Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

AFONSO ARAÚJO SALES

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE COM GEOGEBRA: VISUALIZANDO AS INTUIÇÕES

TERESINA
2024

AFONSO ARAÚJO SALES

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE COM GEOGEBRA: VISUALIZANDO AS INTUIÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva.
Coorientador: Prof. Dr. Pitágoras P. de Carvalho.

TERESINA
2024

S163d Sales, Afonso Araújo.
Distribuições de probabilidade com Geogebra: visualizando as intuições / Afonso Araújo Sales. - 2024.
57f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual do Piauí - UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Campus Poeta Torquato Neto, Teresina - PI, 2024.
"Área de Concentração: Ensino de Matemática".
"Orientador: Prof. Dr. Afonso Noberto da Silva".
"Coorientador: Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho".

1. Distribuição Binomial. 2. Distribuição Normal. 3. Geogebra. I. Silva, Prof. Dr. Afonso Noberto da. II. Carvalho, Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de. III. Título.

CDD 510

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca da UESPI
ANA ANGELICA PEREIRA TEIXEIRA (Bibliotecário) CRB-3ª/1217

AFONSO ARAÚJO SALES

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE COM GEOGEBRA: VISUALIZANDO AS INTUIÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática
Orientador: Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva
Coorientador: Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho

Data de aprovação: 02 de Setembro de 2024.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br AFONSO NORBERTO DA SILVA
Data: 26/09/2024 11:43:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva – Orientador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Documento assinado digitalmente
gov.br PITAGORAS PINHEIRO DE CARVALHO
Data: 27/09/2024 08:41:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho – Coorientador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Documento assinado digitalmente
gov.br NATA FIRMINO SANTANA ROCHA
Data: 26/09/2024 11:55:39-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha – Examinador Interno
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Documento assinado digitalmente
gov.br IGOR FERREIRA DO NASCIMENTO
Data: 26/09/2024 11:22:45-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Igor Ferreira do Nascimento – Examinador Externo
Instituto Federal do Piauí – IFPI

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a DEUS, que permite todas as coisas e me abençoou com esta oportunidade de alcançar o grau de mestre.

A todos os meus familiares: à minha mãe, que sempre acreditou no meu potencial até mais do que eu, ao meu pai um exemplo que pretendo seguir na criação do meu filho; ao meu irmão Alexandro Sales, um dos meus primeiros professores de matemática, o meu amor a matemática parte muito de seus ensinamentos. Em memória do meu irmão Abel Sales que sempre ficou feliz pelas minhas conquistas e sei que aonde ele estiver ele se orgulha do seu irmão.

À minha esposa Lis Linge, que esteve sempre comigo nos momentos mais difíceis, está ao meu lado nas minhas derrotas e nas minhas vitórias.

Aos professores do PROFMAT/UESPI, por cada ensinamento, tanto matemático quanto pessoal, cada um com suas particularidades, o que só acrescentou em minha formação.

Ao meu orientador, Afonso Norberto da Silva, que me direcionou com seus conhecimentos e sempre esteve disponível para me orientar, minha inspiração desde a graduação, quando foi o primeiro professor a ministrar aula para minha turma. Ao meu coorientador Pitágoras, que foi fundamental em todo este processo.

A todos os amigos da turma do PROFMAT/UESPI: Vanilson , Eugênio, Edvaldo Leandro, Robson, Ney, Erasmo, Licio, Delon, Hislley, Miranda, José Carlos, Lucas, Gustavo. Sua amizade foi uma das forças que me impulsionaram nesta caminhada.

“O acaso não é mais que a medida de nossa ignorância. Os fenômenos aleatórios são por definição, aqueles cujas leis ignoramos”

Henri Poincaré

RESUMO

Esta dissertação propõe viabilizar o uso do software Geogebra, para aplicação da distribuição normal no cálculo da probabilidade. A proposta consiste no uso da calculadora de probabilidade, recurso do Geogebra, em diferentes aplicações, e compara os resultados obtidos no cálculo da curva normal padronizada. Além disso, realizamos simulações no intuito de demonstrar resultados importantes, como o problema Agulhas de Buffon.

Palavras-chave: Geogebra; distribuição normal; calculadora de probabilidade; curva normal padronizada.

ABSTRACT

This dissertation proposed possibilities for using the Geogebra software, with the application of normal distribution in calculating probability. The proposal consists of using Geogebra's probability calculator, resource, in different applications and comparing it with the results obtained in the calculation of the standardized normal curve. In addition, we carry out simulations in order to demonstrate important results such as the central limit theorem.

Keywords: Geogebra; Probability; probability calculator; Normal distribution.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na busca por ferramentas que auxiliem o trabalho com a Matemática, o Geogebra se apresenta como software comumente utilizado no trato da geometria, pelos recursos apresentados em sua interface. Partindo do princípio que as áreas da matemática conversam entre si, podemos usar a geometria também no cálculo da probabilidade. Ao longo do tempo, a matemática foi sendo aprimorada com a álgebra, mas sempre que necessário, recorremos à geometria.

Nesse sentido, a tecnologia nos traz novas ferramentas neste trato com a matemática, permitindo-nos realizar simulações, construções de gráficos, cálculo de áreas, através de softwares como o Geogebra.

O site https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/, apresenta 441 dissertações abordando o Geogebra, estes não trazem de maneira mais profunda a calculadora de probabilidade no cálculo de probabilidade com a distribuição Normal e Binomial.

O trabalho em questão pretende analisar as possibilidades de aplicação da ferramenta Geogebra no cálculo de probabilidade.

Nesse sentido, conforme nosso objetivo, o problema deste trabalho é: Como o Geogebra pode auxiliar na resolução de problemas envolvendo probabilidade? Dessa maneira, pretende-se: apresentar uma fundamentação teórica sobre distribuição Binomial e Normal, apresentar o software Geogebra como ferramenta no cálculo de probabilidade e realizar diferentes atividades de probabilidade, a serem resolvidas com o uso da ferramenta Geogebra.

No Capitúlo 2, iniciamos com uma revisão sobre conhecimentos preliminares de probabilidade, variáveis aleatórias, média e desvio padrão; conhecimentos, estes, que serão utilizados nos cálculos envolvendo a distribuição Binomial e Normal.

No terceiro e quarto capítulos apresentaremos uma síntese histórica com os matemáticos que contribuíram com os estudos das distribuições Binomial e Normal, como Bernolli, Lagrange, Moivre e Gauss. Em seguida, fazemos uma fundamentação teórica sobre as mesmas, e a relação que existe entre elas e o cálculo de probabilidade.

No quinto capítulo será apresentado o software e suas ferramentas, e a utilização do programa para construção e representação dos dois modelos com foco na calculadora de probabilidades.

No sexto capítulo resolveremos algumas situações envolvendo a distribuição Binomial e Normal, utilizando cálculos algébricos e o software e mostrando, assim, a importância das distribuições de probabilidade em diferentes áreas e a importância de ferramentas que nos auxiliem, como o Geogebra.

2 Conhecimentos Preliminares

Neste Capitulo apresentaremos conceitos básicos que serão necessários no cálculo da probabilidade , e sobre as distribuições.

2.1 Espaço Amostral

Definição 2.1. *Morgado e Carvalho (2015)Chamaremos de espaço amostral o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. Representaremos o espaço amostral por S e só vamos considerar aqui o caso de S ser finito ou infinito enumerável. Os subconjuntos de S serão chamados de eventos. Diremos que um evento ocorre quando o resultado da experiência pertence ao evento.*

Exemplo 2.1 Morgado e Carvalho (2015) Lança-se uma moeda e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é S={cara, coroa} e temos 4 eventos:

$$\emptyset \ , A = \{\text{cara}\}, B = \{\text{coroa}\} \text{ e } S = \{\text{cara, coroa}\}$$

$\emptyset$ é um evento que não ocorre nunca e é chamado de evento impossível. O evento A ocorre se, e somente se, o lançamento resulta em cara. S ocorre sempre e é chamado de evento certo.

Exemplo 2.2 Morgado e Carvalho (2015) Lança-se um dado e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e há 64 eventos. Alguns desses eventos são: $\emptyset$, que não ocorre nunca; S, que ocorre sempre; $A = \{2,4,6\}$, que ocorre se, e somente se, o resultado do lançamento for par. Se o resultado do lançamento for seis, ocorrem os eventos $\{6\}$, $\{5,6\}$, $\{2, 4, 6\}$ etc.

2.2 Probabilidade

Definição 2.2. *Morgado e Carvalho (2015) Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$, de forma que:*

1. *Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$*

2. $P(S) = 1$

3. *Se A e B forem eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente (isto é, $A \cap B = \emptyset$), então*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Exemplo 2.3 Lança-se uma moeda e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é $S = \{\text{cara, coroa}\}$ e há 4 eventos: $\emptyset$, $A = \{\text{cara}\}$, $B= \{\text{coroa}\}$, S. Uma probabilidade que pode ser definida é :

$$P_1(\emptyset)= 0,$$
$$P_1(A)=P_1\{\text{cara}\} = 0{,}5,$$
$$P_1(B) = P_1\{\text{coroa}\} = 0{,}5$$
$$P_1(S) = 1.$$

Definição 2.3. *Morgado e Carvalho (2015) O valor esperado de um resultado aleatório numérico é definido como sendo a média ponderada de seus possíveis valores em que os pesos são as respectivas probabilidades. Isto é, se os possíveis valores para o resultado são $x_1, x_2, ..., x_n$, com probabilidades $p_1, p_2, ..., p_n$, seu valor esperado é $p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$ (note que a soma de todos os pesos é igual a 1).*

Exemplo 2.4: Em um jogo muito popular no Brasil, escolhe-se uma dentre 25 possibilidades para apostar. Caso a escolha seja contemplada, o apostador recebe 18 vezes a quantia apostada. Qual é o ganho esperado de quem aposta R$ 10,00?

O ganho é a diferença entre o valor recebido e o apostado. As possibilidades são ganhar 180 - 10 = 170 reais ou perder os 10 reais apostados, o que corresponde a um ganho de 0 - 10 = - 10. As probabilidades desses dois resultados são, respectivamente, $\frac{1}{25}$ e $\frac{24}{25}$. Logo, o valor esperado do ganho é $\frac{1}{25} \cdot 170 - \frac{24}{25} \cdot 10 = -$ R\$2,80. Isto é, quem faz seguidamente esta aposta, em média perde R$ 2,80 por vez em que a aposta é realizada.

2.3 Variáveis Aleatórias

Nesta seção realizaremos um breve resumo sobre variáveis aleatórias, conceitos necessários antes de trabalharmos as distribuições de probabilidade

Definição 2.4. *Meyer (1982) Sejam ϵ um experimento aleatório e S um espaço amostral associado ao experimento. Uma função X que associe a cada elemento $s \in S$ um número real, $X(s)$ é denominada variável aleatória.*

2.4 Variáveis Aleatórias Discretas

Definição 2.5. *Meyer (1982) Uma variável aleatória é definida como sendo discreta quando o número de valores possíveis que a variável assume for* ***finito*** *ou* ***infinito enumerável****.*

Exemplos 2.5:

- Número de clientes que visitaram uma loja em determinado período.

- Número de alunos aprovados em uma matéria no Profmat em uma turma de 20 alunos.

- Número de acessos a um determinado site, das 0h às 6h.

2.5 Variáveis Aleatórias Contínuas

São aquelas que podem assumir valores dentro de um intervalo, assim podemos dizer que elas não podem ser enumeradas (contadas).

Exemplo 2.5: Tomemos como exemplo a altura de uma pessoa de 1,60m, tendo em vista que 1,602m é aceitável. Caso desejássemos uma precisão maior, nesse caso a probabilidade de um valor específico dentro de um intervalo é nula.

Logo, ao invés de utilizarmos uma função de probabilidade como nas discretas, utilizamos uma função densidade de probabilidade para trabalhar com intervalos, como veremos no capítulo 4.

2.6 Média Aritmética

Definição 2.6. *Statistic... () A média aritmética de um conjunto de N números* $X_1, X_2, X_3, ..., X_N$, *é representada por* $\overline{X}$ *e é definida por:*

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_N}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_j}{N}$$

Exemplo 2.6: A média aritmética dos números 2, 5, 7, 9 e 13 é:

$$\overline{X} = \frac{2+5+7+9+13}{5} = \frac{36}{5} = 7{,}2$$

Se os números $X_1, X_2, X_3, ...X_N$ ocorrem $f_1, f_2, ..., f_N$ vezes, respectivamente, a média aritmética será:

$$\overline{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + f_3X_3 + ... + f_NX_N}{f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_N} = \frac{\sum_{j=1}^{N} f_jX_j}{\sum_{j=1}^{N} f_j}$$

Exemplo 2.7: Se 3, 5, 6 e 4 ocorrem com frequência 3, 2, 4 e 1, respectivamente, a média aritmética será:

$$\overline{X} = \frac{3\cdot 3 + 5\cdot 2 + 6\cdot 4 + 4\cdot 1}{3+2+4+1} = \frac{9+10+24+4}{10} = \frac{47}{10} = 4{,}7$$

2.7 Desvio Padrão

Definição 2.7. *Statistic... () O desvio padrão de um conjunto de N números* $X_1, X_2, X_3, ..., X_N$ *é indicado por s e definido por:*

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}(X - \overline{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum(X - \overline{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} = \sqrt{\overline{(X - \overline{X})^2}}$$

Em que: x representa o desvio de cada um dos números X_j em relação à média $\overline{X}$. Assim, s é a raiz média quadrática (RMS) dos desvios, em relação à média ou, como é muitas vezes denominado, o desvio da raiz média quadrática.

2.8 Valor Esperado

O valor esperado, também conhecido como expectativa matemática, é um conceito fundamental na teoria das probabilidades e estatísticas. Ele representa a média ponderada de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, onde cada resultado é ponderado pela sua probabilidade de ocorrência.

Definição 2.8. *Magalhães (2006) Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade* p_x *e valor* x_i *para i num certo conjunto de índices I. Valor esperado ou esperança matemática ou média de X é definido por*

$$E(X) = \mu x = \sum_{i \in X} x_i p_x(x_i)$$

desde que a soma esteja determinada.

Exemplo 2.8: Suponha que você jogue um dado comum de seis faces. Os possíveis resultados são os números de 1 a 6. A probabilidade de cada número sair é igual, ou seja, $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$.

Para calcular o valor esperado $E(X)$, onde X é o resultado do lançamento do dado, usamos a fórmula:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum(x_i \cdot P(x_i)) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \\ &= \frac{21}{6} = 3.5. \end{aligned}$$

3 Distribuição Binomial

Apresentaremos uma síntese histórica com os principais estudiosos que contribuiram no estudo da distribuição binomial e em seguida apresentaremos sua definições e caracteristicas.

3.1 Síntese histórica

A distribuição binomial foi desenvolvida e formalizada por Jacob Bernoulli no final do século XVII. Jacob Bernoulli, matemático e filósofo suíço, estudou os processos aleatórios com resultados binários (sucesso ou fracasso) e estabeleceu os princípios básicos da distribuição binomial em sua obra "Ars Conjectandi", publicada em 1713, após sua morte, pelo seu sobrinho Nicholas Bernoulli. Nele mostra-se aplicações de problemas matemáticos de probabilidade, como problemas cívicos, morais e econômicos. Jacob Bernoulli define “a arte de conjectura [...] como a arte de avaliar [...] as probabilidades das coisas, de modo a sempre poder, em nossos julgamentos e ações, basear-se no que foi considerado o melhor (WARSI, 2020, p. 185).

Ao longo dos séculos XVIII e XIX, outros matemáticos, como Abraham de Moivre e Pierre-Simon Laplace, aprofundaram o estudo da distribuição binomial, estabelecendo suas propriedades e aplicações em diversas áreas, como jogos de azar, genética, controle de qualidade, entre outras.

Alguns anos após a publicação de Bernoulli, outra grande contribuição envolvendo a ideia de estimação, foi publicada por Joseph Lagrange.

> "Ele considerava uma distribuição de erros com k erros que poderiam ocorrer em algum experimento e cada um teria uma probabilidade de acontecer. Com base nesta afirmação, ele queria estimar a soma dos erros com suas respectivas probabilidades para posteriormente calibrar os instrumentos de medição com uma precisão maior."(https://pet-estatistica.github.io/site/download/posts/postWILLIAN.html, 2024.)

Nos tempos atuais, a distribuição binomial consolidou-se como uma das ferramentas estatísticas mais importantes, com amplas aplicações em diversas áreas, como biologia, matemática economia, engenharia, ciências sociais, entre outras.

A distribuição binomial é baseada no Binômio de Newton. Antes de apresentarmos sua definição, apresentaremos na próxima seção o binômio de Newton.

3.2 Ensaios de Bernolli

Consideremos um experimento que consiste em uma sequência de ensaios ou tentativas independentes, isto é, ensaios nos quais a probabilidade de um resultado em cada ensaio não depende dos resultados ocorridos nos ensaios anteriores, nem dos resultados nos ensaios posteriores. Em cada ensaio, podem ocorrer apenas dois resultados, um deles que chamaremos de sucesso S e outro que chamaremos de fracasso F. À probabilidade de ocorrer sucesso em cada ensaio chamaremos de p; a probabilidade de fracasso chamaremos de q, de tal modo que $q = 1\breve{}p$. Tal tipo de experimento recebe o nome de ensaio de Bernoulli.

Exemplo 2.9:

1. Uma moeda é lançada 5 vezes. Cada lançamento é um ensaio, em que dois resultados podem ocorrer: cara ou coroa. Chamemos de sucesso o evento sair uma cara e de fracasso o evento sair uma coroa. Em cada ensaio, $p = 0,5$ e $q = 0,5$.

2. Uma urna contém 4 bolas vermelhas e 6 brancas. Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna; este procedimento é repetido 8 vezes. Cada extração é um ensaio, em que dois resultados podem ocorrer: bola vermelha ou bola branca. Chamemos de sucesso o evento sair bola vermelha. Consequentemente, fracasso corresponde ao evento sair bola branca. Neste caso, $p = 4/10$ e $q = 6/10$.

3.3 Binômio de Newton

Quando desenvolvemos $(x+a)^n$ multiplicamos os fatores, assim obtendo a fórmula do binômio de Newton.

$$(x+a)^n = (x+a)\cdot(x+a)\cdots(x+a).$$

Morgado e Carvalho (2015) O termo genérico do produto é obtido, tomando em p dos fatores, $p = 0$, 1, 2,..., n, a segunda parcela e tomando nos restantes $n-p$ fatores a primeira parcela. Como isso pode ser feito de C_n^p modos, o termo genérico do produto é $C_n^p a^p x^{n-p}$ e

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p x^{n-p} = C_n^0 a^0 x^n + C_n^1 a^1 x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^n a^n x^0$$

Exemplo 3.1: (IADES 2022/SEDUC-GO - Adaptada) Considere o binômio de Newton $(2x^3y + \frac{1}{x^2})^5$. No seu desenvolvimento, qual é o termo independente de x?

O termo genérico do desenvolvimento é:

$$C_5^p (x^{-2})^p (2x^3y)^{5-p} = C_5^p 2^{5-p} x^{15-5p} y^{5-p}$$

Obtemos o termo independente quando $15 - 5p = 0$, logo $p = 3$.

O termo procurado é $C_5^3 (2)^2 (x)^0 y^2 = 40y^2$.

Exemplo 3.2: Determine o termo máximo do desenvolvimento de:

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)^{20}$$

O termo genérico do desenvolvimento é:

$$t_p = C_n^p a^p x^{n-p} = C_{20}^p \left(\frac{1}{5}\right)^p$$

Analisaremos em quais valores de p os termos crescem:

$$t_p - t_{p-1} \quad = \quad C_{20}^p \left(\frac{1}{5}\right)^p - C_{20}^{p-1} \left(\frac{1}{5}\right)^{p-1}.$$

$$= \frac{20!}{p!(20-p)!5^p} - \frac{20!}{(p-1)!(21-p)!5^{p-1}}$$

$$= \frac{20!}{(p-1)!(20-p)!5^{p-1}} \left(\frac{1}{5p} - \frac{1}{21-p}\right)$$

$$= \frac{20!}{(p-1)!(20-p)!5^{p-1}} \left(\frac{21-6p}{5p(21-p)}\right).$$

Assim, $t_p > t_{p-1}$ quando $21 - 6p > 0$ e temos $t_p < t_{p-1}$ quando $21 - 6p < 0$. Portanto $t_p > t_{p-1}$ quando $p \leq 3$ e $t_p < t_{p-1}$ quando $p \geq 4$. Logo, o termo máximo é:

$$t_3 = \frac{C_{20}^3}{5^3}$$

.

Nos próximos capítulos utilizaremos gráficos para representar as distribuições normal e binomial, utilizando o software Geogebra.

3.4 Distribuição Binomial

É uma das distribuições mais utilizadas junto à distribuição normal, quando se trata de variáveis aleatórias discretas. Meyer (1982)(MEYER, 2010) "Sempre que realizamos repetições independentes de um experimento e estivermos interessados somente em uma dicotomia". A distribuição binomial pode ser utilizada em controle de qualidade, para determinar o número de itens defeituosos e em pesquisas amostrais, para estimar a proporção de uma característica em uma população. Enquanto as condições se mantiverem as mesmas e sem alteração da probabilidade, podemos utilizar o modelo binomial.

Exemplo 3.1: Suponha que um casal deseja ter 3 filhos, onde deseja-se obter um menino e seja X o número de meninos. O espaço amostral para esse experimento aleatório pode ser representado por:

$\Omega = \{$HHH, HHM,MHH, HMH,MHM, HMM, MMH, MMM$\}$, onde H $=$ menino e M $=$ menina.

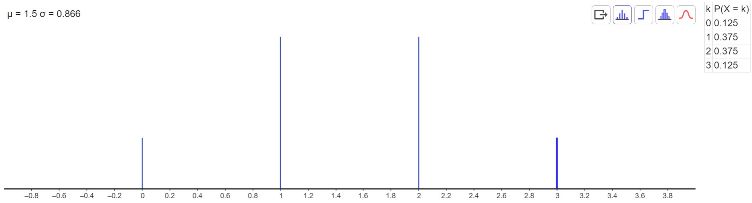
A variável aleatória X, atribui a cada resultado $\omega_i \in \Omega$ o número de meninos ou meninas encontradas em ω_i, $i = 1, 2, 3, ...\ 8$. Neste caso especifico, X assume os possíveis valores X $=$ 0, 1, 2, 3. Portanto,

X $=$ 0 se, e somente se, ocorrer MMM;
X $=$ 1 se, e somente se, ocorrer MMH, HMM ou MHM;
X $=$ 2 se, e somente se, ocorrer HHM, MHH ou HMH;
X $=$ 3 se, e somente se, ocorrer HHH.

Logo,

$p(0) = P(X = 0) = (0,5)^3$
$p(1) = P(X = 1) = 3(0,5)(0,5)^2$
$p(2) = P(X = 2) = 3(0,5)(0,5)^2$
$p(3) = P(X = 3) = (0,5)^3$

Figura 1: A figura 1 mostra a distribuição de probabilidade da v.a X acima



Fonte: Elaborada pelo Autor

Definição 3.1. *(Distribuição Binomial) Meyer (1982) Seja um experimento ε e um evento A associado a ε. Sendo $P(A) = p$ e $P(\overline{A}) = 1 - p$. Tomando n repetições de ε.*

Notação: $X \sim B(n, p)$, para indicar que a variável aleatória X tem distribuição Binomial com parâmetros n e p

.

Teorema 3.2. *Seja X uma variável binomial, baseada em n repetições. Então:*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ , \ k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Demonstração: Considere-se um particular elemento do espaço amostral de ε, satisfazendo à condição $X = k$. Um resultado como esse poderia surgir, por exemplo, se nas primeiras k repetições de ε ocorresse A, enquanto $n - k$ repetições ocorresse $\overline{A}$, isto é:

$$\underbrace{AAA...A}_{k}\ \underbrace{\overline{AAA}...\overline{A}}_{n-k}$$

Meyer (1982)Segundo Meyer, Como todas as repetições são independentes, a probabilidade desta sequência particular seria $p^k(1-p)^{n-k}$, mas exatamente essa mesma probabilidade seria associada a qualquer outro resultado para o qual $X = k$. O número total de tais resultados é igual a $\binom{n}{k}$, porque deveremos escolher exatamente k posições (dentre n) para o evento A. Ora, isso dá o resultado acima, porque esses $\binom{n}{k}$ resultados são todos mutuamente excludentes.

Tomando $q = 1 - p$, obtemos $\binom{n}{k}$ $p^k(q)^{n-k}$ é o k-ésimo termo da expansão $(p+q)^n$ de um Binômio de Newton. Os coeficientes de um Binômio de Newton podem ser dispostos como Triângulo de Pascal. A tabela abaixo exibe os coeficientes binomiais, sendo n o número de vezes em que o experimento que gera a variável aleatória X, de distribuição Binomial, é repetido.

Tabela 2. Soma dos coeficientes do Triângulo de Pascal

n	X=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Soma dos Coeficientes
1	1	1										$2 = 2^1$
2	1	2	1									$4 = 2^2$
3	1	3	3	1								$8 = 2^3$
4	1	4	6	4	1							$16 = 2^4$
5	1	5	10	10	5	1						$32 = 2^5$
6	1	6	15	20	15	6	1					$64 = 2^6$
7	1	7	21	35	35	21	7	1				$128 = 2^7$
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			$256 = 2^8$
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		$512 = 2^9$
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	$1028 = 2^{10}$

4 Distribuição Normal

Apresentaremos uma síntese histórica com os principais estudiosos que contribuiram no estudo da distribuição normal e em seguida apresentaremos o modelo normal.

4.1 Síntese histórica

A distribuição Normal tem sua primeira aparição, com o matemático francês Abraham De Moivre (1667- 1754). Em sua obra "A doutrina do acaso" a distribuição normal aparece como limite da distribuição binomial, o que mais tarde resultaria no teorema do limite central.

> A doutrina do acaso é o primeiro livro de cálculo de probabilidades; o título completo do livro era "A doutrina das chances: ou, um método para calcular as probabilidades de eventos em jogo". Foi escrito por De Moivre como resultado de suas atividades como professor de matemática. Foi baseado no conceito de probabilidade e sua medida clássica: continha em uma parte teórica introdutória às principais regras e ampliava os métodos matemáticos para a solução de problemas por ferramentas analíticas. (clubes.obmep.org.br, 2023.)

Em 1812, Pierre Simon de Laplace (1748 – 1827) utilizaria em seu livro "Teoria Analítica da Probabilidade" os resultados de De Moivre para analisar erros de experimentos. Observou então que apesar de uma distribuição não ser normal, a média dessa distribuição é aproximadamente normal, e quanto mais elevado o número da amostra, melhor será a aproximação. O que viria a ser conhecido como Teorema de Laplace-Moivre.

Embora seu estudo tenha iniciado com De Moivre, a distribuição normal também é chamada de distribuição Gaussiana. Devido às contribuições do matemático alemão Karl F.Gauss (1777 – 1855) em seus estudos sobre a lei dos erros; Gauss estabeleceu a relação da distribuição de erros de medidas com a curva normal.

De acordo com o modelo de Gauss, cada medida ou mensuração é exatamente igual à medida ideal mais o erro de medição. Logo, os resultados obtidos em consequência de repetidas medidas, que se diferem um do outro, distribuem-se em torno de um valor ideal, ou valor nulo Statistic... ()(FREEDMAN, 2007).

A curva normal algumas vezes é chamada de "Lei dos erros". Em uma medição existem pequenas fontes de erros, pequenos erros identificáveis, todos os resultados de uma observação estão sujeitos a erros. Daí justifica-se o uso da curva normal em ciências de observação. "A probabilidade de um erro é uma função do próprio erro e há a mesma probabilidade de cometer um erro positivo como um erro negativo de igual valor."Caire (2012)(CAIRE, 2013).

A distribuição normal já recebeu outros nomes como "curva em forma de sino"pelo francês Esprit Pascal Jouffret (1837-1904) em 1872, que denominou a normal bivariada de superfície campanular (bell surfasse). Já o nome distribuição normal foi inventado por Charles S. Pierce - filósofo matemático, Francis Galton - matemático, antropólogo e estatístico e Wilhem Lexis, por volta de 1875.

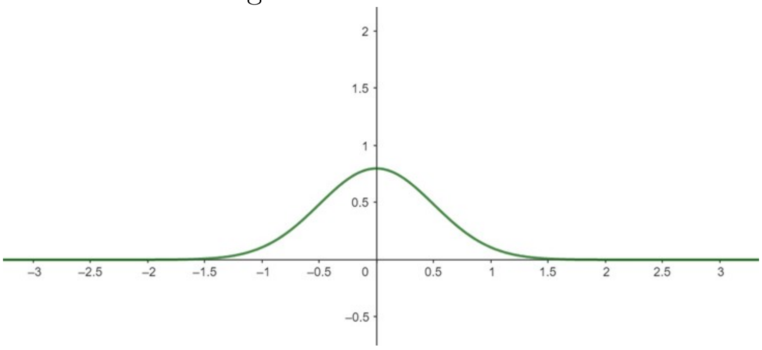
4.2 O Modelo Normal

Definição 4.1. *Meyer (1982) Uma v.a. X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 , se a função densidade de probabilidade é dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ , \ x \, \epsilon R$$

Sendo que, -∞ $<$ x $<$ $+$ ∞ e $\sigma > 0$. Usamos a notação $X \sim$ N(μ, σ^2) para afirmar que X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2.

Figura 2: Curva normal



Fonte: Elaborada pelo Autor

Observe que $f(x)$ segue as condições;

$$f(x) \geq 0, \forall \text{ x } \epsilon \ \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

A função densidade é exponencial com variável real com dois parâmetros (μ) a média e (σ) desvio padrão.

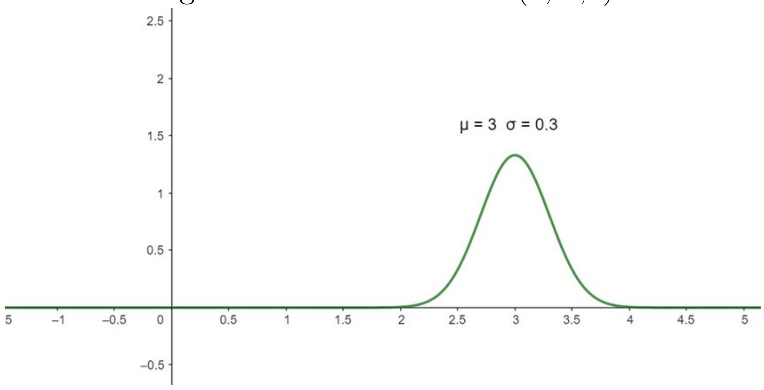
Meyer (1982) A distribuição Normal tem as seguintes características:

1. Simétrica com relação ao centro;
2. Seu máximo alcançado em μ (média);
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;
4. A área entre a curva até o eixo das abcissas é igual a 1.

Como consequência das propriedades 2(2) e 3(3), a curva normal é assintótica em relação ao eixo das abcissas. Existe somente um par ordenado N(μ,σ) que corresponde à curva normal. Podemos então identificar a função normal a partir dos valores da média(μ) e desvio padrão (σ).

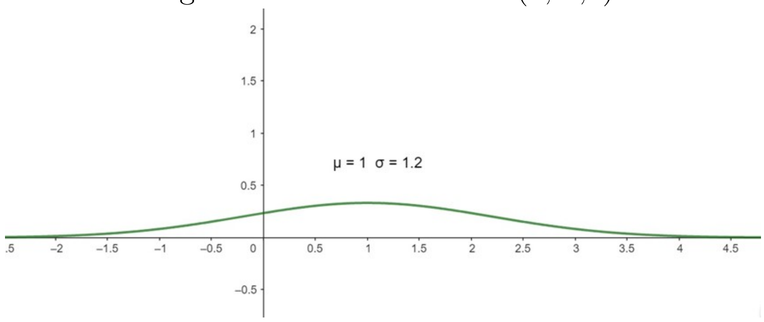
A alteração dos parâmetros μ e σ resulta na translação e achatamento do gráfico; entretanto, a sua simetria é mantida e o formato semelhante a um sino (e área próxima a uma unidade de área cartesiana).

Figura 3: Curva Normal N(3; 0,3)



Fonte: Elaborada pelo Autor

Figura 4: Curva Normal N(1; 1,2)

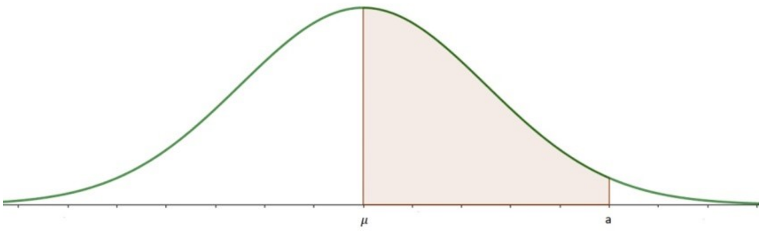


Fonte: Elaborada pelo Autor

4.3 Cálculo de Probabilidade

A probabilidade em distribuição normal está associada à área sob a curva, tal que sua área total é igual a 1 ou (100%) para quaisquer valores de μ e σ. Considerando variáveis contínuas, a probabilidade da distribuição normal de dois pontos quaisquer é igual à área sob a curva normal entre os pontos.

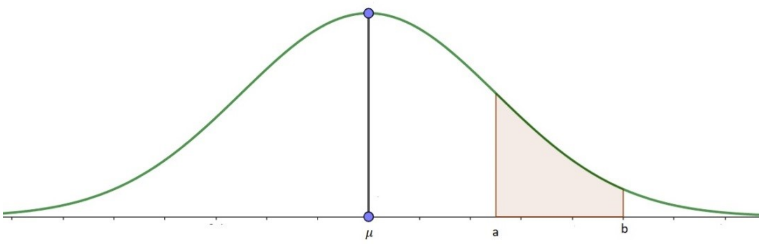
Figura 5: Curva normal N($\mu; a$)



Fonte: Elaborada pelo Autor

O cálculo da probabilidade é realizado com base no intervalo. Para isso medimos a área sob a curva e o eixo das abcissas, considerando o intervalo (a,b) $\in \mathbb{R}^2$.

Figura 6: Curva normal



Fonte: Elaborada pelo Autor

Algebricamente, conhecidos os valores de μ e σ, a área da região é dada por:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Tal cálculo depende de recursos do cálculo diferencial integral, uma vez que a função densidade não possui integral algébrica, por isso os recursos do Geogebra são importantes.

4.4 Curva normal padronizada

A normal padronizada, também conhecida como distribuição normal padrão, é uma versão específica da distribuição normal, com média (μ) igual a zero e desvio padrão (σ) igual a um. Ela é frequentemente denotada pela letra Z e é útil para transformar variáveis normais em uma escala comum, conhecida como escores Z. Qualquer distribuição normal pode ser padronizada, basta pensarmos que para transformar $\mu = 0$, tomamos os X - μ, e para $\sigma = 1$, dividimos pelo próprio valor σ. Assim obtendo a função linear Z abaixo.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Onde:

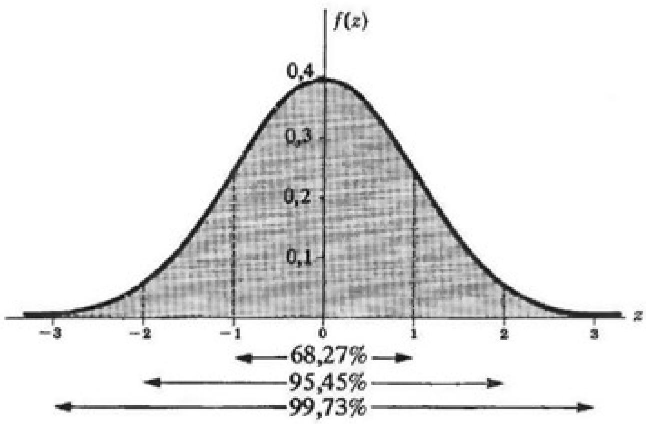
- Z é a pontuação padronizada.
- X é o valor da variável original.
- μ é a média da distribuição original.
- σ é o desvio padrão da distribuição original.

O valor da escala (Z) indica a intensidade de afastamento da variável (X) até a média (μ), em relação ao desvio padrão (σ).

A distribuição normal padrão é particularmente útil em estatística, porque permite comparar valores em diferentes distribuições normais. Além disso, ela é fundamental em testes de hipóteses, análise de regressão e em muitas outras técnicas estatísticas.

Existem tabelas Z que fornecem os percentis da distribuição normal padrão, indicando a probabilidade de uma variável aleatória normal padrão ser menor que um determinado valor Z. Essas tabelas são amplamente usadas em estatística para cálculos de probabilidade.

Figura 7: Intervalos N(μ+σ, μ - σ)



Fonte: Murray, 1978

No intervalo entre a média mais ou menos dois desvios-padrões ($\mu \pm 2\sigma$) estão compreendidas cerca de 95% das observações e, no intervalo entre a média mais ou menos um desvio padrão ($\mu \pm \sigma$), cerca de 68%.

A seguir a tabela com os valores dos scores Z, que utilizaremos para a obtenção da probabilidade.

Tabela 1

Área ou probabilidade para distribuição normal padrão Anderson et al. (2007)

z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0.0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4936
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Fonte: Elaborada pelo autor

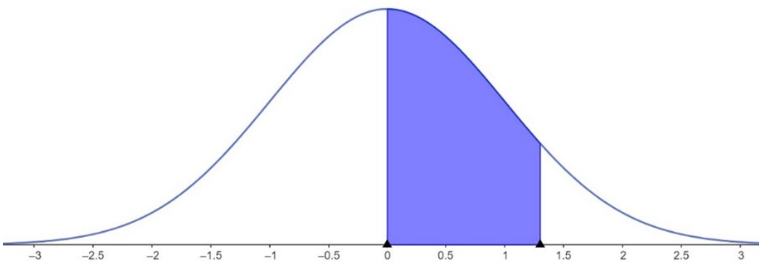
A seguir temos exemplos do uso da curva normal padronizada com o uso da tabela, em diferentes intervalos da variável aleatória X. A partir do gráfico, podemos analisar a área da curva normal.

Exemplo 4.1: Farias (2008) $P(0 \leq Z \leq 1,3)$

Para calcularmos esta probabilidade, podemos utilizar diretamente a tabela que está localizada na linha 1,3 e coluna 0. O resultado é

$$P(0 \leq Z \leq 1,3) = 0,4032$$

Figura 8: $P(0 \leq Z \leq 1,3)$ como área



Fonte:Elaborada pelo Autor

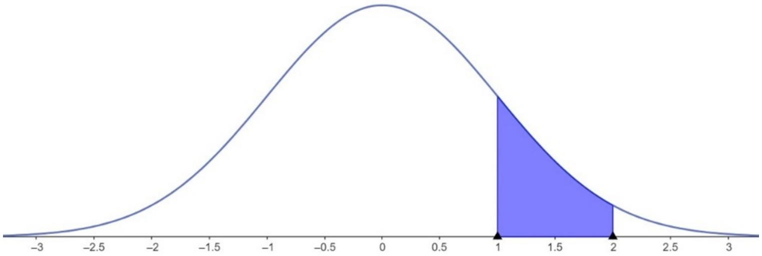
Tabela 1: Tabela com scores Z

e 1º decimal	0	1	2	3
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907
1,3	**0,4032**	0,4049	0,4066	0,4082

Fonte: Elaborada pelo autor

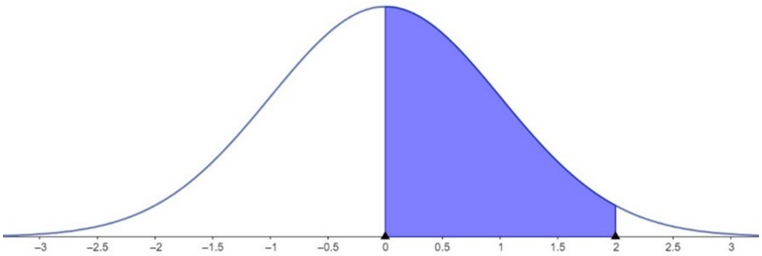
Exemplo 4.2: $P(1 \leq Z \leq 2)$ A probabilidade desejada é a área entre abcissas positivas 1 e 2, como ilustra a figura 9. Sua área é a diferença entre as áreas das figuras 10 e 11, onde os valores encontrados estão na tabela 1.

Figura 9: $P(1 \leq Z \leq 2)$ como área



Fonte:Elaborada pelo Autor

Figura 10: $P(0 \leq Z \leq 2)$ como área



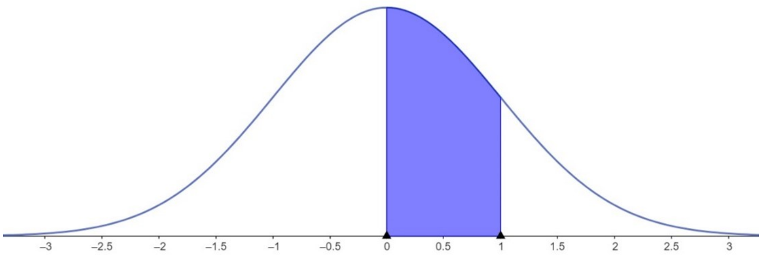
Fonte:Elaborada pelo Autor

e 1º decimal	0	1	2	3
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732
2,0	**0,4772**	0,4778	0,4783	0,4788
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834

Fonte: Elaborada pelo autor

Ao analisarmos a tabela4.4, temos que probabilidade $P(0 \leq Z \leq 2)$ é igual a 0,4772

Figura 11: $P(0 \leq Z \leq 1)$ como área



Fonte:Elaborada pelo Autor

e 1º decimal	0	1	2	3
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238
1,0	**0,3413**	0,3438	0,3461	0,3485
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708

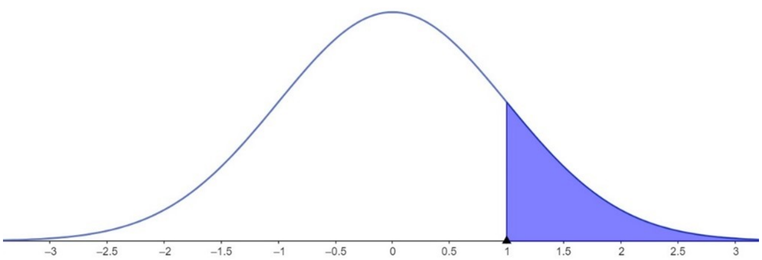
Fonte: Elaborada pelo autor

Ao analisarmos a tabela4.4, temos que probabilidade $P(0 \leq Z \leq 1)$ é igual a 0,3413.

Logo: $P(1 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1) = 0{,}4772 - 0{,}3413 = 0{,}1359$

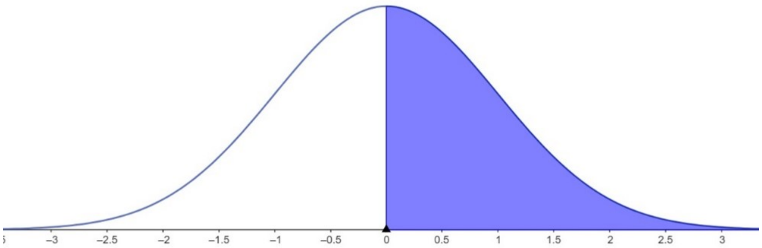
Exemplo 4.3: $P(Z \geq 1)$ Neste exemplo procuramos a área à direita de uma abscissa positiva. Na figura 12 temos a área desejada. Note que a área pode ser obtida pela diferença entre as áreas das figuras 13 e 14. Note que a área da figura 13 $P(Z \geq 0)$ $= 0{,}5$. Já a segunda área obtemos diretamente pela tabela.

Figura 12: $P(Z \geq 1)$ como área



Fonte:Elaborada pelo Autor

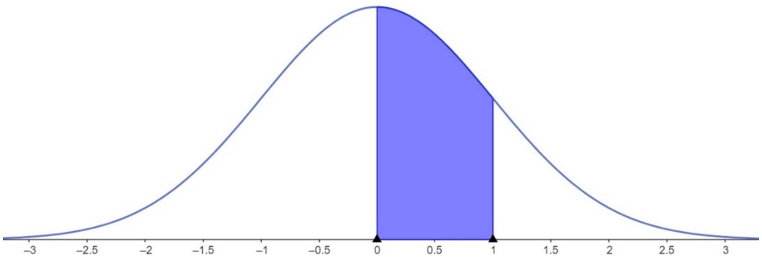
Figura 13: $P(Z \geq 0)$ como área



Fonte:Elaborada pelo Autor

Analisando a tabela e o gráfico, temos a metade do gráfico indicando que $P(Z \geq 0) = 0{,}50$.

Figura 14: $P(0 \leq Z \leq 1)$ como área

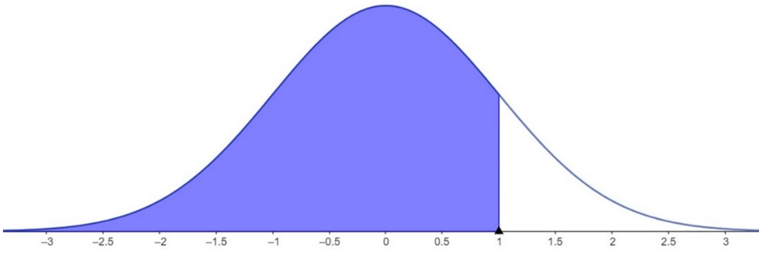


Fonte:Elaborada pelo Autor

Logo temos que: $P(Z \geq 1) = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$

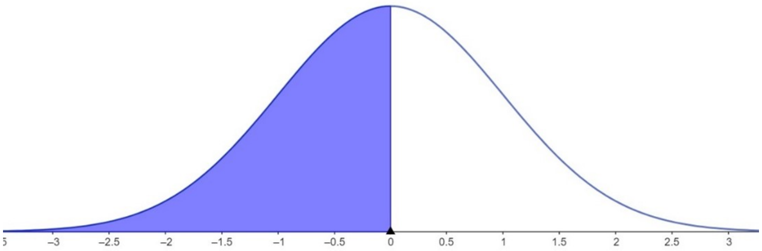
Exemplo 4.4: $P(Z \leq 1)$ A área do exemplo está à esquerda de uma abcissa positiva. A figura 15 ilustra a área desejada. Somando as áreas das figuras 16 e 17 obtemos a área $P(Z \leq 1)$. A área de $P(Z \leq 0)$ é simétrica à área $P(Z \geq 0)$, logo igual a 0,5.

Figura 15: $P(Z \leq 1)$ como área



Fonte:Elaborada pelo Autor

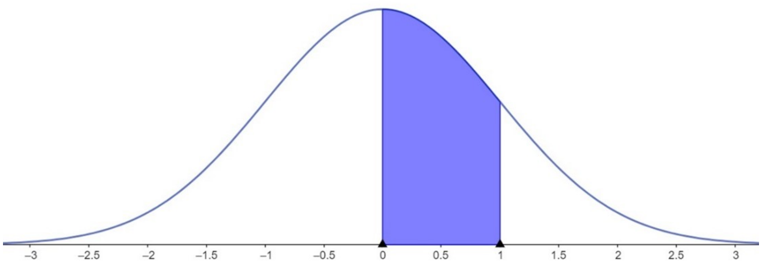
Figura 16: $P(Z \geq 0)$ como área



Fonte:Elaborada pelo Autor

Analisando a tabela e o gráfico, temos a metade do gráfico indicando que $P(Z \geq 0)$ = 0,50.

Figura 17: $P(0 \leq Z \leq 1)$ como área

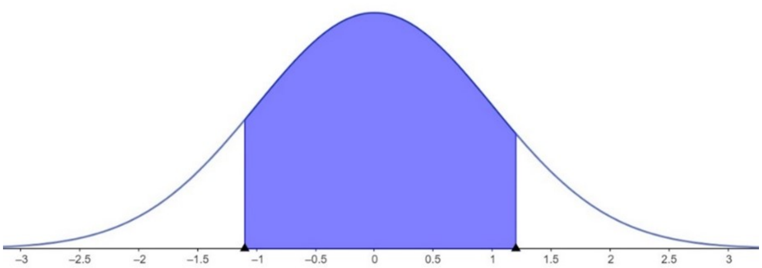


Fonte:Elaborada pelo Autor

Logo temos: $P(Z \leq 1) = P(Z \leq 0) + (0 \leq Z \leq 1) = 0{,}5 + 0{,}3413 = 0{,}8413$

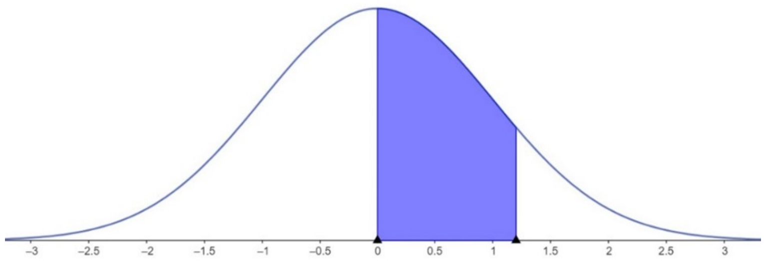
Exemplo 4.5: $P(-1,1 \leq Z \leq 1,2)$ Neste exemplo temos a área entre duas abscissas, uma negativa e outra positiva. A figura 18 ilustra a área desejada. Esta área é a soma das áreas apresentadas nas figuras 19 e 20. A área da figura 20 é equivalente em sua métrica à figura 21 por simetria.

Figura 18: $P(-1,1 \leq Z \leq 1,2)$ como área



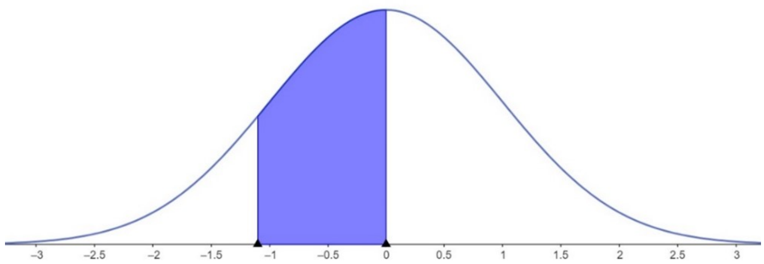
Fonte:Elaborada pelo Autor

Figura 19: $P(0 \leq Z \leq 1,2)$ como área



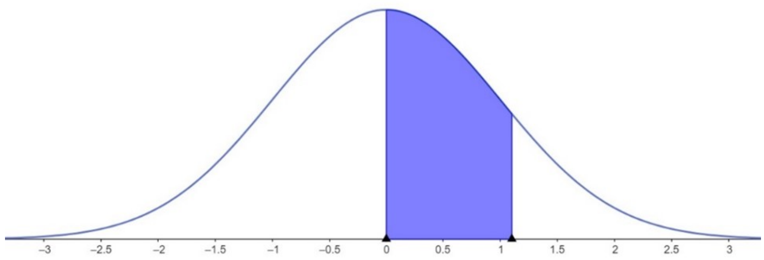
Fonte:Elaborada pelo Autor

Figura 20: $P(-1,1 \leq Z \leq 0)$ como área



Fonte:Elaborada pelo Autor

Figura 21: $P(0 \leq Z \leq 1,1)$ como área



Fonte:Elaborada pelo Autor

Logo temos:

$P(-1,1 \leq Z \leq 1,2) = P(0 \leq Z \leq 1,1) + P(0 \leq Z \leq 1,2) = 0{,}3643 + 0{,}3849 = 0{,}7492$

4.5 Relação entre a Binomial e a Normal

De Acordo com Murray (2009), se tivermos N grande, e se nem n e nem p estiverem próximos de zero, podemos aproximar a distribuição binomial da Normal com variável reduzida definida por:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Logo, se n for grande, Z se aproximará de $N(0,1)$.

O número de repetições n é um fator que aproxima a distribuição binomial da normal. No entanto, a probabilidade também influi diretamente na aproximação das mesmas, como analisaremos na tabela a seguir.

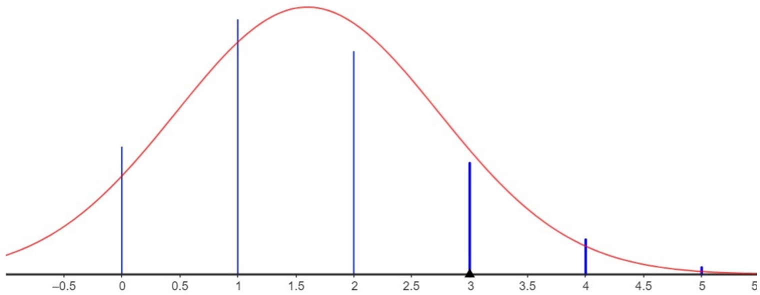
Figura 22: Aproximação normal da distribuição binomial para alguns valores de n, x e p.

x	n= 8, p = 0,2		n= 8, p = 0,5		n= 25, p = 0,2	
	Aproximação	Exata	Aproximação	Exata	Aproximação	Exata
0	0,13	0,168	0,005	0,004	0,009	0,004
1	0,306	0,33	0,03	0,031	0,027	0,024
2	0,331	0,294	0,104	0,109	0,065	0,071
3	0,164	0,147	0,22	0,219	0,121	0,136
4	0,037	0,046	0,282	0,273	0,176	0,187
5	0,004	0,009	0,22	0,219	0,199	0,196

Fonte:(Meyer, 2010)

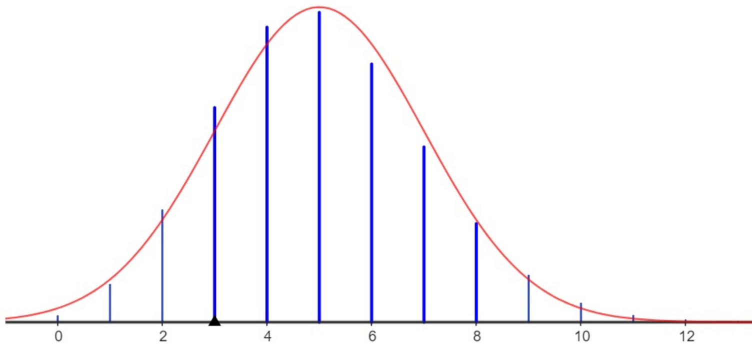
Analisando a Tabela 3, nota-se que, quando $p = 0,5$, a aproximação em três casas decimais acontece apesar de apenas 8 repetições, enquanto quando tomamos $p = 0,2$, necessitamos de 25 repetições para alcançarmos tal aproximação. A seguir usaremos a representação gráfica para analisarmos o comportamento da distribuição normal.

Figura 23: Gráfico da distribuição binomial n = 8 p= 0,2



Fonte:Elaborada pelo Autor

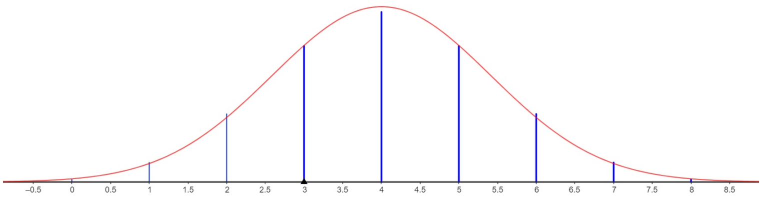
Figura 24: Gráfico da distribuição binomial n = 25 p= 0,2



Fonte:Elaborada pelo Autor

Note que a coluna azul que representa a distribuição binomial ja se assemelha a curva vermelha que representa a distribuição normal.

Figura 25: Gráfico da distribuição binomial n = 8 p= 0,5



Fonte:Elaborada pelo Autor

Pela representação gráfica, notamos que o gráfico da figura 25 já apresenta uma simetria e um formato de sino, característico da distribuição normal; enquanto na figura 23, temos uma assimetria que vai se transformando na figura 24 com o aumento do número de repetições.

5 Geogebra

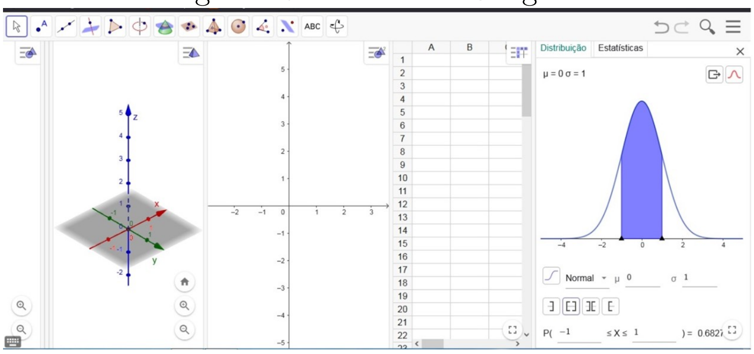
Neste Capitulo apresentaremos o aplicativo Geogebra , seu criador e suas ferramentas. Com foco na calculadora de probabilidades.

5.1 O Software Geogebra

Criado por Markus Hohenwater em sua dissertação de mestrado, o Geogebra é um software gratuito que pode ser baixado tanto em computadores como em smartphones. É possível fazer o download no site www.geogebra.org/download e na loja de aplicativos do aparelho; ou ainda utilizá-lo on-line no site https://www.geogebra.org/classic.

O software é uma excelente ferramenta no trabalho de geometria e funções. Sua interface simples apresenta várias opções de trabalho. Bortolossi (2016).Segundo BORTOLOSSI, O Geogebra reúne em suas janelas, recursos gráficos numéricos, simbólicos e de programação em geometria, aritmética, álgebra, funções, estatística e probabilidade.

Figura 26: Multitelas Geogebra

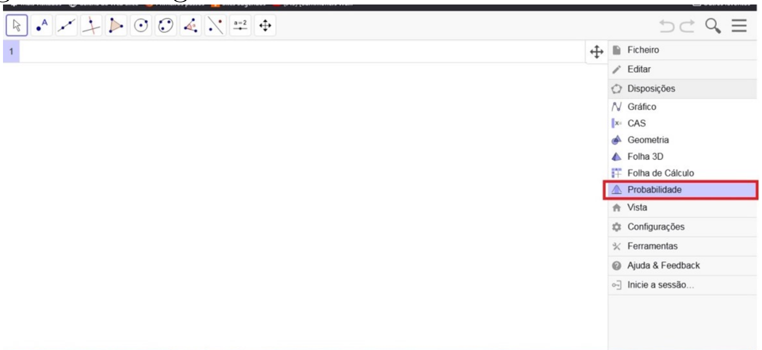


Fonte:Geogebra.com

> O geogebra é um sistema de geometria dinâmica. Permite construir vários objetos: pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos representativos de funções e curvas parametrizadas, os quais podem depois ser modificados dinamicamente. Hohenwarter (2002)(HOHENWARTER, p 6, 2009)

Nesta dissertação, utilizaremos uma de suas ferramentas, especificamente a calculadora de probabilidades, deste recurso pode ser acessado no canto superior direito em Barra de Menu, em seguida em disposições, logo após em Probabilidade. Caminho: Barra de Menu> disposições >Probabilidade.

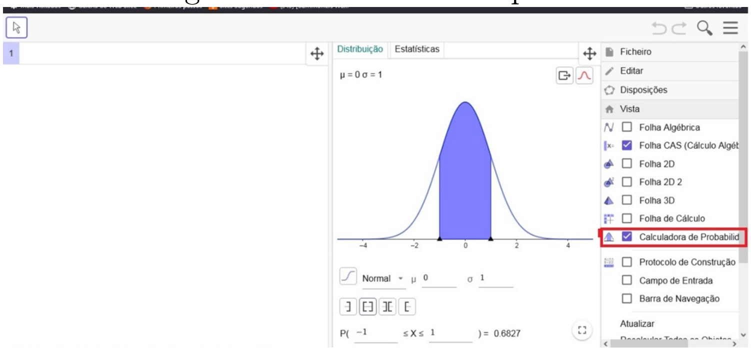
Figura 27: Imagem de acesso à calculadora de Probabilidade



Fonte:Elaborada pelo Autor

Pode-se também acessar a Barra de Menu, seguida da opção vista e marcar a calculadora de probabilidade. Caminho: Barra de Menu> Vista > Calculadora de Probabilidade.

Figura 28: Resultado computado



Fonte:Elaborada pelo autor

> Nesta ferramenta, o usuário pode escolher entre várias distribuições discretas, contínuas e acumuladas (Normal, student, chi, Quadrado, F, Exponencial, Cauchy, Weibull, Gama, Lognormal, logística, Binomial, Pascal, Poisson, Hipergeométrica), configurar seus parâmetros (por exemplo, média e desvio padrão para a distribuição normal) e, então, calcular probabilidades da forma $P(X \leq b)$, $P(a \leq X \leq b)$ e eixo horizontal ou digitando-os diretamente nos campos correspondentes. Bortolossi (2016)(BORTOLOSSI.H.J, 2006.)

Apresentaremos agora as ferramentas da calculadora de probabilidades. Tomamos um exemplo da distribuição normal com $n = 20$ e $p = 0,5$, ou seja, X ∼B(20 , 0,5). A figura abaixo ilustra a janela com alguns elementos destacados e numerados.

Figura 29: Ferramentas da calculadora de Probabilidades

Fonte:Elaborada pelo autor

1. Altera o tipo do gráfico em: gráfico linear, diagrama em degraus, diagrama em barras e curva normal sobreposta ao diagrama;

2. Aba de opções de distribuição de probabilidade: Binomial, Normal, Poisson, Pascal, Hipergeométrica, t student, Chi Quadrado, Exponencial, Cauchy, Weibull, Gama, Beta, entre outras;

3. Campo para se inserir os parâmetros que mudam de acordo com o tipo de distribuição. No caso da figura 28, $n = 20$ e $p = 0,5$;

4. Tipos de intervalo que a variável aleatória assume (limitado à direita, limitado à esquerda e direita, limitado à esquerda);

5. Campos para inserir os limites dos intervalos, a serem assumidos pela variável aleatória; na figura 28 o intervalo da variável aleatória X é $8 \leq \text{X} \leq 12$ e a probabilidade 0,7368;

6. μ e σ representam, nesta ordem, média e desvio padrão da variável aleatória X;

7. Tabela da distribuição de probabilidade da variável aleatória X.

6 Aplicações

Neste Capítulo, analisaremos situações envolvendo as distribuições Binomial e Normal, onde utilizaremos os resultados da calculadora de probabilidades junto aos cálculos algébricos.

Exemplo 6.1: As Ciências biológicas se utilizam de cálculos probabilísticos, na genética, em resolução de problemas envolvendo cruzamentos, os quais são trabalhados no Ensino Médio com as Leis de Mendel. Analisemos a seguir alguns exemplos de como a distribuição binomial nos ajuda a resolver tais problemas.

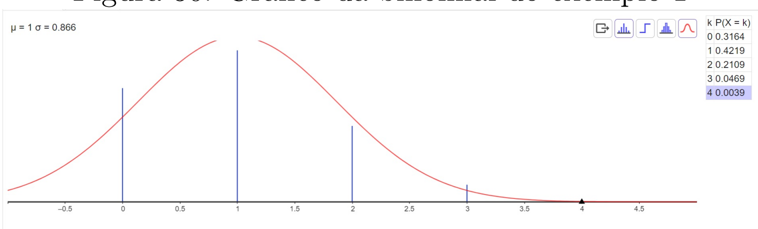
O Traço Falciforme é uma alteração genética herdada de um dos paìs que não é suficiente para se manifestar como doença. A partir disso, analisaremos o problema. Um casal descobre que ambos são portadores do traço falciforme. A probabilidade de que qualquer criança nascida deles tenha anemia falciforme AF é 0,25. Se o casal tivesse 4 filhos, qual seria a probabilidade de todos os 4 filhos terem AF?

Temos uma dicotomia entre nascer com anemia falciforme, e não nascer com anemia falciforme que são eventos mutuamente excludentes. Portanto, podemos utilizar a distribuição binomial para resolver este problema. Como são 4 filhos , temos $n = 4$, e a probabilidade igual a 0,25 ($p = 0,25$). Como queremos a probabilidade de todos os 4 filhos tenham anemia falciforme, $k = 4$.

$$P(X = 4) = \frac{4!}{4!0!}(0,25)^4(0,75)^0 = (0,25)^4 = 0,00390625 = 0,39\%$$

Portanto, a probabilidade é aproximadamente 0,0039 de, em 4 nascimentos, todos os filhos apresentarem AF.

Figura 30: Gráfico da binomial do exemplo 1



Fonte:Elaborada pelo autor

Pela tabela, para k = 4, a probabilidade é de 0,0039. Aproximadamente 0,4%.

Exemplo 6.2: Qual a probabilidade de um casal ter 4 crianças, sendo 2 do sexo masculino e 2 do sexo feminino?

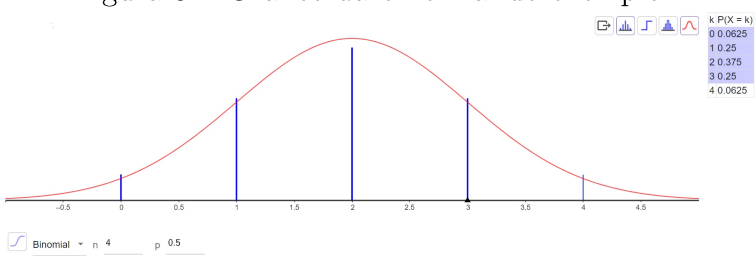
Este problema é bastante trabalhado na área de genética. Geralmente os alunos de biologia, por não terem afinidade com os cálculos matemáticos, recorrem à árvore de possibilidades para determinar a probabilidade nestes casos. Processo este, que, a depender do número de indivíduos, pode se tornar bem trabalhoso. Demonstraremos abaixo como realizar o cálculo utilizando a distribuição binomial e o Geogebra.

Temos, neste caso, a probabilidade de se ter um menino $p = 0,5$ e a probabilidade de não nascer um menino, ou seja, menina $(1-p) = 0,5$, o número $n = 4$, o total de crianças e $k = 2$. Assim temos:

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= \binom{4}{2}(0,5)^2(0,5)^2 \\
&= \frac{4!!}{4!(4-2)!}(0,5)^2(0,5)^2 \\
&= 6 \cdot (0,5)^4 \\
&= \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \\
&= 0,375.
\end{aligned}
$$

Utilizando os parâmetros $n = 4$, $p =$ 0,5 e $k = 2$, na calculadora de probabilidades do Geogebra, obtemos o gráfico abaixo:

Figura 31: Gráfico da binomial do exemplo 2



Fonte:Elaborada pelo autor

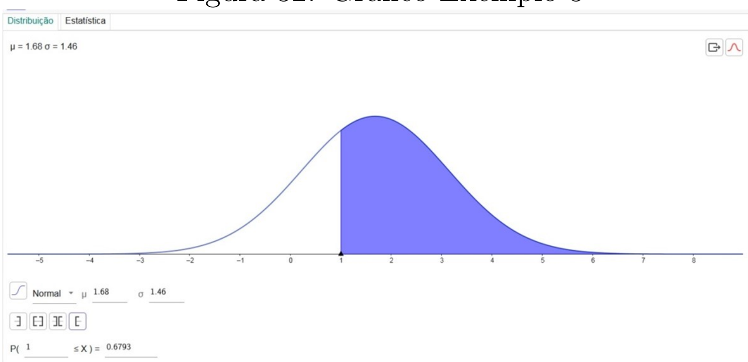
Concluímos, assim, que a probabilidade de no nascimento de 4 crianças se obter 2 meninos e 2 meninas é de 37,5%.

Exemplo 6.3: Qual a probabilidade de em um jogo do campeonato brasileiro de 2023, o Palmeiras marcar pelo menos 1 gol?Rocha et al. (2017)

O campeonato brasileiro de 2023, o “brasileirão”, teve como campeão a sociedade esportiva de futebol Palmeiras. Como campeão, após 38 rodadas, em sua campanha, o Palmeiras teve 10 empates e oito derrotas, com 64 gols marcados e 33 sofridos, com uma média de 1,68 gols marcados com um desvio padrão de 1,46, o melhor ataque da competição.

Aplicando estes valores na calculadora de probabilidades, $\mu = 1{,}68$ e $\sigma = 1{,}46$, como desejamos pelo menos um gol, façamos $P(1 \leq$x).

Figura 32: Gráfico Exemplo 3



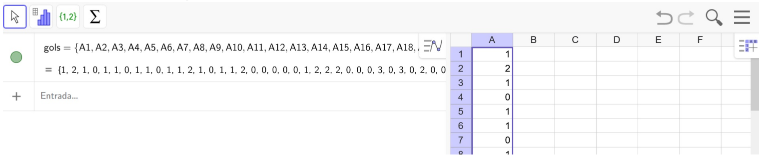
Fonte:Elaborada pelo autor

Temos que a probabilidade de o Palmeiras marcar pelo menos 1 gol é de aproximadamente 68% ($P(1 \leq$ x$) = 0{,}6793$). Uma probabilidade satisfatória para um time que conquistou o tílulo neste ano.

Exemplo 6.4: Qual a probabilidade do time Palmeiras sofrer pelo menos 1 gol no campeonato brasileiro de 2023?

Utilizaremos a ferramenta de planilha do Geogebra para calcularmos a média e o desvio padrão. Digitamos os dados na células da planilha, selecionamos as células utilizadas e, com um clique no botão direito do mouse, em criar lista, então renomeamos a lista para "gols".

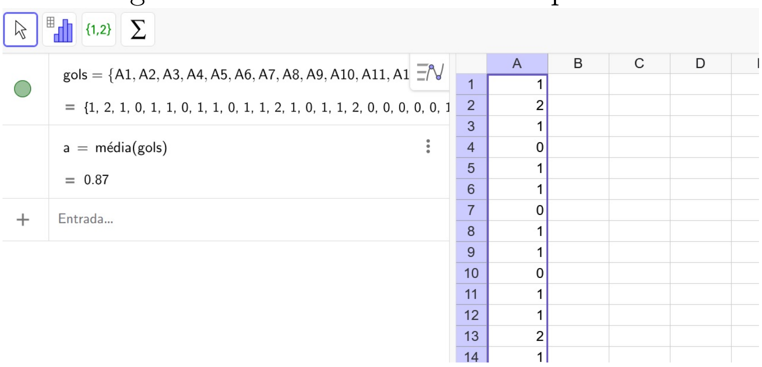
Figura 33: Criando lista de dados



Fonte:Elaborada pelo autor

No campo de entrada, digitamos Média[<lista de dados>], renomeamos para "gols", em seguida teclamos enter.

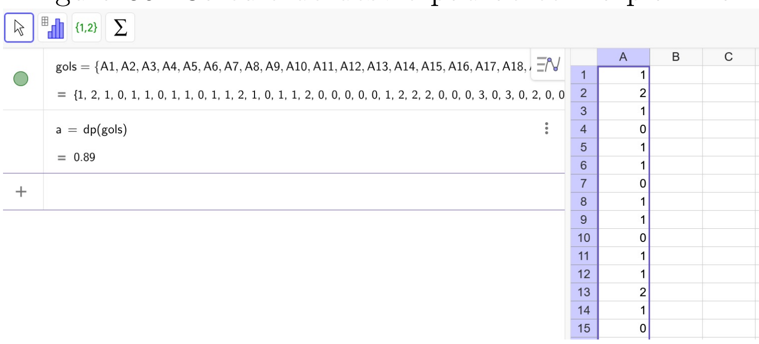
Figura 34: Cálculo média com a planilha



Fonte:Elaborada pelo autor

Para calcularmos o valor do desvio padrão, basta digitarmos o comando Desvio-padrão[<lista de dados>], renomeamos para gols e em seguida a tecla enter.

Figura 35: Cálculo do desvio padrão com a planilha

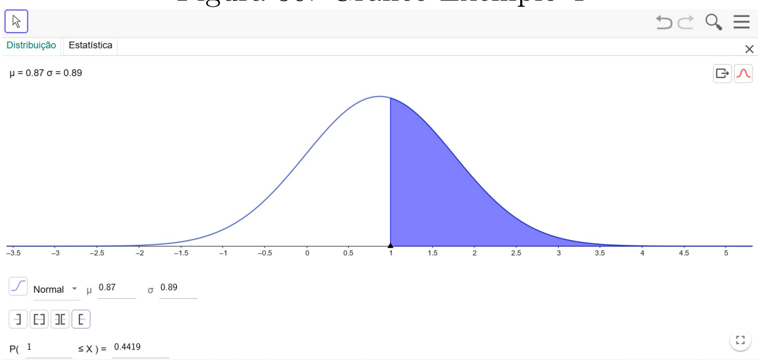


Fonte:Elaborada pelo autor

Este recurso simplifica os cálculos da média e desvio padrão, uma vez que organiza os dados brutos para utilização destes parâmetros pela calculadora de probabilidade.

Aplicando os valores na calculadora de probabilidade, obtemos que P(x>1) = 0,4419.

Figura 36: Gráfico Exemplo 4



Fonte:Elaborada pelo autor

Exemplo 6.5: Aproximação da distribuição binomial para Normal

A aproximação binomial para normal é um conceito utilizado em estatística para aproximar uma distribuição binomial por uma distribuição normal, quando o número de tentativas n é grande e a probabilidade de sucesso p não é muito próxima de 0 ou 1.

Para aproximar uma distribuição binomial $B(n, p)$ por uma distribuição normal N(μ, σ^2), usaremos:

1. Média: μ = np;
2. Variância: (σ^2) = *np(1-p)*;
3. Distribuição normal aproximada: com média μ = np e variância σ^2 = *np(1-p)*, a distribuição binomial $B(n, p)$ pode ser aproximada pela distribuição normal

$$N(np, n(1-p)).$$

Realizaremos um exemplo, utilizando a aproximação da binomial para normal e realizaremos o cálculo da normal com a calculadora de probabilidade do Geogebra.

Uma pesquisa reporta que 86% dos usuários de internet utilizam o Internet Explorer® do Windows® como seu navegador. Você seleciona aleatoriamente 200 usuários de internet e lhes pergunta se eles usam o Internet Explorer®. Qual é a probabilidade de que exatamente 176 deles digam que sim? (Fonte: 0neStat.com.)

Larson, Farber e Patarra (2004)(Larson, 2015) Se np $\geq$ 5 e nq $\geq$ 5, a variável aleatória binomial x tem distribuição aproximadamente normal com:

$$\mu = np \text{ e } \sigma = \sqrt{npq}, \text{ onde q} = 1 \text{ - p}$$

Binomial

p = 0,86 ; *(1-p)* = 0,14 ; n = 200 ; x $\geq$ 176

Para obtermos uma boa aproximação tomamos $np \geq 5$ e *n(1-p)* $\geq$ 5.

np = 200 $\cdot$ 0,86 = 172 $\geq$ 5 *n(1-p)* = 200 $\cdot$ 0,14 = 28 $\geq$ 5

Normal

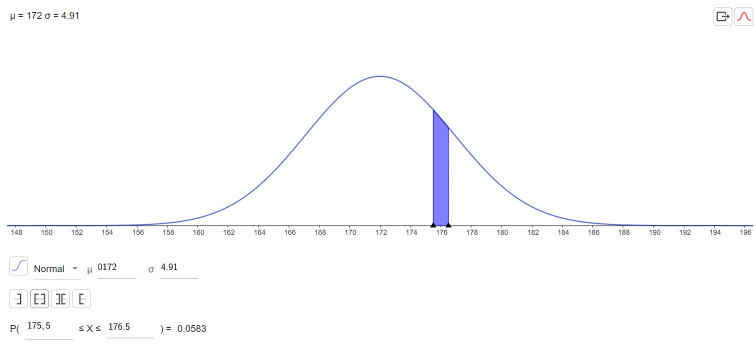
$\mu = np = 172$

$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0,86 \cdot 0,14} = 4,91$

Como estamos aproximando uma distribuição contínua (Normal) de uma distribuição discreta (Binomial), a correção de continuidade faz-se necessária para associar um intervalo (na distribuição contínua) ao valor discreto. Neste caso, subtraímos 0,5 de x, logo, 175,5 < x < 176,5.

Colocando os parâmetros μ = 172 e σ= 4,9 na calculadora de probabilidades, obtemos P(175,5 < x < 176,5)= 0,0583.

Figura 37: Gráfico Exemplo 5



Fonte:Elaborada pelo autor

Exemplo 6.6: Agulhas de Buffon

Podemos utilizar a tecnologia, no caso o Geogebra, para demonstrar estudos importantes como "Agulhas de Buffon".

O Conde de Buffon foi um matemático e naturalista que viveu no século XVIII. Ele propôs um problema que viria a ser conhecido como Agulhas de Buffon. O problema propõe que sobre uma área plana sejam traçadas retas paralelas equidistantes e lançadas agulhas ao acaso. Qual a probabilidade de a agulha cortar uma reta? Buffon encontrou uma relação de probabilidade de $\frac{2l}{d\pi}$, onde "l" seria o comprimento da agulha e "d" a distância entre as linhas paralelas.

> Quando essa agulha é jogada uma quantidade N vezes e dentre essas tentativas a agulha cruze alguma das linhas em P casos, então a razão $\frac{P}{N}$ deve-se aproximar de $\frac{2l}{\pi d}$. Ou seja, $\frac{P}{N} \cong \frac{2l}{\pi d}$. (PÓVOA, 2022)(PÓVOA, 2022.)

Como consequência, podemos utilizar esta relação para estimar uma aproximação do valor de π. "Em 1901, Lazzarine veio a alcançar uma aproximação em seis casas decimais do número π. Para isso, ele elaborou uma máquina que derrubou 3408 vezes um tipo de agulha com $\frac{l}{d} = \frac{5}{6}$, alcançando 1808 agulhas cruzando as linhas". Lins (2004)

$$2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3408}{1808} = 3{,}1415929.$$

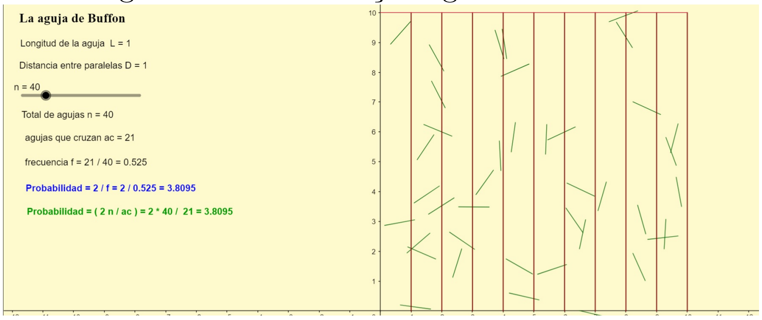
Esta relação de probabilidade tem aplicações em vários campos, tais como: Analisar a distribuição espacial de objetos ou eventos e compreender o comportamento de processos aleatórios. As Agulhas de Buffon ainda são um problema interessante na teoria das probabilidades e inspirou novas pesquisas e aplicações em diversas áreas da ciência e da matemática.

Realizaremos algumas simulações utilizando o Geogebra, a partir da aplicação "la aguja de Buffon" criado por Ricardo B. Cervantes Quintana, para calcularmos o número de agulhas que tocam as linhas, a simulação considera o espaçamento entre as linhas e o tamanho das agulhas igual a 1. Em seguida utilizaremos a calculadora de probabilidade para calcularmos a probabilidade e utilizaremos uma transformação linear da fórmula

$$p = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \pi = \frac{2}{p}.$$

Na primeira simulação, tomando n = 40 (n = número de lançamentos), e obtemos 21 agulhas tocando as linhas.

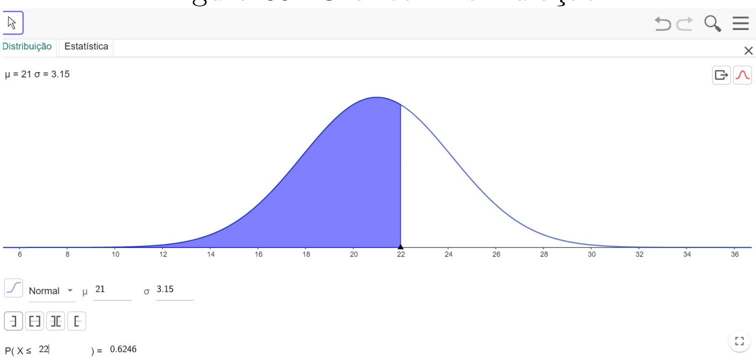
Figura 38: 1ª simulação agulhas de Buffon



Fonte:https://www.geogebra.org/m/VdPF95SP

Assim, obtemos: $p = \dfrac{21}{40} = 0,525$ e $(1-p) = 0,475$ a média $\mu = 21$ a média é o próprio número de acertos e o desvio $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{21 \cdot 0,475}$, obtendo, assim, $\sigma = 3.15$. Aplicaremos também uma correção de continuidade, uma vez que aproximaremos uma distribuição binomial para a normal. Logo $P(x \leq 22)$.

Figura 39: Gráfico 1ª simulação

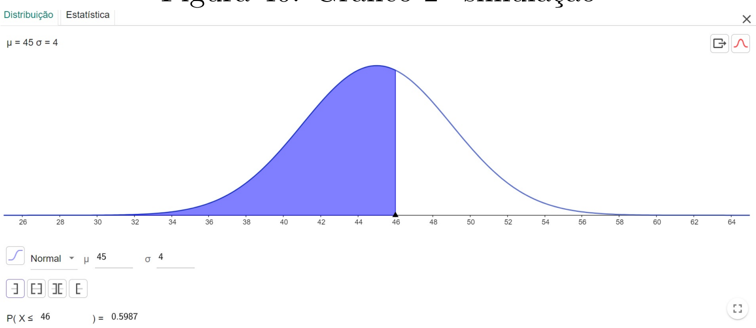


Fonte:https://www.geogebra.org/m/VdPF95SP

Aplicando a fórmula $\pi = \dfrac{2}{p}$, temos $\pi = \dfrac{2}{0,6246} = 3{,}2020$, um valor bem próximo do valor de π.

Aplicando a simulação para n= 70, obtemos 45 agulhas que tocaram as linhas. Assim, $p = \dfrac{45}{70} = 0,642$ e $(1-p) = 0,357$, a média $\mu = 45$ e o desvio $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{45 \cdot 0,357}$ obtendo assim, $\sigma = 4$. Aplicaremos também uma correção de continuidade, uma vez que aproximaremos uma distribuição binomial para a normal. Logo, $P(x \leq 45)$

Figura 40: Gráfico 2ª simulação



Fonte:Elaborada pelo autor

Aplicando a fórmula $\pi = \dfrac{2}{p}$, temos $\pi = \dfrac{2}{0,5987} = 3{,}344$, que também é uma boa aproximação do valor de π.

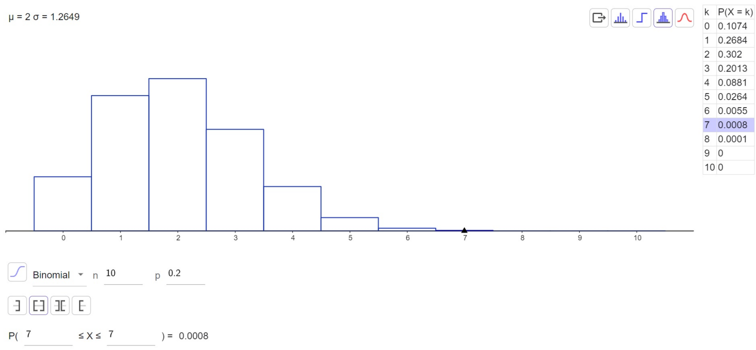
Exemplo 6.9: Qual a probabilidade de um candidato acertar 7 questões de um certame com 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas cada, marcando todas as questões aleatoriamente?

Uma das grandes preocupações dos organizadores de uma prova, concurso ou vestibular são possíveis aprovações que não sejam condizentes com o nível exigido. Há esse cuidado com "chutes" e fraudes. Mas qual seria a probabilidade de um candidato acertar 7 questões no "chute".

Sendo $n = 10$, $p = 0,2$ e $k = 7$

$$\begin{aligned} P(X = 7) &= \binom{10}{7}(0,2)^7(0,8)^3 \\ &= 120 \cdot (0,0000128)(0,512) \\ &= 0,00078 \\ &= 0,08\% \end{aligned}$$

Figura 41: Gráfico da distribuição binomial do exemplo 6



Fonte: Elaborada pelo autor

Obtemos uma probabilidade pequena, de apenas 0,08%. Observamos na tabela fornecida no canto superior direito que a probabilidade de acertar todas as questões ($k = 10$) é tão pequena que o Geogebra considera 0.

7 Sequência Didática

Nesta secção, apresentaremos uma sequência com aplicações das distribuições binomial e normal com auxílio do Geogebra, a fim de que os professores do Ensino Superior a utilizem em sua metodologia. Segundo,Zabala (2015) "sequência didática é o conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um principio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos"o que justifica a escolha pela sequência didática.

As sequências didáticas contribuem com a consolidação de conhecimentos que estão em fase de construção e permite que progressivamente novas aquisições sejam possíveis, pois a organização dessas atividades prevê uma progressão modular, a partir do levantamento dos conhecimentos que os alunos já possuem sobre um determinado assunto, conforme Brasil Alferes e Mainardes (2018).

A sequência didática conta com um total de 3 aulas, cada uma com duração prevista de 2 horas.

Na primeira aula realiza-se a construção da curva normal no Geogebra. A fim de familiarizar o aluno com a função densidade $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, e o comportamento da curva normal, os alunos serão levados a analisar os efeitos da alteração dos parâmetros μ e σ na curva normal.

Na segunda aula, realizaremos a padronização de uma curva normal, apresentaremos uma situação-problema, os alunos realizarão a padronização, em seguida com o suporte da tabela com os scores Z, o aluno calculará a probabilidade. Logo após utilizaremos a calculadora de probabilidade para confirmar os valores encontrados.

Na terceira aula, realizaremos a situação-problema com a distribuição binomial, no primeiro momento o aluno desenvolverá o termo geral do binômio. Logo após com a calculadora de probabilidade o aluno confirmará seus resultados.

7.1 Aula 1

Tema: Construção da Curva Normal
Objetivo: Construir a Curva normal com suporte de tecnologia
Duração: 2 horas
Material necessário: Computador, tablet ou Smartphone
Avaliação: Será por meio da participação e realização da prática.
Roteiro: Nesta Aula iremos construir a função densidade de probabilidade da curva normal. Será necessário que cada aluno tenha a sua disposição um computador, tablet ou Smartphone com a acesso a internet ou que apresente o Geogebra instalado no mesmo.

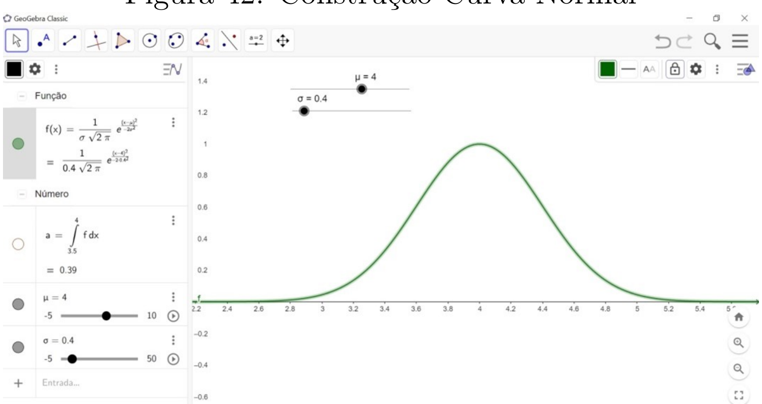
Passo 1: Acesse o aplicativo Geogebra instalado ou por meio do site https://www.geogebra.org/classic.

Passo 2: Para realizarmos a construção da curva normal devemos habilitar no campo de entrada ($\mu = 1$) e em seguida ($\sigma = 1$). No campo de entrada de comandos habilitamos, então, a expressão. Em versões anteriores utilizaríamos:

$$f(x) = 1/(\sigma\text{*}(2\text{*pi})\ \hat{}\ (0{,}5)\ \text{e}\ \hat{}\ (\text{-}(0.5)\text{*}((\text{x - }\mu)\ /\ \sigma)2).$$

Com as versões mais atuais, a montagem de tal expressão foi simplificada, como mostra a imagem a seguir:

Figura 42: Construção Curva Normal

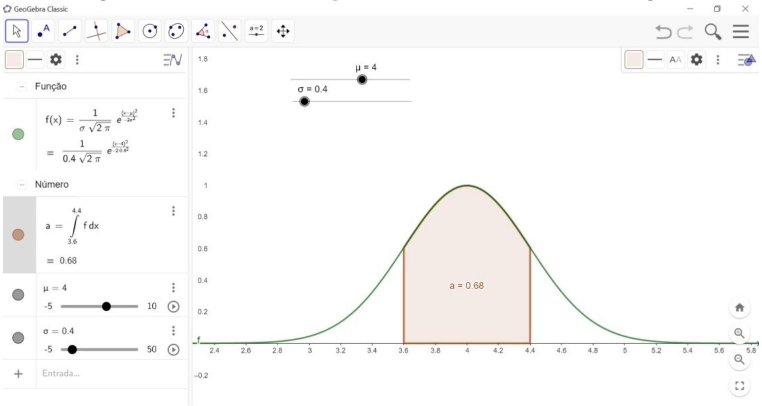


Fonte:Elaborada pelo autor

Passo 3: Altere os valores de μ e σ, e registre quais alterações sofridas pela curva.

Passo 4: Utilizaremos o comando: Integral [função, limite inferior, limite, superior] para realizarmos o cálculo da área de probabilidade. No caso em questão Integral [f, 3.5, 4.4].

Figura 43: Construção Curva Normal-Integral



Fonte:Elaborada pelo autor

7.2 Aula 2

Tema: Padronização de Curva normal e Calculadora de probabilidade
Objetivo: Construir a Curva normal com suporte de tecnologia
Duração: 2 horas
Material necessário: Computador, tablet ou Smartphone, tabela com os scores Z
Avaliação: Será por meio da participação e realização da prática.
Roteiro: Nesta Aula iremos realizar uma situação-problema com a padronização da curva normal e a calculadora de probabilidades do Geogebra. Será necessário que cada aluno tenha a sua disposição um computador, tablet ou Smartphone com a acesso a internet ou que apresente o Geogebra instalado no mesmo.

Passo 1: Apresentar a situação-problema qual será padronizada os parâmetros.
"Se a população masculina de determinada região tem altura média de 1,7m e desvio padrão de 0,05m, determine a probabilidade de escolhermos, ao acaso, um homem desta população que tenha altura entre 1,7m e 1,75m."

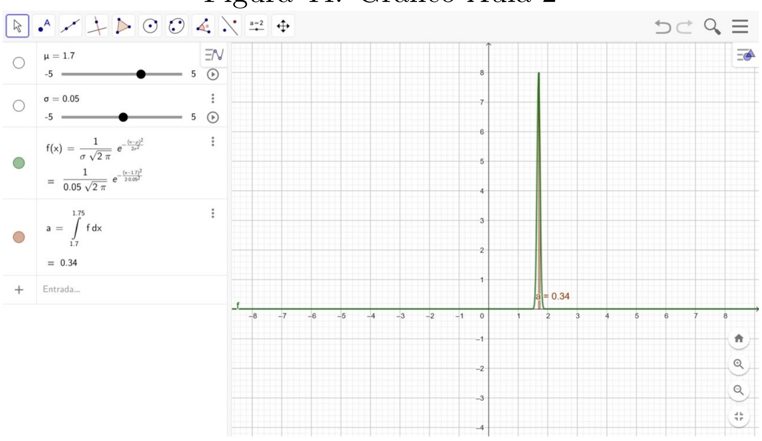
Passo 2: Calcular a padronizada das alturas entre 1,70 e 1,75 temos:

$$P(1,7 < x < 1,75) = P(\frac{1,7-1,7}{0,05} < z < \frac{1,75-1,7}{0,05}) = P(0 < z < 1)$$

Passo 3: Agora utilizando a tabela com os scores Z 4.4, sabendo que o intervalo $0 < Z < 1$, esperasse que os alunos concluam que a probabilidade é 34,12%.

Passo 4: Agora, utilizaremos o software Geogebra para realizar o cálculo, construindo a função densidade. Primeiro passo é realizarmos os passos da construção da função densidade no Geogebra, como mostrado na página anterior. Daí então, atribuirmos os valores da média (μ =1,7), desvio padrão (σ = 0,05), e os limites inferior 1,7 e limite superior 1,75m.

Figura 44: Gráfico Aula 2



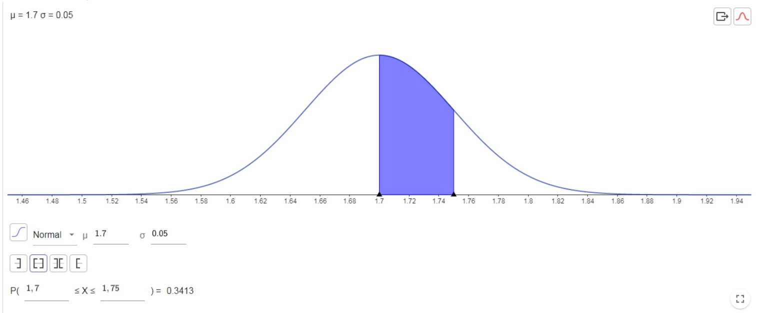
Fonte:Elaborada pelo autor

Obtemos a área de probabilidade correspondente 34%. Embora tal recursos nos poupe o trabalho de verificar os valores na tabela 1, a construção da função demanda tempo e ajustes. A simples mudança de posição de alguns fatores pode alterar a representação.

Passo 5:Acessar calculadora de probabilidade no geogebra.

Passo 6: No ambiente da calculadora de probabilidade , escolher a opção de distribuição normal e inserir os parâmetros $\mu = 1,7$ e $\sigma = 0,05$ e o intervalo $P(1,7 \leq X \leq 1,75)$

Figura 45: Calculadora de Probabilidade Aula 2



Fonte:Elaborada pelo autor

Passo 7: Registrar $P(1,7 \leq X \leq 1,75)$= $0,3413$

7.3 Aula 3

Tema: Distribuição Binomial e Calculadora de probabilidade
Objetivo: Resolver situação-problema com o uso da calculadora de probabilidade
Duração: 2 horas
Material necessário: Computador, tablet ou Smartphone
Avaliação: Será por meio da participação e realização da prática.
Roteiro: Nesta Aula iremos realizar uma situação-problema com a distribuição binomial e a calculadora de probabilidades do Geogebra. Será necessário que cada aluno tenha a sua disposição um computador, tablet ou Smartphone com a acesso a internet ou que apresente o Geogebra instalado no mesmo.

Passo 1: Apresentar a situação-problema.

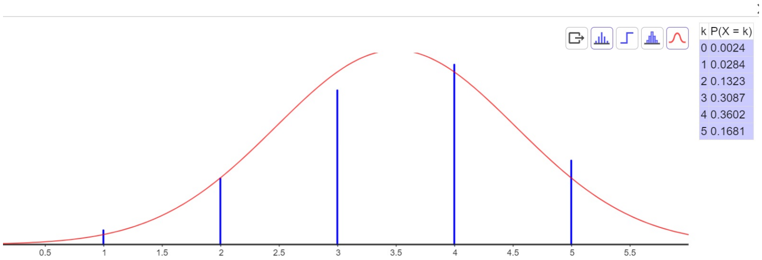
"(ESAF/2016) - Em um determinado município, 70% da população é favorável a um certo projeto. Se uma amostra aleatória de cinco pessoas dessa população for selecionada, qual é a probabilidade de exatamente quatro pessoas serem favoráveis ao projeto?"

Passo 2: Realizar o calculo utilizando a distribuição normal
n=5 ; p = 0,70; k = 4

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \binom{5}{4} (0,70)^4 (1-0,70)^{5-4} \\ &= \frac{5!}{4!(5-4)!} (0,70)^4 (0,30) \\ &= 5 \cdot (0,2401)(0,30) \\ &= 0,36015 \\ &= 36,02\% \end{aligned}$$

Passo 3: No ambiente da calculadora de probabilidade , escolher a opção de distribuição binomial e inserir os parâmetros n = 5, p = 0,70 e k = 4

Figura 46: Gráfico da binomial da Aula 3



Fonte:Elaborada pelo autor

para k = 4, a probabilidade é igual a 36,02%.

8 Considerações Finais

O trabalho, como um todo, procura analisar as possibilidades de aplicação da ferramenta Geogebra no cálculo de probabilidade. Durante o trabalho foram expostas situações resolvidas com o uso de recursos do aplicativo. Foram demonstradas sugestões de uso da ferramenta Geogebra e de seus recursos no cálculo da probabilidade. Foram resolvidos diferentes exemplos com situações envolvendo a curva normal, a partir da construção da função, utilizando os recursos cartográficos.

Nas Aplicação 6.1 e 6.2 vimos o uso da distribuição binomial aplicado às ciências biológicas. Vemos que os alunos dessa área costumam recorrer a outros artifícios para o cálculo da probabilidade, e constatamos que o Geogebra se apresenta como um facilitador nestes cálculos, uma vez que, basta utilizarmos os parâmetros: n como o números de repetições, p como a probabilidade, e k sendo o número desejado.

Nas Aplicações 6.3, 6.4 e 6.5, utilizamos a calculadora de probabilidade, obtendo, assim, uma simplificação dos cálculos, com o uso desta ferramenta. Acreditamos que os multirecursos do Geogebra podem facilitar o cálculo da probabilidade por proporcionar uma abordagem gráfica, permitindo inclusive a manipulação da curva binomial e normal, com alteração dos parâmetros, em cada caso.

A calculadora de probabilidade realiza automaticamente o cálculo, apenas fornecendo a média, o desvio padrão e o intervalo, na distribuição normal. Comparando com o exemplo 4, onde foram necessários ajustes na função para que a mesma representasse a curva normal, ainda há certa dificuldade quando falamos na representação matemática. Na informática, a função apresentada na página 26 para a curva, é diferente da função proposta por Meyer, como visto na página 10.

O Geogebra também nos fornece recursos como a planilha, com os quais podemos organizar os dados brutos e transformá-los em média e desvio padrão, assim contribuindo para o cálculo da probabilidade. Podemos utilizar criações de outros autores, como "la aguja de Buffon"; do criador Ricardo B. Cervantes Quintana. Utilizamos seus resultados para realizar estimativas da probabilidade.

Apresentamos uma prospsta de sequência didática para utilização do Geogebra no trabalho com as distribuições binomial e normal. Esperasse que este material seja útil no formação de professores e na aplicação em sala de aula.

Como podemos ver, o Geogebra nos fornece várias ferramentas que facilitam e viabilizam o cálculo da probabilidade. No banco de dissertações do PROFMAT (https://profmat-sbm.org.br/dissertações/.), os trabalhos que abordam sobre a probabilidade não tratam da calculadora de probabilidades profundamente. O estudo poderá contribuir em fontes documentais, por sua abordagem com uma nova visão metodológica, para uma compreensão mais clara e completa da probabilidade.

REFERÊNCIAS

ALFERES, M. A.; MAINARDES, J. O pacto nacional pela alfabetização na idade certa em ação: revisão de literatura. *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação*, SciELO Brasil, v. 27, p. 47–68, 2018. 51

ANDERSON, D. R. et al. *Estatística aplicada à administração e economia*. [S.l.]: Thomson Learning São Paulo:, 2007. 29

BORTOLOSSI, H. J. O uso do software gratuito geogebra no ensino e na aprendizagem de estatística e probabilidade. *Vidya*, v. 36, n. 2, p. 429–440, 2016. 38, 39

CAIRE, E. A história da origem da curva normal. *Universidade Estadual Paulista (Unesp)*, 2012. 24

FARIAS, A. M. L. de. Probabilidade e estatística. 2008. 30

HOHENWARTER, M. Geogebra-ein softwaresystem für dynamische geometrie und algebra der ebene. 2002. 38

LARSON, R.; FARBER, B.; PATARRA, C. tradução técnica. *Estatística aplicada*. [S.l.]: Prentice Hall, 2004. 45

LINS, L. D. Agulha de buffon. *Recife: Centro de Informática da Universidade. Federal de Pernambuco*, 2004. 47

MAGALHÃES, M. N. *Probabilidade e variáveis aleatórias*. [S.l.]: Edusp, 2006. 17

MEYER, P. L. *Probabilidade: aplicações à estatística*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 1982. 15, 21, 22, 25

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. Matemática discreta. *Rio de Janeiro: SBM*, p. 16, 2015. 14, 15, 19

PÓVOA, A. S. *O uso da probabilidade visando uma aproximação para o número Pi: uma análise das agulhas de Buffon e do método de Monte Carlo*. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2022. 47

ROCHA, S. M. et al. Distribuição binomial e aplicações. *Universidade Federal do Maranhão*, 2017. 43

STATISTIC, author=FREEDMAN, David;PISANI, year=2007, publisher=W.W.Norton Company. [S.l.: s.n.]. 16, 17, 24

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. [S.l.]: Penso Editora, 2015. 51