. Matemática. 2. Ensino Fundamental. 3. Sequência Didática. I. Título. II. Melo, Alison Marcelo Van Der Laan. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Márcio Pataro. CRB - 5 / 1369.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

Alisson de Amorim Ferreira

INTRODUÇÃO A TEORIA DOS GRAFOS: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA LÚDICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovado em: 27 de fevereiro de 2025.

Banca Examinadora

gov.br Documento assinado digitalmente
ALISON MARCELO VAN DER LAAN MELO
Data: 28/03/2025 13:19:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

(Dr. Alison Marcelo Van Der Laan Melo, PROFMAT/UNIVASF).

gov.br Documento assinado digitalmente
LINO MARCOS DA SILVA
Data: 28/03/2025 13:48:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

(Dr. Lino Marcos da Silva, PROFMAT/UNIVASF).

gov.br Documento assinado digitalmente
THIAGO DIAS OLIVEIRA SILVA
Data: 31/03/2025 11:00:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

(Dr. Thiago Dias de Oliveira Silva, PROFMAT/UFRPE).

À minha família, em especial a minha mãe, Benedita Maria, ao meu amado filho Luís Otávio e minha esposa, Yaponyra.

AGRADECIMENTOS

A gradeço primeiro a Deus pelo dom da vida, minha mãe pelo seu apoio durante toda a minha vida.

Ao professor Alison Marcelo Van Der Lan Melo pela orientação, paciência e compromisso com realização neste trabalho.

E a todas as pessoas que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu obrigado.

Ninguém nasce feito, é experimentando-nos no mundo que nós nos fazemos.

Paulo Freire
Política e educação. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1992.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo investigar as possíveis contribuições da abordagem da Teoria dos Grafos nos Anos Finais do Ensino Fundamental, por meio de uma sequência didática lúdica. Para isso, elaborou-se e aplicou-se uma sequência didática em formato de oficinas com estudantes do 9º ano. A proposta visa oferecer aos alunos da educação básica a oportunidade de desenvolver novas aptidões, capacitando-os a adquirir competências necessárias para sua participação plena na sociedade. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de caráter exploratório, que adota o estudo de caso como procedimento metodológico. A problemática que norteia o estudo é: "A introdução da Teoria dos Grafos, por meio de uma sequência didática lúdica, pode contribuir para a melhoria da aprendizagem matemática dos alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental?" Para responder a esse questionamento, desenvolveu-se uma sequência didática lúdica aplicada em formato de oficinas, dividida em três módulos. Foram utilizados como instrumentos de coleta de dados: questionários de sondagem inicial, atividades desenvolvidas nas oficinas e um questionário pós-oficina, com o objetivo de analisar a evolução dos alunos. Dessa forma, por meio deste estudo, verificou-se que a introdução da Teoria dos Grafos, por meio de uma sequência didática lúdica no Ensino Fundamental Anos Finais em Matemática oportunizou a construção de habilidades não apenas que contribuem para a compreensão dos conceitos abstratos da matemática, por meio da modelagem de problemas com grafos, mas também capacitam os estudantes a adquirir competências para resolver problemas reais de seu cotidiano. Além disso, ampliam a visão dos alunos sobre o que é a matemática, ao não limitá-la ao uso de fórmulas, desenvolvendo sua argumentação lógica e pensamento algorítmico, dialogando com as habilidades da BNCC.

Palavras-chave: *Teoria dos Grafos. Ensino Fundamental Anos Finais. Sequência Didática Lúdica.*

ABSTRACT

This work aims to investigate the possible contributions of the Graph Theory approach in the Final Years of Elementary School, through a playful didactic sequence. For this purpose, a didactic sequence in workshop format was created and applied with 9th grade students. The proposal aims to offer basic education students the opportunity to develop new skills, enabling them to acquire competencies necessary for their full participation in society. This is qualitative research with an exploratory nature, which adopts the case study as its methodological procedure. The guiding question of the study is:“Can the introduction of Graph Theory through a playful didactic sequence contribute to improving mathematics learning for students in the Final Years of Elementary School?” To answer this question, a playful didactic sequence was developed and applied in workshop format, divided into three modules. The data collection instruments used were: initial survey questionnaires, activities developed in the workshops, and a post-workshop questionnaire, with the objective of analyzing student progress. Thus, through this study, it was verified that the introduction of Graph Theory through a playful didactic sequence in the Final Years of Elementary School in Mathematics enables the development of skills that not only contribute to understanding abstract mathematical concepts through modeling problems with graphs, but also equip students to acquire competencies to solve real problems from their daily lives. Additionally, it expands students’ view of what mathematics is, by not limiting it to the use of formulas, developing their logical reasoning and algorithmic thinking, in dialogue with the BNCC skills.

Key-words: *Graph Theory. Final Years of Elementary School. Playful Didactic Sequence.*

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ALGORITMOS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DCRB	Documento Curricular Referencial da Bahia
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OBI	Olimpíada Brasileira de Informática
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A sociedade contemporânea vem passando por transformações significativas com os rápidos avanços tecnológicos, onde a matemática desempenha um papel fundamental ao definir, modelar e resolver problemas em diferentes campos da vida humana. Despertar o interesse e a curiosidade dos alunos por esta disciplina se torna uma tarefa importante para os professores, que buscam sempre estratégias para tornar as aulas mais dinâmicas e atrativas.

O Documento Curricular Referencial da Bahia (DCRB) entende a importância que o conhecimento matemático desempenha na sociedade e a relevância de estratégias que busquem inserir esses conhecimentos na realidade sociocultural do educando, assim:

> Considera que a sociedade contemporânea, ao realizar ações das mais simples até aquelas que envolvem conceitos científicos e tecnológicos, utiliza conhecimentos matemáticos que vão sendo construídos historicamente pelas necessidades diárias dos indivíduos. Nessa perspectiva, para que a escola acompanhe a história da civilização, ou seja, o processo de desenvolvimento humano que se encontra ancorado no contexto da resolução de situações-problema, deve-se conceber uma nova dinâmica para a mobilização de saberes matemáticos intrinsecamente ligados a uma realidade sociocultural (Bahia, 2020, p. 335).

Deste modo, despertar o interesse e a curiosidade do estudante pela disciplina de matemática torna-se uma tarefa essencial para os professores. Logo, muitos docentes buscam proporcionar um ensino estimulante e motivador procurando sempre novos recursos para tornar as aulas mais dinâmicas e atrativas.

Observamos que o conhecimento matemático contextualizado está cada vez mais sendo explorado na prática pedagógica do ensino da matemática de forma a torná-lo tangível a realidade onde o educando está inserido. Nesse contexto, este estudo visa apresentar uma sequência lúdica para a introdução à Teoria dos Grafos possibilitando ao estudante vivenciar problemas reais por meio de uma abordagem que valoriza o pensamento analítico.

Dessa forma, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforça a necessidade de um ensino matemático que desenvolva a capacidade de enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, expressar respostas e sintetizar conclusões utilizando diferentes registros e linguagens, como gráficos, tabelas e esquemas. Nesse sentido, a BNCC estabelece habilidades que incentivam a construção e a interpretação de algoritmos por meio de representações visuais. Dentre essas habilidades, destacam-se:

> Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se

> um número natural qualquer é par)(Brasil, 2018, p. 301).
>
> Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.)(Brasil, 2018, p. 305).

Desde a década de 90, D'Ambrosio (1996, p. 59) alerta sobre a importância da Matemática discreta "Pode-se prever que na matemática do futuro serão importantes o que hoje se chama matemática discreta" e ainda faz críticas a sua restrição ao nível superior, "[...] Lamentável isso só é estudado em algumas especialidade de matemática aplicada. Justamente por representar a matemática do futuro, é muito mais interessante para o jovem. Os problemas tratados são mais interessantes, a visualização é no estilo moderno, parecido com o que se vê em TV e nos computadores".

Assim, a Teoria dos Grafos, uma área da Matemática Discreta, quando apresentada de forma lúdica, oferece a oportunidade para estudantes da educação básica desenvolverem novas aptidões de forma descontraída e atraentes. Construindo habilidades não apenas que contribuem para a compreensão dos conceitos abstratos da matemática, mas também capacitam os estudantes a adquirirem as competências necessárias para resolverem problemas reais vivenciados no seu cotidiano.

Segundo Jurkiewicz e Junior (2007, p. 423) "A teoria dos Grafos permite, de forma simples e contextualizada, a construção das ideias básicas que permeiam os processos algorítmicos, além de ser uma área riquíssima em aplicações, as quais nos remetem a problemas realmente contextualizados (e não "pretextualizados")".

A diversidade de conceitos abrangidos pela Teoria dos Grafos possibilita sua adaptação às necessidades de aprendizagem e às capacidades dos alunos. Esses conceitos podem ser relacionados a conteúdos já contemplados no Currículo Escolar, favorecendo, assim, a assimilação dos conteúdos e o desenvolvimento das competências e habilidades previstas para cada etapa.

Além de ampliar a forma como os alunos percebem a Matemática e torná-la mais dinâmica, por trazer uma matemática mais visual como destaca D'Ambrosio (1996), essa abordagem os motiva a se envolverem ativamente no processo de aprendizado, ao trazer conhecimentos que podem ser aplicados em situações concretas do cotidiano, conforme Jurkiewicz e Junior (2007).

Nesse contexto, Carvalho (2019) destaca que a introdução dos grafos deveria ser abordada no Ensino Básico, pois contribui para desfazer alguns mitos sobre a Matemática.

> As pessoas ainda têm a ideia de que ser bom em matemática é saber fazer contas e, quando têm uma visão mais sofisticada, acreditam que são pessoas que sabem resolver equações e inequações. Essa visão se

> deve à produção matemática que normalmente fazemos na escola, uma produção que consiste basicamente em usar expressões algébricas. Mesmo em temas como geometria, o que geralmente se faz é geometria métrica: calcular coisas, como comprimentos, áreas e volumes. A exposição matemática, aquela feita com argumentação que não é de natureza aritmética e algébrica, é muito pobre. Grafos fornecem um excelente tópico para aliar a matemática ao poder de argumentação que transcende a própria matemática. Saber argumentar logicamente é algo útil na vida em sociedade (Carvalho, 2019).

Deste modo, a Teoria dos Grafos surge como uma alternativa para tornar o conhecimento mais dinâmico, promovendo a argumentação lógica e ampliando a visão do aluno sobre a matemática. A introdução da Teoria dos Grafos na Educação Básica não apenas busca que o aluno construa seu próprio conhecimento, mas também oferece uma oportunidade para os estudantes desenvolverem habilidades analíticas essenciais para a participação ativa em uma sociedade cada vez mais informatizada, uma vez que a Teoria dos Grafos estimula o pensamento algorítmico.

Diante desse panorama, este trabalho de conclusão de curso tem a seguinte questão de pesquisa: "*A introdução da Teoria dos Grafos, por meio de uma sequência didática lúdica pode contribuir para melhoria da aprendizado dos alunos Ensino Fundamental Anos Finais em Matemática?*".

A motivação para essa questão se encontra na busca por estratégias pedagógicas que despertem a atenção dos estudantes. Observando-se uma tendência crescente em direção à contextualização do ensino da matemática, visando tornar o conhecimento mais tangível e aplicável ao cotidiano dos alunos. Este projeto propõe-se a colaborar com essa tendência de contextualização apresentando uma sequência didática lúdica para a introdução à Teoria dos Grafos. Assim, tem como objetivos.

1.1 OBJETIVOS GERAIS

Investigar possíveis contribuições da abordagem da Teoria dos Grafos nos Anos Finais do Ensino Fundamental, por meio de uma sequência didática lúdica.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Elaborar e Analisar uma sequência didática lúdica para a introdução da Teoria do Grafos no Ensino Fundamental Anos Finais.
- Aplicar a sequência didática lúdica com alunos do 9°ano do Ensino Fundamental no formato de oficina;
- Relatar e analisar a aplicação da sequência didática lúdica.

Para alcançar esses objetivos, o desenho metodológico adotado caracteriza-se por sua natureza quantitativa, com uma abordagem exploratória e a utilização de procedimentos típicos de um estudo de caso.

A sequência didática apresentada destaca conceitos fundamentais da Teoria dos Grafos, como a definição de vértices e arestas, o grau dos vértices, e a relação entre a contagem de arestas e a soma dos graus dos vértices. Além disso, enfatiza problemas que envolvem Grafos Eulerianos e Semi-Eulerianos, coloração de vértices e planaridade de grafos, tudo isso por meio de atividades lúdicas e práticas. Essa abordagem permite aos estudantes compreender a aplicabilidade dos conceitos de grafos em situações reais.

Espera-se que esse trabalho contribua, por meio da Sequência Didática, para que os discentes ampliem sua visão sobre a matemática, bem como para construção do conhecimento sobre Teoria dos Grafos e desenvolvimento do raciono lógico, além de fornecer mecanismo para que este estudante possa aplicar a matemática em situações reais motivando e destacando a relevância da matemática no cotidiano.

Para facilitar a leitura, este trabalho segue a seguinte estrutura organizacional. No Capitulo 2, serão discutidos os referenciais teóricos relevantes para o desenvolvimento do trabalho. No Capitulo 3, será apresentada a metodologia adotada na condução do trabalho. No Capitulo 4, são apresentados os resultados e discussões da pesquisa. E, por fim, no Capitulo 5, serão apresentadas as considerações finais.

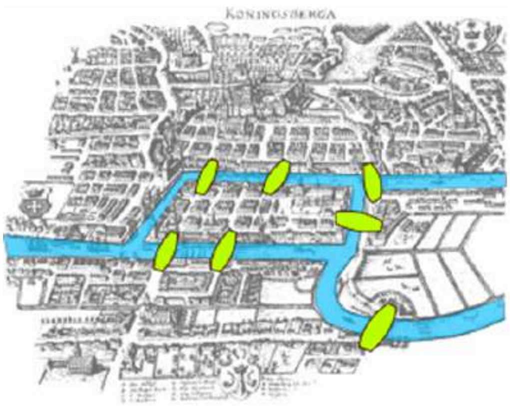
2 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico desta pesquisa é fundamentado em conceitos da Teoria dos Grafos e ludicidade no processo de aprendizagem. Esta revisão visa embasar a proposta de uma sequência didática lúdica para o ensino de Teoria dos Grafos no Ensino Fundamental anos finais.

2.1 ORIGEM

O problema das sete pontes de Königsberg, atual Kalinegrado na Rússia, que deu origem a Teoria dos Grafos, surgiu em 1736, quando o matemático Leonhard Euler propôs uma solução para uma dúvida que servia de passatempo para habitantes de Königsberg, a cidade era cortada pelo rio Prególio, formando duas ilhas. As duas margens do rio, junto com as ilhas, constituíam uma região que na época era ligada por 7 pontes conforme a Figura 1. Assim, seus habitantes se perguntavam se seria possível encontrar um caminho que passe em cada uma das sete pontes da cidade exatamente uma vez?

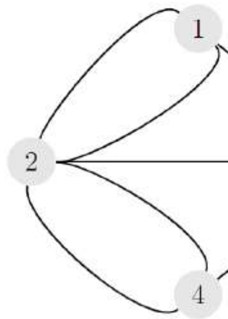
Figura 1 – Pontes de Königsberg



Fonte: Problema das Sete Pontes de Königsberg, wikipédia.

Euler respondeu à pergunta usando um diagrama, possivelmente o primeiro grafo da história como ilustrado na Figura 2, onde representa cada porção de terra pelos pontos 1 ,2, 3 e 4, que são os vértices do grafo e cada ponte por uma ligação, que são arestas do grafo.

Figura 2 – Representação do grafo das pontes Königsberg



Fonte: Autor.

Ele percebeu que tal caminho não existia em consequência dos teoremas 2.2 e 2.3 que veremos mais adiante na próxima seção, onde abordaremos todos aspectos teórico para a compreensão deste trabalho.

2.2 TEORIA DOS GRAFOS

Definição 2.1 (Grafo)**.** *Um grafo é uma tripla ordenada G(V,E,g), em que V é um conjunto finito e não vazio, E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V e* $g : E(G) \to V(G) \times V(G)$ *é uma função que associa cada aresta a um par não-ordenado de vértices, que são os extremos (Gersting, 1993).*

Os elementos de V (ou V(G)) são chamados de vértices de G, e os elementos E (ou E(G)) são as arestas de G.

Grafos podem ser representados por diagramas, onde cada vértice é representado por um ponto (elemento de V) e cada aresta em E por uma curva ligando os pontos que representam seus extremos como pode ser observado na Figura 3, onde temos cinco vértices e seis arestas.

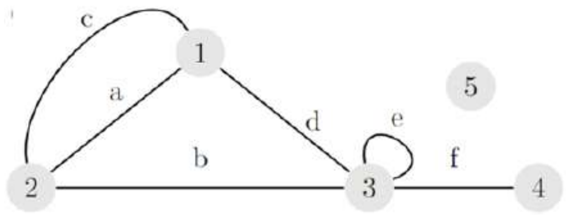
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E = \{a, b, c, d, e, f\}$$

A função que associa as arestas aos seus extremos assume os seguintes valores:

$$g(a) = \{1, 2\}; g(b) = \{2, 3\}; g(c) = \{1, 2\}; g(d) = \{1, 3\}; g(e) = \{3, 3\}; g(f) = \{3, 4\}$$

Definição 2.2 (Extremos e Incidência)**.** *Seja G um grafo e a uma aresta de G. Dizemos que os vértices u e v de G são extremos de a se {u, v} = g(a). Dizemos ainda que também a é incidente aos vértices u e v.*

Figura 3 – Exemplo de diagrama de um Grafo



Fonte: Autor.

Vários termos essenciais ao estudo da teoria dos grafos surgem quando representamos grafos por meio de diagramas. Assim, observando a Figura 3 podemos encontrar vários conceitos de grafos: adjacência, laço, arestas paralelas, grafos simples, vértices isolados, tamanho, ordem, grafo completo, subgrafo, etc.

Definição 2.3 (Adjacência)**.** *Seja G um grafo e $u, v \in V$. Dizemos que u é adjacente a v se e somente se $\{u, v\} \in \mathrm{Im}(g)$.*

Definição 2.4 (Laço)**.** *Seja G um grafo. Dizemos que uma aresta $a \in E$ é um laço se: $g(a) = \{u, u\}$, para algum $u \in V$.*

Assim, de acordo do com a definição 2.3 e o grafo da Figura 3 podemos notar que os vértices 1 e 3 são adjacentes, pois são extremos de uma mesma aresta, já 1 e 4 não são adjacentes, uma vez que, não são extremos da mesma aresta. O vértice 3 é adjacente a ele mesmo, logo a aresta e que conecta o vértice 3 a ele mesmo é denominada de laço.

Observe que as arestas a e c estão ligadas aos mesmos vértices 1 e 2 denominam-se arestas múltiplas ou paralelas. Além disso, O vértice 5 não possui nenhuma aresta incidente sobre ele, sendo, neste caso, denominado de vértice isolado.

Definição 2.5 (Ordem de um Grafo)**.** *Seja G um grafo. A ordem de G é o número de vértice em G. A ordem de G é denotada por $|V|$.*

Definição 2.6 (Dimensão de um Grafo)**.** *Seja G um grafo. A dimensão de G é o número de aresta em G. A dimensão de G é denotada por $|E|$.*

Iremos utilizar as letras n e m para representar $|V|$ e $|E|$, respectivamente.

Definição 2.7 (Tamanho de um Grafo)**.** *Seja G um grafo. O tamanho de G é a soma $n + m$, ou seja, é a soma do número de vértice com o número de arestas de G.*

Deste modo o grafo da Figura 3 apresenta ordem $n = |V| = 5$, dimensão $m = |E| = 6$ e tamanho $n + m = 5 + 6 = 11$.

2.2.1 Graus dos vértices de um grafo

Definição 2.8 (Grau). *Seja G e seja $v \in V$. O grau de v é o número de vezes que ele aparece como extremidade de uma aresta . O grau de v é denotado por $d(v)$.*

Teorema 2.1. *A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual a duas vezes o número de arestas do grafo, ou seja:*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.m$$

Demonstração. Cada aresta contribui com duas unidades para a soma dos graus dos vértices. Logo a soma total é duas vezes o número de arestas. ■

Dado o grafo da Figura 3, temos os seguintes graus d(1)= d(2)=3, d(3)=5, d(4)=1 e d(5)=0. É fácil a verificação da proposição, onde:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5) = 3 + 3 + 5 + 1 + 0 = 12$$

$$2.m = 2.6 \Rightarrow m = 6$$

Corolário 2.1.1. *Em qualquer grafo G, a soma dos graus de seus vértices é par.*

Demonstração. De fato, $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.m$, e $2.m$ é sempre par. ■

Corolário 2.1.2. *Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.*

Demonstração. Sejam V_P e V_I os conjuntos dos vértices de grau par e ímpar de um grafo G respectivamente. Como $V(G) = V_P \cup V_I$ e $V_P \cap V_I = \emptyset$, pelo teorema 1, temos:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.m$$

Logo,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{v \in V_P} d(v) + \sum_{v \in V_I} d(v)$$

Ou seja,

$$\sum_{v \in V_I} d(v) = 2.m - \sum_{v \in V_P} d(v)$$

Observe que o segundo membro da equação é par, pois $2.m$ é par e a soma de parcelas de números pares é par. Portanto $\sum_{v \in V_I} d(v)$ é par. Para que uma soma de números ímpares seja par, é necessário que o número de parcelas seja par. Logo a ordem de V_I é par.

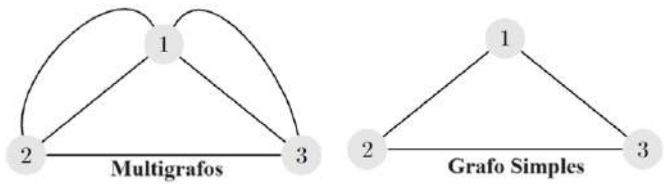
■

2.2.2 Classificação de grafos

Embora tenhamos utilizado até o momento o termo Grafo de maneira geral sem fazer distinção a espécies de grafos, faz-se necessário diferenciar alguns tipos como é o caso dos grafos simples e multigrafos apresentados na Figura 4.

Os grafos podem ser classificados segundo características presentes neles, tais como a presença de laços, múltiplas arestas, conexão entre vértices e arestas, etc. Essas classificações são essenciais para o entendimento do estudo de grafos. Assim, algumas dessas classificações serão apresentadas agora, outros casos serão especificados à medida que aparecerem ao longo do texto.

Figura 4 – Multigrafo e Grafo Simples



Fonte: Autor.

Definição 2.9. *Grafo Vazio é aquele que contém apenas vértices.*

Figura 5 – Grafo Vazio

Fonte: Autor.

Definição 2.10. *Grafos Simples é aquele que não contém laços nem duas ligações distintas com mesmo par de extremos, ou seja, não possuem arestas múltiplas.*

Um exemplo de grafo simples pode ser observado na Figura 4 que compara um multigrafo com um grafo simples.

Definição 2.11. *Grafo Completo é um grafo simples em que quaisquer dois vértices distintos são adjacentes. Denota-se por K_n o grafo completo de ordem n.*

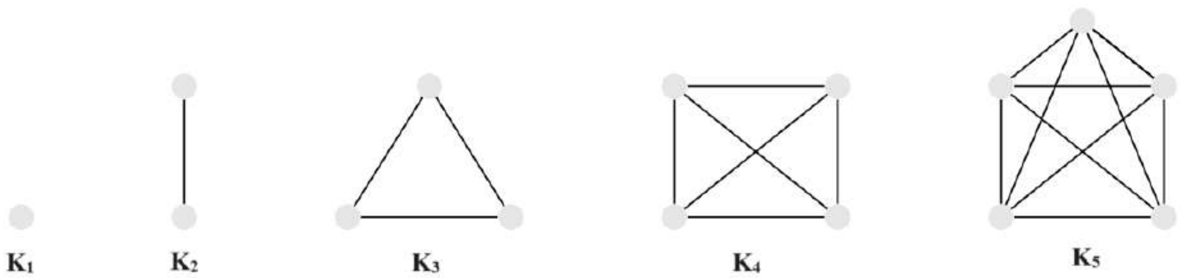
Na Figura 6 temos como exemplos os diagramas dos grafos completos K_1, K_2, K_3, K_4 e K_5 respectivamente. É fácil notar, pela definição, que, em um grafo completo K_n, o grau de cada vértice é igual a $n-1$ e que, consequentemente,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = n.(n-1) = n^2 - n.$$

Pelo teorema 2.1, podemos concluir que, em um grafo completo K_n, é válida a relação:

$$|E| = m = \frac{(n^2 - n)}{2}.$$

Figura 6 – Grafo Completo

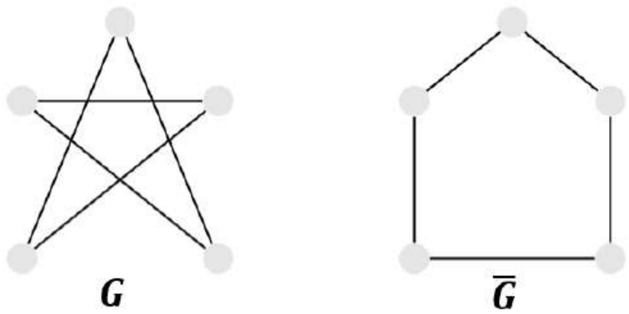


Fonte: Autor.

2.2.3 Grafo complementar

Dado um grafo G, denota-se por $\overline{G}$ o grafo complementar, o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G, ou seja, $V(\overline{G}) = V(G)$ e o conjunto de arestas de $\overline{G}$ é o conjunto de arestas que são necessárias para que G torne-se completo, $E(K_n) = E(\overline{G}) \cup E(G)$, isto é, da união de G com $\overline{G}$ tem-se um grafo completo.

Figura 7 – Grafo Complementar



Fonte: Autor.

2.2.4 Passeios em Grafos

Esta subsecção foi elaborada a partir das seguintes referências bibliográficas: (Bondy; Murty, 1976) e (Prestes, 2020)

Definição 2.12 (Passeio)**.** *Um **passeio** P em um grafo G é uma sequência alternada de vértices e arestas da forma:*

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k),$$

onde:

- $v_0, v_1, \ldots, v_k$ *são vértices do grafo;*
- $e_1, e_2, \ldots, e_k$ *são arestas do grafo;*
- *Para* $i = 1, 2, \ldots, k$*, a aresta* e_i *tem extremidades* v_{i-1} *e* v_i*.*

*O inteiro k é o **comprimento** do passeio P. Se $v_0 = v_k$, o passeio é dito **fechado**.*

Se todas as arestas do passeio são distintas, o passeio é chamado trilha; se $v_0 = v_k$ o passeio é uma trilha fechada, também conhecido como circuito. Conforme as definições 2.13 e 2.14.

Definição 2.13 (Trilha)**.** *Um passeio onde todas as arestas são distintas.*

Definição 2.14 (Trilha Fechada)**.** *Passeio fechado que é uma trilha.*

Se, além das arestas, todos os vértices são distintos então temos um caminho e se $v_0 = v_k$ temos um ciclo. Conforme as definições 2.15 e 2.16.

Definição 2.15 (Caminho)**.** *Um passeio onde todos os vértices são distintos.*

Definição 2.16 (Ciclo)**.** *Caminho fechado em que os únicos vértices idênticos são o primeiro e o último.*

Observe que:

$$caminho \subset trilha \subset passeio$$

2.2.5 Grafos Conexos

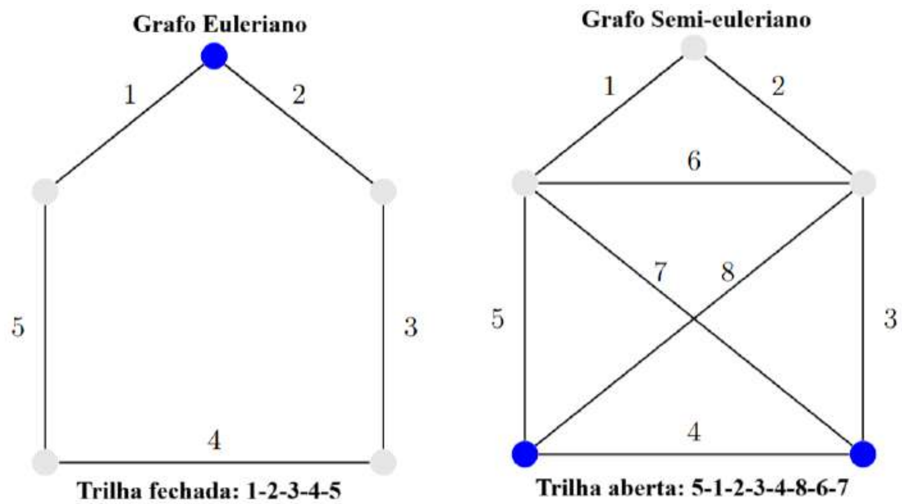
Definição 2.17 (Conexo)**.** *Um grafo G é dito conexo se, e somente se, existir pelo menos um caminho entre qualquer par de vértices de G. Caso contrário, G é chamado de desconexo.*

De maneira informal, dizemos que o grafo G é conexo se for possível caminhar a partir de qualquer vértice para qualquer outro vértice através de uma sequência de aresta adjacentes.

2.2.6 Grafo Euleriano

Um grafo G é dito euleriano quando este possui uma trilha fechada contendo todas as arestas. Porém se este caminho for aberto, ou seja, o vértice inicial for diferente do vértice final, diz-se que que é um grafo semi-euleriano.

Figura 8 – Grafo euleriano e semi-euleriano



Fonte: Autor.

Teorema 2.2. *Um grafo conexo G é euleriano se, e somente se, o grau de qualquer vértice de G for par.*

Teorema 2.3. *Um grafo conexo G é semi-euleriano se, e somente se, possuir exatamente dois vértices de grau ímpar.*

Retornando ao problema das Sete Pontes de Königsberg, apresentado no início do capítulo, podemos verificar, a partir dos teoremas 2.2 e 2.3, que o problema não tem solução, pois os graus dos vértices do grafo são todos ímpares.

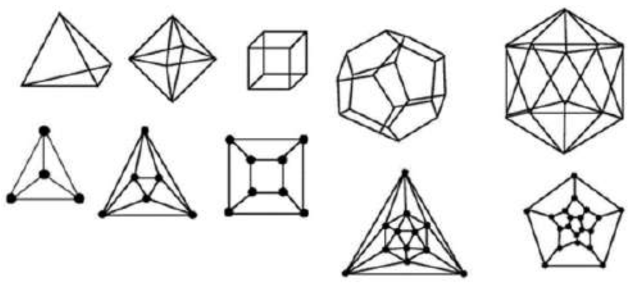
2.2.7 Grafo Planar

Esta subsecção foi elaborada a partir da seguinte referência bibliográfica: (Netto; Jurkiewicz, 2017).

Definição 2.18. *Um grafo G é dito planar se seus vértices e arestas podem ser representados no plano tal que suas arestas não se cruzem.*

Deste modo, um grafo G é planar se admite uma representação no plano de modo que nele não exista cruzamento de arestas. Exemplo clássico de grafos planares são dados pelos grafos que representam os poliedros. Na Figura 9, estão ilustrados os grafos dos cinco sólidos platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Figura 9 – Poliedro e suas representações como grafos planares



Fonte: (Netto; Jurkiewicz, 2017).

Teorema 2.4 (Fórmula de Euler)**.** *Seja G um grafo simples, planar e conexo com n vértices e m arestas. Seja r o número de regiões em uma representação planar de G. Então, $n - m + r = 2$.*

Corolário 2.4.1. *Se G é um grafo simples, planar e conexo com m arestas e n vértices, em que $n \geq 3$, então $m \leq 3n - 6$.*

Corolário 2.4.2. *Se G é um grafo simples, planar e conexo, sem triângulos com m arestas e n vértices, em que $n \geq 3$, então $m \leq 2n - 4$.*

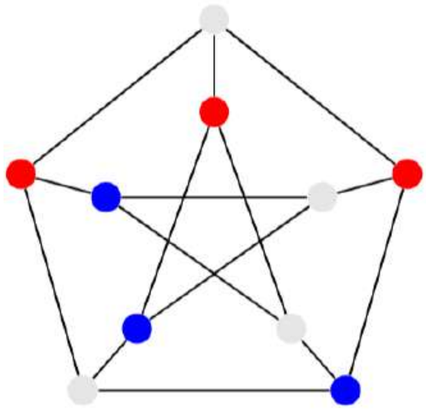
Corolário 2.4.3. *Se G é planar, então $\delta \leq 5$. Onde δ é o grau mínimo do grafo.*

2.2.8 Coloração de vértices

Uma coloração do conjunto de vértices de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices tal que vértices adjacentes recebem cores distintas. (Neto, 2003)

Como podemos observar na Figura 10. Além disso, podemos também determinar o seu número cromático, $\chi(G) = 3$, conforme a definição 2.19.

Figura 10 – Coloração do Grafo de Petersen



Fonte: Autor

Definição 2.19. *O número cromático de um grafo é o menor número de cores necessária para colorir os vértices desse grafo. O número cromático de um grafo G é denotado por* $\chi(G)$.

Teorema 2.5 (Teorema das 4 cores)**.** *Num grafo planar G tem-se que* $\chi(G) \leq 4$. *(Jurkiewicz, 2009, p. 102)*

2.3 O LÚDICO NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM

A matemática pode ser expressa de diversas formas, como por meio de jogos ou brincadeiras, muitas vezes consideradas como 'bobas', e que desempenham um papel crucial no processo de aprendizagem, pois permitem estimular o processo criativo. Conforme Ferrari, Savenhago e Trevisol (2014, p. 17):

> O lúdico tem um papel crucial no processo criativo, pois é através do brincar que a criatividade emerge. No entanto, a criatividade não vem do nada; requer que experiências anteriores sejam reinventadas, ressignificadas e, portanto, recriadas. O indivíduo aprende recriando o mundo real, presente nos jogos (Ferrari; Savenhago; Trevisol, 2014, p. 17).

Segundo Melo (2015, p. 33), "O termo lúdico deriva da palavra latina 'ludus', que significa 'jogos e diversão'. E no brincar estão incluídos jogos, brincadeiras e entretenimento, o que permite o aprendizado individual." Ainda de acordo com o autor diversos estudos demonstram que o lúdico pode ser um meio de descoberta para o aluno, contribuindo para construção do conhecimento.

Conforme aponta Silva (2011), o lúdico tem um papel central na promoção do desenvolvimento humano através das experiências cotidianas no ambiente escolar, ele deve ser reconhecido como elemento da psicologia do desenvolvimento humano, deixando de estar apontado para brincadeiras e jogos. Como aponta Sabião (2018, p. 06):

> O lúdico é uma dessas estratégias que vem sendo utilizada atualmente na prática educativa. Ajuda o aluno a aprender, permitindo que o professor planeje aulas dinâmicas que estimulem a interação, pois o aluno fica mais ansioso para aprender, seu interesse pelo material aumenta e, como resultado, ele realmente absorve o material que está sendo ensinado, encorajando-o a ser um pensador e um questionador, em vez de um receptor passivo de informações (Sabião, 2018, p. 06).

Dado o contexto, é fundamental entender que a leveza constitui a estrutura teórica e metodológica do processo educativo, servindo como ferramenta fundamental no processo de aprendizagem.

De acordo Ramos e Sqipano (2013, p. 8):

> Como tudo requer atenção quando envolve crianças, o professor deve ter cuidado na escolha dos materiais, jogos e atividades adequados para aquela aula, série, etc. A ludicidade é um recurso muito importante para garantir que as crianças continuem desenvolver plenamente e que resultados educacionais eficazes sejam alcançados (Ramos; Sqipano, 2013).

A partir disso, a ludicidade pode ser entendida como ferramenta pedagógica em um processo de aprendizagem educacional por meio do uso de jogos e atividades autônomas. Como resultado, a leveza está associada a atividades que inspiram o desejo de aprender a se divertir.

3 METODOLOGIA

A metodologia adotada para o desenvolvimento deste trabalho envolve uma abordagem qualitativa, objetivo exploratória e procedimento sendo o estudo de caso, com foco na elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática lúdica para o ensino de Teoria dos Grafos no Ensino Fundamental Anos Finais. Abaixo estão descritos os principais elementos da metodologia.

Quanto à abordagem, a pesquisa tem característica qualitativa, pois de acordo com Bogdan e Biklen (1994, p. 47) tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e tem no próprio pesquisador o principal elemento de coleta de dados.

No que se refere aos objetivos, o estudo é caracterizado como exploratório, visto que busca proporcionar uma compreensão mais aprofundada sobre a introdução da Teoria dos Grafos de maneira lúdica no contexto do Ensino Fundamental anos finais. Além disso, é direcionado por um estudo de caso, pois envolve a aplicação de sequência didática desenvolvida para grupo específicos de indivíduos.

Segundo Gonçalves (2003, p. 65), a pesquisa exploratória:

> É aquela que se caracteriza pelo desenvolvimento e esclarecimento de ideias, com objetivo de fornecer uma visão panorâmica, uma aproximação a um determinado fenômeno que é pouco explorado. Esse tipo de pesquisa também é denominado "pesquisa de base", pois oferece dados elementares que dão supor para a realização de estudos mais aprofundados sobre o tema (Gonçalves, 2003, p. 65).

Quantos aos procedimentos, trata-se de um estudo de caso que segue as etapas definidas por Gil (2002): formulação do problema; delimitação da unidade-caso; coleta de dado; analise e interpretação dos dados.

O estudo foi realizado na escola Estadual Pedro Raymundo Moreira Rêgo localizada na cidade de Juazeiro-BA. A escola está situada em uma região periférica da cidade, oferece Ensino Fundamental Anos Finais, Médio e EJA, a escolha se deu devido ao pesquisador está lotado nessa unidade de ensino, com intuito de facilitar a coleta de dados. O produto educacional foi desenvolvido no Ensino Fundamental Anos Finais com foco nas turmas de 9º ano. A pesquisa foi realizada com 20 discentes na faixa etária entre 13 e 14 anos. Os estudantes foram selecionados com base na disposição para participação do estudo e disponibilidade para participar das oficinas. Assim, as oficinas ocorreram no contraturno com os estudantes que sinalizaram o interesse em realizar as oficinas.

Para preservar a identidade dos participantes, foi adotada uma codificação alfanumérica, identificando-os como Aluno 1, Aluno 2, Aluno 3, Aluno 4, e assim sucessivamente até

Aluno 20. Essa codificação foi implementada para evitar qualquer tipo de constrangimento, assegurando o anonimato dos envolvidos.

3.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O produto educacional desenvolvido foi uma sequência didática elaborada em uma perspectiva lúdica para o ensino de Teoria dos Grafos na educação básica. Essa sequência didática foi dividida em seis oficinas, com duração aproximada de 1h40 cada, distribuídas em três módulos: Módulo I - Conceitos de Grafo, Estrutura de um Grafo e Relação entre a Contagem de Arestas e Soma dos Graus dos Vértices; Módulo II - Caminho euleriano e semi-euleriano; Módulo III - Coloração de vértices de um Grafo. Algoritmo para determinar o número cromático dos vértices de um grafo e Relação de Euler para Grafos, conforme apresentado no quadro 1 abaixo.

Dentro das oficinas os alunos foram organizados em grupos para incentivar a cooperação e discussão de ideias e estratégias a respeitos dos problemas apresentados para que eles pudessem estabelecer relações e caminhar para resolução dos desafios. Em seguida os alunos foram levados a mostrar a validade dessas estratégias, o qual o professor julgou como válidas ou não.

Antes de iniciar as oficinas foi realizado a aplicação do questionário diagnóstico B.1 com o objetivo de sondar se os alunos possuíam algum conhecimento prévio sobre a Teoria dos Grafos para posteriormente analisar a evolução do conhecimento adquiridos durante a oficina que seria feito através do instrumento B.3 para averiguar os conhecimentos obtidos durante as oficinas.

Quadro 1 – Distribuição da Sequência Didática em Oficinas

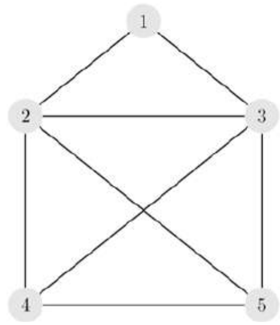
Módulo I	
Oficina 1	Conceitos de Grafo, Estrutura de um Grafo, representação por meio de diagramas e algumas situações-problema na forma de grafo.
Oficina 2	Relação entre a Contagem de Arestas e Soma dos Graus dos Vértices, investigação da relação.
Módulo II	
Oficina 3	Caminho euleriano e semi-euleriano, investigando a relação.
Oficina 4	Resolução de problemas e atividades lúdicas utilizando teoria dos grafos
Módulo III	
Oficina 5	Coloração de vértices de um Grafo. Algoritmo para determinar o número cromático dos vértices de um grafo.
Oficina 6	Grafos Planares e a Relação de Euler. Problema das Três Casas.

Fonte: Autor.

Objetivo do módulo I foi introduzir os alunos aos grafos, apresentar problemas que podem ser modelados através de diagramas, fazendo com que os alunos refletissem sobre relações existentes usando representação de grafos tais como a relação entre o número de arestas e soma dos graus dos vértices.

No módulo II, tratamos do caminho euleriano e semi-euleriano abordando de forma lúdica através de problemas motivadores como o desafio encontrado na Figura 52 .

Figura 11 – Grafo com caminho Euleriano



Fonte: Autor.

Onde os alunos precisaram passar com a ponta do lápis por todas as arestas sem repetir e sem tirar a ponta do lápis do papel. Este problema de caráter lúdico, tinha a intenção de provocar a reflexão do aluno a respeito das condições necessária para que um grafo seja euleriano ou semi-euleriano.

No módulo III, abordamos a Coloração de vértices de um Grafo e o Algoritmo para determinar o número cromático dos vértices de um Grafo, como também os Grafos Planares e a famosa Relação de Euler através de problemas lúdicos como o problema das Três Casas representado na Figura 12, que consiste em fornecer a essas três casas três serviços essenciais: água, gás e luz, para isso devemos realizar a ligação das três casas a esses três serviços sem cruzar arestas.

Figura 12 – Representação do problema das três casas.

Fonte: Autor.

Os fundamentos teóricos da Teoria dos Grafos abordados na Sequência Didática foram construídos por meio de revisão de literatura, explorando estudos sobre o ensino de matemática, abordagens lúdicas no ensino fundamental e especificidades da Teoria dos Grafos.

A elaboração da sequência didática foi guiada por referenciais teóricos e práticos, buscando integrar os conceitos teóricos com atividades práticas e lúdicas.

A natureza qualitativa do estudo não demandou tratamento estatístico. A avaliação se concentrou em análises qualitativas das respostas dos alunos, observações em sala de aula e percepção do professor.

Os recursos necessários foram a lousa, dominó, materiais impressos e reprodução de materiais didáticos, atividades lúdicas, e recursos para premiações em atividades competitivas.

A elaboração da sequência didática foi realizada em etapas, envolvendo revisão teórica e produção das atividades. A aplicação foi conduzida em ambiente escolar, com a participação ativa do professor e alunos.

Os critérios de análise forma o engajamento dos alunos, a compreensão dos conceitos, a eficácia das atividades lúdicas, o interesse dos alunos pela Teoria dos Grafos e o impacto percebido pelos professores.

Ao adotar essa metodologia, busca-se não apenas abordar o problema de pesquisa proposto, mas também proporcionar uma contribuição efetiva para o aprimoramento do ensino de matemática, específica para a Teoria dos Grafos no Ensino Fundamental anos finais. O desenvolvimento e a aplicação da sequência didática foram cuidadosamente planejados para garantir a qualidade e a relevância dos resultados obtidos.

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Diante das oficinas realizadas, os alunos tiveram a oportunidade de vivenciar a sequência didática proposta guiada pelo professor. Nesse processo, puderam discutir a respeito do conteúdo aprendido sobre teoria dos grafos, estabelecendo relações com temas da Aritmética, Álgebra, Lógica e Geometria. Além disso, aplicaram o conhecimento em problemas abordados através de atividades lúdicas.

Os estudantes mostraram-se muito motivados em participar da oficina e empenhados no desenvolvimento das atividades. De modo geral, os alunos conseguiram realizar as atividades sem dificuldade e demostraram facilidade na compreensão dos conceitos trabalhados na oficina, desta forma o professor quase não precisou realizar interversões.

Demostrando que a introdução da Teoria dos Grafos não necessita de pré-requisitos, pois foi constatado a partir do questionário B.1 que os alunos não possuíam conhecimentos prévio a respeito da Teoria dos Grafos como iremos observar na análise do questionário de conhecimento prévio a seguir.

4.1 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO DE CONHECIMENTO PRÉVIO

O questionário tinha como objetivo averiguar se os 20 alunos participantes das oficinas possuíam alguma espécie de conhecimento acerca de Teoria dos Grafos ou uma noção intuitiva sobre alguns conceitos que foram abordados nas oficinas, deste modo foram realizadas 10 perguntas a fim de medir o grau de conhecimento dos alunos sobre o tema.

A primeira pergunta tinha intenção de saber se em algum momento os alunos haviam se deparado com o tema Teoria dos Grafos mesmo sem se a profundar.

Pergunta 1: Você já ouviu falar sobre "Teoria dos Grafos"?

Em resposta a essa pergunta, os 20 participantes afirmaram que nunca haviam ouvido falar sobre Teoria dos Grafos, o que mostra que nunca tiveram contato com o tema.

A segunda pergunta estava condicionada à primeira. Ela tinha o objetivo de identificar de onde os alunos haviam tido contato com a Teoria dos Grafos, no caso de uma resposta afirmativa à pergunta 1.

Pergunta 2: Se sim, onde você ouviu falar sobre "Teoria dos Grafos"?

Os 20 participantes não responderam a esta pergunta, isso deve ao fato da Teoria dos Grafos não ser um conteúdo presente na BNCC e nem na parte diversificada do currículo da escola pesquisada.

A terceira questão tenta sondar se os alunos teriam uma noção intuitiva do que seria um Grafo. Dando-lhes três opções: um gráfico de linhas, um conjunto de pontos conectados por linhas e um tipo de tabela.

Pergunta 3: O que você acha que é um Grafo?

Figura 13 – Resposta a pergunta 3 do questionário B.1

Fonte: Autor.

Como podemos observar na Figura 13, a metade dos alunos responderam corretamente à pergunta. Apesar de não conhecerem a Teoria dos Grafos, conseguiram deduzir a informação correta. Quando o professor questionou, após a aplicação do questionário, como os alunos chegaram a tal conclusão, os discentes responderam que utilizaram o processo de eliminação para chegar à resposta.

A quarta e quinta questões tinha a intenção de descobrir se os alunos poderiam chegar à definição de forma superficial do que seria o vértice e arestas de um grafo.

Pergunta 4: Você sabe o que são vértices (ou nós) em um Grafo?

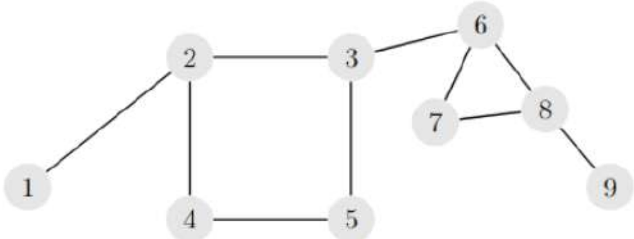
Pergunta 5: Você sabe o que são arestas em um grafo?

Em resposta a essas perguntas, a maioria dos alunos responderam não saber o que são vértices e arestas de um grafo. Os que responderam sim, deram a definição geométrica informal do que seriam vértices e arestas. O que é natural, pois como vimos na Pergunta 1 eles não tiveram contato com Teoria dos Grafos.

A sexta pergunta abordava o conceito de caminho, o objetivo era fornecer um grafo onde o aluno pudesse representar um caminho e explicasse de maneira informal porque se tratava de um caminho. O professor esperava que os alunos tivessem êxito na resolução desta pergunta por se tratar de conceito muito utilizado no dia a dia.

Pergunta 6: Identifique a figura abaixo um caminho iniciando em 1 e terminando em 9, e explique por que seria um caminho?

Figura 14 – Resposta a pergunta 6 do questionário B.1

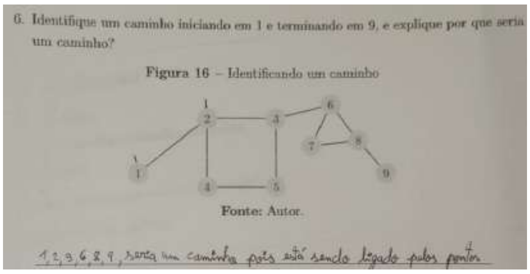


Fonte: Autor.

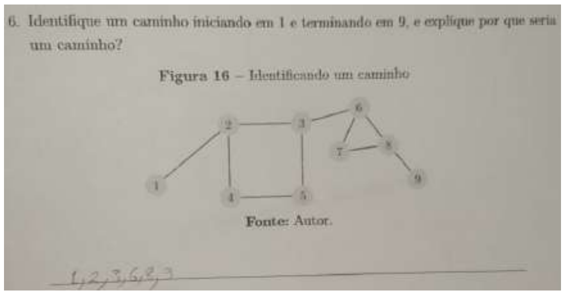
E como esperado todos os participantes conseguiram descrever um caminho e a grande maioria forneceu o caminho mínimo, porém não conseguiram explicar de maneira satisfatória o motivo de sua resposta ser um caminho. Conforme podemos ver na Figura 15 abaixo.

Figura 15 – Resposta a Pergunta 6 do questionário B.1

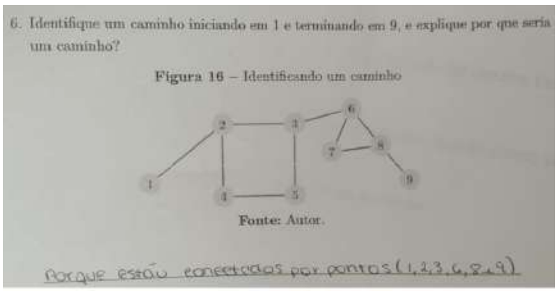
(a) Aluno 1



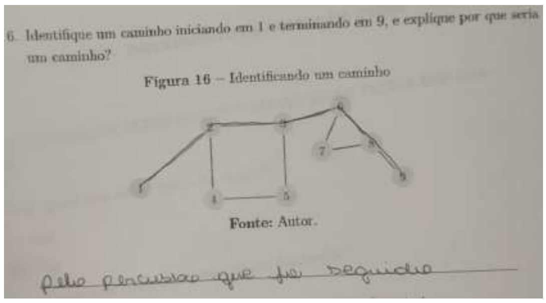
(b) Aluno 2



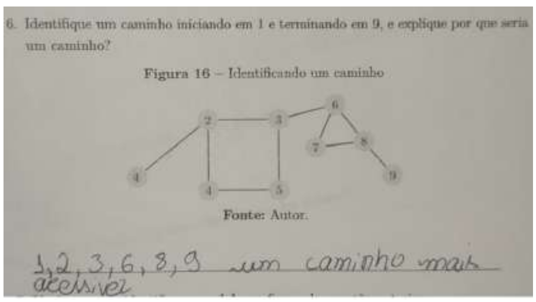
(c) Aluno 3



(d) Aluno 4



(e) Aluno 5



Fonte: Autor.

A sétima pergunta buscava descobrir se o aluno era capaz de reconhecer um ciclo em uma representação gráfica de um grafo.

Pergunta 7: Você consegue identificar um ciclo na figura da questão anterior?

Porém, apenas dois alunos, ou seja, 10%, responderam que conseguiram identificar um ciclo na imagem do grafo, e nenhum descreveu os ciclos. Apenas um explicou parcialmente o motivo pelo qual seria um ciclo.

A oitava questão trata da aplicação dos grafos e buscava saber se o aluno poderia ter conhecimento de alguma aplicação da teoria dos grafos no dia a dia, porém como vimos na pergunta 1 os alunos desconheciam a teoria do grafo. Assim, 90% dos alunos responderam não à pergunta 8.

Pergunta 8: Você pode dar um exemplo de onde os grafos podem ser usados no dia a dia?

Contudo dois alunos conseguiram dar respostas satisfatória a pergunta, o que gerou surpresa, já que eles não conheciam o tema.

A nona questão pretendia observar como os alunos representariam um problema que poderia ser modelado com um grafo.

Pergunta 9: Imagine que você tem três amigos e cada um conhece os outros dois. Como você representaria isso na forma de desenho?

Apenas 20% dos alunos não responderam a essa pergunta, e, entre os 80% que responderam, a grande maioria afirmou que resolveria o problema utilizando pontos para representar os amigos e linhas para representar as relações entre eles, demonstrando que, intuitivamente, utilizariam a modelagem por grafos, mesmo sem nunca terem tido contato com o tema.

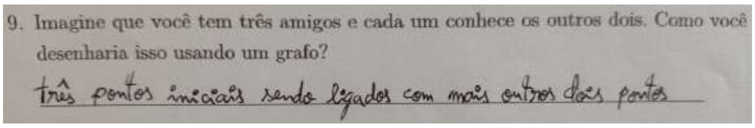
A última questão buscava medir o interesse dos alunos pelo assunto.

Pergunta 10: Você acha que a teoria dos grafos pode ser interessante para aprender?

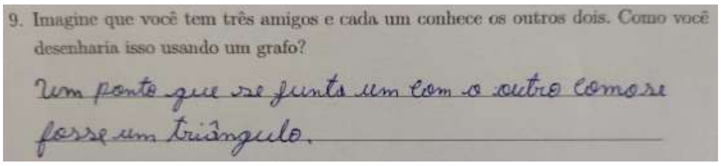
Para essa pergunta 90% dos alunos responderam que sim e 10% que talvez, conforme a Figura 17. Mostrando que os alunos consideraram o tema interessante mesmo sem ter um contato prévio.

Figura 16 – Resposta a Pergunta 9 do questionário B.1

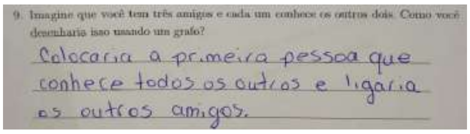
(a) Aluno 1



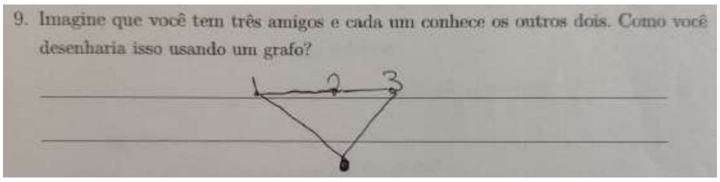
(b) Aluno 2



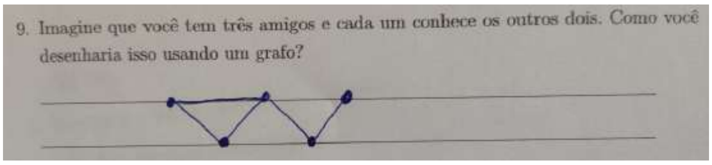
(c) Aluno 3



(d) Aluno 6

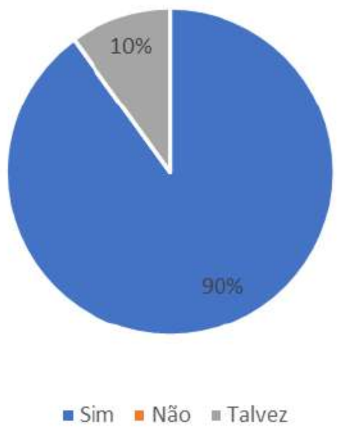


(e) Aluno 15



Fonte: Autor.

Figura 17 – Resposta a pergunta 10 do questionário B.1



Fonte: Autor.

4.2 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

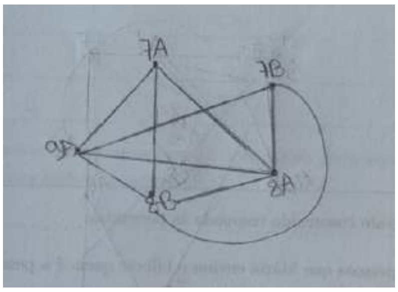
A aplicação da sequência didática no formato de oficina foi realizada em diferentes momentos separados por módulos, conforme o planejado. Os resultados obtidos serão apresentados por oficina de acordo com a sequência das atividades didáticas realizadas, permitindo uma análise detalhada e estruturada dos efeitos e aprendizados resultantes.

Oficina 1 - Conceitos de Grafo, Estrutura de um Grafo, representação por meio de diagramas e algumas situações-problema na forma de grafo.

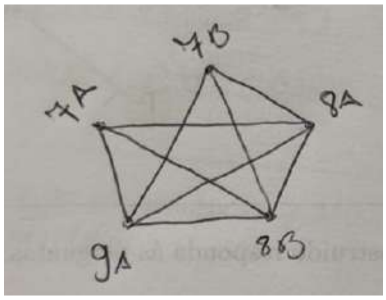
Ao término da oficina os alunos foram submetidos a atividades que trabalhassem os conceitos apresentados, após realizarem as atividades foi disponibilizado um tempo para discutir sua resposta e sanar eventuais dúvidas a respeito da atividade e do conteúdo exposto na oficina.

Figura 18 – Resposta ao problema do jogo de vôlei

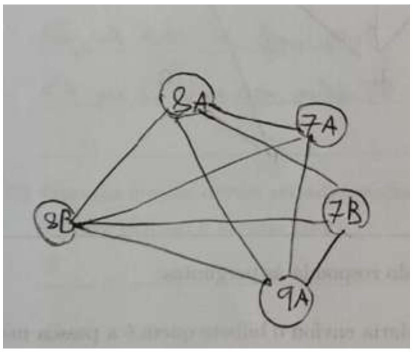
(a) Aluno 7



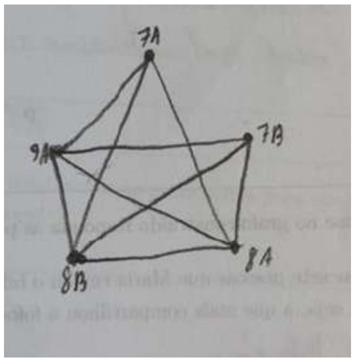
(b) Aluno 18



(c) Aluno 3



(d) Aluno 1



Fonte: Autor.

Na Figura 18 podemos observar os registros da solução de um problema sobre a representação de um grafo na forma de diagrama apresentados pelos alunos na oficina.

A partir do problema proposto no apêndice B.2 da página 67 os discentes tiveram que representar objetos como vértices e as relações entre os objetos como aresta e logo em seguida através deste diagrama foram capazes de tirarem conclusões a respeito do questionamento feito sobre esse problema como: "Quais jogos ainda não tinham sido realizados". Com êxito conseguiram obter a resposta correta ao problema apresentado, demostrando com perfeição os objetivos idealizados pela oficina.

Nesse momento os alunos levantaram alguns questionamentos sobre a possibilidade de cruzar as aresta ou representá-las como curvas.

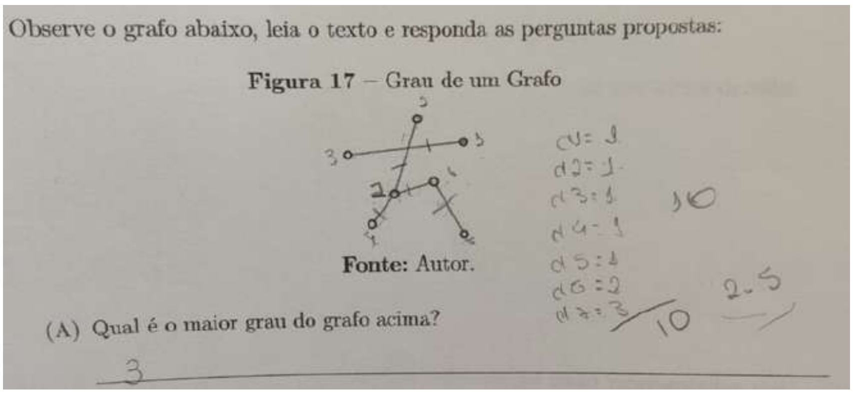
Essa atividade confirma a visão de D'Ambrosio (1996), pois a representação do problema na forma de um grafo possibilitou aos alunos uma visualização mais clara do problema. Essa abordagem permitiu a estruturação do raciocínio de forma mais organizada e intuitiva, levando-os à solução do problema.

Oficina 2 - Relação entre a Contagem de Arestas e Soma dos Graus dos Vértices, investigação da relação.

A oficina 2 proporcionou ao aluno refletir sobre a relação existente entre a soma dos graus dos vértices e arestas, conforme apresentado na Figura 19. Essa relação foi utilizada para resolver problemas relacionados à possibilidade ou não da existência de um grafo, considerando essa propriedade. Por exemplo, no caso do item (B) do primeiro problema da oficina 2 na página 69, onde aluno foi questionado se seria possível a existência de um grafo com sete vértices todos com grau 3, conforme podemos observar na Figura 20.

Além disso, com esse conhecimento, eles foram capazes de determinar, com precisão, a quantidade de arestas que deveriam ser adicionadas para que o grafo tivesse o mesmo grau em todos os vértices, um problema que seria complexo sem o conhecimento da Teoria dos Grafos.

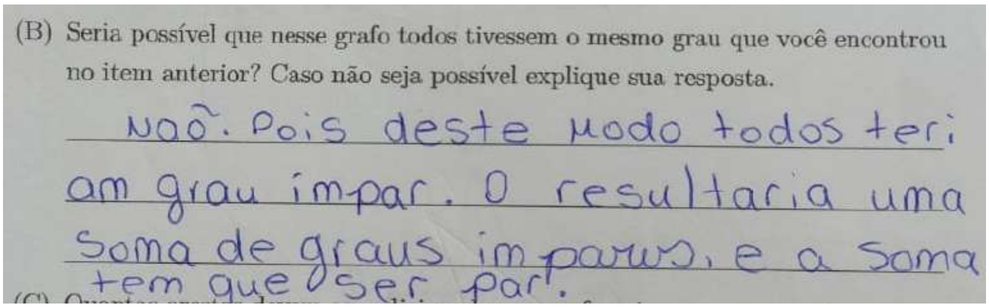
Figura 19 – Atividade sobre Grau de um Grafo



Fonte: Autor.

Nessa atividade podemos revisitar um tema muito útil na aritmética o conceito de paridade, já que de acordo com Teorema 2.1 a soma do graus será sempre par. Conforme podemos observar na Figura 20 que apresenta a resposta de um aluno ao item (B) dessa atividade.

Figura 20 – Atividade sobre Grau de um Grafo - Item (B)



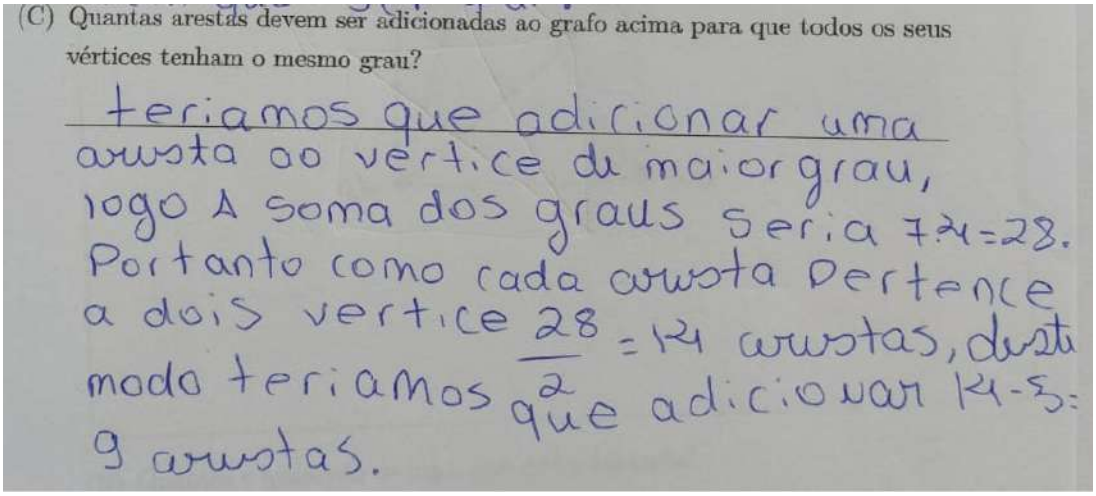
(B) Seria possível que nesse grafo todos tivessem o mesmo grau que você encontrou no item anterior? Caso não seja possível explique sua resposta.

Não. Pois deste modo todos teriam grau ímpar. O resultaria uma soma de graus ímpares, e a soma tem que ser par.

Fonte: Autor.

Podemos perceber na Figura 21, a presença de outros temas, como a análise combinatória, como observamos na argumentação do aluno para chegar à solução do problema. Além disso, esse problema reforça o entendimento de Carvalho (2019), que afirma que o estudo do grafo alia a matemática ao poder de argumentação.

Figura 21 – Atividade sobre Grau de um Grafo - Item (C)



(C) Quantas arestas devem ser adicionadas ao grafo acima para que todos os seus vértices tenham o mesmo grau?

teriamos que adicionar uma aresta ao vertice de maior grau, logo a soma dos graus seria $7 \cdot 4 = 28$. Portanto como cada aresta pertence a dois vertice $\frac{28}{2} = 14$ arestas, deste modo teriamos que adicionar $14 - 5 = 9$ arestas.

Fonte: Autor.

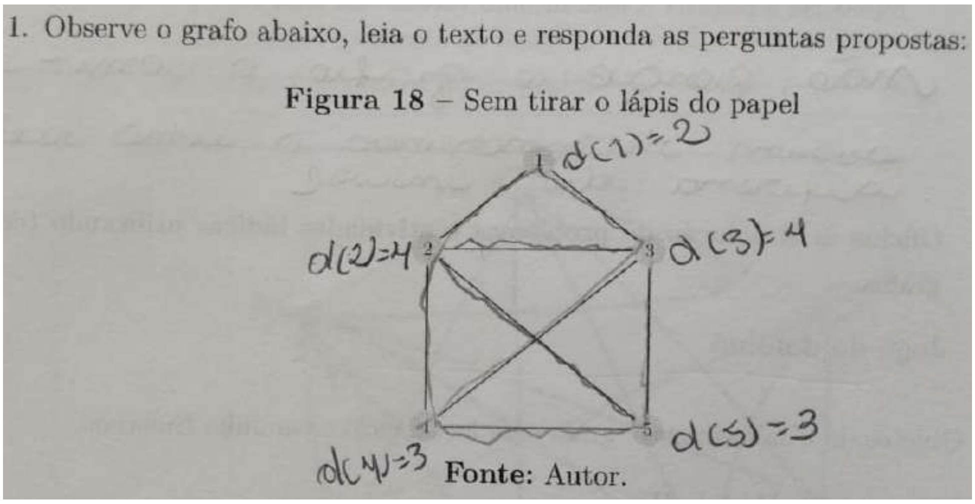
Oficina 3 - Caminho euleriano e semi-euleriano, investigando a relação.

A Oficina 3 apresentou desafios que são comumente encontrados na internet ou em revistas infantis, onde o objetivo é realizar um percurso sem tirar o lápis do papel, de modo que não se pode repetir arestas, conforme apresentado na Figura 22. Deste modo, os alunos foram desafiados a investigar os problemas e estabelecer uma relação sobre quando é possível realizar esse percurso ou não.

Nesse contexto, foi apresentado o problema das Sete Pontes de Königsberg, solucionado por Euler, e, após uma discussão, os alunos perceberam que esses problemas estavam intimamente ligados aos graus dos vértices do grafo e era similar ao problema de percorre um desenho sem tirar o lápis do papel.

A partir de uma discussão em grupo conduzida pelo professor, os alunos chegaram as condições necessárias para avaliar quando seria impossível realizar esse percurso, quando poderiam realizar o caminho, mas não terminariam no mesmo vértice em que iniciaram (grafo semi-euleriano) e quando poderiam realizar o percurso e retornar ao mesmo vértice em que iniciaram (grafo euleriano).

Figura 22 – Atividade sobre caminho semi-euleriano



Fonte: Autor.

Na Figura 22, podemos observar que, com o conhecimento adquirido na oficina, o aluno determinou os graus dos vértices do grafo para avaliar se seria possível realizar o percurso. Além disso, ao analisar os graus, poderia identificar por qual vértice deveria iniciar, caso o grafo fosse semi-euleriano.

Assim, os itens da atividade foram pensado afim de guiar os estudantes a aplicar o algoritmo desenvolvido em sala de aula a partir dos teoremas 2.2 e 2.3.

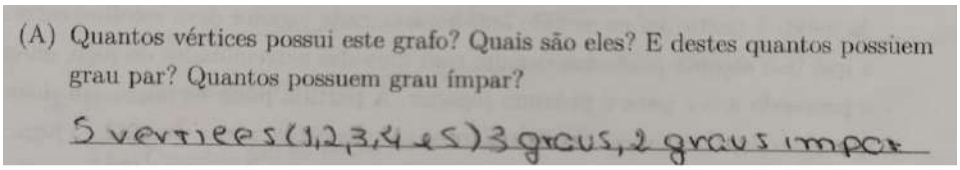
Algoritmo 1 – Verifica se um grafo euleriano ou semi-euleriano

```
Verificar os graus dos vértices.
Se todos os vértices tiverem grau par, o grafo é euleriano.
Se exatamente dois vértices tiverem grau ímpar, o grafo é semi-euleriano.
Se houver mais de dois vértices com grau ímpar, o grafo não é nem euleriano, nem semi-euleriano.
```

Fonte: Autor

Deste modo, o aluno respondeu a item (A) do primeiro problema da oficina 3 na página 70, ilustrado na Figura 23, que se refere a quantidade de vértices e sua identificação, logo em seguida informou quantos vértices de grau par e impar o grafo possuíam.

Figura 23 – Atividade sobre caminho semi-euleriano - Item (A)


(A) Quantos vértices possui este grafo? Quais são eles? E destes quantos possuem grau par? Quantos possuem grau ímpar?

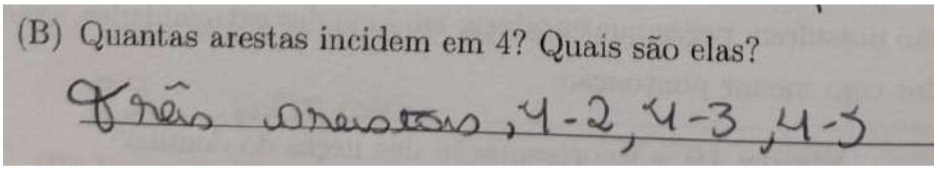
5 vertices (1,2,3,4 e 5) 3 graus, 2 graus impar

Fonte: Autor.

Com base no item (A) e no algoritmo apresentado acima podemos perceber que o grafo é semi-euleriano, logo devemos iniciar por um dos vértice de grau impar.

Assim , no item (B), item (C) e item (D), nas respectiva figura 24, 25 e 26 o aluno pode revisitar o conhecimento aprendido na Oficina 2. E guiar a resposta do item (E).

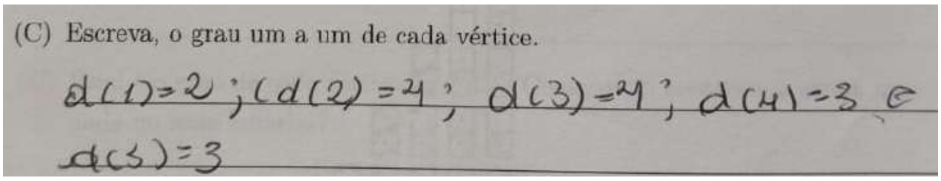
Figura 24 – Atividade sobre caminho semi-euleriano - Item (B)


(B) Quantas arestas incidem em 4? Quais são elas?

Três arestas, 4-2, 4-3, 4-5

Fonte: Autor.

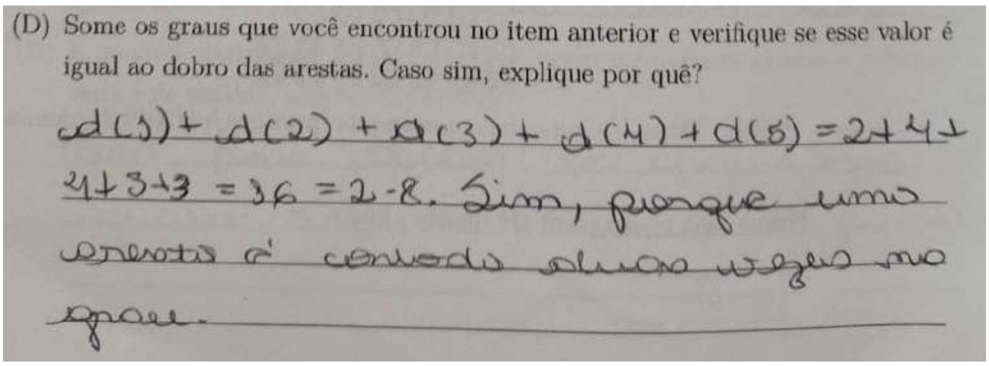
Figura 25 – Atividade sobre caminho semi-euleriano - Item (C)


(C) Escreva, o grau um a um de cada vértice.

d(1)=2; (d(2)=4; d(3)=4; d(4)=3 e d(5)=3

Fonte: Autor.

Figura 26 – Atividade sobre caminho semi-euleriano - Item (D)

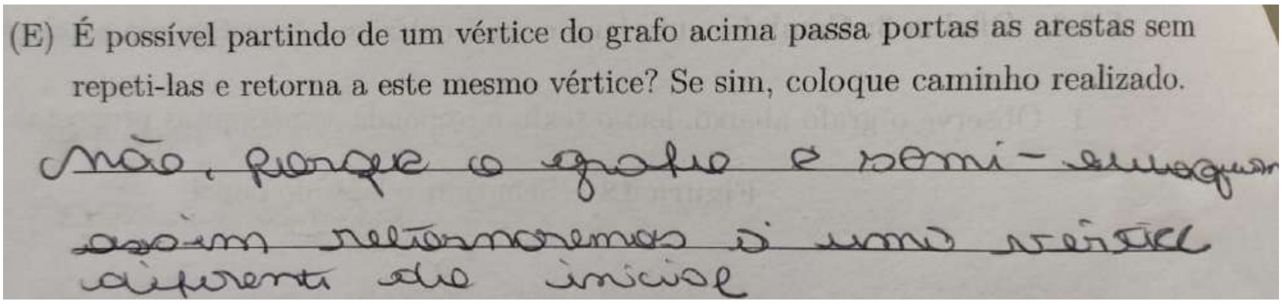

(D) Some os graus que você encontrou no item anterior e verifique se esse valor é igual ao dobro das arestas. Caso sim, explique por quê?

d(1)+d(2)+d(3)+d(4)+d(5)=2+4+4+3+3 =16=2·8. Sim, porque uma aresta é contada duas vezes no grau.

Fonte: Autor.

O aluno conseguiu chegar a conclusão correta, ao perceber que o grafo é semi-euleriao.

Figura 27 – Atividade sobre caminho semi-euleriano - Item (E)


(E) É possível partindo de um vértice do grafo acima passa portas as arestas sem repeti-las e retorna a este mesmo vértice? Se sim, coloque caminho realizado.

não, porque o grafo é semi-euleriano assim retornaremos à um vértice diferente do inicial

Fonte: Autor.

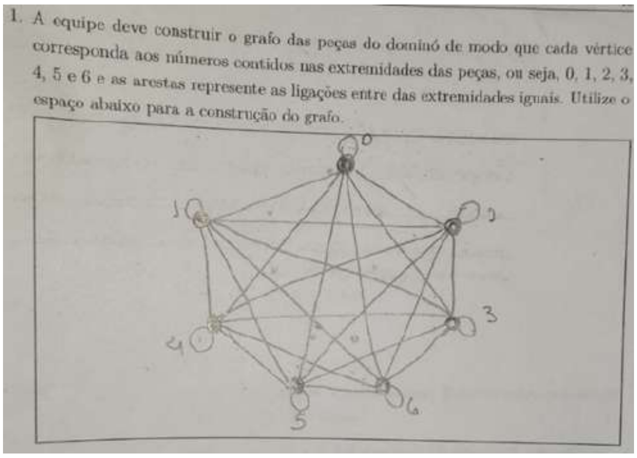
Oficina 4 - Resolução de problemas e atividades lúdicas utilizando teoria dos grafos.

Na oficina 4, colocamos em prática os conhecimentos apresentados nas outras oficinas por meio do jogo de dominó. Os alunos puderam perceber que é possível realizar um caminho fechado utilizando todas as peças do dominó, representando isso através de um grafo, conforme a Figura 29. A atividade demonstrou forte entusiasmo por parte dos alunos.

Figura 28 – Atividade de caminho euleriano usando o dominó

Fonte: Autor.

Figura 29 – Representação dos alunos do grafo do dominó



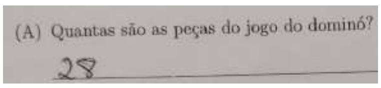
Fonte: Autor.

Como podemos observar nas Figuras 29 e 30, os estudantes demonstraram domínio dos conceitos apresentados na oficina ao representar corretamente o grafo do jogo de dominó. Eles compreenderam que as peças com extremidades iguais deveriam ser representadas por laços e que esses laços deveriam ser contados duas vezes na soma dos graus dos vértices.

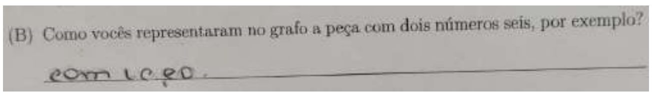
Os alunos também perceberam que o grafo que representa o dominó possui um caminho euleriano, pois todos os seus vértices são pares. Foi estabelecida uma conexão com o problema inicial proposto, que consistia em realizar um caminho fechado utilizando todas as peças. Eles compreenderam que isso era possível justamente pelo fato de se tratar de um caminho euleriano.

Figura 30 – Resposta de uma aluno atividade da oficina 4

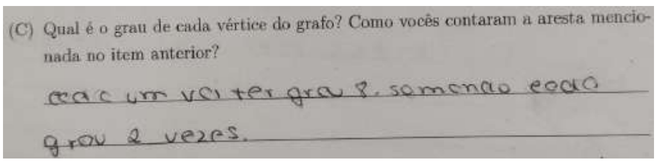
(a) Aluno 14



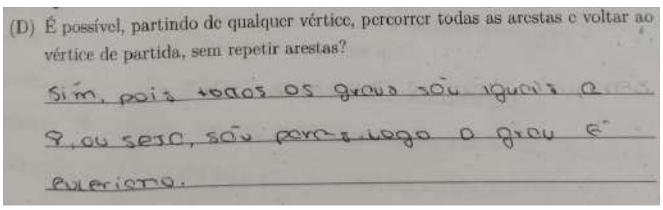
(b) Aluno 14



(c) Aluno 14



(d) Aluno 14



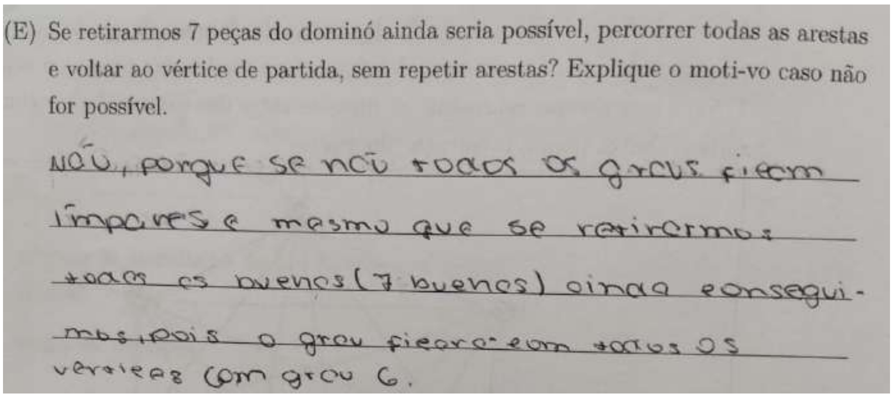
Fonte: Autor.

Em relação ao Item (E), todos os alunos apresentaram dificuldade em respondê-lo, já que a resolução exigia a separação da resposta em dois casos distintos.

- Uma contemplasse a retirada das sete peças com extremidades iguais (Buchas);
- E a retirada de outras 7 peças que não contemplem todas as Buchas.

Como podemos observar os alunos até tentaram redigir uma resposta, porém não tiveram clareza na sua solução.

Figura 31 – Resposta de uma aluno atividade da oficina 4


(E) Se retirarmos 7 peças do dominó ainda seria possível, percorrer todas as arestas e voltar ao vértice de partida, sem repetir arestas? Explique o moti-vo caso não for possível.

Não, porque se não todos os graus ficam ímpares e mesmo que se retirarmos todas os buchas (7 buchas) ainda consegui-mos, pois o grau ficaria com todos os vértices com grau 6.

Fonte: Autor.

Ao analisar as respostas dos alunos, é possível perceber que eles buscaram demonstrar que, ao retirar sete peças que não são as buchas, todos os vértices apresentariam graus ímpares, impossibilitando a realização de um percurso. Por outro lado, ao retirar as buchas, os vértices ficariam com grau igual a 6, pois os laços, que contribuem com 2 unidades na soma dos graus de cada vértice, seriam eliminados. Dessa forma, seria possível realizar o percurso.

Porém, os alunos não mencionaram que, ao retirar sete peças que não são as buchas, poderíamos nos deparar com um grafo semi-euleriano, no qual haveria dois vértices de grau ímpar. Nesse caso, também não seria possível realizar o percurso completo, pois em um grafo semi-euleriano não é possível retornar ao vértice de origem.

De forma geral, a Oficina 4 foi bem-sucedida, com os alunos relatando que a atividade foi uma experiência divertida, especialmente por envolver o jogo de dominó. A atividade proporcionou um ambiente enriquecedor para a aplicação prática dos conceitos abordados na oficina. No entanto, a dificuldade apresentada pelos estudantes ao lidar com o item (E) destacou a necessidade de ajustes específicos nesse item, a fim de orientar os alunos a contemplar todos os casos abordados e, assim, promover uma análise mais completa e aprofundada do problema.

Oficina 5 - Coloração de vértices de um Grafo. Algoritmo para determinar o número cromático dos vértices de um grafo.

Nesta oficina, os alunos aprenderam sobre a coloração de grafos e o Teorema das Quatro Cores. A partir de discussões com os colegas e o professor, tiveram a oportunidade de desenvolver um algoritmo para determinar o número mínimo de cores necessárias para pintar um grafo. Em seguida, colocaram o aprendizado em prática utilizando lápis de cor.

No início da oficina, os alunos não perceberam imediatamente a conexão entre o problema e os grafos, e tentaram abordar o desafio de maneira não sistemática. Isso resultou em dificuldades para pintar a atividade proposta sem que regiões adjacentes tivessem a mesma cor e para encontrar o menor número de cores necessárias.

A partir das tentativas dos alunos, o professor propôs o desenvolvimento de um algoritmo, que foi construído de forma colaborativa, para ajudá-los a resolver o problema de forma mais eficiente.

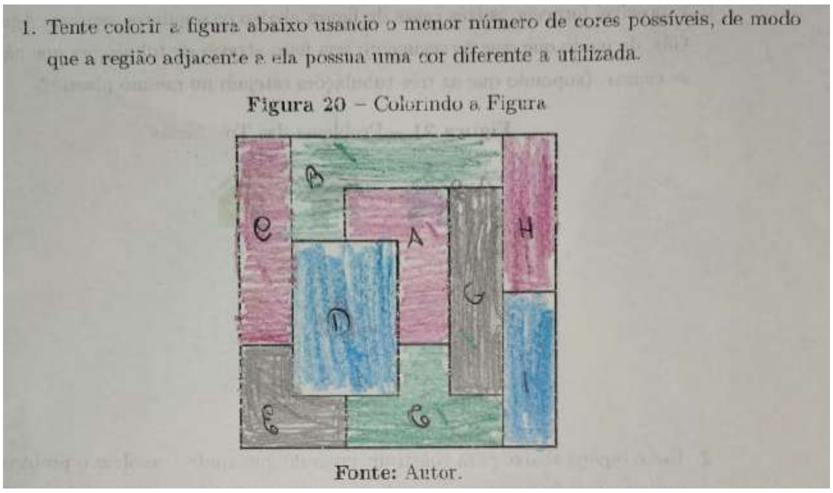
Algoritmo 2 – Coloração do vértice do grafo (Welsh e Powell)

```
Identifique o vértice com o maior grau.
//(Esse será o primeiro vértice a ser pintado.)
Escolha a primeira cor e pinte esse vértice.
Pinte os outros vértices não conectados ao vértice já pintado com a
↪ mesma cor.
//(Certifique-se de que nenhum vértice conectado ao outro tenha a mesma
↪ cor.)
Escolha outro vértice, ainda não pintado, que tenha o maior grau (ou
↪ seja, o maior
número de conexões) entre os vértices restantes.
Selecione uma nova cor e pinte esse vértice.
Em seguida, pinte os outros vértices não conectados a esse vértice com a
↪ mesma cor.
Repita o processo até que todos os vértices estejam pintados.
```

Fonte: Autor

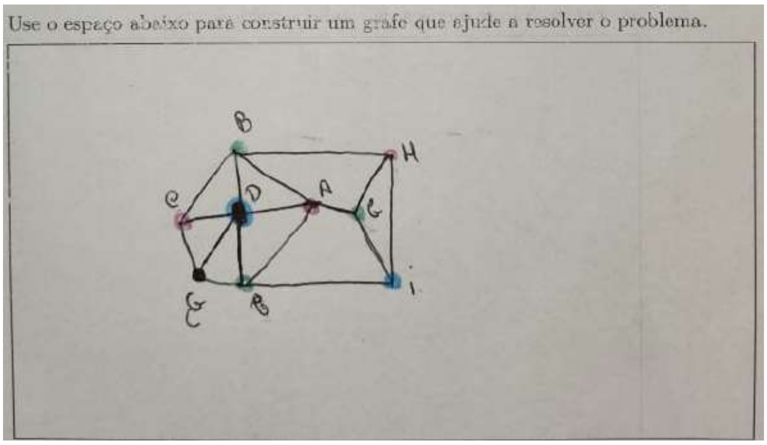
Com o desenvolvimento do algoritmo e o auxílio do Teorema das Quatro Cores, os estudantes tentaram resolver o problema novamente. Realizando a atividade com uma certa facilidade como podemos observar nas Figuras 32 e 33.

Figura 32 – Resposta do Aluno 16 ao item 1 da atividade da oficina sobre coloração



Fonte: Autor.

Figura 33 – Resposta do Aluno 16 ao item 2 da atividade da oficina sobre coloração



Fonte: Autor.

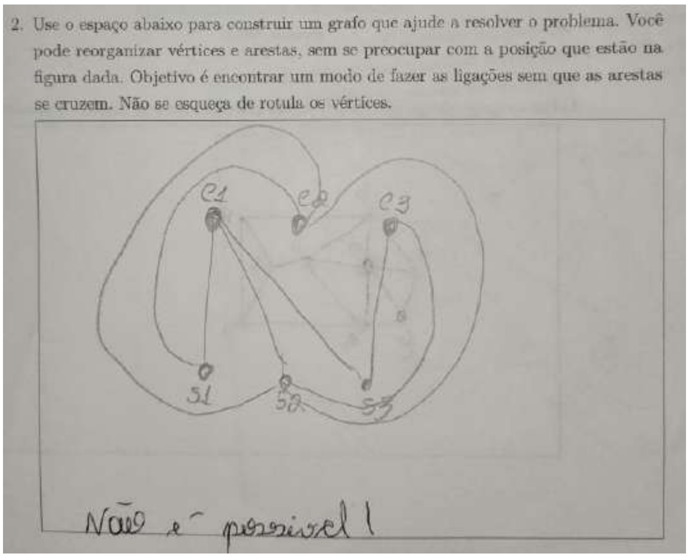
Oficina 6 - Grafos Planares e a Relação de Euler. Problema das Três Casas.

A oficina proporcionou ao aluno revisitar a famosa relação de Euler, já estudada no Ensino Fundamental Anos Finais em Geometria. Por meio de exemplos, eles foram capazes de compreender a aplicação da relação de Euler no estudo dos grafos e aplicá-la ao problema das três casas. Embora, à primeira vista, o problema não parecesse ter muita relação com a teoria, os alunos perceberam que a relação de Euler foi fundamental para determinar que o problema não possuía solução.

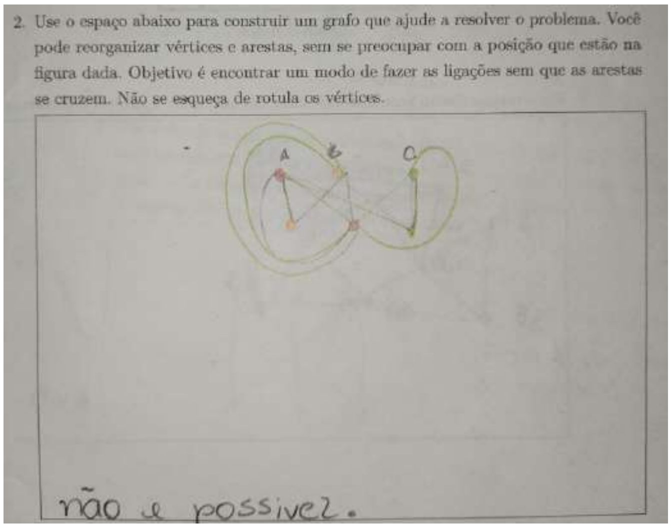
Diante dessas abordagens realizadas pelos alunos, percebe-se que o trabalho desenvolvido surtiu efeitos positivos na vida estudantil. É notório, a partir desses relatos e das diversas fontes bibliográficas utilizadas neste trabalho, que o uso da Teoria dos Grafos é eficiente para despertar o interesse dos estudantes pela matemática.

Figura 34 – Resposta ao problema das três casas

(a) Aluno 13



(b) Aluno 20



Fonte: Autor.

4.3 AVERIGUAÇÃO DO CONHECIMENTO PÓS-OFICINA

A averiguação do conhecimento Pós-Oficina contou com análise inicial das percepções dos alunos com relação as atividades desenvolvidas nas oficinas. Deste modo, formam feitas as seguintes perguntas.

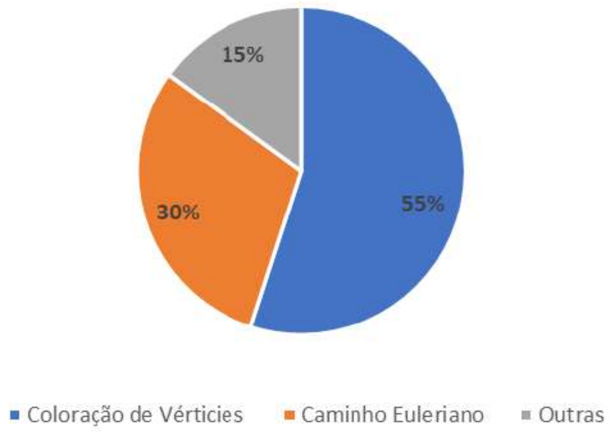
Pergunta 1: Você gostou das atividades propostas? Se sim, o que você mais gosta?

Pergunta 2: Você encontrou alguma dificuldade na realização das atividades? Se sim, qual foram as dificuldades encontradas?

Pergunta 3: Gostaria de ter mais aulas com atividades como essas?

Em resposta Pergunta 1 todos afirmaram ter gostado das atividades desenvolvida, em relação a preferência das atividades os alunos relataram ter gostado mais das atividades envolvendo Coloração de vértices e Caminho Euleriano, com respectivamente 55% e 30% da preferência conforme a Figura 35.

Figura 35 – Resposta a pergunta 1 do questionário B.3



Fonte: Autor.

Em relação a segunda pergunta a maioria respondeu que apresentou alguma dificuldade nas atividades realizadas. As respostas a essa pergunta foram as mais diversas possíveis, porém a que mais se destacou foi o Problema das Três Casas.

Os alunos relataram que tiveram dificuldade em perceber que o problema não possuía solução e que tiveram que fazer várias tentativas para perceber que não era possível realizar as conexão dos três serviço as três casas. O que é natural, pois no estudo dos Grafos determinar se grafo é ou não planar é problema complexo.

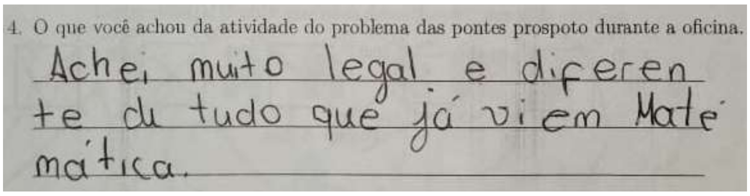
Já em resposta a terceira pergunta todos os alunos responderam que queriam ter mais atividades como as apresentadas na oficina. Mostrando que atividades lúdicas e aplicadas ao cotidiano são bem aceitas e despertam um maior interesse nos alunos.

A quarta pergunta resgata o problema das sete pontes de Königsberg, um problema muito importante, pois marca o início da Teoria do Grafos além de ter surgido de uma brincadeira dos habitantes Königsberg, este problema foi apresentado pelo professor na aula expositiva no início das oficinas. Deste modo, o professor queria saber impressões dos alunos acerca deste problema.

Pergunta 4: O que você achou da atividade do problema das pontes proposto durante a oficina.

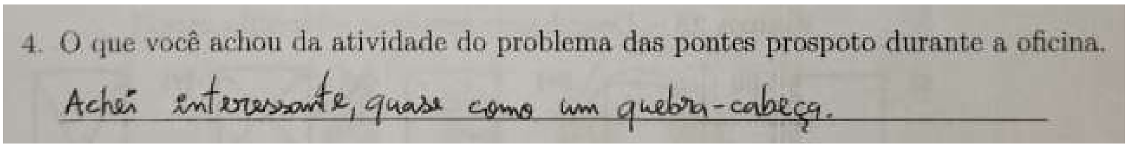
Grande parte dos alunos afirmaram que o problema era interessante, porém consideraram complexo conforme as Figuras 36, 37 e 38 . O que é compreensível, pois se trata de um problema impossível até então os discentes nunca tinham se deparados com problemas matemático insolúveis e o problema demandou uma maior abstração por parte do aluno para compreender a solução dada ao problema.

Figura 36 – Resposta do Aluno 3 a pergunta 4 do questionário B.3


4. O que você achou da atividade do problema das pontes prospoto durante a oficina.
Achei muito legal e diferente di tudo que já vi em Matemática.

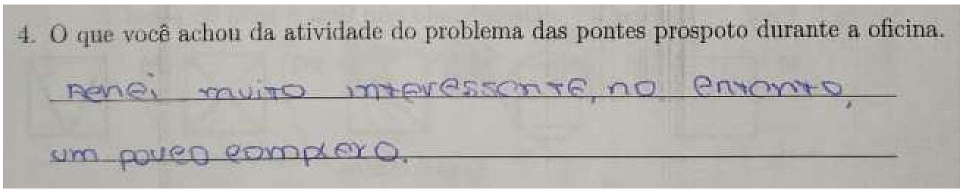
Fonte: Autor.

Figura 37 – Resposta do Aluno 1 a pergunta 4 do questionário B.3


4. O que você achou da atividade do problema das pontes prospoto durante a oficina.
Achei interessante, quase como um quebra-cabeça.

Fonte: Autor.

Figura 38 – Resposta do Aluno 4 a pergunta 4 do questionário B.3


4. O que você achou da atividade do problema das pontes prospoto durante a oficina.
Achei muito interessante, no entanto, um pouco complexo.

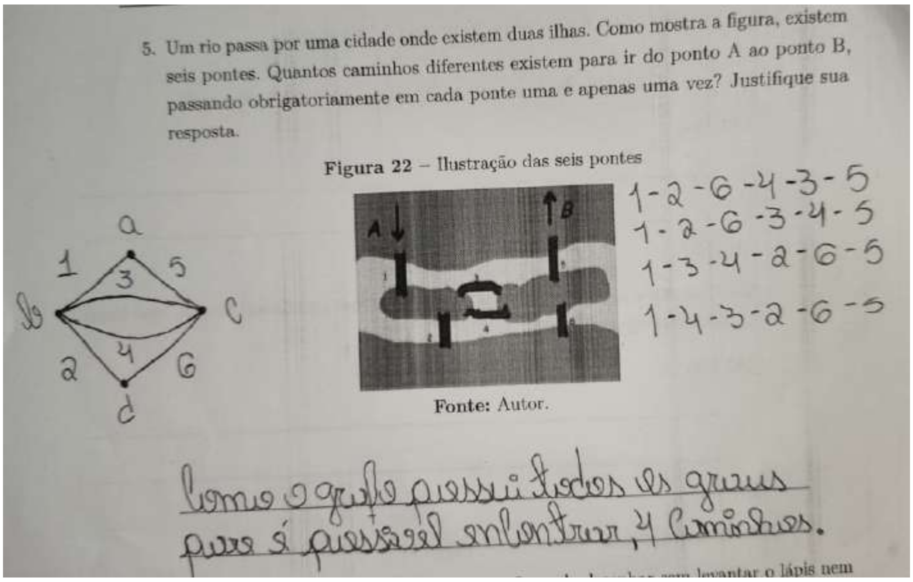
Fonte: Autor.

A partir das perguntas de 1 a 4, podemos avaliar a experiências dos alunos nas oficinas. Já as perguntas de 5 a 10 objetivaram medir conhecimento adquirindo nas oficinas, assim foram utilizados questões de olimpíadas matemáticas que abordassem grafos tais como Canguru da Matemática e Obmep.

A questão de número cinco abordava um problema de caminho euleriano onde o aluno teria que percorrer todas as pontes partindo de um ponto A até ponto B, similar ao problema da sete pontes apresentado pelo professor durante a oficina.

Os alunos conseguiram reconhecer que se tratava de caminho euleriano e forneceram o número de caminho. Como se pode ver na Figura 39.

Figura 39 – Resposta a pergunta 5 do questionário B.3



Fonte: Autor.

Dando prosseguimento a análise da aprendizagem do aluno em relação aos caminhos eulerianos abordamos na questão de número seis, vários grafos onde o aluno deveria ser capaz de determinar qual dos grafos não era possível realizar o caminho euleriano semelhante ao problema apresentado na oficina.

Analisando a respostas dos alunos a este problema percebemos que eles utilizaram as definições 2.2 e 2.3 diferentemente da abordagem usada na oficina quando tiveram o primeiro contato com o problema onde não utilizaram critério nenhum para resolver a questão. Mostrando terem compreendido muito bem as condições para temos um caminho euleriano. Isto pode ser observado na Figura 40 que apresenta a solução de um participante da oficina.

Figura 40 – Resposta a pergunta 6 do questionário B.3

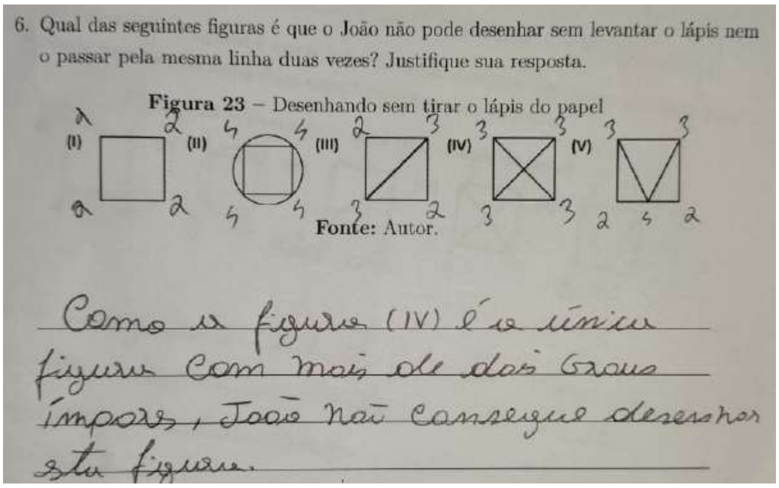

6. Qual das seguintes figuras é que o João não pode desenhar sem levantar o lápis nem o passar pela mesma linha duas vezes? Justifique sua resposta.

Figura 23 – Desenhando sem tirar o lápis do papel

Fonte: Autor.

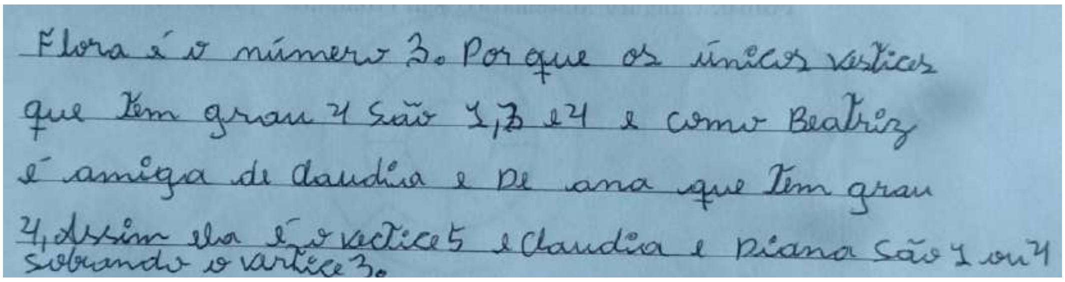
Como a figura (IV) é a única figura com mais de dois Graus ímpares, João não consegue desenhar sta figura.

Fonte: Autor.

Observe que o aluno fez uma contagem dos graus do grafo para determinar se possuía um caminho euleriano ou semi-euleriano, assim concluindo que apenas o grafo de número (IV) não poderia ser desenhado com as restrições proposta no problema. Demostrando conhecimento acerca das condições necessárias para existência de um caminho euleriano e semi-euleriano.

O problema de número 7 apresentava um diagrama de um grafo que modelava a relação de amizade entre algumas garotas, onde os alunos usaram o conhecimento sobre graus de um grafo para desvendar o vértice correspondente uma das garotas.

Figura 41 – Resposta a pergunta 7 do questionário B.3

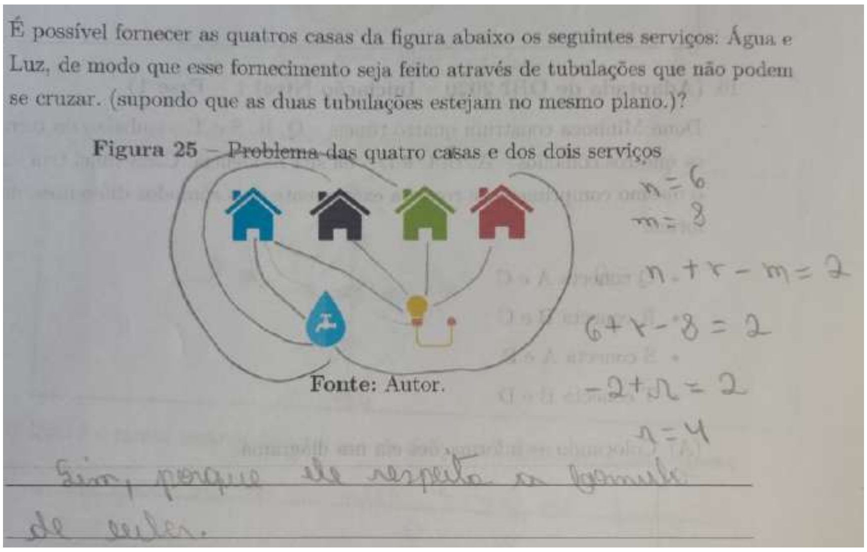

Flora é o número 3. Porque os únicos vertices que tem grau 4 são 1,3 e 4 e como Beatriz é amiga de claudia e De ana que tem grau 4, Assim ela é o vertice 5 e Claudia e Diana são 1 ou 4 sobrando o vertice 3.

Fonte: Autor.

Ao analisar o grafo os alunos conseguiram restringir as informações baseado nas relações de amizade que representavam o graus do grafo. Chegando a reposta do problema. Conforme a Figura 41.

Na questão de número 8 foi apresentado uma modificação do problema das três casas e três serviço, onde o professor acrescentou uma casa a mais e retirou o serviço de gás para que fosse possível a resolução do problema. Assim, os alunos conseguiram realizar a solução do problema muitos utilizaram a relação de Euler e não optaram por realizar as ligações sem antes saber se o problema obedecia a relação diferentemente da abordagem seguida na oficina por eles. Relataram que temiam o problema não ter solução.

Figura 42 – Resposta a pergunta 8 do questionário B.3

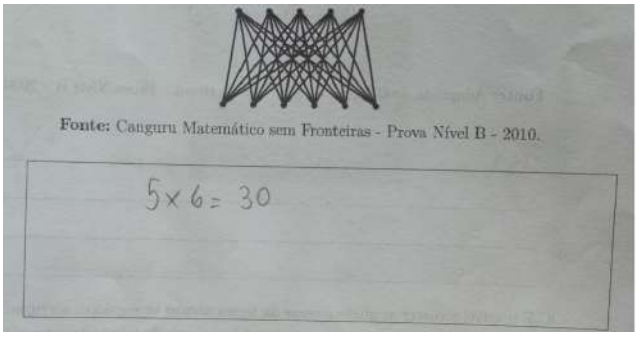


Fonte: Autor.

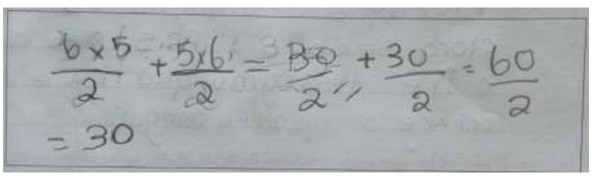
A nona questão abordava o Teorema do Aperto de mãos, onde foi apresentado um grafo pediu-se que os alunos determinassem o número de arestas. O professor esperava que a maioria utiliza-se o Teorema. Porém, os alunos em sua grande maioria optaram por usar o principio da contagem. o que aplica-se a esse grafo, já que ele é bipartido. Podemos observar a respostas de dois alunos usando o teorema e o principio multiplicativo.

Figura 43 – Resposta a Pergunta 9 do questionário B.3

(a) Aluno 8



(b) Aluno 12

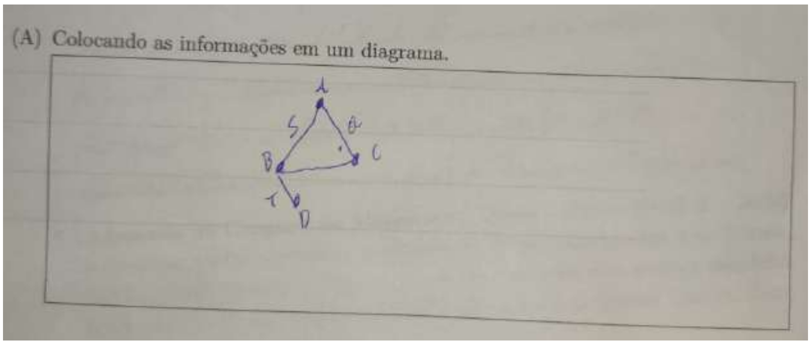


Fonte: Autor.

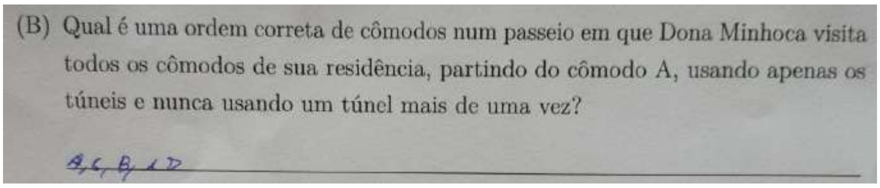
A questão de número de 10 tinha a intenção de perceber se os alunos eram capazes de modelar um problema usando grafos e através dessa representação chegar a solução do problema que era encontrar um caminho partindo do cômodo A passando por todos os outros cômodos.

Figura 44 – Resposta a Pergunta 10 do questionário B.3

(a) Aluno 10



(b) Aluno 10



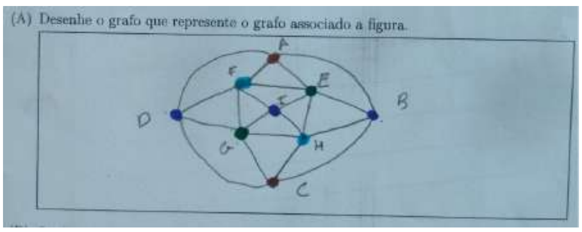
Fonte: Autor.

Ultima questão, aborda um problema de coloração, a maioria dos alunos optaram por aplicar o algoritmo de coloração, mostrando que conseguiram compreender o algoritmo apresentado na oficina. Os alunos relataram ter gostado bastante dessa atividade devido sua natureza lúdica.

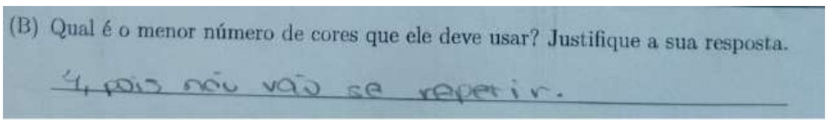
Figura 45 – Resposta a Pergunta 11 do questionário B.3

(a) Aluno 3

(b) Aluno 3



(c) Aluno 3



Fonte: Autor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Despertar o interesse e a curiosidade do estudante pela disciplina de matemática torna-se uma tarefa essencial para os professores. Deste modo, a busca por práticas pedagógica que estimulem e tonem a matemática mais tangível a realidade do aluno é fundamental.

Nesse cenário, a pesquisa teve como objetivo geral investigar se a introdução da Teoria dos Grafos, por meio de uma sequência didática lúdica, pode contribuir no aprendizado de matemática dos alunos do Ensino Fundamental Anos Finais. Para isso, buscou-se a elaboração de oficinas com alunos do 9° ano da Escola Estadual Pedro Raymundo Moreira Rêgo, localizada no município de Juazeiro-BA, para aplicação da sequência didática e posteriormente a investigação das possíveis contribuições.

Quanto ao objetivo elaborar e analisar sequência didática, foram realizadas pesquisas bibliográficas a respeito de ludicidade e Teoria do Grafos por meio de livro, artigos, dissertações e teses. Posteriormente foi verificado por meio da aplicação da sequência didática que as atividades propostas estavam adequadas ao nível dos estudantes.

No que se refere ao objetivo de aplicar a sequência didática lúdica com os alunos do 9°ano do Ensino Fundamental no formato de oficina, foram realizadas seis oficinas divididas em três módulos. Onde os alunos puderam vivenciar os conteúdos de Teoria dos Grafos através de atividade lúdicas.

Quanto ao objetivo relatar e analisar a aplicação da sequência didática lúdica, foram realizadas minuciosamente, na análise dos resultados. Foi verificado engajamento dos estudantes nas atividades propostas e assim como suas percepções.

Quanto à questão de investigação de estudo, "Investigar possíveis contribuições da abordagem da Teoria dos Grafos nos Anos Finais do Ensino Fundamental, por meio de uma sequência didática lúdica". Podemos afirmar que sim, pois o objetivo geral da pesquisa investigar se a introdução da Teoria dos Grafos, por meio de uma sequência didática lúdica, pode contribuir no aprendizado de matemática dos alunos do Ensino Fundamental Anos Finais foi alcançado.

Visto que, ao analisar as respostas dos questionários aplicados antes e depois das oficinas mostrou um avanço significativo no aprendizado dos alunos sobre a Teoria dos Grafos, além de permitir conexões com outros conteúdos do currículo escolar. Inicialmente, nenhum dos participantes tinha conhecimento prévio sobre o tema. No entanto, ao final das atividades, os estudantes não apenas demonstraram compreensão dos conceitos trabalhados, mas também souberam aplicá-los em problemas contextualizados.

Com base nos resultados obtidos, conclui-se que a introdução da Teoria dos Grafos por meio de uma abordagem lúdica é uma alternativa viável e eficaz para aprimorar o aprendizado de matemática no Ensino Fundamental Anos Finais. Essa estratégia pedagógica não apenas facilita a compreensão de conteúdos complexos de Teoria dos Grafos, mas também estimula a criatividade, o pensamento crítico e a capacidade de resolver problemas de forma autônoma.

Em resumo, a aplicação da sequência didática lúdica permitiu observar que os alunos se mostraram mais engajados e motivados durante as oficinas. O ambiente de aprendizado tornou-se mais dinâmico, promovendo uma maior interação entre os estudantes e facilitando a compreensão de conceitos essenciais para a compreensão da Teoria dos Grafos. Essa estratégia pedagógica contribuiu para o desenvolvimento de habilidades analíticas e algorítmicas, fundamentais para a resolução de problemas reais, conectando o conteúdo matemático ao cotidiano dos alunos.

Portanto, a questão central da investigação foi respondida de forma clara e contundente. As contribuições são múltiplas, abrangendo desde a construção de habilidades não apenas que contribuem para a compreensão dos conceitos abstratos da matemática, por meio da modelagem de problemas com grafos, mas também capacitam os estudantes a adquirir competências para resolver problemas reais de seu cotidiano. Além disso, ampliam a visão dos alunos sobre o que é a matemática, ao não limitá-la ao uso de fórmulas, desenvolvendo sua argumentação lógica e pensamento algorítmico, dialogando com as habilidades da BNCC.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

Os resultados desta pesquisa abrem possibilidades para mais estudos sobre Teoria dos Grafos na Educação Básica. É recomendável que outros estudos explorem diferentes aplicações da Teoria dos Grafos e avaliem o impacto de metodologias lúdicas em outros níveis de ensino como o Ensino médio. Além disso, sugere-se a utilização de recursos digitais para enriquecer ainda mais o processo de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALEIXO, J. A. **A Teoria dos Grafos e as novas diretrizes curriculares para a Educação Básica**. 82-83 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020. Citado na página 71.

BAHIA, S. da Educação do Estado da. **Documento curricular referencial da Bahia para Educação Infantil e Ensino Funda-mental**. Rio de Janeiro: FGV Editora, 2020. v. 1. Citado na página 16.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **INVESTIGAÇAO QUALITATIVA EM EDUCAÇAO: UMA INTRODUÇÃO À TEORIA E AOS MÉTODOS**. 1. ed. Porto: Porto Editora, 1994. Citado na página 31.

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph Theory with Applications**. [S.l.]: Macmillan Press Ltd, 1976. Citado na página 26.

BRASIL, M. da E. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base**. [S.l.]: Brasília, 2018. Citado na página 17.

CARVALHO, P. C. P. **PAPMEM - Janeiro de 2019 - Grafos**. 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=fGxU8IrIgvE&t=3813s>. Acesso em: 21 dez 2023. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 42.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. 6. ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 1996. 121 p. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 41.

FERRARI, K. P. G.; SAVENHAGO, S. D.; TREVISOL, M. T. C. A contribuição a ludicidade na aprendizagem e no desenvolvimento das crianças na educação infantil. **Unoesc & Ciência - ACHS**, Joaçaba, 2014. Citado na página 29.

GERSTING, J. L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1993. 518 p. Citado na página 21.

GIL, R. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 1. ed. Atlas: Porto Editora, 2002. Citado na página 31.

GONÇALVES, E. P. **Iniciação à pesquisa científica**. 3. ed. Campinas: Alínea, 2003. Citado na página 31.

JURKIEWICZ, S. **Grafos − uma introdução**. 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf>. Acesso em: 10 out. 2023. Citado na página 29.

JURKIEWICZ, S.; JUNIOR, I. M. Qual é o menor caminho? (conceitos, aplicações e experências no ensino médio com teoria dos grafos & algoritmos). **XXXIX SBPO A Pesquisa Operacional e o Desenvolvimento Sustentável**, Fortaleza, CE, p. 422–432, 2007. Citado na página 17.

MELO, R. P. A importância da ludicidade na educação infantil. **Calafiori**, São Sebastião do Paraíso, MG, 2015. Citado na página 29.

NETO, O. B. **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos**. São Paulo: Editora Blucher Ltda, 2003. Citado na página 28.

NETTO, P. O.; JURKIEWICZ, S. **Grafos: Introdução e prática**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2017. Citado na página 28.

PRESTES, E. **Introdução à Teoria dos Grafos**. [S.l.: s.n.], 2020. Citado na página 26.

RAMOS, K. C.; SQIPANO, P. V. A importÂncia da ludicidade dentro da escola. **Unicesp**, Brasília, DF, 2013. Citado na página 30.

SABIÃO, R. M. A importância do lúdico no ensino da língua portuguesa. **Núcleo do Conhecimento**, 2018. Citado na página 30.

SILVA, A. G. da. Concepção de lúdico dos professores de educação física infantil. **Universidade estadual de londrina.**, Lodrina, SC, 2011. Citado na página 29.

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Público-alvo: Alunos do 9° ano do Ensino Fundamental Anos Finais.

Conteúdo a ser trabalhado: Conceito e estrutura de um grafo; vértices e arestas de um grafo; graus dos vértices de um grafo; relação entre a contagem de arestas e a soma dos graus dos vértices de um grafo; grafos conexos e não-conexos; passeio em grafos; o problema das sete pontes de Königsberg; grafos eulerianos e semi-eulerianos; grafos planares e a relação de Euler; coloração de vértice de um grafo e número cromático.

Objetivos-geral: Conhecer os conceitos básicos da teoria dos grafos e suas aplicações na formulação e resolução de problemas em situações reais, por meio de uma abordagem lúdica.

Objetivo-específico:

1. Conhecer o conceito de um grafo e sua estrutura;
2. Explicitar exemplos de grafos através de situações lúdicas;
3. Investigar e compreender a relação entre a contagem de arestas e a soma dos graus dos vértices de maneira intuitiva e por meio da fórmula.
4. Identificar as condições para que um grafo possa ser considerado euleriano ou semieulerinao;
5. Conhecer o problema motivador das sete pontes de Königsberg que levou ao surgimento da teoria dos grafos;
6. Reconhecer quando um grafo é planar e aplicar a relação de Euler;
7. Resolver problemas que possam ser solucionados por grafos eulerianos ou semieulerianos.
8. Abordar problemas de coloração de vértice de um grafo e identificar o seu número cromático.

Desenvolvimento: Serão apresentados três módulos, cada um composto por duas oficinas. Cada oficina terá duração de 1h40, com aulas expositivas sobre os temas mencionados, aplicação dos conceitos e atividades lúdicas.

Módulo I:

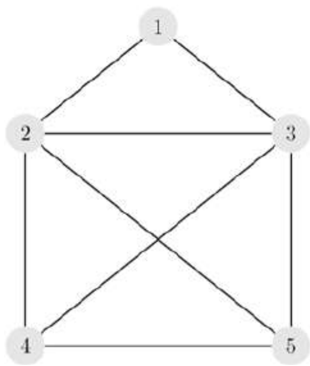
Oficina 1: Realizaremos uma aula expositiva, onde daremos destaque aos conceitos de grafo, apresentando a estrutura de um grafo, suas aplicações na matemática e nas ciências da natureza, depois em grupo os alunos deverão representar alguns situações-problema nas formas de grafo.

Oficina 2: Apresentaremos uma aula com intuito de estabelecer a relação entre a contagem de arestas e soma dos graus dos vértices de forma intuitiva, no final da aula o professor irá apresentar a fórmula da relação. Em seguida, serão realizados as atividades proposta para essa oficina.

Módulo II:

Oficina 3: Nesta oficina, o professor iniciará com um problema motivador, que consistirá em fornecer um grafo da figura 46 impresso em uma folha de papel, onde os alunos precisarão passar com o lápis por todas as arestas sem repetir e sem tirar o lápis do papel.

Figura 46 – Grafo com caminho Euleriano

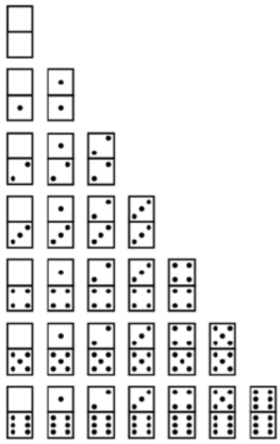


Fonte: Autor.

O aluno deve perceber que só há dois vértices possíveis 4 e 5 para realizar o caminho desejado, que quando iniciamos no vértices 4 terminamos no 5 e vice-versa. Em seguida o professor explicará o que é um passeio e irá apresentar o problema das pontes de Königsberg e a sua importância para teoria dos grafos e como Leonhard Euler chegou à conclusão que o problema não possui solução. Assim, o professor apresentará o conceito de grafo Euleriano, quando não existe nenhum grau ímpar e do grafo Semi-Euleriano, quando existe exatamente dois graus ímpares.

Oficina 4: Os alunos serão separados em grupos e o professor irá entregar um dominó contendo 28 peças como o da Figura 47.

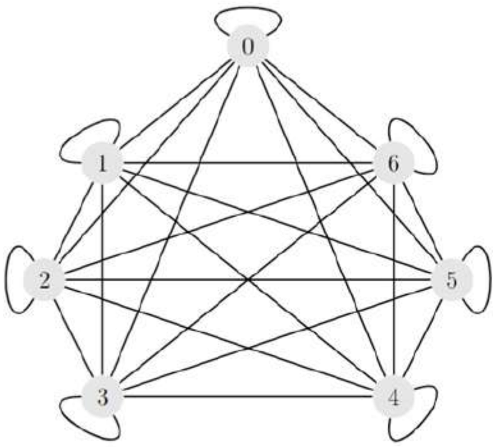
Figura 47 – Representação das peças e dominó



Fonte: Dominó, unicamp.

Os alunos devem formar um circuito com este dominó, após isso o professor retirará o terno de sena (7 peças) e questionará se é possível forma o circuito com as 21 peças, os alunos terão que concluir que não é possível, em seguida o professor mostrará a representação do grafo do dominó para 28 peças, conforme Figura 48, abordando o fato de que nessa configuração temos todos os vértices com grau par, por isso é possível formar o circuito e quando retiramos 7 peças temos todos os vértices com grau impar semelhante ao problema das pontes, tornando impossível formar o circuito com as 21 peças.

Figura 48 – Grafo da representação das ligações de um dominó



Fonte: Autor.

Módulo III:

Oficina 5: Faremos uma aula, onde abordaremos a coloração de vértices de um grafo e o algoritmo para determinar o número cromático dos vértices. Será fornecida uma figura que os alunos deverão colorir utilizando o menor número possível de cores, garantindo que regiões adjacentes não tenham a mesma cor.

O professor solicitará que os alunos representem a figura na forma de um grafo, onde as regiões correspondem aos vértices e as adjacências entre as regiões são representadas pelas arestas. De forma colaborativa, o professor estimulará o desenvolvimento de um algoritmo para determinar o número cromático dos vértices.

Por fim, os alunos aplicarão o algoritmo e finalizarão a atividade colorindo a figura.

Oficina 6: Na última oficina, realizaremos uma aula onde será exposto o conceito de grafo plano e a relação de Euler. Como problema motivador o professor irá apresentar o problema das três casas, conforme a Figura 49, que consiste em fornecer a essas três casas três serviços essenciais: água, gás e luz, para isso devemos realizar a ligação das três casas a esses três serviços sem cruzar arestas.

Figura 49 – Representação do problema das três casas.

Fonte: Autor.

Porém esse problema não tem solução, pois se trata de um grafo não-planar, deste modo é impossível fazer as ligações sem cruzar as arestas. Esta impossibilidade pode ser verificada pela relação de Euler.

O professor espera que os alunos cheguem à conclusão de que o problema não possui solução após algumas tentativa. Por isso, disponibilizará um tempo para que os alunos tentem solucionar o problema. Ao final desse tempo, o professor utilizará a relação de Euler para mostrar que o problema não tem solução.

Procedimentos Metodológicos: Aula expositiva dialogada ministrada presencialmente.

Recursos didáticos:

1. Quadro branco;
2. Slides;
3. Fichas de exercício.
4. Dominó

APÊNDICE B – INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

B.1 QUESTIONÁRIO DE CONHECIMENTO PRÉVIO SOBRE TEORIA DOS GRAFOS

1. Você já ouviu falar sobre "Teoria dos Grafos"?

   (A) Sim

   (B) Não

2. Se sim, onde você ouviu falar sobre "Teoria dos Grafos"?

   (A) Na escola

   (B) Na internet

   (C) Em livros

   (D) Outros: ____________________________________

3. O que você acha que é um Grafo?

   (A) Um gráfico de linhas.

   (B) Um conjunto de pontos conectados por linhas.

   (C) Um tipo de tabela.

4. Você sabe o que são vértices (ou nós) em um Grafo?

   (A) Sim, explique com suas palavras:

   ____

   (B) Não.

5. Você sabe o que são arestas em um grafo?

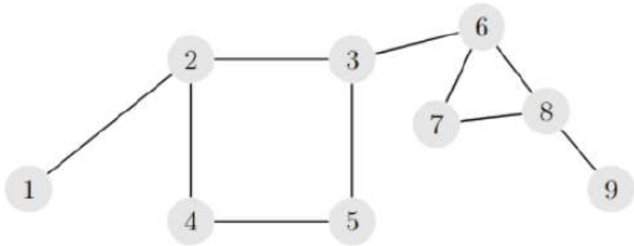
   (A) Sim, explique com suas palavras:

   ____

   (B) Não.

6. Identifique um caminho iniciando em 1 e terminando em 9, e explique por que seria um caminho?

Figura 50 – Identificando um caminho



Fonte: Autor.

---

7. Você consegue identificar um **ciclo** na figura da questão anterior?

   (A) Sim, descreve e explique por que seria um ciclo.

   (B) Não.

8. Você pode dar um exemplo de onde os grafos podem ser usados no dia a dia?

   (A) Sim.

   (B) Não.

9. Imagine que você tem três amigos e cada um conhece os outros dois. Como você representaria isso na forma de desenho?

---

10. Você acha que a teoria dos grafos pode ser interessante para aprender?

    (A) Sim.

    (B) Não.

    (C) Talvez.

B.2 OFICINAS

B.2.1 Oficina 1: Conceitos de Grafo, Estrutura de um Grafo, representação por meio de diagramas e algumas situações-problema na forma de grafo.

1. **(Adaptado de Grafos - Uma Introdução de autoria de Samuel Jurkiewicz - 2009)** As turmas do 7A, 7B, 8A, 8B e 9A da escola participaram de um tornei de vôlei. Alguns jogos já foram realizados:

   7A jogou com 8A, 8B e 9A

   7B jogou com 8A, 8B e 9A

   8A jogou com 7A, 7B, 8B e 9A

   8B jogou com 7A, 7B e 9A

   9A jogou com 7A, 7B, 8A e 8°B

   (A) Represente graficamente essa situação. As turmas serão representadas por pontos e os jogos por linhas.

   (B) Quantos e quais são os jogos que estão faltando?

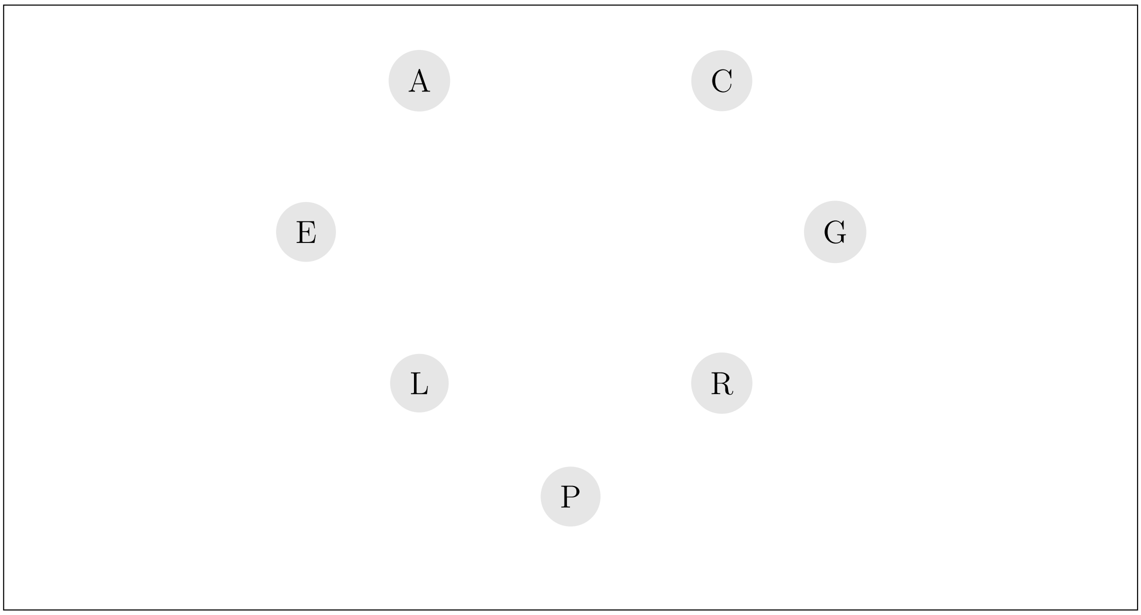
   ___

   ___

   ___

2. Leia a história:

   Maria, com o intuito de realizar um experimento social, escreveu uma fofoca sobre si mesma e a enviou secretamente para sete pessoas: César, Antônio, Luís, Eduardo, Pedro, Gabriel e Rebeca. No bilhete, havia uma instrução para que a fofoca fosse mantida em sigilo. No entanto, Maria já descobriu que César e Rebeca compartilharam a fofoca entre eles, enquanto Antônio, Luís, Eduardo e César também a divulgaram entre si. Além disso, Pedro e Rebeca também contatam um para o outro. Utilizando os pontos abaixo (Onde cada ponto representa um personagem da história, indicado pela letra inicial do seu nome), construa o grafo que modela a situação descrita, ligando dois pontos apenas quando duas pessoas compartilharam a fofoca entre si.



   Com base no grafo construído responda às perguntas:

   (A) Das sete pessoas que Maria enviou o bilhete quem é a pessoa menos confiável, ou seja, a que mais compartilhou a fofoca?

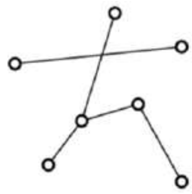
   (B) Das sete pessoas que Maria enviou o bilhete quem é a pessoa mais confiável, ou seja, a que compartilhou menos a fofoca?

   (C) Explique como você chegou a solução das perguntas anteriores?

B.2.2 Oficina 2: Relação entre a Contagem de Arestas e Soma dos Graus dos Vértices, investigação da relação.

1. (**Adaptada de Canguru de Matemática Brasil- Prova Nível J - 2014**) Observe o grafo abaixo, leia o texto e responda as perguntas propostas:

Figura 51 – Grau de um Grafo



Fonte: Canguru de Matemática Brasil- Prova Nível J - 2014.

(A) Qual é o maior grau do grafo acima?

____

(B) Seria possível que nesse grafo todos tivessem o mesmo grau que você encontrou no item anterior? Caso não seja possível explique sua resposta.

____

____

____

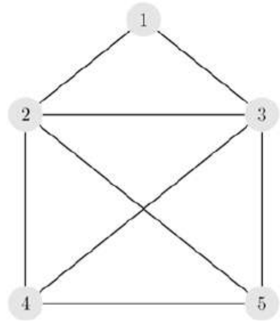
(C) Quantas arestas devem ser adicionadas ao grafo acima para que todos os seus vértices tenham o mesmo grau?

____

B.2.3 Oficina 3: Caminho euleriano e semi-euleriano, investigando a relação.

1. Observe o grafo abaixo, leia o texto e responda as perguntas propostas:

Figura 52 – Sem tirar o lápis do papel



Fonte: Autor.

2. Responda as perguntas

(A) Quantos vértices possui este grafo? Quais são eles? E destes quantos possuem grau par? Quantos possuem grau ímpar?

(B) Quantas arestas incidem no vértice 4? Quais são elas?

(C) Escreva, o grau um a um de cada vértice.

(D) Some os graus que você encontrou no item anterior e verifique se esse valor é igual ao dobro das arestas. Caso sim, explique por quê?

(E) É possível partindo de um vértice do grafo acima passa por todas as arestas sem repeti-las e retorna a este mesmo vértice? Se sim, coloque caminho realizado.

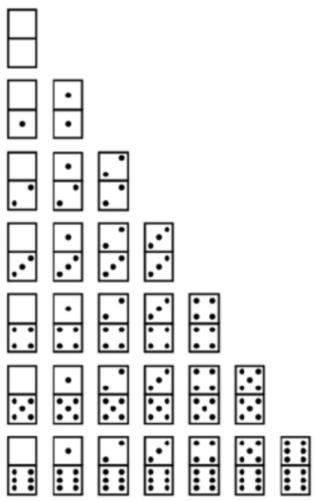
B.2.4 Oficina 4: Resolução de problemas e atividades lúdicas utilizando teoria dos grafos.

Jogo do dominó

- Objetos de Conhecimento: grafo com laços, ciclo e caminho Euleriano
- Pré-requisito: Módulo II

Regras: O jogo é iniciado pelo jogador que possui a peça 6-6 que a coloca no centro da mesa. A partir daí no sentido anti-horário, cada jogador deve escolher entre suas peças a que tem alguma ponta em comum com uma das extremidades do jogo, encaixando-as e passando a vez para o próximo jogador. A partida pode terminar em duas situações: quando o jogador consegue encaixar todas as suas peças, assim vencendo o jogo, ou quando os jogadores não possuírem peças que encaixem em uma das extremidades, assim vencendo o jogo o jogador com menor pontuação.

Figura 53 – Representação das peças do dominó



Fonte: Dominó, unicamp.

(Adaptado de A Teoria dos Grafos e as novas diretrizes curriculares para a Educação Básica de Aleixo (2020))

Forme uma equipe com até quatro alunos.

1. A equipe deve construir o grafo das peças do dominó de modo que cada vértice corresponda aos números contidos nas extremidades das peças, ou seja, 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e as arestas represente as ligações entre das extremidades iguais. Utilize o espaço abaixo para a construção do grafo.

2. Baseado nas regras do jogo e na representação do grafo responda as perguntas abaixo:

   (A) Quantas são as peças do jogo do dominó?

   (B) Como vocês representaram no grafo a peça com dois números seis, por exemplo?

   (C) Qual é o grau de cada vértice do grafo? Como vocês contaram a aresta mencionada no item anterior?

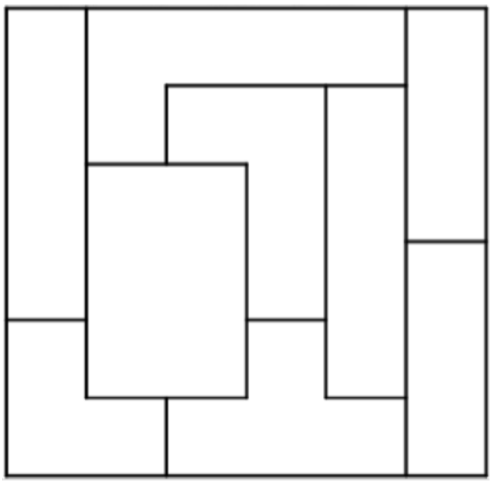
   (D) É possível, partindo de qualquer vértice, percorrer todas as arestas e voltar ao vértice de partida, sem repetir arestas?

(E) Se retirarmos 7 peças do dominó ainda seria possível, percorrer todas as arestas e voltar ao vértice de partida, sem repetir arestas? Explique o motivo caso não for possível.

B.2.5 Coloração de vértices

1. Tente colorir a figura abaixo usando o menor número de cores possíveis, de modo que a região adjacente a ela possua uma cor diferente a utilizada.

Figura 54 – Colorindo a Figura



Fonte: Autor.

2. Use o espaço abaixo para construir um grafo que ajude a resolver o problema.

B.2.6 Oficina 5: Grafos Planares e a Relação de Euler. Problema das Três Casas

1. É possível fornecer as três casas da figura abaixo os seguintes serviços: Água, Luz e Gás, de modo que esse fornecimento seja feito através de tubulações que não podem se cruzar. (supondo que as três tubulações estejam no mesmo plano.)?

Figura 55 – Problema das Três Casas

Fonte: Autor.

2. Use o espaço abaixo para construir um grafo que ajude a resolver o problema. Você pode reorganizar vértices e arestas, sem se preocupar com a posição que estão na figura dada. Objetivo é encontrar um modo de fazer as ligações sem que as arestas se cruzem. Não se esqueça de rotula os vértices.

B.3 QUESTIONÁRIO DE CONHECIMENTO PÓS-OFICINA

1. Você gostou das atividades propostas? Se sim, o que você mais gostou?

   (A) Sim

   ____

   ____

   (B) Não

2. Você encontrou alguma dificuldade na realização das atividades? Se sim, qual foram as dificuldades encontradas?

   (A) Sim

   ____

   ____

   (B) Não

3. Gostaria de ter mais aulas com atividades como essas?

   (A) Sim

   (B) Não

4. O que você achou da atividade do problema das pontes prospoto durante a oficina.

   ____

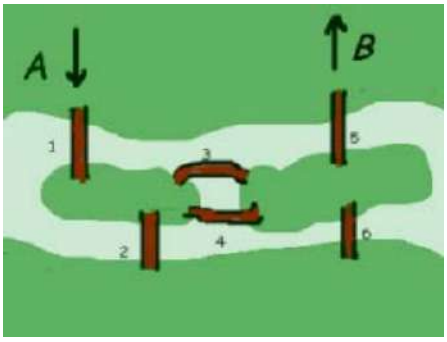
   ____

   ____

   ____

5. **(Adaptda de Canguru de Matemática Brasil – Prova Nível B – 2006)** Um rio passa por uma cidade onde existem duas ilhas. Como mostra a figura, existem seis pontes. Quantos caminhos diferentes existem para ir do ponto A ao ponto B, passando obrigatoriamente em cada ponte uma e apenas uma vez? Justifique sua resposta.

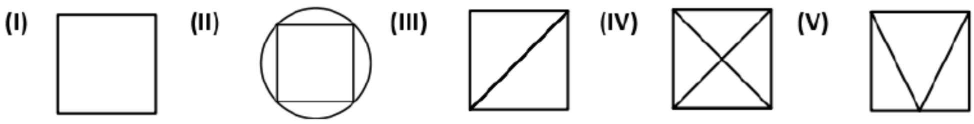
Figura 56 – Ilustração das seis pontes



Fonte: Canguru de Matemática Brasil – Prova Nível B – 2006.

6. **(Adaptda de Canguru de Matemática Brasil – Prova Nível C – 2019)** Qual das seguintes figuras é que o João não pode desenhar sem levantar o lápis nem o passar pela mesma linha duas vezes? Justifique sua resposta.

Figura 57 – Desenhando sem tirar o lápis do papel

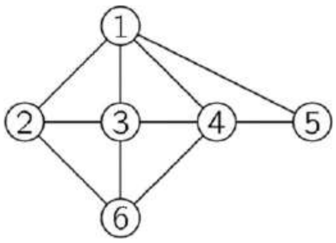


Fonte: Canguru de Matemática Brasil – Prova Nível C – 2019.

7. **(Adaptada de Canguru de Matemática Brasil – Prova Nível B – 2020)** O diagrama abaixo representa as relações de amizade das garotas Ana, Beatriz, Cláudia, Diana, Elisabete e Flora. Cada número representa uma garota e cada linha

ligando dois números representa a amizade entre essas duas garotas. Cláudia, Diana e Flora têm quatro amigas cada uma. Beatriz é amiga somente de Cláudia e Diana. Qual é o número que representa Flora? Justifique sua resposta.

Figura 58 – Diagrama das relações de amizade



Fonte: Canguru de Matemática Brasil – Prova Nível B – 2020.

8. É possível fornecer as quatros casas da figura abaixo os seguintes serviços: Água e Luz, de modo que esse fornecimento seja feito através de tubulações que não podem se cruzar. (supondo que as duas tubulações estejam no mesmo plano.)?

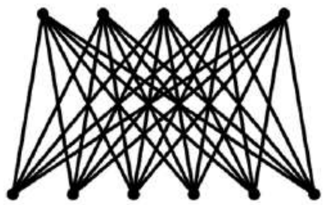
Figura 59 – Problema das quatro casas e dos dois serviços

Fonte: Autor.

9. **(Adaptada de Canguru Matemático sem Fronteiras - Prova Nível B - 2010)**

   Carlos ligou cada um dos cinco pontos da linha superior com todos os seis pontos da linha inferior. Quantos segmentos de reta Carlos desenhou? (Dica: use o teorema do aperto de mãos).

Figura 60 – Número de segmentos



Fonte: Canguru Matemático sem Fronteiras - Prova Nível B - 2010.

10. **(Adaptada de OBI 2020 – Iniciação Nível 1 – Fase 1)**

    Dona Minhoca construiu quatro túneis – Q, R, S e T – embaixo da terra, ligando os quatros cômodos – A, B, C e D – da sua residência. Cada túnel tem exatamente o mesmo comprimento e conecta exatamente dois cômodos diferentes, da seguinte forma:

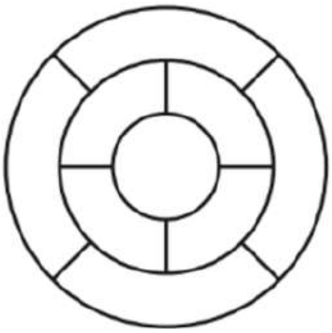
    - Q conecta A e C
    - R conecta B e C
    - S conecta A e B
    - T conecta B e D

    (A) Colocando as informações em um diagrama.

(B) Qual é uma ordem correta de cômodos num passeio em que Dona Minhoca visita todos os cômodos de sua residência, partindo do cômodo A, usando apenas os túneis e nunca usando um túnel mais de uma vez?

11. **(OBMEP 2024 - Nível 1 - 1° Fase)** Felipe vai colorir a figura de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Figura 61 – Ilustração das regiões vizinhas



Fonte: OBMEP 2024 - Nível 1 - 1° fase

(A) Desenhe o grafo que represente o grafo associado a figura.

(B) Qual é o menor número de cores que ele deve usar? Justifique a sua resposta.