Universidade do Estado de Mato Grosso
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADES COM APLICAÇÃO DO TEOREMA DE BAYES NO ESTUDO DO PROBLEMA DE MONTY HALL

DEVAIR DA SILVA MIRANDA

Orientador: Prof. Dr. Mauro Viegas da Silva

BARRA DO BUGRES
2024

PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADES COM APLICAÇÃO DO TEOREMA DE BAYES NO ESTUDO DO PROBLEMA DE MONTY HALL

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, de Devair da Silva Miranda.

Barra do Bugres, 11 de dezembro de 2024.

Profº. Dr. Mauro Viegas da Silva.
Orientador

Banca examinadora:

Profª. Dr. Mauro Viegas da Silva
Prof. Dr. Luiz Antonio Jacyntho
Profª. Dra. Tatiana Rondon Viegas da Silva

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT, da Universidade do Estado de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

FICHA CATALOGRÁFICA.

Miranda, Devair da Silva.
Proposta pedagógica para o ensino de probabilidades com aplicação do Teorema de Bayes no estudo do Problema de Monty Hall / Devair da Silva Miranda. - Barra do Bugres, 2025.
71f.: il.

Universidade do Estado de Mato Grosso "Carlos Alberto Reyes Maldonado", Matemática/BBG-PROFMAT - Barra do Bugres - Mestrado Profissional, Campus Universitário De Barra Do Bugres "Deputado Renê Barbour".
Orientador: Dr. Mauro Viegas da Silva.

1. Probabilidades. 2. Teorema de Bayes. 3. Monty Hall. I. Silva, Mauro Viegas da, Dr. II. Título.

UNEMAT / MT-SCB CDU 519.101

FOLHA DE APROVAÇÃO

DEVAIR DA SILVA MIRANDA

PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADES COM APLICAÇÃO DO TEOREMA DE BAYES NO ESTUDO DO PROBLEMA DE MONTY HALL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação Stricto Sensu em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT - da Universidade do Estado de Mato Grosso CARLOS ALBERTO REYES MALDONADO, Câmpus Univ. Dep. Est. "Renê Barbour" – Barra do Bugres - MT, como requisito obrigatório para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 11 de dezembro de 2024

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br
MAURO VIEGAS DA SILVA
Data: 21/01/2025 16:55:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Mauro Viegas da Silva (PROFMAT-UNEMAT)

Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br
LUIZ ANTONIO JACYNTHO
Data: 22/01/2025 16:30:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Luiz Antônio Jacyntho (PROFMAT-UNEMAT)

Examinador Interno

Documento assinado digitalmente
gov.br
TATIANA RONDON VIEGAS DA SILVA
Data: 21/01/2025 17:09:52-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dra. Tatiana Rondon Viegas da Silva (IFMT)

Examinadora Externa

Dedico à minha família, em especial a minha esposa que sempre me motivou a buscar meus sonhos e também a todos que de alguma forma contribuíram para o meu sucesso.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, fonte de todo conhecimento e sabedoria, por me conceder força, saúde e a oportunidade de realizar este trabalho. À minha amada esposa, Adriely de Paula, por seu amor incondicional, apoio e paciência durante todos esses anos. Ao meu filho, Gabriel Silvio, minha maior inspiração, por sua alegria e por me lembrar da importância de celebrar cada conquista. À minha mãe, dona Onorina, por sua dedicação nas orações e por sempre admirar e acreditar em mim. Em memória do meu pai, Silvio de Miranda, cuja ausência senti em cada etapa desta caminhada, mas cuja lembrança me fortaleceu.

Agradeço imensamente ao meu orientador, Prof. Dr. Mauro Viegas da Silva, pela confiança, orientação e por compartilhar seus conhecimentos, sendo fundamental neste processo. Agradeço também a alguns nobres colegas professores, Dilva Cirilo de França, Willian Vieira Gonçalves, Luiz Antônio Jacyntho, por suas valiosas contribuições e incentivos, ou mesmo pelas disciplinas que foram fundamentais para a minha formação.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática e ao PROFMAT implantado na Unemat – Campus de Barra do Bugres pela oportunidade de participar deste programa, que foi de fundamental importância para a realização do trabalho.

Muito obrigado a todos.

A persistência é o caminho do êxito.

Charles Chaplin

RESUMO

Este trabalho visa desenvolver um material pedagógico orientativo voltado para o ensino-aprendizagem de probabilidades, com ênfase na aplicação do Teorema de *Bayes* para a resolução do problema de *Monty Hall*. Além disso, o material explora diversas propostas que evidenciam a presença dos conceitos probabilísticos em nosso cotidiano. Inicialmente, são apresentados os conceitos fundamentais de probabilidade, destacando as características do Teorema de *Bayes* e o problema de Monty Hall, assim como as vantagens de utilizar esses conceitos na introdução e desenvolvimento do estudo de probabilidades. A metodologia adotada envolveu a criação de um material didático que, de maneira construtiva, apresenta conceitos, exemplos e propostas de aplicação. Dada a dificuldade enfrentada por estudantes do 3º ano do Ensino Médio na resolução de questões de probabilidade e interpretação de problemas relacionados, buscamos estratégias pedagógicas eficazes para melhorar a aprendizagem desses alunos. Assim, desenvolvemos um material orientativo que facilita a construção e exploração dos conceitos de probabilidade. Este material inclui explicações claras dos conceitos e propriedades, exemplos resolvidos e atividades práticas orientadas, focadas na construção dos conceitos de probabilidade, Teorema de *Bayes* e o paradoxo de *Monty Hall*. O objetivo é promover uma maior interação e participação dos alunos no processo de ensino-aprendizagem de probabilidades.

Palavras-chave: Probabilidades; Teorema de Bayes; Monty Hall

ABSTRACT

This work aims to develop an orientation pedagogical material on the teaching and learning process of probabilities, with an emphasis on the application of Bayes' Theorem to solve the Monty Hall problem. Additionally, the material explores various proposals that highlight the presence of probabilistic concepts in different areas of our daily lives. Initially, the fundamental concepts of probability are presented, emphasizing the characteristics of Bayes' Theorem and the Monty Hall problem, as well as the advantages of using these concepts in the introduction and development of probability studies. The methodology adopted involved the creation of didactic material that constructively presents concepts, examples, and application proposals. Given the difficulties faced by 3rd-year high school students in solving probability questions and interpreting related problems, we sought effective pedagogical strategies to improve student learning. Therefore, we developed an educational material that facilitates the construction and exploration of probability concepts. This material includes clear explanations of concepts and properties, solved examples, and practical activities focused on constructing probability concepts, Bayes' Theorem, and the Monty Hall paradox. The objective is to promote greater interaction and participation of students in the teaching and learning process of probabilities.

Keywords: Probabilities; Bayes' Theorem; Monty Hall

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$(CC)_{n,p}$	Combinação completa de n elementos tomados p a p.
$\overline{A}$	Complementar do evento A.
$A_{n,p}$	Arranjo simples de n elementos tomados p a p.
$C_{n,p}$	Combinação simples de n elementos tomados p a p.
P_n	Permutações de n elementos.
$P_n^{m,p}$	Permutação de n elementos com m, p repetições.
$\sum_{i=1}^{n}$	Somatório do 1º ao nº elemento.
$<$	Menor que.
$\neq$	Valor diferente.
$>$	Maior que.
$\emptyset$	Conjunto vazio.
$\cong$	Aproximadamente igual a.
$\approx$	Valor aproximado.
$\leq$	Menor que ou igual a.
A	Evento A.
$A \cap B$	Intersecção dos eventos A e B.
$A \cup B$	União dos eventos A e B.
$n!$	Fatorial do número n.
$n(A)$	Número de elementos do evento A.
$n(\Omega)$	Número de elementos do espaço amostral.
$p(A)$	Probabilidade de ocorrência do evento A.
$p(A/B)$	Probabilidade condicional do evento A dado B.
Ω	Espaço amostral.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento deste trabalho se deu pela percepção das dificuldades apresentadas em sala de aula principalmente por alunos do 3º ano do ensino médio quando expostos aos conceitos de probabilidades, onde a compreensão e aprendizagem dos conceitos e suas aplicações são de baixa eficiência através dos métodos tradicionais, buscamos assim desenvolver um material mais construtivo e dinâmico por meio de aspectos instigadores aos alunos, visando uma melhora significativa no processo de ensino-aprendizagem.

O problema de Monty Hall, que foi popularizado pelo programa de televisão "Let's Make a Deal", possui em sua essência uma característica no mínimo desafiadora que tem intrigado matemáticos e aprendizes por décadas. A sua provável forma contra intuitiva de solução ideal tem gerado debates acalorados e demonstrado a força do raciocínio probabilístico. Neste estudo, propomos uma análise mais profunda do problema, evidenciando suas características principais, detalhando suas regras de desenvolvimento e utilizando como ferramenta central o Teorema de Bayes.

Na primeira parte deste trabalho, nos dedicaremos ao desenvolvimento de um esquema de estudo teórico sólido em probabilidade. Iniciando pelos conceitos fundamentais, como espaço amostral, eventos e suas classificações e probabilidade, avançaremos para tópicos mais complexos, como probabilidade condicional, operações com probabilidades e independência. O máximo desta seção será a apresentação e aplicação do Teorema de Bayes, ferramenta de extrema importância para o cálculo de probabilidades a posteriori, ou seja, a atualização de nossas crenças à luz de novas evidências.

No segundo capítulo, mergulharemos no universo do problema de Monty Hall. Inicialmente apresentaremos as regras do jogo de forma clara e precisa, e em seguida, utilizaremos os conceitos probabilísticos desenvolvidos anteriormente para analisar as diferentes estratégias possíveis, visando identificar caso houver quais delas serão mais adequadas e vantajosas para aplicação. O Teorema de Bayes será de fundamental importância para calcular a probabilidade de o prêmio estar atrás de cada porta, após a revelação parcial feita pelo apresentador.

Finalmente, no terceiro capítulo, direcionaremos nosso foco de estudo para a elaboração de uma sequência didática que permita aos estudantes do ensino médio e/ou superior compreenderem a solução do problema de Monty Hall e a importância do raciocínio probabilístico. A partir de atividades práticas, construtivas e envolventes, buscamos desenvolver nos alunos a habilidade de poder modelar situações reais utilizando conceitos probabilísticos e desta forma tomar decisões que possam ser mais informadas com base em dados incertos.

Este estudo pretende desmistificar principalmente o paradoxo do problema de Monty Hall e demonstrar como a aplicação da teoria das probabilidades, em particular o Teorema de Bayes, pode ser utilizada para resolver problemas que aparentemente se apresentam como modelos contra intuitivos. Além disso, pretendemos contribuir para a melhoria do processo ensino e aprendizagem de probabilidade, oferecendo uma aplicação prática, construtiva e mais motivadora deste importante ramo da matemática.

2 PROBABILIDADE

A probabilidade, não por acaso, é considerada um dos ramos fascinantes da Matemática, pois incita a descobrir os segredos de eventualidades e suposições. Utilizando seus conceitos e aplicando suas construções, investigamos as possibilidades de determinados eventos ocorrerem, desde simples lançamentos de dados ou moedas até mesmo a complexos problemas de fenômenos naturais, ou sociais.

Os elos e origem da probabilidade se cruzam com apostas e jogos de azar, onde dimensionar as possibilidades de sucesso se tornou essencial para o processo. A partir do século XVIII, importantes nomes do campo matemático como Pierre de Fermat e Blaise Pascal iniciaram a formalização de tal área, introduzindo fundamentos para o desenvolvimento de teorias probabilísticas que se tornaram, com o passar do tempo, pouco a pouco mais aperfeiçoadas.

Temos por objetivo neste capítulo apresentar conceitos importantes das teorias de probabilidades, definições e aplicações que serão fundamentais em nosso estudo.

2.1 Conceitos Fundamentais

Nesta seção, vamos dar início ao estudo de um dos tópicos fascinantes da Matemática: a determinação de probabilidades. De maneira simples, a Probabilidade é o ramo da Matemática que nos proporciona condições para expressar, numericamente, a chance de ocorrer determinado evento.

Observemos a figura 1 que representa a roleta de um jogo de tabuleiro, onde o jogador ao girá-la pontua conforme o número indicado pela seta ao término do giro. Neste caso, o jogador teria pontuado 10 pontos.

Figura 1: roleta de cassino

Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Imaginemos agora a seguinte situação: antes de girar a roleta, um dos jogadores aposta que conseguirá atingir uma pontuação maior que 15, enquanto seu adversário aposta que ele obterá um número par de pontos. Eis que nos deparamos com uma das questões fundamentais onde os conceitos de probabilidades nos ajudam a determinar sua solução, "qual dos dois jogadores têm mais chance de vencer a aposta?".

Definiremos na sequência tais conceitos que irão nos proporcionar as resoluções de diferentes problemas dentro do contexto de mensurar as possibilidades de determinados eventos ocorrerem ou não.

Definição 1. *Um experimento que, ao realizá-lo por diversas vezes, apresenta **um mesmo resultado previsível** é chamado de **experimento determinístico**, por outro lado, quando seu resultado depende **exclusivamente do acaso (imprevisível),** é denominado de **experimento aleatório**.*

Exemplo 1. *Se você soltar um objeto a certa altura do solo, estando na superfície da Terra, você sabe com certeza que ele cairá, assim podemos afirmar que este é um **evento determinístico**. Já se você pedir a uma pessoa que escreva em um pedaço de papel um número natural de 5 algarismos, e desejar descobrir qual número ela escreveu, é impossível saber, a princípio, qual número ela escreverá, temos assim, portanto, um **evento aleatório**.*

A teoria das probabilidades desenvolve modelos de estabelecer, numericamente, as chances ou possibilidades de ocorrer determinado resultado em um ***experimento aleatório***, por meio de condições predeterminadas.

Definição 2. *O conjunto de todos os **resultados possíveis** de um experimento aleatório é denominado de **espaço amostral**. Em nosso estudo, representaremos o espaço amostral pela letra grega Ω (ômega maiúscula) e $n(\Omega)$ para identificar o **número de elementos** do espaço amostral.*

Exemplo 2. *No experimento aleatório "lançar uma moeda" para identificar a face voltada para cima, o espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{cara, coroa\}$, logo $n(\Omega) = 2$. Já no experimento aleatório "lançar um dado comum de 6 faces" para verificar os números de pontos obtidos temos o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, logo $n(\Omega) = 6$.*

Na determinação do número de elementos do espaço amostral de um experimento aleatório, muitas vezes será necessária a aplicação dos conceitos de Análise Combinatória.

Exemplo 3. *No experimento "escolher aleatoriamente 4 pessoas dentre 7 disponíveis" obtemos que o número de elementos do espaço amostral será dado pelo total de combinações simples das 7 pessoas, tomadas 4 a 4 ou seja:*

$$n(\Omega) = C_{7,4} = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = 35$$

Exemplo 4. *No experimento "criar aleatoriamente uma senha com 4 dígitos numéricos, escolhidos entre os dez disponíveis", podemos determinar o número de elementos do espaço amostral através do princípio multiplicativo de contagem, onde:*

$$n(\Omega) = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$$

De forma geral, em experimentos aleatórios estamos dedicados a determinar a possibilidade de ocorrência de determinados resultados específicos, ao qual nos direciona a definição de eventos.

Definição 3. *Denomina-se* ***evento*** *ao conjunto de todos os* ***resultados desejados*** *em um experimento aleatório. Sendo assim, o evento associado a um espaço amostral é qualquer um de seus subconjuntos, que em nosso estudo denotaremos por letras maiúsculas do nosso alfabeto (A, B, C, ...).*

Note que cada experimento aleatório possui um único espaço amostral, porém, é possível determinar vários eventos contidos nele, conforme os resultados desejados. Assim como o espaço amostral, no cálculo de probabilidades, é também fundamental a determinação do número de elementos de cada um dos eventos A, ao qual denotaremos por $n(A)$.

Exemplo 5. *No experimento "lançamento de um dado comum", onde o espaço amostral é* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, *e* $n(\Omega) = 6$, *podemos considerar diferentes eventos, tais como:*

1) *"obter uma pontuação ímpar":* $A = \{1, 3, 5\}$, *e* $n(A) = 3$.
2) *"obter um número de pontos menor que 5":* $B = \{1, 2, 3, 4\}$, *e* $n(B) = 4$.

3) *"obter uma pontuação maior que 5":* $C = \{6\}$, *e* $n(C) = 1$, *desta forma, dizemos que este é um* ***evento unitário*** *ou* ***elementar****, pois se trata de um conjunto com elemento único.*
4) *"obter números de pontos múltiplo de 7":* $D = \{\ \ \} = \emptyset$, *e* $n(D) = 0$*(conjunto vazio), assim, dizemos que este é um* ***evento impossível****, pois o mesmo nunca ocorrerá.*
5) *"obter uma pontuação menor que 10":* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$, *e* $n(E) = 6$, *assim, dizemos que este é um* ***evento certo****, pois coincide com o espaço amostral e temos a garantia de que sempre irá ocorrer.*

Em muitos casos, assim como na determinação do número de elementos do espaço amostral, é necessária a utilização de conceitos de Análise Combinatória para determinar o número de elementos de um determinado evento.

Exemplo 6. *No experimento "formar uma comissão de 3 pessoas, escolhidas aleatoriamente entre 6 disponíveis" podemos considerar o evento A: "uma das pessoas escolhidas ser o indivíduo X". Assim teremos que:*

$$n(\Omega) = C_{6,3} = 12$$

Além disso, para determinar o número de elementos do evento A, devemos supor que o indivíduo X já tenha sido escolhido e, portanto, devemos selecionar 2 pessoas dentre as 5 restantes, logo:

$$n(A) = C_{5,2} = 10$$

Definição 4. *Denominamos de* ***espaço amostral equiprovável*** *de um evento aleatório quando todos os eventos unitários a ele associados possuem a mesma chance de ocorrer. Caso contrário, dizemos que se trata de um* ***espaço amostral não equiprovável****.*

Exemplo 7. *Consideremos uma caixa contendo 8 bolas, sendo 3 azuis, 2 vermelhas e 3 amarelas, e o experimento aleatório "retirar uma bola dessa caixa, de olhos vendados, e verificar sua cor". Poderíamos assim considerar, como espaço amostral, o conjunto:*

$$\Omega = \{B_{azul}, B_{vermelha}, B_{amarela}\}$$

E assim, $n(\Omega) = 3$ *obtendo então um espaço amostral não equiprovável, pois as cores azul e amarela possuem maior chance de serem retiradas, já que têm maiores quantidades na caixa do que a vermelha. Um possível espaço amostral equiprovável para este experimento poderia ser formado identificando cada bola de forma única:*

$$\Omega = \{Azul_1, Azul_2, Azul_3, Vermelha_1, Vermelha_2, Amarela_1, Amarela_2, Amarela_3\}$$

Com $n(\Omega) = 8$.

Para nosso estudo, ao definir o espaço amostral de um experimento aleatório, iremos preferencialmente trabalhar com espaços amostrais equiprováveis, ou seja, aqueles em que todos os eventos unitários possuem a mesma possibilidade de ocorrerem.

Definição 5. *Dado um espaço amostral equiprovável Ω, a probabilidade de ocorrer um determinado evento A é expressa numericamente pela razão entre $n(A)$ e $n(\Omega)$, nessa ordem. Equivalentemente, também podemos defini-la como a razão entre o número de casos favoráveis ao evento e o número de casos possíveis do experimento. Denotaremos a probabilidade de ocorrência de um evento A por $p(A)$. Portanto,*

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{números\ de\ casos\ favoráveis}{números\ de\ resultados\ possíveis}$$

Exemplo 8. *Consideremos o experimento "lançar um dado comum de 6 faces e observar o número de pontos da face voltada para cima" e vamos determinar a probabilidade de o número de pontos ser:*

- ***a)*** *Ímpar;*
- ***b)*** *Menor que 3;*
- ***c)*** *Menor que 8;*
- ***d)*** *Maior que 10;*

Resoluções:

Sendo todos os eventos referentes a um mesmo experimento aleatório, temos assim um espaço amostral único: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(\Omega) = 6$. Temos ainda um espaço amostral equiprovável, pois sendo o dado honesto, todos os números possuem a mesma probabilidade (chance) de ocorrerem, logo:

- ***a)*** *Dado o evento A: "face superior ser um número ímpar", temos $A = \{1, 3, 5\}$ e $n(A) = 3$. Portanto a probabilidade deste evento ocorrer será de:*

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

- ***b)*** *Para o evento B: "números de pontos obtido ser menor que 3", obtemos $B = \{1, 2\}$ e $n(B) = 2$. Portanto a probabilidade deste evento ocorrer será de:*

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots = 33{,}33\ldots\%$$

c) *No evento C: "face superior ser um número menor que 8", temos* $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e* $n(C) = 6$*. Portanto a probabilidade deste evento ocorrer será de:*

$$p(A) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{6}{6} = 1 = 100\%$$

d) *Já no evento D: "números de pontos obtido ser maior que 10", temos* $D = \{\ \ \} = \emptyset$ *e* $n(D) = 0$*. Portanto a probabilidade deste evento ocorrer será de:*

$$p(A) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0 = 0\%$$

Exemplo 9. *Em um cofrinho existem apenas moedas de 1; 0,50 e 0,25 reais, sendo 8 moedas de 1 real, 7 moedas de 50 centavos e as demais de 25 centavos. Retirando-se do cofre uma moeda ao acaso, a probabilidade de ela ser de 25 centavos é igual a 40%. Determine a probabilidade de a moeda ser de um real.*

Resolução:

Suponhamos que o número de moedas de 25 centavos no cofre seja x*, assim o total de moedas no cofre será de* $(8 + 7 + x) = (15 + x)$*, logo, no experimento "retirar uma moeda do cofre e identificar seu valor" tem-se* $n(\Omega) = 15 + x$*. Como cada uma das* $(15 + x)$ *moedas têm a mesma chance de ser retirada, temos um espaço amostral equiprovável. Sabemos ainda que a probabilidade do evento A: "moeda retirada ser de 25 centavos" é igual a 0,4 e* $n(A) = x$*, portanto:*

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{x}{15 + x} = 0{,}4$$

Assim,

$$\frac{x}{15 + x} = 0{,}4 \Leftrightarrow x = 6 + 0{,}4x \Leftrightarrow x - 0{,}4x = 6 \Leftrightarrow 0{,}6x = 6 \Leftrightarrow x = 10$$

Logo, concluímos que no cofre existem 10 moedas de 25 centavos e o número de elementos do espaço amostral é, $n(\Omega) = 15 + 10 = 25$*. Considerando agora o evento B: "moeda retirada ser de 1 real" temos que* $n(B) = 8$ *e, portanto:*

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{8}{25} = 0{,}32 = 32\%$$

Observação 1. Vamos analisar agora o valor da probabilidade de alguns eventos especiais já citados anteriormente.

a) *A probabilidade de um evento impossível é igual a 0.*

De fato, se A é um evento impossível $A = \{\quad\} = \emptyset$ *e* $n(A) = 0$, *portanto* $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{0}{n(\Omega)} = 0$.

b) *A probabilidade de um evento certo é igual a 1 (ou 100%).*

De fato, se B é um evento certo $B = \Omega$ *e* $n(B) = n(\Omega)$, *portanto* $p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1 = 100\%$.

c) *Em um espaço equiprovável, a probabilidade de um evento elementar é igual a* $\frac{1}{n(\Omega)}$.

De fato, se C é um evento unitário $n(C) = 1$, *portanto* $p(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{n(\Omega)}$.

d) *Para todo experimento aleatório, independente do espaço amostral ser equiprovável ou não, a soma das probabilidades de todos os eventos unitários é igual a 1.*

De fato, se considerarmos um experimento aleatório com espaço amostral equiprovável $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, \dots, E_n\}$, *pelo item anterior temos que cada evento elementar* $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ *possui a probabilidade de acontecer* $p(E_n) = \frac{1}{n(\Omega)}$, *logo:*

$$p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) + \cdots + p(E_n) = \frac{1}{n(\Omega)} + \frac{1}{n(\Omega)} + \frac{1}{n(\Omega)} + \cdots + \frac{1}{n(\Omega)} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Por outro lado, se $\Omega = \{E_a, E_b, E_c, \dots, E_k\}$ *com* $k < n$ *é um espaço amostral não equiprovável temos que cada um dos eventos* $E_a, E_b, E_c, \dots, E_k$ *não possuem a mesma chance de ocorrer, pois* $n(E_a), n(E_b), n(E_c), \dots, n(E_k)$ *não serão todos iguais, porém, temos que* $n(E_a) + n(E_b) + n(E_c) + \cdots + n(E_k) = n(\Omega)$, *logo:*

$$p(E_a) + p(E_b) + p(E_c) + \cdots + p(E_k) = \frac{n(E_a)}{n(\Omega)} + \frac{n(E_b)}{n(\Omega)} + \frac{n(E_c)}{n(\Omega)} + \cdots + \frac{n(E_k)}{n(\Omega)}$$
$$= \frac{n(E_a) + n(E_b) + n(E_c) + \cdots + n(E_k)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$$

Observação 2. Através da definição de probabilidades, podemos observar que ela varia de um valor mínimo igual a 0, quando se trata de um evento impossível, até um valor máximo igual a 1 (ou 100%), para o caso de um evento certo. Assim, para qualquer evento A contido em um espaço amostral Ω, tem-se que:

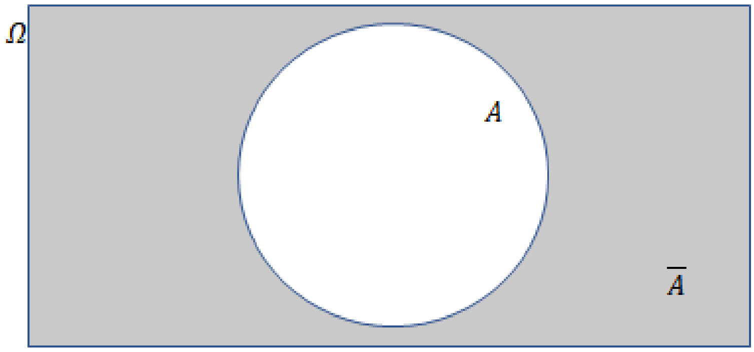
$$0 \leq p(A) \leq 1 \; ou \; 0 \leq p(A) \leq 100\%$$

Definição 6. *Dado um evento A contido em um espaço amostral* Ω, *denomina-se* ***evento complementar de*** *A, que denotaremos por* $\overline{A}$, *o evento definido por:*

$$\overline{A} = \Omega - A$$

Observemos na Figura 2 onde o retângulo representa o espaço amostral Ω, e a circunferência um evento A incluso em Ω, a região escura representa o complementar de A. Assim, podemos afirmar que na verdade $\overline{A}$, é a negação do evento A.

Figura 2: representação de conjunto



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Observação 3. A soma da probabilidade de um evento A com a probabilidade de seu complementar $\overline{A}$ é igual a 1, ou seja, para qualquer que seja o evento A tem-se:

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

Ou equivalentemente,

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Exemplo 10. *Supondo que a probabilidade de um determinado evento A ocorrer seja de* $p(A) = 37\%$, *então a probabilidade do seu complementar será de:*

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}37 = 0{,}63 = 63\%$$

Veremos nos exemplos abaixo as aplicações de Análise Combinatória na resolução de problemas de probabilidade, dentro deste contexto, mais importante do que identificar os elementos do espaço amostral Ω e de um determinado evento aleatório A é determinar quantos elementos cada um possui. Para tal, o número de elementos do espaço amostral e de seus eventos exige a aplicação destes conceitos de Análise Combinatória, conforme apresentado a seguir.

Exemplo 11. *Na elaboração de uma avaliação com 10 questões, o professor realizou uma afirmativa por questão, nas quais os alunos deverão decidir se é falsa ou verdadeira. Sem a preocupação de saber se cada uma das afirmativas é verdadeira ou falsa, o professor escolhe as 10 afirmativas de modo aleatório. Qual a probabilidade de a avaliação conter exatamente 6 afirmativas verdadeiras e 4 falsas?*

Resolução:

Sabemos que o espaço amostral Ω será o conjunto de todos os gabaritos possíveis para a avaliação. Por exemplo, $VVFFFFVFVV$ *é um possível gabarito considerando a ordem das questões, da 1ª até a 10ª. Assim, como para questão há duas opções de resposta (V ou F), para determinar o número de elementos do espaço amostral Ω devemos utilizar o conceito de princípio multiplicativo, logo:*

$$n(\Omega) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 1024$$

Para o evento A: "gabarito conter 6 afirmativas verdadeiras e 4 falsas", como por exemplo, $FVVVFFVFVV$*, devemos utilizar o conceito de permutação com repetição das 6 letras V e 4 letras F, assim:*

$$n(A) = P_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6!\,4!} = 210$$

Portanto,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{210}{1024} = \frac{105}{512} = 0{,}205078125\ldots = 20{,}5078123\ldots\%$$

Exemplo 12. *Em seu caderno, o aluno escreve, aleatoriamente, dois anagramas diferentes da palavra ALUNO. Determinar a probabilidade de as letras inicial e final nos dois anagramas serem a mesma.*

Resolução:

O espaço amostral Ω é o conjunto de todos os anagramas possíveis da palavra ALUNO, onde deveremos utilizar o conceito de permutação simples para determinar $n(\Omega)$*, visto que na palavra não há repetição de nenhuma letra, logo:*

$$n(\Omega) = P_5 = 5! = 120$$

Considerando que o aluno já tenha escrito o primeiro anagrama, iremos determinar a probabilidade de o segundo conter as mesmas letras iniciais e finais do primeiro. Assim, queremos determinar a probabilidade de o evento B: "segundo anagrama ser diferente, mas conter a mesma letra inicial e a mesma letra final do primeiro". Temos então definido a primeira e última letra do anagrama, e como não podemos repetir o primeiro escrito, obtemos que:

$$n(B) = P_3 - 1 = 3! - 1 = 6 - 1 = 5$$

Portanto, a probabilidade do evento B ocorrer será de:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{5}{120} = \frac{1}{24} = 0{,}0416666\ldots = 4{,}16666\ldots\%$$

Exemplo 13. *Escrevendo um número aleatório de sete algarismos, onde dois são o número 3, três algarismos são o número 4, um algarismo é 6 e um é 9, determine a probabilidade dos seguintes eventos.*

- ***a)*** *"o número apresentar os dois algarismos 3 juntos"*
- ***b)*** *"não apresentar os dois algarismos 3 juntos"*
- ***c)*** *"ser divisível por 3"*
- ***d)*** *"ser um número divisível por 5"*

Resolução:

Para todos os eventos o espaço amostral Ω será o mesmo e seu número de elementos é dado pela permutação com repetição dos algarismos 3, 3, 4, 4, 4, 6, 9. Logo:

$$n(\Omega) = P_7^{2,3,1,1} = \frac{7!}{2!\,3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 420$$

a) *Para este evento, como os algarismos 3 devem ficar juntos devemos contá-lo como um único elemento assim* $n(A) = P_6^{3,1,1,1} = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, *portanto:*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{120}{420} = \frac{2}{7} = 0,\overline{285714} = 28{,}5714\overline{285714}$$

b) *Neste evento podemos utilizar o conceito de complementar, pois temos aqui o complementar do evento anterior, assim:*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7} = 0{,}714285\,\ldots = 71{,}4285\,\ldots\%$$

c) *Para este evento devemos utilizar o conceito de critério de divisibilidade por 3, já que queremos determinar a probabilidade de o número formado ser divisível por 3, e como* $3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 6 + 9 = 33$ *é múltiplo de 3, temos que todos os números formados serão divisíveis por 3 (evento certo) e, portanto:*

$$P(C) = 1$$

d) *Analogamente devemos utilizar aqui os critérios de divisibilidade, neste caso por 5, como sabemos que um número só será divisível por 5 quando este terminar em 0 ou 5, estamos com um evento impossível e, portanto:*

$$P(D) = 0$$

Exemplo 14. *Distribuindo, aleatoriamente, 6 bolas iguais para 3 crianças, podendo cada criança ganhar de 0 a 6 bolas, vamos determinar a probabilidade de cada criança ganhar uma bola, pelo menos.*

Resolução:

Para este caso, o espaço amostral Ω é constituído por todas as formas distintas de distribuir as 6 bolas iguais para as 3 crianças. Uma forma, por exemplo, seria $C_1C_2C_2C_1C_2C_2$ onde a criança C_1 ganharia duas bolas, a criança C_2 ganharia quatro bolas e a criança C_3 não receberia bola nenhuma. Temos ainda que pelo fato de as bolas serem todas iguais não haverá critérios de ordenação, não importando a ordem de escolha, assim devemos utilizar o conceito de combinação completa das 3 crianças tomadas 6 a 6, logo:

$$n(\Omega) = (CC)_{3,6} = C_{3+6-1}^{6} = C_8^6 = \frac{8!}{6!\,(8-6)!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Precisamos determinar a probabilidade do evento B: "cada criança receber pelo menos uma bola", supondo desta forma que cada criança já tenha recebido uma bola, o número de elementos de B será dado pela combinação completa das 3 crianças para as 3 bolas restantes, logo:

$$n(B) = (CC)_{3,3} = C_{3+3-1}^{3} = C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Portanto, temos que a probabilidade de que cada criança receba pelo menos uma bola será de:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} = 0{,}3571428\ldots = 35{,}71428\ldots\%$$

2.2 União, Condicional e Produto.

Nesta etapa, iremos realizar o estudo do cálculo de probabilidades para a união de eventos, também a probabilidade de um evento ocorrer, sabendo que outro já tenha ocorrido (condicional), e a probabilidade de eventos simultâneos ou consecutivos.

Exemplo 15. *Analisaremos o seguinte problema: escolhendo-se ao acaso um número natural de 1 a 30, qual seria a probabilidade de ele ser:*

- ***a)*** *Evento A: "divisível por 3".*
- ***b)*** *Evento B: "divisível por 4".*
- ***c)*** *Evento $A \cap B$: "divisível por 3 e por 4".*
- ***d)*** *Evento $A \cup B$: "divisível por 3 ou 4".*

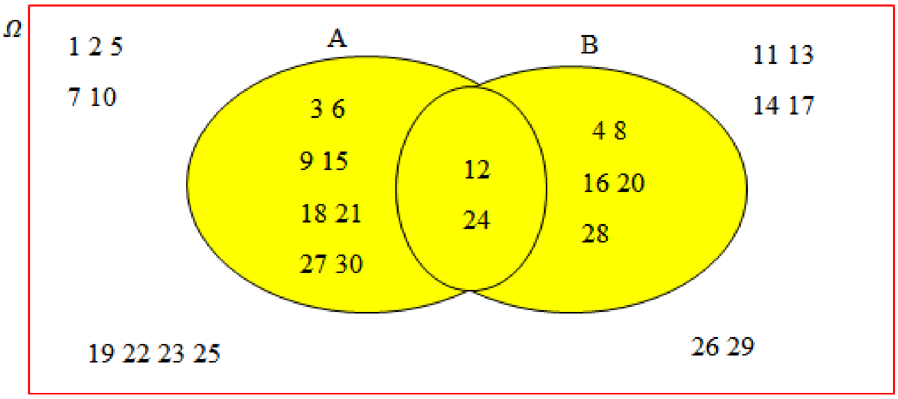
Resolução:

Sabemos que neste caso o espaço amostral Ω será o conjunto de números naturais de 1 a 30, ou seja, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, 29, 30\}$ *sendo* $n(\Omega) = 30$, *no qual devemos determinar a probabilidade dos seguintes eventos contidos em* Ω.

- $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$ *e* $n(A) = 10$.
- $B = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$ *e* $n(B) = 7$.
- $A \cap B = \{12, 24\}$ *e* $n(A \cap B) = 2$.
- $A \cup B = \{3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 30\}$ *e* $n(A \cup B) = 15$.

Podemos averiguar estes eventos no diagrama a seguir (Figura 3), com seus respectivos elementos:

Figura 3: eventos em um diagrama.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Logo, $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$; $p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{7}{30}$; $p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$; $p(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

Assim, podemos notar uma relação entre o número de elementos de $A \cup B$, onde o mesmo pode ser obtido somando o número de elementos de A ao número de elementos de B e subtraindo-se desta soma, o número de elementos de $A \cap B$, já que estes foram contados duas vezes na adição feita. Portanto, temos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$15 \quad = \quad 10 \quad + \quad 7 \quad - \quad 2$$

Logo, dividindo cada um dos termos da igualdade anterior por $n(\Omega)$, obtemos que:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Longrightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Ou seja,

$$\frac{15}{30} = \frac{10}{30} + \frac{7}{30} - \frac{2}{30}.$$

Observação 4. Dados X, Y, dois eventos contidos em um espaço amostral Ω, temos que é válida a seguinte relação:

$$p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X \cap Y)$$

Quando os eventos X e Y não possuem elementos em comum, ou seja, os mesmos são mutuamente exclusivos, onde $X \cap Y = \emptyset$, tem-se que $p(X \cap Y) = p(\emptyset) = 0$ (evento impossível), assim:

$$p(X \cup Y) = p(X) + p(Y)$$

Veremos, portanto na sequência, a resolução de alguns exemplos de problemas que envolvem a aplicação da probabilidade da união de eventos.

Exemplo 16. *Escolhendo aleatoriamente um anagrama da palavra CHINELO, vamos determinar a probabilidade de o anagrama começar ou terminar por vogal.*

Resolução:

Sabemos que o espaço amostral Ω é formado por todos os anagramas da palavra CHINELO, onde não havendo repetição de letras utilizamos o conceito de permutação simples, assim $n(\Omega) = P_7 = 7!$

Tomando agora os seguintes eventos, A: "o anagrama escolhido iniciar com uma vogal" e B: "o anagrama escolhido terminar com uma vogal", onde $n(A) = 3 \cdot P_6 = 3 \cdot 6!$ *e* $n(B) = 3 \cdot P_6 = 3 \cdot 6!$, *logo obtemos que* $A \cap B$*: "o anagrama escolhido iniciar e terminar com uma vogal" com* $n(A \cap B) = 3 \cdot 2 \cdot P_5 = 6 \cdot 5! = 6!$, *portanto:*

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3 \cdot 6!}{7!} = \frac{3}{7}; \quad \text{como} \quad p(B) = p(A) = \frac{3}{7} \quad e \quad p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$$

obtemos que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

Exemplo 17. *Ao formar todos os números de quatro algarismos distintos utilizando apenas os algarismos 2, 4, 6, 7, 8, ou 9, vamos determinar a probabilidade de escolhendo ao acaso um dos números formados, ele iniciar com o algarismo 2 ou terminar com os algarismos 2 e 9, em qualquer ordem.*

Resolução:

Observando as condições do problema temos que o espaço amostral Ω é o conjunto de todos os números de quatro algarismos que podem ser formados, neste caso, como a *ordem dos números é relevante e não podendo haver repetição utilizaremos o conceito de arranjo simples pra determinar o seu número de elementos, logo:*

$$n(\Omega) = A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Consideremos agora os seguintes eventos contidos neste espaço amostral Ω, A: "o número selecionado iniciar com o algarismo 3" onde $n(A) = A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ *e* *B: "o número selecionado terminar em 29 ou 92", onde* $n(B) = 2 \cdot A_{4,2} = 2 \cdot \frac{4!}{(4-2)!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, *logo:*

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Porém, como $(A \cap B) = \emptyset$, *já que nenhum elemento do espaço amostral inicia por 2 e termina com 29 ou 92 ao mesmo tempo, temos por consequência que A e B são mutuamente exclusivos e, portanto:*

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{60}{360} + \frac{24}{360} = \frac{84}{360} = \frac{7}{30} = 0{,}233333\ldots = 23{,}33333\ldots\%$$

Definição 7. *Dados dois eventos* A *e* B *contidos em um espaço amostral* Ω, *a* ***probabilidade condicional*** *de ocorrer o evento A, sabendo que o evento B já tenha ocorrido, é denotada por* $p(A/B)$ *e é dada por:*

$$p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Assim, se dividirmos o numerador e denominador desta fração por $n(\Omega)$, *obtemos que* $p(A/B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}$, *onde pela definição de probabilidades podemos concluir que:*

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Observemos agora a resolução de alguns problemas probabilísticos que envolvem a aplicação dos conceitos de probabilidade condicional.

Exemplo 18. *No lançamento de um dado honesto, sabe-se que o número obtido na face superior é menor que 6, vamos determinar a probabilidade de que o número obtido seja maior que 2.*

Resolução:

De acordo com o problema, sabemos que o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *com* $n(\Omega) = 6$ *e para o evento A: "número obtido ser menor que 6" tem-se* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *com* $n(A) = 5$. *Sendo o evento B: "número obtido ser maior que 2" temos que* $A \cap B = \{3, 4, 5\}$ *com* $n(A \cap B) = 3$, *logo* $p(A \cap B) = \frac{3}{6}$ *e, portanto, a probabilidade pedida será de:*

$$p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{6} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{5}$$

Exemplo 19. *Realizando um sorteio de um número inteiro de 1 a 25, observou-se que ele não era primo, vamos determinar a probabilidade de este número ser ímpar.*

Resolução:

Temos neste problema que o espaço amostral é o conjunto de números inteiros de 1 a 25, assim $n(\Omega) = 25$. *Tomando agora o evento X: "o número sorteado não ser primo" temos que* $X = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25\}$, *logo* $n(X) = 16$ *e* $p(X) = \frac{16}{25}$. *Sendo assim, o evento Y: "número sorteado ser ímpar" nos indica que* $Y \cap X = \{1, 9, 15, 21, 25\}$ *com* $n(Y \cap X) = 5$ *e* $p(Y \cap X) = \frac{5}{25}$, *portanto a probabilidade do evento "número sorteado ser ímpar, sabendo que ele não é primo" será de:*

$$p(Y/X) = \frac{p(Y \cap X)}{p(X)} = \frac{\frac{5}{25}}{\frac{16}{25}} = \frac{5}{25} \cdot \frac{25}{16} = \frac{5}{16}$$

Exemplo 20. *Escolhendo aleatoriamente um anagrama da palavra COUVE, e sabendo que ele inicia por vogal, vamos determinar a probabilidade de o mesmo terminar com consoante.*

Resolução:

Para este problema o espaço amostral Ω é o conjunto formado por todos os anagramas da palavra COUVE, assim $n(\Omega) = P_5 = 5! = 120$. *Considerando agora o evento V: "o anagrama escolhido inicia com vogal" temos que* $n(V) = 3 \cdot P_4 = 3 \cdot 4! = 72$ *e* $p(V) = \frac{72}{120}$. *Tomando assim o evento C: "o anagrama escolhido terminar por consoante" temos que* $n(C \cap V) = 2 \cdot 3 \cdot P_3 = 2 \cdot 3 \cdot 3! = 36$, *portanto a probabilidade pedida será dada por:*

$$p(C/V) = \frac{p(C \cap V)}{p(V)} = \frac{\frac{36}{120}}{\frac{72}{120}} = \frac{36}{120} \cdot \frac{120}{72} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$$

Passaremos agora a analisar o cálculo de probabilidades para que determinados eventos ocorrerem simultaneamente ou em sequência. Perceberemos assim, que para estas situações, necessitaremos utilizar o conceito de multiplicação. Como vimos anteriormente no estudo de probabilidade condicional, dados dois eventos X e Y, com $p(X) \neq 0$ e $p(Y) \neq 0$, são válidas as relações $p(X/Y) = \frac{p(X \cap Y)}{p(Y)}$ e $p(Y/X) = \frac{p(X \cap Y)}{p(X)}$, ou seja:

$$p(X \cap Y) = p(Y) \cdot p(X/Y) \; e \; p(X \cap Y) = p(X) \cdot p(Y/X)$$

Durante nosso estudo iremos utilizar a expressão $p(X \cap Y)$ para representar duas situações: a probabilidade de os eventos X e Y ocorrerem simultaneamente ou a probabilidade de os mesmos ocorrerem um consecutivamente, ou seja, um após o outro.

Desta forma, pelas equações anteriores, dados dois eventos X e Y, a probabilidade de ocorrerem simultaneamente ou consecutivamente será igual a probabilidade de qualquer um deles ocorrer, multiplicada pela probabilidade de o outro ocorrer, partindo do principio de que o primeiro já tenha ocorrido.

Quando a ocorrência de um dos eventos não interfere na ocorrência do outro, temos que $p(X/Y) = p(X)$, pois neste caso, o fato de Y já ter ocorrido não interfere na ocorrência do evento X; além disso, $p(Y/X) = p(Y)$, dado que nestas condições, o fato de X já ter ocorrido não interfere na probabilidade da ocorrência de Y. Deste modo, dizemos que os eventos X e Y são eventos independentes, e as relações anteriores podem ser escritas por uma única relação:

$$p(X \cap Y) = p(X) \cdot p(Y)$$

A probabilidade no cálculo de três eventos X, Y e Z ocorrerem simultaneamente ou consecutivamente baseia-se no mesmo raciocínio, ou seja, $p(X \cap Y \cap Z) = p(X) \cdot p(Y/X) \cdot p(Z/(X \cap Y))$; quando os eventos X, Y e Z são dois a dois independentes, temos que $p(X \cap Y \cap Z) = p(X) \cdot p(Y) \cdot p(Z)$. Utiliza-se este mesmo raciocínio para o cálculo de probabilidades de quatro ou mais eventos ocorrerem consecutivamente ou simultaneamente. Veremos a seguir, a resolução de alguns problemas que utilizam a aplicação do produto de probabilidades em suas resoluções.

Exemplo 21. *Ao lançar um dado honesto e uma moeda ao mesmo tempo, iremos determinar a probabilidade de obtermos:*

a) *Uma pontuação menor que 3 no dado e a face Coroa na moeda;*

b) *Uma pontuação menor que 3 no dado ou a face Coroa na moeda;*

Resolução:

Neste caso temos dois eventos independentes, já que o resultado obtido no lançamento do dado não interfere no resultado do lançamento da moeda, e vice-versa. Para o lançamento do dado, temos o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *com* $n(\Omega) = 6$ *e o evento A: "obter uma pontuação menor que 3" com* $A = \{1, 2\}$ *e* $n(A) = 2$ *logo:*

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Já para o lançamento da moeda, temos o espaço amostral $\Omega = \{Cara, Coroa\}$ *com* $n(\Omega) = 2$ *e o evento B: "obter a face Coroa" com* $B = \{Coroa\}$ *e* $n(B) = 1$ *logo:*

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

a) *Portanto a probabilidade de se obter a face Coroa e uma pontuação menor que dois no lançamento dado será de:*

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

b) *Pelo item anterior sabemos que* $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$, *logo pela equação de probabilidade da união de eventos obtemos que:*

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2 + 3 - 1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Exemplo 22. *Em uma urna estão 26 bolas nomeadas com uma letra do nosso alfabeto. Ao retirar dessa urna sucessivamente, duas bolas ao acaso, vamos determinar a probabilidade de ambas conterem uma consoante, em cada uma das situações a seguir:*

a) *Com reposição da primeira bola sorteada;*

b) *Sem reposição da primeira bola sorteada;*

Resolução:

a) *Neste caso, como a primeira bola retirada é recolocada na urna, o resultado da segunda retirada independe do resultado da primeira retirada, com isso temos que os eventos A: "primeira bola retirada conter uma consoante" e B: "segunda bola retirada conter uma consoante" são independentes. Assim, como das 26 letras do alfabeto 21 são consoantes temos que* $n(\Omega) = 26$, $n(A) = n(B) = 21$ *e* $p(A) = p(B) = \frac{21}{26}$. *Portanto, a probabilidade de as duas bolas conterem uma consoante será de:*

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{21}{26} \cdot \frac{21}{26} = \frac{441}{676} \cong 0{,}65 = 65\%$$

b) *Para o caso de não haver reposição da primeira bola retirada, temos que o resultado da segunda retirada depende do que ocorreu na primeira retirada, logo os eventos A e B são dependentes, e assim:*

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{21}{26} \cdot \frac{20}{25} = \frac{21}{26} \cdot \frac{4}{5} = \frac{42}{65} \cong 0{,}646 = 64{,}6\%$$

Exemplo 23. *Sabe-se que a probabilidade de Ana Vitória sair à noite no sábado é de 18% se chover e de 80% se não chover em sua cidade. Previsões meteorológicas indicam que nesta cidade, no próximo sábado à noite a probabilidade de chover será de 48%. Vamos determinar a probabilidade de Ana Vitória sair na próxima noite de sábado.*

Resolução:

Sabendo que a probabilidade de chover na próxima noite de sábado é de 48%, temos que a probabilidade de não chover será de 52%. Assim, termos duas opções para que Ana Vitória saia sábado a noite:

1ª) *Chover e Ana Vitória sair a noite, cuja probabilidade será* $p_1 = 48\% \cdot 18\% = 0{,}48 \cdot 0{,}18 = 0{,}0864 = 8{,}64\%$.

2ª) *Não chover e Ana Vitória sair a noite, cuja probabilidade será* $p_2 = 52\% \cdot 80\% = 0{,}52 \cdot 0{,}8 = 0{,}416 = 41{,}6\%$.

Portanto, como os dois eventos são mutuamente exclusivos (não há a possibilidade de chover e não chover ao mesmo tempo), obtemos que a probabilidade de Ana Vitória sair à noite no próximo sábado será de:

$$8{,}64\% + 41{,}6\% = 50{,}24\%$$

2.3 Teorema de Bayes

Nascido no século XVIII, Thomas Bayes foi um pastor presbiteriano inglês que viveu entre os anos 1702 e 1761 e que embora não tivesse nenhum cargo acadêmico oficial, apresentou uma paixão secreta pela matemática, dedicando-se ao estudo da probabilidade e deixando assim resultados significativos ao desenvolvimento e futuro da ciência.

Mesmo o teorema levando seu nome, Bayes, na verdade elaborou um contexto inicial de estudo sobre o assunto, o que o tornou mais que merecedor desta homenagem, pois foi quem apresentou a brilhante ideia e deu o passo inicial para sua conclusão, porém sendo publicado apenas por volta de 1763, após sua morte.

Dois anos após a sua morte, em 1763 começaram a surgir e serem publicados estudos mais refinados sobre seus materiais produzidos, nomes importantes do meio acadêmico como seu próprio amigo e filósofo inglês Richard Price apresentou e fez publicação de tal estudo, e mais adiante Pierre-Simon Laplace matemático francês, por volta de 1812 deu uma forma mais completa ao teorema, atribuindo em sua homenagem o nome "Teorema de Bayes".

Este teorema nos permite, de maneira mais simples, melhorar nossas concepções sobre um determinado evento mediante novas evidências. Desta forma, então, ele nos proporciona uma maneira de combinar nosso conhecimento prévio (probabilidade priori) com novas informações (probabilidade condicional) para atingirmos uma probabilidade atualizada (probabilidade posteriori).

Por viver em uma época com pouca receptividade às suas ideias, Thomas Bayes deixou um legado que hoje ainda é imenso. A formulação do seu teorema revolucionou a maneira como lidamos com probabilidades e incertezas, abrindo novos caminhos e contribuindo para avanços em diversas áreas do conhecimento.

A partir do seu conhecimento concreto, o teorema de Bayes se tornou uma importante ferramenta em diversos campos da ciência, como, por exemplo, na Estatística com a inferência bayesiana, o teste de hipóteses e análise de dados, no aprendizado de máquina, com a regressão, classificação e redes neurais bayesianas, na Educação Financeira, com a análise de riscos, modelagem de preços e investimentos, e até mesmo na Medicina, para se ter um diagnóstico médico e em pesquisas para novos tratamentos.

O teorema de Bayes deriva do conceito de probabilidade total, expresso matematicamente pela equação:

$$p(A/B) = \frac{p(B/A) \cdot p(A)}{p(B)}$$

Onde,

- ✔ A e B são eventos com $p(B) \neq 0$;
- ✔ $p(A)$ e $p(B)$ são probabilidades de A e B (a priori);
- ✔ $p(A/B)$ é a probabilidade de A condicional a B (probabilidade posteriori).

De modo geral, formalmente temos:

Teorema 1 *Seja* $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ *uma partição do espaço amostral* Ω *com* $p(A_i) > 0$ *para todo* $1 \leq i \leq n$*. Então, para todo evento* B*, com* $p(B) > 0$ *e para todo* $1 \leq j \leq n$ *tem-se que:*

$$p(A_j/B) = \frac{p(B/A_j) \cdot p(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(B/A_i) \cdot p(A_i)}$$

Demonstração:

Para esta demonstração, separaremos em dois casos, quando A_j e B são disjuntos, ou seja, $p\left(A_j \cap B\right) = 0$ *e quando os eventos possuem intersecção, ou seja,* $p\left(A_j \cap B\right) \neq 0$.

Iniciaremos com o caso em que $p\left(A_j \cap B\right) = 0$*, assim temos que:*

$$0 = p\left(A_j \cap B\right) = p\left(A_j/B\right) \cdot p(B)$$

E como $p(B) \neq 0$ *obtemos que* $p(A_j \cap B) = 0$*. Sabendo que* $A_j \cap B = B \cap A_j$*, analogamente obtemos que* $p\left(B/A_j\right) = 0$*, pois* $p(A_i) > 0$ *para todo* i*. Mostrando assim que* $p\left(A_j/B\right) = \frac{p\left(B/A_j\right) \cdot p\left(A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} p(B/A_i) \cdot p(A_i)}$*, visto que ambos os lados são iguais a 0.*

Por outro lado, caso $p\left(A_j \cap B\right) \neq 0$ *podemos utilizar o conceito de produto de probabilidades, onde* $p\left(B/A_j\right) \cdot p\left(A_j\right) = p\left(A_j \cap B\right)$ *e ainda através da soma de probabilidades temos* $\sum_{i=1}^{n} p(B/A_i) \cdot p(A_i) = p(B)$*, logo:*

$$\frac{p\left(B/A_j\right) \cdot p\left(A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} p(B/A_i) \cdot p(A_i)} = \frac{p\left(A_j \cap B\right)}{p(B)} = p\left(A_j/B\right).$$

Portanto, $p\left(A_j/B\right) = \frac{p\left(B/A_j\right) \cdot p\left(A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} p(B/A_i) \cdot p(A_i)}$ ■

Observa-se que, além das equações acima mencionadas para o teorema de Bayes, existe ainda uma forma alternativa utilizada para eventos complementares, quando as hipóteses são concorrentes:

$$p(A/B) = \frac{p(B/A) \cdot p(A)}{p(B/A) \cdot p(A) + p\left(B/\overline{A}\right) \cdot p\left(\overline{A}\right)}$$

Onde, $p\left(\overline{A}\right)$ é a probabilidade do complementar do evento A, ou seja, a previsão de chance de não ocorrência de A.

Exemplo 24. *Um mesmo produto alimentício é produzido em três fábricas diferentes de uma companhia alimentícia internacional. A fábrica I produz 25% do total produzido, a fábrica II é responsável por 40% da produção, e o restante é produzido na fábrica III. Porém, cada fábrica produz uma proporção de produtos que não são adequados às normas de vigilância internacional, sendo assim considerados "defeituosos" e que correspondem respectivamente a 2%, 1,5% e 1% do total produzido por fábrica.*
Sabendo que no centro de distribuição é feito o controle de qualidade de produção para seguida distribuição, iremos determinar as seguintes probabilidades.

a) *Encontrar um produto defeituoso durante a inspeção.*

b) *Encontrado um produto defeituoso, a probabilidade que tenha vindo da fábrica II.*

Resolução:

Consideremos os eventos A: "produto ser defeituoso" e F_i: "ser produto da fábrica i", assim pelos dados do problema sabemos que $p(F_1) = 0{,}25$; $p(F_2) = 0{,}4$ e $p(F_3) = 0{,}35$ e ainda $p(A/F_1) = 0{,}02$; $p(A/F_2) = 0{,}015$ e $p(A/F_3) = 0{,}01$.

a) *Utilizando aqui o conceito de probabilidade total obtemos que a probabilidade de se encontrar um produto defeituoso será de:*

$$p(A) = p(F_1) \cdot p(A/F_1) + p(F_2) \cdot p(A/F_2) + p(F_3) \cdot p(A/F_3)$$

Assim,

$$p(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}02 + 0{,}4 \cdot 0{,}015 + 0{,}35 \cdot 0{,}01 = 0{,}0145 = 1{,}45\%$$

b) *Para este caso utilizaremos de fato na resolução o Teorema de Bayes para determinar a probabilidade de um produto ser da fábrica II, dado ele ser defeituoso:*

$$p(F_2/A) = \frac{p(A/F_2) \cdot p(F_2)}{p(A)} = \frac{0{,}015 \cdot 0{,}4}{0{,}0145} = 0{,}4137931034 \ldots \cong 41{,}38\%$$

Exemplo 25. *A medicina nos proporciona algumas aplicações bem interessantes do Teorema de Bayes, podemos citar como exemplo a solução na interpretação da positividade de um teste envolvendo alguma doença.*

Inicialmente precisamos ter o conhecimento de que os testes não são 100% precisos, ou seja, existe margem para erros.

Consideremos que um teste para detecção de câncer em humanos se comporte da seguinte forma:

1. *1% da população possui o câncer.*

2. *80% dos testes são eficazes e detectam a doença quando ele existe.*

3. *9,6% dos testes identificam incorretamente a doença quando ela não existe.*

Utilizando estas informações, imaginemos que uma pessoa submetida a este teste tenha apresentado resultado positivo, e estudaremos qual a probabilidade de que realmente se tenha a doença, dado que o resultado deu positivo.

Através das informações acima sobre o teste obtemos podemos identificar que:

1. *Se 1% da população possui o câncer, então 99% não tem.*

2. *Se 80% dos testes detectam o câncer quando ele existe, temos 20% apresenta falhas.*

3. *Como 9,6% dos testes detectam o câncer quando ele não existe, temos que 90,4% apresentam corretamente um resultado negativo.*

Consideremos agora os eventos A: "ter câncer" e B: "teste deu positivo", assim temos que $p(A)$ representa a probabilidade de o indivíduo ter câncer enquanto $p(B)$ será a probabilidade de o teste ser positivo.

Neste caso $p(A/B)$ representará a probabilidade de o indivíduo ter câncer, dado que o resultado tenha dado positivo, que justamente buscamos encontrar.

Utilizando os dados apresentados temos do 1º item que, $p(A) = 1\%$ *e* $p(\overline{A}) = 99\%$, *no segundo item temos que a probabilidade do teste ser positivo dado que o indivíduo tenha o câncer é* $p(B/A) = 80\%$, *por fim, o terceiro item nos diz que a probabilidade do teste ser positivo dado que não se tem a doença é* $p(B/\overline{A}) = 9{,}6\%$.

Aplicando a fórmula alternativa para eventos complementares do teorema de Bayes, obtemos que a probabilidade de realmente se ter a doença, dado que o teste deu positivo será de:

$$p(A/B) = \frac{p(B/A) \cdot p(A)}{p(B/A) \cdot p(A) + p(B/\overline{A}) \cdot p(\overline{A})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}01}{0{,}8 \cdot 0{,}01 + 0{,}096 \cdot 0{,}99} \cong 0{,}07764 = 7{,}764\%$$

Portanto, a probabilidade de se ter o câncer dado que o teste deu positivo é de aproximadamente 7,764%.

O exemplo apresentado já nos traz alguns elementos bem interessantes de utilização e aplicabilidade do Teorema de Bayes.

Mesmo com a inevitável sensibilidade de pensar que o resultado positivo seja uma certeza sobre ter a doença, ao realizarmos o cálculo da probabilidade, obtemos que a chance de o indivíduo ter realmente a doença é bem pequena. Por outro lado, não podemos deixar de notar que antes do cálculo a probabilidade de se ter a doença era de apenas l%, mas que, na verdade, obteve um crescimento de quase oito vezes mais, chegando a aproximadamente 7,764%.

Deste modo podemos notar a importância do Teorema de Bayes no meio acadêmico, visto que dentre estes e outros exemplos, nas últimas décadas houve o surgimento de diferentes pesquisas acadêmicas relacionadas ao entendimento de como as pessoas fazem julgamentos e suas tomadas de decisões baseadas em informações imperfeitas ou incompletas, justamente o tema principal do nosso trabalho.

Utilizaremos assim o teorema na compreensão do problema de Monty Hall e sua resolução, fazendo uso de seu aspecto de entendimento de reações na tomada de decisões relacionadas a informações não concretas, porém, conforme já citamos este é um importantíssimo teorema com aplicabilidades em diversas áreas, como a Estatística, Mecânica, Educação Financeira e Medicina.

3 O PROBLEMA DE MONTY HALL

No âmbito das adversidades matemáticas que minimamente nos trazem impressionantes curiosidades, o problema de Monty Hall nos surpreende tanto pelo fato de apresentar uma simplicidade de compreensão, quanto por nos revelar que as respostas simples tornam nossas escolhas do dia a dia um tanto quanto irracionais. Por apresentar tais características, este paradoxo se tornou muito conhecido e acabou sendo abordado em diversos livros e até mesmo no cinema.

O problema matemático foi inspirado em um game show denominado *"Let's Make a Deal"* dos Estados Unidos, apresentado entre os anos de 1963 a 1971 pelo apresentador Monte Haleprin, também conhecido por Monty Hall, pelo qual o game ganhou repercussão. Um dos melhores exemplos de destaque deste paradoxo ocorre no filme Quebrando a Banca (2008), onde o jovem Ben Campbell (Jam Sturgess) surpreende seu professor Micky Rosa (Kevin Spacey) respondendo ao problema corretamente durante a aula.

Este é um problema que por natureza própria acaba indo além de sua abordagem em Probabilidade, elencando-se assim na compreensão da teoria de jogos, onde podemos observar o quanto a escolha de uma estratégia para abordagem do problema poderá ou não facilitar o jogador, potencializando sua probabilidade de vitória.

O jogo em si é bastante simples e baseia-se em três etapas:

- No palco existem três portas, onde atrás de uma delas há um carro zero e atrás das outras duas existem bodes. O apresentador expõe ao participante as três portas e pede que o mesmo escolha uma das portas;
- Assim que o participante escolhe uma porta, o apresentador surpreende o candidato e a plateia revelando uma das portas na qual existe um bode.
- Finalmente, ele faz a seguinte pergunta ao participante: "Você deseja permanecer na mesma porta, ou deseja escolher a outra?".

Figura 4: as portas de Monty Hall.

Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Imaginemos nesta situação então que você escolha uma porta qualquer, por exemplo, a porta número 1. O apresentador vai até a porta número 2 (Figura 4) e abre revelando a presença de um bode. Assim, temos a seguinte questão:

O que você faz? Permanece na mesma porta ou troca para a porta de número 3?

De maneira superficial, pode-se intuitivamente ocorrer uma análise equivocada do problema, onde uma pessoa ao ser abordada nesta situação interpreta que os eventos sejam independentes, tratando-os apenas como uma probabilidade de forma separada. Neste caso, inicialmente entende-se que cada porta apresenta $\frac{1}{3}$ de chance de esconder o carro e que, após a abertura de uma das portas pelo apresentador, o candidato tem 50% de possibilidade para a escolha da porta correta onde se encontra o carro. Probabilisticamente, cada noção citada acima não está incorreta, o erro se encontra na totalidade do paradoxo, pois a porta que será aberta pelo apresentador depende da porta que o participante escolheu inicialmente. Além disso, o apresentador sabe em qual porta está escondido o carro, ou seja, além da escolha inicial do participante, nenhuma das decisões tomadas aqui são aleatórias.

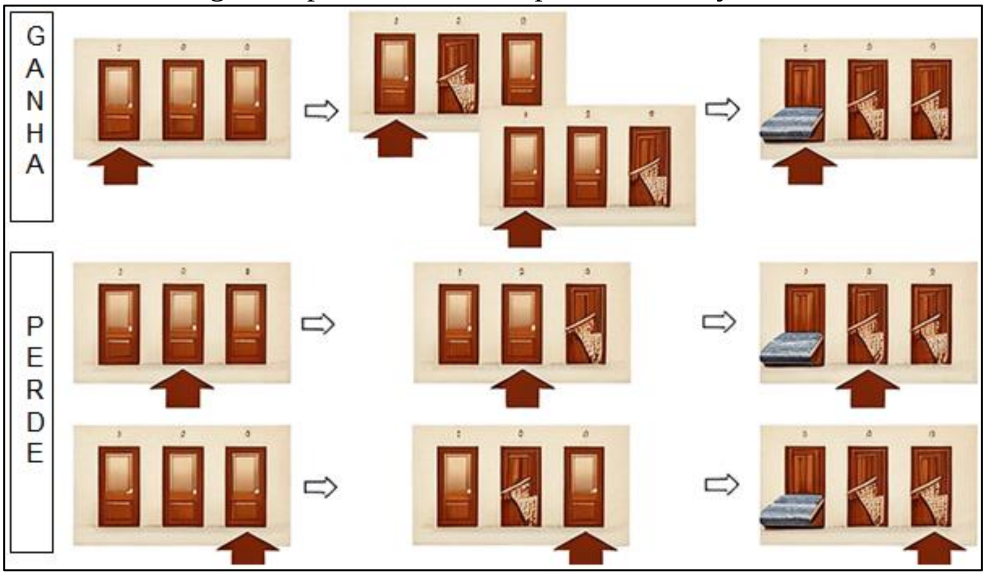
Neste sentido, nossa análise pretende identificar qual o método que irá potenciar a chance de a porta onde se encontra o carro ser escolhida. Utilizaremos assim duas estratégias: 1ª) Escolher uma porta e permanecer na mesma independente do apresentador abrir uma com bode ou 2ª) Escolher uma porta, e assim que o apresentador revelar uma com bode trocar de porta.

Sem perda de generalidade, vamos exemplificar estas estratégias considerando que a porta onde se encontra o carro é a de número 1, enquanto nas portas 2 e 3 estão escondidos os bodes.

Para a 1ª estratégia, onde o participante permanece na sua escolha inicial, temos uma situação bastante simples, pois para ganhar o carro, basta que ele escolha corretamente a porta onde se encontra o carro desde o início.

De fato, neste caso a probabilidade de que ele ganhe o carro permanecendo na porta em que escolheu inicialmente é independente da porta que será aberta pelo apresentador, e que conforme podemos observar na seguinte imagem (Figura 5) o participante terá $\frac{1}{3}$ de chance para conquista do veículo.

Figura 5: possibilidades na porta de Monty Hall.



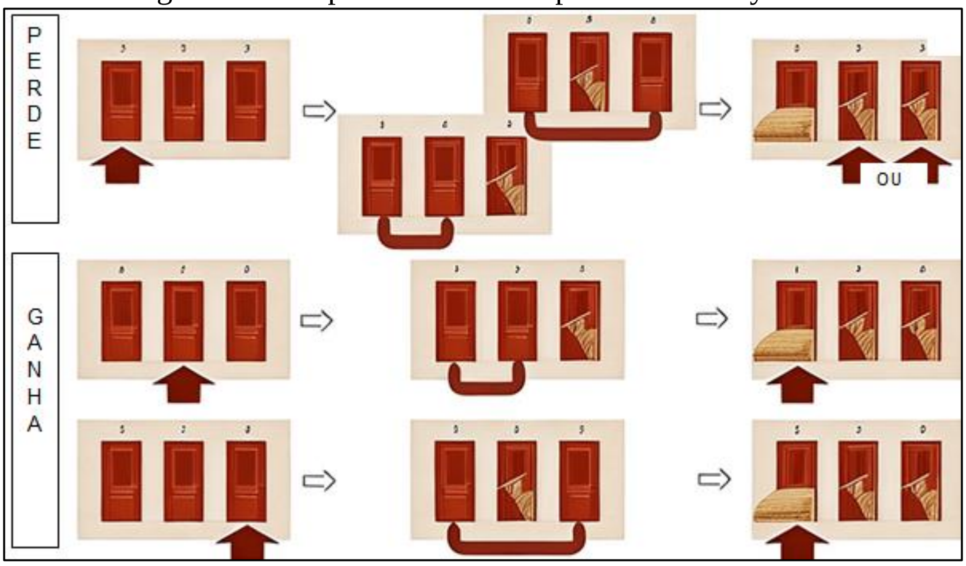
Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Já para a 2ª estratégia, onde o participante decide trocar de porta, necessitamos de uma análise mais profunda e interessante, pois para ganhar o carro é preciso que inicialmente ele tenha escolhido uma porta com um dos bodes.

Neste caso, embora indo de encontro a intuição, temos que utilizando a estratégia de trocar de porta, quando o participante escolhe uma porta com bode o apresentador se torna obrigado a abrir a outra que contém também um bode, restando assim apenas a porta onde se encontra o carro, logo como podemos observar na figura seguinte, a probabilidade de se ganhar o veículo será de $\frac{2}{3}$.

Figura 6: outra possibilidade das portas de Monty Hall.



Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Portanto, podemos concluir então que a melhor estratégia neste caso seria ***trocar*** de porta e não ***permanecer*** na escolha inicial.

A probabilidade nos fornece diversas maneiras para detectar esta ótima estratégia, para isso faz-se necessário o conhecimento e utilização dos conceitos de probabilidade condicional e teorema de Bayes estudados no capítulo anterior.

Consideremos os eventos P_1: "o carro se encontra na porta 1" , P_2: "o carro se encontra na porta 2" e P_3: "o carro se encontra na porta 3" para uma melhor compreensão do funcionamento desta aplicação.

Logo, teremos que:

$$p(P_1) = p(P_2) = p(P_3) = \frac{1}{3}$$

Como o cálculo pode ser feito para qualquer porta escolhida, sem perda de generalidade, iremos considerar que o participante faça a escolha da porta de número 1 e, pelo mesmo motivo, consideraremos também que o apresentador realize a abertura da porta de número 3.

Temos assim, o seguinte evento: A_3: "o apresentador abriu a porta número 3", onde suas probabilidades de ocorrência podem ser interpretadas das seguintes formas:

- $p(A_3 \backslash P_1)$: que se trata da probabilidade de o apresentador abrir a porta 3, dado que o carro se encontra na porta 1. Assim, como o participante escolheu a porta 1, o apresentador teria como opções de abertura a porta 2 ou 3, portanto:

$$p(A_3 \backslash P_1) = \frac{1}{2}$$

- $p(A_3 \backslash P_2)$: que se trata da probabilidade de o apresentador abrir a porta 3, dado que o carro se encontra na porta 2. Neste caso, como o participante escolheu a porta 1, o apresentador só teria como opção de abertura a porta de número 3, pois na 2 se encontra o carro, portanto:

$$p(A_3 \backslash P_2) = 1$$

- $p(A_3 \backslash P_3)$: que se trata da probabilidade de o apresentador abrir a porta 3, dado que o carro se encontra na porta 3, o que se trata de um evento impossível, pois o apresentador não abrirá a porta onde o carro se encontra escondido, portanto:

$$p(A_3 \backslash P_3) = 0$$

Logo, aplicando agora o teorema de Bayes, podemos determinar a chance de sucesso da ***1ª estratégia***, que é quando o participante deseja ***permanecer*** em sua escolha inicial, ou seja, a probabilidade de o carro estar na porta 1, dado que o apresentador abriu a porta de número 3:

$$p(P_1\backslash A_3) = \frac{p(A_3\backslash P_1)\cdot p(P_1)}{p(A_3\backslash P_1)\cdot p(P_1) + p(A_3\backslash P_2)\cdot p(P_2) + p(A_3\backslash P_3)\cdot p(P_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+0} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{3} = \frac{1}{3}$$

Por outro lado, se calcularmos a probabilidade da ***2ª estratégia***, que é quando o participante decide ***trocar*** de porta, ou seja, a probabilidade de o carro estar na porta de número 2, dado que o apresentador abriu a porta 3, obtemos que:

$$p(P_2\backslash A_3) = \frac{p(A_3\backslash P_2)\cdot p(P_2)}{p(A_3\backslash P_1)\cdot p(P_1) + p(A_3\backslash P_2)\cdot p(P_2) + p(A_3\backslash P_3)\cdot p(P_3)}$$

$$= \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+0} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{3} = \frac{2}{3}$$

Portanto, podemos confirmar assim que a ***2ª estratégia*** determinada pela ***troca*** de porta após a revelação feita pelo apresentador é muito melhor do que a ***1ª estratégia*** na qual o participante decide ***permanecer*** em sua escolha inicial.

O problema de Monty Hall por apresentar estas características interpretativas minimamente curiosas, torna-se um ótimo exemplo de aplicação dos conceitos de probabilidades em sala de aula para alunos da terceira série do ensino médio, podendo inclusive ser aplicado introdutoriamente, com intuito de adquirir dados estatísticos das diferentes estratégias de interpretação e respostas ao problema produzidas pelos alunos.

Sequencialmente, estes dados podem juntamente a turma serem analisados e através das diferentes interpretações debatidas, produzir um caminho estratégico no qual conforme a resolução apresentada anteriormente, aplicando-se adequadamente os conceitos probabilísticos se determinará a melhor estratégia a ser seguida.

Neste sentido, trataremos no próximo capítulo de diferentes propostas de atividades baseadas no uso deste paradoxo que poderão ser aplicadas em sala de aula, visando uma melhor interação e avanço no processo de ensino-aprendizagem.

4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Nesta primeira etapa de propostas de atividades para serem desenvolvidas em sala de aula, traremos alguns desafios que expõem nossos equívocos quando lidamos com eles. Espera-se com estas lições desafiar os alunos com alguns problemas difíceis que distorcem até mesmo o cérebro.

Embora a maioria das pessoas, mesmo quando pensa sobre tais problemas com afinco e cuidado, acaba induzindo ao erro, produzindo assim, elevado número de respostas incorretas, traremos para cada atividade uma solução orientada que poderá ser trabalhada após o debate de cada lição.

As habilidades abordadas que serão desenvolvidas durante as aplicações destas propostas de atividades são: EM13MAT311, EM13MAT511, EM13MAT106 e EM13MAT312, sendo de 2 aulas o tempo previsto para o desenvolvimento de cada proposta.

Proposta 1: (Variante de Monty Hall) Você é um competidor de um game show onde existem 10 portas fechadas, das quais nove não levam a nada e uma leva a um carro.

Na primeira fase deste jogo, você escolhe uma das portas.

Na segunda fase, o apresentador oferece duas opções:

Opção I: Você escolhe mais 4 portas além da que já selecionou, em seguida, abre todas as 5. Ganhando o carro se ele estiver atrás de qualquer uma das cinco portas que você abrir.

Opção II: O apresentador abrirá 8 portas que não contêm o carro. Isso deixa duas portas fechadas - sua escolha inicial e outra porta - e agora o carro está definitivamente atrás de uma delas. Você pode então optar por abrir a porta que escolheu originalmente no primeiro estágio ou abrir a única outra porta fechada restante.

Qual opção você deve escolher para maximizar suas chances de ganhar o carro?

a) Opção I.

b) Opção II.

c) As opções são indiferentes.

Orientações:

Se você escolher a opção I, então você tem 5 chances em 10 para obter o carro, resultando em uma probabilidade de sucesso de:

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Por outro lado, se você escolher a opção II e mudar para a porta que você não escolheu inicialmente, então você poderá fazer muito melhor do que uma probabilidade de sucesso de 50%, dado que:

Há apenas $\frac{1}{10}$ *de probabilidade de o carro estar atrás da primeira porta que foi escolhida. Quando o apresentador abre 8 portas vazias, excluindo assim cada uma das 8 portas, isto não torna sua porta inicial mais provável, já que o apresentador tem a garantia de abrir 8 portas vazias.*

Em outras palavras, ele não adicionou nenhuma informação nova. Assim, a única porta que você não escolheu e o apresentador não abriu possuí $\frac{9}{10}$ *de chance de ter o carro atrás dela.*

Portanto, escolha a opção II e então mude para abrir a porta que você não escolheu inicialmente, e você ganhará o carro neste game show com probabilidade de:

$$\frac{9}{10}$$

Proposta 2: Uma moeda é lançada duas vezes. Para cada jogada, uma bola de gude é colocada em um saco pelo seguinte critério:

- ❖ Se a face voltada para cima for cara, a bola colocada no saco será da cor vermelha.
- ❖ Se a face voltada para cima for coroa, a bola colocada no saco será da cor azul.

Você não tem permissão para observar os lançamentos da moeda ou as duas bolinhas de gude no saco.

Agora, você enfia a mão na bolsa e retira aleatoriamente uma das duas bolinhas, e ela fica vermelha.

Você a coloca de volta. Então, você enfia a mão na bolsa novamente. Qual a probabilidade de você retirar uma bola de gude azul?

a) $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{3}$ ***d)*** $\frac{1}{2}$

Orientações:

Inicialmente, quando as bolinhas são colocadas no saco, existem quatro possibilidades igualmente prováveis:

1. *A primeira bola de gude colocada é vermelha e a segunda também é vermelha.*
2. *A primeira bola de gude colocada é vermelha e a segunda é azul.*
3. *A primeira bola de gude colocada é azul e a segunda é vermelha.*
4. *A primeira bola de gude colocada é azul e a segunda também é azul.*

Porém, quando você retira uma bola de gude vermelha da bolsa, agora se sabe que a última possibilidade é impossível.

Então, quando a primeira bola de gude retirada é vermelha, você sabe que o que escolheu pode ser qualquer uma das quatro seguintes possibilidades, e todas são igualmente prováveis:

- *A primeira bolinha é vermelha, se ambas as bolinhas do saco forem vermelhas.*
- *A segunda bolinha é vermelha, se ambas as bolinhas do saco forem vermelhas.*
- *A bola de gude é vermelha, se apenas a primeira bola colocada no saco for vermelha, ou,*
- *A bola de gude é vermelha, se apenas a segunda bola colocada no saco for vermelha.*

Isto significa que a bolsa é uma bolsa toda vermelha em dois de 4 casos, é um saco azul/vermelho misto nos outros 2 casos. Então, existem $\frac{1}{2}$ *de chance de o saco ser misto, ou seja, contendo uma bolinha de cada cor.*

Assim, para que o próximo sorteio seja uma bolinha azul, é necessário duas coisas acontecerem:

- *A bolsa precisa ser uma bolsa de cores mistas, que possui* $\frac{1}{2}$ *de probabilidade.*
- *A bola de gude azul em vez da vermelha precisa ser retirada, o que é outro* $\frac{1}{2}$ *de probabilidade.*

Portanto, a probabilidade geral de se retirar uma bolinha azul na segunda tentativa é de:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Proposta 3: Um saco com duas bolinhas de gude é preparado jogando uma moeda duas vezes, seguindo as mesmas regras e restrições da proposta 2. Mas desta vez, antes de fazer qualquer coisa, você vê que alguém observa dentro do saco, remove uma bolinha vermelha e a coloca de lado. Agora, você enfia a mão na bolsa e retira a bola de gude restante.
Qual a probabilidade de a bola de gude que você retirar ser da cor azul?

Orientações:

Muitas pessoas erram essa probabilidade por tratá-la como no caso anterior, porém a chave para resolução está no fato de que outra pessoa decidindo remover uma bola de gude vermelha da bolsa não é o mesmo que escolher aleatoriamente uma bola de gude do saco e observar que ela era vermelha.

Na verdade, inicialmente possui o mesmo aspecto, quando as duas bolinhas de gude são colocadas no saco, há quatro possibilidades igualmente prováveis para o que aconteceu cada uma com probabilidade $\frac{1}{4}$*:*

1. *A primeira bola de gude colocada é vermelha e a segunda também é vermelha.*
2. *A primeira bola de gude colocada é vermelha e a segunda é azul.*
3. *A primeira bola de gude colocada é azul e a segunda é vermelha.*
4. *A primeira bola de gude colocada é azul e a segunda também é azul.*

No entanto, o último caso é descartado quando você vê uma bola de gude vermelha sendo retirada do saco, podendo ainda ser qualquer um dos outros 3 casos, e não havendo nenhuma informação favorecendo um sobre os outros. Assim, como todos os casos 1, 2 e 3 possuem igualmente $\frac{1}{3}$ *de chance de terem ocorrido e somente nos casos 2 e 3 a bolinha restante é azul, temos portanto que a probabilidade de retirada de uma bolinha azul é de* $\frac{2}{3}$.

Passaremos agora a abordar algumas estratégias de jogo, para isso, utilizaremos cinco dicas rápidas para resolver problemas de probabilidade.

Enfatizamos que, seja para jogadores profissionais ou novatos, os alunos irão se divertir com esses problemas, e os cenários ficam mais complicados à medida que estas atividades avançam.

Dica 1: não seja excessivamente tentado por recompensas grandes, mas **improváveis**.

Especialmente se você estiver jogando um jogo muitas vezes, a melhor estratégia geralmente envolve construir ganhos lentamente, em vez de fazer uma aposta arriscada para obter um grande retorno.

Proposta 4: Você está prestes a jogar um jogo com uma moeda que é ***ponderada*** de modo que haja um 90% de chance de que ele cai cara e um 10% de chance de que ele acerte coroa. Há no máximo um 0,0000001% de chance de que a moeda entre em combustão espontânea no ar.

Você ganhará dinheiro dependendo do resultado quando a moeda for lançada. Você deseja maximizar a quantia esperada de dinheiro que ganhará.

O que você prefere?

a) Vencer R$ 10,00 quando ele cai cara.

b) Vencer R$ 50,00 quando ele cai coroa.

c) Vencer R$ 100000,00 quando entra em combustão espontânea no ar.

d) Todos os itens são igualmente bons.

Orientações:

Inicialmente vamos comparar as três opções:

Opção a *– Há um* $\frac{9}{10}$ *de chance de sair cara. Logo* $\frac{9}{10}$ *do tempo, você esperaria ganhar R$ 10,00 e portanto, seu pagamento esperado por jogo é de R$ 9,00, pois:*

$$R\$10 \cdot \frac{9}{10} = R\$\ 9{,}00$$

Opção b *– Há um* $\frac{1}{10}$ *de chance de sair coroa. Logo* $\frac{1}{10}$ *do tempo, você esperaria ganhar R$ 50,00 e portanto, seu pagamento esperado por jogo é de R$ 5,00, pois:*

$$R\$50 \cdot \frac{1}{10} = R\$\ 5{,}00$$

Opção c *– Há um* $\frac{1}{100000000}$ *de chance de sair coroa. Logo* $\frac{1}{100000000}$ *do tempo, você esperaria ganhar R$ 100000,00 e portanto, seu pagamento esperado por jogo é de R$ 0,001, pois:*

$$R\$100000{,}00 \cdot \frac{1}{100000000} = R\$\ 0{,}001$$

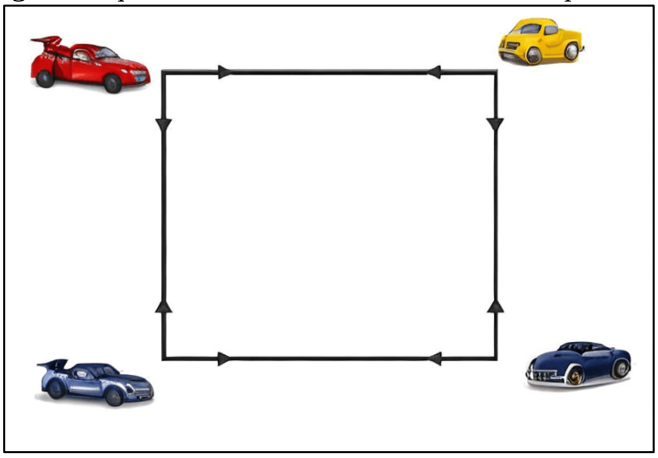
Portanto Opção a $>$ *Opção b* $>$ *Opção c.*

Dica 2: Procure uma perspectiva simplificadora quando houver muitas possibilidades.

Na proposta abaixo, os alunos poderão mapear todos os casos em alguns minutos, mas também há uma maneira rápida de resolvê-la usando a perspectiva correta.

Proposta 5: Quatro carrinhos estão nos cantos de um quadrado (Figura 7). Tudo ao mesmo tempo, cada um deles escolhe aleatoriamente e independentemente caminhar ao longo de uma borda do quadrado até um novo canto:

Figura 7: quatro carrinhos nos cantos de um quadrado



Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Qual é a probabilidade de haver pelo menos uma colisão antes que os carrinhos cheguem aos seus destinos?

a) $\frac{1}{8}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{3}{4}$ ***d)*** $\frac{7}{8}$

Orientações:

Inicialmente, é importante ressaltar que conhecer as técnicas de resolução de problemas de probabilidade pode simplificar o que parece ser um problema assustador em um simples.

Nesse caso, o atalho é calcular a probabilidade complementar, ou seja, calcular a probabilidade de que nenhum carro colida e, em seguida, subtrair isso de 1.

Primeiro, vamos descobrir quantas coisas diferentes podem acontecer.

Como cada carrinho tem duas opções (sentido horário ou anti-horário), existem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ *maneiras diferentes para eles começarem a se mover no total.*

Agora, tentaremos responder quantas dessas maneiras correspondem à condição de colisão.

A única maneira de os carrinhos evitarem completamente colidir uns com os outros é se todos estiverem se movendo no sentido horário ou anti-horário, então há apenas 2 maneiras que podem ocorrer.

Logo, a probabilidade de dois carrinhos não se encontrarem é:

$$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

Portanto, a probabilidade de dois ratos colidirem será de:

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Dica 3: Cuidado, sua intuição pode enganá-lo.

A falácia do jogador é a crença equivocada de que certos resultados se tornam mais prováveis quando ainda não aconteceram. Por exemplo, um jogador pode pensar que deve ganhar depois de perder vários jogos consecutivos.

Proposta 6: O aluno irá lançar 8 moedas justas no total, e três do seus quatro primeiros lançamentos já deram coroa. Qual é o número total mais provável de coroas quando o aluno terminar de lançar todas as 8 moedas?

a) 4. **b)** 5. **c)** 6. **d)** 7.

Orientações:

Se não soubéssemos o resultado dos primeiros quatro lançamentos de moedas, o valor esperado seria de:

$$8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

No entanto, como sabemos que três dos quatro primeiros lançamentos de moedas são coroas, calculamos o número esperado de coroas no próximo quatro lançamentos, que é metade de 4, ou seja, 2.

Em seguida, adicionamos estas 2 para as 3 coroa que certamente já apareceram, para obter uma resposta total de 5 coroas.

Estranhamente, muitas pessoas aceitam essa lógica quando ganham em um simulador de jogos, mas rejeitam a lógica quando estão realmente jogando e o simulador significa uma perda.

Conforme o problema, quatro lançamentos no jogo, com três coroas ocorridas, muitos jogadores começam a sentir que as caras devem eventualmente alcançá-las para que, ao todo, as chances da moeda sejam comprovadas 50: 50.

Portanto, eles acreditam que, como mais coroas foram lançadas até agora, mais caras devem ser lançadas na segunda metade do jogo. Essa sensação incômoda de que acabará se equilibrando é o que se designa a falácia do jogador.

Além disso, outros são vítimas de uma falácia diferente, ou seja, eles sentem que deveriam apostar exatamente a mesma coisa acontecendo novamente, e esperam mais três coroas e mais uma cara para um total de 6 coroas. Isso ainda está errado, se tratando de uma moeda justa.

Dica 4: Quando você estiver estudando um jogo complexo, simplifique-o dividindo-o em jogos menores e/ou cenários com os quais você já trabalhou antes.

Por exemplo, tirar uma carta preta de um baralho (e embaralhar a carta de volta no baralho quando terminar) é como jogar uma moeda se tudo o que importa é a cor da carta, e $\frac{1}{2}$ é uma fração muito mais fácil de acompanhar mentalmente do que $\frac{26}{52}$.

Proposta 7: Bruna e André estão jogando um jogo usando dados estranhos. Cada dado é um cubo com seis lados. O dado de Bruna tem os lados numerados 3, 3, 3, 3, 3, 6. O dado de André tem os lados numerados 2, 2 , 2, 5 , 5, 5 (Figura 8):

Figura 8: dois dados lançados.

Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Para jogar, Bruna e André jogam seus dados ao mesmo tempo, e quem tirar o valor mais alto vence.

Se eles jogarem muitas vezes, quem provavelmente ganhará com mais frequência, Bruna ou André?

a) Bruna.

b) André.

c) Ambos têm a mesma probabilidade de vencer.

Orientações:

Inicialmente sabemos que se eles jogarem muitos jogos, pode-se esperar que, em aproximadamente metade desses jogos, André tirará um 2, e na outra metade ele vai tirar um 5.

Se André tirar um dois, ele definitivamente perde, não importa o que Bruna tire, já que $2 < 3$ *e* $2 < 6$.

No entanto, André não tem uma vitória garantida na outra metade dos casos. Mesmo que André tire um 5, Bruna ainda pode ganhar tirando um 6.

Portanto, Bruna tem a vantagem aqui, pois esperamos que ela vença mais da metade de seus jogos contra André.

Uma solução mais precisa seria:

Bruna vence todos os jogos em que André tira um 2, que é $\frac{1}{2}$ *de todos os jogos. E também se espera que ela vença* $\frac{1}{6}$ *da outra metade das partidas em que André tira um 5.*

Portanto, no total, espera-se que Bruna vença:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{12}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

dos jogos.

Dica 5: Atenção que "muito provavelmente" não significa necessariamente "irá ganhar".

Quando o jogador estiver jogando um jogo como o pôquer, onde não pode saber tudo sobre as cartas em jogo, não se deve jogar como se o resultado mais provável fosse a única coisa que poderia acontecer. Lembremos de que, mesmo que algo seja mais provável, ainda pode ser muito improvável se houver muitas possibilidades.

Proposta 8: No Pokémon Go, os ovos têm aproximadamente um 50% chance de ser o tipo 5 km. O que é mais provável?

a) Achado 2 ovos e receber exatamente um tipo 5 km.

b) Achado 2000 ovos e receber exatamente mil tipos 5 km.

Orientações:

Achado 2000 ovos e obter exatamente 1000 tipos 5 km é muito menos provável do que encontrar 2 ovos e receber exatamente um tipo 5 km.

Intuitivamente, você pode explicar isso reconhecendo que ***exatamente metade*** *é realmente um resultado muito preciso. Intuitivamente, a chance de encontrar 999 tipos 5 km tipos ser quase provável como o de encontrar 1000? Talvez não exatamente tão provável, mas perto. E o mesmo não seria verdade para 998 tipos 5 km?*

Se houver muitos outros casos em que encontrar quase (ou exatamente) 1000 tipos 5 km de ovos de 2000, e se as probabilidades individuais de encontrar quase 1000 são aproximadamente iguais, então isso não implicaria as probabilidades individuais de encontrar quase 1000 serem bastante pequenos?

Na verdade, a probabilidade de encontrar exatamente 1000 tipos 5 km de 2000 ovos é aproximadamente 1,78%, considerando que a probabilidade de encontrar exatamente um tipo 5 km de dois ovos é 50%.

Realizaremos agora os cálculos completos.

Como esperamos 50% de ovos para ser do tipo 5 km $\frac{2}{4}$ *é o resultado mais provável e tem uma boa chance de acontecer. Este cenário é como jogar uma moeda se H significa encontrar um tipo 5 km e T significa encontrar um tipo diferente de ovo.*

Com dois lançamentos de moedas, há 4 Resultados igualmente prováveis que podem resultar: HH, HT, TH e TT. Logo, dados dois ovos, há um 50% de chance de encontrar exatamente um tipo 5 km ovo.

Um caso adicional para construir a intuição:

Ao encontrar 4 ovos, qual é a probabilidade de encontrar exatamente dois tipo 5 km?

Como antes, vamos comparar isso com jogar uma moeda 4 vezes. Com quatro lançamentos de moedas, há 16 resultados igualmente prováveis. Você pode pensar nisso como um 4×4 gráfico de possibilidades, cada uma das quais é igualmente provável:

Destas, 16 possibilidades igualmente prováveis, apenas 6 tem dois H e dois T.

Portanto, dados quatro ovos, a probabilidade de encontrar exatamente dois tipos 5 km é:

$$\frac{6}{16} = 37{,}5\%$$

Assim, à medida que o número de ovos/cara ou coroa aumenta a probabilidade de um 50: 50 aparenta diminuir.

Metade dos ovos sendo tipo 5 km, os tipos de 5 km ainda são o resultado mais provável, mas não é tão provável quanto quando havia apenas dois ovos sendo encontrados.

Com 2000 ovos que podemos modelar como 2000 cara ou coroa, encontrar exatamente 1000 tipos 5 km é realmente muito improvável, muito menos provável do que 50%.

Assim como há $2^2 = 4$ *resultados que poderiam resultar de 2 ovos, há* $2^{2000} = 1{,}15 \cdot 10^{602}$ *resultados igualmente prováveis que poderiam resultar da descoberta de 2000 ovos.*

Em apenas:

$$\binom{2000}{1000} = 2{,}05 \cdot 10^{600}$$

desses resultados, exatamente 1000 5 km ovos aparecem.

Portanto, dados 2000 ovos, a chance de se encontrar exatamente 1000 5 km ovos é de:

$$\frac{2{,}05 \cdot 10^{600}}{1{,}15 \cdot 10^{602}} \approx 1{,}78\%$$

O resultado esperado é 1000 e é o resultado mais provável, mas isso não o torna provável.

Terminada esta etapa do desenvolvimento de dicas e estratégias para jogos baseados nos dados probabilísticos, passaremos agora a propostas que nos evidenciam a presença da probabilidade em toda parte.

Todas as técnicas e ferramentas matemáticas que apresentaremos podem ser aplicadas a muitas situações fora dos quebra-cabeças.

Problemas de probabilidade aparecem em todos os lugares e todos os dias. As próximas cinco propostas deste nosso estudo são casos práticos que enganam até mesmo solucionadores de problemas experientes.

Proposta 9: Um dia, o semáforo em um determinado cruzamento fica vermelho quando você chega a ele e **nenhum outro carro** está esperando no semáforo. Você espera 45 segundos para ficar verde.

No dia seguinte, você chega ao mesmo semáforo e ele fica vermelho novamente, e **um carro** já está esperando o semáforo mudar.

Qual o cenário mais provável de ocorrer neste segundo dia?

a) Você espera mais de 45 segundos.

b) Você espera exatamente 45 segundos.

c) Você espera menos do que 45 segundos.

Orientações:

Inicialmente, com base apenas nas informações que temos, se um carro chegar ao semáforo sem outros carros, o cenário mais provável é esperar 45 segundos.

No segundo dia, esse cenário se aplica ao carro que já chegou. Ou seja, o carro à sua frente deve esperar, em um sentido de probabilidade, ter um tempo de espera mais provável de 45 segundos. Observemos que estamos pensando em termos de probabilidade, isso não está descartando o fato de que a luz pode ser um, dois minutos, e você teve sorte no primeiro dia, mas com base em nosso único ponto de dados, uma repetição do dia anterior é o mais provável.

Então, já há um carro esperando na sua frente que, em termos de probabilidade é mais provável que espere 45 segundos, e algum tempo se passou antes de você chegar.

Portanto, a quantidade de tempo mais provável para sua espera é menor que 45 segundos.

Proposta 10: Suponha que você tenha uma bolsa com 5 caramelos de chocolate e 5 cordiais de cereja. Sua amiga pega um doce aleatoriamente e come. Depois, sem olhar para o que sobrou, você pega e come um dos 9 doces restantes.

Qual a probabilidade de você ter acabado de ter comido um cordial de cereja?

Orientações:

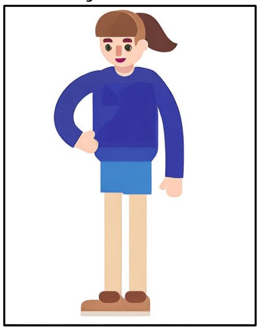
Mesmo que sua amiga tenha acabado de comer um doce sobrando 9 na sacola, você não tem informações sobre o que é esse doce, então você ainda está analisando a partir de um espaço de possibilidade de 5 caramelos de chocolate e 5 cordiais de cereja. Portanto, a probabilidade de comer um cordial de cereja é $\frac{5}{10}$.

Para ilustrar um pouco mais o "espaço de possibilidade", consideremos um problema diferente envolvendo um baralho embaralhado padrão de jogo com 52 cartas. A probabilidade de o fundo ter um ás de espadas é $\frac{1}{52}$. *Agora suponhamos que você tire do topo 50 cartas sem olhar. A chance de o fundo ser um ás de espadas não mudou para* $\frac{1}{2}$, *pois não temos informações sobre as cartas removidas.*

Se, em vez disso, olhássemos para o topo de 50 cartas e não encontrássemos um ás de espadas, então a parte inferior das cartas restantes seria um ás de espadas com probabilidade $\frac{1}{2}$.

Proposta 11: O medalhista olímpico mais velho do mundo foi o sueco Oscar Swahn, com 72 anos de idade. Na imagem abaixo está Ana (Figura 9):

Figura 9: representação de uma atleta olímpica.



Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Qual das informações abaixo é mais provável sobre ela?

a) Ana ganhou uma medalha olímpica.

b) Ana está com 30 anos de idade e ganhou uma medalha olímpica.

Orientações:

Consideremos o conjunto de pessoas que ganharam medalhas olímpicas. O mesmo inclui pessoas que estão com 30 e alguns que não estão.

Em outras palavras, todas as pessoas que ganharam medalhas olímpicas e estão com 30 anos de idade estão incluídos no conjunto de todas as pessoas que ganharam medalhas olímpicas.

Portanto, o primeiro cenário em que Ana ganhou uma medalha olímpica é mais provável.

Temos aqui um viés cognitivo bem conhecido relevante para a vida diária, pois adicionar detalhes pode fazer as pessoas pensarem que um subconjunto de algum evento é mais provável do que o próprio evento.

Proposta 12: A doença Z infecta 1 de cada 1000 pessoas. Há um teste para a doença Z que é garantido como positivo para alguém com a doença. Para quem não tem a doença, o teste retorna um falso positivo 1% das vezes.

Você testou positivo para a doença Z. Qual é a probabilidade de você ter a doença?

- **a)** Menos de 1%.
- **b)** Entre 1% e 5%.
- **c)** Entre 5% e 10%.
- **d)** Entre 10% e 100%.

Orientações:

Sabe-se que 1 dentre as 1000 pessoas têm a doença e testa positivo. Assim, 1% das restantes 999 pessoas testarão positivo, mas não terão a doença, (aproximadamente 10, realmente 9,99).

Isso significa que, para aproximadamente todas as 11 pessoas com teste positivo, apenas 1 terá a doença.

Portanto, a probabilidade de alguém com teste positivo realmente ter a doença é:

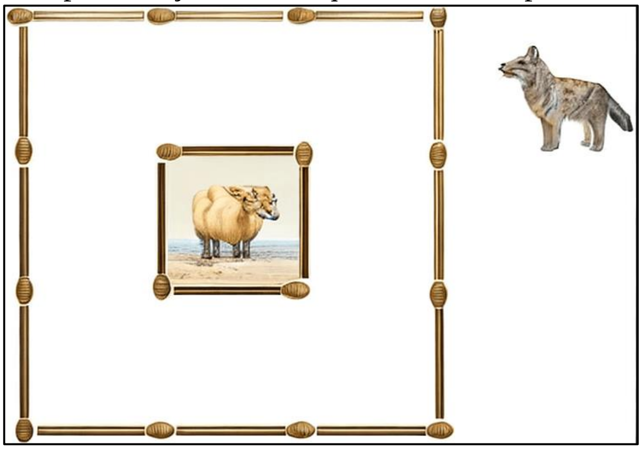
$$\frac{1}{11} \approx 9{,}09\ \%$$

Que está entre 5% e 10%.

Proposta 13: Na imagem a seguir (Figura 10) os fósforos representam cercas protegendo uma ovelha de um lobo, e suponha que dois fósforos sejam removidos aleatoriamente.

Se ambos os fósforos forem removidos do anel interno ou externo, a ovelha permanece segura. No entanto, o lobo pode chegar até a ovelha se uma remoção for da cerca externa e a outra for da cerca interna.

Figura 10: representação de dois quadrados com palito de fósforo.

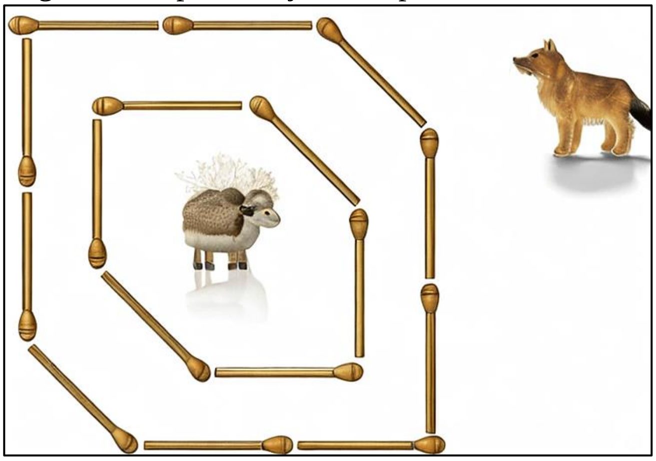


Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Aqui está uma nova configuração de fósforos antes de dois serem removidos aleatoriamente (Figura 11).

Figura 11: representação com palitos de fósforos.



Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

A nova configuração é mais segura que a original?

a) As ovelhas estariam menos seguras.

b) As ovelhas estariam igualmente seguras.

c) As ovelhas estariam mais seguras.

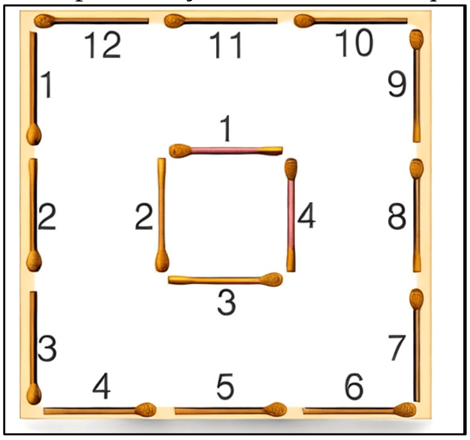
Orientações:

Inicialmente, para que o lobo alcance as ovelhas, um fósforo externo e um interno devem ser removidos.

A probabilidade de isso acontecer aleatoriamente é igual $\frac{UM}{B}$*, onde B é o número de maneiras igualmente prováveis de dois fósforos/cercas serem removidos e UM é o número de maneiras pelas quais um fósforo interno e um externo seria removido.*

Primeiro, vamos calcular UM com 4 fósforos internos e 12 palitos de fósforo externos. Lembre-se de que UM é o número total de maneiras de remover um fósforo interno e um externo.

Figura 12: representação contando dois quadrados.



Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Se removermos um fósforo interno e um externo, então há 4 escolhas para o interior e 12 escolhas para o exterior. Portanto, existem $UM = 4 \times 12 = 48$ *maneiras totais de remover tal par.*

A seguir, calcularemos B, o número de maneiras igualmente prováveis pelas quais dois fósforos/cercas podem ser removidos.

Há 16 maneiras de escolher o primeiro fósforo e depois há 15 sobrando para escolher o segundo fósforo. Portanto, no total, há $16 \cdot 15 = 240$ *maneiras de remover dois palitos de fósforo.*

No entanto, há duplicatas em nossa contagem — por exemplo, se pegarmos o bastão #1 seguido por vara #2, isso seria idêntico a pegar um pedaço de pau #2 seguido por vara #1.

Então a contagem final real é: $B = \frac{240}{2} = 120$ *maneiras.*

Isso significa que, com 4 fósforos internos e 12 fósforos externos, a probabilidade de a ovelha ser exposta ao lobo é de:

$$\frac{UM}{B} = \frac{48}{120} = 40\%$$

Agora, vamos calcular UM e B quando há 10 palitos de fósforo exteriores e 6 palitos de fósforo internos.

Se quisermos remover um palito de fósforo interno e um palito de fósforo externo, então existem 6 *escolhas para o interior e* 10 *escolhas para o exterior. Portanto, existem* $UM = 6 \cdot 10 = 60$ *maneiras totais para remover tal par.*

$B = 120$ *é o mesmo que no caso anterior se houver* 6 *palitos de fósforo internos e 10 palitos de fósforo externos.*

Isso significa que, com 6 palitos de fósforo internos e 10 palitos de fósforo externos, a probabilidade de a ovelha ser exposta ao lobo é:

$$\frac{UM}{B} = \frac{60}{120} = 50\%$$

Portanto, mover os palitos de fósforo torna as ovelhas menos seguras.

4.1 Sequência didática para o jogo de Monty Hall

Nesta atividade apresentaremos uma proposta de sequência didática para o desenvolvimento e compreensão de um famoso problema de jogo inspirado no game show "Let's Make a Deal", que era popular nos anos 1960 e 1970.

Temos por objetivo despertar um raciocínio diferenciado em alunos do 3º ano do ensino médio, visando uma aprendizagem mais dinâmica e construtiva dos conceitos relacionados à teoria de probabilidades, podendo proporcionar assim aos estudantes caminhos que os levam a uma interpretação adequada dos problemas que por vezes são muito propícios a equívocos.

As habilidades abordadas que serão desenvolvidas durante a aplicação desta sequência didática são: EM13MAT311, EM13MAT511, EM13MAT106 e EM13MAT312, sendo de 2 aulas o tempo previsto para o desenvolvimento de cada proposta.

Para o desenvolvimento desta sequência, analisaremos o jogo em 5 etapas de resolução de problemas:

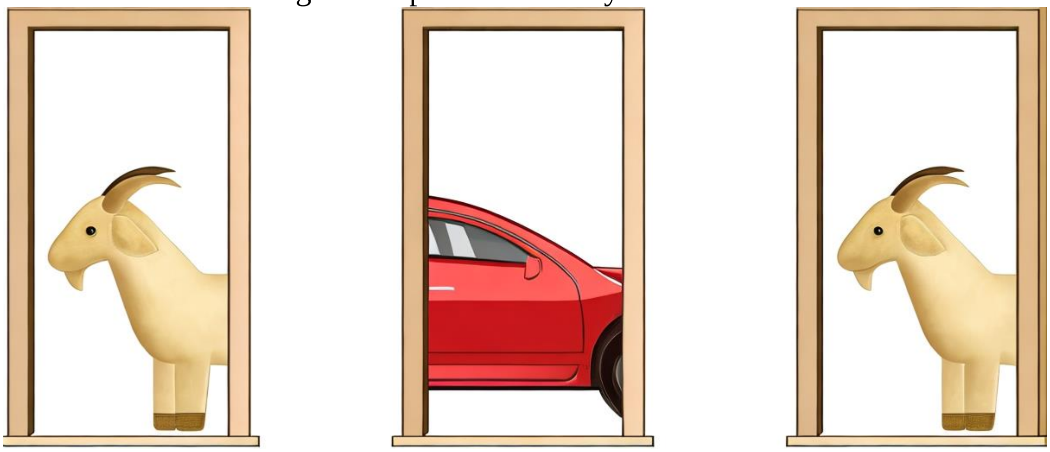
1. Interpretar.
2. Explorar.

3. Teorizar.
4. Compreender.
5. Responder.

Nosso objetivo final é encontrar uma estratégia ideal (se houver) para jogar o seguinte jogo.

Você é um competidor em um game show. A seguir estão as regras do jogo:

Figura 13: portas de Monty hall abertas.



Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

1. Existem 3 portas.

2. Monty Hall, o apresentador do game show, garantiu que houvesse um carro atrás de uma das 3 portas e uma cabra devoradora de homens atrás de cada uma das outras duas portas.

3. No início do jogo, você pode escolher qualquer uma das 3 portas.

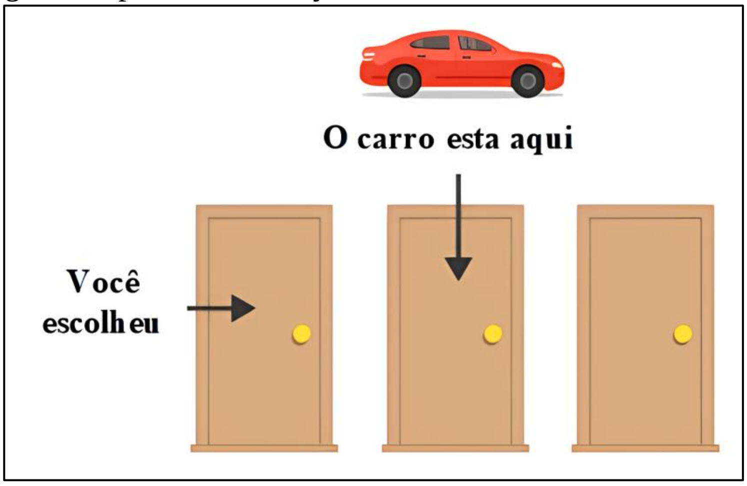
4. Após escolher uma das 3 portas, Monty Hall abre uma das duas portas que você não escolheu, e a porta que ele abre deve conter uma cabra.

5. Finalmente, Monty Hall pergunta se você deseja trocar de porta. Em outras palavras, você pode optar por ficar com a porta que escolheu inicialmente ou mudar para a outra porta que ainda não foi aberta.

6. Você ganha se escolher a porta com o carro. Se você acabar com uma cabra, ela come você.

Desafio 1. Suponha que Monty Hall coloque o carro atrás da porta 2, e você selecione a porta 1.

Figura 14: portas de Monty Hall mostrando onde está o carro.



Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Dado que Monty Hall não deve abrir a sua porta escolhida, quantas opções ele tem ao escolher qual porta abrir para mostrar uma cabra?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

Para nossa análise, faremos estas suposições:

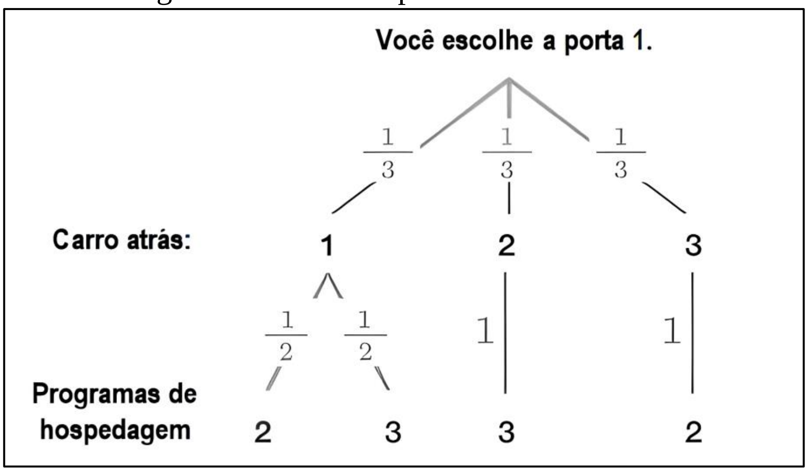
Monty Hall tem a mesma probabilidade de colocar o carro atrás de qualquer uma das três portas.

Se Monty Hall tem duas portas para escolher, ao decidir qual porta abrir para mostrar uma cabra, é igualmente provável que ele escolha qualquer uma das portas.

Desafio 2. Dadas essas suposições, se você escolher inicialmente a Porta 1, qual dessas opções é o diagrama de árvore de probabilidade correto para este jogo?

a)

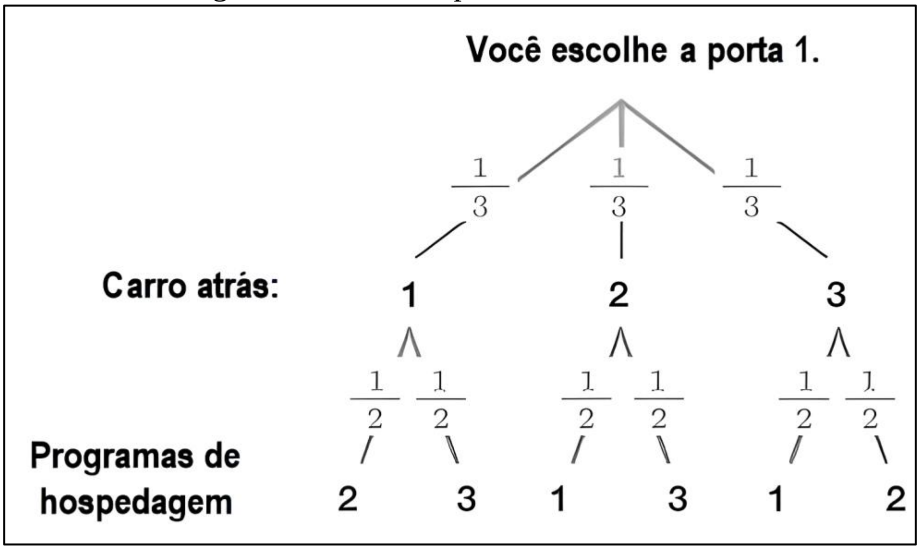
Figura 15: árvore de possibilidades caso 1.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

b)

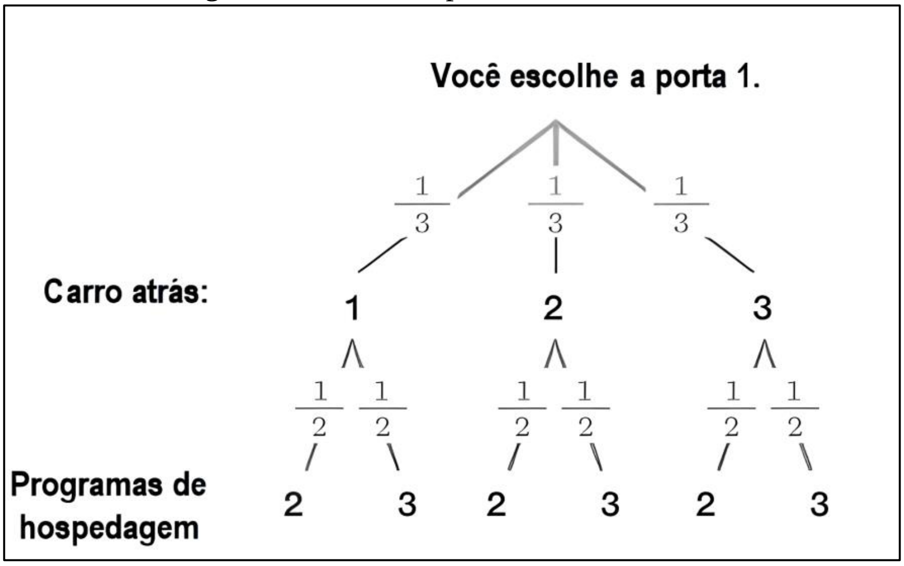
Figura 16: árvore de possibilidades caso 2.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

c)

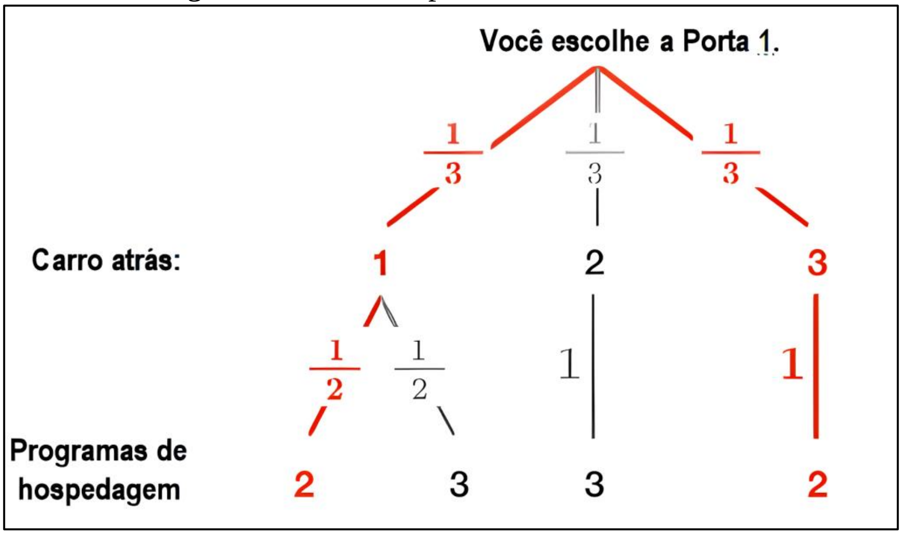
Figura 17: árvore de possibilidades caso 3.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Desafio 3. Agora suponha que depois de escolher a Porta 1, o anfitrião mostra que há uma cabra atrás da porta 2. Existem 2 caminhos no diagrama de árvore (Figura 18) que levam ao anfitrião mostrando uma cabra atrás da porta 2:

Figura 18: árvore de possibilidades desafio 3.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Cada um desses caminhos é igualmente provável?

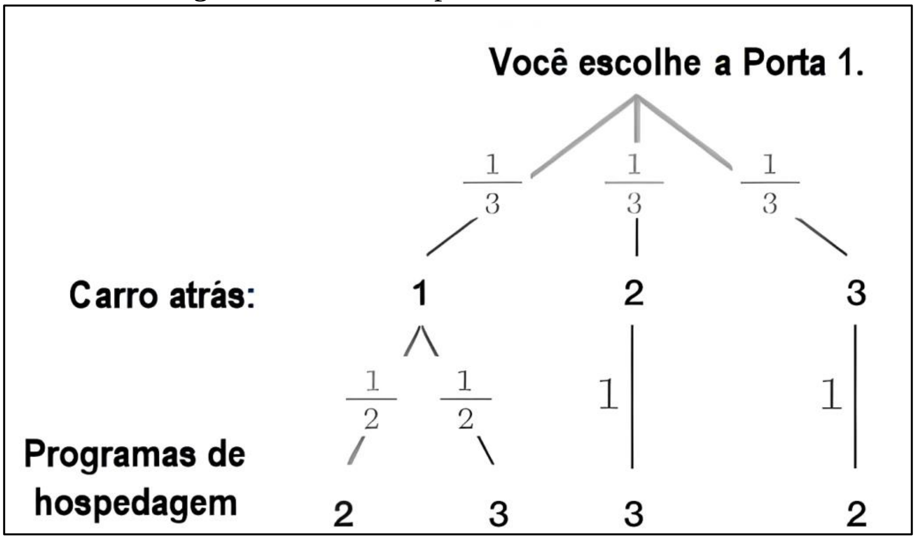
a) Sim

b) Não, o caminho onde o carro está atrás da porta 1 é mais provável.

c) Não, o caminho onde o carro está atrás da porta 3 é mais provável.

Desafio 4. Suponha que você escolha inicialmente a porta 1 de modo que o diagrama da árvore de probabilidade para o jogo seja o seguinte (Figura 19):

Figura 19: árvore de possibilidades desafio 4.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Então, Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2. Qual dessas probabilidades condicionais é maior?

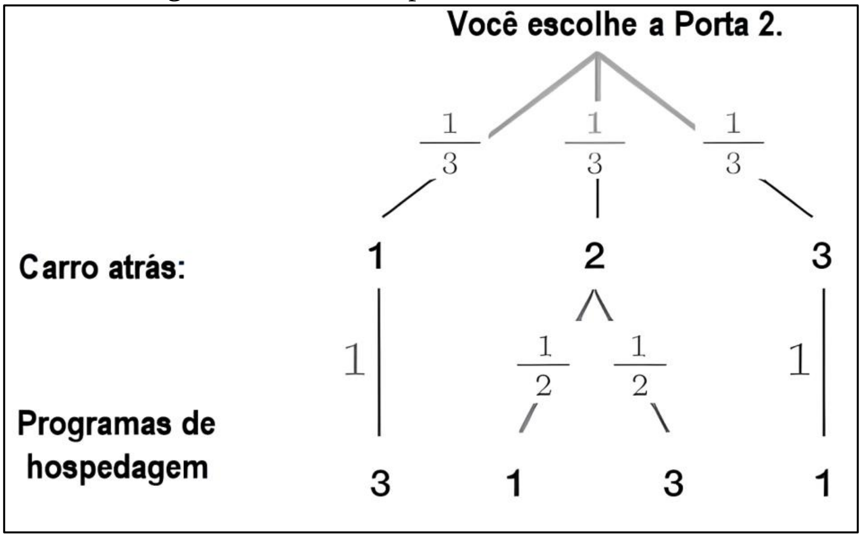
a) A probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da porta 1 dado que Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2.

b) A probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da porta 3 dado que Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2.

c) Essas duas probabilidades condicionais são iguais.

Desafio 5. Agora, suponha que você inicialmente escolha a Porta 2 para que o diagrama da árvore de probabilidade do jogo fique assim (Figura 20):

Figura 20: árvore de possibilidades desafio 5.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Então, Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 3. Qual dessas probabilidades condicionais é maior?

a) A probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da porta 1 dado que Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 3.

b) A probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da porta 2 dado que Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 3.

c) Essas duas probabilidades condicionais são iguais.

Desafio 6. Finalmente, agora se lembre destas suposições sobre o jogo:

❖ É igualmente provável que o anfitrião coloque o carro atrás de qualquer uma das 3 portas.

❖ Se o apresentador tiver duas portas para escolher ao decidir qual porta abrir para mostrar uma cabra, é igualmente provável que o anfitrião escolha qualquer uma das portas.

Quando Monty Hall pergunta se você quer mudar de porta, suas chances de ganhar são maiores se você ficar ou se mudar?

a) Se você ficar.

b) Se você mudar.

c) Suas chances de ganhar são as mesmas, não importa se você fica ou troca.

Orientações/ Resoluções:

Na sequência deixamos como orientação as resoluções de cada desafio construído na sequência didática.

Desafio 1:

Existem 3 portas. Você selecionou a porta 1, e o carro está atrás da porta 2. Logo Monty Hall não deve abrir sua porta escolhida e ele não deve abrir a porta com o carro atrás dela, portanto a única porta que ele pode abrir é a porta 3, tendo assim somente uma opção (b).

Desafio 2:

1º Passo:

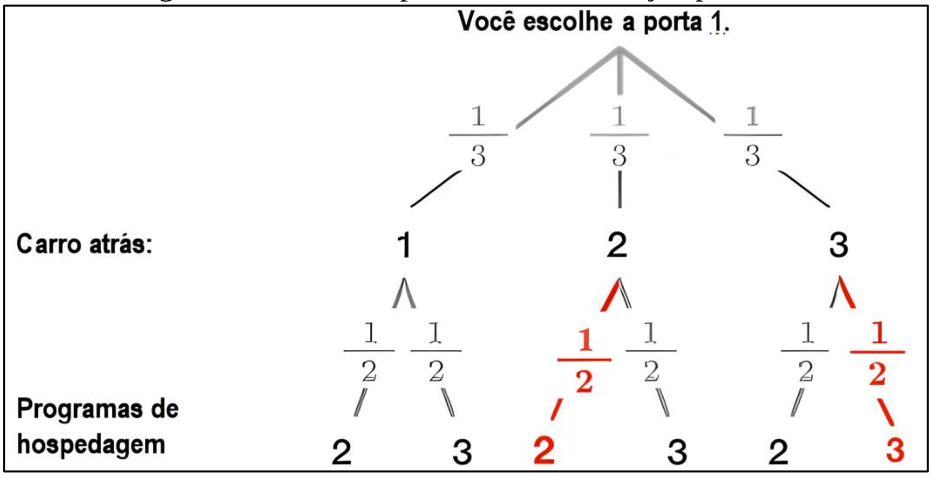
A árvore de probabilidade B corresponde a um cenário em que Monty Hall não abrirá a porta com o carro, mas pode abrir a porta que você escolheu. Porém isso viola a primeira metade da regra 4 do jogo apresentada inicialmente:

"...Monty Hall abre uma das duas portas que você não escolheu..."

Por exemplo, se o carro estiver atrás da porta 2, a árvore de probabilidade fornece $\frac{1}{2}$ *de chance de Monty Hall abrir a porta 1, que é a porta que você escolheu.*

Exatamente o mesmo argumento se aplica ao caso em que o carro está atrás da porta 3. Ambos os cenários de quebra de regras são destacados com linhas vermelhas na árvore de probabilidades abaixo (Figura 21):

Figura 21: árvore de possibilidades solução passo 1.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

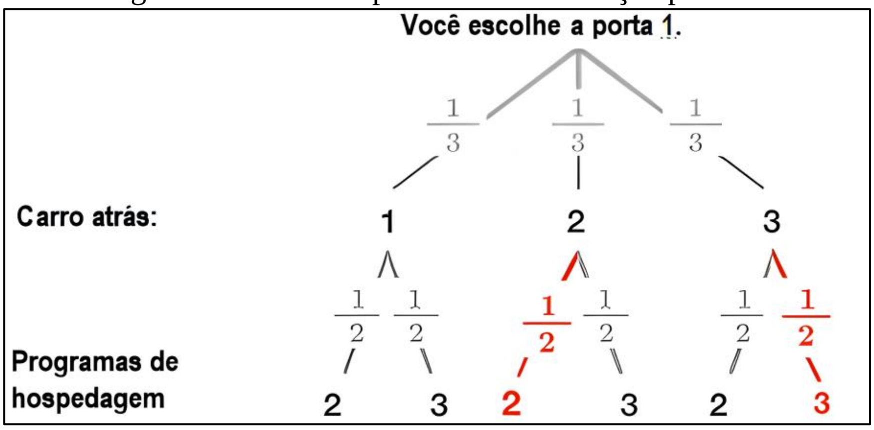
2º Passo:

A árvore de probabilidade C corresponde a um cenário em que Monty Hall não abrirá a porta que você escolheu, mas ele pode abrir a porta com o carro. Mas isso viola a segunda metade da regra 4:

"...a porta que ele abre deve ser uma com uma cabra."

Por exemplo, se o carro estiver atrás da porta 2, a árvore de probabilidade fornece $\frac{1}{2}$ *de chance de Monty Hall abrir a porta 2. Exatamente o mesmo argumento se aplica ao caso em que o carro está atrás da porta 3. Ambos os cenários de quebra de regras são destacados com linhas vermelhas na arvore de probabilidades a seguir (Figura 22):*

Figura 22: árvore de possibilidades solução passo 2.



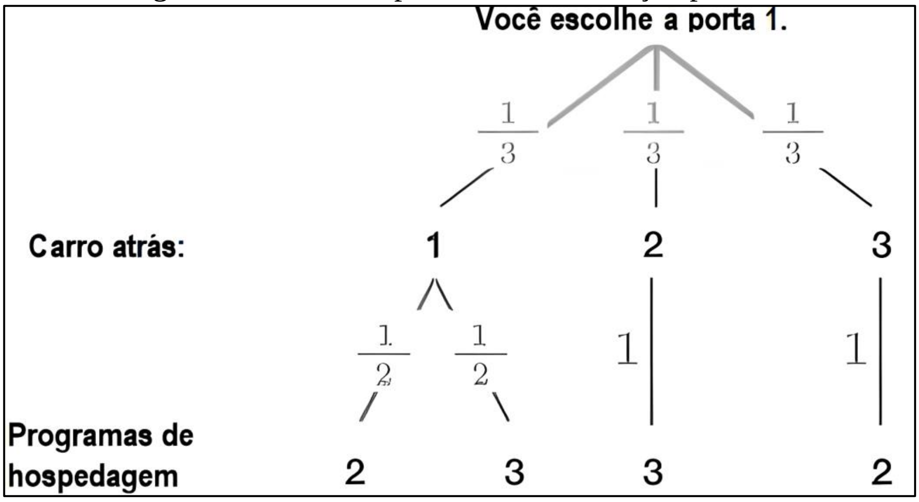
Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

3º Passo:

Como Monty Hall não deve abrir nem a porta de sua escolha nem a porta com o carro, as árvores de probabilidades B e C estão erradas. A única opção restante é A.

Esta árvore de probabilidade mostra que, se o carro estiver atrás da porta 2, Monty Hall sempre abre a porta 3 — que é demonstrada pela probabilidade "1" escrito ao lado da *linha vertical descendo de 2 para 3 na árvore abaixo (Figura 23). Claro, exatamente o mesmo argumento se aplica ao caso em que o carro está atrás da porta 3.*

Figura 23: árvore de possibilidades solução passo 3.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Desafio 3:

Seguindo a árvore de probabilidade, a probabilidade do caminho em que o carro está atrás da porta 1 e Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2 pode ser calculado como:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Da mesma forma, a probabilidade do caminho onde o carro está atrás da porta 3 e Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2 pode ser calculado como:

$$\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

Assim, o caminho onde o carro está atrás da porta 3 é mais provável. Isso ocorre porque se você escolher a porta 1, Monty Hall certamente mostrará uma cabra atrás da porta 2 se o carro estiver atrás da porta 3, enquanto há apenas $\frac{1}{2}$ *de chance de ele te mostrar uma cabra atrás da porta 2 se o carro estiver atrás da porta 1.*

Desafio 4:

A probabilidade do caminho onde o carro está atrás da porta 1 e Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2 pode ser calculado como:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Já a probabilidade do caminho onde o carro está atrás da porta 3 e Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2 pode ser calculado como:

$$\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

A probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da porta 1 dado que Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2 pode ser determinada da seguinte forma:

$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

Enquanto a probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da porta 3 dado que Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2 é:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

Portanto, a probabilidade de que o carro esteja atrás da porta 3 dado que Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2 é maior.

Desafio 5:

Este caso é equivalente ao caso do problema anterior.

Em ambos os casos, você escolheu uma porta, Monty Hall mostrou uma cabra atrás de uma porta que não é sua e você é solicitado a comparar a probabilidade condicional de que o carro esteja atrás de sua porta com a probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da outra porta fechada.

Os números reais nas portas não importam. Em ambos os casos, a probabilidade condicional de que o carro esteja atrás de sua porta é:

$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

Já a probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da outra porta fechada é:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

Portanto, a probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da outra porta fechada é maior. Nesse caso, sua porta é a porta 2, e a outra porta fechada é a porta 1. Logo, a Opção A é maior que a Opção B.

Desafio 6:

É melhor trocar de porta.

Como os problemas anteriores sugerem a probabilidade de o carro estar atrás de sua porta escolhida é sempre:

$$\frac{1}{3}$$

Enquanto a probabilidade de o carro estar atrás da outra porta fechada é sempre:

$$\frac{2}{3}$$

Portanto, a melhor opção é sempre realizar a mudança de porta.

5 CONCLUSÕES

O problema de Monty Hall se apresenta como uma ótima oportunidade para introduzir os estudantes ao pensamento probabilístico e à remodelação de hipóteses à luz de novas informações. A resolução desse problema, utilizando o Teorema de Bayes, permite que os alunos vivenciem na prática como a probabilidade de um evento pode ser atualizada à medida que novas evidências são introduzidas.

A proposta de sequência didática que centraliza a aprendizagem na resolução do jogo se mostra eficiente por vários motivos. Ao se envolverem ativamente na simulação do problema, os alunos são mais tendentes a internalizar os conceitos e a questionar suas intuições iniciais. A experiência prática, seguida da formalização matemática através do Teorema de Bayes, cria um ciclo de aprendizagem completo e significativo.

Considerando os resultados que poderão ser obtidos na aplicação deste estudo em sala de aula, podemos destacar os seguintes pontos:

Um aumento da compreensão do Teorema de Bayes, pois os alunos certamente demonstrariam uma compreensão mais profunda do Teorema após a aplicação da sequência didática, conseguindo aplicar o teorema em outras situações problemáticas.

Desenvolvimento maior do pensamento crítico, pois a resolução do problema de Monty Hall estimulará os alunos a questionarem suas intuições iniciais e a analisarem criticamente as informações disponíveis.

Melhora na resolução de problemas, pois a experiência prática na resolução do jogo contribuirá para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, como a competência de identificar as informações relevantes e a de formular estratégias de solução.

Realizando este estudo, podemos ainda destacar, com base nos possíveis resultados esperados, novas sugestões para futuras pesquisas, tais como:

A ampliação da amostra, pois a aplicação da sequência didática em uma amostra maior, permitiria generalizar os resultados e identificar possíveis diferenças entre grupos de alunos com diferentes características.

Investigar o impacto da utilização de diferentes recursos didáticos, pois a utilização de softwares de simulação, jogos online ou materiais manipuláveis poderão potencializar os resultados da aprendizagem.

Analisar a interferência do tempo dedicado à atividade, pois a variação do tempo destinado à resolução do problema e à discussão dos resultados poderão gerar diferentes níveis de aprendizagem.

Assim, podemos concluir que a aplicação do Teorema de Bayes na resolução do problema de Monty Hall, através da proposta de sequência didática aqui apresentada, se tornará uma estratégia eficaz para o ensino de probabilidade e estatística. A experiência prática, aliada à formalização matemática, poderá proporcionar aos alunos uma aprendizagem mais significativa e duradoura.

REFERÊNCIAS

[1] MAIA, Renato dos Santos. **O Teorema de Bayes: aplicações atuais.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra. Departamento de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Natal, 2021.

[2] ROZA, Rafael. **Uma proposta metodológica de ensino do Problema de Monty Hall e Teorema de Bayes para professores da educação básica.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Blumenau, 2023.

[3] GONÇALVES, Aldine Bombonati. **Fundamentos de Teoria de Permutações e Aplicações ao Jogo Puzzle 15.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Rondonópolis, Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Rondonópolis, 2023.

[4] **MAXI:** Ensino médio, 3ª série: 2º semestre: Matemática: Caderno do professor / obra coletiva. 1ª ed. São Paulo, 2023.

[5] HELLMANN, Mirian de Lima. **Geogebrabook para o ensino de Corpos Redondos e Esfera.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Mato Grosso, Campus Barra do Bugres, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Barra do Bugres, 2021.

[6] **PROBABILIDADE DESCONCERTANTE**. Brilliant, 2024. Disponível em: https://brilliant.org/courses/perplexing-probability/. Acesso em 13 de Agosto de 2024.

[7] **PARADOXO DE MONTY HALL.** Medium, 2022. Disponível em: https://medium.com/@narcisobusatto/paradoxo-de-monty-hall-b4a96ab682bf. Acesso em 13 de Agosto de 2024.

[8] **CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP.** Probabilidades – O problema de Monty Hall. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/probabilidades-o-problema-de-monty-hal/. Acesso em 13 de Agosto de 2024.

[9] **UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO TEOREMA DE BAYES NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.** Danilo Augusto Ferreira de Jesus, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7478_3221_ID.pdf. Acesso em 13 de Agosto de 2024.