Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e
Pós-Graduação - PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

LÍCIO LIMA MEDEIROS

RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA “PELA COMPREENSÃO”

TERESINA
2024

LÍCIO LIMA MEDEIROS

RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA “PELA COMPREENSÃO”

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Piauí (UESPI), como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Neuton Alves de Araújo.
Coorientadora: Profa. Dra. Valdirene Gomes de Sousa

TERESINA

2024

M488r Medeiros, Lício Lima.
Resolução de situações-problema sobre o ensino e aprendizagem de análise combinatória "pela compreensão" / Lício Lima Medeiros. - 2024.
73f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual do Piauí - UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Campus Poeta Torquato Neto, Teresina - PI, 2024.
"Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico".
"Orientador: Prof. Dr. Neuton Alves de Araújo".
"Coorientadora: Profa. Dra. Valdirene Gomes de Sousa".

1. Análise combinatória. 2. Resolução de problemas. 3. Sequência didática. I. Araújo, Neuton Alves de . II. Sousa, Valdirene Gomes de . III. Título.

CDD 510

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca da UESPI
ANA ANGELICA PEREIRA TEIXEIRA (Bibliotecário) CRB-3ª/1217

LÍCIO LIMA MEDEIROS

RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA "PELA COMPREENSÃO"

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do título de MESTRE em Matemática.

Área de concentração: MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO.

Aprovado por:

gov.br Documento assinado digitalmente
NEUTON ALVES DE ARAUJO
Data: 01/10/2024 18:38:56-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Neuton Alves de Araújo – Presidente e Examinador
Universidade Federal do Piauí – UFPI

gov.br Documento assinado digitalmente
VALDIRENE GOMES DE SOUSA
Data: 01/10/2024 15:07:05-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Valdirene Gomes de Sousa – Coorientadora
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

gov.br Documento assinado digitalmente
AFONSO NORBERTO DA SILVA
Data: 01/10/2024 21:19:25-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva – Examinador (interno)
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

gov.br Documento assinado digitalmente
WILTER FREITAS IBIAPINA
Data: 01/10/2024 18:52:24-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Wilter Freitas Ibiapina – Examinador (externo)
Universidade Federal do Piauí - UFPI

Lício Lima Medeiros graduou-se em Matemática pela Universidade Federal do Piauí (UFPI), fez especialização no ensino da matemática no Instituto Federal do Piauí. Atualmente é professor efetivo da Prefeitura Municipal de Timon - MA e professor de Ensino Médio e pré-vestibular do grupo Pensar Educação no Colégio Propósito, Colégio Expert e Great International School.

Dedico este trabalho a Jesus, que tanto me ama, a minha esposa Amandha, minha filha Ramira, a minha mãe Aurimar (*In Memoriam*), ao meu pai José, a toda a minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por entregar o seu filho unigênito para me salvar, por todo o seu cuidado por mim nos mínimos detalhes.

Agradeço a minha esposa Amandha, pois desde que erámos ainda namorados já me apoiava de uma forma única, em toda a minha trajetória acadêmica me incentivou e me melhorou como pessoa, sem ela nada disso seria possível.

Agradeço à minha filha Ramira, que hoje tem 11 meses e nem sabe o quanto me deu forças para continuar o presente trabalho, dia após dia ela me ensina a ser uma versão melhor.

Agradeço aos meus pais, primeiramente, à minha amada mãe, que me criou tão bem e me ensinou com sua honestidade e amor a Deus até os últimos momentos que esteve nessa vida, agradeço também ao meu Pai, que me mostrou como lutar diante de inúmeras dificuldades e jamais nos deixou só, ele me ensinou a ser um homem de verdade, muitas vezes até com o silêncio.

Agradeço aos meus irmãos, Auro, Jonas e Patrícia, os que muito me incentivaram a buscar uma vida melhor.

Agradeço aos meus amigos, em especial, ao meu *brother* Jackson de Oliveira, o qual estende sua mão sempre que necessário, me mostrando o que é lealdade e que é sim possível ter um irmão que não veio da mesma mãe, por inúmeras vezes me incentivou simplesmente por ser a pessoa simples e honesta que é.

Agradeço ao meu amigo Raphael Ramon, que sempre acreditou no meu trabalho, proporcionando oportunidades únicas e para além disso, demonstra seu afeto e parceria dia após dia.

Agradeço aos meus amigos de trabalho e vida, Araújo Neto e Lucas Lopes, juntos já passamos muito tempo estudando e buscando melhorar nossas aulas e conteúdo matemático.

Agradeço ao meu amigo Klaiton Barbosa, o qual me inspirou a fazer a Sequência Didática (SD) aqui apresentada e que muito me ajudou a melhorar minha didática com suas contribuições e socializações de conteúdos matemáticos.

Agradeço aos meus amigos do PROFMAT-UESPI, Afonso, Vanilson, Delon, Robson, Erasmo, Miranda, Ney, Açucena, Viana, Eugenio, Hislley, Gustavo, José Carlos, Lucas, durante essa trajetória enfrentamos obstáculos, mas juntos nos fortalecemos ajudando um ao outro, cada lista de simulado para o ENQ, lista de

Provas Nacionais, lista de simulados montadas foram de grande valia para aprovação diante dos períodos, enfim, somos todos vencedores porque tivemos uns aos outros.

Agradeço à Coordenação do PROFMAT/UESPI, inicialmente, o prof. Arnaldo, e atualmente o prof. Natã e aos meus exímios professores dessa trajetória acadêmica, proporcionada pelo PROFMAT/UESPI, em especial, Afonso Norberto, Pedro Júnior, Arnaldo, Neuton e Val, sem eles esse trabalho não seria concluído.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Neuton Alves de Araújo, e à minha co-orientadora, Profa. Dra. Valdirene Gomes de Sousa, que me deram a oportunidade de aprender e de desenvolver; agradeço por cada encontro de orientação para a elaboração deste trabalho, desde o projeto de pesquisa, e por me conduzirem à excelência.

Por fim, agradeço a cada um que de forma direta ou indireta me auxiliaram nesse processo.

[...] há uma desconexão entre a pesquisa e a formação do professor e, em especial, uma falha grande nos nossos cursos de licenciatura, especialmente no tocante ao ensino da matemática (Fossa, 2008, p. 8).

RESUMO

O presente estudo de cunho bibliográfico tem como objetivo geral analisar possibilidades de aprendizagem da Análise Combinatória “pela compreensão” a partir da resolução de situações-problema. Para tanto, apresenta os objetivos específicos: a) Analisar, a partir do que revelam as pesquisas, as dificuldades da aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio; b) Reconhecer possibilidades metodológicas na resolução de situações-problema com ênfase na aprendizagem da Análise Combinatória “pela compreensão”; c) Apresentar uma SD na perspectiva da aprendizagem “pela compreensão” mediante a resolução de situações-problema sobre Análise Combinatória. Fundamentados em Boyer (1974), Bachx (1975), Eves (2011), Vazquez (2004) dentre outros, aborda-se o contexto histórico e contribuições da Análise Combinatória. Em sequência, apoiados em Moretti (2014), Pozo (1998), dentre outros, discorre-se sobre as reflexões de problema em geral e a resolução de problemas matemáticos. Em continuidade, apresenta-se uma Sequência Didática sobre o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória “pela compreensão”, apoiados em uma perspectiva de Grossnickle e Brueckner (1965). Para tanto, durante o estudo, foram analisadas as dificuldades voltadas no âmbito da matemática e em específico no campo da Análise Combinatória. Em linhas gerais, os resultados desta pesquisa revelam que a proposta metodológica de resolução de situações-problema "pela compreensão" se apresentou como uma alternativa promissora, com possibilidade de superação da aprendizagem mecanicista. Tal abordagem, centrada na contextualização histórica, problematização e compreensão conceitual, permite aos alunos uma aprendizagem com potencialidade para o seu desenvolvimento cognitivo, com destaque, na Análise Combinatória.

Palavras-chave: análise combinatória; resolução de problemas; sequência didática.

ABSTRACT

This bibliographic study has the general objective of analyzing possibilities of learning Combinatory Analysis “through understanding” from the resolution of problem situations. To this end, it presents the following specific objectives: a) To analyze, based on what research reveals, the difficulties of learning Combinatory Analysis in High School; b) To recognize methodological possibilities in solving problem situations with an emphasis on learning Combinatory Analysis “through understanding”; c) To present a DS from the perspective of learning “through understanding” through the resolution of problem situations on Combinatory Analysis. Based on Boyer (1974), Bachx (1975), Eves (2011), Vazquez (2004) among others, the historical context and contributions of Combinatory Analysis are addressed. Then, supported by Moretti (2014), Pozo (1998), among others, the reflections on problems in general and the resolution of mathematical problems are discussed. Next, a Didactic Sequence is presented on the teaching and learning of Combinatorial Analysis “through understanding”, based on a perspective by Grossnickle and Brueckner (1965). To this end, during the study, the difficulties in the field of mathematics and specifically in the field of Combinatorial Analysis were analyzed. In general terms, the results of this research reveal that the methodological proposal of solving problem situations “through understanding” presented itself as a promising alternative, with the possibility of overcoming mechanistic learning. This approach, centered on historical contextualization, problematization and conceptual understanding, allows students to learn with potential for their cognitive development, with emphasis on Combinatorial Analysis.

Keywords: combinatorial analysis; problem solving; didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PROFMAT - Programa de Mestrado Profissional em Matemática

UESPI - Universidade Estadual do Piauí

SD – Sequência Didática

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

ENEM PPL - Exame Nacional do Ensino Médio para Pessoas Privadas de Liberdade

INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

MMM - Movimento da Matemática Moderna

PFC - Princípios Fundamentais da Contagem

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Enquanto professor de matemática há mais de seis anos atuando em turmas de 3ª série do Ensino Médio e Pré-Vestibulares, muito me inquieta a dificuldade dos alunos na resolução de situações-problema envolvendo, sobretudo, a Análise Combinatória. Além disso, por considerar os diálogos sobre a docência em Matemática com o prof. Klaiton Barbosa, também professor de Matemática, após socializar a sua perspectiva pessoal de organização de ensino e aprendizagem da resolução de situações-problema sobre o conteúdo aqui considerado, muito me impeliu no sentido de pensar em possibilidades de aprendizagem desse campo da matemática.

Além disso, durante o Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Estadual do Piauí (UESPI), ao cursar a disciplina Matemática Discreta, carga horária 60 horas, me deparei com estratégias metodológicas empregadas, na época, pelo professor da referida disciplina. Vale acrescentar que tais estratégias se alinhavam àquelas socializadas pelo professor Klaiton Barbosa, no contexto da resolução de situações-problema sobre Análise Combinatória.

Diante do exposto, por considerar as reflexões sobre a resolução de situações-problema numa perspectiva que se contrapõe àquelas por mim vivenciadas no curso de Licenciatura em Matemática, respaldadas na lógica da memorização e do emprego de fórmulas, desprovidas de compreensão conceitual, posto que se limitavam às definições, me vi diante da necessidade de estudar e pesquisar sobre outras perspectivas metodógicas com possibilidade de superação da memorização.

É digno de nota que, no tocante à Análise Combinatória, o que vem sendo estudado desde o 9º ano do ensino fundamental, contastei durante a experiência em sala de aula, a dificuldade excessiva por parte do alunado na compreensão em resolver situações-problema deste conteúdo, realidade essa que se estende do ensino fundamental ao ensino médio.

A esse respeito, como explicita Moretti (2014, p. 31), nessa perspectiva de resolução de problemas, em seus enunciados são apresentadas apenas as informações quanto “[...] à sua solução que, por sua vez, sempre existe. Este contexto tem contribuído para que os estudantes apropriem-se desses modelos e sintam dificuldades em resolver situações que apresentem excesso de dados [...]”. Nesse mesmo entendimento, ao delimitar a Análise Combinatória, Morgado *et al*. (2020, p.

2) relatam que “[...] a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema”.

Com isso, instigado pelas minhas necessidades formativas, busquei aprofundar meus conhecimentos didáticos acerca do ensino e da aprendizagem da Análise Combinatória. A partir daí, passei a analisar propostas de como organizar uma aula sobre os tópicos relacionados a esse conteúdo, a fim de possibilitar aos alunos uma aprendizagem matemática “pela compreensão”, ou seja, que leve “[...] em conta os conhecimentos prévios dos alunos, diferentes maneiras de ensino e materiais que auxiliem a compreensão e a significação dos conteúdos” (Jandrey; Dias; Santos, 2020, p. 2).

Diante do exposto, entendemos que as estratégias metodológicas empregadas na apresentação de tópicos relacionados à Análise Combinatória, de modo que produza significados aos alunos, são atreladas às experiências cotidianas, de seu convívio e da necessidade de novas aprendizagens. Assim, entendemos que o professor deve estar antenado aos diferentes trilhos caminhados por cada aluno em suas diversas perspectivas metodológicas para resolução de situações-problema propostas.

Nessa perspectiva, ao reconhecer e respeitar as diferenças individuais, o profesor promove um ambiente mais acolhedor e com potencialidades para a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos. Essa abordagem não apenas atende às necessidades específicas dos estudantes, mas também enriquece a experiência educacional, tornando-a mais significativa e inclusiva. A partir daí, propomos a elaboração de uma Sequência Didática (SD) como ferramenta mediadora para promover uma aprendizagem significativa e superar dificuldades na resolução de situações-problema de Análise Combinatória. Reforçamos, portanto, que nos fundamentamos na lógica da aprendizagem “pela compreensão”, visando proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem estruturado e progressivo, favorecendo a internalização de conceitos e estratégias necessárias para a resolução dos problemas.

Do exposto, entendemos que além de uma boa exposição teórica do conteúdo trabalhado, se faz necessária a apropriação dessas estratégias de resolução de situações-problema envolvendo a Análise Combinatória, na perspectiva aqui defendida, ou seja, “pela compreensão”.

Diante das considerações apresentadas, emerge o seguinte **problema de pesquisa**: Quais as possibilidades de aprendizagem da Análise Combinatória “pela compreensão” a partir da resolução de situações-problema? Para responder tal pergunta, delimitamos como **objetivo geral**: analisar possibilidades de aprendizagem da Análise Combinatória “pela compreensão” a partir da resolução de situações-problema. E como objetivos específicos: a) Analisar, a partir do que revelam as pesquisas, as dificuldades da aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio; b) Reconhecer possibilidades metodológicas na resolução de situações-problema com ênfase na aprendizagem da Análise Combinatória “pela compreensão”; c) Apresentar uma SD na perspectiva da aprendizagem “pela compreensão” mediante a resolução de situações-problema sobre Análise Combinatória.

Face ao exposto, esclarecemos que esta dissertação se encontra estruturada em quatro seções. A primeira seção aborda as considerações iniciais, enfatizando o objeto de estudo, o problema de pesquisa, o objetivo geral e os objetivos específicos, conforme previamente mencionado.

Na segunda seção, abordamos a historicização e dificuldades de aprendizagem da Análise Combinatória na eduação básica, em que explicitamos contextos históricos que contribuem para apropriação de conceitos do conteúdo e através de pesquisas revelamos as dificuldades em métodos de contagem no ensino médio. Em continuidade, na terceira seção, tendo como base perspectivas metodológicas da resolução de situações-problema no ensino da matemática, apresentamos reflexões sobre a ideia de problema até chegarmos, de fato, aqueles da área da matemática. Para isso, mostramos ainda possibilidades metodológicas para resolução desses problemas e, assim, propomos resoluções de situações-problema de diversos vestibulares do país envolvendo a Análise Combinatória “pela compreensão” através de um esquema prático elaborado por meio de recortes da SD que será apresentada na quarta seção.

Como mencionado anteriormente, na quarta seção, apresentamos um produto educacional, que se trata da elaboração de uma SD, como possibilidade de mediação para a resolução de situações-problema envolvendo Análise Combinatória “pela compreensão”. Por último, na quinta seção, expomos as considerações finais deste estudo apresentando respostas ao problema de pesquisa já mencionado.

2 DA HISTORICIZAÇÃO ÀS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Iniciamos esta seção trazendo o contexto histórico do conceito Análise Combinatória. Feito isso, apresentamos uma discussão sobre as dificuldades na aprendizagem desse conceito matemático no contexto do ensino médio, tomando como base pesquisas já desenvolvidas.

2.1 Uma síntese do contexto histórico sobre o conceito Análise Combinatória

Partindo do pressuposto de que, "[...] contar a história da matemática não é só trazer fatos de forma mecânica para sala de aula, mas desenvolver a matemática com esses acontecimentos, relacionar a matemática com fatos sociais, culturais e políticos [...]" (Bastos; Lopes; Victer, 2020, p. 332), inicialmente, apresentamos aspectos históricos da Análise Combinatória. A esse respeito, como complementam os autores mencionados, fundamentados em Mendes, Fossa e Valdés (2006), "nos últimos anos a história da matemática vem se incorporando, sobretudo à teoria e à prática do ensino da matemática" (2020, p. 334).

Assim, explicitamos que o surgimento da Análise Combinatória se dá com o processo da contagem na história das civilizações. De acordo com Eves (2011, p. 25-26),

> O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50 000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural [...] É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso. Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples. Uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros e quantos eram seus inimigos e tornava-se necessário a um homem saber se seu rebanho de carneiros estava diminuindo. É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda.

A respeito da historicidade apresentada por Eves (2011), entendemos que o início do processo de contagem se deu a partir de necessidades do homem que, nos dias atuais, consideramos ser elementares, como por exemplo, o pai ou a mãe saber a quantidade de filhos, o homem do campo saber a quantidade da produção do plantio de sua roça, a quantidade de frutas produzida por determinada árvore plantada etc.

No entanto, como explicitado pelo autor em tela, tal processo se limitava à correspondência biunívoca, também denominada bijeção. A título de esclarecimento, para cada elemento contado se faz corresponder um único número registrado, ou seja, um numeral. Diante desse cenário, como não haviam sido idealizados e formulados algarismos para representar os números, como o autor afirma, diante da necessidade da contagem, os homens relacionavam, por exemplo, para cada dedo das mãos um carneiro, ou ainda fazendo traços (ranhuras) no chão, empregando pedras ou pedaços de madeiras, bem como usando a técnica de fazer “nós” em cordas.

Nessas condições, como reforça Bastos (2016, p. 43), “a correspondência biunívoca (bijeção) foi de suma importância para juntar pedrinhas e saber a quantidade de ovelhas”. Em síntese, fica evidenciado que a técnica primeira projetada pelos homens, diante do desenvolvimento de sua consciência e, consequentemente, da necessidade de contar, é a correspondência biunívoca.

Feitas as considerações, dentre os povos que contribuíram para o surgimento da Análise Combinatória, temos nessa historicidade a civilização egípcia. A título de exemplo nesse processo de desenvolvimento, Eves (2011, p. 75), traz o curioso problema do papiro Rhind (o de número 79), como mostrado na figura 1.

Figura 1 – O problema de número 79 do papiro Rhind

Bens	
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2 401
Hecates de grãos	16 807
	19 607

Fonte: Eves (2011, p. 75).

Disto, recorremos a Eves (2011, p. 76) ao ressaltar a contribuição do historiador Moritz Cantor (1907) na interpretação do problema de número 79 do papiro Rhind por uma ótica diferente contemplada no Liber abaci (1202) de Leonardo Fibonacci.

> Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?

Sobre essa última interpretação do problema de número 79, de acordo com Eves (2011, p. 66), Moritz Cantor (1907) chegou a uma nova interpretação, conforme explicitado a seguir:

> Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hecates de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecates de grãos, quanto havia disso tudo?

Na verdade, como afirmado por Boyer (1974), tal problema se apresenta como um antepassado do "versinho infantil", relatado na figura 2.

Figura 2 - Versinho Infantil do Papiro de Ahmes

Quando ia a Sto. Ives,
encontrei um homem com sete mulheres;
cada mulher tinha sete sacos,
cada saco tinha sete gatos,
cada gato tinha sete gatinhos.
Gatinhos, gatos, sacos e mulheres,
quantos iam a Sto. Ives?!"

Fonte: Boyer (1974).

Assim, observamos que o problema de número 79 do Papiro Rhind, que diz respeito às cinco primeiras potências de 7, é cultivado ao longo da história da Análise Combinatória. Dessa forma, destaca-se o uso do que chamamos de "Princípio Multiplicativo da Contagem" ao calcular, por exemplo, o número de pães 7x7x7x7 = 2401, bem como o "Princípio Aditivo da Contagem" ao calcular, a quantidade de gatos ou ratos 49+343 = 392. Do que foi relatado, entendemos que essa foi a ideia inicial da Análise Combinatória que remete ao uso do princípio multiplicativo e aditivo, que por sua vez, é o que gera toda a base para a construção das formas de contagem que existem hoje em dia.

Do exposto, ao considerarmos ainda a historicidade do desenvolvimento da Análise Combinatória, nos reportamos a Morgado *et al.* (2016), Bachx, Poppe e Tavares (1975) e Santos (2013), que nos dão base para afirmarmos que, atualmente, esta é aplicada em várias situações, possibilitando suporte para a contagem de eventos do cotidiano. Assim, dentre outras de suas aplicações, destacamos: cálculos de probabilidade, estatística, resolução de problemas de pesquisa operacional, de medicina, agronomia, odontologia, ciências sociais, economia e problemas de transportes.

Por consequência, como afirma Biggs (1979, p. 112, tradução nossa), historicamente,

> [...] existe uma dificuldade na terminologia. As palavras ‘permutação’ e ‘combinação’ adquiriram significados matemáticos precisos, mas tal precisão não é observada no uso vernáculo. A dificuldade é agravada nos estudos históricos pelo fato de os tradutores de textos de obras antigas tenderem a usar significados vagos e aleatórios, em vez de os matemáticos. Assim, deve-se ter em mente que um trabalho que parece tratar de Permutações e Combinações pode, de fato, lidar com nenhum, ou um, ou ambos, desses tópicos.

Diante do exposto, entendemos que a dificuldade de saber sobre a origem do que chamamos de permutações e combinações é revelada pela falta de traduções minuciosas com significado matemático. Acrescentamos, segundo Biggs que (1979, p. 115, tradução nossa), “A evolução das regras para encontrar respostas numéricas para problemas combinatórios, sem ter que listar todos os casos, parece ter ocorrido gradualmente durante um longo período.”, percebemos então que as formulações em combinatória perpassa por um bom tempo, até chegarmos nas fórmulas que hoje conhecemos. Assim, é válido ressaltar o que diz Harley, (2017, p. 20), “Ainda no princípio do século XIX não havia significado preciso para o emprego dos termos arranjo e permutação. Leibniz designava as permutações por variações, que é a palavra hoje utilizada por alguns autores para indicar arranjos.”, ou seja, reforçando a a ideia de que a história por trás dos conceitos de arranjos e combinações é algo em aberto.

Por conseguinte, aprensetamos as dificuldades relacionadas a aprendizagem no âmbito da matemática em geral e em sequência dificuldades específicas do campo da Análise Combinatória tendo como embasamento estudos relacionados ao tema.

2.2 Dificuldades na aprendizagem da Análise Combinatória no ensino médio: o que revelam as pesquisas?

A dificuldade na aprendizagem da matemática é um fenômeno complexo e multifacetado, com uma variedade de fatores que podem contribuir para isso. Podemos destacar aqui, como ressalta Bessa (2007) *apud* Pacheco e Andreis (2017, p.106),

> [...] ao professor (metodologias e práticas pedagógicas), ao aluno (desinteresse pela disciplina), à escola (por não apresentar projetos que estimulem o aprendizado do aluno ou porque as condições físicas são insuficientes) ou à família (por não dar suporte e/ou não ter condições de ajudar o aluno).

Disto, compartilhamos que o professor, o aluno, a escola e a família são peças fundamentais para a quebra de barreiras e paradigmas relacionados às dificuldades em matemática. Ao professor, pois o mesmo tem em primeiro lugar o dever de cumprir com o seu dever profissional, procurando meios metodológicos adequados para o ensino e aprendizagem; ao aluno, pois o mesmo precisa ter discernimento de que a matemática é uma disciplina que o ajuda a compreender várias situações cotidianas; a escola, pois é instituição responsável pela educação dos indivíduos; a família, visto que se trata da base para a formação de caráter e validação da vida.

Ainda no que se refere ao professor, destacamos que, para sanar tais dificuldades, a busca do conhecimento técnico e pedagógico desempenha um papel crucial na identificação e superação dos problemas de aprendizagem dos alunos na matemática. Um professor preparado não apenas domina os conceitos matemáticos, mas também compreende as diferentes formas de aprendizado dos alunos, identificando lacunas no entendimento e adaptando sua abordagem de ensino para atender às necessidades individuais. Além disso, o educador, quando bem informado sobre estratégias de ensino eficazes pode oferecer suporte personalizado, fornecer explicações claras e exemplificações pertinentes, criando um ambiente de aprendizagem que promova a confiança e o engajamento dos alunos.

Diante do exposto, entedemos que

> o conhecimento pedagógico representa uma combinação entre o conhecimento da matéria e o conhecimento do modo de como ensinar. O conhecimento pedagógico compreende as formas de representação das ideias, as analogias, ilustrações, exemplos, explicações e

> demonstrações, ou seja, a forma de representar e formular a matéria para torná-la compreensível para os estudantes (Shulman, 1986 *apud* Rocha; Aguiar, 2012, p. 4).

Portanto, fica evidenciado que, quando se traz os conceitos para a realidade dos alunos, torna-se a aprendizagem mais tangível e significativa, demonstrando assim a relevância da matemática nas suas vidas. Nessa perspectiva, aumenta-se a motivação e a compreensão. Aliado a essa ideia é válido ressaltarmos o que diz Grossnickle e Brueckner (1965, p. 16), "acredita-se que experiências dirigidas asseguram o progresso em direção aos objetos desejados". Com isto, podemos afirmar que a superação das dificuldades na matemática pelos alunos é facilitada quando combinam sua busca por aprendizado com a contextualização fornecida pelo professor.

Feita essas considerações, ao se delimitar os conceitos matemáticos sobre Análise Combinatória, "muitos discentes encontram dificuldades em entender e usar o seu entendimento para reconhecer os diferentes tipos de problemas de contagem." (Handaya, 2017, p. 13), o que é corroborado por Carvalho (2017, prefácio):

> [...] um tema que, paradoxalmente, é extremamente simples, mas é muitas vezes considerado difícil por alunos e professores. Talvez isto se deva ao fato de que, diferentemente do que ocorre com outros assuntos da matemática secundária, cujo ensino muitas vezes é fortemente baseado na aplicação de fórmulas e repetição de problemas-modelo, é preciso pensar para resolver problemas, mesmo os mais simples, de contagem.

Diante do exposto, constatamos que os entraves para a resolução de problemas de combinatória, são, na maior parte das vezes, interpretar de maneira correta e saber usar os diferentes métodos da Análise Combinatória. Na verdade, são muitas as indagações do tipo: "é um arranjo ou combinação?", "não é suficiente o princípio fundamental da contagem?", "por que multiplica e não soma?", "por que não é apenas uma combinação simples e sim com repetição?".

Diante dessas indagações, faz-se necessário o entendimento conceitual das definições e exemplos do que são os métodos de contagem. Por esse motivo, apresentamos alguns deles, que são: a) princípio aditivo, b) princípio multiplicativo, c) fatorial de um número, d) permutações simples, e) permutações com repetição, f) arranjos simples, g) combinações simples, h) combinações completas.

a) Princípio Aditivo da Contagem

Ao tratarmos do princípio aditivo da contagem, segundo Morgado *et al.* (2020, p. 14), “se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $\boldsymbol{A \cup B}$ possui p + q elementos”. Para exemplificar, numa situação em que uma pessoa tenha quatro shorts e cinco calças-jeans, ao seu dispor, diferentes entre si, tanto uma vestimenta quanto outra, ela poderá escolher 4 + 5 = 9 formas diferentes de vestir, tendo em vista que numa situação cotidiana não se usa calça e shorts ao mesmo tempo.

b) Princípio Multiplicativo da Contagem

O princípio fundamental da contagem (princípio multiplicativo) tem um papel importante para desenvolvimento e compreensão das demais técnicas de contagem, base para estudo dessa pesquisa. Do exposto, temos a definição de Carvalho (2017, p. 3), “se uma decisão $\boldsymbol{D_1}$ pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão $\boldsymbol{D_2}$ pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões $\boldsymbol{D_1}$ e $\boldsymbol{D_2}$ é igual a pq”.

Supomos que, numa situação corriqueira em que uma pessoa tenha cinco diferentes calças-jeans e sete blusas distintas, nesse caso, logicamente, essa pessoa terá 5x7=35 formas de se vestir.

c) Fatorial de um número

Particularmente sobre fatorial de um número, segundo Hazzan (2013, p.19), tomemos como exemplo **m** um número inteiro não negativo (m ∈ ℕ), definimos fatorial de m (e indicamos por m!) por meio da relação: $\boldsymbol{m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ para $\boldsymbol{m \geq 2}$. Decorre dessa definição, por exemplo, que para calcularmos o fatorial do número 5, teríamos $\boldsymbol{5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120}$.

d) Permutações Simples

Para problemas sobre organizar ou reorganizar elementos em filas, de acordo com Lima *et al* (2016, p. 85),

> De quantas modos podemos ordenar em fila n objetos distintos? A escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de n

> modos; a escolha do objeto que ocupará o segundo lugar pode ser feita de n – 1 modos; a escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de n – 2 modos etc. A escolha do objeto que ocupará o último lugar pode ser feita de 1 modo. A resposta é n(n – 1)(n – 2) . . . 1 = n!. Cada ordem que se dá aos objetos é chamada de uma permutação simples dos objetos. Assim, por exemplo, as permutações simples das letras a, b e c são (abc), (acb), (bac), (bca), (cab) e (cba). Portanto, o número de permutações simples de n objetos distintos é $\boldsymbol{P_n = n!}$

Face ao exposto, compreendemos que, ao organizarmos uma fotografia, por exemplo, em que dez pessoas da mesma família participarão dessa foto, existirão 10! = 3628800 formas diferentes de compor esse retrato.

e) Permutações com Repetição

De acordo com Lima *et al.* (2016, p. 86), "de modo geral, o número de permutações de n objetos, dos quais $\boldsymbol{\alpha}$ são iguais a A, $\boldsymbol{\beta}$ são iguais a B, $\boldsymbol{\gamma}$ são iguais a C, ..., é $\boldsymbol{P_n^{\alpha,\beta,\delta}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{\alpha}!\boldsymbol{\beta}!\boldsymbol{\gamma}!\ldots}$." Disto, podemos resolver questionamentos do tipo: quantos anagramas (palavras formadas a partir de outras mesmo tendo sentido ou não), desconsiderando o acento, há na palavra MATEMÁTICA? Como resposta, obteríamos $\frac{\mathbf{10!}}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = \mathbf{151200}$ anagramas.

f) Arranjos Simples

No que se diz respeito a arranjo simples, podemos citar que tais arranjos são muito úteis a situações do dia a dia nas quais há a necessidade de se calcular a quantidade de formas diferentes, como por exemplo, montar um *podium* para uma competição de corrida, onde há n competidores e apenas 3 colocações (1º, 2º e 3º lugar) no referido *podium*. Diante desta perspectiva,

> Arranjos simples são todos os grupos de k elementos distintos, escolhidos de um grupo de n elementos (onde $\boldsymbol{k \le n}$), que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos k elementos. A quantidade total desses grupos é denotada por $\boldsymbol{A_{n,k}}$ ou $\boldsymbol{A_n^k}$. Então, quantos grupos de k elementos distintos podemos tirar de n elementos? $\boldsymbol{A_{n,k} = A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)} \cdot \frac{\boldsymbol{(n-k)!}}{\boldsymbol{(n-k)!}} = \frac{\boldsymbol{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}}{\boldsymbol{(n-k)!}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{(n-k)!}}$ [...] (Pinto, 2014, p. 26-27)

Para mais esclarecimentos, de acordo com o que declara Pinto, podemos inferir que numa competição de corrida de rua, onde existem 10 competidores e somente 3 chegarão ao *podium*, existirão $\frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!} = \mathbf{10\cdot 9\cdot 8 = 720}$ formas de se montá-lo. Nesse caso, é válido observarmos que, ao trocarmos o 1º colocado pelo 2º, muda-se a configuração do *podium*. Assim, dizemos que a ordem dos elementos é uma variável a ser considerada.

g) Combinações Simples

Ao nos reportarmos a Hazzan (2013, p. 33), "seja M um conjunto com m elementos, isto é, M = $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_m}\}$. Chamamos de combinações dos m elementos, tomados r a r, aos subconjuntos de M constituídos de r elementos". Em outras palavras, trata-se de organizar os elementos em grupos que contenham r elementos, onde r é um número menor ou igual a m. Para complementar essa definição de combinações simples, o autor em tela, afirma que "[...] temos a fórmula do número de combinações: $\boldsymbol{C_{m,r}} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!\cdot(m-r)!}\ \forall\ \boldsymbol{m, r \in} \mathbb{N}^*, \boldsymbol{r < m}$.".

Assim, entendemos que numa situação cotidiana onde deve-se calcular o número de duplas para serem formadas num torneio de vôlei de praia que tenha um número de candidatos inscritos sendo igual a dez, teríamos como resposta: $\boldsymbol{C_{10,2}} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\cdot(10-2)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{2!\cdot 8!} = \frac{10\cdot 9}{2} = \mathbf{45}$ duplas. É válido então ressaltarmos que, nesse contexto, se trocarmos de posição dois jogadores de uma mesma equipe, a equipe não muda, ou seja, a ordem é irrelevante.

h) Combinações completas

Para diferenciarmos combinações simples de combinações completas, é oportuno ressaltarmos que, de acordo com Morgado *et al*. (2020, p. 41), em linhas gerais, "$\boldsymbol{C_n^p}$ é o número de modos de escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados, e $\boldsymbol{CR_n^p}$ é o número de modos de escolher p objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados". É válido ainda acrescentar que $\boldsymbol{C_n^p}$ é a simbologia usada para combinações simples e $\boldsymbol{CR_n^p}$ é a simbologia usada para combinações completas (ou com repetição). Além disso, trazemos a definição de combinações com repetição proposta por Mendes (2014, p. 31), qual seja: "o número de combinações completas pode ser obtido pela fórmula: $\boldsymbol{CR_n^p} = \boldsymbol{C_{n+p-1,p}} = \frac{(\boldsymbol{n+p-1})!}{\boldsymbol{p}!(\boldsymbol{n-1})!}$. Aqui podemos inferir que numa situação onde precisa-se comprar 6 bolas de sorvete numa sorveteria que oferece apenas 3 sabores existirão $\boldsymbol{CR_3^6} = \boldsymbol{C_{3+6-1,6}} = \frac{(\boldsymbol{3+6-1})!}{\boldsymbol{6}!(\boldsymbol{3-1})!} = \frac{\boldsymbol{8}!}{\boldsymbol{6}!\cdot\boldsymbol{2}!} = \boldsymbol{28}$ formas de efetuar essa compra, pois necessariamente haverá repetições de sabores, dado que 6 (número de bolas de sorvete) é um número maior que 3 (número de sabores disponíveis na sorveteria).

Face ao exposto, enfatizamos que o estudo sobre Análise Combinatória não termina em combinações completas, porém, as nossas contribuições se limitam aquilo que entendemos ser suficiente para o nosso trabalho a nível de aprendizagem regular no ensino médio. Para tanto, posteriormente, iremos apresentar cada um dos conceitos na perspectiva “pela compreensão” em uma SD que aborda tais tópicos do campo aqui tratado.

Podemos destacar ainda que Análise Combinatória é tema recorrente para os alunos que se submetem ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), o que é comprovado, a partir de dados, como mostraremos nos quadros 1 e 2, respectivamente, o quantitativo de questões do referido conteúdo em cada edição do referido exame e do Exame Nacional do Ensino Médio para Pessoas Privadas de Liberdade (ENEM PPL).

Quadro 1 - Quantitativo de questões de Análise Combinatória em cada edição do ENEM regular

ANO	QUANTIDADE DE QUESTÕES
2023	0
2022	2
2021	2
2020	2
2019	2
2018	1
2017	4
2016	2
2015	2
2014	1
2013	3

2012	3
2011	1
2010	1
2009	2

Fonte: Próprio Autor (2024)

Quadro 2 - Quantitativo de questões de Análise Combinatória em cada edição do ENEM PPL

ANO	QUANTIDADE DE QUESTÕES
2023	1
2022	0
2021	1
2020	3
2019	1
2018	1
2017	1
2016	0
2015	1
2014	1
2013	0
2012	0
2011	0
2010	0
2009	1

Fonte: Próprio Autor (2024)

A título de esclarecimentos, as situações-problema referentes aos quantitativos acima são, necessariamente, àquelas que contemplam apenas Análise Combinatória. Pontuamos isso tendo em vista que, de forma intencional, não consideramos as questões que abordam Análise Combinatória, por exemplo, no conteúdo probabilidade, posto que são assuntos correlatos.

Feitos os comentários, passamos a apresentar o nível de dificuldade dos itens da área de conhecimento Matemática e suas tecnologias do ENEM (2010-2022), de acordo com uma escala, de 350 a 1000, escala essa formulada pelo site zbs.com.br[1], indicando o nível de proficiência de cada item, os responsáveis pelo site se baseiam nos microdados fornecidos pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), como descrito no quadro 03.

É digno de nota que a aplicação das provas de Matemática e suas Tecnologias no ENEM ocorre em quatro diferentes formatos, distinguíveis por suas cores: rosa, azul, amarelo e cinza. Apesar das variações visuais, todas as versões apresentam as mesmas questões, sendo sua única diferença a disposição destas nas provas. Nesse contexto, o referido site opta por analisar especificamente as provas de cor amarela ao longo dos anos.

Quadro 3 - Descrição das questões de Análise Combinatória do ENEM (2010-2022)

ANO	Nº DA QUESTÃO	COD INEP DA QUESTÃO	DIFICULDADE	PROB. DE ACERTO	GABARITO
2022	157	86499	900	21%	B
2022	150	47309	800	26%	B
2021	139	117923	750	15%	A
2021	178	CÓDIGO NÃO ENCONTRADO	ANULADA	----------------------	ANULADA
2020	142	48864	850	19%	C
2020	170	30462	800	17%	E
2019	160	39708	950	20%	C
2019	137	83792	750	16%	C
2018	161	83742	850	25%	C
2017	149	82352	1000	8%	B
2017	167	60724	900	5%	E
2017	140	95803	700	23%	E
2017	141	38563	450	61%	E
2016	153	39762	850	14%	E
2016	157	40660	800	19%	A
2015	170	60361	850	20%	A
2015	142	82507	850	20%	C
2014	151	59581	950	23%	B
2013	161	43465	1000	35%	B
2013	158	31416	750	21%	A
2013	176	8412	1000	11%	A
2012	136	10547	650	18%	A
2012	173	9173	900	17%	C

[1] A ZBS, há mais de 20 anos, trabalha com processamento e análise de dados e entende que os microdados do ENEM são fundamentais para a sociedade conhecer e debater a situação da educação no Brasil. Desse modo, visando democratizar o acesso às informações contidas nos microdados do ENEM[...]. Para mais infomações acesse: https://www.zbs.com.br/enem. Acesso em: 30 de março de 2024.

2012	136	10547	650	18%	A
2011	174	70406	850	14%	E
2010	174	73123	850	27%	B

Fonte: Próprio autor com base nos dados do site zbs.com.br (2023)

Enfatizamos que, na quinta coluna, é apresentada a probabilidade de acerto diante de uma proficiência média de 500 pontos. A título de exemplo, um aluno teria 14% de chance de acertar a questão de código 70406, com uma referida proficiência média, enquanto na questão de código 73123, o mesmo aluno teria 27% de acerto. Nesta dissertação, não adentraremos na análise do porquê esse aluno teria chances diferentes dado que o nível de dificuldade das questões eram os mesmos. Face à nossa análise no que tange à escala de proficiência do ENEM, em que as questões de nível I são consideradas com proficiência inferior a 450, as questões de nível II são as que possuem proficiência maiores ou iguais a 450 e menores que 549,99; as questões de nível III são as que possuem proficiência maiores ou iguais a 550 e menores que 649,99; as questões de nível IV estão com proficiência maiores ou iguais a 650 e menor ou igual a 749,99 e as questões de nível V possuem proficiência maiores ou iguais a 750, constatamos que 0/25 = 0% seria considerada de nível I, 1/25 = 4% de nível II, 0/25 = 0% nível III, 3/25 = 12% nível IV e 21/25 = 84% de nível V. Tais dados revelam que a maior dificuldade incide nos níveis IV e V da escala de proficiência do ENEM, como explicitado na figura 3.

Figura 3 - Nível de dificuldade das questões do ENEM

I. Menor de 450
II. De 450 a 549,99
III. De 550 a 649,99
IV. De 650 a 749,99
V. Igual ou maior que 750,00

Fonte: INEP (Brasil, 2015)

De posse dessas informações, verificamos o quanto esse campo da matemática carece de atenção e de estratégias metodológicas com potencialidades para a aprendizagem do mesmo, implicando em significações para o aluno. Mas, afinal qual é a importância da Análise Combinatória? Ao recorrermos ao estudo de Santos (2013, p. 8), este autor nos diz que, “[...] é uma importante ferramenta que o cidadão inserido no mundo das informações, das novas tecnologias e do dia a dia das transações financeiras, necessita para resolver problemas reais”. Em outras palavras, como explicitado por Vazquez e Noguti (2004, p 32-33),

> A grande vantagem desse conteúdo é estimular a capacidade de abstração do estudante para resolver problemas, sendo possível desenvolver atividades contextualizadas socioculturalmente, aproximando-o da realidade, permitindo vivenciar situações próximas, que lhe possibilitam reconhecer a diversidade a qual o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nessa realidade, competência proposta pelo PCN+, Ensino Médio [...].

Feitas as considerações, ao tratarmos do Ensino Médio, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018, p. 529) apresenta como habilidade a ser aprendida por todos os alunos: “resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore”.

Dessa forma, entendemos que os professores dessa etapa da Educação Básica devem organizar o ensino de modo a possibilitar aos alunos apropriação desse conceito. Porém, o nosso desafio como professores não é de apenas expor o conteúdo em si, limitado a fórmulas e definições, mas contribuir intencionalmente para que o aluno se aproprie dos conceitos, produzindo significações dos mesmos, tendo como ponto de partida a sua realidade, o seu cotidiano.

À luz desse entendimento, sobre as habilidades referentes à Análise Combinatória, em conformidade com a BNCC (Brasil, 2018, p. 527), ressaltamos que

> [...] os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática. Para resolver esses problemas, eles devem, logo no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados, na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles devem aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente.

Desse modo, a produção de significados atrelado ao desenvolvimento do conteúdo matemático é uma necessidade, pois com isso os alunos irão descobrir concepções e processos e, dessa forma, aplicar formulações para resolver diversos problemas. Tendo em vista o que foi aqui explicitado, na próxima seção, apresentamos perspectivas metodológicas da resolução de situações-problema na aprendizagem matemática no ensino médio.

3 REVISITANDO PERSPECTIVAS METODOLÓGICAS DA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Iniciamos esta seção referindo-nos à ideia do conceito de problema a partir de algumas perspectivas metodológicas. Adiante, apresentamos possibilidades dentre as diferentes metodologias para a resolução de situações-problema. Feito isso, propomos situações-problema sobre Análise Combinatória “pela compreensão”, em que delineamos um esquema de resolução para esses tipos de problemas.

3.1 A ideia de problema

Para chegarmos às compreensões sobre resolução de problemas no ensino e aprendizagem da matemática, historicamente, partimos daquilo que se denominou de Movimento da Matemática Moderna (MMM), caracterizado, sobretudo pela supervalorização de axiomas, estruturas algébricas, lógica e pela Teoria de Conjuntos, como enfatizado por Pinto (2005, p. 2),

> Nas décadas de 1960 e 1970, um acontecimento que marcou a história da Educação Matemática e provocou mudanças significativas nas práticas escolares foi o Movimento da Matemática Moderna. Desencadeado em âmbito internacional, esse movimento atingiu não somente as finalidades do ensino, como também os conteúdos tradicionais da Matemática, atribuindo uma im-portância primordial à axiomatização, às estruturas algébricas, à lógica e aos conjuntos.

Ainda sobre o movimento em tela, é oportuno explicitar que, tanto no Brasil quanto no mundo, tentou-se consolidar tal movimento mediado por uma perspectiva metodológica limitada à abstração, o que, de certa forma, implicou no ensino vigente na época. Por que afirmamos isso? Como destaca Pinto (2005), foi um período marcado por práticas avaliativas em que, por exemplo, as provas de matemática, delimitando o Brasil, eram restritas a questões não contextualizadas.

Ainda sobre essa problemática, houve omissão de questões de geometria, o que implicou de forma notória em um número aumentado de erros, em comparação às provas aplicadas em períodos anteriores (Pinto, 2005). Assim, sobre a concepção e continuidade do período considerado como MMM, na verdade, da maneira abrupta como começou, tão logo perdeu o seu real sentido, dadas às seguintes circunstâncias:

> A exigência de formulações mais claras em termos metodológicos se dava num quadro onde, de um lado, as promessas iniciais do

> movimento se confrontavam com uma implementação não planejada de elementos da matemática moderna e que colocava em xeque as promessas de uma matemática acessivel a todos e, outro lado, se aprofundava um desgaste da proposta nos mesmos paises em que havia sido elaborada, que alimentava e autorizava criticas à matemática moderna por parte de professores brasileiros (Burigo, 1989, p. 209-210).

Face ao exposto, diante da necessidade de metodologias com potencialidades para organização do ensino da matemática, embora com o MMM, o conflito entre as expectativas iniciais do referido movimento em decorrência de uma implementação não planejada, ou seja, desorganizada, comprometeu a sua função social e, logicamente, a sua acessibilidade universal. Somado a isso, tem-se a deterioração dessa proposta nos países de origem, determinando, então, o fim de sua existência e proliferação.

Apresentadas as considerações sobre o MMM, evidenciamos que a resolução de problemas, conforme destaca Moretti (2014, p. 30), "[...] ganhou força no último século, especialmente após as contribuições do matemático húngaro George Polya [...] com a publicação, em 1945, do livro *How to Solve it* [...]". No entanto, ainda segundo a autora, "[...] a resolução de problemas tenha sido relegada a um segundo plano, ela retoma força a partir da década de 1980, quando passa a ser indicada como foco do currículo de Matemática" (Moretti, 2014, p. 30).

Haja vista as considerações anteriores, se faz necessário discutirmos sobre a ideia do que vem a ser um problema. Segundo Pozo (1998, p. 16), fundamentado em Pozo e Postigo (1993), "[...] é, de certa forma, uma situação nova ou diferente do que já foi aprendido, que requer a utilização estratégica de técnicas já conhecidas". Nesse entendimento, aplicar de forma direta um conhecimento ou conceito já vivenciado para solucionar uma situação do dia a dia não pode ser interpretado como resolver um problema, o que nos faz compreender que, nessa perspectiva, a ideia de problema supera o método trivial de repetição de ideias e pensamentos.

Em conseguinte, especificamente no que se refere à resolução de problemas matemáticos, em conformidade com Allevato e Onuchic (2014, p.36-37),

> A importância dada à Resolução de Problemas, no contexto da sala de aula de Matemática, é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção [...] a fase da Resolução de Problemas se apresenta, a partir dos anos 1980, quando as principais teorias de aprendizagem eram o

> Construtivismo, a Psicologia Cognitiva e a Teoria Sociocultural de Vygotsky, e o foco das teorias de aprendizagem eram voltadas aos processos de pensamento matemático. A meta, nessa fase, era a volta à aprendizagem por descoberta, construída através da resolução de problemas.

Do exposto, entendemos que essa metodologia ressurge, dando vez ao processo do pensar matemático, uma vez que o construtivismo tem como visão, a aprendizagem baseada no princípio de que o conhecimento não é algo que pode ser simplesmente repassado pelo professor aos alunos, ao invés disso, o conhecimento é construído por aluno e professor por um processo ativo e mental de desenvolvimento.

Assim, ao nos reportarmos a problemas matemáticos, pautados em Polya (1978), Thompson (1989), Allevato e Onuchic (2014), Van de Walle (2009), Saviani (2000), o problema matemático é assim descrito por Romanatto (2012, p. 301), "[...] uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la". Nessa perspectiva, entendemos que os problemas são voltados a situações já vivenciadas em algum momento para, a partir daí, seguir uma sequência lógica de estratégias a fim de buscar a solução do mesmo.

Diante dessa perspectiva sobre problema matemático, acrescenta Polya (2006, p. V):

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

Assim, Polya deixa claro que o novo precede o problema e sempre há uma novidade na resolução de seja qual for o problema, além de ressaltar que independente da dificuldade do mesmo, quando resolvido através dos mecanismos necessários, suscitará em vantagem. Além disso, deixa evidente que as ideias de resolução para aquele problema ficam armazenadas para o resto da vida.

Nesse contexto, compartilhando da idéia de que "fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar-lhe situações-problema que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las" (Dante, 2007, p. 11), entendemos que a prática da compreensão e resolução de situações-problema matemáticos instigam o aluno a pensar e não simplesmente decorar uma solução.

Vale ressaltarmos que, exercitar o raciocínio do aluno é uma tarefa nata da prática de resolução de situações-problema uma vez que há a necessidade de "[...] desenvolver no aluno a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seus dia a dia, na escola ou fora dela" (Dante, 2007, p.11-12). Portanto, a utilização da metodologia em pauta corrobora para a criação de ideias que serão eficazes para situações parecidas em que se apresentarem enquanto desafios no decorrer de sua vida.

Face às discussões aqui empreendidas sobre a ideia de problema e problemas matemáticos, na subseção seguinte apresentamos metodologias voltadas para resolução de situações-problema, destacando as contribuições e diálogos de pesquisadores que trabalham com a problemática de metodologias na resolução de situações-problema.

3.2 Possibilidades metodológicas na resolução de situações-problema

Partindo do ponto de que a aprendizagem baseada em problemas se configura como um método educacional cujo propósito é proporcionar ao discente a capacidade de aplicar conceitos fundamentais, conjugando a prática de conhecimentos previamente adquiridos com a aquisição autônoma de novos saberes, entendemos que é primordial o uso da mesma para possibilitar o desenvolvimento pleno do ensino e aprendizagem da matemática. Por esta ótica, Allevato e Ononuchic (2014, p. 71) explicitam que "a resolução de problemas tem sido a força propulsora para a construção de novos conhecimentos e, reciprocamente, novos conhecimentos proporcionam a proposição e resolução de intrigantes e importantes problemas".

Por conseguinte, Mendes (2009, p. 71), assim complementa:

> Os estudos e pesquisas sobre resolução de problemas apontam duas concepções complementares da atividade de resolver problemas. A primeira é uma tentativa de entender e descrever como o aluno resolve problemas, portanto, é uma tentativa de delinear quais as características de bons resolvedores de problemas. A segunda é uma tentativa de ensinar o aluno a ter um bom desempenho na resolução de problemas, com a elaboração de certas sequências didáticas a

> serem usados de forma consciente e sistemática pelo aluno, nas suas atividades heurísticas.

Tais contribuições teóricas nos fazem entender e reforçar a ideia de que a prática na resolução de problemas, no geral e especificamente na matemática, faz com que o aluno se sinta autônomo e coautor de suas conquistas de aprendizagem, criando, assim, uma ideia de que matemática se faz com a prática, ao passo que o professor é um propulsor do conhecimento e age de maneira a criar condições objetivas e subjetivas para o desempenho favorável na aprendizagem através de aulas bem planejadas que abordem essa metodologia.

Faz oportuno destacarmos que, a resolução de problemas como metodologia de ensino "visa o desenvolvimento de habilidades metacognitivas, favorecendo a reflexão e o questionamento" (Mendes 2009, p. 71). Tal perspectiva se contrapõe, portanto, àquelas que implicam no ensino unicamente voltado à memorização e às aulas expositivas, em que o professor se configura como centro e o aluno, consequentemente, um sujeito passivo, apenas ouvinte.

Dito isso, enfatizamos que os primeiros trabalhos sobre resolução de problemas foram desencadeados e amplamente conhecidos por meio de George Polya, através de seu livro "A arte de resolver problemas". Nessa obra, o autor (2006, p.4) destaca que,

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentamos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.

Portanto, fica evidenciado que no processo da resolução de problemas se faz necessária o emprego da prática por imitação de situações já vivenciadas. Dessa forma, a partir da observação e imitação de estratégias empregadas por terceiros na resolução de problemas matemáticos, acabamos por reproduzir tais estratégias e, assim, sozinhos resolvemos problemas novos e/ou semelhantes.

Para além dessa possibilidade de resolução de problemas, é interessante explicitar quatro fases consideradas essenciais nesse processo (Polya, 2006), a saber: 1 – compreesão do problema: perceber claramente o que é necessário; 2 –

estabelecimento de um plano: ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para ter a ideia da resolução e, assim, estabelecer um plano; 3 – execução do plano; 4 – retrospecto: rever e discutir a questão.

Por outra ótica, no que se refere ao ensino para a resolução de problemas, Allevato e Ononuchic (2014, p.37-38) apontam que,

> O ensino para a resolução de problemas, atualmente preferimos denotar ensino de Matemática para a resolução de problemas. Essa mudança quer destacar o fato de que o eixo de sustentação dessa abordagem não está mais na Resolução de Problemas, mas na matemática, tendo a resolução de problemas como um apêndice, um acessório. Nessa visão, a matemática é considerada utilitária de modo que, embora a aquisição de conhecimento matemático seja de primordial importância, o propósito principal do ensino é ser capaz de utilizá-lo.

Assim, em síntese, entendemos que a resolução de problemas é uma estratégia metodológica com potencialidades, quando utilizada de maneira prática, na apropriação do conhecimento matemático. Dessa forma, reforçamos o entendimento de que não se trata simplesmente de uma técnica, mas, sim de uma metodologia de ensino e aprendizagem.

Feito os comentários, na subseção seguinte, apresentamos contribuições na perspectiva da resolução de problemas “pela compreensão”. Para isso, expomos e resolvemos através de um esquema de nossa autoria, situações-problema do ENEM e de outros exames com foco na Análise Combinatória.

3.3 Situações-problema envolvendo a Análise Combinatória “pela compreensão”

O ato de compreender é nada mais do que produzir significado de algo, ou seja, ter entendimento daquilo que se estuda ou analisa. Para isso, na literatura que versa sobre o ensino e aprendizagem da matemática, podemos dizer que a maior parte das metodologias (ou estratégias de ensino e aprendizagem) são, prioritariamente, mecanismo com possibilidades de mediar tal processo.

A título de exemplo, destacamos o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória “pela compreensão”, que tem como base a investigação, exploração e adaptação de um clássico da literatura matemática - “O Ensino de Aritmética pela compreensão” - de Grossnickle e Brueckner (1965).

Embora que neste estudo o conceito central seja outro, ou seja, trata-se da Análise Combinatória, corroboramos das reflexões de Grossnickle e Brueckner (1965, p. 13) de que, dentre outros problemas encontrados pelo professor, esses podem estar relacionados às categorias: 1. Currículo; 2. Ensino; 3. Avaliação. No entanto, por considerar o nosso objeto de estudo, nos atemos, de modo particular, às duas primeiras categorias.

No que tange ao currículo, a organização do ensino da Análise Combinatória deve ser sistemática e, logicamente, planejada, de modo que o aluno reconheça a contribuição que esse conceito matemático tem possibilitado ao progresso científico, tecnológico e social. Portanto, nessa perspectiva, o aluno

> [...] deve participar de atividades que tenham significação, de maneira que possa apreciar o papel das medidas na vida [...] precisa ser realístico e funcional [...] participação real em estudos cooperativos e solução de problemas significativos que emergem da vida escolar e da comunidade concernentes **ao aluno** são a experiência mais valiosa na vida democrática (Grossnickle; Brueckner, 1965, p. 13, grifo nosso).

Especificamente sobre o ensino, Grossnickle e Brueckner (1965), os professores devem participar de formação de modo que os processos de ensino sejam relacionados às atuais teorias e perspectivas metodológicas de aprendizagem. Ademais, o professor deve criar condições para que a sala de aula se constitua em um ambiente de aprendizagem estimulante e atrativo. Para isso, devem empregar recursos da comunidade de modo a fortalecer e dar significado a aprendizagem dos conceitos matemáticos trabalhados.

Nessa mesma lógica, encontramos em Oliveira e Borralho (2014, p. 149) que,

> A seleção de tarefas significativas para a aprendizagem matemática tem merecido uma atenção especial por parte da comunidade de investigação, sendo visível no nosso país um desenvolvimento importante no número de estudos que se desenrolam a partir da realização de unidades de ensino ou sob a forma de experiências de ensino, no contexto dos quais as tarefas assumem um papel estruturante relativamente à atividade matemática que é esperada ocorrer na sala de aula.

Diante do exposto, consideramos crucial a determinação de estudos e contribuições para propostas didáticas no âmbito de estratégias de ensino e aprendizagem da matemática, em especial, sobre a Análise Combinatória, objeto de estudo dessa investigação.

Por conseguinte, sobre a resolução de problemas "pela compreensão", é oportuno ainda ilustrarmos tal perspectiva nos valendo do famoso seriado "Todo Mundo Odeia o Chris", exibido no ano de 2006. No seu contexto, tem-se o personagem Chris, em que enfrenta dificuldades para aprender Álgebra, decorrente dos métodos de aprendizagem empregados pela professora, pois são tradicionais. Ao perceber suas dificuldades, Chris decide compartilhar a problemática com sua mãe, a qual se prontifica a ajudá-lo. No entanto, termina utilizando um método que também é tradicional, pois se baseia na mera exposição do conteúdo que, consequentemente, se mostra ineficaz.

Assim, diante de várias tentativas infrutíferas, Chris recorre à sua avó na esperança de obter algum sucesso na compreensão da aprendizagem de Álgebra, sobretudo, equações do 1º grau. Inicialmente, a avó também enfrenta desafios na busca de estratégias que possam proporcionar uma aprendizagem estimulante, atrativa e significativa. Contudo, ao observar que Chris tem interesse por *baseball*, ela passa a contextualizar problemas envolvendo esse conceito matemático, ao reconhecer que se trata do seu esporte favorito. E, finalmente, se observa que ao apresentar situações problemáticas relacionadas ao seu cotidiano, Chris passa a produzir significados sobre equações.

Assim, este cenário, certamente, ilustra a importância de pensarmos e adotarmos estratégias métodologicas de ensino que tenham como ponto de partida as reais necessidades e interesses individuais dos alunos. Fica evidenciado, então, que o ensino tradicional, centrado na simples exposição e memorização do conteúdo, pode implicar no insucesso do aluno.

Desse modo, a contextualização e a problematização do ensino e aprendizagem de equações ou de quaisquer outros conceitos matemáticos, como trabalhado na perspectiva adotada pela avó de Chris, se apresentam como estratégias essenciais para promover uma aprendizagem significativa, ou seja, com produção de significados.

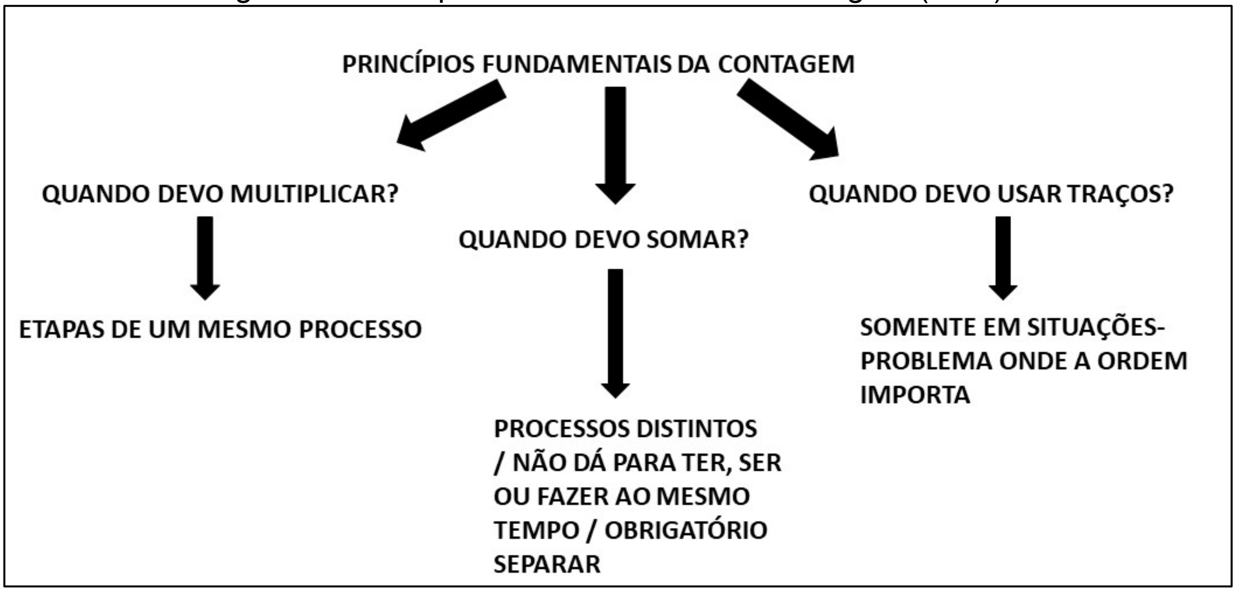
Nesse contexto, na história de Chris evidencia-se que, para superar dificuldades de aprendizado, é crucial considerarmos as particularidades e vivências de cada aluno e buscar métodos que os engajem de forma mais direta e prática. No entanto, como destacam Grossnickle e Brueckner (1965, p.13), o aluno “deve participar de atividades que tenham significação, de maneira que possa apreciar o papel das medidas na vida”. Esses mesmos autores ainda complementam:

> Isto inclui o desenvolvimento de interêsses sociais desejáveis, atitudes, apreciações e tipos de comportamento básicos à nossa vida democrática. Partipação real em estudos cooperativos e solução de problemas significativos que emergem da vida escolar e da comunidade concernentes à criança são a experiência mais valiosa na vida democrática (Grossnickle e Brueckner, 1965, p. 14).

Podemos então inferir que resolver situações-problema relacionando-as ao cotidiano do aluno se apresentam como possibilidade de uma compreensão não somente do problema em si, mas, em especial da aprendizagem dos conceitos matemáticos.

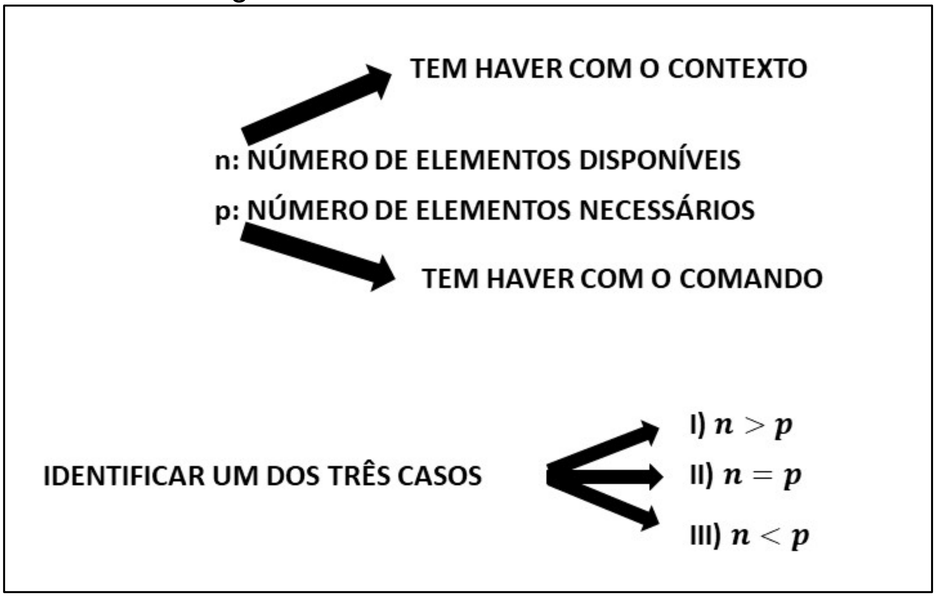
A seguir, com base nas discussões teórico-metodológicas aqui empreendidas, apresentamos um esquema idealizado por esse pesquisador, distribuído nas figuras 4, 5, 6, 7 e 8. A intencionalidade é a de auxiliar na identificação de métodos de contagem adequados para resolução de situações-problema que envolvam Análise Combinatória. Tais métodos estão embasados na perspectiva do ensino e aprendizagem “pela compreensão”, a qual é apresentada no formato da SD (Produto Educacional), disponibilizada na seção 4 da presente dissertação.

Figura 4 - Príncípios Fundamentais da Contagem (PFC)



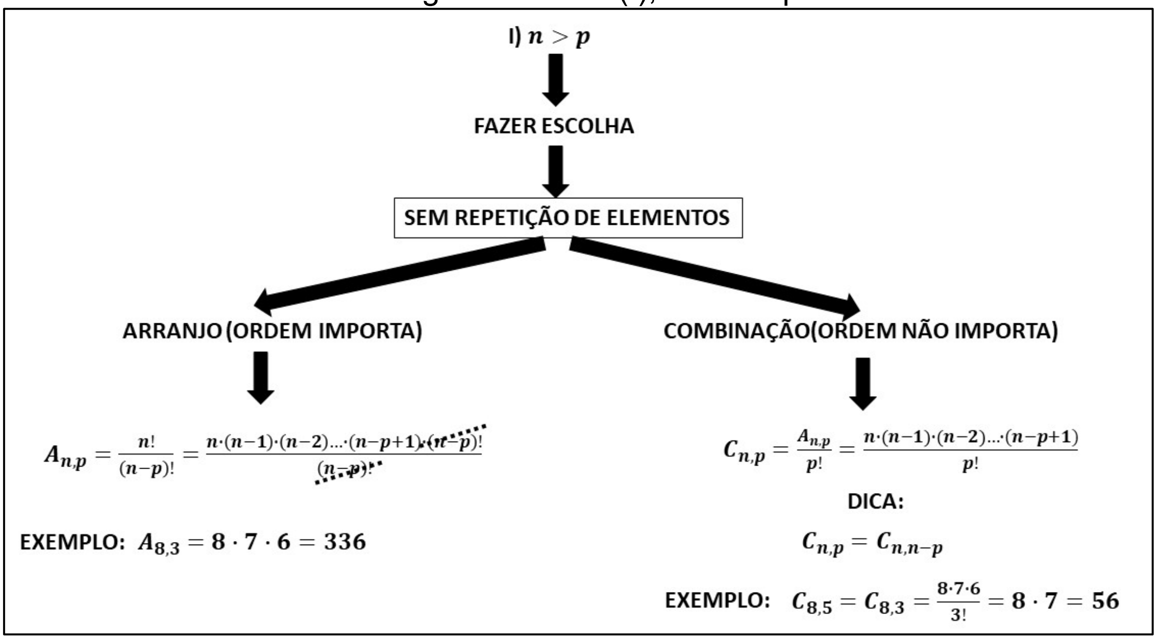
Fonte: Próprio autor (2024)

Figura 5 - Casos da Análise Combinatória



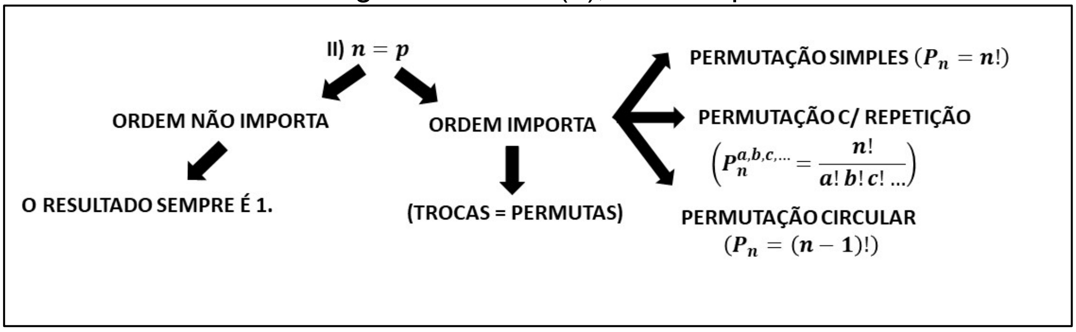
Fonte: Próprio autor (2024)

Figura 6 - caso (I), onde n>p



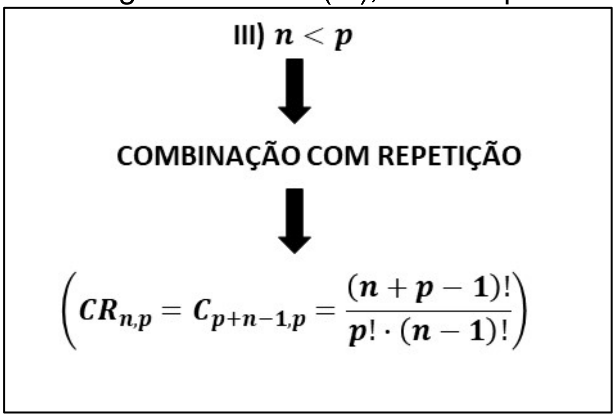
Fonte: Próprio autor (2024)

Figura 7 - Caso (II), onde n=p



Fonte: Próprio autor (2024)

Figura 8 - Caso (III), onde n<p

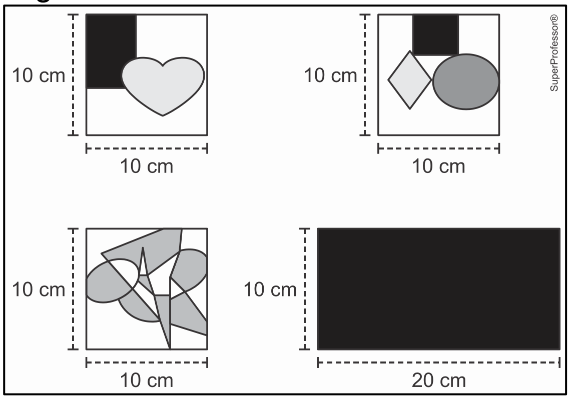


Fonte: Próprio autor (2024)

Diante do exposto, apresentamos situações-problema do ENEM PPL, bem como de outros exames tradicionais do Brasil que envolvem Análise Combinatória e suas respectivas resoluções "pela compreensão", em conformidade com o esquema descrito anteriormente, representado pelas figuras 4, 5, 6, 7 e 8.

PROBLEMA 01 (ENEM PPL – 2023): Uma costureira tem à sua disposição pelo menos duas unidades de cada um dos quatro tipos de retalhos retangulares com as estampas e os tamanhos apresentados.

Figura 9 - Questão do Enem PPL 2023



Fonte: Disponível em: https://interno.superprofessor.com.br/montar-prova

Para confeccionar um tapete em formato retangular da $10cm \times 50cm$, ela utilizará os retalhos, na posição indicada na figura, costurando um lado de um a um lado do outro, sem que haja rotações desses retalhos. O modelo de tapete que pretende confeccionar deverá conter um único retalho de $10cm \times 20cm$ e mais três retalhos de formato $10cm \times 10cm$, sendo que retalhos de mesma estampa não poderão ficar lado a lado. Quantos modelos diferentes de tapetes poderão ser confeccionados?

a) 12

b) 24

c) 34

d) 48

e) 60

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, informamos que se trata de um problema em que, para compor o tapete, temos que escolher os retalhos a serem usados (etapas de um mesmo processo). Logo, devemos utilizar os princípios fundamentais da contagem (princípio aditivo e princípio multiplicativo).

Compreendemos, assim, que para a peça de 10cmx20cm, temos quatro opções para encaixá-la. Para isso, representamos por $\langle \square \rangle$ a posição do retalho de 10cm×20cm e, desse modo, há as seguintes possibilidades:

$\langle 1 \rangle \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ (etapas de um mesmo processo)

$3 \cdot \langle 1 \rangle \cdot 3 \cdot 2 = 18$ (etapas de um mesmo processo)

$3 \cdot 2 \cdot \langle 1 \rangle \cdot 3 = 18$ (etapas de um mesmo processo)

$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \langle 1 \rangle = 12$ (etapas de um mesmo processo)

Do exposto, podemos observar que as quatro opções são processos diferentes, pois não é possível termos todas elas ao mesmo tempo. Decorre disso a obrigatoriedade de separá-las em “casos”. Feito isso, somamos as quantidades encontradas em cada processo e, consequentemente, chegaremos à resposta correta:

$$\boxed{\mathbf{12+18+18+12=60}\ (\boldsymbol{ALTERNATIVA\ E})}$$

PROBLEMA 02 (ENEM PPL – 2014): Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas. Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por

a) 100.

b) 90.

c) 80.

d) 25.

e) 20.

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, informamos que se trata de um problema em que, para compor as novas senhas, precisamos usar os dois espaços (início e fim) entre dois disponíveis (etapas de um mesmo processo). Logo, devemos utilizar os princípios fundamentais da contagem (princípio multiplicativo).

Compreendemos, assim, que há 5 vogais que podem ser maiúsculas ou minúsculas, resultando em 10 possibilidades. Portanto, o número de senhas antigas será multiplicado por:

$$\boxed{\mathbf{10 \cdot 10 = 100}\ (\boldsymbol{ALTERNATIVA\ A})}$$

PROBLEMA 03 (ENEM PPL – 2019): Uma pessoa comprou um aparelho sem fio para transmitir músicas a partir do seu computador para o rádio de seu quarto. Esse aparelho possui quatro chaves seletoras e cada uma pode estar na posição 0 ou 1. Cada escolha das posições dessas chaves corresponde a uma frequência diferente de transmissão. A quantidade de frequências diferentes que esse aparelho pode transmitir é determinada por

a) 6.

b) 8.

c) 12.

d) 16.

e) 24.

RESOLUÇÃO:

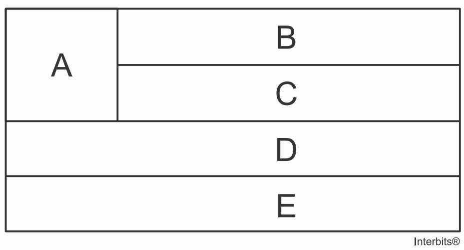
Inicialmente, informamos que se trata de um problema em que, para compor a frequência, precisamos usar as 4 chaves seletoras (etapas de um mesmo processo). Logo, devemos utilizar os princípios fundamentais da contagem (princípio multiplicativo).

Compreendemos, assim, que para cada chave seletora há 2 posições diferentes. Portanto, a quantidade total de combinações será:

$$\boxed{\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16\ (\mathit{ALTERNATIVA\ D})}}$$

PROBLEMA 04 (ENEM PPL – 2015): A bandeira de um estado é formada por cinco faixas, A, B, C, D e E, dispostas conforme a figura.

Figura 10 - Questão do Enem PPL 2015



Fonte: Disponível em: https://interno.superprofessor.com.br/montar-prova

Deseja-se pintar cada faixa com uma das cores verde, azul ou amarelo, de tal forma que faixas adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor. O cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira, com a exigência acima, é

a) $1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$.

b) $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$.

c) $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 3$.

d) $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2$.

e) $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, informamos que se trata de um problema em que, para a bandeira estar pronta, é preciso pintar as 5 faixas (etapas de um mesmo processo). Logo, devemos utilizar os princípios fundamentais da contagem (princípio multiplicativo).

Compreendemos, assim, que para começar a pintar as faixas, iniciamos pela faixa A, que tem 3 possibilidades de escolha de cores. Em seguida, para a faixa B, temos 2 possibilidades de cores (uma cor já foi usada na faixa A), e para a faixa C, temos apenas uma possibilidade de escolha (duas cores já foram usadas nas faixas A e B). Para a faixa D, podemos usar uma das três cores disponíveis (não podemos usar a cor da faixa C, nem de A), e para a faixa E temos duas possibilidades de escolha (não podemos usar a cor da faixa D). Portanto, teremos:

$$\boxed{\mathbf{3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2\ (\mathit{ALTERNATIVA\ B})}}$$

PROBLEMA 05 (ENEM PPL – 2021): Um diretor esportivo organiza um campeonato no qual haverá disputa de times em turno e returno, isto é, cada time jogará duas vezes com todos os outros, totalizando 380 partidas a serem disputadas. A quantidade de times (x) que faz parte desse campeonato pode ser calculada pela equação

a) $x = 380 - x^2$

b) $x^2 - x = 380$

c) $x^2 = 380$

d) $2x - x = 380$

e) $2x = 380$

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, informamos que se trata de uma situação em que o número de times (n=x) é maior que o número de times em cada partida (p=2), ou seja, n>p.

Compreendemos, assim, que a ordem é relevante, dado que uma disputa é de turno e a outra de returno. Logo, trata-se de Arranjos. Portanto, aplicamos:

$$\boxed{\boldsymbol{A_{x,2} = x \cdot (x-1) = 380 \iff x^2 - x = 380. (ALTERNATIVA\ B)}}$$

PROBLEMA 06 (ENEM PPL – 2020): A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas.
Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro. De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por

a) 5

b) $5 \cdot 3$

c) $\frac{5!}{(5-3)!}$

d) $\frac{5!}{(5-3)!2!}$

e) $\frac{5!}{(5-3)!3!}$

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, informamos que se trata de um problema em que temos n=5 opções de variedades de flores para serem plantadas, mas somente p=3 serão utilizadas nos canteiros, ou seja, n>p.

Compreendemos, assim, que como a ordem não é relevante, temos um problema de combinação simples. Portanto, aplicamos:

$$\boxed{\boldsymbol{C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} (ALTERNATIVA\ E)}}$$

PROBLEMA 07 (UECE 2023): Na mesa redonda utilizada para reuniões da Presidência da República, há um lugar fixo para ser ocupado pelo Presidente e outros 22 lugares para serem ocupados pelos ministros, todos igualmente espaçados. Estando presentes todos os 22 ministros e o Presidente, de quantas maneiras distintas podem ser ocupados os assentos?

a) 23!.

b) 23! – 22!.

c) 22!.

d) 22! + 23!.

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, informamos que se trata de um problema em que temos n=22 lugares para serem ocupados pelos ministros, e p=22 ministros ocuparão esses lugares, ou seja, n=p. É importante ressaltar que não se trata de uma questão de permutação circular, pois o Presidente ocupa um lugar fixo na mesa.

Compreendemos, assim, que como n=p, trata-se de um problema de permutação simples. Portanto, aplicamos:

$$\boxed{\boldsymbol{P_{22} = 22!\,(ALTERNATIVA\ C)}}$$

PROBLEMA 08 (UNISINOS 2022): Um anagrama é uma palavra ou frase formada pela permutação das letras de outra palavra ou frase. Como exemplos, podemos citar: repito é um anagrama de perito, frutas, de trufas. Na contagem de anagramas são permitidas palavras que não fazem sentido, como rraaa, que seria um anagrama de arara. Quantos anagramas distintos podemos formar com a palavra UNISINOS?

a) 64

b) 2520

c) 5040

d) 20160

e) 40320

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, informamos que se trata de um problema em que temos n=8 letras na palavra "UNISINOS" e, para compor os anagramas, serão usadas as p=8 letras, ou seja, n=p.

Compreendemos, assim, que dentre as letras disponíveis existem repetições: I (2 repetições), N (2 repetições), S (2 repetições). Portanto, trata-se de uma permutação com repetição.

Consideramos as trocas das 8 letras e desconsideramos as trocas das letras repetidas. Portanto, aplicamos:

$$\boxed{\boldsymbol{P_8^{2,2,2}} = \frac{\mathbf{8!}}{\mathbf{2!\,2!\,2!}} = \mathbf{5040}\ (\boldsymbol{ALTERNATIVA\ C})}$$

PROBLEMA 09 (Faculdade de Ciências Médicas de Minas Gerais 2022): Diferentes protocolos de segurança foram elaborados para o enfrentamento da pandemia de Covid-19. No ambiente escolar, uma das orientações comuns para o retorno às salas de aula relaciona-se com a organização em “bolhas”. O modelo consiste em determinar horários e ocupações de locais específicos para cada turma, evitando ao máximo o contato entre alunos de turmas diferentes. Pensando em também reduzir o contato entre estudantes de uma mesma turma, certa escola optou por criar equipes fixas de seis estudantes. Para isso, mudou a disposição das carteiras das salas, reorganizando-as em formato hexagonal, como o esquema representado na figura abaixo.

Figura 11 - Questão da Faculdade de Ciências Médicas de Minas Gerais

(Disponível em https://www.powtoon.com/.Acesso em 26/10/2021. Adaptado.)

Fonte: Disponível em: https://interno.superprofessor.com.br/montar-prova

Considerando o modelo adotado pela escola, seis estudantes de determinada equipe podem ser dispostos ao redor do formato hexagonal de:

a) 20 formas.

b) 30 formas.

c) 120 formas.

d) 720 formas.

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, entendemos que são n=6 estudantes disponíveis de uma equipe, e p=6 desses estudantes, ocuparão os locais na mesa hexagonal (circular), ou seja, n=p, configurando um problema de permutação circular, portanto, aplicamos:

$$\boxed{\boldsymbol{PC_6 = (6-1)! = 5! = 120\ (ALTERNATIVA\ C)}}$$

PROBLEMA 10 (Puccamp Direito 2023): Marcos foi comprar 5 canetas. As cores disponíveis eram preta, azul e vermelha. O número de maneiras distintas com que Marcos pode escolher as 5 canetas é:

a) 18

b) 19

c) 20

d) 21

e) 22

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, entendemos que há n=3 cores disponíveis e precisa-se comprar p=5 canetas, ou seja, trata-se de um problema onde n<p, portanto, utilizaremos uma combinação com repetição. Com esse entendimento, encontramos:

$$\boxed{\boldsymbol{CR_{3,5} = C_{5+3-1,5} = \frac{(5+3-1)!}{5! \cdot (3-1)!} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2!} = 21\ (ALTERNATIVA\ D)}}$$

4 PRODUTO EDUCACIONAL: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM SITUAÇÕES-PROBLEMA ABORDANDO A ANÁLISE COMBINATÓRIA “PELA COMPREENSÃO”

Nesta seção, como Produto Educacional, apresentamos uma Sequência Didática (SD) contemplando situações-problema sobre Análise Combinatória “pela compreensão” a fim de que os professores do Ensino Médio a utilizem enquanto metodologia de ensino e aprendizagem. Dito isso, chegamos ao seguinte questionamento: o que é uma SD? De acordo com Peretti e Costa (2013, p. 6), se trata de

> [...] um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido.

Diante do exposto, compreendemos que uma SD é um bloco estruturado de atividades interligadas, meticulosamente planejadas para o ensino progressivo de um conteúdo. Organizadas conforme os objetivos de aprendizagem, essas atividades incluem avaliações e podem se estender por diversos períodos. Essa metodologia permite uma integração temática que torna o conhecimento coerente com a atividade pedagógica, o que é corroborado por Zabala (2018, p. 18) ao explicitar que nada mais é do que “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”.

Por conseguinte, vale ressaltarmos que a estrutura da referida SD se constitui dos seguintes tópicos: a) Princípios Fundamentais da Contagem; b) $n>p$; c) $n=p$; d) $n<p$. Para isso, nos valemos das considerações sobre currículo no ensino e aprendizagem da Análise Combinatória, de modo particular, segundo as ideias de Grossnickle e Brueckner (1965).

Objeto do Conhecimento: Análise Combinatória

Habilidade:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

Recursos didáticos:

- Quadro de acrílico e pincéis

Aula 1: Introdução à Análise Combinatória e Princípios Fundamentais da Contagem (PFC)

Apresentação Inicial:

A Análise Combinatória é um ramo da matemática que estuda as diferentes maneiras de se combinar ou arranjar elementos de um conjunto, sendo amplamente aplicável em diversas situações cotidianas. Este campo frequentemente utiliza as letras "n" e "p" para representar elementos de contagem. Convencionou-se que "n" indica o número total de elementos disponíveis em um determinado contexto, enquanto "p" representa o número de elementos necessários para satisfazer as condições de cada situação-problema específica.

Nesta SD, abordaremos a resolução de problemas de Análise Combinatória a partir de quatro tópicos fundamentais:

1. **Princípios Fundamentais da Contagem (PFC)**
2. **Casos em que n > p**
3. **Casos em que n = p**
4. **Casos em que n < p**

É fundamental destacarmos que os Princípios Fundamentais da Contagem (PFC) serão utilizados como uma abordagem alternativa, especialmente naquelas situações em que não é claramente identificável se n é maior, igual ou menor que p. Dessa forma, os PFC atua como uma "válvula de escape" para a resolução de problemas, garantindo uma ferramenta adicional para a compreensão e solução de desafios combinatórios.

Esses tópicos serão explorados em detalhes ao longo desta seção com base em exemplos contextualizados e práticos para ilustrar os conceitos e métodos aplicáveis à Análise Combinatória. Assim, buscamos possibilitar a compreensão dos professores do Ensino Médio, fornecendo um recurso didático que aborde desde os fundamentos teóricos à aplicação em problemas cotidianos.

Princípios Fundamentais da Contagem (PFC):

A explicação teórica dos Princípios Fundamentais da Contagem é crucial, dado que envolve a pluralização dos princípios de "quando somar", "quando multiplicar" e "quando usar traços" em contextos de situações-problema na Análise Combinatória.

Para esse momento, segurimos que sejam apresentadas as seguintes indagações aos alunos:

1. **Quando multiplicar na Análise Combinatória?**
   - **Resposta:** Devemos multiplicar em problemas que envolvem etapas de um mesmo processo, ou, de maneira equivalente, quando todos os elementos do problema fazem parte de uma única missão.
2. **Quando somar na Análise Combinatória?**
   - **Resposta:** Devemos somar quando estamos lidando, sejam com processos distintos ou, de forma equivalente, quando os problemas não permitem que se tenha ou se faça a mesma coisa ao mesmo tempo, ou ainda, quando é necessário separar em casos.

Nesse momento, é essencial fornecermos exemplos para que os alunos compreendam quando multiplicar ou somar na Análise Combinatória. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo: Ana dispõe, prontos para uso em seu guarda-roupa, de 3 blusas, 4 calças e 5 saias, todas diferentes entre si. Considerando essas peças, de quantas formas distintas Ana pode se vestir?

Resposta: Inicialmente compreendemos que, nesse contexto, Ana pode se vestir considerando duas combinações possíveis:

a) Blusa com calça. b) Blusa com saia.

Para a primeira combinação: $3 \cdot 4 = 12$ modos de se vestir, por que multiplicamos 3 e 4? Pois, para compor a vestimenta, devemos escolher a blusa (3) e a calça (4), ou seja, são etapas (escolher blusa e calça) de um mesmo processo (vestimenta).

Para a segunda combinação: $3 \cdot 5 = 15$ modos de se vestir, por que multiplicamos 3 e 5? Multiplicamos porque, para compor a vestimenta, devemos escolher a blusa (3) e a saia (5), ou seja, são etapas (escolher blusa e saia) de um mesmo processo (vestimenta).

Assim, para finalizarmos, pontuamos que não dá para se fazer as duas combinações ao mesmo tempo, posto que são processos distintos. Decorre disso, que devemos somar os resultados alcançados em cada etapa.

3. **Quando utilizar traços na Análise Combinatória?**

Resposta: Devemos utilizar traços somente naqueles problemas em que a ordem é relevante.

Para isso, devemos propor uma situação com o propósito de analisar se a ordem é importante (ou não), em outras palavras, é o que denominamos de "teste da ordem". Assim, em linhas gerais, deverão ser propostas as seguintes ações:

a) Escolher 2 elementos do contexto do problema.
b) Em seguida, colocá-los em ordem trocada.

Após realizar essas duas ações, perguntamos: a configuração final mudou? Se sim, a ordem importa; se não, a ordem não importa.

Exemplo 1: No sistema de numeração decimal, quantos números de dois algarismos podem ser formados?

- **"Teste da ordem":** Tomemos como exemplo o número 23. Mude os algarismos de posição e observe que se forma o número 32. A configuração mudou? Sim, o número 23 é diferente do número 32, ou seja, a ordem importa. Portanto, podemos usar traços para resolver esse problema. Daí, em um nível mais avançado de desenvolvimento, procederíamos da seguinte forma:

$$\underbrace{\underline{9}}_{q\ de\ algarismos\ a\ serem\ usados\ no\ 1^{º}\ dígito\ (sem\ o\ zero)} \cdot \overbrace{\underline{10}}^{q\ de\ algarismos\ disponíveis\ para\ o\ 2^{º}\ dígito} = 90\ números.$$

Legenda: q significa quantidade

É válido observarmos que, nesse exemplo, não foi imposto que os algarismos devem ser distintos.

Exemplo 2: Considerando que há cinco pessoas disponíveis, a saber: Ana, Bia, Caio, Danilo e Eduarda, com o intuito de formar grupos de duas pessoas, qual a quantidade de grupos distintos podemos formar?

- **"Teste da ordem"**: Tomemos como exemplo o grupo formado por Ana e Bia. Primeiramente, devemos trocá-las de ordem. Pergunta-se: a configuração do grupo mudará? Não, pois o grupo Ana e Bia é o mesmo que Bia e Ana, ou seja, a ordem não importa. Nesse sentido, tratamos de um exemplo onde não iremos usar traços para resolver o problema.

Aula 2: "$\boldsymbol{n > p}$"

Apresentação Inicial

Abordaremos problemas de contagem em que o número de elementos disponíveis (n) é maior que o número de elementos necessários (p). Quando $n > p$, precisamos fazer escolhas, e se essas escolhas não permitirem repetição de elementos, estamos então diante de um caso de arranjo ou combinação simples. Utilizaremos situações cotidianas para elucidar ambos os casos, diferenciando arranjos de combinações.

Situação 1: Ao delimitar arranjos, consideremos a formação de um pódio de 3 lugares em uma competição de corrida de rua com 20 participantes, em que a ordem de colocação é relevante. Aqui reforçamos a observação de que, nesse caso, a ordem é um aspecto a ser considerado.

Situação 2: Para combinações, consideremos a formação de duplas de vôlei de praia com 5 atletas disponíveis, em que a ordem dos atletas é irrelevante. Nesse caso, a ordem não importa.

Arranjos e Combinações:

Nesse momento, destacamos que há fórmulas já demonstradas para os cálculos de arranjos e combinações, a saber:

Arranjos: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Combinações: $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Contudo, qual é a compreensão dessas fórmulas? Para isso, utilizamos as próprias fórmulas para "desconstruí-las". Por exemplo, no contexto do dia a dia, podemos comparar essa situação com o uso do soro antiofídico como antídoto para picadas de cobra. Esse soro contém anticorpos que neutralizam o veneno presente no sangue e nos tecidos da pessoa envenenada. Resumidamente, trata-se do uso do próprio veneno da cobra para combater o envenenamento, fazendo um paralelo com a ideia de "desconstruir" tais fórmulas. Para ilustrarmos tal situação e, relembrando que $n > p$, eis os exemplos:

Para arranjos:

$$A_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 8 \cdot 7$$

$$A_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7$$

$$A_{15,4} = \frac{15!}{(15-4)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!}{11!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$$

$$A_{20,7} = \frac{20!}{(20-7)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13!}{13!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14$$

Feito esse desenvolvimento, esperamos que o aluno compreenda que a fórmula do arranjo se resume à multiplicação de tantos fatores quanto o número de elementos p necessários, em que o primeiro fator é n, o segundo é o antecessor de n, o terceiro é o antecessor de $n-1$ e, assim, sucessivamente até completar a quantidade de fatores p.

Para combinações:

Mostramos, *a priori*, que pela fórmula de combinação temos:

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{\boldsymbol{n}!}{p!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!}}$$

Para isso, é fundamental compreendermos que a própria fórmula do arranjo está incorporada na fórmula da combinação. O que diferencia a fórmula da combinação é a presença de p! no denominador. Em outras palavras, a fórmula da combinação é, essencialmente, um arranjo dividido por $p!$. Desse modo, temos:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

$$C_{8,2} = \frac{A_{8,2}}{2!} = \frac{8 \cdot 7}{2!}$$

$$C_{9,3} = \frac{A_{9,3}}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!}$$

$$C_{15,4} = \frac{A_{15,4}}{4!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4!}$$

$$C_{20,7} = \frac{A_{20,7}}{7!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{7!}$$

Diante do exposto, compreendemos que, para o cálculo de combinações, o que se faz é um arranjo (cuja fórmula já não é necessária utilizar diretamente) dividido por $p!$. Assim, o aluno percebe que a fórmula para combinações não é essencial, pois a combinação pode ser entendida como a contagem de arranjos ajustada da divisão pelo fatorial de p, refletindo a ideia de que a ordem dos elementos não precisa ser considerada.

O próximo exemplo ilustra o conceito de combinações complementares. Para entendermos combinações complementares, consideremos uma situação comum do cotidiano: imagine que um professor precisa alocar 18 pessoas em uma sala de aula, mas há um total de 20 pessoas disponíveis e somente 18 carteiras na sala.

Neste cenário, o problema de selecionar 18 pessoas para a sala de aula é equivalente a determinar quais 2 pessoas não serão escolhidas. Em outras palavras, a quantidade de maneiras de selecionar 18 pessoas de um grupo de 20, é a mesma quantidade de maneiras de selecionar as 2 pessoas que não serão alocadas.

Matematicamente, isso se expressa através da fórmula de combinações complementares:

$$\boxed{C_{20,18} = C_{20,2} = \frac{A_{20,2}}{2!} = \frac{20 \cdot 19}{2!}}$$

Portanto, ao calcularmos combinações complementares, a seleção das pessoas que não são escolhidas pode simplificar a resolução do problema.

No caso considerado, ou seja, $C_{20,18}$, representa o número de maneiras de escolhermos 18 pessoas de um grupo de 20 e, $C_{20,2}$, representa o número de maneiras de escolhermos as 2 pessoas que não serão alocadas. Esta equivalência é derivada da seguinte propriedade, representada por:

$$\boxed{C_{n,p} = C_{n,n-p}}$$

Observação: Nesse momento, é válido mencionarmos que, frequentemente, muitos vestibulares em todo o país incluem questões que exigem o conhecimento das fórmulas de arranjos e combinações como uma das alternativas de resposta. Portanto, mesmo que, na prática, não seja necessário utilizar essas fórmulas para resolver uma questão envolvendo cálculo numérico, é importante termos o entendimento das mesmas. Isso garante que, sendo necessário, as utilizaremos para responder situações-problema que requerem o seu emprego.

Aula 3: "$n = p$"

Apresentação Inicial e desenvolvimento da aula

Neste momento, é válido ressaltarmos a proposição de situações-problema sobre problema de contagem em que o número de elementos disponíveis (n) é igual ao número de elementos necessários (p).

Se n=p, nos deparamos com as seguintes situações:

- **A ordem dos elementos não importa?**

  Se a resposta for sim, o resultado será sempre 1. É importante mostrarmos que, por exemplo, $C_{20,20} = 1$, ou seja, $C_{n,n} = 1$. Isso ocorre porque há apenas uma forma de escolher todos os elementos disponíveis, sem considerarmos a ordem.
- **A ordem dos elementos importa?**

  Se a resposta for sim, estamos diante de problemas de "trocas" ou "permutas". Para isso passamos a apresentar as formas de permutações.

a) Permutação Simples.

Para iniciarmos o estudo das permutações simples, propomos a seguinte situação-problema: “De quantas formas podemos colocar 5 pessoas em uma fila?”

Neste momento, abrimos espaço para a problematização com o intuito de que os alunos questionem se a ordem dos elementos importa. Dado que a ordem é relevante, neste problema utilizamos "traços" para visualizarmos as diferentes formas. Portanto, a resposta é obtida da seguinte forma:

$$\boxed{\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 5! = 120}$$

Para possibilitarmos a compreensão sobre permutações simples, propomos outra situação-problema: “Quantos anagramas há na palavra AMOR?”

Para responder a essa questão, consideramos:

A palavra "AMOR" tem 4 letras distintas. O número de anagramas possíveis é dado pelo número de permutações das 4 letras, que é calculado por:

$$\boxed{\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 4! = 24}$$

A partir das situações-problema acima, entendemos que a permutação de n elementos, em que nenhum desses elementos se repete, é dada por:

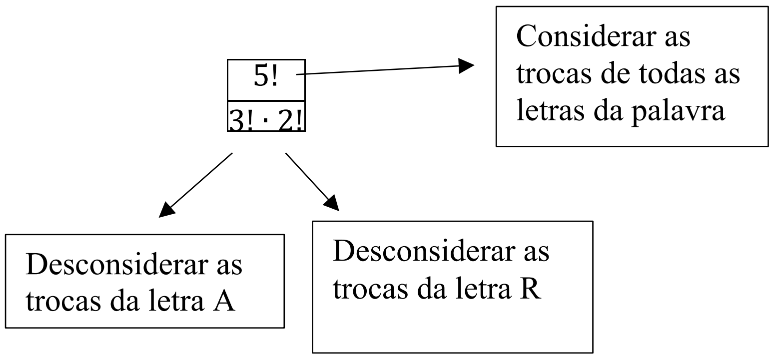
$$\boxed{\underline{n} \cdot \underline{(n-1)} \cdot \underline{(n-2)} \cdot \ldots \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = n! = P_n}$$

b) Permutação Com Repetição.

Para introduzirmos o ensino de permutações com repetição, sugerimos a seguinte situação-problema: "Quantos anagramas podem ser formados a partir da palavra ARARA?"

Antes de abordarmos a solução dessa questão, é fundamental compreendermos que, na Análise Combinatória, ao considerarmos trocas, aplicamos a operação de multiplicação, conforme já discutido. Por outro lado, para desconsiderarmos as trocas, empregamos a operação inversa da multiplicação, ou seja, a divisão.

Mediante as considerações e cálculos, a resposta para o problema é:

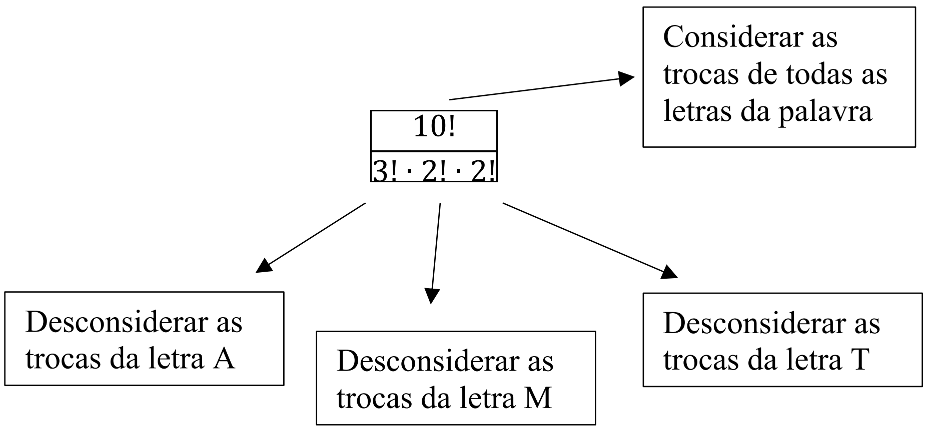


Nesse momento, vale destacarmos mais uma vez que:

- **Considerar trocas:** Utilizamos a **multiplicação**.
- **Desconsiderar trocas:** Utilizamos **divisão**.

Dando sequência, para consolidarmos o entendimento sobre permutações com repetição, propomos a seguinte situação-problema: "Quantos anagramas podem ser formados a partir da palavra MATEMÁTICA?"

Para resposta do problema, temos:



A partir desse momento, diante das considerações já feitas, é válido mostrarmos que:

$$\boxed{P_n^{a,b,c,\dots} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \dots}}$$

Ademais, cabe mostrarmos que a combinação é de fato $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$, pois

$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$

Considerar todas as formas de montar grupos de p elementos a partir de n elementos

Como a ordem não importa, desconderamos as trocas do p elementos.

Aula 4: "$n = p$" (Continuação)

Inicialmente, recapitulemos o que vimos na aula anterior, a partir de uma breve exposição dialogada sobre os casos em que $n = p$. Em sequência, daremos prosseguimento com o exemplo a seguir que visa não apenas consolidar a compreensão sobre permutações com repetições, mas, também, destacarmos que na Análise Combinatória existem diversas estratégias para resolvermos um mesmo problema; algumas das quais podem ser mais eficientes que outras. Com esse entendimento, segue a situação-problema:

Situação-problema: *João tem 5 tarefas a realizar: 1 – Ir à academia; 2 – Estudar; 3 – Fazer compras no supermercado; 4 – Levar o filho para a escola; 5 – Pegar o filho na escola. De quantos modos João pode realizar essas 5 tarefas?*

Para a resposta dessa situação-problema, é válido observarmos que, evidentemente, João não pode pegar o filho na escola sem antes levá-lo. Assim, muitos poderiam tentar resolver o problema usando uma abordagem que considera as restrições e realiza uma análise mais detalhada, por exemplo, utilizando a estratégia de "traços" para organizar e visualizar as tarefas, obtendo como resposta:

$\boxed{\underline{1} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 24}$

Levar em primeiro lugar o filho à escola

$\boxed{\underline{3} \cdot \underline{1} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 18}$

Levar em segundo lugar o filho à escola

$$\boxed{\underline{3}\cdot\underline{2}\cdot\underline{1}\cdot\underline{2}\cdot\underline{1} = 12}$$

Levar em terceiro lugar o filho à escola

$$\boxed{\underline{3}\cdot\underline{2}\cdot\underline{1}\cdot\underline{1}\cdot\underline{1} = 6}$$

Levar em quarto lugar o filho à escola

Assim, como são processos distintos, nessas 4 opções, tem-se:

$$\boxed{24 + 18 + 12 + 6 = 60}$$

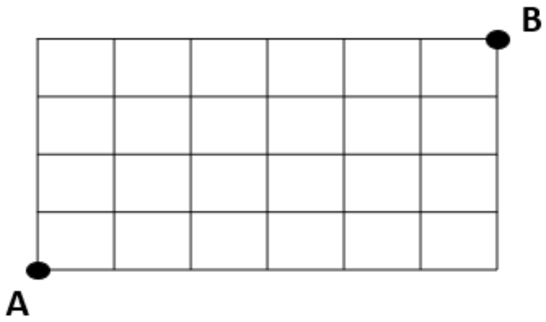
Agora, apresentaremos uma segunda solução para o mesmo problema, utilizando o argumento de desconsiderar as trocas entre "levar o filho para a escola" e "buscar o filho na escola". Em outras palavras,

$$\boxed{\frac{5!}{2!} = 60}$$

Considerar as trocas de todas as tarefas a serem realizadas

Desconsiderar as trocas entre "levar o filho para a escola e buscar o filho na escola".

A seguir, apresentaremos um problema clássico de vestibulares: *Considerando deslocamentos sempre para a direita (→) ou para cima (↑), quantos caminhos possíveis existem para se deslocar do ponto A ao ponto B, de acordo com o esquema da figura a seguir?*



Solução para o problema: Como exemplo, apresentamos alguns caminhos possíveis:

1) →↑→↑→→↑→→↑
2) →→→↑↑↑→→↑→
3) →→→→↑↑↑↑→→

Nos três exemplos acima, percebemos que são sempre 10 elementos entre “para a direita” ou “para cima”, com repetição de seis → e quatro ↑, ou seja, existem

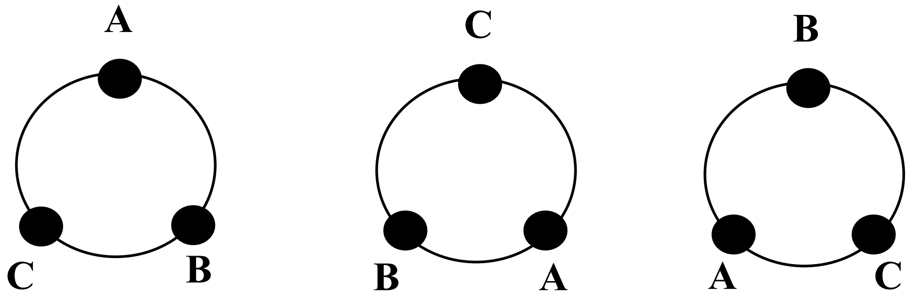
$$\boxed{\frac{10!}{6!\cdot 4!} = 210\ caminhos.}$$

Feitas essas considerações, finalizamos o conceito de permutação com repetição.

c) Permutação Circular.

Para o conceito de permutação circular, apresentaremos a seguinte situação-problema: *De quantas formas 3 pessoas podem se sentar em uma mesa?*

Como resposta do problema, precisamos esclarecer que o “giro” no sentido horário ou anti-horário nessa mesa não configura uma nova organização dos elementos, a saber:



Para uma melhor compreensão do problema, sugerimos a criação de uma situação em que a letra “A” representa um avô que já se encontra com dificuldades de locomoção, e as letras “B” e “C” são seus netos. A ideia é que para a configuração de uma nova disposição de posicionamento, o avô não precisa necessariamente se mover, basta que os seus netos troquem de posição entre si. Diante desse entendimento, tomamos como referência a letra “A” e, assim, dado que são 3 pessoas, fixando uma delas, permutamos as outras. Portanto,

$$\boxed{PC_3 = (3-1)! = 2!}$$

Diante dessa situação-problema, é oportuno expormos que a permutação circular de n elementos, é dada por:

$$\boxed{PC_n = (n-1)!}$$

Aula 5: “$n < p$”

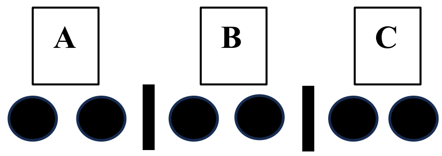
Inicialmente, dialogamos com a turma sobre casos em que o (n): número de elementos disponíveis é menor do que (p): número de elementos necessários. Para introduzirmos tais casos, apresentamos a seguinte situação-problema: *Numa lanchonete vendem-se 3 sabores de sorvete, a saber: abacaxi, baunilha e chocolate. O professor de uma certa escola presenteará os 6 alunos que obtiveram melhor desempenho no último simulado. De quantos modos o professor pode distribuir sorvetes para esses 6 alunos?*

Antes de resolvermos o problema proposto, apresentamos outra situação-problema com o intuito de mostrar para a turma a coincidência dos resultados das soluções.

"Determine o número de soluções inteiras e não-negativas da equação $a + b + c = 6$*."*

Resolução:

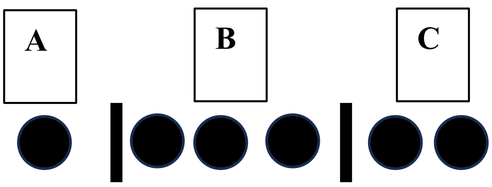
Inicialmente, identificamos que a quantidade de incógnitas disponíveis (n) é menor do que a quantidade da soma dos valores das incógnitas (p) e, assim, apresentamos o diagrama:

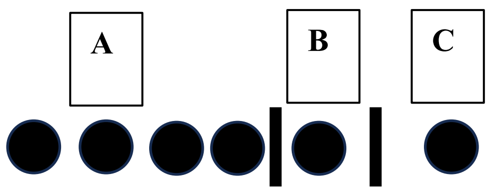


A ideia consiste em desenharmos bolas idênticas (●), dispostas horizontalmente, para representarmos os objetos a serem distribuídos e, posteriormente, separá-las em diferentes regiões, de acordo com a quantidade de incógnitas, utilizando traços verticais (|):

- A quantidade de bolas deve ser igual à soma das incógnitas, de modo que cada bola represente uma unidade no valor da incógnita;
- A quantidade de traços deve ser uma unidade a menos do que a quantidade de incógnitas para que cada traço funcione como um separador entre duas incógnitas.

No diagrama apresentado inicialmente, temos: $a = 2, b = 2 \; e \; c = 2$, como solução da equação. No entanto, há outras maneiras de resolvermos tal equação. Para tanto, as mesmas podem ser representadas a partir de exemplos, como os que seguem:





No primeiro exemplo, temos: $a = 1, b = 3\ e\ c = 2$. Por sua vez, no segundo, a=4, b=1 e c=1 e, no terceiro, a=6, b=0 e c=0. A partir desse momento, é possível compreendermos que há mais soluções, porém, o que muda nos diagramas são as posições das bolas e dos traços. Em outras palavras, trata-se de uma troca entre os símbolos. Diante desse entendimento, nos deparamos com uma permutação com repetição, posto que fica evidenciada a repetição das 6 bolas e dos 2 traços. Assim, para descobrirmos o total de soluções para a equação considerada, devemos seguir o desenvolvimento:

$\boxed{P_8^{6,2} = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 2!} = 28}$ soluções inteiras e não-negativas.

Assim, concluímos que o número de soluções inteiras e não-negativas do problema anterior coincide com o número de formas de distribuir os sorvetes para os alunos no problema apresentado inicialmente.

Com isto, apresentamos que o problema inicial se trata de uma abordagem por combinação com repetição, pois entendemos que há a necessidade de repetir sabores para os sorvetes. E com isto, apresentamos a fórmula:

$$\boxed{CR_{n,p} = C_{n+p-1,p} = P_{n+p-1}^{p,n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!\cdot(n-1)!}}$$

É válido mencionarmos então que, na fórmula apresentada anteriormente:

$$\frac{(n+p-1)!}{p!\cdot(n-1)!}$$

Quantidade de símbolos.

Quantidade de bolas

Quantidade de traços

Para maior compreensão e desafio, apresentamos mais um exemplo: *Imagine que você irá ao supermercado para comprar, digamos, sete refrigerantes para uma festa de aniversário e há apenas três opções de sabores disponíveis. De quantos modos essa compra pode ser feita?*

Feitas as considerações até aqui, sem a pretensão de finalizar esta SD, uma vez que sabemos que da mesma poderão surgir novas situações-problema a serem resolvidas pela metodologia do ensino e aprendizagem “pela compreensão”. Dito isso, a próxima seção será dedicada às considerações finais desta dissertação e Produto Educacional.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação, de cunho bibliográfico, abordou as dificuldades de aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Médio. Para isso, revisitamos a historicização do conceito em tela. Desse modo, inicialmente, recorremos a análise de pesquisas e estudos no campo do ensino da matemática com ênfase no conceito de Análise Combinatória. A partir dessa análise, constatamos que muitos estudantes enfrentam obstáculos na compreensão e aplicação dos princípios desse objeto do conhecimento. No geral, observamos que são problemas oriundos de vários fatores, dentre outros, a falta de produção de significados por parte dos alunos, incorrendo em uma aprendizagem calcada na memorização, desprovida de apropriação conceitual, ou seja, de uma aprendizagem que não possibilita o desenvolvimento do pensamento com potencialidades de superação dessa memorização, ou melhor, do pensamento empírico, limitado ao cotidiano.

Neste contexto, entendemos que a proposta metodológica de resolução de situações-problema "pela compreensão" se apresentou como uma alternativa promissora, com possibilidade de superação da aprendizagem mecanicista. Tal abordagem, centrada na contextualização histórica, problematização e compreensão conceitual, permite aos alunos uma aprendizagem com potencialidade para o seu desenvolvimento cognitivo, com destaque, no conceito central trabalhado neste estudo: Análise Combinatória. A exploração de situações-problema, nessa perspectiva teórico-metodológica, se apresentou como uma ferramenta valiosa para motivar os alunos e, consequentemente, organizar o ensino da matemática, promovendo a aprendizagem e o desenvolvimento.

Particularmente sobre o Produto Educacional, parte desta dissertação, idealizamos e produzimos uma Sequência Didática. Tal produto não somente oferece uma forma organizada de ensino da Análise Combinatória, mas também serve como um recurso didático para professores que ensinam matemática, de modo particular, do Ensino Médio, conscientes da necessidade de refletir e organizar as suas práticas pedagógicas. Assim, a SD apresentada busca incentivar a resolução de problemas contextualizados, promovendo a aprendizagem "pela compreensão", seja do aluno ou do professor.

Diante do exposto, com a realização deste estudo, bem como da proposição de SD sobre Análise Combinatória, esperamos que tragam contribuições para um salto qualitativo no ensino e aprendizagem da matemática no Ensino Médio, rompendo com paradigmas que se limitam à utilização do livro didático e do quadro de acrílico, na maioria das vezes, com situações-problema com foco na memorização.

Em síntese, ao analisarmos as possibilidades de aprendizagem da Análise Combinatória “pela compreensão” através da resolução de situações-problema, esta dissertação apresenta evidências de que uma abordagem metodológica centrada na resolução de problemas contextualizados pode efetivamente promover a compreensão e aplicação dos conceitos combinatórios. Assim, que as contribuições da pesquisa possam suscitar novas inquietações e, consquentemente, novos problemas de pesquisa. Fica, portanto, o desafio para os futuros “educadores matemáticos” e pesquisadores deste campo científico.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, C. S. de. **Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Católica de Brasília, UCB, Brasília–DF, 2006.

BACHX, G. C.; POPPE, L. M. B.; TAVARES, R. N. O. **Prelúdio à Análise Combinatória**. São Paulo: Nacional, 1975.

BASTOS, A. C. **Resolução de problemas**: Uma discussão sobre o ensino de Análise Combinatória. 2016. 129 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio Prof. José de Souza Herdy, Escola de Educação, Ciências, Letras, Artes e Humanidades, 2016.

BASTOS, A. C.; LOPES, J. R.; VICTER, E. das F. Reflexões acerca do ensino da análise combinatória no ensino médio. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 3, p. 330-344, 2020. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2491. Acesso em: 22 jul. 2023.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc. Acesso em: 03 abr. 2023.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FOSSA, J. A. Matemática, História e Compreensão, 2008. Disponível em: https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/77/80. Acesso em: 11dez. 2023.

GROSSNICKLE, Foster E.; BRUECKENER, Leo J. **O Ensino de Aritmética pela Compreensão**, 1. ed., v. 2, 1965.

HANDAYA, A. Uma reflexao sobre dificuldade de aprendizagem de análise combinatória. **Revista Sinergia**, v. 18, n. 1, p. 13-17, 2017.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar,** v. 5: combinatória, probabilidade / São Paulo, SP: Atual, 2013.

JANDREY, D. F.; DIAS, L. S.; DOS SANTOS, E. S. C. Saberes Para Ensinar Frações no Livro: O Ensino de Aritmética pela Compreensão. **Anais do ENAPHEM- Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática**, n. 5, p. 1-5, 2020.

LUBACHEWSKI, G. C. **Metodologias Ativas na Educação**: desafios e possibilidades partir da resolução de problemas. Metodologias Ativas, p. 73. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=ApksEAAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false. Acesso em: 07 jun. 2024.

MENDES, D. F. **Abrangência das permutações na análise combinatória.** 2014. Disponível em: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://www.realp.unb.br/jspui/bitstream/10482/17318/1/2014_DanielFerreiraMendes.pdf. Acesso em: 26 jun. 2024.

MENDES, Iran abreu. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem.** São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MINAYO, M. C de S. **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: Vozes, 2016.

MOREIRA, H. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. Rio de Janeiro: DP&A, 2006.

MORETTI, V. D. O problema lógico-histórico: aprendizagem conceitual e formação de professores de matemática. **Poiésis**, Tubarão. N. especial, p. 29-44, 2014. Disponível em: https://portaldeperiodicos.animaeducacao.com.br/index.php/Poiesis/article/view/1737. Acesso em: 20 jul. 2023.

MORGADO, A. C. *et. al*., **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2020.

OLIVEIRA, H.; BORRALHO, A. **As tarefas e a aprendizagem dos alunos.** Investigação em educação matemática, p. 149-156, 2014.

OLIVEIRA, M. M. de. **Como fazer pesquisa qualitativa**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2016.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2014.

PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. da S. L. Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio. **Revista Principia**, João Pessoa, v. 38, p. 105-119, 2018.

PERETTI, L.; TONIN DA COSTA, G. M. Sequência didática na matemática. **Revista de Educação do IDEAU**, v. 8, n. 17, p. 1-14, 2013.

POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Artmed, Porto Alegre, 1998.

ROCHA, Á. M. C.; AGUIAR, M. da C. C. de. Aprender e ensinar construir identidade e profissionalidade docente no contexto da universidade: uma realidade possível. In:

35ª REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 2012, Porto de Galinhas. **Anais da 35ª REUNIÃO ANUAL DA ANPED**, Porto de Galinhas. 2012, p. 1-17.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 299-311, 2012.

Todo Mundo Odeia o Chris - 2ª Temporada - Episódio 21 - **Todo mundo odeia matemática.** Dailymotion. 2021. 20min55s. Disponível em: https://www.dailymotion.com/video/x7zpyp7. Acesso em 11 jun. 2024.

VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. Recife: **VII Encontro Nacional de Educação Matemática**, p. 22, 2004. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf. Acesso em: 25 jul. 2023.