4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Nesta primeira etapa de propostas de atividades para serem desenvolvidas em sala de aula, traremos alguns desafios que expõem nossos equívocos quando lidamos com eles. Espera-se com estas lições desafiar os alunos com alguns problemas difíceis que distorcem até mesmo o cérebro.

Embora a maioria das pessoas, mesmo quando pensa sobre tais problemas com afinco e cuidado, acaba induzindo ao erro, produzindo assim, elevado número de respostas incorretas, traremos para cada atividade uma solução orientada que poderá ser trabalhada após o debate de cada lição.

As habilidades abordadas que serão desenvolvidas durante as aplicações destas propostas de atividades são: EM13MAT311, EM13MAT511, EM13MAT106 e EM13MAT312, sendo de 2 aulas o tempo previsto para o desenvolvimento de cada proposta.

Proposta 1: (Variante de Monty Hall) Você é um competidor de um game show onde existem 10 portas fechadas, das quais nove não levam a nada e uma leva a um carro.
Na primeira fase deste jogo, você escolhe uma das portas.
Na segunda fase, o apresentador oferece duas opções:

Opção I: Você escolhe mais 4 portas além da que já selecionou, em seguida, abre todas as 5. Ganhando o carro se ele estiver atrás de qualquer uma das cinco portas que você abrir.

Opção II: O apresentador abrirá 8 portas que não contêm o carro. Isso deixa duas portas fechadas - sua escolha inicial e outra porta - e agora o carro está definitivamente atrás de uma delas. Você pode então optar por abrir a porta que escolheu originalmente no primeiro estágio ou abrir a única outra porta fechada restante.

Qual opção você deve escolher para maximizar suas chances de ganhar o carro?

a) Opção I.
b) Opção II.
c) As opções são indiferentes.

Orientações:

Se você escolher a opção I, então você tem 5 chances em 10 para obter o carro, resultando em uma probabilidade de sucesso de:

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Por outro lado, se você escolher a opção II e mudar para a porta que você não escolheu inicialmente, então você poderá fazer muito melhor do que uma probabilidade de sucesso de 50%, dado que:

Há apenas $\frac{1}{10}$ *de probabilidade de o carro estar atrás da primeira porta que foi escolhida. Quando o apresentador abre 8 portas vazias, excluindo assim cada uma das 8 portas, isto não torna sua porta inicial mais provável, já que o apresentador tem a garantia de abrir 8 portas vazias.*

Em outras palavras, ele não adicionou nenhuma informação nova. Assim, a única porta que você não escolheu e o apresentador não abriu possuí $\frac{9}{10}$ *de chance de ter o carro atrás dela.*

Portanto, escolha a opção II e então mude para abrir a porta que você não escolheu inicialmente, e você ganhará o carro neste game show com probabilidade de:

$$\frac{9}{10}$$

Proposta 2: Uma moeda é lançada duas vezes. Para cada jogada, uma bola de gude é colocada em um saco pelo seguinte critério:

- ❖ Se a face voltada para cima for cara, a bola colocada no saco será da cor vermelha.
- ❖ Se a face voltada para cima for coroa, a bola colocada no saco será da cor azul.

Você não tem permissão para observar os lançamentos da moeda ou as duas bolinhas de gude no saco.

Agora, você enfia a mão na bolsa e retira aleatoriamente uma das duas bolinhas, e ela fica vermelha.

Você a coloca de volta. Então, você enfia a mão na bolsa novamente. Qual a probabilidade de você retirar uma bola de gude azul?

a) $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{3}$ ***d)*** $\frac{1}{2}$

Orientações:

Inicialmente, quando as bolinhas são colocadas no saco, existem quatro possibilidades igualmente prováveis:

1. *A primeira bola de gude colocada é vermelha e a segunda também é vermelha.*
2. *A primeira bola de gude colocada é vermelha e a segunda é azul.*
3. *A primeira bola de gude colocada é azul e a segunda é vermelha.*
4. *A primeira bola de gude colocada é azul e a segunda também é azul.*

Porém, quando você retira uma bola de gude vermelha da bolsa, agora se sabe que a última possibilidade é impossível.

Então, quando a primeira bola de gude retirada é vermelha, você sabe que o que escolheu pode ser qualquer uma das quatro seguintes possibilidades, e todas são igualmente prováveis:

- *A primeira bolinha é vermelha, se ambas as bolinhas do saco forem vermelhas.*
- *A segunda bolinha é vermelha, se ambas as bolinhas do saco forem vermelhas.*
- *A bola de gude é vermelha, se apenas a primeira bola colocada no saco for vermelha, ou,*
- *A bola de gude é vermelha, se apenas a segunda bola colocada no saco for vermelha.*

Isto significa que a bolsa é uma bolsa toda vermelha em dois de 4 casos, é um saco azul/vermelho misto nos outros 2 casos. Então, existem $\frac{1}{2}$ *de chance de o saco ser misto, ou seja, contendo uma bolinha de cada cor.*

Assim, para que o próximo sorteio seja uma bolinha azul, é necessário duas coisas acontecerem:

- *A bolsa precisa ser uma bolsa de cores mistas, que possui* $\frac{1}{2}$ *de probabilidade.*
- *A bola de gude azul em vez da vermelha precisa ser retirada, o que é outro* $\frac{1}{2}$ *de probabilidade.*

Portanto, a probabilidade geral de se retirar uma bolinha azul na segunda tentativa é de:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Proposta 3: Um saco com duas bolinhas de gude é preparado jogando uma moeda duas vezes, seguindo as mesmas regras e restrições da proposta 2. Mas desta vez, antes de fazer qualquer coisa, você vê que alguém observa dentro do saco, remove uma bolinha vermelha e a coloca de lado. Agora, você enfia a mão na bolsa e retira a bola de gude restante.
Qual a probabilidade de a bola de gude que você retirar ser da cor azul?

Orientações:

Muitas pessoas erram essa probabilidade por tratá-la como no caso anterior, porém a chave para resolução está no fato de que outra pessoa decidindo remover uma bola de gude vermelha da bolsa não é o mesmo que escolher aleatoriamente uma bola de gude do saco e observar que ela era vermelha.

Na verdade, inicialmente possui o mesmo aspecto, quando as duas bolinhas de gude são colocadas no saco, há quatro possibilidades igualmente prováveis para o que aconteceu cada uma com probabilidade $\frac{1}{4}$*:*

1. *A primeira bola de gude colocada é vermelha e a segunda também é vermelha.*
2. *A primeira bola de gude colocada é vermelha e a segunda é azul.*
3. *A primeira bola de gude colocada é azul e a segunda é vermelha.*
4. *A primeira bola de gude colocada é azul e a segunda também é azul.*

No entanto, o último caso é descartado quando você vê uma bola de gude vermelha sendo retirada do saco, podendo ainda ser qualquer um dos outros 3 casos, e não havendo nenhuma informação favorecendo um sobre os outros. Assim, como todos os casos 1, 2 e 3 possuem igualmente $\frac{1}{3}$ *de chance de terem ocorrido e somente nos casos 2 e 3 a bolinha restante é azul, temos portanto que a probabilidade de retirada de uma bolinha azul é de* $\frac{2}{3}$*.*

Passaremos agora a abordar algumas estratégias de jogo, para isso, utilizaremos cinco dicas rápidas para resolver problemas de probabilidade.

Enfatizamos que, seja para jogadores profissionais ou novatos, os alunos irão se divertir com esses problemas, e os cenários ficam mais complicados à medida que estas atividades avançam.

Dica 1: não seja excessivamente tentado por recompensas grandes, mas **improváveis**.

Especialmente se você estiver jogando um jogo muitas vezes, a melhor estratégia geralmente envolve construir ganhos lentamente, em vez de fazer uma aposta arriscada para obter um grande retorno.

Proposta 4: Você está prestes a jogar um jogo com uma moeda que é ***ponderada*** de modo que haja um 90% de chance de que ele cai cara e um 10% de chance de que ele acerte coroa. Há no máximo um 0,0000001% de chance de que a moeda entre em combustão espontânea no ar.

Você ganhará dinheiro dependendo do resultado quando a moeda for lançada. Você deseja maximizar a quantia esperada de dinheiro que ganhará.

O que você prefere?

a) Vencer R$ 10,00 quando ele cai cara.

b) Vencer R$ 50,00 quando ele cai coroa.

c) Vencer R$ 100000,00 quando entra em combustão espontânea no ar.

d) Todos os itens são igualmente bons.

Orientações:

Inicialmente vamos comparar as três opções:

Opção a *– Há um* $\frac{9}{10}$ *de chance de sair cara. Logo* $\frac{9}{10}$ *do tempo, você esperaria ganhar R$ 10,00 e portanto, seu pagamento esperado por jogo é de R$ 9,00, pois:*

$$R\$10 \cdot \frac{9}{10} = R\$\,9{,}00$$

Opção b *– Há um* $\frac{1}{10}$ *de chance de sair coroa. Logo* $\frac{1}{10}$ *do tempo, você esperaria ganhar R$ 50,00 e portanto, seu pagamento esperado por jogo é de R$ 5,00, pois:*

$$R\$50 \cdot \frac{1}{10} = R\$\,5{,}00$$

Opção c *– Há um* $\frac{1}{100000000}$ *de chance de sair coroa. Logo* $\frac{1}{100000000}$ *do tempo, você esperaria ganhar R$ 100000,00 e portanto, seu pagamento esperado por jogo é de R$ 0,001, pois:*

$$R\$100000{,}00 \cdot \frac{1}{100000000} = R\$\,0{,}001$$

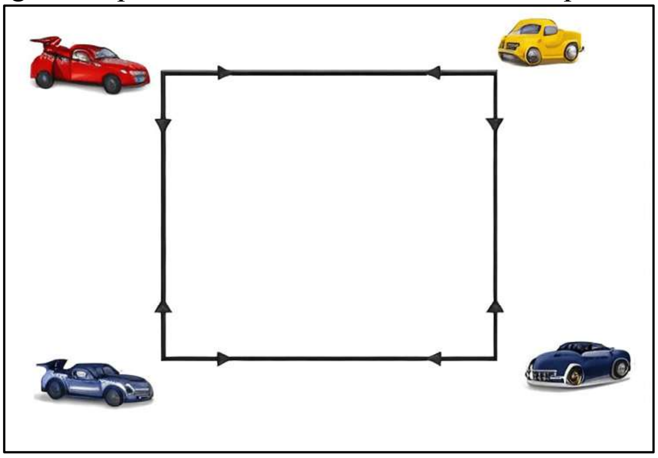
Portanto Opção a $>$ *Opção b* $>$ *Opção c.*

Dica 2: Procure uma perspectiva simplificadora quando houver muitas possibilidades.

Na proposta abaixo, os alunos poderão mapear todos os casos em alguns minutos, mas também há uma maneira rápida de resolvê-la usando a perspectiva correta.

Proposta 5: Quatro carrinhos estão nos cantos de um quadrado (Figura 7). Tudo ao mesmo tempo, cada um deles escolhe aleatoriamente e independentemente caminhar ao longo de uma borda do quadrado até um novo canto:

Figura 7: quatro carrinhos nos cantos de um quadrado



Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Qual é a probabilidade de haver pelo menos uma colisão antes que os carrinhos cheguem aos seus destinos?

a) $\frac{1}{8}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{3}{4}$ ***d)*** $\frac{7}{8}$

Orientações:

Inicialmente, é importante ressaltar que conhecer as técnicas de resolução de problemas de probabilidade pode simplificar o que parece ser um problema assustador em um simples.

Nesse caso, o atalho é calcular a probabilidade complementar, ou seja, calcular a probabilidade de que nenhum carro colida e, em seguida, subtrair isso de 1.

Primeiro, vamos descobrir quantas coisas diferentes podem acontecer.

Como cada carrinho tem duas opções (sentido horário ou anti-horário), existem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ *maneiras diferentes para eles começarem a se mover no total.*

Agora, tentaremos responder quantas dessas maneiras correspondem à condição de colisão.

A única maneira de os carrinhos evitarem completamente colidir uns com os outros é se todos estiverem se movendo no sentido horário ou anti-horário, então há apenas 2 maneiras que podem ocorrer.

Logo, a probabilidade de dois carrinhos não se encontrarem é:

$$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

Portanto, a probabilidade de dois ratos colidirem será de:

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Dica 3: Cuidado, sua intuição pode enganá-lo.

A falácia do jogador é a crença equivocada de que certos resultados se tornam mais prováveis quando ainda não aconteceram. Por exemplo, um jogador pode pensar que deve ganhar depois de perder vários jogos consecutivos.

Proposta 6: O aluno irá lançar 8 moedas justas no total, e três do seus quatro primeiros lançamentos já deram coroa. Qual é o número total mais provável de coroas quando o aluno terminar de lançar todas as 8 moedas?

a) 4. **b)** 5. **c)** 6. **d)** 7.

Orientações:

Se não soubéssemos o resultado dos primeiros quatro lançamentos de moedas, o valor esperado seria de:

$$8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

No entanto, como sabemos que três dos quatro primeiros lançamentos de moedas são coroas, calculamos o número esperado de coroas no próximo quatro lançamentos, que é metade de 4, ou seja, 2.

Em seguida, adicionamos estas 2 para as 3 coroa que certamente já apareceram, para obter uma resposta total de 5 coroas.

Estranhamente, muitas pessoas aceitam essa lógica quando ganham em um simulador de jogos, mas rejeitam a lógica quando estão realmente jogando e o simulador significa uma perda.

Conforme o problema, quatro lançamentos no jogo, com três coroas ocorridas, muitos jogadores começam a sentir que as caras devem eventualmente alcançá-las para que, ao todo, as chances da moeda sejam comprovadas 50: 50.

Portanto, eles acreditam que, como mais coroas foram lançadas até agora, mais caras devem ser lançadas na segunda metade do jogo. Essa sensação incômoda de que acabará se equilibrando é o que se designa a falácia do jogador.

Além disso, outros são vítimas de uma falácia diferente, ou seja, eles sentem que deveriam apostar exatamente a mesma coisa acontecendo novamente, e esperam mais três coroas e mais uma cara para um total de 6 coroas. Isso ainda está errado, se tratando de uma moeda justa.

Dica 4: Quando você estiver estudando um jogo complexo, simplifique-o dividindo-o em jogos menores e/ou cenários com os quais você já trabalhou antes.

Por exemplo, tirar uma carta preta de um baralho (e embaralhar a carta de volta no baralho quando terminar) é como jogar uma moeda se tudo o que importa é a cor da carta, e $\frac{1}{2}$ é uma fração muito mais fácil de acompanhar mentalmente do que $\frac{26}{52}$.

Proposta 7: Bruna e André estão jogando um jogo usando dados estranhos. Cada dado é um cubo com seis lados. O dado de Bruna tem os lados numerados 3, 3, 3, 3, 3, 6. O dado de André tem os lados numerados 2, 2 , 2, 5 , 5, 5 (Figura 8):

Figura 8: dois dados lançados.

Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Para jogar, Bruna e André jogam seus dados ao mesmo tempo, e quem tirar o valor mais alto vence.

Se eles jogarem muitas vezes, quem provavelmente ganhará com mais frequência, Bruna ou André?

a) Bruna.

b) André.

c) Ambos têm a mesma probabilidade de vencer.

Orientações:

Inicialmente sabemos que se eles jogarem muitos jogos, pode-se esperar que, em aproximadamente metade desses jogos, André tirará um 2, e na outra metade ele vai tirar um 5.

Se André tirar um dois, ele definitivamente perde, não importa o que Bruna tire, já que $2 < 3$ *e* $2 < 6$.

No entanto, André não tem uma vitória garantida na outra metade dos casos. Mesmo que André tire um 5, Bruna ainda pode ganhar tirando um 6.

Portanto, Bruna tem a vantagem aqui, pois esperamos que ela vença mais da metade de seus jogos contra André.

Uma solução mais precisa seria:

Bruna vence todos os jogos em que André tira um 2, que é $\frac{1}{2}$ *de todos os jogos. E também se espera que ela vença* $\frac{1}{6}$ *da outra metade das partidas em que André tira um 5.*

Portanto, no total, espera-se que Bruna vença:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{12}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

dos jogos.

Dica 5: Atenção que "muito provavelmente" não significa necessariamente "irá ganhar".

Quando o jogador estiver jogando um jogo como o pôquer, onde não pode saber tudo sobre as cartas em jogo, não se deve jogar como se o resultado mais provável fosse a única coisa que poderia acontecer. Lembremos de que, mesmo que algo seja mais provável, ainda pode ser muito improvável se houver muitas possibilidades.

Proposta 8: No Pokémon Go, os ovos têm aproximadamente um 50% chance de ser o tipo 5 km. O que é mais provável?

a) Achado 2 ovos e receber exatamente um tipo 5 km.

b) Achado 2000 ovos e receber exatamente mil tipos 5 km.

Orientações:

Achado 2000 ovos e obter exatamente 1000 tipos 5 km é muito menos provável do que encontrar 2 ovos e receber exatamente um tipo 5 km.

Intuitivamente, você pode explicar isso reconhecendo que ***exatamente metade*** *é realmente um resultado muito preciso. Intuitivamente, a chance de encontrar 999 tipos 5 km tipos ser quase provável como o de encontrar 1000? Talvez não exatamente tão provável, mas perto. E o mesmo não seria verdade para 998 tipos 5 km?*

Se houver muitos outros casos em que encontrar quase (ou exatamente) 1000 tipos 5 km de ovos de 2000, e se as probabilidades individuais de encontrar quase 1000 são aproximadamente iguais, então isso não implicaria as probabilidades individuais de encontrar quase 1000 serem bastante pequenos?

Na verdade, a probabilidade de encontrar exatamente 1000 tipos 5 km de 2000 ovos é aproximadamente 1,78%, considerando que a probabilidade de encontrar exatamente um tipo 5 km de dois ovos é 50%.

Realizaremos agora os cálculos completos.

Como esperamos 50% de ovos para ser do tipo 5 km $\frac{2}{4}$ *é o resultado mais provável e tem uma boa chance de acontecer. Este cenário é como jogar uma moeda se H significa encontrar um tipo 5 km e T significa encontrar um tipo diferente de ovo.*

Com dois lançamentos de moedas, há 4 Resultados igualmente prováveis que podem resultar: HH, HT, TH e TT. Logo, dados dois ovos, há um 50% de chance de encontrar exatamente um tipo 5 km ovo.

Um caso adicional para construir a intuição:

Ao encontrar 4 ovos, qual é a probabilidade de encontrar exatamente dois tipo 5 km?

Como antes, vamos comparar isso com jogar uma moeda 4 vezes. Com quatro lançamentos de moedas, há 16 resultados igualmente prováveis. Você pode pensar nisso como um 4×4 gráfico de possibilidades, cada uma das quais é igualmente provável:

Destas, 16 possibilidades igualmente prováveis, apenas 6 tem dois H e dois T.

Portanto, dados quatro ovos, a probabilidade de encontrar exatamente dois tipos 5 km é:

$$\frac{6}{16} = 37{,}5\%$$

Assim, à medida que o número de ovos/cara ou coroa aumenta a probabilidade de um 50: 50 aparenta diminuir.

Metade dos ovos sendo tipo 5 km, os tipos de 5 km ainda são o resultado mais provável, mas não é tão provável quanto quando havia apenas dois ovos sendo encontrados.

Com 2000 ovos que podemos modelar como 2000 cara ou coroa, encontrar exatamente 1000 tipos 5 km é realmente muito improvável, muito menos provável do que 50%.

Assim como há $2^2 = 4$ *resultados que poderiam resultar de 2 ovos, há* $2^{2000} = 1{,}15 \cdot 10^{602}$ *resultados igualmente prováveis que poderiam resultar da descoberta de 2000 ovos.*

Em apenas:

$$\binom{2000}{1000} = 2{,}05 \cdot 10^{600}$$

desses resultados, exatamente 1000 5 km ovos aparecem.

Portanto, dados 2000 ovos, a chance de se encontrar exatamente 1000 5 km ovos é de:

$$\frac{2{,}05 \cdot 10^{600}}{1{,}15 \cdot 10^{602}} \approx 1{,}78\%$$

O resultado esperado é 1000 e é o resultado mais provável, mas isso não o torna provável.

Terminada esta etapa do desenvolvimento de dicas e estratégias para jogos baseados nos dados probabilísticos, passaremos agora a propostas que nos evidenciam a presença da probabilidade em toda parte.

Todas as técnicas e ferramentas matemáticas que apresentaremos podem ser aplicadas a muitas situações fora dos quebra-cabeças.

Problemas de probabilidade aparecem em todos os lugares e todos os dias. As próximas cinco propostas deste nosso estudo são casos práticos que enganam até mesmo solucionadores de problemas experientes.

Proposta 9: Um dia, o semáforo em um determinado cruzamento fica vermelho quando você chega a ele e **nenhum outro carro** está esperando no semáforo. Você espera 45 segundos para ficar verde.

No dia seguinte, você chega ao mesmo semáforo e ele fica vermelho novamente, e **um carro** já está esperando o semáforo mudar.

Qual o cenário mais provável de ocorrer neste segundo dia?

a) Você espera mais de 45 segundos.

b) Você espera exatamente 45 segundos.

c) Você espera menos do que 45 segundos.

Orientações:

Inicialmente, com base apenas nas informações que temos, se um carro chegar ao semáforo sem outros carros, o cenário mais provável é esperar 45 segundos.

No segundo dia, esse cenário se aplica ao carro que já chegou. Ou seja, o carro à sua frente deve esperar, em um sentido de probabilidade, ter um tempo de espera mais provável de 45 segundos. Observemos que estamos pensando em termos de probabilidade, isso não está descartando o fato de que a luz pode ser um, dois minutos, e você teve sorte no primeiro dia, mas com base em nosso único ponto de dados, uma repetição do dia anterior é o mais provável.

Então, já há um carro esperando na sua frente que, em termos de probabilidade é mais provável que espere 45 segundos, e algum tempo se passou antes de você chegar.

Portanto, a quantidade de tempo mais provável para sua espera é menor que 45 segundos.

Proposta 10: Suponha que você tenha uma bolsa com 5 caramelos de chocolate e 5 cordiais de cereja. Sua amiga pega um doce aleatoriamente e come. Depois, sem olhar para o que sobrou, você pega e come um dos 9 doces restantes.

Qual a probabilidade de você ter acabado de ter comido um cordial de cereja?

Orientações:

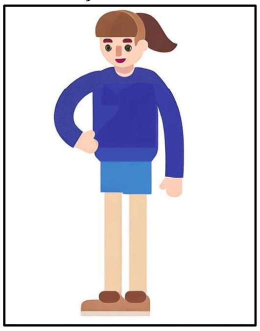
Mesmo que sua amiga tenha acabado de comer um doce sobrando 9 na sacola, você não tem informações sobre o que é esse doce, então você ainda está analisando a partir de um espaço de possibilidade de 5 caramelos de chocolate e 5 cordiais de cereja. Portanto, a probabilidade de comer um cordial de cereja é $\frac{5}{10}$.

Para ilustrar um pouco mais o "espaço de possibilidade", consideremos um problema diferente envolvendo um baralho embaralhado padrão de jogo com 52 cartas. A probabilidade de o fundo ter um ás de espadas é $\frac{1}{52}$*. Agora suponhamos que você tire do topo 50 cartas sem olhar. A chance de o fundo ser um ás de espadas não mudou para* $\frac{1}{2}$*, pois não temos informações sobre as cartas removidas.*

Se, em vez disso, olhássemos para o topo de 50 cartas e não encontrássemos um ás de espadas, então a parte inferior das cartas restantes seria um ás de espadas com probabilidade $\frac{1}{2}$.

Proposta 11: O medalhista olímpico mais velho do mundo foi o sueco Oscar Swahn, com 72 anos de idade. Na imagem abaixo está Ana (Figura 9):

Figura 9: representação de uma atleta olímpica.



Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Qual das informações abaixo é mais provável sobre ela?

a) Ana ganhou uma medalha olímpica.

b) Ana está com 30 anos de idade e ganhou uma medalha olímpica.

Orientações:

Consideremos o conjunto de pessoas que ganharam medalhas olímpicas. O mesmo inclui pessoas que estão com 30 e alguns que não estão.

Em outras palavras, todas as pessoas que ganharam medalhas olímpicas e estão com 30 anos de idade estão incluídos no conjunto de todas as pessoas que ganharam medalhas olímpicas.

Portanto, o primeiro cenário em que Ana ganhou uma medalha olímpica é mais provável.

Temos aqui um viés cognitivo bem conhecido relevante para a vida diária, pois adicionar detalhes pode fazer as pessoas pensarem que um subconjunto de algum evento é mais provável do que o próprio evento.

Proposta 12: A doença Z infecta 1 de cada 1000 pessoas. Há um teste para a doença Z que é garantido como positivo para alguém com a doença. Para quem não tem a doença, o teste retorna um falso positivo 1% das vezes.

Você testou positivo para a doença Z. Qual é a probabilidade de você ter a doença?

a) Menos de 1%.

b) Entre 1% e 5%.

c) Entre 5% e 10%.

d) Entre 10% e 100%.

Orientações:

Sabe-se que 1 dentre as 1000 pessoas têm a doença e testa positivo. Assim, 1% das restantes 999 pessoas testarão positivo, mas não terão a doença, (aproximadamente 10, realmente 9,99).

Isso significa que, para aproximadamente todas as 11 pessoas com teste positivo, apenas 1 terá a doença.

Portanto, a probabilidade de alguém com teste positivo realmente ter a doença é:

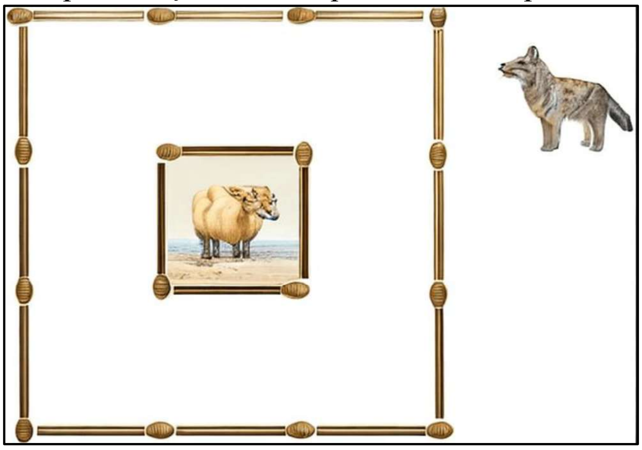
$$\frac{1}{11} \approx 9{,}09\ \%$$

Que está entre 5% e 10%.

Proposta 13: Na imagem a seguir (Figura 10) os fósforos representam cercas protegendo uma ovelha de um lobo, e suponha que dois fósforos sejam removidos aleatoriamente.

Se ambos os fósforos forem removidos do anel interno ou externo, a ovelha permanece segura. No entanto, o lobo pode chegar até a ovelha se uma remoção for da cerca externa e a outra for da cerca interna.

Figura 10: representação de dois quadrados com palito de fósforo.

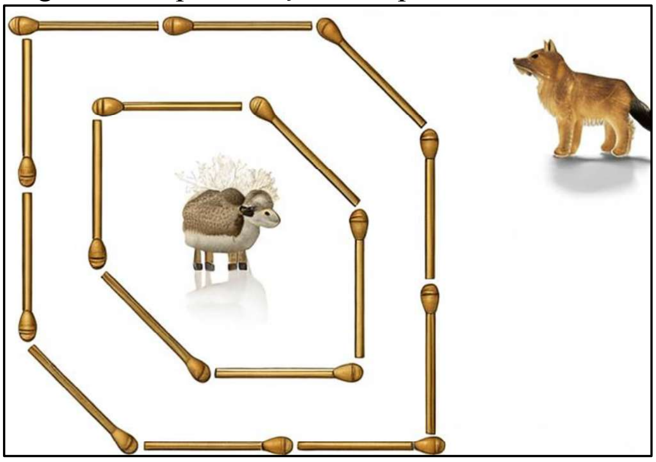


Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Aqui está uma nova configuração de fósforos antes de dois serem removidos aleatoriamente (Figura 11).

Figura 11: representação com palitos de fósforos.



Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

A nova configuração é mais segura que a original?

a) As ovelhas estariam menos seguras.

b) As ovelhas estariam igualmente seguras.

c) As ovelhas estariam mais seguras.

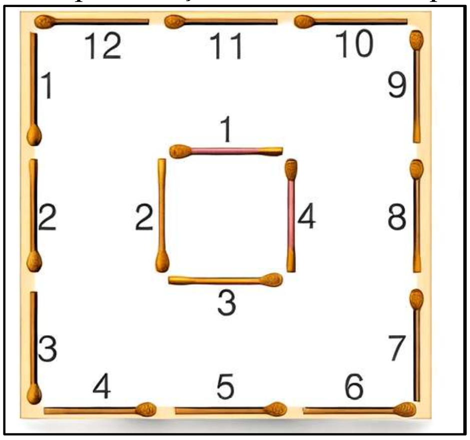
Orientações:

Inicialmente, para que o lobo alcance as ovelhas, um fósforo externo e um interno devem ser removidos.

A probabilidade de isso acontecer aleatoriamente é igual $\frac{UM}{B}$*, onde B é o número de maneiras igualmente prováveis de dois fósforos/cercas serem removidos e UM é o número de maneiras pelas quais um fósforo interno e um externo seria removido.*

Primeiro, vamos calcular UM com 4 fósforos internos e 12 palitos de fósforo externos. Lembre-se de que UM é o número total de maneiras de remover um fósforo interno e um externo.

Figura 12: representação contando dois quadrados.



Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Se removermos um fósforo interno e um externo, então há 4 escolhas para o interior e 12 escolhas para o exterior. Portanto, existem $UM = 4 \times 12 = 48$ *maneiras totais de remover tal par.*

A seguir, calcularemos B, o número de maneiras igualmente prováveis pelas quais dois fósforos/cercas podem ser removidos.

Há 16 maneiras de escolher o primeiro fósforo e depois há 15 sobrando para escolher o segundo fósforo. Portanto, no total, há $16 \cdot 15 = 240$ *maneiras de remover dois palitos de fósforo.*

No entanto, há duplicatas em nossa contagem — por exemplo, se pegarmos o bastão #1 seguido por vara #2, isso seria idêntico a pegar um pedaço de pau #2 seguido por vara #1.

Então a contagem final real é: $B = \frac{240}{2} = 120$ *maneiras.*

Isso significa que, com 4 fósforos internos e 12 fósforos externos, a probabilidade de a ovelha ser exposta ao lobo é de:

$$\frac{UM}{B} = \frac{48}{120} = 40\%$$

Agora, vamos calcular UM e B quando há 10 palitos de fósforo exteriores e 6 palitos de fósforo internos.

Se quisermos remover um palito de fósforo interno e um palito de fósforo externo, então existem 6 escolhas para o interior e 10 escolhas para o exterior. Portanto, existem $UM = 6 \cdot 10 = 60$ *maneiras totais para remover tal par.*

$B = 120$ *é o mesmo que no caso anterior se houver 6 palitos de fósforo internos e 10 palitos de fósforo externos.*

Isso significa que, com 6 palitos de fósforo internos e 10 palitos de fósforo externos, a probabilidade de a ovelha ser exposta ao lobo é:

$$\frac{UM}{B} = \frac{60}{120} = 50\%$$

Portanto, mover os palitos de fósforo torna as ovelhas menos seguras.

4.1 Sequência didática para o jogo de Monty Hall

Nesta atividade apresentaremos uma proposta de sequência didática para o desenvolvimento e compreensão de um famoso problema de jogo inspirado no game show "Let's Make a Deal", que era popular nos anos 1960 e 1970.

Temos por objetivo despertar um raciocínio diferenciado em alunos do 3º ano do ensino médio, visando uma aprendizagem mais dinâmica e construtiva dos conceitos relacionados à teoria de probabilidades, podendo proporcionar assim aos estudantes caminhos que os levam a uma interpretação adequada dos problemas que por vezes são muito propícios a equívocos.

As habilidades abordadas que serão desenvolvidas durante a aplicação desta sequência didática são: EM13MAT311, EM13MAT511, EM13MAT106 e EM13MAT312, sendo de 2 aulas o tempo previsto para o desenvolvimento de cada proposta.

Para o desenvolvimento desta sequência, analisaremos o jogo em 5 etapas de resolução de problemas:

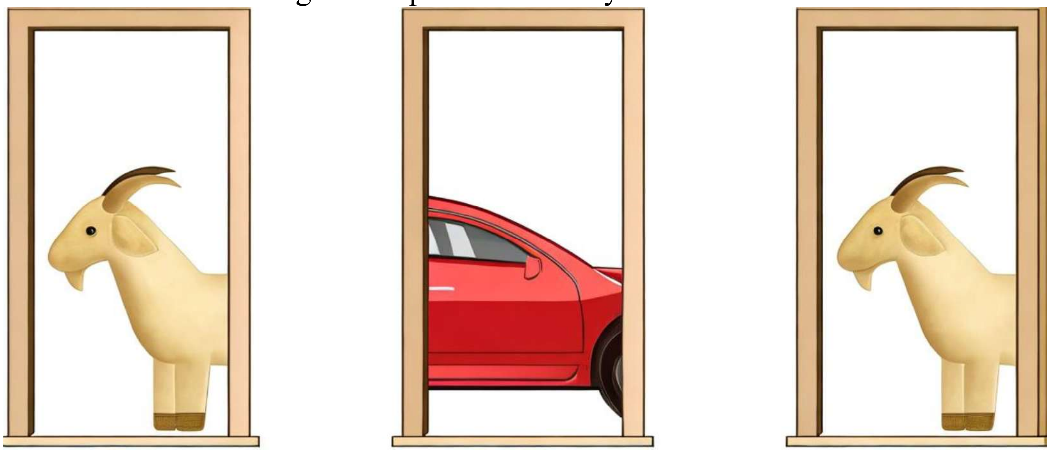
1. Interpretar.
2. Explorar.

3. Teorizar.
4. Compreender.
5. Responder.

Nosso objetivo final é encontrar uma estratégia ideal (se houver) para jogar o seguinte jogo.

Você é um competidor em um game show. A seguir estão as regras do jogo:

Figura 13: portas de Monty hall abertas.



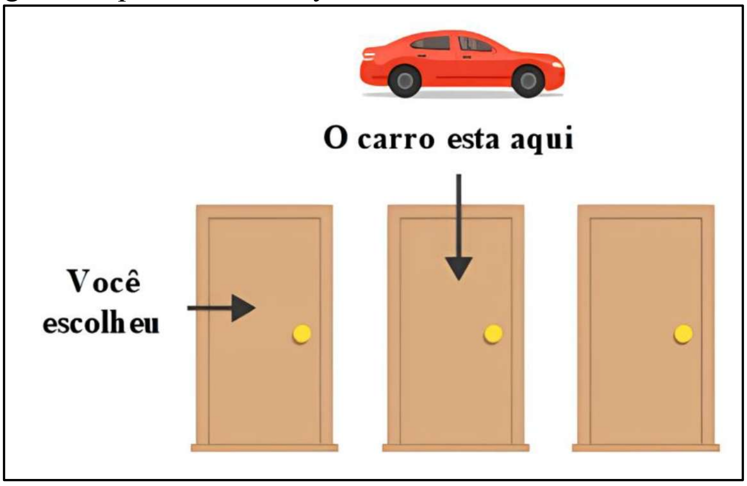
Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

1. Existem 3 portas.
2. Monty Hall, o apresentador do game show, garantiu que houvesse um carro atrás de uma das 3 portas e uma cabra devoradora de homens atrás de cada uma das outras duas portas.
3. No início do jogo, você pode escolher qualquer uma das 3 portas.
4. Após escolher uma das 3 portas, Monty Hall abre uma das duas portas que você não escolheu, e a porta que ele abre deve conter uma cabra.
5. Finalmente, Monty Hall pergunta se você deseja trocar de porta. Em outras palavras, você pode optar por ficar com a porta que escolheu inicialmente ou mudar para a outra porta que ainda não foi aberta.
6. Você ganha se escolher a porta com o carro. Se você acabar com uma cabra, ela come você.

Desafio 1. Suponha que Monty Hall coloque o carro atrás da porta 2, e você selecione a porta 1.

Figura 14: portas de Monty Hall mostrando onde está o carro.



Fonte: gerada por *Artguru* em 16/12/2024.

Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Dado que Monty Hall não deve abrir a sua porta escolhida, quantas opções ele tem ao escolher qual porta abrir para mostrar uma cabra?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

Para nossa análise, faremos estas suposições:

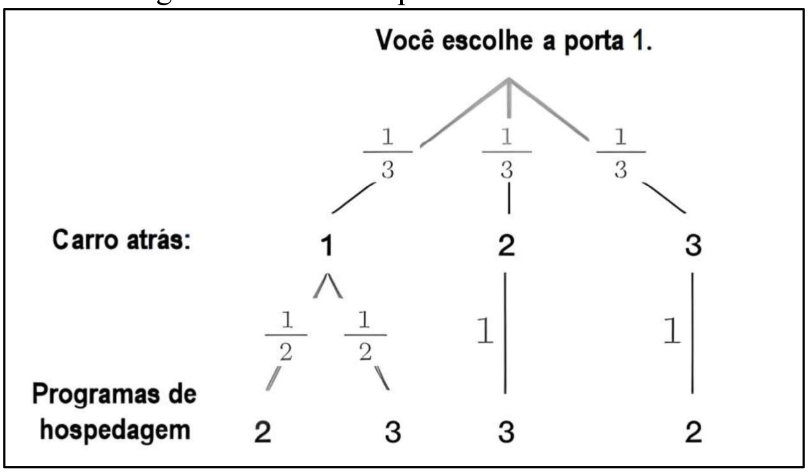
Monty Hall tem a mesma probabilidade de colocar o carro atrás de qualquer uma das três portas.

Se Monty Hall tem duas portas para escolher, ao decidir qual porta abrir para mostrar uma cabra, é igualmente provável que ele escolha qualquer uma das portas.

Desafio 2. Dadas essas suposições, se você escolher inicialmente a Porta 1, qual dessas opções é o diagrama de árvore de probabilidade correto para este jogo?

a)

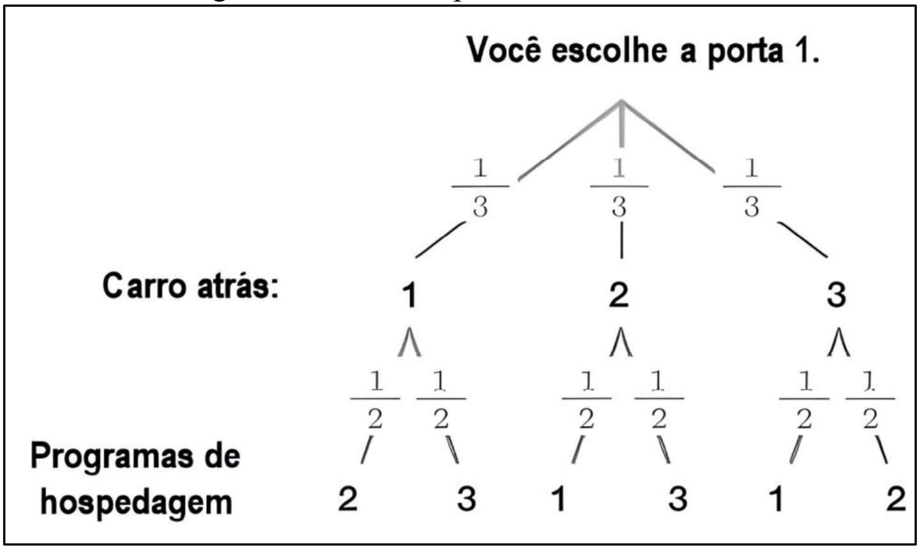
Figura 15: árvore de possibilidades caso 1.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

b)

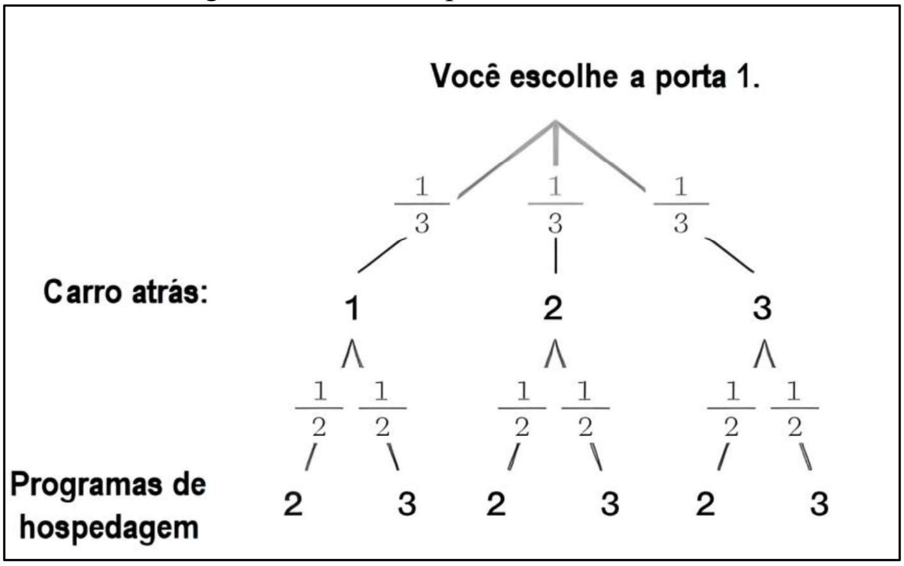
Figura 16: árvore de possibilidades caso 2.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

c)

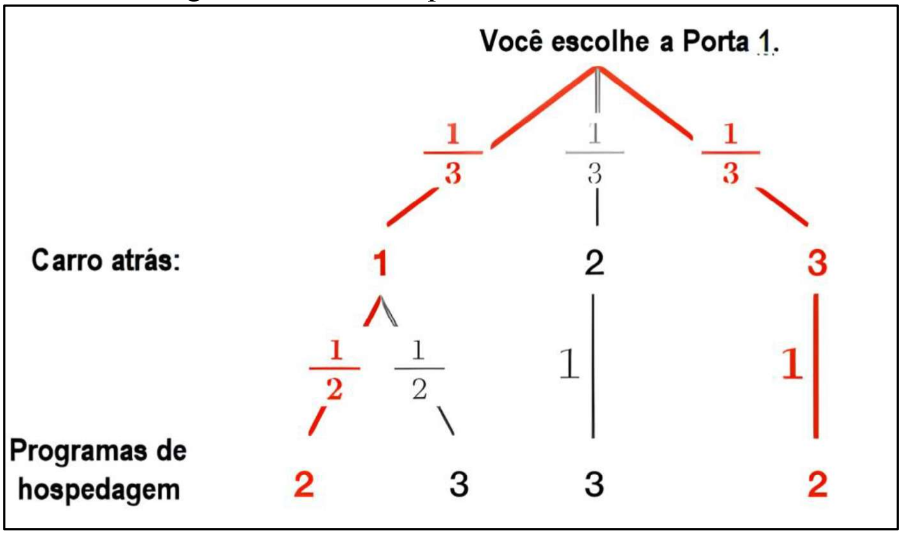
Figura 17: árvore de possibilidades caso 3.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Desafio 3. Agora suponha que depois de escolher a Porta 1, o anfitrião mostra que há uma cabra atrás da porta 2. Existem 2 caminhos no diagrama de árvore (Figura 18) que levam ao anfitrião mostrando uma cabra atrás da porta 2:

Figura 18: árvore de possibilidades desafio 3.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Cada um desses caminhos é igualmente provável?

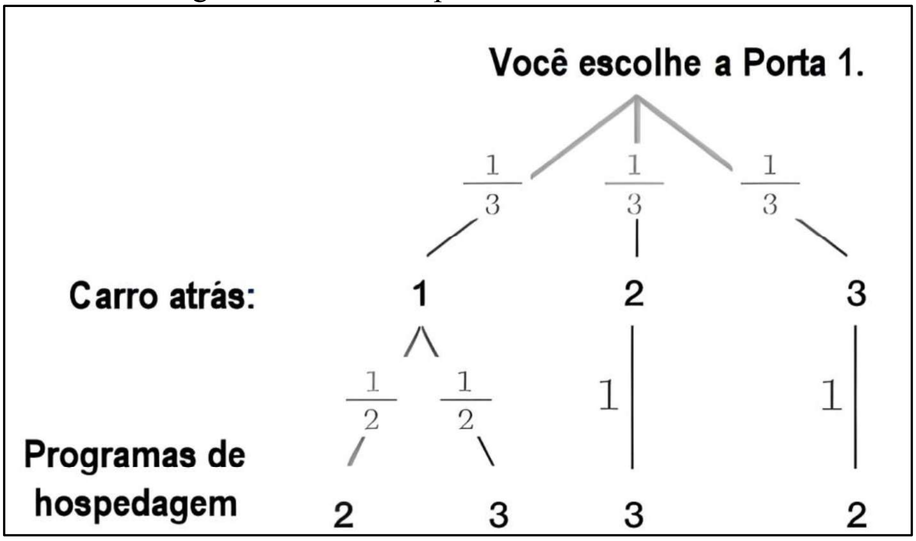
a) Sim

b) Não, o caminho onde o carro está atrás da porta 1 é mais provável.

c) Não, o caminho onde o carro está atrás da porta 3 é mais provável.

Desafio 4. Suponha que você escolha inicialmente a porta 1 de modo que o diagrama da árvore de probabilidade para o jogo seja o seguinte (Figura 19):

Figura 19: árvore de possibilidades desafio 4.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Então, Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2. Qual dessas probabilidades condicionais é maior?

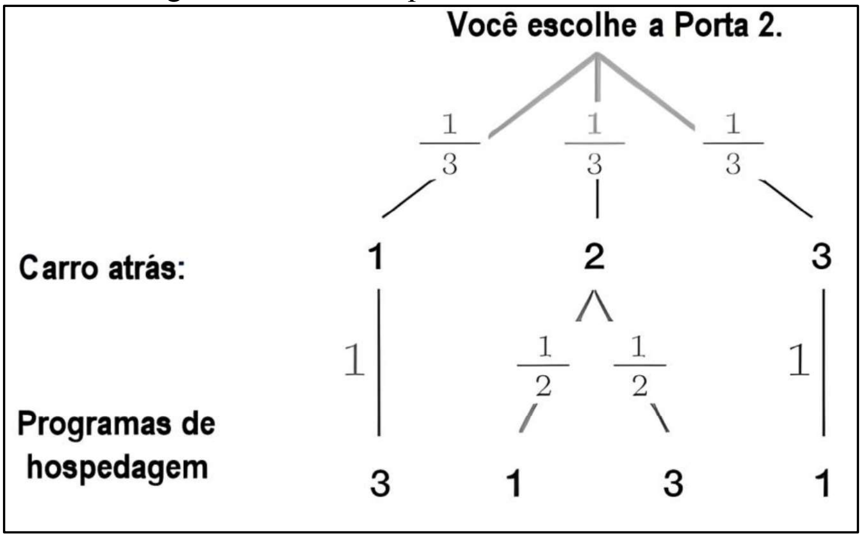
a) A probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da porta 1 dado que Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2.

b) A probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da porta 3 dado que Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2.

c) Essas duas probabilidades condicionais são iguais.

Desafio 5. Agora, suponha que você inicialmente escolha a Porta 2 para que o diagrama da árvore de probabilidade do jogo fique assim (Figura 20):

Figura 20: árvore de possibilidades desafio 5.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Então, Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 3. Qual dessas probabilidades condicionais é maior?

a) A probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da porta 1 dado que Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 3.

b) A probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da porta 2 dado que Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 3.

c) Essas duas probabilidades condicionais são iguais.

Desafio 6. Finalmente, agora se lembre destas suposições sobre o jogo:

- É igualmente provável que o anfitrião coloque o carro atrás de qualquer uma das 3 portas.
- Se o apresentador tiver duas portas para escolher ao decidir qual porta abrir para mostrar uma cabra, é igualmente provável que o anfitrião escolha qualquer uma das portas.

Quando Monty Hall pergunta se você quer mudar de porta, suas chances de ganhar são maiores se você ficar ou se mudar?

a) Se você ficar.

b) Se você mudar.

c) Suas chances de ganhar são as mesmas, não importa se você fica ou troca.

Orientações/ Resoluções:

Na sequência deixamos como orientação as resoluções de cada desafio construído na sequência didática.

Desafio 1:

Existem 3 portas. Você selecionou a porta 1, e o carro está atrás da porta 2. Logo Monty Hall não deve abrir sua porta escolhida e ele não deve abrir a porta com o carro atrás dela, portanto a única porta que ele pode abrir é a porta 3, tendo assim somente uma opção (b).

Desafio 2:

1º Passo:

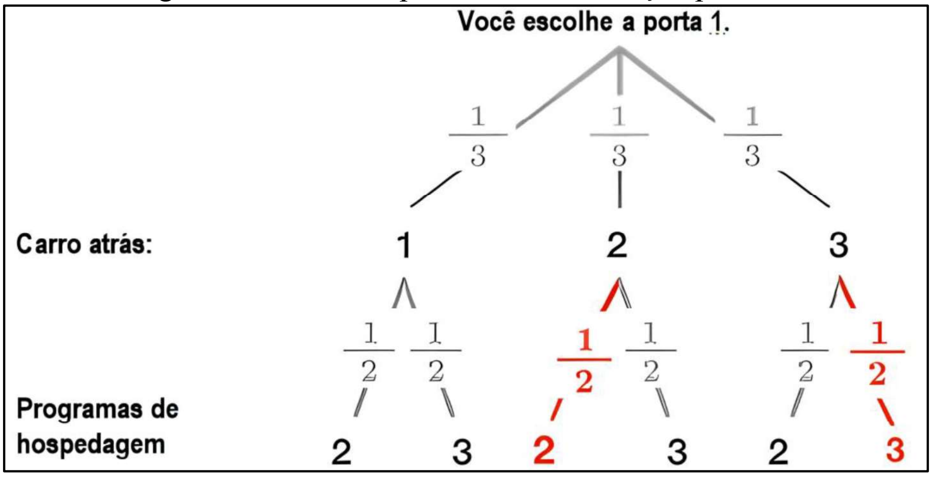
A árvore de probabilidade B corresponde a um cenário em que Monty Hall não abrirá a porta com o carro, mas pode abrir a porta que você escolheu. Porém isso viola a primeira metade da regra 4 do jogo apresentada inicialmente:

"...Monty Hall abre uma das duas portas que você não escolheu..."

Por exemplo, se o carro estiver atrás da porta 2, a árvore de probabilidade fornece $\frac{1}{2}$ *de chance de Monty Hall abrir a porta 1, que é a porta que você escolheu.*

Exatamente o mesmo argumento se aplica ao caso em que o carro está atrás da porta 3. Ambos os cenários de quebra de regras são destacados com linhas vermelhas na árvore de probabilidades abaixo (Figura 21):

Figura 21: árvore de possibilidades solução passo 1.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

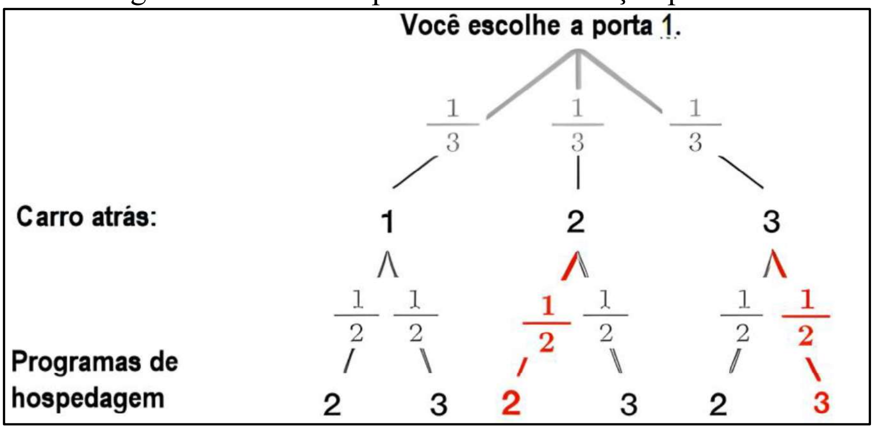
2º Passo:

A árvore de probabilidade C corresponde a um cenário em que Monty Hall não abrirá a porta que você escolheu, mas ele pode abrir a porta com o carro. Mas isso viola a segunda metade da regra 4:

"...a porta que ele abre deve ser uma com uma cabra."

Por exemplo, se o carro estiver atrás da porta 2, a árvore de probabilidade fornece $\frac{1}{2}$ *de chance de Monty Hall abrir a porta 2. Exatamente o mesmo argumento se aplica ao caso em que o carro está atrás da porta 3. Ambos os cenários de quebra de regras são destacados com linhas vermelhas na arvore de probabilidades a seguir (Figura 22):*

Figura 22: árvore de possibilidades solução passo 2.



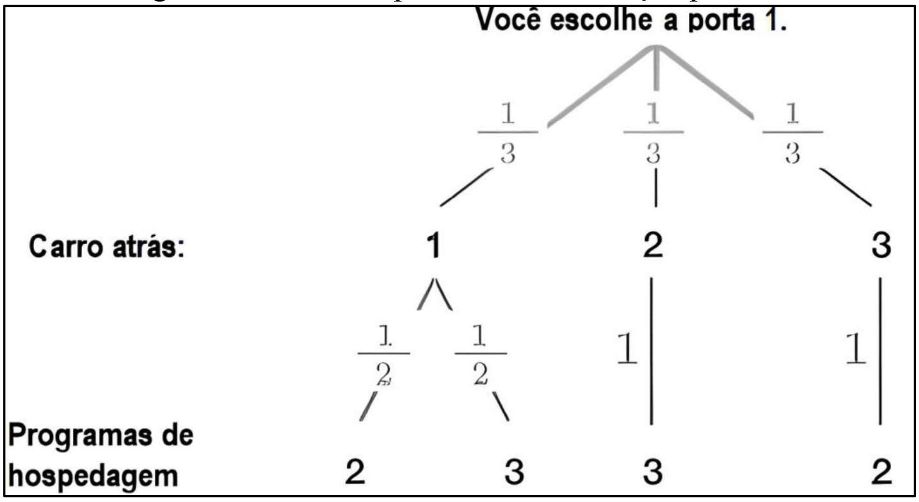
Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

3º Passo:

Como Monty Hall não deve abrir nem a porta de sua escolha nem a porta com o carro, as árvores de probabilidades B e C estão erradas. A única opção restante é A.

Esta árvore de probabilidade mostra que, se o carro estiver atrás da porta 2, Monty Hall sempre abre a porta 3 — que é demonstrada pela probabilidade "1" escrito ao lado da *linha vertical descendo de 2 para 3 na árvore abaixo (Figura 23). Claro, exatamente o mesmo argumento se aplica ao caso em que o carro está atrás da porta 3.*

Figura 23: árvore de possibilidades solução passo 3.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024.

Desafio 3:

Seguindo a árvore de probabilidade, a probabilidade do caminho em que o carro está atrás da porta 1 e Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2 pode ser calculado como:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Da mesma forma, a probabilidade do caminho onde o carro está atrás da porta 3 e Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2 pode ser calculado como:

$$\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

Assim, o caminho onde o carro está atrás da porta 3 é mais provável. Isso ocorre porque se você escolher a porta 1, Monty Hall certamente mostrará uma cabra atrás da porta 2 se o carro estiver atrás da porta 3, enquanto há apenas $\frac{1}{2}$ *de chance de ele te mostrar uma cabra atrás da porta 2 se o carro estiver atrás da porta 1.*

Desafio 4:

A probabilidade do caminho onde o carro está atrás da porta 1 e Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2 pode ser calculado como:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Já a probabilidade do caminho onde o carro está atrás da porta 3 e Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2 pode ser calculado como:

$$\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

A probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da porta 1 dado que Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2 pode ser determinada da seguinte forma:

$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

Enquanto a probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da porta 3 dado que Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2 é:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

Portanto, a probabilidade de que o carro esteja atrás da porta 3 dado que Monty Hall mostra uma cabra atrás da porta 2 é maior.

Desafio 5:

Este caso é equivalente ao caso do problema anterior.

Em ambos os casos, você escolheu uma porta, Monty Hall mostrou uma cabra atrás de uma porta que não é sua e você é solicitado a comparar a probabilidade condicional de que o carro esteja atrás de sua porta com a probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da outra porta fechada.

Os números reais nas portas não importam. Em ambos os casos, a probabilidade condicional de que o carro esteja atrás de sua porta é:

$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

Já a probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da outra porta fechada é:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

Portanto, a probabilidade condicional de que o carro esteja atrás da outra porta fechada é maior. Nesse caso, sua porta é a porta 2, e a outra porta fechada é a porta 1. Logo, a Opção A é maior que a Opção B.

Desafio 6:

É melhor trocar de porta.

Como os problemas anteriores sugerem a probabilidade de o carro estar atrás de sua porta escolhida é sempre:

$$\frac{1}{3}$$

Enquanto a probabilidade de o carro estar atrás da outra porta fechada é sempre:

$$\frac{2}{3}$$

Portanto, a melhor opção é sempre realizar a mudança de porta.

5 CONCLUSÕES

O problema de Monty Hall se apresenta como uma ótima oportunidade para introduzir os estudantes ao pensamento probabilístico e à remodelação de hipóteses à luz de novas informações. A resolução desse problema, utilizando o Teorema de Bayes, permite que os alunos vivenciem na prática como a probabilidade de um evento pode ser atualizada à medida que novas evidências são introduzidas.

A proposta de sequência didática que centraliza a aprendizagem na resolução do jogo se mostra eficiente por vários motivos. Ao se envolverem ativamente na simulação do problema, os alunos são mais tendentes a internalizar os conceitos e a questionar suas intuições iniciais. A experiência prática, seguida da formalização matemática através do Teorema de Bayes, cria um ciclo de aprendizagem completo e significativo.

Considerando os resultados que poderão ser obtidos na aplicação deste estudo em sala de aula, podemos destacar os seguintes pontos:

Um aumento da compreensão do Teorema de Bayes, pois os alunos certamente demonstrariam uma compreensão mais profunda do Teorema após a aplicação da sequência didática, conseguindo aplicar o teorema em outras situações problemáticas.

Desenvolvimento maior do pensamento crítico, pois a resolução do problema de Monty Hall estimulará os alunos a questionarem suas intuições iniciais e a analisarem criticamente as informações disponíveis.

Melhora na resolução de problemas, pois a experiência prática na resolução do jogo contribuirá para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, como a competência de identificar as informações relevantes e a de formular estratégias de solução.

Realizando este estudo, podemos ainda destacar, com base nos possíveis resultados esperados, novas sugestões para futuras pesquisas, tais como:

A ampliação da amostra, pois a aplicação da sequência didática em uma amostra maior, permitiria generalizar os resultados e identificar possíveis diferenças entre grupos de alunos com diferentes características.

Investigar o impacto da utilização de diferentes recursos didáticos, pois a utilização de softwares de simulação, jogos online ou materiais manipuláveis poderão potencializar os resultados da aprendizagem.

Analisar a interferência do tempo dedicado à atividade, pois a variação do tempo destinado à resolução do problema e à discussão dos resultados poderão gerar diferentes níveis de aprendizagem.

Assim, podemos concluir que a aplicação do Teorema de Bayes na resolução do problema de Monty Hall, através da proposta de sequência didática aqui apresentada, se tornará uma estratégia eficaz para o ensino de probabilidade e estatística. A experiência prática, aliada à formalização matemática, poderá proporcionar aos alunos uma aprendizagem mais significativa e duradoura.