Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional

Geometria Não Euclidiana: Uma Possibilidade Para a Educação Básica

Francisco Erasmo de Morais

Teresina

2024

Francisco Erasmo de Morais

Geometria Não Euclidiana: Uma Possibilidade Para a Educação Básica

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Piauí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito.

Teresina

2024

M827g Morais, Francisco Erasmo de.
Geometria não euclidiana: uma possibilidade para a educação básica / Francisco Erasmo de Morais. - 2024.
53 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, *Campus* Poeta Torquato Neto, Teresina - PI, 2024.
“Área de Concentração: Ensino da Matemática.”
“Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito.”

1. Matemática – Ensino. 2. Geometria não euclidiana. 3. Novo Ensino Médio. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Universidade Estadual do Piauí – UESPI
Ana Angélica P. Teixeira (Bibliotecária) CRB 3/1217

FRANCISCO ERASMO DE MORAIS

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA: UMA POSSIBILIDADE PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática
Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito

Data de aprovação: 21 de Junho de 2024.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
ARNALDO SILVA BRITO
Data: 01/07/2024 14:48:49-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito – Orientador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Documento assinado digitalmente
PEDRO ANTONIO SOARES JUNIOR
Data: 01/07/2024 12:47:52-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior – Examinador Interno
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Documento assinado digitalmente
JURANDIR DE OLIVEIRA LOPES
Data: 01/07/2024 14:32:36-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes – Examinador Externo
Universidade Federal do Piauí – UFPI

"Um dos meus anseios de chegar ao infinito é a esperança de que, ao menos lá, as paralelas se encontrem!"

(Dom Hélder Câmara)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a DEUS, por toda força que me deu para chegar até aqui após a longa caminhada que já trilhei desde a educação básica até a conclusão deste trabalho, só Ele sabe as dificuldades que já passei.

À todos os meus familiares, meu pai Messias Morais, mãe Maria das Dores que sempre rezou por mim, meus irmãos, Francisca, Manuel, Conceição, Ataide, Francimar, Antonio Carlos (Baxim), que sempre me ensinou muito, agora sei o significado de "quem não tem competência não se estabelece", Helena, Edmar, meu parceiro para toda hora, sei que sempre posso contar com você, Eulene, a caçula e não posso deixar de lembrar do meu tio Raimundo de Melo a quem tenho um carinho especial, amo todos vocês.

À minha amada companheira Elis, que esteve ao meu lado nessa caminhada, aqui lembro as noites que tive que viajar para longe de você, duas dessas noites no seu aniversário. Lembro também das vezes que ao retornar você me aguardava com nossa grande amiga Michele, nesses momentos as noites se tornavam mais leves e taças de vinho e risos eram o que me motivavam a seguir em frente.

A bolsa concedida pela CAPES, que foi fundamental para o meu desenvolvimento acadêmico e profissional durante o período em que participei do PROFMAT.

Aos professores do PROFMAT por todos os ensinamentos e conhecimentos compartilhados, em especial aos professores Arnaldo, Afonso, Pedro Júnior e Val, tenho por vocês muito respeito e consideração. Vocês são a alma do PROFMAT-UESPI. Não posso deixar de reiterar a minha admiração pelo meu orientador Arnaldo, que sempre esteve disponível me ajudando e me aconselhando na direção certa, meu muito obrigado.

Gostaria de agradecer a cada colega da minha turma, Afonso, Vanilson, Delon, um dos primeiros que me ajudou tirando dúvidas, Ney, Açucena, Viana, Eugenio, Hislley, Gustavo, Lício, Lucas e, em especial, Edvaldo, Miranda e meu irmão Robson, os consagrados/abençoados, Deus sabe o quanto vocês foram importantes para mim ao longo dessa trajetória.

Aos meus colegas de trabalho que de forma direta ou indiretamente me motivaram a concluir essa dissertação, em especial as minhas "chefas", Tamires Cardoso, Lane e Rose Torres, grato por compreenderem e me ajudarem nesse momento.

Finalmente estou concluindo feliz por tudo que vivi até aqui, grato a Deus, o mestre dos mestres, e a todos que compartilharam ensinamentos comigo, a vida é feita de escolhas eu escolhi estudar e levar das pessoas o melhor que elas podem me dar.

RESUMO

Pensando no ensino de Geometria e nas possibilidades de diversificação do currículo da educação básica trazidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), estruturamos este trabalho com o objetivo de evidenciar as competências e habilidades que esse documento norteia para todas as etapas do ensino básico. Investigamos também a possibilidade de trabalhar, em paralelo ao ensino de geometria Euclidiana, tópicos de geometria não Euclidiana nos itinerários formativos do Novo Ensino Médio (NEM). Para isso, procuramos na literatura fundamentação teórica sobre esses temas, aplicações em disciplinas diversas visando a interdisciplinaridade e em áreas que poderiam influenciar a carreira futura dos nossos jovens. Por fim, propomos atividades para o professor de matemática aplicar em sala de aula, com o objetivo de estimular a aprendizagem do objeto da pesquisa e influenciar seu estudo mais aprofundado, encorajando as gerações futuras a explorar esse universo.

Palavras - chave: ensino de matemática; geometria euclidiana; geometria não euclidiana; novo ensino médio.

ABSTRACT

Considering the teaching of Geometry and the possibilities for diversifying the basic education curriculum brought by the Base Nacional Comum Curricular (BNCC), we structured this work with the aim of highlighting the competencies and skills that this document guides for all stages of basic education. We also investigated the possibility of working, in parallel with the teaching of Euclidean geometry, on topics of non-Euclidean geometry in the formative itineraries of the New High School (NEM). To do this, we searched the literature for theoretical foundations on these topics, applications in various disciplines aiming at interdisciplinary, and areas that could influence the future careers of our young people. Finally, we proposed activities for mathematics teachers to apply in the classroom, with the aim of stimulating the learning of the research object and influencing its further study, encouraging future generations to explore this universe.

Keywords: mathematics teaching; euclidean geometry; non-euclidean geometry; new high school.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

A geometria é uma disciplina que frequentemente desafia os estudantes, e entender por que isso acontece é fundamental para melhorar o ensino nessa área. Ao investigar as dificuldades enfrentadas pelos alunos no estudo desse tema, podemos identificar padrões e desenvolver estratégias mais eficazes para ensinar conceitos geométricos. Afinal, a geometria não é apenas uma matéria abstrata, ela está presente em nosso cotidiano e tem aplicações práticas em áreas como arquitetura, design, engenharia e até mesmo na vida diária, como no formato de certos objetos como mesas, cadeiras, obras de arte, monumentos, estruturas de casas, placas de trânsito, dentre outros elementos que possuem formas geométricas distintas.

Para [Silva, 2019], a geometria vem sendo negligenciada nas últimas décadas. Segundo ele, isso se deve a uma forte influência do Movimento da Matemática Moderna, que procurou focar o ensino nos procedimentos algébricos em detrimento dos geométricos. Apesar da Base Nacional Comum Curricular [Brasil, 2017] enfatizar em suas competências gerais básicas que se deve valorizar e utilizar conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico (...), ainda há muito a ser feito para tornar o ensino de geometria atrativo e associado à realidade do discente.

Partindo desse princípio, o Novo Ensino Médio – NEM propõe, em seus itinerários formativos, que haja um aprofundamento na área especifica que cada estudante pretende se direcionar, (PORTARIA Nº 1.432, DE 28 DE DEZEMBRO DE 2018), [Brasil, 2018], ou até mesmo um fortalecimento na aprendizagem dos estudantes, preenchendo lacunas que ficaram do ensino fundamental. Tendo em vista essa possibilidade e em busca de um estudo aprofundado no campo da geometria, este trabalho sugere o seguinte problema de pesquisa: quais são as possibilidades de inserção de tópicos da geometria não euclidiana para aplicação nos itinerários formativos do Novo Ensino Médio?

Nesse momento, o leitor deve estar se perguntando: por que geometria não euclidiana? Porque será através da curiosidade em torno desse tema que foi feita uma abordagem histórica da geometria euclidiana, que levará à descoberta dessa área e suas aplicações em diversos campos do conhecimento.

O objetivo geral deste trabalho é explorar as possibilidades de inserção de tópicos da geometria não euclidiana para aplicação nos itinerários formativos do novo ensino médio, considerando os aspectos históricos, conceituais, metodológicos e didáticos da área. Para atingi-lo, será mostrado que os pilares da geometria euclidiana, com suas proposições axiomáticas e a dedução rigorosa de teoremas a partir delas, foram desafiados por mentes curiosas e inquisitivas ao longo dos séculos. Do questionamento dos postulados de Euclides ao desenvolvimento de geometrias não paralelas, como a geometria hiperbólica e a geometria elíptica, grandes pensadores como Nikolai Lobachevsky, János Bolyai e Bernhard Riemann deixaram suas marcas indeléveis nesse campo.

Além de sua importância histórica e teórica, a geometria não euclidiana desempenha um papel fundamental em diversas áreas modernas, como por exemplo na geografia, na física, na cosmologia e na computação gráfica. A compreensão dessas geometrias não apenas amplia nossa visão do espaço, mas também lança luz sobre questões fundamentais sobre a natureza do universo e a estrutura da realidade.

Na linha do que foi dito anteriormente, os objetivos específicos para atingir o objetivo geral são: (1) Identificar os principais conceitos e propriedades da geometria não euclidiana, bem como as suas diferenças em relação à geometria euclidiana, (2) Analisar conceitos históricos e os contextos matemáticos que levaram ao desenvolvimento da geometria não euclidiana, (3) Investigar as aplicações da geometria não euclidiana em diversas áreas do conhecimento, tais como a física, a astronomia, a cartografia, a arte e a arquitetura, bem como a presença da mesma ao redor, justificando assim o estudo para a promoção da formação integral básica dos estudantes proposto no NEM - Novo Ensino Médio e, por último, (4) Propor atividades didáticas que envolvam a geometria não euclidiana e que sejam adequadas aos itinerários formativos específicos para a área, considerando os objetivos de aprendizagem e as competências gerais da BNCC. Convém lembrar que a literatura será consultada para identificar autores que possam fundamentar um estudo aprofundado desse tema, aguçando a curiosidade do professor de matemática, para que, consequentemente, ele seja um disseminador de conhecimentos para seus alunos.

Como já foi dito em linhas anteriores dissertação proposta tem como objetivo central explorar as possibilidades de inserção de tópicos da geometria não euclidiana nos itinerários formativos do novo ensino médio. Este estudo justifica-se da necessidade de ampliar o horizonte educacional dos estudantes, proporcionando-lhes uma formação abrangente, que vá além dos limites da geometria euclidiana tradicional, sendo fundamentada em cima de quatro pontos, que veremos a seguir.

Relevância Histórica e Conceitual: A geometria não euclidiana representa uma revolução no pensamento geométrico, desafiando conceitos estabelecidos há séculos por Euclides. Compreender os principais conceitos e propriedades dessa geometria, bem como suas diferenças em relação à geometria euclidiana, é essencial para uma formação matemática sólida e em acordo com o que sugere a BNCC.

Contexto Matemático e Desenvolvimento Histórico: Analisar os contextos matemáticos e históricos que levaram ao desenvolvimento da geometria não euclidiana permite aos estudantes um entendimento ampla da evolução do pensamento matemático e das diferentes abordagens para a compreensão do espaço e das formas.

Aplicações Interdisciplinares e Cotidianas: A investigação das aplicações da geometria não euclidiana em áreas como física, astronomia, cartografia, arte e arquitetura demonstra a relevância e a presença constante dessa geometria em nosso cotidiano e em diversas áreas do conhecimento. Isso justifica sua inclusão nos itinerários formativos, promovendo uma formação integral e contextualizada dos estudantes.

Atividades Didáticas e BNCC: Propor atividades didáticas que envolvam a geometria não euclidiana, alinhadas aos objetos de aprendizagem e competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), contribui para a efetivação dos itinerários formativos específicos para a área, enriquecendo o processo de ensino-aprendizagem e favorecendo o desenvolvimento das habilidades dos estudantes.

Para atingir os objetivos almejados, foi realizado uma pesquisa bibliográfica, que, de acordo com [de Souza Minayo et al., 2011], é um tipo de pesquisa que se baseia em fontes secundárias, ou seja, em artigos, livros, dissertações, dentre outros documentos já publicados que versam sobre o tema abordado. A literatura será utilizada como embasamento científico, com obras já publicadas, independentemente do ano de publicação, para nortear o trabalho docente em relação à problemática sugerida anteriormente.

O processo metodológico incluiu a revisão e a síntese dos principais conceitos, teorias e perspectivas sobre a geometria não euclidiana, bem como a análise crítica das contribuições de diferentes autores e correntes de pensamento nesse campo. Além disso, foram realizadas investigações aprofundadas sobre os contextos históricos, os desenvolvimentos matemáticos e as aplicações interdisciplinares da geometria não euclidiana, a fim de embasar argumentações sólidas e fundamentadas ao longo da dissertação.

Dessa forma, a presente pesquisa bibliográfica se justifica pela sua contribuição para a promoção de uma formação matemática ampla, contextualizada e interdisciplinar. Autores como [Agustini, 2022], [Eduardo, 2013], [Bicudo, 2009], [Barbosa, 2002], dentre outros, foram utilizados para iluminar o caminho do professor/leitor a uma nova perspectiva sobre o pensamento geométrico. Isso será capaz de preparar os estudantes para os desafios e demandas do mundo contemporâneo, aguçando seu pensamento científico e sua capacidade de compreensão do mundo ao redor.

Este trabalho foi dividido em seis capítulos. O primeiro capítulo traz essas noções introdutórias. O segundo ilumina os passos da geometria na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), explorando como o tema central dessa dissertação aparece nesse documento, além de mostrar um pouco de sua estrutura. O terceiro capítulo apresenta as origens da geometria euclidiana, os postulados de Euclides e nomes que fizeram a história dentro desse assunto. No quarto capítulo, são discutidas as origens da geometria não euclidiana, elencando autores renomados que discutiram o tema, postulados sobre essa nova geometria e principais diferenças entre elas. O quinto capítulo aborda teoremas e aplicações em diversas áreas dessa nova geometria, elencando a possibilidade de inserção dela no ensino básico. No sexto e último capítulo, são apresentadas as considerações finais. É esperado que a leitura deste material seja de grande valia e que contribua para a formação acadêmica do leitor.

2 As Geometrias na BNCC

Nesse momento o leitor mais atento deve esta se perguntando: "As Geometrias? E há mais de uma?"Vejamos isso ao longo deste trabalho.

O Novo Ensino Médio - NEM chegou, com ele a necessidade de um aperfeiçoamento, de um reconhecimento da realidade e da necessidade de aprendizagem que possa ser útil a essa nova geração que tem a "tecnologia e o mundo na palma da mão", logo deve-se pensar em sugerir temas a serem ensinados de forma que possam esta alinhados à realidade dos estudantes, nesse sentido a Base Nacional Comum Curricular – BNCC nos diz, com relação a geometria, objeto de estudo desse pesquisador, que:

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência, ([Brasil, 2017], p.271).

Desse modo, a BNCC enfatiza que se deve ter um olhar atento quanto às práticas de ensino que visem a relação entre mundo da teoria e o mundo real, inferimos também dela que o pensamento geométrico pode auxiliar nesse sentido. Ainda nessa direção os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN [Brasil, 1999], nos dizem que “A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, (...), pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas”, ou seja, dissociar o ensino da realidade é privar o estudante de conhecer o mundo ao seu redor.

A BNCC enfatiza que o ensino de geometria deva estimular o pensamento geométrico, mas o que seria esse pensamento que ela faz alusão? Para [Pereira, 2020]:

> Assim, concluímos que o pensamento geométrico é a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos, de aplicar de modo coerente os instrumentos geométricos na resolução de problemas. É a capacidade de compreender a natureza dos fenômenos e inferir sobre eles, de identificar e perceber a importância da Geometria como uma ferramenta para entendimento do mundo físico e como um modelo matemático para compreensão do mundo teórico.

A citação de [Pereira, 2020], expressa uma visão ampla do pensamento geométrico, que envolve não apenas a capacidade de manipular formas e figuras, mas também de compreender e interpretar os fenômenos naturais e abstratos que envolvem a geometria. Ou seja, aqui já temos indícios que a BNCC não trata apenas do conhecimento de mundo visto aos olhos da geometria euclidiana [1], pois propõe o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes a partir da exploração de diferentes sistemas geométricos, que desafiam as noções usuais da geometria supra citada e ampliam as possibilidades de representação e modelagem do espaço. Assim, a BNCC busca estimular o pensamento crítico, criativo e reflexivo dos estudantes, bem como a sua capacidade de argumentação e comunicação matemática. Nesse sentido, ela está alinhada com [Pereira, 2020], pois reconhece a importância da geometria como uma ferramenta para o entendimento do mundo físico e como um modelo matemático para a compreensão do mundo teórico.

A geometria é uma área da matemática que estuda as formas, as medidas e as posições dos objetos no espaço. A Base Nacional Comum Curricular é um documento que define as aprendizagens essenciais para os estudantes da educação básica no Brasil. Nela há recomendações para o ensino da geometria em cada etapa da educação básica, desde a educação infantil até o ensino médio. As recomendações são organizadas por competências e habilidades, que são as capacidades que os estudantes devem desenvolver ao longo da sua formação definidas segundo a BNCC por:

> **Competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.
> **Habilidades** são as capacidades de realizar ações ou tarefas específicas, envolvendo operações mentais, procedimentos, técnicas e instrumentos, [Brasil, 2017].

As competências e habilidades são conceitos complementares que orientam o processo de ensino-aprendizagem na BNCC. As competências são a capacidade de mobilizar recursos, conhecimentos ou vivências para resolver questões da vida real, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho, como já foi dito. As habilidades, em outras palavras, são o que aprendemos a fazer e são sempre associadas a verbos de ação, como identificar, classificar, descrever e planejar, já para [Borges, 2023] "competência, pode ser traduzida como sendo o resultado final esperado daquilo que o estudante precisa aprender e saber fazer, em que ela é o ponto a ser chegado, encontramos nas habilidades como sendo um conjunto de ações que o leva a chegar neste resultado", ou seja, ideias que complementam-se.

A BNCC [Brasil, 2017] define dez competências gerais, que devem ser desenvolvidas de forma integrada aos componentes curriculares, em todas as etapas da educação básica. Essas competências são resumidas da seguinte forma:

[1] Segundo Boyer, a geometria euclidiana é a geometria que se baseia nos cinco postulados de Euclides, que são princípios intuitivos sobre pontos, retas, planos e ângulos. Boyer afirma que a geometria euclidiana é a mais antiga e a mais simples das geometrias, mas também a mais rica e a mais influente. Caso queira mais informações veja [Boyer, 2019]

1. Conhecimento.
2. Pensamento científico, crítico e criativo.
3. Repertório cultural.
4. Comunicação.
5. Cultura digital.
6. Trabalho e projeto de vida.
7. Argumentação.
8. Autoconhecimento e autocuidado.
9. Empatia e cooperação.
10. Responsabilidade e cidadania.

Já as competências específicas são as habilidades que os estudantes devem desenvolver em cada área do conhecimento, de acordo com a BNCC. Elas estão relacionadas às competências gerais, que são as habilidades comuns a todas as áreas e etapas da educação básica. As competências específicas orientam o planejamento e a avaliação das aprendizagens dos estudantes em cada componente curricular.

Essas competências especificas são bem definidas para o ensino fundamental e médio e elencadas na BNCC como encontramos em [Borges, 2023], que versa: No ensino fundamental, define-se competências específicas para as áreas e os componentes curriculares do ensino fundamental de modo articulado às competências gerais. Na área de Matemática, cuja componente carrega o mesmo nome, essa articulação é dada por meio de unidades temáticas: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, para elas temos oito competências específicas. A saber:

1. Reconhecer que a matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e dos desafios postos pelas sociedades, e valorizar o papel da matemática na compreensão e na intervenção no mundo.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, a intuição, a criatividade, a capacidade de argumentação, o cálculo mental e a utilização de diferentes registros de representação (algébrico, geométrico, numérico, gráfico, lógico, etc.).
3. Compreender as relações entre os diferentes campos da matemática e de outras áreas do conhecimento, reconhecendo e aplicando os conceitos e procedimentos matemáticos em contextos diversos.

4. Utilizar processos e ferramentas matemáticas para modelar e resolver problemas, envolvendo fenômenos naturais, socioculturais e tecnológicos, e para tomar decisões fundamentadas.

5. Investigar, analisar, organizar, interpretar e comunicar informações relevantes, expressas em linguagem matemática ou não, para compreender e avaliar situações do cotidiano, da ciência, da cultura e do trabalho.

6. Desenvolver e implementar projetos que articulem o conhecimento matemático com questões sociais, ambientais, culturais e econômicas, individuais e coletivas, com ética e cidadania.

7. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando em equipe na busca de soluções para problemas propostos, identificando e respeitando as formas de pensar e de agir de cada um e de diferentes grupos sociais.

8. Desenvolver uma atitude de autoconfiança em relação à matemática, apreciando sua beleza, seu rigor e sua aplicabilidade, e mantendo uma postura de curiosidade, interesse e perseverança na busca de conhecimento.

Essas competências podem ser desenvolvidas por meio de diversas atividades, como jogos, experimentos, investigações, projetos, simulações, atividades com materiais concretos, áudio visuais dentre outros, que estimulem o pensamento matemático e a resolução de problemas, aqui gostaríamos de ressaltar a competência específica 2, que deixa claro que se pode utilizar diferentes registros de representação como o geométrico, deixando mais uma vez subentendido a exploração de campos diversos da geometria.

É importante destacar que:

> As competências específicas possibilitam a articulação horizontal entre as áreas, perpassando todos os componentes curriculares, e também a articulação vertical, ou seja, a progressão entre o Ensino Fundamental: Anos Iniciais e o Ensino Fundamental: Anos Finais e a continuidade das experiências dos alunos, considerando suas especificidades, [Brasil, 2017].

Logo, fica evidente que as competências específicas são importantes para a formação integral dos estudantes, que devem ser capazes de fazerem um elo de ligação entre os diferentes conhecimentos das áreas diversificadas para compreenderem e atuarem no mundo de forma crítica, criativa e ética.

Para o ensino médio, [Borges, 2023], define as competências específicas para as áreas do conhecimento. No caso da área de matemática e suas tecnologias, componente curricular obrigatória, foram definidas cinco competências específicas, que se acrescentam às gerais, dando seguimento evolutivo com as competências específicas determinadas para o ensino fundamental, reforçando o que foi dito anteriormente sobre conexão entre as etapas de ensino, possibilitando a flexibilização nas escolhas dos objetos do conhecimento a serem trabalhados, aqui faz-se importante lembrar que por meio disso os sistemas de ensino podem inserir temas que considerem relevantes a sua proposta de ensino, promovendo orientação e detalhamento de novos componentes curriculares que garantam a aprendizagem dos estudantes. Vejamos essas competências.

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemática (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Ressaltaremos aqui a possibilidade que essas competências deixam em evidência da necessidade de um aprofundamento dos estudos em determinadas áreas, como por exemplo a geometria, fazendo com que o estudante consiga ressignificar seus conhecimentos adquiridos ao longo do ensino fundamental. Adiante veremos que essa alternativa se da por meio do que a BNCC chama de Itinerários Formativos[2].

Do texto infere-se que a área de matemática, no ensino fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento algébrico, geométrico e computacional, visando à resolução e

[2]Os itinerários formativos são roteiros de atividades e conteúdos pré-definidos pela escola que os estudantes podem escolher conforme seu interesse, para aprofundar e ampliar aprendizagens em uma ou mais áreas de conhecimento e/ou na formação técnica e profissional. Eles fazem parte das mudanças do Novo Ensino Médio, que visa dar maior autonomia e flexibilidade para os estudantes na construção de seus projetos de vida, [Brasil, 2017].

formulação de problemas em contextos diversos. No ensino médio, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão integrada da matemática, e dela com outras áreas do conhecimento e da sua aplicação à realidade.

Para garantir o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades, que estão relacionadas a diferentes objetos de conhecimento, como conteúdos, conceitos e processos, que são organizados em unidades temáticas. As habilidades são organizadas de maneira progressiva, ou seja, das mais simples para as mais complexas, e devem ser desenvolvidas em todos os anos, por todos os componentes curriculares.

A forma como as competências e habilidades aparecem na BNCC refletem uma concepção de educação integral, que visa o desenvolvimento de todas as dimensões do ser humano, tanto cognitivas quanto socioemocionais, culturais e físicas. A BNCC também oferece orientações para que os professores consigam aplicar as diretrizes de acordo com os objetivos da prática pedagógica.

Vimos anteriormente como as competências aparecem, já as habilidades são identificadas por um código alfanumérico, segundo [Brasil, 2017], cuja composição para o ensino fundamental é a seguinte:

EF01MA11

- O primeiro par de letras - EF - indica a etapa de Ensino Fundamental.
- O primeiro par de números (01) indica o ano (do 1º ao 9ºano) a que se refere a habilidade, neste caso, o 1º ano.
- O segundo par de letras - MA - indica o Componente Curricular, nesse caso, Matemática, outas opções seriam: AR = Arte, CI = Ciências, EF = Educação Física, ER = Ensino Religioso, GE = Geografia; HI = História, LI = Língua Inglesa, LP = Língua Portuguesa.
- O último par de números indica a posição da habilidade na numeração sequencial do ano, ou seja, 11 como sendo a 11ª habilidade esperada para a série em questão. E tal habilidade está associada aos Objetos do Conhecimento, pré-determinados e colocados de forma evolutiva no processo de aprendizagem.

Para o ensino médio, a representação é muito parecida com aquelas vistas anteriormente, vejamos:

EM13LGG103

- O primeiro par de letras indica a etapa de Ensino Médio.

- O primeiro par de números (13) indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do ensino médio, conforme definição dos currículos.

- A segunda sequência de letras indica a área (três letras) ou o componente curricular (duas letras), que podem ser: LGG = Linguagens e suas tecnologias, LP = Língua portuguesa; MAT = Matemática e suas tecnologias, CNT = Ciências da natureza e suas tecnologias, CHS = Ciências humanas e sociais aplicadas.

- Os números finais indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1º número) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números).

Vale destacar que o uso de numeração sequencial para identificar as habilidades não representa uma ordem ou hierarquia esperada das aprendizagens. Cabe aos sistemas e escolas definir a progressão das aprendizagens, em função de seus contextos locais. Vimos mais uma vez aqui a liberdade que o documento basilar nos dá para trabalharmos temas variados que possam desenvolver as competências e habilidades nela destacados.

Destacaremos a partir de agora algumas habilidades que são cobradas para o ensino de geometria em cada etapa da educação básica, habilidades essas que podem ser abordadas na geometria não euclidiana, um outro tipo de geometria, que veremos mais detalhada adiante. Primeiro para ensino fundamental anos iniciais/finais, seguindo até o médio. Devemos lembrar que esse trabalho não tem como objetivo abordar o estudo da geometria para as séries iniciais, mas é de extrema importância destacar como vem sendo cobrado tal tema desde o início, para assim aguçar a curiosidade dos professores sobre a relevância dos assuntos que aqui foram abordados.

Tabela 1: Habilidades da BNCC - Geometria Para o Ensino Fundamental Anos Iniciais.

Objetos de Conhecimento	Habilidades
Esboço de roteiros e de plantas simples.	(EF02MA13) Esboçar roteiros a ser seguidos ou plantas de ambientes familiares, assinalando entradas, saídas e alguns pontos de referência. (Ideia de planificação geometria projetiva).
Localização e movimentação: representação de objetos e pontos de referência.	(EF03MA12) Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis e maquetes, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência. (Ideia de geometria projetiva).

Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações.	(EF03MA14) Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações. (Ideia de geometria projetiva).
Localização e movimentação: pontos de referência, direção e sentido paralelismo e perpendicularismo.	(EF04MA16) Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares. (Ideia de geometria projetiva).
Figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides): reconhecimento, representações, planificações e características.	(EF04MA17) Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais. (Ideia de geometria projetiva).
Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características.	(EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos. (Ideia de geometria projetiva).
Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos.	(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais. (Ideia de geometria projetiva).

Fonte: Elaborada pelo autor em 2024.

Da leitura da tabela 1, observa-se que as habilidades cobradas envolvem o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico, articuladas sobretudo com as experiências anteriores dos estudantes em cada etapa, valorizando situações lúdicas de aprendizagem. Pontuamos também que a BNCC nessa etapa reconhece a diversidade de abordagens geométricas, como a euclidiana e a não euclidiana [3]. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da

[3] A geometria que nega o quinto postulado de Euclides, podemos citar a geometria projetiva, a elíptica, hiperbólica, detre outras, veremos mais sobre o tema nas próximas páginas.

geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.

Dando continuidade ao nosso estudo das habilidades para o ensino de "geometrias"[4], partiremos agora para as habilidades do ensino fundamental anos finais que como já foi dito em linhas anteriores faz uma importante ligação com os temas abordados nos anos iniciais, além de abordar conteúdos relevantes para fundamentar a continuação dos estudos no ensino médio, vejamos.

Tabela 2: Habilidades da BNCC - Geometria Para o Ensino Fundamental Anos Finais.

Objetos de Conhecimento	Habilidades
Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados.	(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.(Geometria do motorista de táxe).
Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares.	(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.). (Geometria do Motorista de Táxe).
Simetrias de translação, rotação e reflexão.	(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros. (Geometrias Projetiva, elíptica, Hiperbólica).
Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal.	(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica. (Geometria Hiperbólica).
Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação.	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

[4]O trocadilho vem referenciar a presença do estudo de outras geometrias além da euclidiana como podemos ver em EF03MA12, por exemplo que pode ser abordado em geometria projetiva.

Vistas ortogonais de figuras espaciais.	(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva. (Geometria projetiva).

Fonte: Elaborada pelo autor em 2024.

Nessa etapa ainda há um destaque para o reconhecimento de formas geométricas no mundo físico evoluindo para o desenvolvimento de habilidades de deslocamento e localização de pontos coordenados com a introdução da geometria de posição, além disso na habilidade EF07MA21, bem como em inúmeras outras, frisa o uso de ferramentas computacionais para reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, o que daria margem para muitos questionamentos por parte dos estudantes, por exemplo: Qual o lugar geométrico formado pela rotação de uma superfície circular de raio r, em torno de um eixo? A resposta para essa e para inúmeras outras que poderia surgir dessa habilidade fogem do mundo da geometria euclidiana, nesse caso o sólido que gera é chamado toro ou toróide uma superfície de revolução que se assemelha à forma de uma câmara de ar ou rosquinha, [MEDEIROS, 2020]. Atenuando aqui mais uma vez a necessidade de destacar que existe não somente um tipo de geometria, mas que há sim um conjunto delas que juntas tentam explicar a natureza das coisas e dos pensamentos humanos.

Para o ensino médio as habilidades para o estudo de geometria estão relacionadas ao ensino fundamental, pois elas se aprofundam e ampliam conceitos e procedimentos já estudados, nessa etapa notamos uma diferença com relação à divisão do ensino médio que não há, dando liberdade para o professor priorizar, convenientemente, por nível cada habilidade que será abordada tanto no primeiro ano do ensino médio, quanto no segundo e terceiro, vejamos essas habilidades.

Tabela 3: Habilidades da BNCC - Geometria Para o Ensino Médio.

Habilidades do ensino médio, campo de saber, Geometria e Medidas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (Geometria hiperbólica ou Geometria esférica).
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (Geometria hiperbólica, Geometria esférica, projetiva).
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. (Geometria hiperbólica, Geometria esférica, projetiva).

Fonte: Elaborada pelo autor em 2024.

Nessa etapa final, as habilidades buscam atender as necessidades de formação geral indispensáveis ao exercício da cidadania e responder a diversidade de expectativas dos jovens quanto a sua formação, tornando-se imprescindível reinterpretar, à luz das diversas realidades do Brasil, as finalidades do Ensino Médio, estabelecidas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação, (LDB, Art. 35) [Brasil, 1996], que são:

I A consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos.

II A preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores.

III O aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico.

IV A compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Para cumprir essas finalidades, a escola que acolhe as juventudes tem de garantir o prosseguimento dos estudos a todos aqueles que assim o desejarem, promovendo a educação integral dos estudantes no que concerne aos aspectos físicos, cognitivos e socionacionais. Pontuamos aqui que as habilidades exigidas nessa fase dão ênfase ao aprofundamento dos conhecimentos deixando claro a necessidade de vinculá-los ao contexto social, lembramos também que algumas delas como EM13MAT105 e EM13MAT307 nos permitem tratar de temas da geometria não euclidiana, como a hiperbólica, a esférica, projetiva, permitindo aos discentes uma maior compreensão do mundo ao seu redor, bem como a possibilidade de embasamento científico que permitirá um estudo em áreas como a engenharia, astronomia, física, artes, enfim, preconizando o que a BNCC, a constituição Federal e a LDB buscam para o ensino básico.

Portanto esse nosso estudo sobre a BNCC nos mostrou a presença, mesmo que nas entrelinhas, da possibilidade de uma abordagem da geometria não euclidiana, tanto no ensino fundamental quanto no médio mesmo que seja em caráter superficial, disponibilizando ferramentas para que os estudantes possam se aprofundar no tema. A pergunta que surge é, como poderia ser feito esse aprofundamento? Antes de responder a essa questão, vamos conhecer melhor essas tais geometrias.

3 Gêneses da Geometria Euclidiana

No livro I, dos Elementos de Euclides, inicia-se o estudo da geometria plana conhecida hoje como geometria euclidiana em homenagem a seu criador, Euclides, um matemático grego que viveu por volta de 300 anos a.C. Durante mais de dois mil anos a geometria euclidiana era a que melhor representava nosso mundo. A obra Elementos, é tida como uma das mais importantes já escritas. Para [Bongiovanni; Jahn, 2010], Elementos é considerado como:

> O exemplo mais bem acabado, provindo da Grécia, da matemática como uma ciência dedutiva é nos fornecido pelos Elementos de Euclides. Atendendo ao preceito que comanda: "Primeiro as primeiras coisas", comecemos pelo título da obra, Elementos. Nosso conhecimento da história inicial da geometria grega depende de notícias espalhadas em escritores antigos, muitas das quais provieram de um trabalho que, infelizmente, tragado pelo apetite voraz do tempo, não chegou até nós a História da Geometria, escrita por Eudemo de Rhodes, um dos principais discípulos de Aristóteles.

Nesta obra, Euclides sintetiza todo conhecimento matemático da época e, além disso, fornece um modelo para o desenvolvimento rigoroso das ideias matemáticas que é utilizado até os dias de hoje, ideias essas que servem como base para o conhecimento de geometria atual que como vimos esse brilhante autor não deixou se perder na história.

Em [Bicudo, 2009] vimos que Elementos é composto por 13 (capítulos). O livro I se inicia com 23 definições, dentre as quais o conceito de ponto, reta, triângulo, círculo, retas paralelas, entre outras, 9 noções comuns e 5 postulados, que deram base para o estudo da geometria plana que hoje encontramos nos livros. As definições atribuem nomes aos objetos e conceitos fundamentais que Euclides examina. As noções comuns são regras amplamente aceitas sobre raciocínio e relações que ele explicita. Os postulados, ou axiomas, são afirmações sobre os objetos em estudo que são consideradas verdadeiras sem demonstração. As definições, noções comuns e postulados são usados como ponto de partida para demonstrar outras afirmações, chamadas de proposições, seguindo rigorosas regras lógicas. Uma proposição significativa é chamada de teorema, uma proposição cujo principal objetivo é demonstrar um teorema é chamada de lema, e uma proposição que resulta facilmente de um teorema é chamada de corolário.Vejamos abaixo, para melhor ilustrar o que foi dito, as cinco primeiras definições, as nove noções comuns e os cinco postulados, encontrados em [Bicudo, 2009]:

Definições

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.

2. E linha é comprimento sem largura.

3. E extremidades de uma linha são pontos.

4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.

Noções Comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo é maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

De uma leitura rápida nos parece óbvio o que Euclides fez, mas uma mente aguçada perceberá quão profundo foram esses pensamentos, de tal forma que essas noções iniciais serviram para ele deduzir 465 teoremas que são vistos ao longo dos 13 capítulos do seu livro.(Lembrando que você encontra todas essas demonstrações em [Bicudo, 2009]).

Detalharemos esses cinco postulados com uma linguagem matemática usada atualmente, mostraremos também a visão geométrica de cada um deles.

Postulado I

Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto. Pode ser reescrito como: Para todo ponto A e para todo ponto B, não idêntico a A, existe uma única reta que passa por A e B. Isto significa que uma reta é determinada, de maneira única por dois pontos, sendo denotada por $\overleftrightarrow{AB}$. Os pontos A, B e todos os que ficam entre eles determinam o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ como vemos abaixo na figura 1.

Figura 1: Segmento $\overline{\mathrm{AB}}$.

Postulado II

Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta. Reescrevendo: Para todo segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ e para todo segmento $\overline{\mathrm{CD}}$ existe um único ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$ tal que o ponto B esteja entre A e E e o segmento $\overline{\mathrm{CD}}$ seja congruente (igual) ao segmento $\overline{\mathrm{BE}}$. Isto significa que se pode estender o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$, determinando o ponto E, de modo que o segmento $\overline{\mathrm{BE}}$ seja congruente a um dado segmento $\overline{\mathrm{CD}}$.

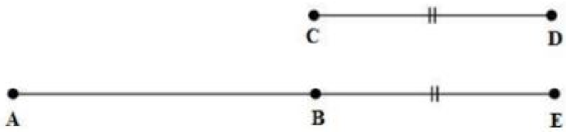


Figura 2: Segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ prolongado com o segmento$\overline{\mathrm{CD}}$ formando o segmento $\overline{\mathrm{AE}}$.

Uma informação interessante sobre esses dois postulados é que eles podem ser referidos como os postulados da régua e envolvem noções de incidência, de estar entre e de congruência que veremos melhor mais adiante nos postulados de Hilbert.

Postulado III *E, com todo centro e distância, descrever um círculo.* Reescrito: Para todo ponto O, dado, e para todo ponto A, não idêntico a O, existe um círculo de centro O cujo raio é o segmento $\overline{\mathrm{OA}}$.

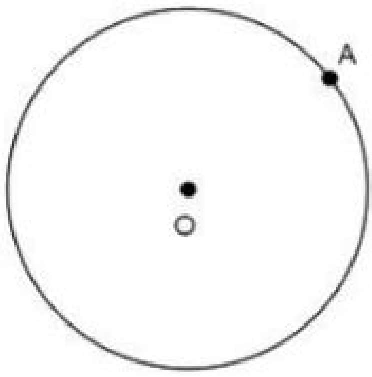


Figura 3: Círculo de Centro O e raio $\overline{\mathrm{OA}}$.

Postulado IV

E serem iguais entre si todos os ângulos retos. Esse na verdade é autoexplicativo, ou seja, um ângulo reto é congruente a outro ângulo reto, mas gostaria de enfatizar o que há em [Perez, 2015].

> O postulado IV, apesar de ser óbvio e elementar, esconde uma particularidade, pois implica no espaço contínuo, sem vazios. Por exemplo, o contrário do que acontece com um toróide. No espaço que o toróide determina há ângulos retos que não podem ser sobrepostos. É o caso dos ângulos formados entre os meridianos do toróide e os seus círculos mais interno e mais externo. Esses ângulos são "encurvados" em direções opostas, não sendo congruentes.

Essa citação nos mostra nesse momento que há controvérsias em uma "verdade absoluta", digamos assim para nos referir a este postulado, mas como tal situação poderia ocorrer se ele serve ainda hoje como base para a geometria euclidiana? A resposta é simples, não há somente a geometria euclidiana.

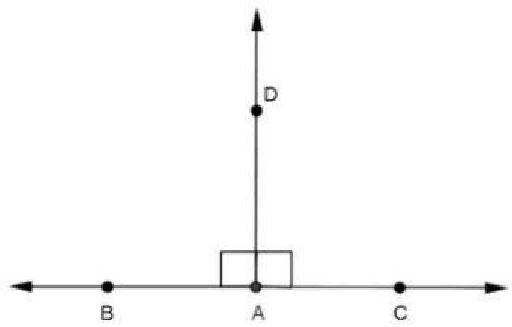


Figura 4: Ângulos Retos.

Postulado V

E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. Reescrito: Se duas retas r e s são intersectadas por uma outra reta t transversal a elas, de modo que a soma dos ângulos internos de um mesmo lado da transversal for menor do que dois ângulos retos, então as duas retas r e s se intersectam em algum ponto neste mesmo lado da transversal t.

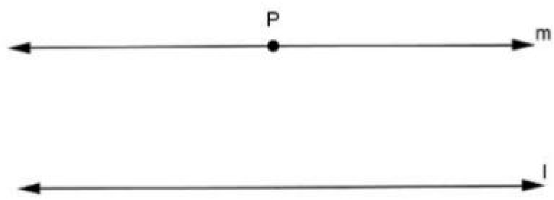


Figura 5: Retas Paralelas.

Vale ressaltar aqui que Euclides mesmo sem deixar claro nos primeiros postulados, já estabelece a ideia de lado, além do uso de vários termos não definidos anteriormente, como menor, por exemplo, e da aparente maior complexidade deste postulado em comparação aos anteriores, [Perez, 2015].

Durante muitos séculos, o V postulado foi um enigma desafiador para os matemáticos, entre outros questionamentos. Sua formulação é consideravelmente mais intrincada do que os demais postulados, assemelhando-se à complexidade de certos teoremas apresentados por Euclides. A eliminação desse postulado poderia resultar em um sistema geométrico consideravelmente mais simples. Os antigos gregos, ao estruturarem a geometria de maneira rigorosamente dedutiva, visavam demonstrar teoremas. Portanto, a presença de postulados óbvios e inquestionavelmente verdadeiros era crucial para conferir credibilidade aos teoremas, uma vez que a credibilidade destes estava intimamente ligada à veracidade dos postulados. O quinto postulado, ao contrário dos demais, não possui essa característica de ser claramente e inegavelmente verdadeiro.

O resultado dessa discussão culminou com o surgimento de várias hipóteses em torno da credibilidade do postulado em questão, fazendo com que surgissem princípios geométricos capazes de substituí-lo. Um deles é conhecido como axioma de Playfair[5]. No entanto, nenhum dos princípios surgiu como alternativa mais simples que o postulado original. Dessa discussão também surgiu a chamada geometria não euclidiana, que veremos melhor no próximo capítulo.

[5]Em 1795, John Playfair propôs o seguinte axioma: Dada uma linha e um ponto fora dela, uma e somente uma paralela à linha dada passa por esse ponto. O axioma de Playfair é interpretado como uma nova forma do quinto postulado que, nesse formato passou a ser chamado de axioma XI, [da Silva, 2006].

4 Gêneses da Geometria Não Euclidiana

Em [Kaleff, 2004] foi constatado que "para uma geometria ser considerada não euclidiana é preciso que em seu conjunto de axiomas, pelo menos um da geometria euclidiana não seja verdadeiro", nesse sentido, não em busca de uma nova geometria mas, no intuito de demostrar o quinto postulado, matemáticos diversos dedicaram suas vidas tentando prova-lo, mostrando assim com a negação do mesmo, ou até dos outros quatro anteriores, que existe um mundo alternativo ao de Euclides, o mundo não euclidiano.

Devido à complexidade do quinto postulado, após a publicação de Os Elementos, vários matemáticos tentaram demonstrá-lo na intenção de transformá-lo em um teorema, ou seja, uma proposição que poderia ser provada pelos quatro primeiros postulados. Foram muitas tentativas de demonstração, contudo, sempre continham erros, mas foi essa tentativa e erro que fez com que alternativas ao mundo plano de Euclides surgissem.

Matemático como Ptolomeu (século II) demonstrou, para tanto, ele utilizou a vigésima nona proposição do primeiro livro de Euclides, que é equivalente ao Quinto Postulado, e ainda, Proclo (século V) o desmentiu ao verificar que em uma das proposições estabelecidas era necessário assumir a validade do 5º postulado de Euclides. Os estudiosos Ibn-al-Haitham (aproximadamente 965-1039), Omar Khayyam (1050-1123), Nasiraddin-Tusi (1201-1274), Gerberto de Aurillac (940-1003), Gersónides (1288-1344), Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (26 de agosto de 1728 - 25 de setembro de 1777), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Franz Adolph Taurinus (1794 -1874) também analisaram o 5º postulado com o intuito de demonstrá-lo, porém, sem êxito, todavia, foi a partir dessas tentativas e estudos que as geometrias não euclidianas tiveram sua gênese, contudo, ainda sem uma estruturação bem definida [Silva Neto, 2020].(As demonstrações podem ser encontradas em [Agustini, 2022]).

Além do surgimento de geometrias devido a tentativa de demonstrar o 5º postulado de Euclides, nasceram também outras geometrias relacionadas a métricas diferentes da euclidiana, como a geometria do taxista, e a tentativa de fundamentar matematicamente as técnicas de desenho em perspectiva durante o período Renascentista no século XVII a chamada geometria projetiva, abordada, diga-se de passagem, na BNCC.

Vale destacar, nesse momento, as contribuições de Gauss que tentou demonstrar o Quinto Postulado de Euclides, a partir dos quatro primeiros, mas logo convenceu-se que essa demonstração não era possível. Mais tarde ele desenvolveu uma série de resultados da Geometria Hiperbólica, compartilhando essas descobertas, por meio de correspondências, com vários matemáticos da época ele foi o primeiro matemático a reconhecer a existência de uma geometria consistente diferente da euclidiana. Acredita-se que Gauss não publicou esses resultados por temer a rejeição de uma geometria diferente da clássica que contestava a filosofia de Kant, aceita pela igreja, que acreditava num universo como Euclides o definia [Vogado et al., 2020].

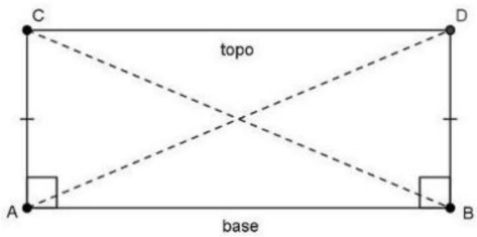
Ainda em [Vogado et al., 2020] encontramos as contribuições de János Bolyai que seguindo os passos de Gauss, também tentou demonstrar o Quinto Postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros. No entanto, ele logo percebeu a impossibilidade dessa demonstração. Em uma carta a seu pai, Bolyai revelou ter descoberto a ideia básica de um novo sistema geométrico, criando um mundo completamente novo a partir do nada. Sua hipótese baseava-se em uma definição de paralelismo mais geral do que a presente na Geometria de Euclides.

Em [Perez, 2015] constatamos que as contribuições de János Bolyai, no campo da geometria não euclidiana, foram publicadas na Hungria, em 1832, um trabalho independente no qual desenvolveu o que chamou de Ciência Absoluta do Espaço. O artigo veio a público como anexo no livro de seu pai, Farkas Bolyai (1775-1856), referido como Tentamen. O pai orgulhoso, que já havia dedicado muito de seu tempo na tentativa de provar o quinto postulado, enviou um exemplar a Gauss, seu antigo colega de faculdade, com quem mantinha uma correspondência ativa. Mas, para desapontamento do pai e desespero do filho, Gauss, apesar de aprovar o artigo, respondeu que elogiar o trabalho de János seria elogiar a si mesmo, pois já havia encontrado resultados semelhantes bem antes, sem ter publicado nada, segundo consta, a fim de não contrariar o estabelecido por Immanuel Kant (1724-1804) a respeito da natureza euclidiana do espaço físico. (Caso queira se aprofundar no pensamento de Kant recomendamos [Kant, 2016]).

Os dois parágrafos anteriores apresentam a jornada de János Bolyai na criação da geometria não euclidiana e as reações que se seguiram à sua publicação. No primeiro, é destacado o momento de brilhantismo de Bolyai, quando ele percebeu que não poderia provar o Quinto Postulado de Euclides usando apenas os quatro primeiros. Isso o levou a desenvolver um novo sistema geométrico, que ele descreveu como um "mundo completamente novo a partir do nada", baseado em uma noção mais geral de paralelismo. Já o segundo detalha a publicação desse trabalho em 1832, como um apêndice ao livro de seu pai. Apesar do orgulho e da esperança de seu pai, a reação de Gauss foi mista sua hesitação em publicar suas próprias descobertas pode ter sido influenciada pelas visões de Immanuel Kant sobre o espaço, que defendia a natureza euclidiana do espaço físico como uma verdade inerente. Esses parágrafos contrastam a inovação e a coragem intelectual de Bolyai com a cautela de Gauss, que, apesar de reconhecer a genialidade de Bolyai, optou por manter suas próprias descobertas em segredo, possivelmente devido ao clima filosófico e científico da época.

Os matemáticos supracitados tiveram alguma influência no estudo da geometria naõ euclidiana porém um matemático que se destacou nessa análise foi Saccheri, Giovanni Girolamo Saccheri um padre jesuíta e matemático italiano nascido em 5 de setembro de 1667 em Sanremo e falecido em 25 de outubro de 1733 em Milão. Ele foi um dos pioneiros da geometria não euclidiana que publicou diversos trabalhos, sendo o mais renomado "Euclides ab omni naevo vindicatus"(Euclides livre de qualquer falha), lançado em 1733 pouco antes de sua morte. Este trabalho é considerado o segundo na história da geometria não euclidiana, embora tenha permanecido obscuro até ser redescoberto no século XIX por Eugenio Beltrami, nele Saccheri tentou, pelo método da redução ao absurdo, demostrar o V postulado. Saccheri considerou um quadrilátero $ABCD$, conhecido hoje como quadrilátero de Saccheri, em que os ângulos adjacentes à base $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são retos e os dois lados $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes, conforme figura 6 abaixo.

Figura 6: Quadrilátero de Saccheri.



Fonte: [Perez, 2015].

Usando apenas os quatro primeiros postulados, ele provou que os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são congruentes, essa demonstração sai facilmente usando a semelhança de triângulos. A validade do quinto postulado é equivalente a assumir que estes ângulos são retos. Em geral, existem três hipóteses para esses dois ângulos, que são: (1) Retos, (2) Obtusos e (3) Agudos.

Saccheri ao considerar a negação da hipótese (1), investigou as implicações das outras duas hipóteses, com o objetivo de encontrar contradições. Dentre suas conclusões, merecem destaque as seguintes:

1. Se uma das hipóteses é verdadeira para um único quadrilátero do tipo considerado, então, é verdade para todos tais quadriláteros.

2. Nas hipóteses (1), (2) e (3) consideradas, a soma dos ângulos dos triângulos é, respectivamente, igual, maior e menor do que 180°.

3. Se existe um único triângulo para o qual a soma dos ângulos é igual a, maior do que, ou menor do que 180°, então, vale, respectivamente, a hipótese (1), (2) ou (3).

4. Duas retas coplanares ou tem uma perpendicular comum, ou se encontram em um ponto, ou são assintóticas[6].

Assumindo que a reta é infinita, como Euclides fez, Saccheri não teve problemas em rejeitar a hipótese (2). No entanto, ao investigar uma possível contradição na hipótese (3), ele acabou provando uma série de resultados extensos, alguns dos quais se

[6]Dizemos que uma reta é uma assíntota de uma curva quando um ponto ao mover-se ao longo da parte extrema da curva se aproxima desta reta. Em outras palavras, a reta assintótica e a curva ficam arbitrariamente próximas a medida que se afastam da origem do sistema de coordenadas [Moretti,].

tornaram teoremas clássicos da geometria não euclidiana. No final, Saccheri concluiu que essa hipótese implicava a existência de duas retas assintóticas que compartilhavam uma perpendicular comum em um ponto ideal no infinito, [Barbosa, 2002]. Parece que Saccheri não estava totalmente convencido de ter encontrado uma contradição, já que tentou uma segunda prova, que também não teve sucesso.

Se Saccheri tivesse suspeitado que não tinha chegado a uma contradição, simplesmente porque não havia uma contradição para ser encontrada, a descoberta da geometria não euclidiana teria ocorrido quase um século antes. Seu trabalho é admirável e, retirados o final e alguns pequenos defeitos, o resto é uma prova inequívoca de que Saccheri possuiu grande intuição geométrica e profundo conhecimento de Lógica. Ele foi, sem dúvida, o primeiro a ter um vislumbre das geometrias possiveis, mesmo sem saber disto.

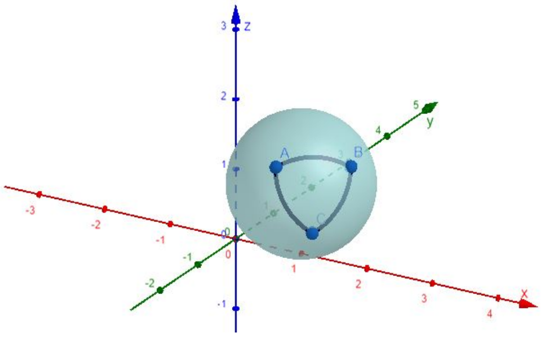
Esses estudos na área da geometria trazem à tona o que nos diz [Perez, 2015]:

> No caso de a superfície em questão apresentar curvatura, a negação do quinto postulado torna-se um axioma que se junta aos quatro primeiros para estabelecer geometrias independentes e consistentes conhecidas como Geometrias Não-Euclidianas. Da independência do quinto postulado em relação ao outros quatro decorre a impossibilidade de prová-lo como um teorema, resultando na construção destas geometrias. Negar o quinto postulado de Euclides, estabelecendo que por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma paralela dá surgimento à Geometria Elíptica, da qual a Geometria Esférica é um caso particular. Se, por outro lado, for estabelecido que por tal ponto passam pelo menos duas paralelas, o que surge é a Geometria Hiperbólica.

Ao negar o quinto postulado de Euclides, que afirma que por um ponto fora de uma reta passa apenas uma paralela, abrimos espaço para a exploração de geometrias alternativas e mais "A tentativa de demonstração desse postulado teve como consequência a teoria de que a validade do postulado dependia da superfície trabalhada" [Silva Neto, 2020]. Esse ato de negação não apenas cria a base para as Geometrias Não-Euclidianas, mas também revela a independência e consistência dessas geometrias em relação aos quatro postulados restantes. A negação do quinto postulado não pode ser provada como um teorema dentro do sistema euclidiano, levando à construção de geometrias que desafiam as noções tradicionais de paralelismo e curvatura evidenciando um mundo alternativo ao euclidiano.

A Geometria Elíptica surge quando negamos o quinto postulado e estabelecemos que por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma paralela. Este é um princípio fundamental que caracteriza a curvatura positiva das superfícies em questão, veja na figura 7 abaixo. A Geometria Esférica, por sua vez, é um caso particular da Geometria Elíptica, aplicável a superfícies esféricas onde as linhas são definidas como grandes círculos, exemplo da aplicabilidade desse tema encontramos no estudo de Geografia, especificamente na parte de Cartografia.

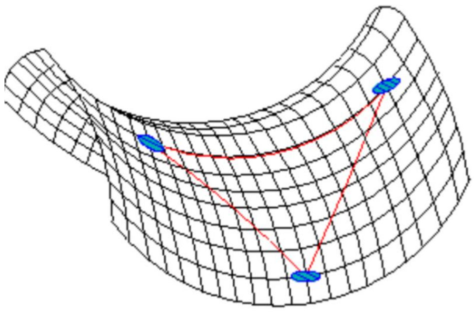
Figura 7: Curvatura Positiva.



Fonte: Próprio Autor.

Por outro lado, ao estabelecer que por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas paralelas, introduzimos a Geometria Hiperbólica, [Barbosa, 2002]. Este tipo de geometria se destaca pela curvatura negativa das superfícies consideradas, veja figura 8 abaixo. A negação do quinto postulado não apenas abre caminho para a exploração dessas geometrias, mas também ressalta a diversidade e riqueza de possibilidades no estudo da geometria além dos limites da abordagem euclidiana clássica.

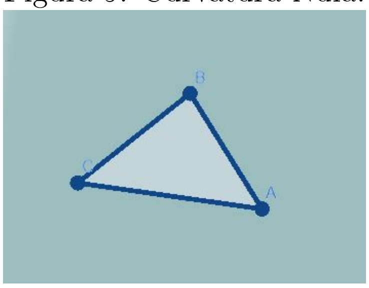
Figura 8: Curvatura Negativa.



Fonte: Próprio Autor.

Vale salientar que no universo de Euclides a curvatura é nula, ou seja, é um plano. Veja Figura 9 abaixo.

Figura 9: Curvatura Nula.



Fonte: Próprio Autor.

No quadro abaixo encontra-se as principais diferenças entre os temas abordados na geometria euclidiana e na não euclidiana no que diz respeito a geometria hiperbólica e a elíptica, vale ressaltar que o leitor poderá ter uma visão de outros tipos de geometria em [Silva Neto, 2020].

CONTEÚDO MATEMÁTICA	**GEOMETRIA EUCLIDIANA**	**GEOMETRIA HIPERBÓLICA**	**GEOMETRIA ELÍPTICA**
Duas retas distintas intersectam.	Um ponto.	Um ponto.	Em dois pontos antípodos.
Dada uma reta L e um ponto P exterior a L, existe(m).	Uma reta e só uma que passa por P e é paralela a L.	Pelo menos duas retas que passam por P e é paralela a L.	Não há reta que passa por P e é paralela a L.
Uma Reta.	É dividida em duas por um ponto.	É dividida em duas por um ponto.	Não é dividida em duas por um ponto.
As Retas Paralelas.	São equidistantes.	Nunca são equidistantes.	Não existem.
Se uma reta intercede uma de duas paralelas.	Intercede a outra.	Pode ou não interceder a outra.	Como não há paralelas, isto não ocorre.
Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira.	São paralelas.	São paralelas.	Interceptam-se.
A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é.	Igual a 180°.	Menor que 180°.	Maior que 180°.
A área de um triângulo é.	Independente da soma dos seus ângulos.	Proporcional ao defeito da soma de seus ângulos.	Proporcional ao excesso da soma de seus ângulos.
Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são;	Semelhantes.	Congruentes.	Congruentes.
Soma dos ângulos internos de quadriláteros.	Igual a 360°.	Menor que 360°.	Maior que 360°.

Tabela 4: Tabela elaborada pelo autor baseada em [Silva Neto, 2020] .

Na geometria euclidiana, os postulados de Euclides são tomados como base, incluindo a existência de uma única reta paralela a uma reta dada por um ponto externo e a soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180°graus. Em contraste, a geometria hiperbólica, desenvolvida por Lobachevsky e Bolyai, desafia esses postulados ao admitir a existência de várias retas paralelas a uma dada, bem como ângulos internos de um triângulo cuja soma é menor que 180°graus.

Por sua vez, a geometria elíptica, estudada por Gauss e Riemann, apresenta características fascinantes, como a ausência de retas paralelas e a soma dos ângulos internos de um triângulo maior que 180 °graus. Essas diferenças fundamentais entre as geometrias euclidiana, hiperbólica e elíptica levaram a avanços significativos na compreensão da estrutura do espaço e influenciaram diversos campos da matemática e da física moderna como podemos ver em [Eduardo, 2013].

Portanto, ao considerar as diferenças elencadas em 4 das geometrias, é essencial reconhecer a importância desses trabalhos publicados e suas contribuições para a compreensão das diferentes formas de organização do espaço e das propriedades geométricas que delas decorrem.

Anteriormente mostrou-se que em Elementos de Euclides, o autor propõe uma série de axiomas e postulados, cerca de 2200 anos depois no final do século XIX, a tão famosa obra euclidiana não estava resistindo ao rigor que a lógica exigia para os fundamentos da geometria. Muitas proposições de geometria euclidiana plana faziam uso de resultados que não haviam sido demonstrados anteriormente e que não constavam do rol de axiomas, salientando que em [Agustini, 2022] encontra-se o seguinte:

> Um sistema axiomático para uma teoria deve ter necessariamente duas características: ser coerente e ser suficiente. Coerente significa que não se pode provar uma proposição e sua negação a partir do sistema de axiomas adotado. Suficiente significa que deve ser possível decidir sobre a veracidade ou não de uma proposição da teoria a partir de seu sistema de axiomas. Ainda há um aspecto desejável (mas não obrigatório) em um sistema axiomático: que um axioma não seja consequência dos demais, ou seja, que ele seja o mais enxuto possível.

Logo, fazia-se necessário uma reformulação dos axiomas de Euclides. Uma proposta, ainda no século XIX, bem aceita pela comunidade matemática foi a do matemático e lógico alemão David Hilbert, nascido em 23 de janeiro de 1862 em Konigsberg na Prússia (atualmente, uma região desconectada da Rússia ao lado da Alemanha) e faleceu em 14 de fevereiro de 1943 em Gottingen na Alemanha, publicada em seu célebre trabalho "Grundlagen der Geometrie" (Fundamentos de Geometria), de 1899, [Agustini, 2022]. Neste trabalho Hilbert coloca a geometria euclidiana, tanto plana quanto espacial, sobre bases sólidas por meio da substituição dos cinco Postulados de Euclides por cinco grupos de axiomas, os quais chamou de Axiomas de Incidência (7 axiomas), Axiomas de Ordem (4 axiomas), Axiomas de Congruência (6 axiomas), Axiomas de Continuidade (2 axiomas) e o Axioma das Paralelas, a saber:

Axiomas de Incidência (Noção de "está em")

1. Dois pontos distintos determinam uma reta.
2. A reta que passa por dois pontos distintos é única.
3. Três pontos não colineares determinam um plano.
4. O plano que passa por três pontos não colineares é único.
5. Uma reta que possui dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.
6. A intersecção de dois planos distintos que têm um ponto em comum possui necessariamente outro ponto em comum.
7. Em uma reta existem pelo menos dois pontos. Em um plano existem pelo menos três pontos não colineares, no espaço existem pelo menos quatro pontos não coplanares.

Axiomas de Ordem (Noção de "está entre")

1. Se o ponto B está entre os pontos distintos A e C, então B também está entre C e A, e são três pontos distintos colineares.
2. Se A e C são dois pontos distintos de uma reta, então existe pelo menos um ponto B entre A e C e existe pelo menos um ponto D tal que C está entre A e D.
3. De quaisquer três pontos distintos de uma reta, sempre há um, e somente um, que está entre os outros dois.
4. (Axioma de Pasch) Sejam A, B e C três pontos não colineares e r uma reta no plano determinado por A, B e C que não passa por nenhum desses pontos, mas que intersecta o segmento $\overline{AC}$, então r intersecta o segmento $\overline{BC}$ ou o segmento $\overline{AB}$.

Axiomas de Congruência (Noção de igualdade entre segmentos e ângulos)

1. Se A e B são dois pontos distintos e A' é a origem da semirreta s, então existe um único ponto B' distinto de A' em s tal que o segmento $\overline{AB}$ é congruente ao segmento $\overline{A'B'}$. Além disso, todo segmento é congruente a si mesmo.
2. Se o segmento $\overline{AB}$ é congruente ao segmento $\overline{CD}$ e ao segmento $\overline{EF}$, então o segmento $\overline{CD}$ é congruente ao segmento $\overline{EF}$, ou seja, goza da transitividade.

3. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ segmentos em uma reta r com apenas B em comum. Além disso, seja, $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ segmentos em uma reta r' com apenas B' em comum. Se o segmento $\overline{AB}$ for congruente ao segmento $\overline{A'B'}$ e o segmento $\overline{BC}$ for congruente ao segmento $\overline{B'C'}$, então o segmento $\overline{AC}$ é congruente ao segmento $\overline{A'C'}$.

4. Sejam um semiplano σ e um ângulo $\hat{A}$. Tomemos uma semirreta s com origem em B contida na reta que determina o semiplano σ. Então, existe apenas um ângulo $\hat{B}$ com lado em s contido no semiplano σ e congruente ao ângulo $\hat{A}$. Além disso, todo ângulo é congruente a si mesmo.

5. Se o ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{B}$ e ao ângulo $\hat{C}$, então o ângulo $\hat{B}$ é congruente ao ângulo $\hat{C}$, ou seja, goza da propriedade transitiva.

6. Dados dois triângulos ΔABC e ΔEFG, se $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ é congruente a $\overline{EG}$ e $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{EB}$, então ΔABC é congruente ao ΔEFG. (Caso LAL "lado, ângulo, lado" de congruência).

Axiomas de Continuidade (Para medição de segmentos e ângulos)

1. (Axioma de Arquimedes) Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos. Então, existe um número finito e distinto de pontos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ na reta que passa por A e B tal que os segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... , $\overline{A_{n-1}A_n}$, são congruentes a $\overline{CD}$ e o ponto B está entre A e A_n.

2. (Axioma de Dedekind) Suponha que o conjunto de todos os pontos de uma reta r está na união dos conjuntos não vazios C_1 e C_2. Suponha ainda que nenhum ponto de C_1 está entre dois pontos de C_2 e vice-versa. Então, existe um único ponto O de C_1 ou C_2 entre quaisquer $P_1 \in C_1$ e $P_2 \in C_2$ com O diferente de P_1 ou P_2.

Axioma das Paralelas

1. No plano, por um ponto não pertencente a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta que não intersecta a reta dada. (Formulação equivalente ao V postulado de Euclides de John Playfair (1748-1819), físico e matemático escocês) [Agustini, 2022].

Na obra original de Hilbert há 21 axiomas, mas o vigésimo primeiro axioma é, na verdade, consequência dos demais axiomas. Além de propor um novo sistema de axiomas, ao contrário de Euclides, Hilbert considerou que ponto, reta, plano e espaço são conceitos primitivos (ou noções primitivas), objetos não passíveis de serem definidos. Junto aos conceitos primitivos, Hilbert também considerou três relações primitivas (igualmente não passíveis de definição) que são as relações "estar em", "estar entre" e "ser congruente a". Com o trabalho de Hilbert, encerra-se talvez o mais longo problema em aberto na

Matemática, o "Problema das Paralelas" que, ironicamente, foi introduzido pelo próprio Euclides e resistiu por cerca de 2200 anos.

Embora Hilbert tenha formulado seus axiomas com base na geometria euclidiana clássica, sua abordagem axiomática também foi fundamental para a compreensão e a formalização das geometrias não euclidianas. Por exemplo, ao permitir a exploração de sistemas geométricos alternativos que não seguem os postulados de Euclides, os axiomas de Hilbert forneceram uma estrutura conceitual para o desenvolvimento da geometria hiperbólica e elíptica por matemáticos como Lobachevsky, Bolyai, Gauss e Riemann.

Assim, os axiomas de Hilbert não apenas estabeleceram uma base sólida para a geometria plana tradicional, mas também desempenharam um papel crucial na expansão do campo para incluir geometrias não euclidianas, enriquecendo nossa compreensão dos espaços geométricos e suas propriedades fundamentais.

Seguimos nosso trabalho mostrando alguns conceitos básicos da geometria não euclidiana que poderiam ser abordados pelo professor de matemática no ensino médio para despertar o espírito investigativo dos estudantes, bem como aguçar a percepção deles para esse tema, coadunando com as premissas estabelecidas na BNCC.

5 Geometria Não Euclidiana: Conceitos Básicos e Aplicações

A geometria não euclidiana, um campo fascinante que desafia as intuições básicas da geometria euclidiana clássica, tem sido objeto de estudo e debate desde os tempos antigos até os dias atuais. Neste capítulo, vamos mostrar alguns conceitos básicos e aplicações deste universo matemático não convencional, onde as regras familiares da geometria euclidiana são desafiadas e novos conceitos emergem, basearemos nossos estudos em [Perez, 2015] e sugerimos ampliar seus horizontes em [de Jesus Dueli,], [Alves, 2009], [Andrade et al., 2011] e claro dentre outros autores que já foram citados e aqueles que aparecerão ao longo desse trabalho.

O objetivo deste capítulo é efetuar demonstrações matemáticas que ilustram as propriedades singulares da geometria não euclidiana. Ao longo deste processo, exploramos as diferenças fundamentais entre a geometria euclidiana e suas contrapartes não euclidianas, como a geometria hiperbólica e a geometria elíptica, que já foi visto no Quadro [4] onde mostra as principais diferenças das geometrias supra citadas.

Ao final deste tópico, espera-se que algumas das fascinantes peculiaridades da geometria não euclidiana tenham sido demonstradas e que aplicações desse tema tenham sido sugeridas. Além disso, espera-se que tenham sido fornecidos elementos para uma compreensão aprofundada e abrangente deste ramo matemático desafiador e estimulante.

Sabe-se que na geometria euclidiana a soma dos ângulos internos de todo e qualquer triângulo é 180°, já na hiperbólica a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor do que 180°, segue a demonstração desse teorema.

Teorema 5.1. *Na Geometria Hiperbólica, a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor do que 180°.*

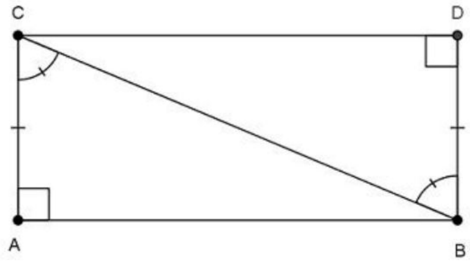
Demonstração 5.1. *Para provar este resultado, referindo-se à Figura 10, toma-se o caso particular de o triângulo em questão ser retângulo. Assim, considera-se o triângulo ΔABC, reto $\hat{A}$. Se fosse assumida a suposição de que a soma dos ângulos internos é igual a 180°, contrariando aquilo que se quer provar, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ seriam complementares. Usando-se o axioma da separação de Hilbert que em [Perez, 2015] é o S-4* [7]*, define-se o ponto D, no lado oposto a A, em relação ao segmento $\overline{BC}$, de modo que se tenha $A\hat{C}B \cong C\hat{B}D$ e $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. Isto implica em que o ângulo $A\hat{B}D$ seja também reto, pois é formado por dois ângulos complementares. Se isso é válido, $\Delta ACB \cong \Delta DBC$, pelo caso LAL - Lado, Ângulo, Lado; casos de congruência de triângulos você encontra em [Bicudo, 2009]. Então, o quadrilátero ABCD é um quadrilátero de Saccheri e se está assumindo a hipótese*

[7] Para toda reta l e para quaisquer três pontos A,B e C, não pertencentes a l, tem-se: 1) Se A e B estão do mesmo lado de l e B e C estão do mesmo lado de l então A e C estão do mesmo lado de l; 2) Se A e B estão em lados opostos de l e B e C estão em lados opostos de l, então A e C estão do mesmo lado de l [Perez, 2015].

do ângulo agudo. Mas, isto é impossível já que o ângulo $\hat{D}$ é reto, ou seja, não há como a soma dos ângulos do ΔABC ser igual 180°, restando a única possibilidade de somarem menos do que isso, pois a hipótese do ângulo obtuso já havia sido descartada por Saccheri na Geometria Neutra [Perez, 2015].

□

Figura 10: Triângulo Retângulo.

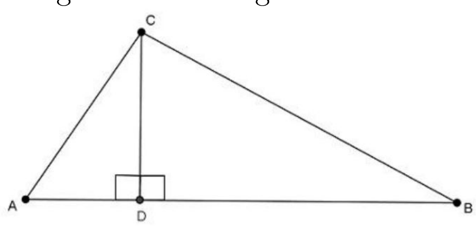


Fonte: [Perez, 2015]

Vale ressaltar que os axiomas de separação de Hilbert, por exemplo S-4 citado acima, somente formalizou o que Euclides deixou nas entrelinhas que foi a ideia de lados e de está entre, quando se trata de pontos, retas e planos.

Para generalizar o resultado para qualquer triângulo, conforme mostrado na Figura 11 a seguir, consideramos um triângulo ΔABC arbitrário. Ao traçar a altura em relação ao lado mais longo desse triângulo, isto é, o lado $\overline{AB}$, e ao definir o ponto D como a interseção dessa altura com o lado $\overline{AB}$, podemos decompor o triângulo em dois triângulos retângulos. Como já foi demonstrado anteriormente, a soma dos ângulos internos desses dois triângulos retângulos é menor que 180°, logo, $90° + \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + 90° < 360°$. Portanto, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 180°$.

Figura 11: Triângulo Genérico.



Fonte: [Perez, 2015].

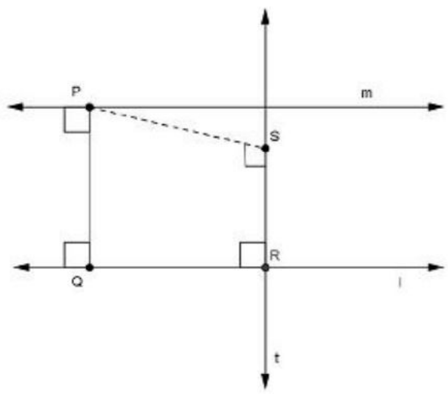
Uma consequência interessante desse teorema da Geometria Hiperbólica é que todos os quadriláteros convexos têm soma de ângulos menor do que 360°, como foi visto anteriormente ao falarmos dos quadriláteros de Saccheri. Isto implica na inexistência de retângulos na Geometria Hiperbólica. Desse fato, veremos abaixo mais um teorema que nega o quinto postulado de Euclides e fundamenta a geometria não euclidiana.

Teorema 5.2. *Na Geometria Hiperbólica, em que retângulos não existem, para toda reta l e para todo ponto P, não pertencente a l, existem pelo menos duas paralelas distintas a l que passam por P. Além disso, existem infinitas paralelas a l passando por P.*

Demonstração 5.2. *Para provar este importante teorema, referindo-se à Figura 12, deve-se baixar a perpendicular $\overline{PQ}$ à reta l e depois definir a reta m perpendicular a $\overline{PQ}$ em P. Seja R outro ponto qualquer em l. Define-se a reta t, perpendicular a l por R. Define-se também a perpendicular à reta t, que passa por P. O ponto S é a intersecção desta perpendicular com t. Então, $\overleftrightarrow{PS}$ e m são paralelas a l, pois ambas fazem ângulos alternos internos iguais (retos) com perpendiculares de l. Se for assumido que m e $\overleftrightarrow{PS}$ são a mesma reta, e portanto S pertence a m, isso significaria ser $PQRS$ um retângulo, o que contradiz a hipótese de esta ser a Geometria Hiperbólica já que aqui retângulos não existem. Assim, existem duas paralelas a l passando por P. Ao variar o ponto R, obtêm-se infinitas paralelas a l passando por P.*

□

Figura 12: Infinitas Paralelas passando por um ponto.



Fonte: [Perez, 2015].

Uma observação importante nesse caso é que se deve pensar em $\overline{RS}$ como o segmento que liga os pontos médios do topo e da base do quadrilátero de Saccheri que, no caso desta Figura 12, aparece cortado ao meio. Naturalmente, o ângulo entre $\overline{PS}$ e $\overline{PQ}$ é agudo.

Na Geometria Hiperbólica, um dos teoremas fundamentais que governam as relações entre triângulos é o seguinte: "Se dois triângulos são semelhantes, então são congruentes."Esta afirmação é de grande importância na compreensão das propriedades dos triângulos nesse contexto geométrico não euclidiano.

A semelhança de triângulos na geometria hiperbólica é definida da mesma forma que na geometria euclidiana, ou seja, se dois triângulos têm ângulos correspondentes iguais e seus lados correspondentes estão em proporção, então eles são considerados semelhantes. No entanto, o teorema afirma que, ao contrário da geometria euclidiana, onde triângulos semelhantes podem ter tamanhos diferentes, na geometria hiperbólica, se dois triângulos são semelhantes, então são necessariamente congruentes, ou seja, têm todos os lados e ângulos iguais.

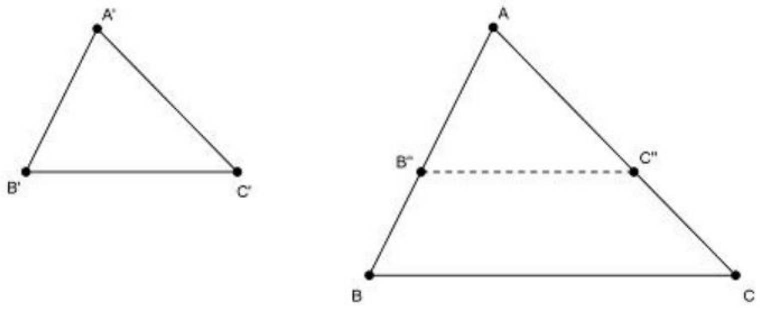
Este teorema tem implicações significativas na compreensão da estrutura e das propriedades dos triângulos na Geometria Hiperbólica, destacando a natureza intrincada e peculiar deste espaço geométrico não euclidiano, vejamos abaixo sua demonstração.

Teorema 5.3. *Na Geometria Hiperbólica, se dois triângulos são semelhantes, então, são congruentes.*

Demonstração 5.3. *Para a prova deste teorema, referindo-se à Figura 13, assume-se o contrário, ou seja, que* ΔABC *e* $\Delta A'B'C'$ *são semelhantes, mas não congruentes, o que significa que seus ângulos correspondentes são congruentes, mas seus lados correspondentes, não. Sem perda de generalidade, supõe-se que* $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ *e* $\overline{AC} > \overline{A'C'}$*. Assim, pode-se encontrar o ponto* B'' *em* $\overline{AB}$ *e o ponto* C'' *em* $\overline{AC}$ *de modo que* $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$ *e* $\overline{AC''} \cong \overline{A'C'}$*. Então, pelo caso de semelhança de triângulos LAL,* $\Delta A'B'C' \cong \Delta\ AB''C''$*. Então,* $A\hat{B}''C'' \cong \hat{B}'$ *e* $A\hat{C}''B'' \cong \hat{C}'$*. Mas, por definição, como* $\hat{B} \cong \hat{B}'$ *e* $\hat{C} \cong \hat{C}'$*, logo* $A\hat{B}''C'' \cong \hat{B}$ *e* $A\hat{C}''B'' \cong \hat{C}$*. Assim, os segmentos* $\overline{BC}$ *e* $\overline{B''C''}$ *são paralelos e o quadrilátero* $BB''C''C$ *é convexo e tem a soma de seus ângulos exatamente igual a 360°, o que contradiz o teorema anterior. Portanto, triângulos semelhantes são congruentes na Geometria Hiperbólica. O que significa que não se pode, nessa geometria, ampliar ou reduzir um polígono sem que ele sofra distorção, o que é fácil ver até pela natureza do espaço que está sendo representado, espaço com curvatura negativa.*

□

Figura 13: Triângulos Semelhantes e Congruentes.



Fonte: [Perez, 2015].

Esses teoremas ilustram importantes características do espaço geométrico em que está inserida a geometria hiperbólica, uma geometria não Euclidiana que merece destaque, e claro poderia ser abordada no ensino médio, paralelo ao estudo das propriedades da geometria euclidiana, até para mostrar essas diferenças e para aguçar o espírito investigativo dos nossos jovens estudantes.

A geometria hiperbólica possui aplicações que abrangem diversas disciplinas acadêmicas e áreas da ciência e tecnologia. Podemos destacar o papel fundamental da geometria hiperbólica em diversos contextos, como modelagem de espaços não euclidianos, teoria da relatividade e cosmologia, computação gráfica e visualização de dados complexos, além de sua relevância em estudos de biologia computacional e modelagem de redes complexas, para mais detalhes ver [Bertrand, 2020], [Sousa Júnior, 2023], [Souza et al., 2023], vale destacar as aplicações encontradas no campo do design, em [Costa, 2016], o leitor poderá se deparar com um estudo aprofundado de aplicações pertinentes a essa área.

Ao explorar essas aplicações, fica evidente que a geometria hiperbólica não apenas fornece ferramentas matemáticas sofisticadas, mas também desempenha um papel crucial na compreensão e solução de problemas complexos em diversas áreas do conhecimento. Esta diversidade de aplicações destaca a importância e as características da geometria hiperbólica como um campo de estudo fundamental e relevante para o avanço da ciência e da tecnologia moderna. Para aguçar a percepção do leitor sobre esse espaço geométrico tão fascinante, veja o exemplo da Figura 14.

Figura 14: Passadiço Pedonal em Hiperboloide de Revolução.

Fonte: [Costa, 2016].

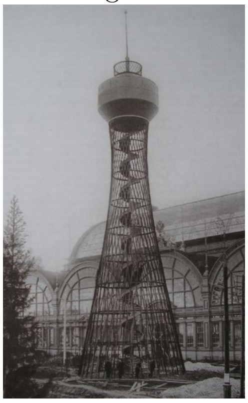
O exemplo mencionado, Figura 14, refere-se um passadiço pedonal com proteção em hiperboloide de revolução[8], localizado na Corporation Street em Manchester. Esse passadiço conecta o prédio do Marks e Spencer ao Manchester Arndale e foi projetado pelo atelier Hodder+Partners, sendo concluído em 1999. Nota-se que os elementos de ligação em arcos circulares perpendiculares ao eixo do hiperboloide poderiam ser dispensados, uma vez que as fixações destes são internas às barras estruturais do hiperboloide, correspondendo às geratrizes. A presença desses elementos circulares provavelmente se deve a exigências de segurança para os pedestres.

Vale salientar que o hiperboloide de revolução é hoje uma superfície amplamente utilizada em estruturas que exijam grande estabilidade e robustez, como as torres de

[8] Um hiperboloide de revolução é uma superfície tridimensional gerada pela rotação de uma das folhas de uma hipérbole em torno de seu eixo principal. Essa superfície possui duas partes distintas, conhecidas como folhas, que se afastam do eixo de rotação em direções opostas, para um aprofundamento recomendamos [Umehara, 2017].

refrigeração de centrais térmicas e nucleares de produção de energia elétrica. A primeira torre em hiperboloide de revolução foi construída no final do século XIX em Polibino, na Rússia, e foi projetada como torre de suporte de depósito de água pelo engenheiro russo Vladimir Shukhov (1853–1939), veja a Figura 15. Em sequência Shukov desenvolveu projetos para diversas estruturas com diferentes finalidades como, por exemplo, torres de telecomunicações [Costa, 2016].

Figura 15: Torre de Água em Nizhny Novgorod.



Fonte: [Sousa Júnior, 2023].

Outro exemplo de aplicação de elementos presentes na geometria hiperbólica é a Imagem 16, que corresponde a uma instalação hoteleira nas Ilhas Maurícias, com projeto do arquiteto Norman Foster, com cobertura de estrutura de madeira com sequência múltipla de paraboloides hiperbólicos.

Figura 16: Cobertura em Paraboloides Hiperbólicos.

Fonte: [Costa, 2016].

Outro ramo da geometria não euclidiana é a geometria esférica, que se dedica ao estudo das propriedades geométricas de uma esfera. Ao contrário da geometria euclidiana tradicional, que se baseia em um espaço plano, a geometria esférica lida com um espaço curvo, representado pela superfície de uma esfera. Essa perspectiva geométrica única tem desdobramentos significativos em diversas áreas do conhecimento, desde a astronomia e a navegação até a física teórica e a modelagem geoespacial, referenciamos aqui autores como [de Abreu, 2015], [Santos et al., 2022], [Pereira Jr, 2011]. Ela é considerada um modelo mais simples da geometria elíptica, um conceito que foi profundamente explorado pelo matemático Bernhard Riemann.

Riemann, em seus estudos sobre geometria diferencial e análise matemática, introduziu os postulados que descrevem as propriedades fundamentais de superfícies curvas como a esfera. Seus postulados, que influenciaram fortemente o desenvolvimento da geometria não euclidiana, foram essenciais para a compreensão das geometrias elíptica, hiperbólica e esférica. As contribuições de Riemann abriram caminho para a investigação profunda da geometria em espaços curvos, levando a aplicações práticas significativas em áreas tão diversas quanto a cosmologia e a engenharia geoespacial [Eduardo, 2013].

Ao explorarmos a geometria esférica, é importante lembrar o legado de Riemann e seu impacto duradouro no estudo das geometrias não euclidianas, enriquecendo nosso entendimento do espaço e das formas em contextos não tradicionais, vejamos a seguir uma introdução aos postulados de Riemann e o modelo esférico para Geometria Elíptica.

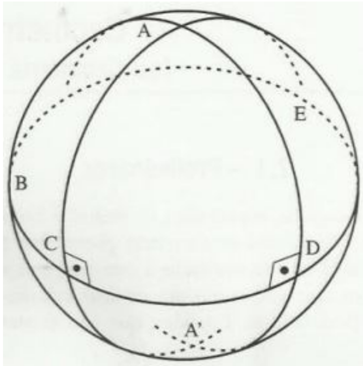
Numa superfície esférica dada por $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, (Lembrando que o professor de matemática poderia mostrar esse dentre outros lugares geométricos usando aplicativos gratuitos como por exemplo o Geogebra), temos que "Retas" são interseções com planos que passam pela origem, além disso, abandona-se a noção de "estar entre" e ela não carrega mais o sentido de infinita como na geometria euclidiana, e passa a ser ilimitada. As retas são os círculos máximos ou geodésicas da superfície esférica. Vejamos o que postulou Riemann sobre a geometria esférica.

1. Dois pontos distintos determinam ao menos uma geodésica (círculos máximos).
2. As geodésicas são de comprimento finito, porém ilimitadas.
3. Não existem geodésicas paralelas, isto é, dois círculos máximos se intersectam em ao menos um ponto.

Para a geometria riemanniana, assim como na geometria hiperbólica, a melhor maneira de captar a lógica dos sistemas geométricos de geometrias curvas é através de modelos de representação euclidianos. O modelo ideal para geometria riemanniana é a superfície de uma esfera [Coutinho, 2001]. É claro que esse modelo alude apenas um caso especial dessa geometria, em que a superfície em consideração tem uma curvatura igual em todos os pontos (constante). Veja como é sua representação na Figura 17.

Conforme a Figura 17, os círculos máximos, que são quando os planos que interceptam a esfera passam pelo seu centro, vale ressaltar que o centro do círculo máximo coincide com o centro da esfera correspondente, além disso a reta é a circunferência desse círculo e quaisquer outros círculos serão considerados menores, além disso, as "retas"ACA' e ADA', perpendiculares à "reta" BCDE, intersectam-se nos pontos antípodas A e A', que

Figura 17: Modelo de Geometria Esférica.



Fonte: [Eduardo, 2013].

são a extremidade de um mesmo diâmetro da esfera. A geodésica perpendicular às geodésicas ACA' e ADA' é a polar comum dos pontos A e A', e estes dois pontos são os polos da geodésica BCDE. A distância de A e A' a qualquer ponto da geodésica BCDE é constante. Podemos notar (Figura 17) que duas geodésicas secantes como as geodésicas ACA' e ADA' têm em comum uma única geodésica perpendicular BCDE.

É importante destacar que nesta geometria, quando temos dois pontos distintos A e B sobre uma circunferência máxima, a distância entre esses pontos é definida como a menor porção da circunferência que os contém. Embora seja possível considerar outros círculos passando por A e B, a distância entre eles é sempre medida ao longo da única circunferência máxima determinada por A e B, isso explica por que a menor distância percorrida pelo avião no globo terrestre é um arco e não uma reta, como imaginamos influenciados pelos pensamentos advindos do espaço euclidiano, um exemplo disso encontramos em [Carvalho, 2014] que diz: Para compreender melhor a definição de distância na superfície esférica, citamos um exemplo de uma trajetória de um voo internacional: Uma aeronave que parte de Salvador-Brasil com destino a Lisboa-Portugal, não segue uma trajetória reta, em azul. Segue porém, a trajetória em vermelho, correspondente a um arco de círculo máximo entre as duas cidades (ver Figura 18), sendo esta, a ideia de segmento na superfície esférica.

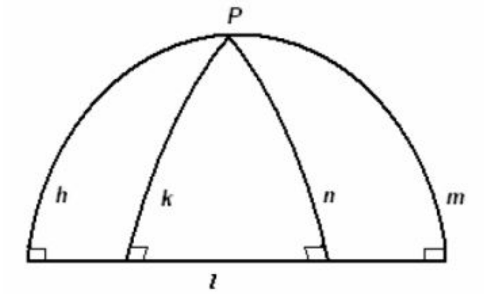
Um caso particular da geometria esférica pode ser visto na Figura 19, onde todas as circunferências máximas perpendiculares a uma dada geodésica se interceptam em um ponto. De acordo com a Figura 19, na superfície esférica, as geodésicas h, k, n e m, perpendiculares a uma mesma geodésica l se interceptam no ponto P, o que diferencia no caso da geometria euclidiana onde estas retas seriam paralelas entre si, logo não teriam pontos em comum.

Uma aplicação dessa geometria é na Geografia, como já falado em linhas anteriores, na cartografia por exemplo, em que o papel dela é fornecer ferramentas matemáticas essenciais para a representação e análise de fenômenos geográficos em escalas globais. Ao considerarmos a Terra como uma esfera, a geometria esférica oferece um arcabouço teórico robusto para entendermos as relações espaciais, distâncias, áreas e ângulos em um

Figura 18: Trajeto Salvador - Lisboa.

Fonte: [Carvalho, 2014]

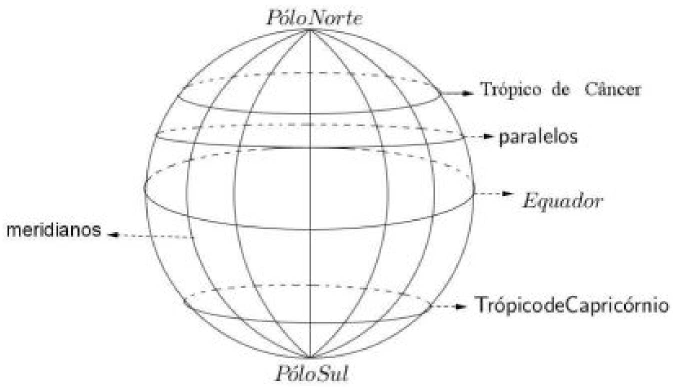
Figura 19: Geodésicas Paralelas intersectando-se no ponto P.



Fonte: [Eduardo, 2013].

contexto tridimensional curvo, aqui vale lembrar a presença da interdisciplinaridade onde o currículo escolar poderia ser articulado para um trabalho que vise o desenvolvimento intelectual dos estudantes tanta na área da matemática quanto na geografia. Observe na Figura 20 como esse lugar geométrico, "esfera", é representado na Geografia, bem como os termos já usados anteriormente são referidos aqui.

Figura 20: Elementos do Globo Terrestre.

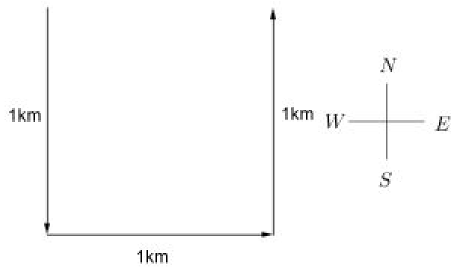


Fonte: [Carvalho, 2014].

Daqui, para aguçar o pensamento criativo dos estudantes, sugerimos um problema de [Carvalho, 2014] que estimula o leitor através de um desafio a pensar no planeta Terra não como uma superfície "plana"visível aos nossos olhos, mas com curvatura, como realmente é: Um urso parte do ponto P e percorre um quilômetro no sentido sul. Em seguida, muda de rumo e anda um quilômetro no sentido leste. Finalmente, muda outra vez de rumo, percorre um quilômetro no sentido norte e chega exatamente ao ponto de partida. Qual é a cor do urso?

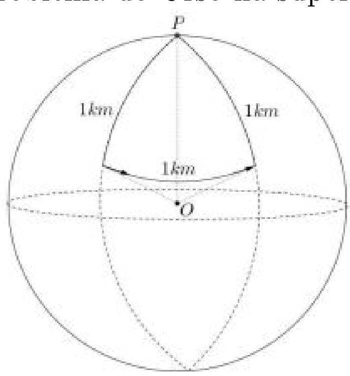
Para solucionar partiremos da seguinte premissa: Tomando duas superfícies, plana e esférica, para nelas esboçar a solução geométrica do problema vamos mostrar duas situações: No caso da plana (Figura 21), é possível perceber que sempre ficarão duas retas paralelas, enquanto na esférica (Figura 22), os círculos máximos irão encontrar-se nos polos. Este problema, além de fazer conexões com a geografia, sobre pontos cardeais (Norte, Sul, Oeste e Leste), procura refletir sobre a nossa percepção a respeito de superfícies planas e esféricas. Gerando assim um debate sobre a representação do Globo Terrestre e do plano euclidiano. A solução de tal situação só é possível na geometria esférica. Onde o urso parte do polo norte e a cor dele é branca [Carvalho, 2014].

Figura 21: Problema do Urso na superfície Plana.



Fonte: [Carvalho, 2014].

Figura 22: Problema do Urso na superfície Esférica.



Fonte: [Carvalho, 2014].

Uma aplicação evidente da geometria esférica na geografia, é a projeção cartográfica, que são conceitos geométricos esféricos para representar a superfície curva da Terra em mapas planos, de maneira fiel e precisa, aqui entramos em um campo da matemática, pertencente a geometria não euclidiana, chamado de Geometria Projetiva. Em [Silva Neto, 2020] diz-se que:

> Geometria projetiva difere da euclidiana quando afirma que as retas paralelas se encontram em um ponto no infinito, esse ponto foi chamado por Desargues por ponto de fuga e podemos concluir que na geometria projetiva não existe o conceito de paralelismo, ou seja, é uma negação ao 5º postulado. Essa geometria expõe a forma de como nossos olhos enxergam a realidade, porém numa superfície plana. A exposição dá-se quando um objeto é desenhado cada vez menor a medida que a distância aumenta.

Ao mencionar que a geometria projetiva expõe a forma como nossos olhos enxergam a realidade em uma superfície plana, o trecho destaca a relação entre matemática e percepção visual. Essa conexão é fundamental não apenas para a compreensão da geometria, mas também para áreas como arte, arquitetura e design, onde a perspectiva e a representação visual desempenham um papel central, ou seja, mais uma área que pode ser abordado pelos estudantes para a compreensão desse universo não euclidiano.

A aplicação da geometria projetiva nas artes e na computação gráfica é essencial para criar representações realistas em superfícies planas, como telas e papel. Esta geometria permite que os artistas e desenvolvedores de gráficos digitais simulem a percepção tridimensional do espaço em uma dimensão bidimensional, o que é crucial para a criação de imagens que parecem realistas ao observador, artistas renascentistas como Leonardo da Vinci, Duccio, dentre outros, usaram essa técnica em seus quadros, um deles de Da Vinci, muito famoso podemos ver na Figura 23, outro de Duccio em 24 onde os autores usaram a perspectiva que hoje conhecemos como 3D para representar a "A Última Ceia"e "A Anunciação".

Figura 23: A Última Ceia.

Fonte: [Silva Neto, 2020].

A geometria projetiva desempenha um papel crucial na criação dessas belíssimas obras, ícone do Renascimento. Ambas exemplificam o uso magistral da perspectiva para criar uma sensação de profundidade e realismo, refletindo a evolução do entendimento geométrico dessa época.

Figura 24: A Anunciação .

Fonte: [Silva Neto, 2020].

Em [Holanda, 2021] tem-se que essa visão é chamada de perspectiva Cônica que pode ser definida como uma representação sobre a superfície plana da forma aparente de corpos bi ou tridimensionais. Nele também encontramos definições importantes da geometria projetiva aplicadas à arte, além de mostrar elementos que compõe essa forma de ver, que são:

- Ponto de vista ou ponto de observação: ponto do espaço ocupado pela vista do observador.
- Plano base ou plano da terra: plano horizontal que abriga os objetos representados na perspectiva.
- Plano de desenho ou quadro: superfície plana na qual se representa o objeto visto pelo observador.
- Linha de terra: interseção do plano da terra com o plano de desenho.
- Linha do horizonte: interseção entre o plano de desenho e o plano horizontal que passa pelo Ponto de Vista.
- Linha de projeção: reta que vai o ponto de vista até o objeto a ser representado.
- Pontos de fuga: pontos para os quais convergem as linhas que se dirigem ao horizonte.

A Figura 25 apresenta uma fotografia da Esplanada dos Ministérios, onde foram marcados o ponto de fuga e a linha do horizonte, ainda em [Holanda, 2021] encontramos várias aplicações da geometria projetiva na arte e na arquitetura, sugerimos ele para aprofundamento e como orientação para o professor de matemática no caminho de sugestões de atividades que possam envolver os alunos e aperfeiçoar o conhecimento nessa área.

Figura 25: Esplanada dos Ministérios.

Fonte: [Holanda, 2021].

Outras aplicações interessantes dessa geometria são encontradas em [Pavaneli, 2019], onde o autor sugere diversas atividades, como fotos em perspectiva, desenhos tridimensionais usando o GeoGebra, entre outras. Vejamos um exemplo: utilizem o paralelepípedo para a construção de um carro, com o objetivo de melhorar a percepção espacial. No quadro foi exposto o modelo de um carro e algumas observações foram feitas.

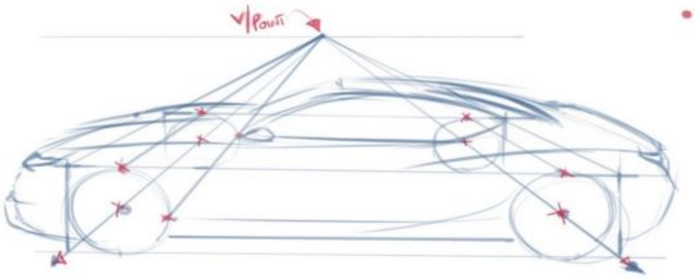
1. Para desenhá-lo iremos construir o paralelepípedo usando um ponto de fuga.

2. Aplicá-lo primeiro em uma folha e em seguida fazer o mesmo no Geogebra.

3. Desenhar primeiro as rodas no paralelepípedo para facilitar a visualização.

O que se espera próximo do resultado seria algo do tipo da Figura 26, em que é nítido os traços retos da geometria euclidiana plana mas com uma visão tridimensional oriunda da não euclidiana.

Figura 26: Desenho de um carro a partir de um paralelepípedo.



Fonte: [Pavaneli, 2019].

Conclui-se frisando que a exploração da geometria não euclidiana abrange um fascinante campo de estudo que desafia as noções tradicionais de espaço e forma, oferecendo novas perspectivas e aplicações em diversas áreas do conhecimento. Este tópico, que inclui a geometria hiperbólica, esférica e projetiva, não apenas amplia o entendimento matemático, mas também abre portas para inovadoras aplicações práticas desse assunto.

É importante que o leitor aprofunde os estudos nas referências elencadas, para assim mergulhar nesse universo tão pouco explorado. Além disso, propõe-se que sejam lidas as atividades encontradas no Anexo A, para explorar as possibilidades de aplicações desses temas em sala de aula.

Ao professor de matemática resta nesse momento o dissabor da dúvida, diante de uma grade curricular já estabelecida pelos nossos sistemas de ensino onde caberia a inserção de mais um tópico para ser abordado nas salas de aula? A BNCC nos dá a resposta onde versa que: "O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino" [Brasil, 2017].

Temos, portanto, nesses itinerários formativos, a possibilidade de uma abordagem inovadora e flexível para a educação. A BNCC estabelece os conhecimentos essenciais que todos os alunos devem adquirir, garantindo uma formação básica comum e de qualidade, em paralelo os itinerários formativos, por outro lado, oferecem uma personalização do ensino, permitindo que os estudantes escolham áreas de aprofundamento conforme seus interesses e aspirações futuras. Essa estrutura proporciona uma maior relevância ao currículo, alinhando-o com o contexto local e as necessidades específicas de cada região, além de considerar as possibilidades dos sistemas de ensino de adaptarem seus planos para promoção de temas relevantes para a formação das mentes do amanhã como esse desta pesquisa.

Essa flexibilidade é crucial para atender às demandas diversificadas dos alunos e preparar os jovens para os desafios do mundo contemporâneo, seja para o mercado de trabalho, para a continuidade dos estudos ou para a cidadania ativa. Ao valorizar as particularidades regionais e a individualidade dos estudantes, o novo modelo curricular promove uma educação mais inclusiva, motivadora e significativa.

Nesse momento concordamos com [Borges, 2023] onde fala que: "A presente Trilha de Aprofundamento visa proporcionar uma vasta revisão de conteúdos sobre geometria euclidiana, amplamente abordada na Educação Básica. Para isso, fazemos uso do plano cartesiano e, como proposta para discussão, um confronto direto com uma geometria não euclidiana, no caso, a geometria proposta por Moulton", ou seja, trabalhar tópicos da geometria não euclidiana, em trilhas de aprofundamento, seguindo os itinerários formativos, pode ser paralelo ao estudo de geometria euclidiana, aqui entra a relevância da formação de professores evidenciando a importância desse trabalho para aguçar a percepção dos educadores sobre esse universo apesentado.

6 Considerações Finais

O estudo da Geometria no ensino médio representa uma contribuição significativa para a formação matemática dos estudantes, pois permite uma abordagem prática em todas as etapas da educação básica das competências e habilidades elencadas na BNCC. Esses assuntos mostram-se de extrema importância para a formação dos discentes em todas as fases, proporcionando uma compreensão aprofundada e abrangente das propriedades e dos fundamentos geométricos. Esta abordagem não só enriquece o currículo escolar, mas também prepara os alunos para enfrentar desafios complexos, estimulando o pensamento crítico e a criatividade.

Registro a importância do papel desenvolvido pela BNCC na construção deste trabalho. A BNCC, que está sendo implementada na Educação Básica, foi evidenciada nesta dissertação como pilar para a introdução de temas relevantes da geometria não euclidiana. Ela nos fornece ferramentas para solucionar nosso problema de pesquisa sobre as possibilidades de inserção de tópicos da geometria não euclidiana nos itinerários formativos do novo ensino médio. Esse documento norteia tanto a formação geral básica quanto à parte diversificada do currículo da educação básica, além de abordar os itinerários formativos, onde exploramos a viabilidade de trabalhar esses tópicos da geometria não euclidiana.

O objetivo geral deste trabalho, que é explorar as possibilidades de inserção de tópicos da geometria não euclidiana para aplicação nos itinerários formativos do novo ensino médio, considerando os aspectos históricos, conceituais, metodológicos e didáticos da área, foi contemplado ao longo dos capítulos 3 e 4. Ao explorar a evolução das geometrias, desde a euclidiana até a Não euclidiana, buscamos instigar o leitor a compreender a natureza dinâmica e progressiva do conhecimento matemático. Esse contexto histórico não apenas enriquece a compreensão conceitual, mas também fomenta um pensamento crítico sobre como teorias matemáticas se desenvolvem, se complementam e, por vezes, se revolucionam.

Visando atender à problemática sugerida e ao objetivo geral estabelecido, foram levantados quatro objetivos específicos, a saber:

a) Identificar os principais conceitos e propriedades da geometria não euclidiana, bem como as suas diferenças em relação à geometria euclidiana;

b) Analisar conceitos históricos e os contextos matemáticos que levaram ao desenvolvimento da geometria não euclidiana;

c) Investigar as aplicações da geometria não euclidiana em diversas áreas do conhecimento, como física, astronomia, cartografia, arte e arquitetura, bem como a presença dessa geometria ao nosso redor, o que justifica o estudo para a promoção da formação integral básica dos estudantes proposto no NEM (Novo Ensino Médio);

d) Propor atividades didáticas que envolvam a geometria não euclidiana e que sejam adequadas ao que propõem os itinerários formativos específicos para a área, considerando os objetivos de aprendizagem e as competências gerais da BNCC.

Esses objetivos foram contemplados ao longo do trabalho. Aqui, enfatizamos que, no capítulo 5, deixamos evidente a proposição de aplicações na educação básica dos tópicos aqui elencados, além de sugerir autores que podem ser usados para um aprofundamento nesse universo.

A BNCC, ao propor um currículo comum, garante que todos os estudantes tenham acesso aos conhecimentos fundamentais. A introdução da geometria não euclidiana dentro desse escopo amplia o repertório dos alunos, permitindo uma formação sólida e completa. Além disso, os itinerários formativos possibilitam que os estudantes aprofundem os conhecimentos em áreas específicas de interesse, como a geometria não euclidiana, conforme suas aptidões e anseios pessoais e profissionais, enfatizamos que conseguimos atingir nossos objetivos mostrando a viabilidade de aplicações do objeto de estudo aqui pesquisado.

Fica claro que este trabalho é introdutório e que as referências podem ampliar a percepção dos educadores e leitores para um melhor domínio dos temas apresentados. Evidenciam-se também as relevantes aplicações da geometria não euclidiana em diversas áreas do conhecimento e as possibilidades de sua inserção na educação básica, conforme mostrado pela BNCC.

Ao longo desta dissertação, comprova-se que questões teóricas, aparentemente sem ligação, tornam-se instrumentos para a resolução de problemas em outras áreas. Isso é demonstrado por inúmeros estudos no âmbito da geometria e implica que, especialmente na formação avançada de docentes, a formação não deva ser apenas especializada, mas incluir uma visão ampla dos campos de interação com a geometria.

Conclui-se desejando que este trabalho sirva de base para aqueles que buscam um aprofundamento na área e que, para o professor de matemática, ele sirva de norte para aguçar a mente dos futuros cientistas, permitindo que paradigmas sejam quebrados e conhecimentos desvendados em uma área onde ainda há muito a ser descoberto.

Referências

[Agustini, 2022] Agustini, E. (2022). Introdução à geometria hiperbólica plana.

[Alves, 2009] Alves, Sérgio de Carvalho, J. P. M. F. C. P. (2009). A geometria do globo terrestre. *IMPA, Rio de Janeiro*.

[Andrade et al., 2011] Andrade, M. L. T. D. d. et al. (2011). Geometria esférica: Uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no ensino básico.

[Barbosa, 2002] Barbosa, J. L. M. (2002). *Geometria hiperbólica*. IMPA.

[Bertrand, 2020] Bertrand, B. (2020). Geometrias não-euclidianas: história e aplicações.

[Bicudo, 2009] Bicudo, I. (2009). *Os elementos*. Unesp.

[Bongiovanni; Jahn, 2010] Bongiovanni; Jahn, A. P. (2010). De euclides às geometrias não euclidianas. *UNIÓN-REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 6(22).

[Borges, 2023] Borges, C. d. M. (2023). Geometria de moulton x geometria euclidiana: trilhas de aprofundamento para o ensino médio.

[Boyer, 2019] Boyer, Carl B; Merzbach, U. C. (2019). *História da matemática*. Editora Blucher.

[Brasil, 2018] Brasil (2018). Estabelece os referenciais para elaboração dos itinerários formativos conforme preveem as diretrizes nacionais do ensino médio. Diário Oficial da República Federativa do Brasil. Seção 1.

[Brasil, 1996] Brasil, C. (1996). Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. *Diário Oficial da União*, 134(248):27–834.

[Brasil, 1999] Brasil, M. (1999). Secretaria de educação média e tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais–Ensino Médio (PCN). Brasília: MEC*, page 109.

[Brasil, 2017] Brasil, M. (2017). Ministério da educação. base nacional comum curricular.

[Carvalho, 2014] Carvalho, O. A. (2014). Uma abordagem de geometrias não-euclidianas na educação básica: Geometria esférica.

[Costa, 2016] Costa, J. M. d. C. B. d. (2016). Curvas cónicas e superfícies geradas pelas curvas cónicas: os seus traçados geométricos e aplicações no design.

[Coutinho, 2001] Coutinho, L. (2001). *Convite às geometrias não-euclidianas*. Interciência.

[da Silva, 2006] da Silva, A. P. B. (2006). *O desenvolvimento das mecânicas não-euclidianas durante o século XIX*. PhD thesis, Instituto de Física Gleb Wataghin.

[de Abreu, 2015] de Abreu, Shyrlene Martins; Ottoni, J. E. (2015). *Geometria esférica e trigonometria esférica aplicadas a astronomia de posição*. PhD thesis, dissertação Profmat.

[de Jesus Dueli,] de Jesus Dueli, L. Geometria esférica: Propostas de sequências didáticas interdisciplinares.

[de Souza Minayo et al., 2011] de Souza Minayo, M. C., Deslandes, S. F., and Gomes, R. (2011). *Pesquisa social: teoria, método e criatividade*. Editora Vozes Limitada.

[Eduardo, 2013] Eduardo, E. C. (2013). Geometrias não-euclidianas e a geometria da relatividade.

[Holanda, 2021] Holanda, L. d. S. (2021). Os modelos axiomáticos das geometrias euclidiana e projetiva: Histórico, similaridades, diferenças e aplicações.

[Kaleff, 2004] Kaleff, Ana Maria; Do Nascimento, R. S. (2004). Atividades introdutórias às geometrias não-euclidianas: o exemplo da geometria do táxi. *Boletim Gepem*, (44).

[Kant, 2016] Kant, I. (2016). *Crítica da razão prática*. BOD GmbH DE.

[MEDEIROS, 2020] MEDEIROS, DM COSTA, P. (2020). Sólidos de revolução e o cálculo, uma extensão do estudo do volume e da área. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, 3(3):141–154.

[Moretti,] Moretti, M. T. Assíntotas horizontais, verticais e oblíquas.

[Pavaneli, 2019] Pavaneli, M. D. D. (2019). Geometria projetiva no ensino do espaço tridimensional e na estrutura de jogo de dobble.

[Pereira, 2020] Pereira, A. (2020). Pensamento geométrico: em busca de uma caracterização à luz de fischbein, duval e pais. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 9(18):152–179.

[Pereira Jr, 2011] Pereira Jr, Antônio Duarte; Lemos, N. A. (2011). Geometria diferencial de curvas e dinâmica da partícula. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33:1–7.

[Perez, 2015] Perez, C. M. (2015). Fundamentos de geometria hiperbólica.

[Rossini, 2010] Rossini, M. A. P. (2010). Um estudo sobre o uso de régua, compasso e um software de geometria dinâmica no ensino da geometria hiperbólica.

[Santos et al., 2022] Santos, L. L. D., Quartieri, R. G., Schinzel, G. H., and de Andrade, V. C. (2022). Conceitos de relatividade geral–uma abordagem para o ensino de física no ensino médio. *Revista do Professor de Física*, 6(Especial):201–210.

[Silva, 2019] Silva, W. A. M. d. (2019). O desenho geométrico no ensino da geometria: uma sequência didática.

[Silva Neto, 2020] Silva Neto, M. G. d. (2020). Uma introdução às geometrias não-euclidianas com aplicações para o ensino médio.

[Sousa Júnior, 2023] Sousa Júnior, J. L. d. (2023). Hipérbole: propriedades e aplicações. B.S. thesis.

[Souza et al., 2023] Souza, J. A. R., Vitório, H., and Lavor, C. (2023). Geometria hiperbólica aplicada à clusterização de proteínas. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 10(1).

[Umehara, 2017] Umehara, Masaaki Yamada, K. (2017). *Differential geometry of curves and surfaces*. World Scientific.

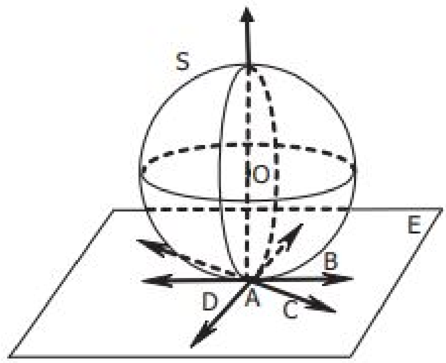
[Vogado et al., 2020] Vogado, G. E. R., LOBATO, F. d. S., DIAS, G. N., BARRETO, W. D. L., Silva Junior, W., PAMPLONA, V. M. S., Rodrigues, A., Araújo, J., Barbosa, E., and Silva, E. (2020). A geometria hiperbólica e o reflexo de sua utilização para alunos do ensino médio. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, 3:99–118.

A ANEXO

Proposição de Atividades

Para uma melhor compreensão dos assuntos aqui elencados, vamos propor as seguintes atividades, baseadas em autores como [Alves, 2009], [Rossini, 2010], [Pavaneli, 2019], [Holanda, 2021]. Salientamos que esses autores trazem vários outros problemas interessantes relacionados a esse tema e que poderia ser mostrado no ensino médio, para enriquecer o repertório de conhecimento dos estudantes.

1. A superfície esférica S é tangente ao plano E em A. O ponto O é o centro de S e B, C, D estão em E. Que relação existe entre $\overline{OA}$ e $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$? Explique.



   Esta questão é um ótimo exemplo para ilustrar conceitos fundamentais de geometria, como a tangência entre esferas e planos, perpendicularidade, e a minimização de distâncias. Ela desenvolve a habilidade de visualização espacial e a compreensão de relações geométricas em três dimensões, o que é essencial para o ensino de matemática no nível médio e além. Esses conceitos são importantes tanto em contextos teóricos quanto em aplicações práticas em várias áreas, como engenharia, arquitetura e física.

2. Explique porque duas circunferências máximas quaisquer de uma superfície esférica, se cortam nas extremidades de um diâmetro da superfície esférica.

   Aqui o professor poderia mostrar primeiramente que esse tema está presente na BNCC e aborda conhecimentos encontrados na habilidade EF09MA17, por exemplo. Além disso, explicar que duas circunferências máximas de uma superfície esférica são definidas como as circunferências que dividem a esfera em duas partes iguais, ou seja, seus centros coincidem com o centro da esfera e seus raios são iguais ao raio da esfera, mostrando definições presentes na geometria Euclidiana mas que poderia ser falado também na não Euclidiana propondo questionamentos envolvendo a curvatura da

Terra e perspectiva tridimensional do globo. Essas circunferências são análogas aos "grandes círculos"na Terra, como a linha do equador e os meridianos, aqui ele poderia elencar a importância do ensino de geografia alinhado ao de matemática, evidenciando a presença da interdisciplinaridade.

3. Na geometria esférica as “linhas retas” são representadas por circunferências máximas. Se puder, encontre cada uma das seguintes figuras em tal geometria.

   a) Um triângulo equilátero.

   b) Um triângulo com dois ângulos retos.

   c) Um triângulo com três ângulos retos.

   Nesse problema o professor poderia partir para a prática utilizando objetos como bolas, lápis de cor e cartolina, para que com a "mão na massa"os estudantes consigam desenvolver conceitos presentes na geometria não Euclidiana como por exemplo triângulo esférico.

4. As cidades de Macapá (Brasil) e Pontianak (Indonésia) estão ambas situadas sobre o Equador. Consulte um atlas geográfico para achar a longitude de cada uma dessas localidades e determine a distância entre elas.

   A resolução desta questão envolve mais uma vez a interdisciplinaridade entre Matemática e Geografia. Evidenciamos aqui a presença das habilidades EF09MA19: Resolver e elaborar problemas que envolvam conhecimentos geométricos de ângulos, polígonos, circunferências e círculos, utilizando propriedades, teoremas e relações métricas, no ensino de Geometria e EF09GE07: Utilizar mapas e outras representações cartográficas para analisar a localização e a distribuição de fenômenos geográficos e históricos, no ensino de Geografia.

5. Qual a distância de Salvador ao Polo Sul? E ao Polo Norte? E a Fortaleza? (Sugestão: Salvador e Fortaleza estão sobre um mesmo meridiano.)

   Uma observação importante é que nessa dissertação, não são apresentadas ferramentas da matemática nem da geografia para resolução dos problemas 4 e 5, embora isso não tenha ocorrido, esses questionamentos oferecem uma excelente oportunidade para explorar a interdisciplinaridade entre matemática e geografia. Tais questões podem ser abordadas de maneira eficaz ao integrar conceitos e métodos dessas duas áreas do conhecimento. Incorporar a interdisciplinaridade entre elas na resolução dessas questões não apenas preenche a lacuna de conteúdo, mas também enriquece a percepção do educando quanto a aplicação dos conhecimentos adqueridos de uma área para outra, oferecendo uma visão abrangente e aplicada dos conceitos discutidos. Este tipo de abordagem prepara os estudantes para enfrentar desafios complexos, onde múltiplas disciplinas se cruzam e interagem, refletindo a natureza interconectada do conhecimento e das questões do mundo real.

6. (Adaptada de [Rossini, 2010]) Considere um quadrilátero que tem dois ângulos retos e dois lados congruentes, $\overline{AB}$ é o lado base, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são os lados congruentes, enquanto $\overline{DC}$ é o lado topo do quadrilátero. Você considera possível que esse quadrilátero tenha os ângulos em $\hat{C}$ e $\hat{D}$ congruentes e agudos?

   Pontuamos o que [Rossini, 2010] enfatiza ao propor essa pergunta: "Colocamos essa questão com o objetivo de verificar quais argumentos os alunos utilizariam para responder a ela. Desejávamos avaliar mesmo, os seus conhecimentos de Geometria Euclidiana, e se os alunos possuíam algum conhecimento de outras geometrias". Nesse ponto concordamos com Ele pois acreditamos que uma maneira de apresentar a geometria não euclidiana seja fazendo comparações com a euclidiana.

7. (Adaptada de [Pavaneli, 2019]) Observe a Figura 27, nela apresentamos a imagem de uma estrada tridimensional quando representada no plano bidimensional. A partir da observação responda:

   Figura 27: Visão de uma Estrada Tridimensional no plano Bidimensional.

   Fonte: [Pavaneli, 2019]

   a) O que você sabe sobre retas paralelas e concorrentes?
   b) Como uma imagem desenhada em uma folha (plano) pode ter uma profundidade?
   c) As faixas brancas que limitam a estrada se encontram?

   Vale lembrar que [Pavaneli, 2019] sugere como objetivo para essa atividade despertar a curiosidade do aluno e prepará-lo para a definição de perspectiva que em [Holanda, 2021] já foi bem definida. Para contextualizar o professor poderia levantar perguntas sobre a Figura 27 de elementos da geometria projetiva presentes na Figura 25.

8. ([Carvalho, 2014]) Considere a seguinte situação hipotética: Como seriam as trajetórias de dois barcos navegando por um longo percurso, de modo que mantenham sempre a mesma distância um do outro? Explique e justifique.

   Nessa situação hipotética [Carvalho, 2014] sugere que seja resolvida em duas superfícies, uma plana e a outra esférica, para que os estudantes tirem conclusões sobre tais resoluções.

9. Desenhe um triângulo qualquer numa folha de papel e com um transferidor meça seus ângulos e anote os resultados.

10. Desenhe um triângulo qualquer numa bola de isopor e com um transferidor meça seus ângulos e anote os resultados.

    As questões 9 e 10 de [Carvalho, 2014], sugerem que os estudantes trabalhem o mesmo tema em superfícies diferentes, podendo o professor de matemática sugerir um estudo paralelo da geometria euclidiana e não euclidiana.