UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Trabalho de Conclusão de Curso

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE UMA FÓRMULA DE EULER RELATIVA À PROBABILIDADE

Ana Cristina Mascarenhas Nascimento Batista

Feira de Santana
Dezembro de 2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

Trabalho de Conclusão de Curso

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE UMA FÓRMULA DE EULER RELATIVA À PROBABILIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida**

Feira de Santana
Dezembro de 2024

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Batista, Ana Cristina Mascarenhas Nascimento
B336s Sequência didática para o estudo de uma fórmula de Euler relativa a probabilidade./ Ana Cristina Mascarenhas Nascimento Batista, 2024.
120f.: il.

.

Orientador: Kisnney Emiliano de Almeida
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Feira de Santana. Programa, de Pós-Graduação em Matemática, 2024.

1.Matemática – Ensino-aprendizagem. 2.Sequência didática. 3.Probabilidade. I.Almeida, Kisnney Emiliano de, orient. II.Universidade Estadual de Feira de Santana. III.Título.

CDU: 51:37

Maria de Fátima de Jesus Moreira - Bibliotecária - CRB-5/1120

Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciencias Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação da discente Ana Cristina Mascarenhas Nascimento Batista do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos vinte dias do mês de dezembro de dois mil e vinte quatro, às 14 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: https://meet.google.com/jgh-mknc-qcj da dissertação apresentada sob o título **"SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE UMA FÓRMULA DE EULER RELATIVA À PROBABILIDADE"**, da discente **Ana Cristina Mascarenhas Nascimento Batista**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Kisnney Emiliano de Almeida (Orientador, UEFS), Jacqueline Costa Cintra (UEFS).e Francismar Ferreira Lima (UTFPR) A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores. Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito APROVADA. Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 20 de dezembro de 2024.

Kisnney E. de Almeida

Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida (Orientador, UEFS)

Jacqueline Costa Cintra

Profª. Drº. Jacqueline Costa Cintra (UEFS)

Francismar Ferreira Lima

Prof. Dr. Francismar Ferreira Lima (UTFPR)

Visto do Coordenador: Jean F. R.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE UMA FÓRMULA DE EULER RELATIVA À PROBABILIDADE

Ana Cristina Mascarenhas Nascimento Batista
Orientador: Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida

20 de janeiro de 2025

Agradecimentos

Meu Deus, obrigada pela vida, pela paz que excede todo entendimento, por todas as experiências permitidas e por tudo que pude aprender por meio delas. “Não tenho todas as respostas, mas de uma coisa eu sei: por toda minha vida te adorarei!” (Eyshila)

Meus pais, Manoel e Maria, sou grata pela existência e por serem, em muitos aspectos, exemplos aos quais eu posso seguir!

Meus irmãos e irmãs: André, Andréa, Weliton, Joelma, Joel, Marcelo, Débora, Abraão, Éder, Eliabe, Neilton e Jaziel! Não pedimos para ser tantos, mas com certeza teria uma graça a menos se não fôssemos! Obrigada pela união, por tudo o que conquistamos e o que superamos juntos! Obrigada, Déa, pela revisão ortográfica deste trabalho!

Meu esposo, Raimundo, “na alegria e na tristeza, ...”, obrigada pelo incentivo! Não teria sido possível sem seu apoio. Gratidão imensa!

Minhas filhas, Rayssa e Nayran, obrigada! Sem vocês eu não seria a mesma pessoa. Obrigada, Rayssa, pela verificação do Abstract.

Meu netinho Ryan Miguel, obrigada por ser aquele pra quem a vovó quer ser “sabida”!

Meus amigos, Jonatas (e Chelsea) e Nice (e Luciano), gratidão pelo suporte emocional!

Prof. Dr. Kisnney, meu orientador, obrigada pelas ideias precisas e preciosas e pela compreensão na realização deste trabalho. Já o admirava como professor de Aritmética; admiro-o, agora, ainda mais.

Prof.ª Dr.ª Jacqueline e Prof. Dr. Francismar, obrigada por aceitarem compor a banca de avaliação deste trabalho e pelas valiosas contribuições!

Professores do PROFMAT - UEFS, colegas de curso, obrigada por compartilhar conhecimentos e experiências!

Colegas de trabalho, especialmente os das áreas Matemática e Ciências da Natureza, obrigada pelas nossas sessões de terapia espontânea em grupo nas ACs, pelas amizades e por (na maior parte do tempo) sermos todos por um!

Meus alunos comprometidos, obrigada por tornarem mais significativa a busca por aperfeiçoamento!

“A gratidão é a memória do coração.” (Autor Desconhecido)

Resumo

Este trabalho aborda o processo ensino-aprendizagem em Matemática aplicado a uma sequência didática para o estudo de uma fórmula de Euler relativa à Probabilidade. A abordagem se dá pela utilização de recursos didáticos digitais, pela utilização da história da matemática e pela construção de uma demonstração matemática direta. O uso de recursos digitais potencializa o aprendizado, na medida em que favorece a comunicação entre quem ensina e quem aprende. A história da Matemática pode tornar essa disciplina mais atrativa e interessante, ao atuar como elemento motivador, que favorece a iniciação dos alunos na atividade de pesquisa e facilita a compreensão de conceitos. O contato com a demonstração matemática possibilita o entendimento acerca das particularidades da linguagem desta ciência, bem como a percepção quanto à necessidade de sua utilização.

Palavras-chaves: Ensino-aprendizagem, Sequência didática, Probabilidade.

Abstract

This work addresses the teaching-learning process in Mathematics applied to a didactic sequence for the study of an Euler formula relating to Probability. The approach is based on the use of digital teaching resources, the use of the history of mathematics and the construction of a direct mathematical demonstration. The use of digital resources enhances learning, as it favors communication between those who teach and those who learn. The history of Mathematics can make this subject more attractive and interesting, as it acts as a motivating element, which favors students' initiation into research activities and facilitates the understanding of concepts. Contact with mathematical demonstration makes it possible to understand the particularities of the language of this science, as well as the perception of the need for its use.

Keywords: Teaching-learning, Didactic sequence, Probability.

Sumário

INTRODUÇÃO

A Matemática tem estado presente em todas as épocas e em todas as esferas da vida social, em especial nessa era do conhecimento e da informação, sendo cada vez mais solicitada, até mesmo em áreas profissionais em que anteriormente se imaginava não necessitar dela.

Apesar de ser inegável a sua importância, no Brasil e, em particular, no estado da Bahia, os resultados de avaliações internas mostram que a Matemática é o componente curricular que ocupa o topo do ranking da reprovação escolar, e este problema se revela crescente na medida em que se avança pelos níveis da educação; nas avaliações externas mostram que é Matemática a disciplina em que se tem menor domínio de competências e habilidades.

Desenvolver estratégias didáticas com vistas à reversão desse cenário tem se tornado um desafio para as instituições que se ocupam da organização do sistema de educação, mas, sobretudo, para os professores que lidam diretamente com os efeitos desse problema.

Nas escolas baianas, os conteúdos curriculares que devem ser trabalhados em cada etapa da educação básica são determinados pelo Documento Curricular Referencial da Bahia, o DCRB. Dentre os conteúdos estabelecidos para o 3º ano do Ensino Médio, encontra-se Probabilidade, considerado muitas vezes como um tópico de difícil compreensão e que será tema principal deste estudo.

Este trabalho está estruturado em dois capítulos. No primeiro capítulo, tem-se uma reflexão sobre o processo ensino-aprendizagem em Matemática, tecendo-se considerações acerca da utilização de recursos digitais e da história da Matemática como estratégia didática. São apresentados quatro recursos digitais, com descrição dos passos para elaboração e aplicação de atividades em cada um deles. Quanto à história da Matemática, mostram-se alguns aspectos que justificam a necessidade de sua abordagem, tanto em favor dos alunos quanto dos professores.

O segundo capítulo apresenta o conceito de sequência didática e algumas considerações sobre sua utilização, propondo, em seguida, uma sequência didática para fortalecer a aprendizagem dos conceitos relacionados à Probabilidade, tendo como objetivo geral estudar a fórmula de Euler para o cálculo da probabilidade de ocorrência de três números consecutivos, ao serem retirados aleatoriamente três dentre n bilhetes numerados consecutivamente de 1 a n.

A sequência é desenvolvida em sete aulas, com a seguinte organização:

- ✓ Na aula 1, faz-se revisão das estratégias de contagem, em Rotação por Estações de Aprendizagem, uma metodologia ativa de atividade em grupo;
- ✓ Na aula 2, a revisão é continuada, utilizando-se uma atividade de competição em grupo, por meio da plataforma Socrative, uma ferramenta digital que proporciona a criação de atividades interativas;
- ✓ Na aula 3, são retomados os conceitos básicos relacionados ao estudo de Probabilidade, em dois momentos de atividades: o primeiro, em uma atividade no Mentimeter, uma plataforma digital de apresentações dinâmicas, analisa o conhecimento dos estudantes sobre o contexto que motivou o surgimento da Teoria da Probabilidade e sobre as aplicações desse conhecimento na atualidade, e o segundo avalia o conhecimento sobre a aplicação dos conceitos, em uma atividade na plataforma Kahoot, uma ferramenta digital de aprendizagem baseada em jogos;
- ✓ A aula 4 é destinada à resolução de uma lista de exercícios sobre cálculo de probabilidade de eventos em espaços amostrais equiprováveis;
- ✓ Na aula 5, inicia-se o estudo do problema relacionado à fórmula de Euler, realizando cálculo de probabilidade com auxílio de um material empírico e conjecturando qual dentre dez é a fórmula, através de uma atividade no Wordwall, uma plataforma digital de criação e compartilhamento de jogos de aprendizagem;
- ✓ Na aula 6, apresenta-se a estrutura de uma demonstração matemática, oportunizando-se o contato com alguns exemplos de demonstrações matemáticas diretas;
- ✓ Na aula 7, propõe-se a demonstração da fórmula de Euler, por meio da metodologia de conversa em grupo World Café.

Duas atividades em caráter de metodologias ativas são propostas em atividades da sequência didática: na aula 1, a Rotação por Estações de Aprendizagem, e na aula 7, a Dinâmica World Café. Cada uma está descrita no roteiro da respectiva aula.

Capítulo 1

PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

A evolução das concepções acerca do processo ensino-aprendizagem tem-no feito migrar do status de atividade centrada na figura do professor como detentor e transmissor do conhecimento, este entendido como um conjunto de saberes acabados a serem aceitos e internalizados sem nenhuma reflexão ou questionamento, até às perspectivas atuais que põem no centro do processo o educando como um ser reflexivo e crítico, capaz não apenas de absorver saberes prontos, mas de ser sujeito ativo na construção de seu próprio conhecimento, sendo este conhecimento objeto de transformações constantes.

No Brasil, as tentativas de adequação do sistema educacional a esse novo perfil têm perpassado, prioritariamente, pela elaboração de diretrizes que regulamentem a organização do sistema de ensino em todos os seus níveis. Em 1996, foi promulgada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a LDB, que recebeu algumas alterações ao longo dos anos e, recentemente, foi alterada pela Lei nº 14.533, de 2023, que estabeleceu a Política Nacional de Educação Digital (PNED). Complementarmente à LDB, foram instituídos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que abriram caminho às Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) e por fim, à Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Conquanto sejam indiscutíveis a necessidade e a importância tanto da teorização quanto da regulamentação, a incorporação das novas concepções à prática, entretanto, constitui-se aos sujeitos do processo em um grande desafio, visto que mudanças de atitudes e comportamentos não se dão com a mesma velocidade com que se sistematizam leis ou teorias.

Ao professor, atribui-se a tarefa de mediar a reflexão acerca dos saberes adquiridos, bem como proporcionar a construção de novos conhecimentos, na medida em que conduz os estudantes à descoberta de possibilidades, de caminhos para a concretização dos objetivos de aprendizagem. Ou, como afirma D'Ambrosio (2012, p. 73), "O novo papel do professor será o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção e na crítica de novos conhecimentos.”

Desse modo, o processo ensino-aprendizagem adquire características de uma relação dialógica entre sujeitos, conscientes de si mesmos e do outro, da qual resultam não apenas a aquisição ou a produção do conhecimento, mas, também, o desenvolvimento das habilidades necessárias para sua utilização no contexto social.

Como processo social que é, a geração de conhecimento é contínua e sua comunicação é influenciada por cada indivíduo em particular e pelos grupos sociais por eles constituídos. D'Ambrosio (2012, p. 63) conceitua educação como “uma estratégia da sociedade para facilitar que cada indivíduo atinja o seu potencial e para estimular cada indivíduo a colaborar com outros em ações comuns na busca do bem comum.”

Há que perguntar, então: Que papel pode exercer nessa busca, ou como pode contribuir com ela, a manifestação social denominada Matemática? Do ponto de vista dos indivíduos, a Matemática pode enquadrar-se nesse objetivo contribuindo para o desenvolvimento do pensamento lógico, ajudando-os a compreender os fenômenos à sua volta e a adquirir a autoconfiança gerada pela capacidade de buscar soluções para situações-problema; do ponto de vista dos grupos sociais, a Matemática fornece recursos ou ferramentas que lhes permitem a realização de transações e operações, com vistas à resolução de problemas inerentes à vida em sociedade.

Paradoxalmente ao reconhecimento de sua importância e utilidade social,

> (...) a Matemática é tida socialmente como uma ciência fria, difícil, abstrata e inumana. (...) a imagem pública da Matemática, devido ao seu significado social, é um valor para se ter em conta quando falamos de Educação Matemática. A Matemática serve como “filtro” crítico para controlar o acesso a muitas áreas de estudos avançados e a trabalhos com mais êxito e mais bem remunerados. Se a imagem da Matemática é, pois, considerada um obstáculo quase intransponível a muitas carreiras e impede a total participação na moderna sociedade democrática, então essa imagem é um grande mal social (CORRÊA, 2009, p. 93).

No contexto estritamente escolar, para a maioria dos alunos a Matemática se constitui numa ciência puramente abstrata e distante, um conjunto de símbolos, regras e teorias sem sentido próprio, e sua aprendizagem, quando aceitável, justifica-se como a possibilidade da aquisição de um instrumental indispensável, que habilita o estudante para solucionar questões propostas por outros componentes curriculares que se utilizam dos recursos por ela fornecidos.

Há um sentimento bastante perceptível de que, na maioria das vezes, não se tem obtido êxito quanto à realização dos propósitos da aprendizagem. Paralela a uma espécie de confissão de incapacidade para aprender Matemática entre muitos estudantes, há uma sensação de fracasso manifesta por boa parte dos educadores.

Sobre solução para essa problemática, segundo Santos (2009, p. 127), a resposta mais plausível é a de que “não existem soluções mágicas, mas a disposição, tanto nossa quanto dos alunos, e o estabelecimento de uma parceria no processo de ensinar e aprender Matemática podem ajudar a minimizar conflitos".

Também Lopes (2009, p. 46) compartilha desse pensamento: "(...) as tendências inovadoras pressupõem que a educação está articulada à ideia de 'compromisso', ou seja, de um 'fazer coletivo'. Compromisso pressupõe atitude crítica, dialógica, responsável, para produzir algo novo."

De acordo com Muniz (2007, p. 8), compete ao professor de Matemática o papel de contribuir para a reconstrução da imagem de representação social dessa disciplina.

> (...) ser professor desta área deve implicar a mudança dessas representações como, por exemplo, a disponibilidade e a vontade de participar de um movimento internacional de reconstrução da imagem do que é a matemática, de como se aprende matemática, de onde e quando se desenvolve a atividade matemática, como o conhecimento matemático participa da constituição do ser humano, assim como a consciência do papel do professor na capacitação e no desenvolvimento da cidadania para a participação efetiva do indivíduo em sua cultura e em sua história (MUNIZ, 2007, p. 8).

Ainda segundo Muniz (2007, p. 10), "a matemática deve ser um instrumento privilegiado para a construção da autoestima e autoconfiança de cada um em aceitar e enfrentar verdadeiros desafios que não devem se limitar a situações e exercícios escolares estritamente didáticos."

Lara (2022, p. 74) apresenta como alternativa para o alcance de metas de aprendizagens mais palpáveis "a escolha combinada de diferentes estratégias educacionais pautadas em objetivos educacionais bem-definidos ou em um perfil de competência a ser desenvolvido". Dentre as estratégias a que se refere, a autora destaca a utilização das metodologias ativas de aprendizagem e a integração das tecnologias digitais às práticas educativas.

Para D'Ambrosio (2012, p. 27), a história da Matemática pode servir como um importante elemento motivador da aprendizagem, num momento sociocultural e educacional em que se torna cada vez mais difícil motivar alunos para o que ele chama de uma ciência cristalizada.

1.1 SOBRE A UTILIZAÇÃO DE RECURSOS DIGITAIS

Na denominada era do conhecimento, a tecnologia tem possibilitado o movimento da informação com tamanha rapidez que se lhe pode atribuir características tais como universalidade e instantaneidade. Tais características, por consequência, demandam aptidão para lidar adequadamente com essas informações, não só no sentido de processá-las, mas também fazer com que boa parte delas venha a se transformar efetivamente em conhecimento.

> No nosso dia a dia, temos crescente contato com aparelhos eletrônicos, informações, telas e luzes, entre outros aspectos que influenciam diretamente o aprendizado, ou seja, as maneiras de ensinar e aprender e os modos como os sujeitos aprendem estão cada vez menos associados a processos que ocorrem exclusivamente em salas de aula tradicionais (LUCHESI; LARA; SANTOS, 2022, p. 11).

Sobre o avanço e a velocidade com que se disseminam as tecnologias de informação e comunicação (TICs) na sociedade, Garcia et al. (2011, p. 79) pontuam: “Ao longo do tempo, têm a capacidade de mudar o comportamento das pessoas e podem gerar um descompasso entre as gerações de quem ensina e quem aprende.” E prosseguem expondo a necessidade de “criar consistentemente uma nova cultura do magistério na perspectiva de que o uso das tecnologias não seja algo exógeno à docência, mas inerente a ela e necessário ao processo abrangente de formação integral do ser humano.” (GARCIA et al., 2011, p. 80).

Chiari (2018, p. 352) observa que “(...) as tecnologias digitais mudaram a forma como pensamos, como agimos e como fazemos nossas atividades. (...) Assim também acontece com a aprendizagem, em particular com a aprendizagem matemática.”

> A utilização das tecnologias digitais na educação visa, fundamentalmente, potencializar o aprendizado dos alunos, através de uma melhor organização e acesso ao conhecimento digitalmente disponível ou através de ferramentas ampliadas de comunicação, interação e difusão do conhecimento, largamente utilizadas pelos jovens nos tempos atuais. Ressaltamos que para além de encarar a tecnologia como simples suporte pedagógico, defendemos o seu uso na educação como possibilidade significativa de melhorar e contribuir para o desenvolvimento educacional dos alunos, com ênfase no acompanhamento do modo como os sujeitos se apropriam dela em seu processo de conhecer (GARCIA et al., 2011, p. 86).

Em janeiro de 2023, a Lei 14.533 instituiu a Política Nacional de Educação Digital, alterando o artigo 4º da LDB, do qual os incisos descrevem critérios cuja garantia efetiva o dever do Estado com a educação escolar pública; aos critérios já existentes foi acrescentado, pela inclusão do inciso XII:

> Educação digital, com a garantia de conectividade de todas as instituições públicas de educação básica e superior à internet em alta velocidade, adequada para o uso pedagógico, com o desenvolvimento de competências voltadas ao letramento digital de jovens e adultos, criação de conteúdos digitais, comunicação e colaboração, segurança e resolução de problemas (BRASIL, 2023).

De acordo com o parágrafo único também inserido, “as relações entre o ensino e a aprendizagem digital deverão prever técnicas, ferramentas e recursos digitais que fortaleçam os papéis de docência e aprendizagem do professor e do aluno e que criem espaços coletivos de mútuo desenvolvimento. (NR)” (BRASIL, 2023).

No entanto, como se sabe, a efetivação dessas ações não se dará com a rapidez que a causa inspira. Enquanto isso, os professores vão se organizando como podem, ainda que não seja possível a plena incorporação dos recursos tecnológicos modernos à sua prática pedagógica diária, empenham-se em desenvolver ações, mesmo que pontuais, com vistas a reduzir a distância entre sua prática pedagógica e o contexto social em que esta se encontra inserida.

Para o desenvolvimento da sequência didática proposta neste trabalho serão utilizados alguns recursos digitais, já experimentados na prática pedagógica desta autora, os quais estão relacionados a seguir. Em seguimento à descrição de cada um, tem-se um conjunto de instruções para sua utilização no que se refere tanto à construção quanto à aplicação de atividades.

1.1.1 Kahoot

Kahoot é uma plataforma digital de aprendizagem baseada em jogos, utilizada como um recurso educacional que permite a criação e o compartilhamento de atividades, chamadas kahoots, com potencial para despertar motivação e engajamento dos estudantes. Pode ser utilizado em aulas presenciais ou online ou, ainda, como uma ferramenta para atribuição de atividades extraclasse. A plataforma pode ser acessada através de um navegador da Web ou do aplicativo Kahoot.

Esse recurso será utilizado na Aula 3 da Sequência Didática.

Dois sites são utilizados para acesso à plataforma:

✓ Para criar e administrar um jogo: Kahoot!;

✓ Para participar como jogador: Kahoot.it.

Como elaborar e aplicar uma atividade no Kahoot

1. Acesse o site KAHOOT!, em https://kahoot.com/pt/. Caso não deseje continuar a navegação na língua inglesa, você pode clicar com o botão direito do mouse na opção **Traduzir para o português**. Se já for inscrito, clique em **Fazer login**; caso contrário, clique em **Inscrever-se** (Fig 1.1).

2. Clicando em **Inscrever-se**, será direcionado para os planos de pagamento. Se não tiver interesse em contratar algum dos planos, clique em **Continuar de graça**, no canto inferior direito (Fig 1.2).

3. Você será direcionado para a página (Fig 1.3) em que é possível:

    - Criar um Kahoot, a partir do zero, ou utilizando um dos modelos disponíveis em botões na lateral direita da página;

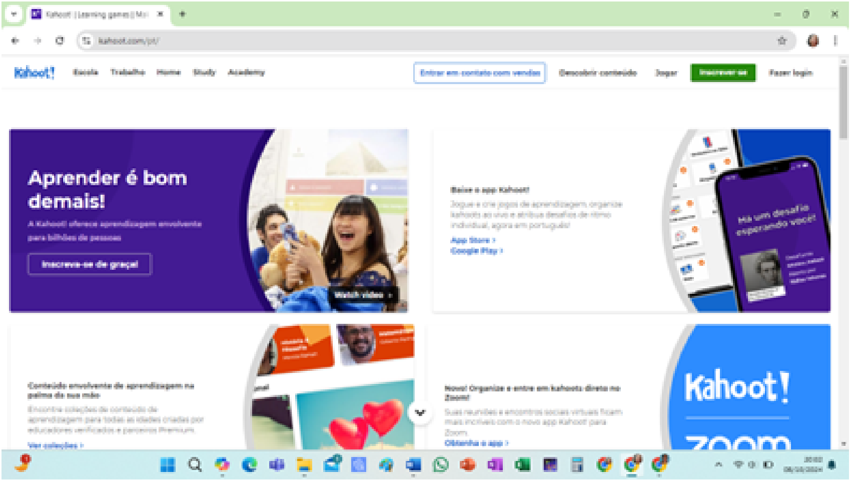


Figura 1.1: Kahoot$_1$

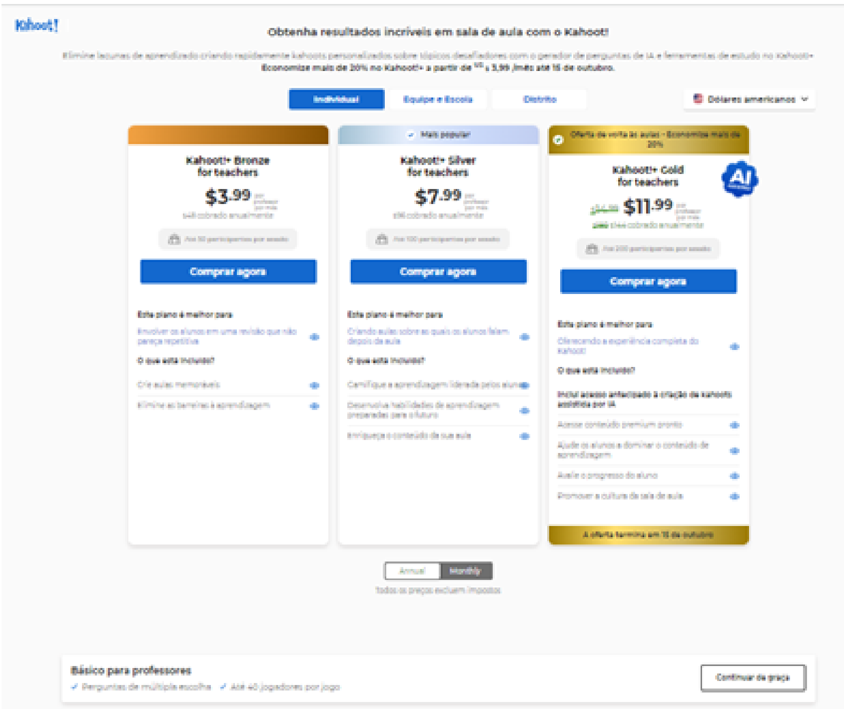


Figura 1.2: Kahoot$_2$

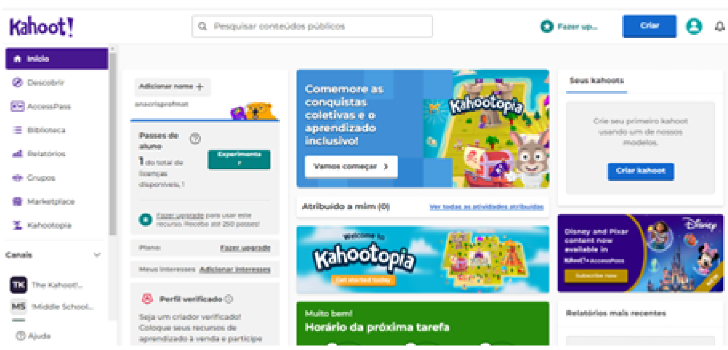


Figura 1.3: Kahoot$_3$

- Acessar os conteúdos criados por outros usuários que tenham deixado atividades no modo público, clicando no botão **Descobrir**, no menu da lateral esquerda da página, ou, simplesmente, digitando um assunto na barra de pesquisa, na aba superior da página;
- Acessar os conteúdos criados anteriormente por você, se existirem, clicando no botão **Biblioteca**, no menu da lateral esquerda da página.

4. Clicando em **Criar**, será aberta uma janela lateral com as opções de formato da atividade a ser criada (Fig 1.4). Na aula 1 desta sequência didática, foi utilizado o modelo Kahoot.

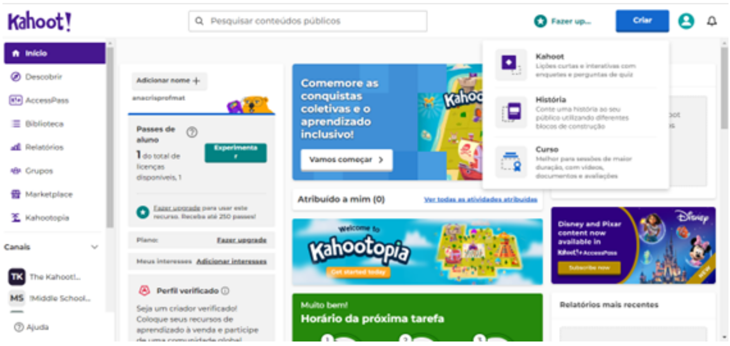


Figura 1.4: Kahoot$_4$

5. Clicando, então, na opção **Kahoot**, será aberta uma janela central com as possibilidades de pontos de partida para a criação da atividade. Na aula 1 desta sequência didática, foi utilizada a opção **Tela em branco** (Fig 1.5).

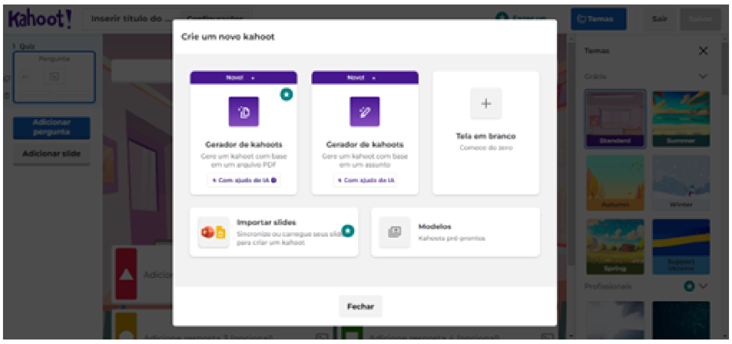


Figura 1.5: Kahoot$_5$

6. Clicando em **Tela em branco**, surge a página de criação da atividade, sendo possível manter a aparência inicial, ou substituí-la, na opção **Temas**, um dos botões na lateral superior direita (Fig 1.6).

7. Escolhido o tema, fecha-se a janela desse recurso e surgem as primeiras opções de configuração do conteúdo da atividade (Fig 1.7). Deslizando a barra de rolagem à direita, são visualizadas as demais opções (Fig 1.8).

Figura 1.6: Kahoot$_6$

Figura 1.7: Kahoot$_{7.1}$

Figura 1.8: Kahoot$_{7.2}$

Para cada pergunta, é possível escolher que opção de modelo será aplicada. No modo gratuito, há apenas as opções **Quiz** e **Verdadeiro ou Falso**; ainda assim, o recurso é bastante interessante e capaz de provocar engajamento dos alunos.

8. Criando pergunta no modelo Quiz (Fig 1.9):

   (a) Clique no campo para inserção da pergunta. Observe que surge, ao centro acima do campo de digitação, uma aba com as opções de recursos da linguagem matemática, que serão utilizados a depender da natureza do conteúdo da pergunta. O mesmo acontece para digitação das alternativas de resposta;

   (b) Digite a pergunta (em, no máximo, 120 caracteres) e as alternativas de resposta (cada uma em, no máximo, 75 caracteres) nos campos indicados, sinalizando

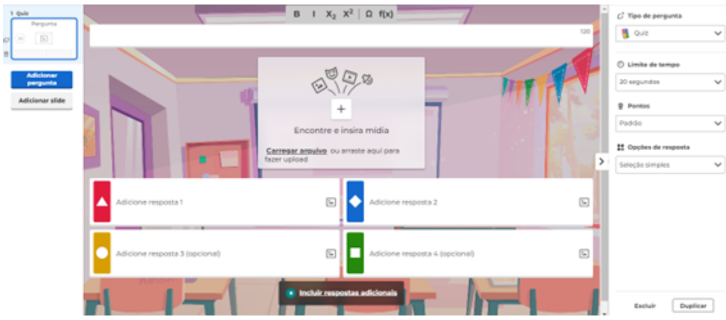


Figura 1.9: Kahoot$_{8.1}$

com um clique a alternativa de resposta correta. São 4 alternativas por padrão, sendo que, nos planos pagos, é possível acrescentar alternativas adicionais;

(c) Acrescente, se desejar, imagem ou outro tipo de mídia, tanto à pergunta quanto às alternativas de resposta, buscando o recurso na internet ou fazendo upload dele em seu equipamento;

(d) Utilizando as opções na lateral direita da página, defina o tempo limite para a resposta (tempos mínimo e máximo respectivamente iguais a 5 segundos e 4 minutos), a forma de pontuação atribuída (padrão, dupla ou sem pontuação) e as opções de resposta (por padrão, seleção simples; em planos pagos, é possível selecionar a forma múltipla escolha);

(e) Para criar outra pergunta, clica-se no botão **Adicionar pergunta**, na lateral esquerda da página, e segue-se os passos já descritos para sua formatação.

Exemplo de pergunta elaborada no modelo Quiz: (Fig 1.10).

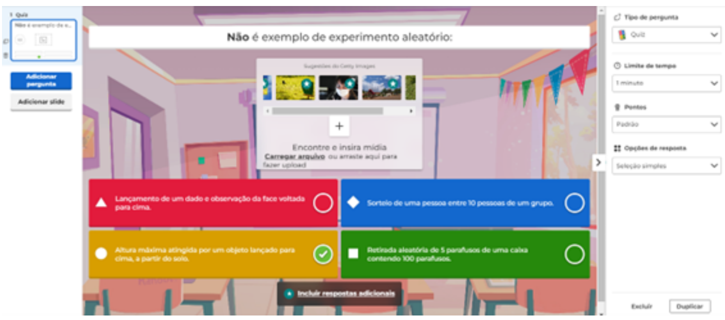


Figura 1.10: Kahoot$_{8.2}$

9. Criando pergunta no modelo Verdadeiro ou falso (Fig 1.11):

(a) Digite a pergunta (em, no máximo, 120 caracteres) e acrescente-lhe, se desejar, imagem ou outro tipo de mídia, buscando o recurso na internet ou fazendo upload dele em seu equipamento;

(b) Sinalize com um clique a alternativa de resposta correta;

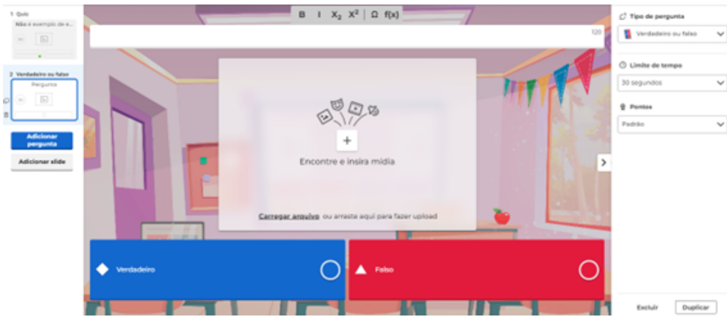


Figura 1.11: Kahoot$_{9.1}$

(c) Utilizando as opções na lateral direita da página, defina o tempo limite para a resposta (tempos mínimo e máximo respectivamente iguais a 5 segundos e 4 minutos) e a forma de pontuação atribuída (padrão, dupla ou sem pontuação);

(d) Para criar outra pergunta, clica-se no botão **Adicionar pergunta**, na lateral esquerda da página, e segue-se os passos já descritos para sua formatação.

Exemplo de pergunta elaborada no modelo Verdadeiro ou falso: (Fig 1.12).

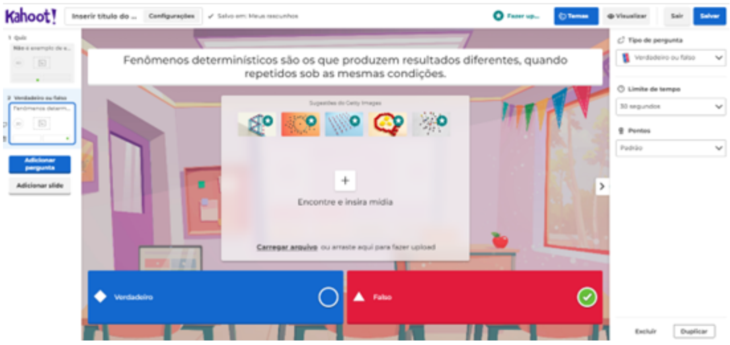


Figura 1.12: Kahoot$_{9.2}$

Observação: é possível modificar a ordem das perguntas criadas, pressionando o cursor em qualquer uma delas, na lateral esquerda da tela de criação, e arrastando-a para cima ou para baixo.

10. Clicando em **Configurações** (na lateral esquerda da aba superior), abre-se uma janela em se pode definir o título (em, no máximo, 76 caracteres) do Kahoot, inserir uma descrição (em, no máximo, 500 caracteres), definir o critério de visualização (privado ou público), adicionar imagem de capa, definir a pasta onde será salvo e o idioma do Kahoot. Ao concluir as configurações, clica-se no botão Pronto, na lateral superior direita da aba (Fig 1.13).

11. Durante a edição, é possível verificar o resultado do trabalho clicando no botão Visualizar, na lateral direita da aba superior (Fig 1.14).

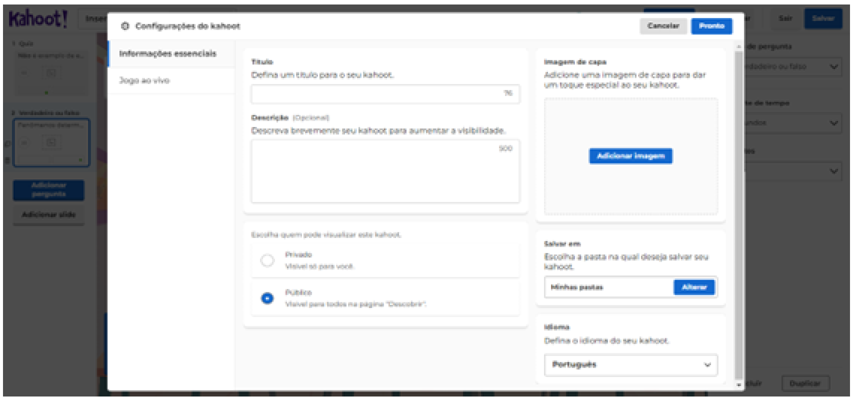


Figura 1.13: Kahoot_{10}

Figura 1.14: Kahoot_{11}

12. Em qualquer que seja o modelo de questão em que se esteja trabalhando, na lateral direita inferior da página, há os botões: **Excluir**, onse se exclui a pergunta em que se está trabalhando, e **Duplicar**, que duplica a pergunta atual e é bastante útil quando se pretende criar uma questão semelhante à anterior, dispensando a digitação da pergunta, demandando apenas que se façam as alterações necessárias.

13. Clicando no botão **Salvar**, na parte superior da lateral direita, abre-se uma janela com opções de aplicação do jogo: executar um teste; organizar ao vivo; compartilhar o link com outros organizadores e organizar ao vivo em equipe (Fig 1.15).

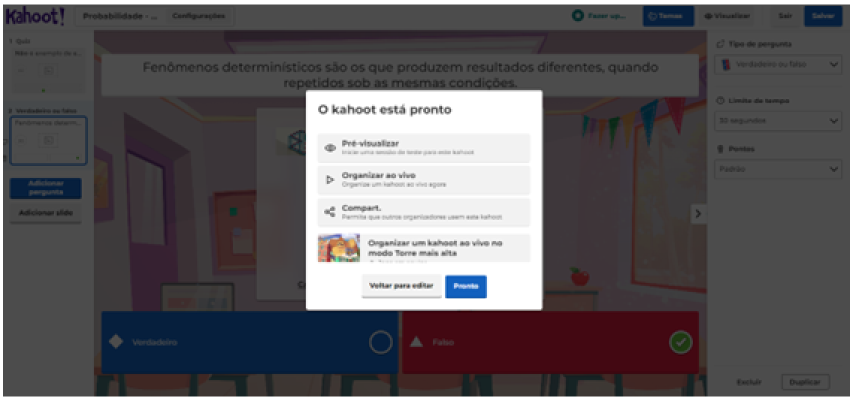


Figura 1.15: Kahoot_{13}

14. Se não desejar executar nenhuma das opções no momento, basta clicar em **Voltar para editar**, para voltar à tela de elaboração das perguntas, ou em **Pronto**, para fechar a edição e ir à Biblioteca, onde se visualizam todos os Kahoots já elaborados (Fig 1.16) e a partir de onde se pode atribuir o jogo a participantes, organizar ao vivo ou voltar à edição, ou executar outras ações disponíveis ao se clicar nos três pontos dispostos verticalmente na lateral direita da página (Fig 1.17).

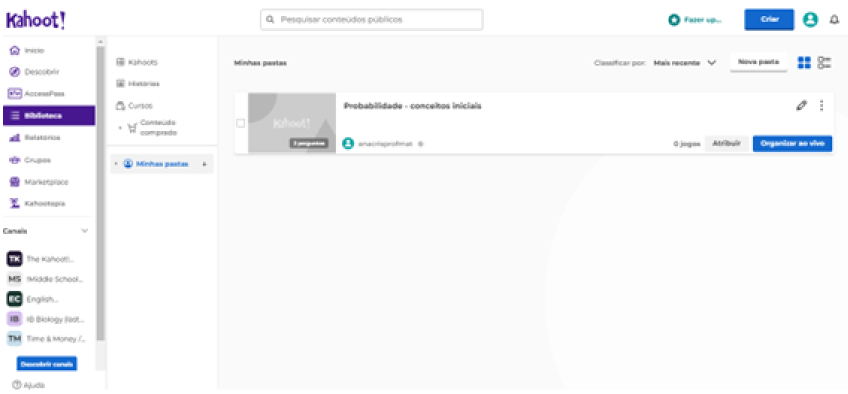


Figura 1.16: Kahoot$_{14.1}$

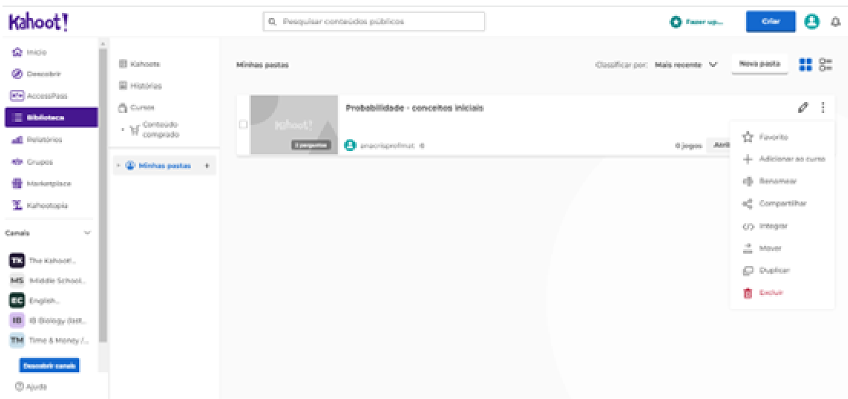


Figura 1.17: Kahoot$_{14.2}$

15. Organizando um Kahoot ao vivo (pode-se utilizar um projetor de slides ou espelhar o jogo do computador para uma TV):

    (a) Ao clicar no botão correspondente, direciona-se à página em que se pode definir as configurações do jogo e dar início à partida. No modo gratuito, é possível jogar ao vivo com até 40 jogadores; em plano individual pago, com até 400 jogadores (Fig 1.18).

    (b) Clicando no botão de **Configurações**, no canto inferior direito, abre-se uma janela lateral com diversas especificações, que podem ser atribuídas à partida (Fig 1.19, Fig 1.20).

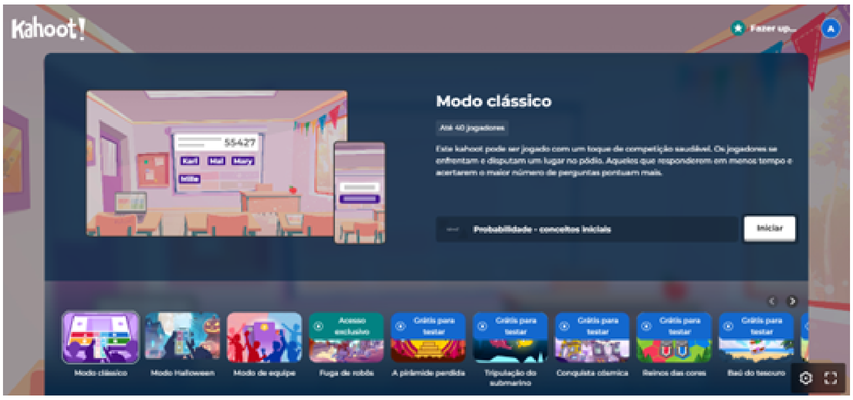


Figura 1.18: Kahoot$_{15.1}$

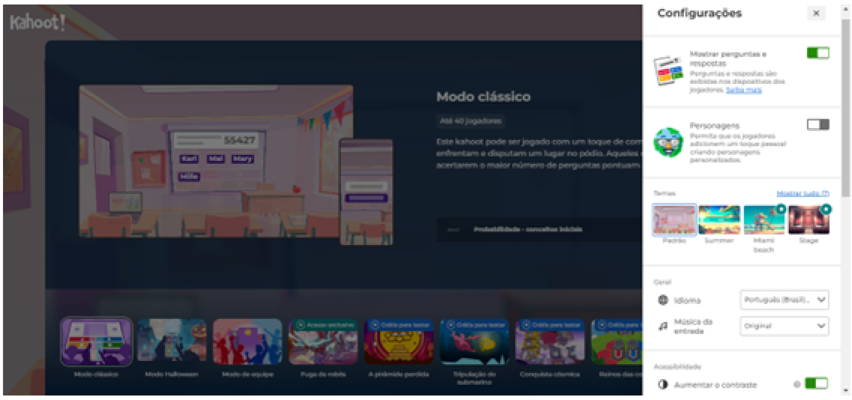


Figura 1.19: Kahoot$_{15.2}$

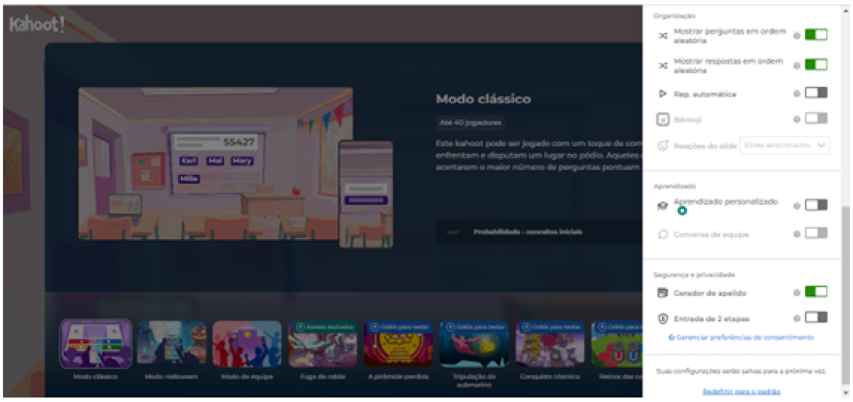


Figura 1.20: Kahoot$_{15.3}$

Observações:
- É recomendável ativar a opção **Mostrar perguntas e respostas nos dispositivos dos jogadores**; se não o fizer, as perguntas serão exibidas apenas para o organizador, e os jogadores precisarão deslocar constantemente o olhar entre a tela de projeção e o seu dispositivo, o que pode gerar desconforto visual;

- Ativando a opção **Aumentar o contraste**, ajusta-se a cor da caixa de resposta, para tornar o texto mais legível;

- A música de entrada (reproduzida ao longo da partida, no equipamento do organizador e nos dispositivos dos jogadores) por padrão é a original do Kahoot; clicando na seta da caixinha correspondente, existem diversas outras opções, de variados estilos musicais, incluindo alguns ritmos temáticos de datas comemorativas;

- O botão **Mostrar perguntas em ordem aleatória** aparece duplicado: o primeiro refere-se a embaralhar as perguntas na primeira oportunidade de aplicação do jogo; o segundo, para o caso em que se aplica o jogo pela segunda vez, com possibilidade de repetição de jogadores;

- Ativando o botão **Reprodução automática**, a passagem de uma pergunta para a seguinte é feita automaticamente, após finalizado o tempo anteriormente definido para a resposta; não ativando, o organizador deverá dar o comando para avançar de uma pergunta para a próxima.

(c) Concluídas as configurações, clica-se em **Iniciar** e abre-se a tela com as possibilidades de acesso ao jogo: pelo link do site (Kahoot.it) ou utilizando aplicativo e digitando o PIN do jogo no campo específico; ou capturando o QR Code com a câmera do smartphone (Fig 1.21).

Figura 1.21: $\text{Kahoot}_{15.4}$

Se o jogo não for aplicado apenas como entretenimento, é recomendável que o professor solicite aos alunos que insiram o primeiro nome no campo destinado à digitação do **Apelido**, para que possa identificá-los por ocasião da vista dos relatórios. Se houver alunos com primeiros nomes iguais, adota-se outro critério para a identificação (por exemplo, incluir um sobrenome), observando que o apelido não deve ultrapassar 15 caracteres, incluindo espaçamentos.

(d) Visão dos jogadores: (Fig 1.22).

(e) À medida que os jogadores vão se conectando, seus apelidos são registrados no centro da tela do jogo e a quantidade de jogadores aparece no canto inferior direito da tela, podendo o organizador dar partida quando desejar, clicando

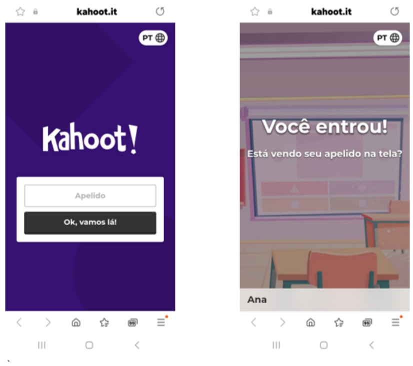


Figura 1.22: Kahoot$_{15.5}$

em **Iniciar**. O organizador pode clicar no ícone de cadeado, para impedir que outros jogadores acessem o jogo após iniciado (Fig 1.23).

Figura 1.23: Kahoot$_{15.6}$

(f) Após todas as perguntas, ao avançar pela última vez, surge a tela do pódio, em modo de animação, com os três jogadores de melhor desempenho, considerando-se o número de acertos e tempo de resposta (Fig 1.24).

Figura 1.24: Kahoot$_{15.7}$

16. Atribuindo um Kahoot: Quando não se desejar ou não for possível organizar um Kahoot ao vivo, pode-se usar o modo Kahoot atribuído, o que é possível seguindo os passos:

(a) Acesse o jogo, clicando em **Biblioteca**, caso queira um jogo criado por você, ou clicando em **Descobrir**, para buscar um jogo que outro usuário da plataforma tenha deixado como público. Clique em **Atribuir** e abrir-se-á uma janela para definição de especificações, tais como data e horário limite para que o jogo seja concluído pelos jogadores. Assim como no modo ao vivo, utilizando o plano gratuito, é possível atribuir um Kahoot para até 40 jogadores; em plano individual pago, para até 400 jogadores (Fig 1.25).

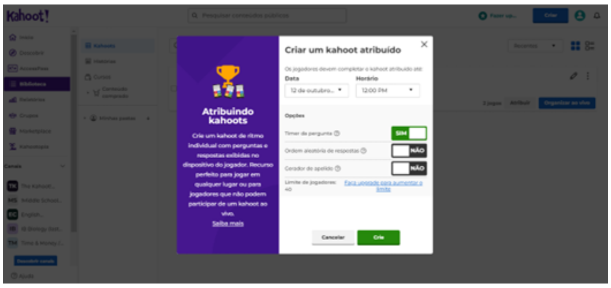


Figura 1.25: Kahoot$_{16.1}$

(b) Definidas as especificações, clique em **Crie** para abrir a tela onde são exibidas as maneiras de convidar os jogadores. São elas: **QR Code**, **PIN do jogo** ou **URL do jogo** (Fig 1.26).

Figura 1.26: Kahoot$_{16.2}$

Qualquer desses recursos pode ser copiado para compartilhamento pelo canal de comunicação de sua preferência. Clicando em **Convidar**, será direcionado a alguns canais específicos, incluindo o Google Classroom, recurso já utilizado por muitos professores (Fig 1.27). Escolhido o canal de sua preferência, será direcionado a ele e concluirá o envio do convite, conforme as ações especificas de utilização do canal.

(c) Independentemente da aplicação do Kahoot ao vivo ou atribuído, os resultados do jogo podem ser consultados em **Relatórios**, botão na lateral esquerda da página. Clicando nesse botão, serão exibidos todos os jogos realizados. Seleciona-se o jogo do qual se deseja consultar os resultados, que poderão ser analisados considerando critérios diversos, conforme a opção escolhida:

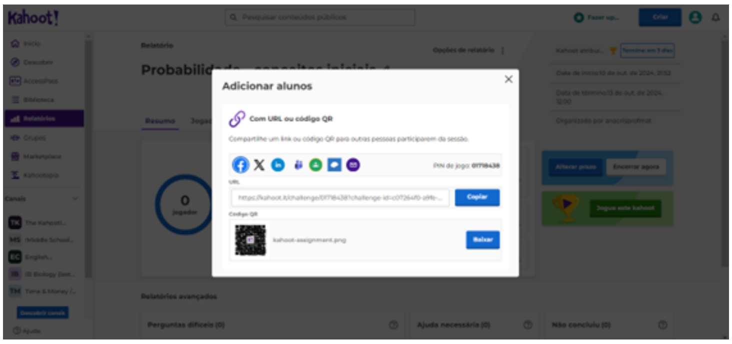


Figura 1.27: Kahoot$_{16.3}$

– **Resumo**: Visão geral do desempenho dos alunos, sinalizando as perguntas recorrentemente respondidas erradas, caso tenham existido, bem como os alunos que necessitam de ajuda por terem acertado menos de 35% das perguntas (Fig 1.28);

Figura 1.28: Kahoot$_{16.4}$

– **Jogadores**: lista de jogadores, que pode ser ordenada conforme a colocação dos nomes em ordem alfabética; a classificação dos jogadores, considerando acertos e tempo de resposta; o percentual de respostas corretas; o número de perguntas não respondidas e a pontuação final (Fig 1.29);

Figura 1.29: Kahoot$_{16.5}$

– **Perguntas**: relação das perguntas, que pode ser ordenada conforme a ordem crescente ou decrescente da numeração; o tipo (modelo da pergunta);

o percentual de respostas corretas ou de incorretas. As perguntas podem ser listadas no modo de visualização expandida (Fig 1.30) ou compacta (Fig 1.31). Na visualização expandida listam-se as perguntas e as respectivas alternativas de respostas, bem como o número de respostas obtidas em cada alternativa; já na visualização compacta, listam-se as perguntas e o percentual de acerto/erro de cada uma.

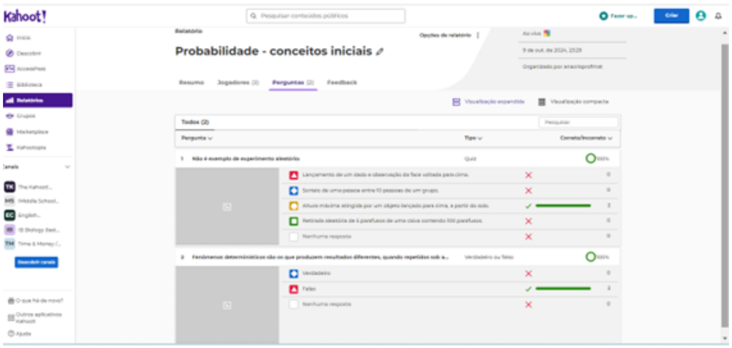


Figura 1.30: Kahoot16.6

Figura 1.31: Kahoot16.7

17. Clicando-se em **Opções de Relatório**, é possível baixar, imprimir ou excluir o relatório.

Para mais informações, acesse:

✓ Como fazer um kahoot: Guia completo (SUPORT.KAHOOT);

✓ KAHOOT: Como usar nas aulas presenciais ou online (DIAMANTINO, 2019).

1.1.2 Mentimeter

Mentimeter é uma plataforma digital onde se podem criar apresentações dinâmicas, com retorno em tempo real da interação entre o apresentador e a audiência. Seu maior benefício é justamente o de criar interações para grandes grupos e tornar isso visível para todos. É bastante útil para a realização de enquetes e votações, pesquisas de opinião e verificação de conhecimento prévio acerca de determinado assunto.

Esse recurso será utilizado na Aula 3 da Sequência Didática.

Como elaborar e aplicar uma atividade no Mentimeter

1. Acesse o site MENTIMETER, em https://www.mentimeter.com/pt-BR. Clique em **Ir ao início**.

2. Se já possuir cadastro, clique em **Conecte-se**; caso contrário, clique em **Cadastre-se** (Fig 1.32) e, seguindo as instruções, faça seu registro (Fig 1.33).

Figura 1.32: Mentimeter$_{2.1}$

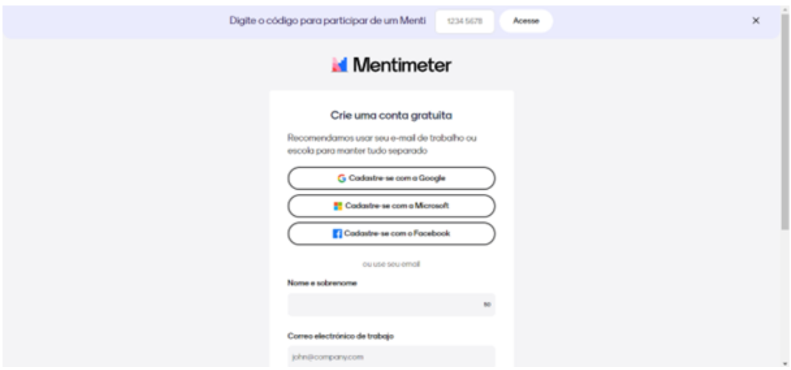


Figura 1.33: Mentimeter$_{2.2}$

3. Tendo feito o login, você pode criar uma apresentação, optando por um dos modelos descritos como recursos populares, no centro da página, ou clicando na opção **Novo Menti**, na aba inferior (Fig 1.34). Para a atividade da Aula 3 desta sequência didática, foi utilizado o modelo **Nuvem de palavras**.

   Observação: Existem recursos disponíveis apenas para assinantes de determinados planos do programa, mas há vários recursos disponíveis gratuitamente.

4. Caso opte por **Novo Menti**, clicando no respectivo botão, surgirão duas possibilidades de atividades: **Novo teste** ou **Nova pesquisa** (Fig 1.35).

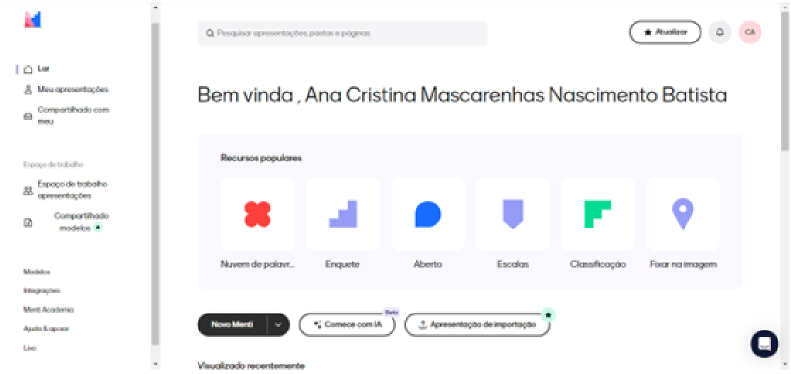


Figura 1.34: Mentimeter$_3$

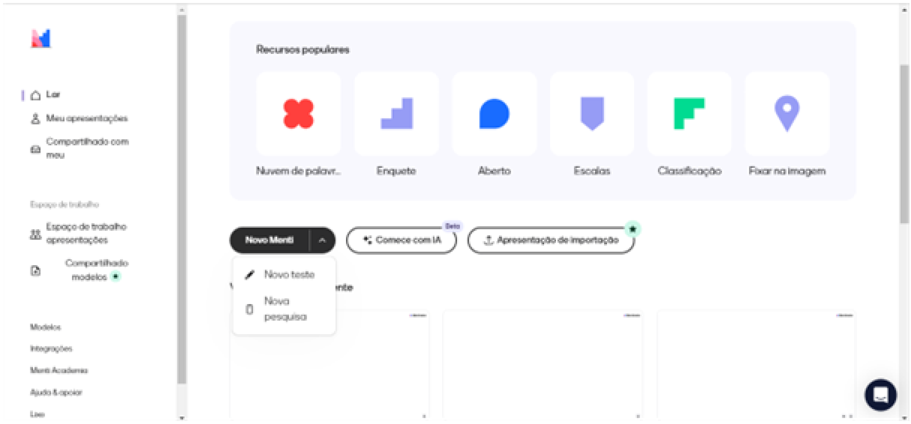


Figura 1.35: Mentimeter$_4$

5. Independentemente do caminho escolhido (recurso popular ou novo menti) para criar uma apresentação, haverá a opção de começar do zero ou escolher um modelo pronto (Fig 1.36). Na atividade da aula 1, foi feita a opção por começar uma nuvem de palavras em branco.

Figura 1.36: Mentimeter$_5$

6. Clicando em **Nuvem de palavras em branco**, abre-se a tela de criação da atividade, com um slide inicial (Fig 1.37); clicando no campo indicado por um retângulo

para digitar a questão (que deve conter até 150 caracteres), surgem ferramentas de edição do texto e inserção de elementos como link, contexto e detalhes adicionais (estes aparecerão apenas nos dispositivos dos alunos).

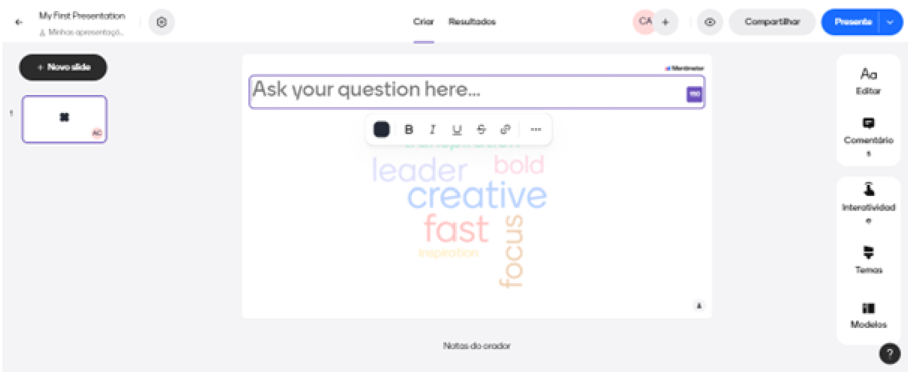


Figura 1.37: Mentimeter$_6$

7. Na lateral direita, por meio do botão **Editar** (Fig 1.38), é possível editar o slide em relação ao modelo da questão, ao tamanho da fonte usada no texto e à inserção de imagem. Deslizando a barra de rolagem (Fig 1.39), visualizam-se os botões de opção entre os dois modos, não mutuamente excludentes, de acesso à apresentação: barra de instruções com código numérico, na parte superior do slide, ou QR Code, no canto inferior esquerdo.

Figura 1.38: Mentimeter$_{7.1}$

Clicando em **Interatividade**, é possível inserir botões, por meio dos quais os alunos poderão interagir, expressando reações através de figurinhas ou digitando perguntas para solucionar dúvidas que, porventura, surjam no decorrer da apresentação (Fig 1.40).

8. Concluído o primeiro slide, você pode adicionar outro, clicando em botão na lateral esquerda superior da página (Fig 1.41), mantendo o formato e as configurações do anterior ou optando pela adoção de novo formato ou novas configurações.

Figura 1.39: Mentimeter$_{7.2}$

Figura 1.40: Mentimeter$_{7.3}$

Figura 1.41: Mentimeter$_8$

9. O trabalho é salvo automaticamente. É possível nomear a apresentação, clicando no retângulo que aparece no canto superior esquerdo (Fig 1.42).

10. Também no canto superior esquerdo, há o botão de **Configurações**, por meio do qual é possível definir se a apresentação será aplicada no modo ao vivo, ou cada aluno no seu próprio tempo, em que idioma a apresentação aparecerá para os alunos, além de aspectos relacionados à acessibilidade visual (Fig 1.43).

11. Para apresentar os slides e aplicar a atividade, clique no botão **Presente**, no canto superior direito, e, em seguida, na opção **Presente** (Fig 1.44).

Figura 1.42: Mentimeter$_9$

Figura 1.43: Mentimeter$_{10}$

Figura 1.44: Mentimeter$_{11}$

12. A apresentação será aberta em tela cheia (Fig 1.45). Se precisar desfazer o modo tela cheia, basta clicar na tecla Esc. A transição entre os slides é feita clicando-se nas setas no canto inferior esquerdo.

13. Se a apresentação for feita ao vivo, projetando os slides através de datashow ou por espelhamento da imagem em uma TV, os alunos optarão entre utilizar a câmera do smartphone para capturar o QR Code ou acessar o site do Mentimeter, digitar o código informado e, em seguida, clicar no botão Acesse. Feito o acesso, a questão que estiver sendo projetada aparecerá para que o aluno envie de 1 a 3 opções de resposta, cada opção com, no máximo, 25 caracteres. Poderá, também, clicar nos ícones das interações disponíveis (Fig 1.46).

14. As respostas enviadas aparecerão na tela da apresentação, por meio de texto em diversas direções e cores; as respostas recorrentes vão recebendo destaque pelo au-

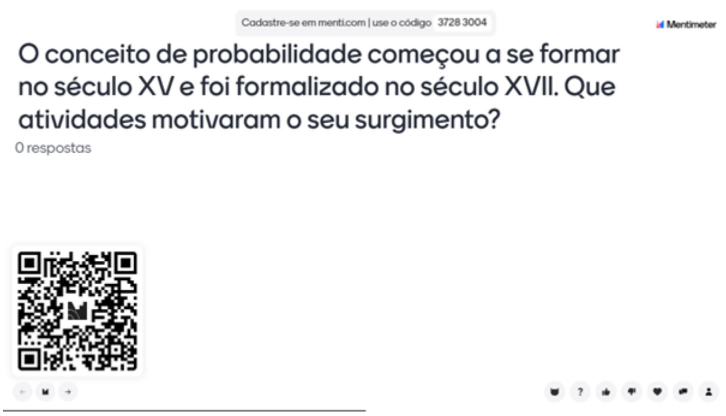


Figura 1.45: Mentimeter$_{12}$

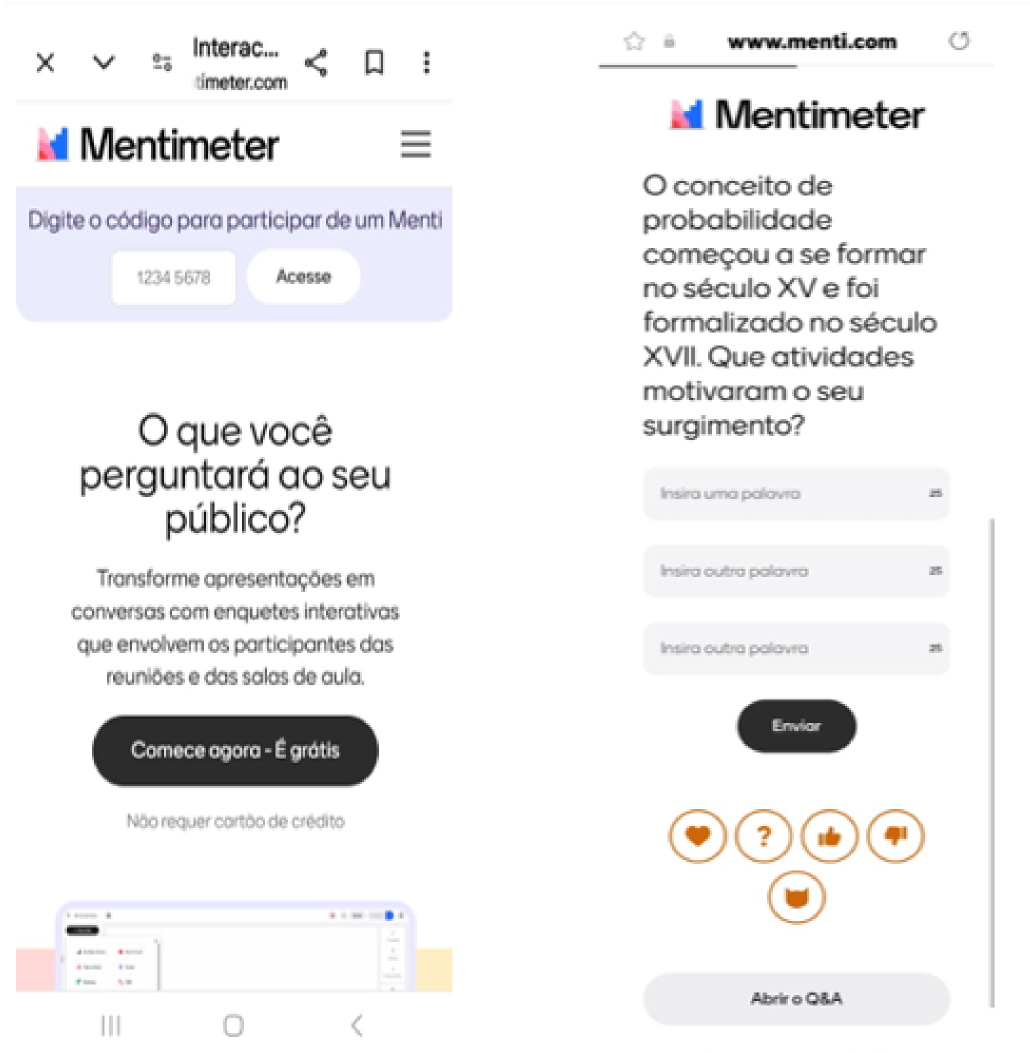


Figura 1.46: Mentimeter$_{13}$

mento progressivo do tamanho da fonte.

Os resultados poderão ser consultados na tela de apresentação, clicando em **Resultados**, na região central da aba superior (Fig 1.47), ou em **Ver resultados**, ao lado direito do nome da apresentação, após clicar em **Meu Apresentações** na página inicial (Fig 1.48).

Figura 1.47: Mentimeter$_{14.1}$

Figura 1.48: Mentimeter$_{14.2}$

É possível redefinir os resultados, para utilizar a mesma apresentação em ocasião posterior (Fig 1.49). Se houver necessidade de consultar novamente, recomenda-se fazer download antes de excluir os resultados.

Observação: Acessando uma atividade pronta, da qual tenha recebido o link, há possibilidade de copiar para sua conta e utilizar.

Para mais informações, acesse: GUIA PRÁTICO — Como usar o MENTIMETER em suas aulas (PACHECO; MASCARENHAS, 2021).

1.1.3 Socrative

Socrative é uma ferramenta digital que proporciona a criação de atividades interativas, cuja aplicação pode ser feita presencialmente ou como tarefa extraclasse.

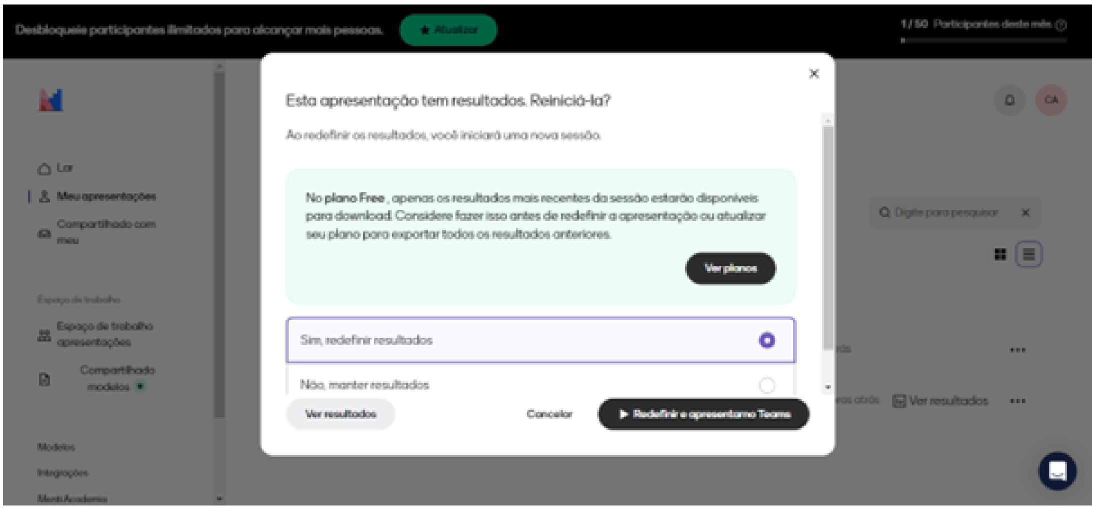


Figura 1.49: Mentimeter$_{14.3}$

É um recurso de acesso totalmente gratuito para os alunos; para os professores, na modalidade de acesso gratuito a oferta dos recursos é limitada, mas, ainda assim, sua utilização é válida considerando as oportunidades de interação que proporciona.

Um dos diferenciais dessa ferramenta é a possibilidade da dinâmica de competição em grupo, por meio de uma das formas de aplicação das atividades, denominada **Corrida espacial**.

Essa ferramenta será utilizada na Aula 2 da Sequência Didática.

Como elaborar e aplicar uma atividade no Socrative

1. Acesse o site SOCRATIVE, em https://www.socrative.com/. Se desejar verificar um resumo das funcionalidades da plataforma, basta deslizar a barra de rolagem lateral para baixo. No topo da página inicial, se já tiver cadastro, clique em **Conecte-se**, no canto direito; caso contrário, clique em **Inscrição de professor**, na parte inferior da porção visualizada da página (Fig 1.50). Os alunos não necessitam criar conta, fazem login diretamente na sala do professor.

Figura 1.50: Socrative$_1$

2. Clicando-se em **Inscrição do professor**, abre-se a página em que se faz o cadastro dos dados, para a criação de nova conta (Fig 1.51).

Figura 1.51: Socrative$_2$

3. Preenchidos todos os campos, clica-se em **Próximo**, para continuar com o cadastro; mais duas abas serão abertas, consecutivamente, sendo a sequência do preenchimento autoexplicativa. Finalizada a criação da conta, abre-se a tela inicial de utilização da plataforma (Fig 1.52).

Figura 1.52: Socrative$_3$

Nela, além de Lançar, que é o botão da página inicial, há os botões:

✓ Biblioteca: dá acesso às atividades já elaboradas, dispostas em ordem crescente ou decrescente da data de última edição, e disponibiliza a criação de nova atividade;

✓ Descobrir: permite a busca por atividades elaboradas por outras pessoas, que estejam disponíveis para cópia e utilização, agrupadas em algumas categorias para se fazer a busca, apenas em inglês;

✓ Quartos: para criação e administração de salas; no modo gratuito, pode-se criar apenas uma sala; ao criar a sala, é cadastrado automaticamente um código de identificação, por meio do qual os alunos acessam as atividades, sendo possível modificá-lo clicando no ícone de edição, representado por um lápis;

✓ Relatórios: fornece os relatórios das atividades já realizadas; para o modo gratuito ficam disponíveis as realizadas em até trinta dias anteriores;

✓ Resultados em tempo real: fornece os relatórios da atividade em andamento.

4. Para criar uma atividade, clica-se, no menu superior, em Biblioteca e, seguida, em Adicionar teste, no canto superior direito (Fig 1.53).

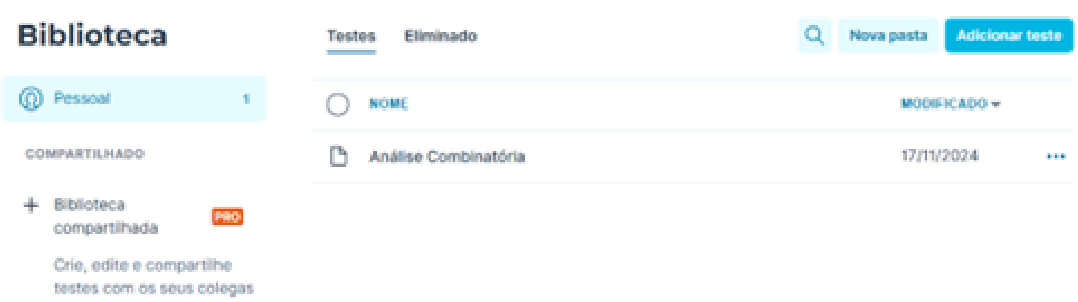


Figura 1.53: Socrative$_{4.1}$

Escolha a opção para iniciar: (Fig 1.54).

Figura 1.54: Socrative$_{4.2}$

Na hipótese de se desejar questões específicas, clica-se no botão Teste em branco e surgirá o ambiente para criação da primeira pergunta, que pode ser no estilo Múltipla escolha, Verdadeiro/Falso ou Resposta curta. Aí também pode-se nomear a atividade (Fig 1.55).

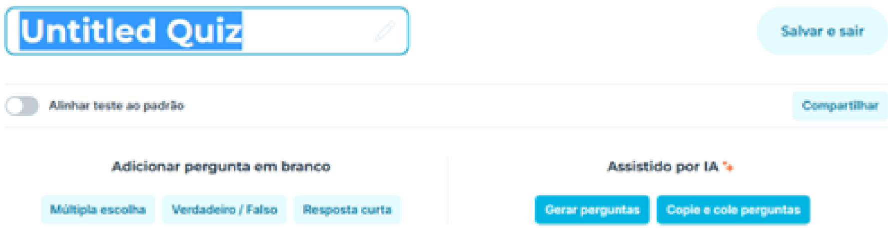


Figura 1.55: $\text{Socrative}_{4.3}$

Ao clicar no campo especificado para a digitação de pergunta ou de resposta, são apresentadas ferramentas básicas da edição de texto e da digitação de sentenças matemáticas (Fig 1.56); após inserir a pergunta, digita-se as alternativas de resposta, conforme o estilo escolhido; para perguntas de múltipla escolha, pode-se acrescentar a quantidade de alternativas às que já aparecem por padrão; é possível inserir imagens e links tanto nas perguntas quanto nas alternativas de respostas; seleciona-se a alternativa correta e prossegue-se para a criação da pergunta seguinte; prossegue-se assim, até que se registrem todas as perguntas e suas opções de resposta; no canto superior direito, clica-se em Salvar e sair.

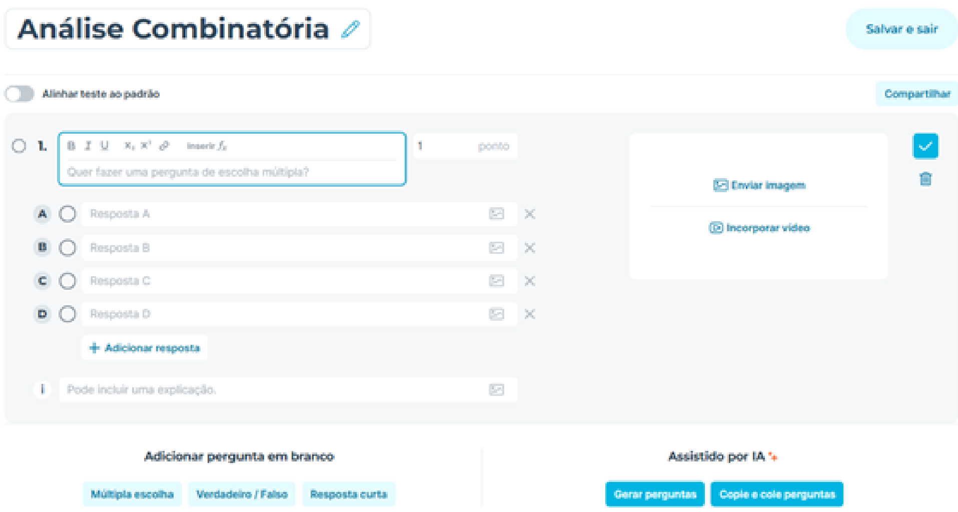


Figura 1.56: $\text{Socrative}_{4.4}$

5. Na página inicial (Fig 1.52), também há os ícones dos modos de aplicação de atividades:

✓ Os três de PERGUNTA RÁPIDA, como o próprio nome sugere, servem para a criação de pergunta instantânea, o que pode ser utilizado para provocar interação no decorrer de uma aula, por exemplo;

✓ Acionando a opção Bilhete de Saída, serão feitas aos alunos, ordenadamente, três perguntas para autoavaliação e feedback da aula, sendo a última um meio disponibilizado para o aluno responder uma pergunta feita oralmente, ou anotada em lousa, ou projetada pelo professor (Fig 1.57);

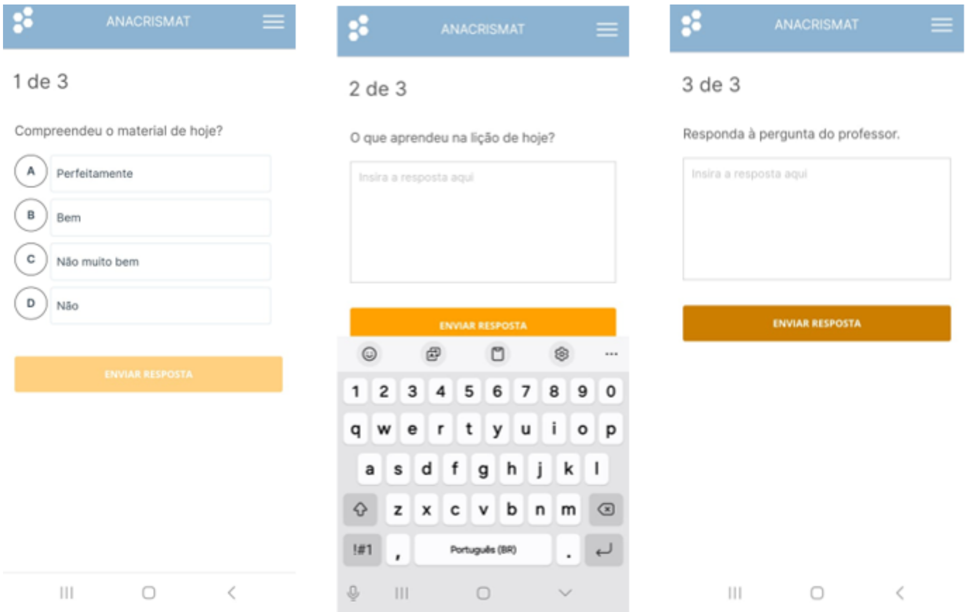


Figura 1.57: Socrative$_5$

✓ Na opção Teste, aplica-se, no estilo questionário, uma das atividades já elaboradas, presencialmente ou como atividade extraclasse;

✓ Na opção Corrida espacial aplica-se, no estilo de competição em grupo, uma das atividades já elaboradas.

6. Para aplicar a Corrida Espacial:

✓ Clica-se no seu ícone na tela inicial e abre-se uma janela para seleção do teste a ser aplicado (Fig 1.58);

✓ Após selecionar, clica-se em Próximo e abre-se a janela de configurações para a aplicação da atividade (Fig 1.59), onde se pode definir, entre outros aspectos, o número de equipes, o modo de composição das equipes (se os alunos escolherão a equipe da qual farão parte ou se a plataforma os alocará nas equipes, conforme a ordem de acesso) e o ícone representativo das equipes ;

✓ Após selecionar todas as configurações desejadas, clica-se em Iniciar. Abre-se então a janela onde será demonstrado o progresso das equipes, à medida em que vão respondendo as perguntas (Fig 1.60). É interessante que seja

Figura 1.58: Socrative$_{6.1}$

Figura 1.59: Socrative$_{6.2}$

feita a projeção dessa tela por meio de datashow ou TV, pois a visualização proporciona maior engajamento dos estudantes;

Figura 1.60: Socrative$_{6.3}$

- ✓ Clicando em Convidar estudantes, é gerado um QR Code bem destacado na lateral direita da tela, para os alunos acessarem a atividade (Fig 1.61);

Figura 1.61: Socrative$_{6.4}$

- ✓ Finalizada a atividade, clica-se em Concluir e, a partir daí, não se pode mais acessá-la. Para aplicá-la posteriormente, basta que o professor siga novamente as etapas descritas.

Para saber mais sobre o Socrative, acesse: Tutorial Socrative (PORTUGUESA, 2016).

1.1.4 Wordwall

O Wordwall é uma plataforma digital que possibilita a criação e o compartilhamento de atividades interativas, no formato de jogos de modelos diversos, constituindo-se numa ferramenta para a produção de aulas mais dinâmicas, bem como excelente opção para atribuição de tarefas extraclasse.

Na hipótese da aquisição de plano pago, além da versão para execução em tela, as atividades são disponibilizadas também em versão imprimível.

A diversidade de modelos de jogos nessa plataforma faz com que ela seja adequada para todas as etapas da educação básica; aliada à diversidade, a possibilidade de aplicação de uma mesma atividade em formatos diferentes torna-a uma ferramenta que favorece, em certa medida, a adaptação de atividades para uma educação inclusiva.

Esse recurso será utilizado na Aula 5 da Sequência Didática.

Como elaborar e aplicar uma atividade no Wordwall

1. Acesse o site WORDWALL, em wordwall.net/pt.

   A página inicial (Fig 1.62) traz informações sobre a plataforma e, na aba superior, além do botão **Início**, os outros seguintes:

Figura 1.62: Wordwall_1

   - **Recursos**: direciona às funcionalidades da plataforma e a um breve tutorial para sua utilização;
   - **Planos de preços**: apresenta as opções de planos individuais (sendo um gratuito e dois pagos) e o direcionamento aos planos escolares, com as informações de recursos disponibilizados em cada opção, bem como os preços para aquisição de cada um dos planos pagos;
   - **Fazer login**: utilizado para o acesso quando já se possui uma conta registrada;
   - **Inscrever-se**: para o caso de se desejar criar uma conta, o que também pode ser feito clicando no botão **Inscreva-se para começar a criar**, em destaque no centro e ao final da página;
   - **Botão com ícone em forma de globo terrestre**: permite selecionar o idioma de utilização da plataforma.

2. Clicando em **Inscrever-se**, será direcionado para o registro em uma conta básica, que é a conta gratuita (Fig 1.63). Tanto para inscrever-se quanto para fazer login, após clicar no botão correspondente, poderá continuar usando uma conta no Google ou seguir com o cadastro de novo e-mail.

Figura 1.63: Wordwall$_2$

3. Feito o acesso, a mudança se dá apenas na aba superior da página, que passa a apresentar os botões:

   - **Minhas Atividades**: direciona à página das atividades já elaboradas, que podem ser organizadas em pastas e apresentadas em ícones grandes ou pequenos e classificadas conforme a ordem alfabética crescente ou decrescente do nome, a data mais recente ou mais tardia de modificação ou de utilização. Nessa página também há a **Lixeira** e o campo de busca das atividades;
   - **Meus resultados**: leva à página com atividades já utilizadas, listadas em ordem alfabética crescente ou decrescente do nome, data mais recente ou mais tardia de criação ou do prazo para realização. Clicando na atividade escolhida, será direcionado ao relatório de desempenho, por aluno (nome, número de respostas corretas, número de respostas incorretas e tempo de realização) e por pergunta (enunciado, número de alunos que responderam corretamente e número de alunos que responderam incorretamente);
   - **Atualizar**: tem a mesma função do botão **Planos de preços**, da página incial;
   - **Identificação do usuário**: clicando nesse botão, é possível abrir uma aba para alterar dados pessoais e idioma de preferência, bem como desconectar-se da plataforma;
   - **Criar Atividade**: esse botão fica em destaque, centralizado entre os demais. Clicando nele, são mostrados, em ícones clicáveis, os modelos de jogos disponíveis para a conta gratuita, classificados por popularidade ou por ordem alfabética (Fig 1.64).

   Deslizando para baixo a barra de rolagem da página, aparecem os modelos denominados profissionais, exclusivos para os usuários com contas pagas (Fig 1.65).

4. Clicando em um dos modelos disponíveis, abre-se a tela para criação do jogo, cujo primeiro campo é o de designação do título da atividade. Em alguns modelos, como

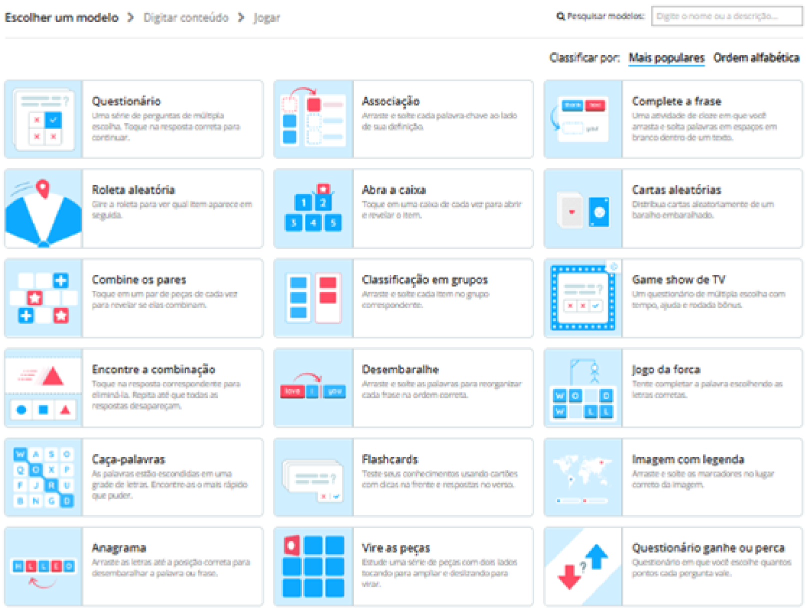


Figura 1.64: Wordwall$_{3.1}$

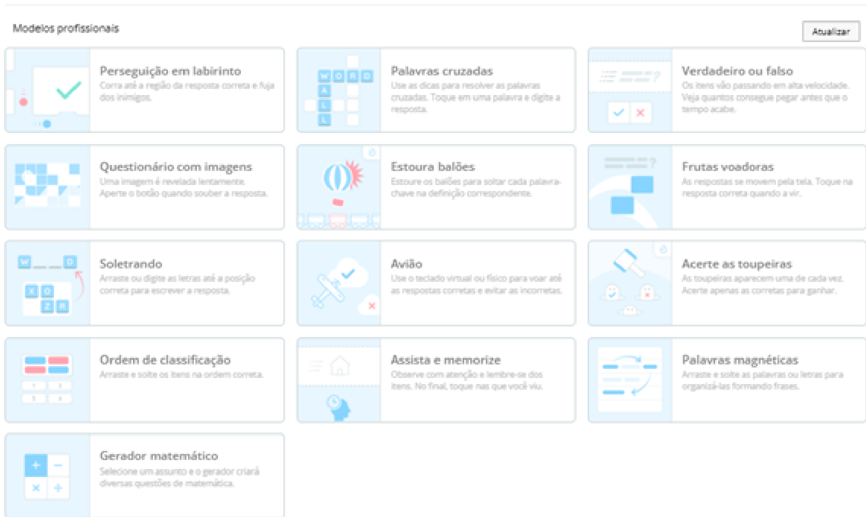


Figura 1.65: Wordwall$_{3.2}$

no Game Show de TV, digitam-se as perguntas e as alternativas de reposta (Fig 1.66); em outros, digitam-se os itens (Fig 1.67), como no modelo Roleta aleatória, utilizado na aula 5 da sequência didática. As quantidades mínima e máxima de perguntas ou itens variam conforme o modelo e são informadas junto ao botão Adicionar pergunta ou Adicionar item, a depender do modelo utilizado. Clicando no campo de preenchimento da pergunta ou item, bem como nos das respostas, podem ser visualizadas as ferramentas para digitação de termos e expressões próprios da linguagem matemática.

O plano gratuito, atualmente, disponibiliza a criação de apenas três atividades, mas é possível editá-las posteriormente. Há, também, a possibilidade de executar

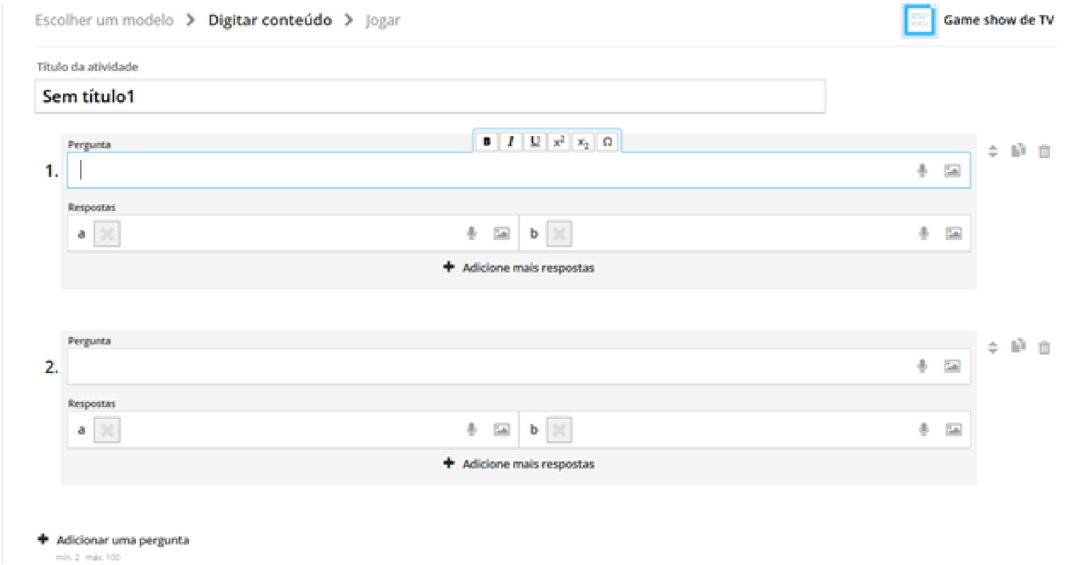


Figura 1.66: Wordwall$_{4.1}$

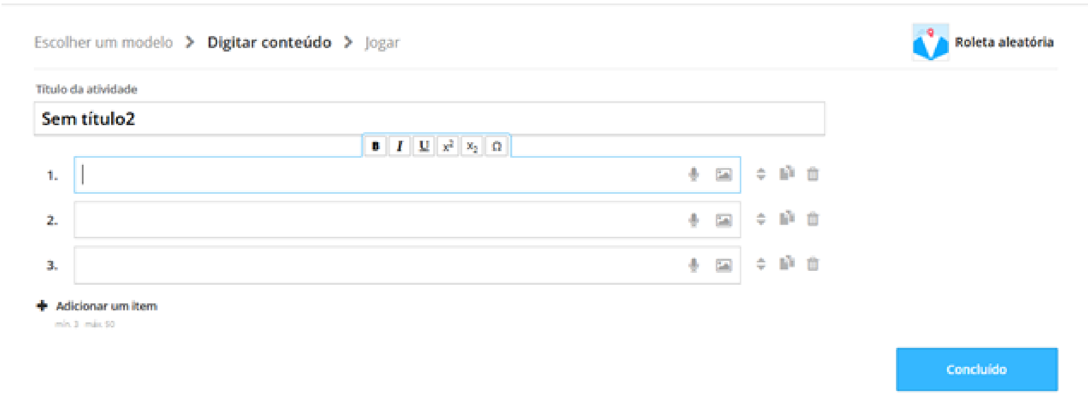


Figura 1.67: Wordwall$_{4.2}$

uma mesma atividade em modos diferentes daquele em que foi criada, mas que lhe sejam compatíveis, opção feita no momento da aplicação. Os próximos passos aqui descritos são relativos ao modelo Roleta aleatória.

5. Após digitar todas as informações pertinentes à elaboração da atividade, clicar em **Concluído**. A atividade é salva automaticamente e abre-se a tela (Fig 1.68) para apresentar ao vivo, ou atribuir a fim de ser executada posteriormente.

   Na lateral direita da tela, pode-se alterar o modelo em que será executado o jogo. Inicialmente, mostram-se algumas possibilidades; clicando-se em **Mostrar todos**, são expostos todas os modelos compatíveis com o modelo original de criação da atividade.

   Também nesta tela há os botões:

   - **Compartilhar**: direciona à publicação da página da atividade em outra pla-

Figura 1.68: Wordwall_5

taforma, bem como criar uma tarefa, disponibilizando o link diretamente a um jogador ou atribuindo a tarefa no Google Classroom, com ou sem prazo para conclusão;

- **Editar conteúdo**: leva de volta à página de criação da atividade;
- **Incorporar**: permite a incorporação da atividade a um site próprio, caso o possua;
- **Mais**: possibilita gerar um QR Code para acesso à atividade ou renomeá-la, se for necessário;
- **Começar**: em destaque no centro da página, nele se dá a partida para o jogo.

6. Clicando em **Começar**, visualiza-se a roleta, tendo ao centro o botão **Girar**, e inicia-se a contagem do tempo. Clicando em **Girar**, a roleta entrará em rotação; ao parar, a seta estará apontando um dos itens, e a imagem terá a região do item apontado aproximada, a fim de facilitar a visualização (Fig 1.69).

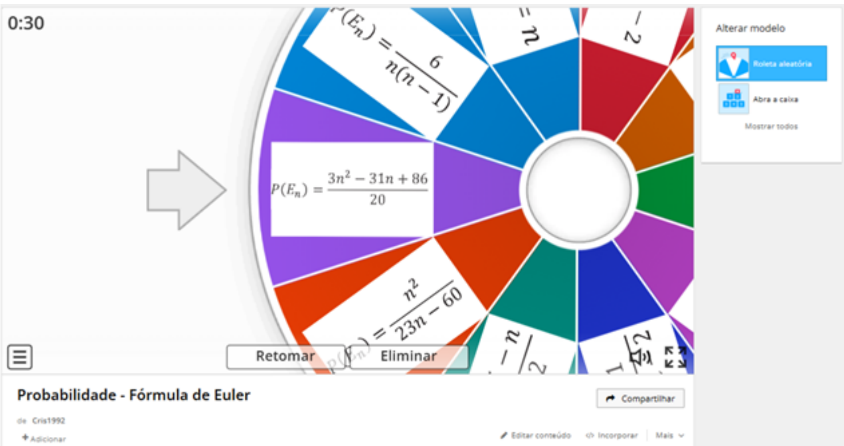


Figura 1.69: Wordwall_6

7. Pode-se clicar em Retomar, para voltar a girar a roleta com todos os itens iniciais, ou clicar em Eliminar, para girar sem o item apontado pela seta ao final do giro anterior, tendo sido esta última a opção sugerida para aplicação da atividade na sequência didática trazida neste trabalho.

8. Segue-se, então, eliminando um item, ao final de cada rodada, até que se chegue à fórmula procurada. Em outro contexto de atividade, pode-se seguir eliminando, até que reste um único item.

9. Caso o jogo seja atribuído como atividade, os resultados estarão disponíveis no botão **Meus Resultados**, conforme já descrito anteriormente.

Para mais informações, acesse: Recursos Wordwall (WORDWALL).

1.2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DIDÁTICA

O conhecimento matemático, ainda que possua características particulares, tem origem semelhante à das outras vertentes do conhecimento. De acordo com D'Ambrosio (2012, p. 16), "todo conhecimento é resultado de um longo processo cumulativo de geração, de organização intelectual, de organização social e difusão, elementos naturalmente não contraditórios entre si e que influenciam uns aos outros".

Tecendo considerações acerca do papel social e ideológico desempenhado pela Matemática e pela Educação Matemática para além dos livros escolares e das situações puramente didáticas, Carvalho (2009, p. 103) observa: "Não somos professores independentemente do contexto em que vivemos". E ainda:

> Nós temos um grande desafio na educação matemática, juntamente com profissionais de outras áreas de conhecimento: o de criar estratégias para buscar criar nexos entre o contexto histórico-cultural e os dados estatísticos e/ou os índices socioeconômicos. A utilização e divulgação de informações quantificáveis desvinculadas de seus contextos histórico-culturais equivalem a conceber a sociedade como estática e os indivíduos como passivos (CARVALHO, 2009, p. 106).

Posto que a Matemática possua uma dimensão histórica, isto é, os conhecimentos matemáticos não surgiram por mera casualidade, mas sim dentro de um contexto sociocultural, uma compreensão satisfatória dos conceitos requer a apresentação destes dentro do contexto em que foram gerados.

Uma aproximação entre conceito e contexto pode ser feita por meio do estudo da história da Matemática. Mais que uma possibilidade, segundo D'Ambrosio (2012, p. 27), "uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino".

De acordo com Miguel e Miorim (2002, p. 180), as primeiras manifestações do estabelecimento de relações entre a história da matemática e a educação matemática ocorreram por meio da percepção, identificada, ao menos, desde o século XVIII, da importância da participação da história da matemática no processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina.

A história da Matemática favorece o entendimento de que essa área de conhecimento não é apenas um conjunto de fórmulas abstratas, mas sim um campo que evoluiu através das contribuições de indivíduos de diferentes contextos históricos, e o conhecimento dos contextos em que certos conceitos foram desenvolvidos pode tornar a aprendizagem mais significativa.

> É preciso que os alunos aprendam a Matemática entendendo que ela também faz parte da história da humanidade. A percepção pelo aluno dessa dimensão histórica pode influir para que eles a encarem como algo que faz parte de suas próprias vidas e a aprendam significativamente de modo espontâneo. Nesse sentido, a História da Matemática surge como elemento que pode auxiliar o professor a conduzir o processo de ensino-aprendizagem de modo tal que integre o estudante aos conhecimentos matemáticos a serem ensinados (ROCHA; FORTALEZA, 2016, p. 80).

É importante ressaltar, conforme observa D'Ambrosio (2012, p.28), que "essa visão crítica da matemática através de sua história não implica necessariamente o domínio das teorias e práticas que estamos analisando historicamente"; o simples fato de se compreender a motivação histórica do surgimento de tais teorias e práticas não torna possível sua aplicação em situações do contexto presente.

De acordo com Lara (2013, p. 52), trazer informações históricas é um recurso que pode instigar a curiosidade do estudante e responder a alguns dos seus questionamentos, caracterizando o valor didático da História da Matemática.

> O estudante pode encontrar subsídios na História da Matemática para compreender o processo de geração de um conhecimento analisando as condições históricas as quais possibilitaram que ele emergisse e fosse difundido naquele contexto histórico e não em outro. Isso implicaria na compreensão por parte do estudante que em seu contexto a geração, a organização e a difusão desse conhecimento ocorreriam de outro modo (LARA, 2013, p. 55).

Para Guimarães (2010, p. 32), o ensino da história da matemática viabiliza a compreensão, por parte do aluno, de que, embora as teorias que conhecemos hoje se mostrem de forma acabada, foram produtos de grandes desafios enfrentados pelos matemáticos em outras épocas e resolvidos de forma bem diferente da que, na maioria das vezes, é apresentada hoje, após essas teorias terem sido formalizadas.

Outro componente importante do valor didático da História da Matemática, apontado por Brolezzi (2014, p. 129), está relacionado à representação da matemática em linguagem simbólica, de cuja interpretação pode depender não só o aprendizado em si, como também a motivação para ele. Entretanto, como afirma, muitas vezes a matemática torna-se objeto de aversão por parte dos alunos do nível elementar, justamente pela dificuldade de compreensão de sua linguagem.

Além de propiciar a contextualização do surgimento de conceitos matemáticos e a compreensão da necessidade da simbologia utilizada na linguagem matemática, também é um argumento que justifica a inclusão da História da Matemática no seu ensino a possibilidade de iniciação dos estudantes na atividade de pesquisa.

> A História da Matemática como proposta pedagógica pode ir além de sua utilização como um recurso informativo, (...) ao possuir os fundamentos que dão condições para explicar como os conhecimentos matemáticos foram gerados, adquiridos, organizados intelectual e socialmente e como foram difundidos, ela está articulada à Etnomatemática, portanto a um método de pesquisa (LARA, 2013, p. 52).

Outra razão frequentemente apresentada como justificativa para o uso da história da matemática é que ela se constitui em um potencial elemento motivador da aprendizagem; no entanto, existem alguns entraves para que essa metodologia possa ser efetivamente praticada.

De acordo com Guimarães (2010, p. 34), " para que isso venha a ser útil, devemos ter em mente os fins pedagógicos e a articulação com as demais variáveis que interferem no planejamento didático".

Por outro lado, conforme constata D'Ambrosio (2012, p. 29), "é muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos, em virtude dos problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas."

Do ponto de vista da ação do professor

> É importante que o professor aproxime a Matemática de sua própria história. Assim, a História da Matemática apresentar-se-á como área do conhecimento essencial, na medida em que pode contribuir para a formação do futuro professor de Matemática, de maneira a ajudá-lo a conceber a Matemática como criação humana que emerge das necessidades que se apresentam no cotidiano da sociedade onde ela se faz presente. A adoção dessa concepção pelo futuro professor se refletirá em sua maneira de ensinar (ROCHA; FORTALEZA, 2016, p. 82).

Ao descrever a relação entre o professor e o saber matemático, os PCNs (BRASIL, 1997, p.30) estabelecem que o conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

Entretanto, conforme observa Brolezzi (2014, p. 20), esse recurso não é tarefa trivial por dois motivos: em primeiro lugar, pela falta de informações históricas mais adequadas ao ensino da Matemática elementar e, em segundo lugar, pelo perigo que há de se ficar na superficialidade de uma utilização de fatos da história da matemática como meras curiosidades sem nenhuma implicação no tratamento dos conteúdos matemáticos em si.

Ainda de acordo com Brolezzi (2014, p. 127), "o conhecimento da história da matemática pode permitir ao professor colocar-se mais próximo do aluno, procurando colocar-se no lugar dele e compreender melhor sua forma de aprender matemática." A justificativa para essa concepção é que um mergulho na história traz a descoberta de que há uma pluralidade de modos para se chegar a um resultado, desde que se respeite a lógica própria da construção do conhecimento, e isso facilita ao professor uma tomada de perspectiva em relação ao aluno.

Guimarães (2010, p. 24) aponta para a necessidade de "procurar desmistificar a matemática, mostrando que ela foi construída por homens em tempos históricos específicos, sendo, portanto, uma obra humana, que deve ser considerada na formação do professor e também dos alunos". Considera, ainda, ser possível, através do estudo da história da Matemática, certificar-se de que:

> Os primeiros homens a tentarem buscar estratégias para utilizar a matemática iniciaram suas buscas partindo de problemas práticos, com recursos de sua inteligência, até que conseguiram criar regras para superá-los. Assim, não iniciaram por regras abstratas, como, muitas vezes, propõe a escola aos alunos (GUIMARÃES, 2010, p. 32).

Por fim, a utilização da história da matemática como estratégia pedagógica possibilita mostrar que a matemática é feita por pessoas, com suas próprias histórias e desafios, o que pode tornar a disciplina e seu ensino mais acessível e interessante tanto para os alunos quanto para os professores.

Capítulo 2

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE UMA FÓRMULA DE EULER RELATIVA À PROBABILIDADE

O conceito de Sequência Didática, de acordo com Cabral (2017, p. 32), originou-se na França, como parte de uma tentativa de minimizar as dificuldades recorrentes da produção da língua escrita; a sequência didática, então, era planejada para ser um procedimento que permitiria ensinar todos os conteúdos do ensino da língua materna de forma integrada, em contraposição ao modelo anterior em que o ensino desses conteúdos era feito de modo compartimentalizado.

No Brasil, essa concepção começou a ser divulgada ao final da década de 1990, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, onde se faz referência a "atividades sequenciadas" nas orientações acerca do tratamento didático dos conteúdos relacionados ao ensino das práticas de linguagens:

> Há estreita relação entre o que e como ensinar: determinados objetivos só podem ser conquistados se os conteúdos tiverem tratamento didático específico. A questão não é apenas qual informação deve ser oferecida, mas, principalmente, que tipo de tratamento deve ser dado à informação que se oferece. A própria definição dos conteúdos já é, em si, uma questão didática que tem relação direta com os objetivos colocados. (...) Ensinar supõe, assim, discretizar conteúdos, organizando-os em atividades sequenciadas para trabalhar intensivamente sobre o aspecto selecionado, procurando assegurar sua aprendizagem. (BRASIL, 1998, pp. 65-66)

Uma sequência didática é uma estratégia de ensino constituída por um conjunto de atividades planejadas e sequenciadas, para ensinar determinado conteúdo ou favorecer o desenvolvimento de determinadas habilidades. Conforme definição apresentada por

Pessoa (2014, n.p), no Glossário Ceale [1], "corresponde a um conjunto de atividades articuladas que são planejadas com a intenção de atingir determinado objetivo didático".

> Trata-se de um conjunto de atividades concebidas e organizadas de tal forma que cada etapa está interligada à outra. Ao planejá-la, o professor tem como objetivo ensinar um determinado conteúdo, começando por uma atividade simples até chegar às operações mais complexas. Ou seja, elas são elaboradas de modo a respeitar os graus de dificuldade que os alunos irão encontrar nas tarefas, tornando possível sua superação (CERQUEIRA, 2013, p. 3).

Considera, ainda, Cerqueira (2013, p. 6) que, quando bem elaborada, a sequência didática privilegia os conhecimentos prévios dos alunos, permitindo que argumentem e apresentem hipóteses, favorece a boa interação entre colegas e com o professor, instiga a curiosidade e motiva o aluno a aprender os novos conceitos.

Atualmente, para além da indicação do seu uso com vistas ao ensino de gêneros textuais, as sequências didáticas têm sido amplamente utilizadas em outros contextos, dinamizando a aprendizagem de diferentes objetos do conhecimento. Entretanto, paralelamente aos ganhos pedagógicos que se possam obter dessa iniciativa, conforme observa Cabral (2017, p. 38), "cria-se o problema da adequação às necessidades e/ou especificidades que distinguem os diversos campos do saber disciplinar escolar."

Com relação às especificidades relacionadas ao ensino-aprendizagem de Matemática, Cabral afirma: "(...) Cabe ao professor, em minha concepção, a árdua tarefa de propor aos alunos um ensino bem articulado que valorize, sobretudo, a reconstrução de conceitos num ambiente de reflexão." (CABRAL, 2017, p. 11).

Esta sequência didática foi planejada com a finalidade de contribuir com a aprendizagem do conteúdo Probabilidade, ao tempo em que fornece elementos que proporcionam uma breve reflexão sobre aspectos históricos relacionados a esse tema, bem como uma aproximação com as demonstrações matemáticas, entendendo sua estrutura e aprendendo a utilizar argumentos próprios da linguagem matemática.

Atentando para a história da matemática, os alunos terão conhecimento de como grandes matemáticos chegaram a suas conclusões, bem como do impacto dessas descobertas no desenvolvimento do conhecimento humano. Nesta sequência, será destacado o trabalho do matemático Leonhard Euler.

Ao entrarem em contato com processos utilizados para demonstração de resultados em Matemática, os alunos poderão entender que a matemática é construída sobre uma base sólida de lógica e evidências.

> O objetivo não é estabelecer uma demonstração no sentido mais rigoroso da palavra, mas estabelecer um conjunto de argumentos dotados de certas articulações entre si que não "firam" a

[1] Publicação do Centro de Alfabetização, Leitura e Escrita (Ceale), órgão complementar da Faculdade de Educação da UFMG, que reúne mais de 200 verbetes assinados por especialistas, para auxiliar os educadores na compreensão dos termos e reunir em um só volume conceitos disseminados no mundo acadêmico e na prática pedagógica.

> Matemática como disciplina formal, mas que, ao mesmo tempo, possibilitem ao aluno a reconstrução mais significativa que esteja um pouco além do simples estabelecimento inicial do algoritmo sem qualquer explicação prévia que justifique os procedimentos algorítmicos adotados mediante um processo de discursivo (CABRAL, 2017, pp. 11-12).

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018), para que os propósitos dos conhecimentos específicos de Matemática no Ensino Médio se concretizem, é necessário que os estudantes mobilizem seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar.

Para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Com relação à competência de argumentar, seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas.

Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática, verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas, e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento do próprio raciocínio.

Por conseguinte, uma das competências específicas da área Matemática e suas Tecnologias definidas pela BNCC para o Ensino Médio é

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018).

As seguintes habilidades relacionadas às competências específicas 3 e 5 da área de Matemática e suas Tecnologias serão mobilizadas nesta sequência didática:

- ✓ (EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.

- ✓ (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

✓ (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.

Público-alvo: turmas de 3ª série do Ensino Médio.

Descrição: Estudo da fórmula de Euler para o cálculo da probabilidade de ocorrência de três números consecutivos ao serem retirados aleatoriamente 3 dentre n bilhetes numerados consecutivamente de 1 a n:

"Suponha que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso. Então, a probabilidade de que três números consecutivos, em qualquer ordem, sejam tirados é $\frac{6}{n(n-1)}$."

Pré-requisitos:

- Identificação de diferentes tipos de agrupamento e utilização adequada dos métodos de contagem;
- Conceito de experimento aleatório, de espaço amostral e de evento;
- Determinação do número de elementos de um espaço amostral e de um dado evento;
- Cálculo da probabilidade da ocorrência de um dado evento em um espaço amostral equiprovável.

Para a resolução de parte das atividades propostas, serão utilizadas as fórmulas gerais:

✓ **Permutação simples de n elementos:**

$$P_n = n!$$

✓ **Permutação de n elementos, havendo repetição, sendo $n_1, n_2, \ldots, n_k$ as frequências de repetição dos elementos distintos:**

$$P_n{}^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

✓ **Arranjo simples de n elementos tomados p a p:**

$$A_n = \frac{n!}{(n-p)!}$$

✓ **Combinação simples de n elementos tomados p a p:**

$$C_n = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Desenvolvimento: A sequência será desenvolvida em 7 aulas de 50 minutos.

2.1 Aula 1: Verificando e revisando pré-requisitos

Objetivo geral: Revisar estratégias de contagem.

Objetivos específicos:

- Apresentar fatos históricos sobre a Análise Combinatória;
- Aplicar adequadamente o princípio multiplicativo da contagem;
- Identificar tipos de agrupamentos estudados na Análise Combinatória;
- Determinar o número de agrupamentos possíveis dos elementos de um conjunto.

Ações do professor:

- Antecipadamente, preparar o material a ser utilizado na Rotação por Estações de Aprendizagem;
- Organizar a sala de aula para desenvolver a atividade, dividindo-a em espaços conforme o número de estações de aprendizagem a serem aplicadas, deixando em cada estação o material necessário, de acordo com o planejamento das atividades. Se verificar a necessidade, reservar antecipadamente outro local;
- Apresentar à turma a proposta da sequência didática;
- Apresentar à turma o tema e os objetivos da aula;
- Orientar a turma a dividir-se em grupos, conforme o número de estações;
- Descrever a dinâmica da Rotação por Estações de Aprendizagem e tirar as dúvidas dos alunos, se houver;
- Aplicar e coordenar a realização da Rotação por Estações de Aprendizagem.

Ações dos alunos:

- Ouvir a apresentação da proposta pelo professor e emitir comentários ou opiniões, caso desejem;
- Ouvir as orientações para a realização da atividade e expor dúvidas, se houver;
- Organizarem-se em grupos, conforme orientação do professor;
- Participar ativamente da aula, percorrendo, em grupo, as estações de aprendizagem e realizando as atividades nelas propostas.
- Participar do encerramento da atividade, externando a avalição pessoal.

Recursos utilizados:

- Folhas impressas com as atividades de cada estação, em número igual ao de grupos formados;
- Notebook para duas das estações (se não houver disponibilidade na escola, avisar antecipadamente aos alunos sobre o uso do smartphone);
- Lápis, borracha, caneta para anotações;
- Recursos digitais: vídeo do YouTube; Jogo do Geogebra ; QR Code Fácil.

Avaliação:

- Participação;
- Colaboração;
- Autoavaliação;
- Respostas às atividades.

Nesta aula, foi proposta a utilização da metodologia Rotação por Estações de Aprendizagem.

A Rotação por Estações de Aprendizagem é uma estratégia dentre as denominadas metodologias ativas, assim designadas as metodologias em que os estudantes participam ativamente na construção e na consolidação de seu processo de aprendizagem.

Para aplicação dessa metodologia, a sala de aula, ou outro ambiente de aprendizagem, é organizada em subespaços, sendo cada um deles uma estação de aprendizagem; a turma é dividida em grupos, e os grupos percorrem as estações, cada grupo iniciando por uma delas e prosseguindo através das demais, em esquema de rodízio, num tempo pré-estabelecido e aproximadamente igual para todas as estações.

É recomendável que os grupos sejam formados por, no máximo, cinco componentes, todos com a mesma quantidade, na medida do possível; o número de estações de aprendizagem deve ser determinado de acordo com o número de grupos e com o tempo de aula disponível; se a turma for numerosa e o professor não dispuser de tempo suficiente de aula para a aplicação do número inicialmente necessário de estações, sugere-se formar uma quantidade par de grupos, dividi-los em dois blocos e duplicar as estações, colocando o mesmo conjunto de estações em um e em outro lado da sala, por exemplo, de modo que cada bloco de grupos percorra um dos conjuntos de estações.

Em cada estação de aprendizagem haverá uma base de apoio (uma mesa, por exemplo), sobre a qual será deixada uma proposta de atividade específica, mas as atividades de todas as estações farão abordagem de um mesmo tema central; o fato de cada grupo iniciar em uma estação diferente requer que as atividades sejam independentes, isto é, não pode haver necessidade de que sejam realizadas em uma ordem específica. Ao menos uma das estações deve ter atividade com utilização de recurso tecnológico digital. Com o objetivo de evitar dispersão dos alunos, recomenda-se que em todas as atividades haja um material (não necessariamente físico) entregável. Cada grupo poderá eleger um dos componentes para recolher em cada estação seus trabalhos e transportá-los até o momento de entrega.

É importante que, ao planejar a quantidade e a duração de cada estação de aprendizagem, o professor lembre da necessidade de destinar parte do tempo da aula à exposição inicial sobre os objetivos e a organização da metodologia, em especial se for aplicá-la pela primeira vez na turma, bem como à finalização da aula, com a entrega das atividades realizadas. A conversa para devolutiva da impressão dos alunos sobre a metodologia aplicada, autoavaliação, apresentação de sugestões, ou outro tipo de consideração que desejem, pode ser feita em aula posterior, mas é ideal que ocorra imediatamete após a realização da dinâmica.

Saiba mais sobre a metodologia ativa Rotação por Estações de Aprendizagem, acessando a matéria: Para uma aula diferente, aposte na Rotação por Estações de Aprendizagem, em Sassaki (2016).

Para esta aula, foram elaboradas quatro estações de aprendizagem, cujas atividades estão disponíveis em formato imprimível no Apêndice A. Cada atividade será impressa em quantidade igual ao número de grupos formados, ficando dispostas nas bases de apoio das respectivas estações. O representante escolhido de cada grupo, na passagem por cada estação, tomará uma folha, preencherá com o número do grupo e, após a execução da atividade pelo grupo, recolherá a folha para ser entregue ao final da aula.

- Na **Estação 1**, os estudantes assistirão um vídeo curto sobre a história da Análise Combinatória e responderão a duas perguntas com base nas informações apresentadas no vídeo:

  Atividades na Estação 1:

  1. Assistam ao vídeo: O SURGIMENTO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA: COMO TUDO COMEÇOU! - Prof. Isaac Carneiro (CARNEIRO, 2021).
  2. Respondam às perguntas, com base nas informações apresentadas no vídeo.

     A) Qual é o documento mais antigo contendo problemas matemáticos?
     Resposta: O papiro de Rhind.

     B) Qual o conceito de Análise Combinatória?
     Resposta: Análise Combinatória é o ramo da Matemática que estuda as relações entre conjuntos finitos, utilizando o princípio multiplicativo.

- Na **Estação 2**, resolverão duas questões do ENEM, ambas sobre Análise Combinatória. A primeira abordando os conceitos de arranjo simples e de combinação simples e a segunda, o conceito e o cálculo de permutação simples.

Questões na Estação 2:

1. (ENEM 2009) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.
   A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

   A. uma combinação e um arranjo, respectivamente.

   B. um arranjo e uma combinação, respectivamente.

   C. um arranjo e uma permutação, respectivamente.

   D. duas combinações.

   E. dois arranjos.

   Alternativa correta: A

2. (ENEM Digital 2020) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @. O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras “edu” apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem. Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado.
   De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

   A. 59

   B. 60

   C. 118

   D. 119

   E. 120

   Alternativa correta: D

- Na **Estação 3**, participarão do jogo “Número Secreto”, apresentando a seguinte situação: “Marina achou um jogo na internet que consiste em descobrir certo número secreto. O número está entre 100 e 999, todos os seus algarismos são distintos e nehum dos algarismo é 6. Descubra o número secreto de Marina” (Disponível em: https://quebracabecas.github.io/?desafio=127).

  Após digitarem e conferirem seu palpite, responderão às duas questões que se seguem.

Questões na Estação 3:

1. Quantas senhas poderiam ser criadas com a condição inicial do problema?
   A) $9 \cdot 7 \cdot 7$
   B) $10 \cdot 9 \cdot 8$
   C) $8 \cdot 8 \cdot 7$
   D) $8 \cdot 7 \cdot 6$
   Alternativa correta: C
2. Explique seu raciocínio para responder à questão anterior.
   Resposta pessoal

- Na **Estação 4**, responderão a quatro questões, que avaliam a habilidade de compreender a natureza de alguns agrupamentos formados a partir do próprio grupo.

Questões na Estação 4:

1. Seu grupo nesta atividade é formado por quantos componentes?
   Resposta de acordo com o número de componentes do grupo. Consideremos que seja um número **n**; $n \leq 5$, conforme sugestão de formação dos grupos.
2. De quantos modos vocês podem se organizar em fila para sair da sala?
   Resposta: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1$ ou $P_n = n!$
3. Se vocês estivessem competindo entre si, de quantos modos poderia ser composto um pódio de três lugares?
   Resposta: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ ou $A_n = \dfrac{n!}{(n-3)!}$
4. Se tivessem que escolher três componentes para compartilhar com o restante da turma a impressão do grupo sobre esta atividade, de quantos modos poderiam escolher seus representantes?
   Resposta: $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}$ ou $C_n = \dfrac{n!}{n! \cdot (n-3)!}$

A distribuição do tempo foi planejada do seguinte modo, considerando uma aula de 50 minutos:

✓ Considerações iniciais e orientações: 5 minutos;

✓ Realização das atividades: 40 minutos, sendo 10 minutos para cada estação;

✓ Recolhimento das atividades e considerações finais: 5 minutos.

A fim de otimizar o tempo de acesso, se forem disponibilizados notebooks da escola, o professor deve deixar abas abertas nos endereços eletrônicos a serem utilizados; para o caso de os alunos necessitarem utilizar os próprios smartphones, foram gerados QR Codes das atividades das estações 1 e 3. Existem diversos sites que cumprem gratuitamente essa função; aqui foi utilizado o QR Code Fácil.

2.2 Aula 2: Continuando a revisão de pré-requisitos

Objetivo geral: Continuar a revisão das estratégias de contagem.

Objetivos específicos:

- Identificar tipos de agrupamentos estudados na Análise Combinatória;
- Resolver problemas de Análise Combinatória aplicada a contextos diversos.

Ações do professor:

- Apresentar o tema e os objetivos da aula;
- Orientar a turma a organizar-se em grupos de até 4 componentes;
- Dar orientações sobre a plataforma a ser utilizada na atividade e tirar dúvidas dos alunos, se houver;
- Dar início à aplicação da Atividade no Socrative, no modo Corrida Espacial;
- Disponibilizar o link ou o QR Code de acesso à atividade no Socrative.

Ações dos alunos:

- Ouvir a apresentação do tema e dos objetivos da aula pelo professor e comentar ou opinar, caso desejem;
- Ouvir as orientações para a realização da atividade e expor dúvidas, se houver;
- Organizarem-se em grupos, conforme orientação do professor;
- Participar da atividade, acessando-a através do link informado pelo professor e seguindo as orientações.

Recursos utilizados:

- Computador;
- Projetor de slides ou TV;
- Smartphone dos alunos;
- Recurso digital: Socrative.

Avaliação:

- Participação;
- Engajamento;
- Cooperação;
- Desempenho.

Questões da atividade no Socrative

1. Campo de estudo da matemática associado com as regras de contagem:

   (A) Álgebra

   (B) Geometria Analítica

   (C) Análise Combinatória

   (D) Aritmética

   (E) Estatística

   Alternativa correta: (C)

2. Uma técnica muito utilizada na Análise Combinatória:

   (A) Princípio de Arquimedes

   (B) Princípio Fundamental da Contagem

   (C) Teorema de Pitágoras

   (D) Princípio de Cavalieri

   (E) Princípio Fundamental da Dinâmica

   Alternativa correta: (B)

3. O fatorial de um número n é representado por:

   (A) n^2

   (B) $\frac{n}{2}$

   (C) $n-1$

   (D) $n!$

   (E) $n+1$

   Alternativa correta: (D)

4. O fatorial de 5 é igual a:

   (A) 120

   (B) 15

   (C) 24

   (D) 720

   (E) 10

   Solução: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
   Alternativa correta: (A)

5. Qual o valor da expressão $\dfrac{10!}{8!}$?

(A) 2

(B) 8

(C) 10

(D) 18

(E) 90

Solução: $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90.$

Alternativa correta: (E)

6. São tipos de agrupamentos utilizados em contagem:

(A) Primário, intermediário e secundário

(B) Permutação, revolução e associação

(C) Estimativa, aproximação e arredondamento

(D) Simples, composto e estratificado

(E) Permutação, arranjo e combinação

Alternativa correta: (E)

7. Quantos são os anagramas da palavra SABER começados por S?

(A) 1

(B) 5

(C) 24

(D) 120

(E) 720

Solução: Fixando a letra S no início, restam 4 letras distintas para serem permutadas. Logo, tem-se: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$
Alternativa correta: (C)

8. Quantos são os anagramas da palavra LEITE?

(A) 1

(B) 5

(C) 10

(D) 60

(E) 120

Solução: Há 5 letras ao todo, sendo 2 letras E. Portanto, tem-se a permutação de 5 elementos com repetição de 2, isto é: $P_5{}^2 = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60.$
Alternativa correta: (D)

9. (LEONARDO, 2020, p. 118) Uma sala possui 6 portas. De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

   (A) 60

   (B) 30

   (C) 12

   (D) 6

   (E) 1

   Solução:

   ✓ Há 6 portas, logo 6 possibilidades para a entrada; como a saída deve ser feita por uma porta diferente, restam $6-1$ possibilidades para a saída. A entrada e a saída são eventos consecutivos e independentes, portanto, pelo princípio multiplicativo, tem-se: $6 \cdot 5 = 30$.

   ✓ Pode-se, também, considerar a situação em que serão escolhidas 2 portas dentre 6, sendo uma para entrar e outra para sair; nesse caso, há alteração da escolha ao inverter a ordem das portas de entrada e de saída. Portanto, tem-se um problema de arranjo simples, ou seja:
   $A_{6,2} = \dfrac{6!}{(6-2)!} = \dfrac{6!}{4!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 30.$

   Alternativa correta: (B)

10. (LEONARDO, 2020, p. 119) Um garoto deseja convidar 7 amigos para acampar, porém só há lugar para 4 amigos na barraca. De quantas maneiras ele pode escolher 4 amigos entre 7?

   (A) 35

   (B) 28

   (C) 11

   (D) 7

   (E) 4

   Solução:

   ✓ Há 7, 6, 5 e 4 possibilidades para a escolha do primeiro, do segundo, do terceiro e do quarto amigo, respectivamente, o que, pelo princípio multiplicativo, leva a $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. Como as posições na escolha dos 4 não importam e podem ser permutadas de 4! maneiras, divide-se o produto anterior por 4!, resultando em: $\dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = \dfrac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3 \cdot 2} \cdot 1} = 35.$

   ✓ Ou, considerando a escolha de 4 dentre 7 amigos, sem importar a ordem, tem-se uma combinação simples de 7 elementos tomados de 4 em 4. Logo:
   $C_{7,4} = \dfrac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = \dfrac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot \cancel{3 \cdot 2} \cdot 1} = 35.$

Alternativa correta: (A)

11. Numa lanchonete há 4 opções de sanduíches vegetarianos, 3 opções com carne e 2 opções com frango. Quantas são as possibilidades da escolha de um único sanduíche?

(A) 9

(B) 14

(C) 20

(D) 24

(E) 36

Solução: Será feita a escolha de um único sanduiche e as opções vegetariano, com carne ou com frango são mutuamente excludentes, portanto são $4+3+2 = 9$ possibilidades de escolha.
Alternativa correta: (A)

12. Quantos anagramas da palavra COLA não começam com L?

(A) 6

(B) 18

(C) 24

(D) 25

(E) 42

Solução:

✓ Considerando a condição "não começar com L", há, respectivamente, 3, 3, 2 e 1 possibilidades para a primeira, a segunda, a terceira e a quarta letras, em cada anagrama. Logo são $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ anagramas.

✓ Ou, ainda: a palavra COLA possui, ao todo $P_4 = 4! = 24$ anagramas; destes, começando com L, há $P_3 = 3! = 6$. Desse modo, tem-se $24-6 = 18$ anagramas que não começam com L.

Alternativa correta: (B)

13. (BONJORNO; GIOVANNI JÚNIOR; SOUZA, 2020, p. 98) Alfredo, Armando, Ricardo, Renato e Ernesto querem criar uma sigla com cinco símbolos, sendo cada símbolo a primeira letra de seus nomes. Qual o número total de siglas possíveis de se formar?

(A) 3

(B) 5

(C) 25

(D) 30

(E) 60

Solução: Tomando-se a primeira letra de cada um dos nomes Alfredo, Armando, Ricardo, Renato e Ernesto, têm-se 5 letras, com repetição de duas letras A e duas letras R. Portanto, o número de siglas possíveis é:

$$P_5{}^{2,2} = \frac{5!}{2!\cdot 2!} = \frac{5\cdot \overset{2}{\cancel{4}}\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 30.$$

Alternativa correta: (D)

14. (TEIXEIRA, 2020, p. 37) Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 5, 7 e 9, quantos números de cinco algarismos distintos menores do que 70 000 podem ser formados?

(A) 720

(B) 1080

(C) 1440

(D) 2160

(E) 2520

Solução:

Os números que serão formados possuem cinco algarismos, então deve-se escolher os algarismos para as cinco posições no número.

Há restrições para o primeiro algarismo: não pode ser 0 nem 7 nem 9, visto que os números devem ter algarismos distintos e ser menores que 70 000. Assim, dentre os sete algarismos 0, 1, 2, 3, 5, 7 e 9, apenas quatro (1, 2, 3 e 5) podem ocupar a primeira posição no número. Observando as condições, os demais algarismos não possuem restrição.

Portanto as possibilidades de escolha para os cinco algarismos são, respectivamente: 4, 6, 5, 4 e 3. Desse modo, há $4\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 1440$ números que podem ser formados.

Alternativa correta: (C)

15. (LEONARDO, 2020, p. 122) Uma sala deve ser iluminada com 5 lâmpadas e com interruptores independentes para acendê-las. De quantos modos possíveis poderemos iluminar essa sala?

(A) 5

(B) 10

(C) 25

(D) 30

(E) 31

Solução:
Os interruptores são independentes, então cada lâmpada é acesa individualmente. Assim, pode-se ter 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 lâmpadas acesas.

- Ter 1 lâmpada acesa pode ocorrer de $C_{5,1} = 5$ maneiras;
- Ter 2 lâmpadas acesas pode ocorrer de $C_{5,2} = \dfrac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = \dfrac{5 \cdot \cancelto{2}{4} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = 10$ maneiras;
- Ter 3 lâmpadas acesas pode ocorrer de $C_{5,3} = C_{5,2} = 10$ maneiras;
- Ter 4 lâmpadas acesas pode ocorrer de $C_{5,4} = C_{5,1} = 5$ maneiras;
- Ter 5 lâmpadas acesas pode ocorrer de $C_{5,5} = 1$ maneira.

Desse modo, ter 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 lâmpadas acesas, pode ocorrer de $5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$ maneiras.
São, portanto, 31 modos possíveis de iluminar a sala.
Alternativa correta: (E)

2.3 Aula 3: Revendo conceitos básicos relativos ao estudo de Probabilidade

Objetivo geral: Revisar os conceitos básicos relacionados à Teoria das Probabilidades.

Objetivos específicos:

- Conhecer a motivação histórica que levou ao desenvolvimento da Teoria da Probabilidade;
- Identificar situações do cotidiano e da ciência onde a probabilidade é aplicada;
- Verificar o conhecimento prévio dos alunos sobre conceitos básicos relativos ao estudo da probabilidade (experimento aleatório, espaço amostral e evento).

Ações do professor:

- Apresentar o tema e os objetivos da aula;
- Verificar se existe aluno que não está com smartphone; se a escola não dispuser de um recurso substitutivo, aplicar as atividades em dupla;
- Disponibilizar o link Atividade no Mentimeter e aplicar o Mentimeter sobre a origem e as aplicações da Teoria da Probabilidade;

- Para complementar o que os alunos já souberem sobre o assunto, apresentar o texto "Como surgiu o conceito de probabilidade?" (DANTE; VIANA, 2020, p. 75-76), disponível no Apêndice B;
- Solicitar, em caráter de atividade extraclasse, que pesquisem sobre Euler, cujo nome é citado no texto do item anterior (sua biografia e suas contribuições à história da Matemática, destacando as relativas ao estudo de Análise Combinatória e de Probabilidade), explicando que oportunizará, na segunda aula subsequente à atual, que alunos voluntários compartilhem com a turma os resultados de suas pesquisas; se houver na turma estudantes com comprometimento da comunicação oral, deixar claro que poderão apresentar a pesquisa na forma manuscrita ou impressa, se desejarem;
- Disponibilizar o link Atividade no Kahoot e aplicar o Kahoot sobre os conceitos básicos relativos ao estudo de Probabilidade.

Ações dos alunos:

- Ouvir a apresentação da proposta pelo professor e comentar ou opinar, caso desejem;
- Participar da leitura do texto, fazendo comentários;
- Anotar a solicitação da atividade extraclasse e realizá-la posteriormente;
- Acessar os links fornecidos pelo professor, seguindo orientações para realizar as atividades.

Recursos utilizados:

- Computador;
- Projetor de slides ou TV;
- Smartphone dos alunos;
- Recursos digitais: Mentimeter, Kahoot.

Avaliação:

- Interesse;
- Participação;
- Comprometimento;
- Respostas às atividades.

Questões da atividade no Mentimeter

1. O conceito de probabilidade começou a se formar no século XV e foi formalizado no século XVII. Que atividades motivaram o seu surgimento?
   Possível resposta: Jogo de cartas, loterias, divisão de apostas, eventos astronômicos, seguros de vida e de bens relacionados ao transporte marítimo.
2. O estudo da Probabilidade desenvolveu-se e, atualmente, possui diversas aplicações. Que aplicações você pode citar?
   Possível resposta: Previsão meteorológica; previsão de velocidade e comportamento da transmissão de doenças em situações epidemiológicas; estudos de Genética; avaliação de riscos e cálculo de prêmios de seguros; análise econômica; jogos e apostas esportivas; estudos demográficos.

Questões da atividade no Kahoot

1. Fenômenos determinísticos são os que produzem resultados diferentes, quando repetidos sob as mesmas condições.
   (a) Verdadeiro
   (b) Falso
   Aternativa correta: (b)
2. Experimento aleatório é o que, repetido nas mesmas condições, possui entre as possibilidades resultados imprevisíveis.
   (a) Verdadeiro
   (b) Falso
   Aternativa correta: (a)
3. Não é exemplo de experimento aleatório:
   (a) Lançamento de um dado e observação da face voltada para cima.
   (b) Altura máxima atingida por um objeto lançado para cima, a partir do solo.
   (c) Sorteio de uma pessoa entre 10 pessoas de um grupo.
   (d) Retirada aleatória de 5 parafusos de uma caixa contendo 100 parafusos.
   Aternativa correta: (b)
4. São exemplos de experimentos determinísticos:
   (a) Lançamento de um dado não viciado; verificação de um resultado da loteria.
   (b) Previsão do tempo; determinação da vida útil de um equipamento eletrônico.
   (c) Aceleração de um corpo em queda livre; temperatura de ebulição da água.

(d) Número de páginas impressas por minuto; lançamento de uma moeda honesta.

Aternativa correta: (c)

5. O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de:

   (a) Amostra

   (b) Evento

   (c) Subespaço

   (d) Espaço amostral

   Aternativa correta: (d)

6. Um evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.

   (a) Verdadeiro

   (b) Falso

   Aternativa correta: (a)

7. A obtenção de 3 resultados "cara" em um lançamento de 2 moedas é um evento do tipo

   (a) pouco provável

   (b) muito provável

   (c) impossível

   (d) certo

   Aternativa correta: (c)

8. A obtenção de número menor que 7 no lançamento de um dado cúbico é um evento do tipo:

   (a) pouco provável

   (b) muito provável

   (c) impossível

   (d) certo

   Aternativa correta: (d)

9. Jogando um dado de 12 faces numeradas de 1 a 12 e anotando a face voltada para cima, qual é o espaço amostral?

   (a) É o conjunto formado pelos números registrados nas doze faces do dado.

   (b) É o conjunto formado pelos números pares registrados nas faces do dado.

(c) É o conjunto formado pelos números ímpares registrados nas faces do dado.

(d) É o conjunto dos números menores do que doze registrados nas faces do dado.

Aternativa correta: (a)

10. Jogando um dado de 12 faces numeradas de 1 a 12, que conjunto é o evento "sair número primo"?

(a) {1,3,5,7,9,11}

(b) {2,3,5,7,11}

(c) {2,4,6,8,10,12}

(d) {1,2,5,7}

Aternativa correta: (b)

2.4 Aula 4: Resolvendo exercícios de aplicação dos conceitos básicos

Objetivo geral: Continuar a revisão dos conceitos básicos.

Objetivos específicos:

- Determinar o número de elementos do espaço amostral de um experimento aleatório;
- Determinar o número de elementos de um evento;
- Calcular a probabilidade de ocorrência de um evento num espaço amostral equiprovável.

Ações do professor:

- Apresentar o tema e os objetivos da aula;
- Entregar aos alunos a lista de exercícios (disponível no Apêndice C) para ser resolvida em dupla;
- Corrigir, em momento posterior à aula, as respostas dos alunos às questões da lista.

Ações dos alunos:

- Resolver, em dupla, os exercícios da lista entregue pelo professor;
- Solicitar auxílio do professor, se for necessário.

Recursos utilizados:

- Lista de exercícios, impressa em quantidade suficiente para a turma dividida em duplas;
- Material do aluno: lápis ou caneta, borracha.

Avaliação:

- Interesse;
- Participação;
- Respostas aos exercícios.

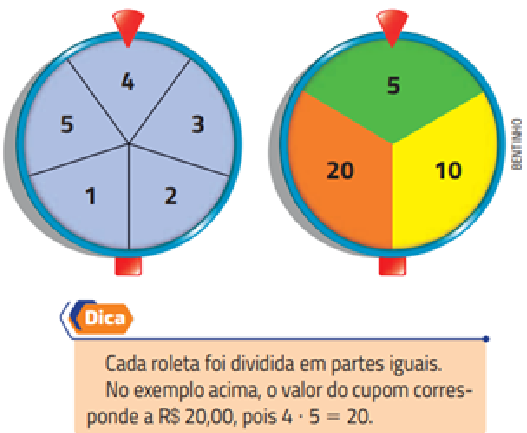
Para a construção da lista de exercícios proposta nesta aula, foram analisadas questões relativas ao conteúdo Probabilidade em sete livros didáticos, todos do PNLD 2021.

Observou-se que temas geradores como lançamento de dados e sorteio de cartas, por exemplo, são bastante recorrentes nos exercícios em todos os livros consultados. Foram selecionadas questões com temas geradores diversificados, cujos enunciados fogem ao estilo dos apresentados rotineiramente, além de possibilitarem a interação tanto com outras áreas do conhecimento quanto com atividades cotidianas dos estudantes.

A lista é formada por onze questões, das quais dez foram obtidas nos livros didáticos e uma foi elaborada pela autora.

Questões da Lista de Exercícios

1. (SOUZA, 2020, p.103) Na promoção de certa loja, quando um cliente realiza uma compra acima de R$ 200,00, ele gira duas roletas e ganha um cupom de desconto. O valor desse cupom corresponde ao produto dos números indicados nas roletas, em reais. Observe.



(a) Quantas são as composições de multiplicação possíveis de serem obtidas nesse sorteio? Se necessário, construa uma árvore de possibilidades.

(b) Determine o espaço amostral com todas as opções de valores do cupom de desconto.

Solução:

(a) Existem 5 e 3 resultados possíveis, respectivamente, ao rodar a primeira e a segunda roleta. Logo, pelo princípio multiplicativo, há $5 \cdot 3 = 15$ composições de multiplicações possíveis.

Se for necessária a representação gráfica:

$$\overbrace{5 \quad 10 \quad 20}^{1} \quad \overbrace{5 \quad 10 \quad 20}^{2} \quad \overbrace{5 \quad 10 \quad 20}^{3} \quad \overbrace{5 \quad 10 \quad 20}^{4} \quad \overbrace{5 \quad 10 \quad 20}^{5}$$

(b) As possíveis composições de multiplicações são:

• $1 \cdot 5 = 5$	• $2 \cdot 5 = 10$	• $3 \cdot 5 = 15$	• $4 \cdot 5 = 20$	• $5 \cdot 5 = 25$
• $1 \cdot 10 = 10$	• $2 \cdot 10 = 20$	• $3 \cdot 10 = 30$	• $4 \cdot 10 = 40$	• $5 \cdot 10 = 50$
• $1 \cdot 20 = 20$	• $2 \cdot 20 = 40$	• $3 \cdot 20 = 60$	• $4 \cdot 20 = 80$	• $5 \cdot 20 = 100$

Logo, o espaço amostral é $S = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 80, 100\}$.

2. (LEONARDO, 2020, p. 130) Dez pessoas, das quais 4 são de uma mesma família, serão colocadas aleatoriamente em fila. Qual é a probabilidade de as 4 pessoas da família ficarem juntas?

Solução:

Para determinar o número de casos favoráveis, podemos considerar a permutação de 7 lugares na fila, visto termos o grupo familiar, que deve permanecer junto, mais as outras 6 pessoas; considerando, ainda, que as 4 pessoas da família podem permutar a posição entre si, temos que o número de casos favoráveis é dado por $P_7 \cdot P_4 = 7! \cdot 4!$.

O número de casos possíveis é o número de permutações das 10 pessoas que serão postas na fila, isto é, $P_{10} = 10!$.

Logo, denominando E o evento "colocar em fila, aleatoriamente, 10 pessoas, sendo 4 de uma mesma família e as 4 pessoas da família ficarem juntas", a probabilidade da ocorrência de E é dada por:

$$P(E) = \frac{7! \cdot 4!}{10!} = \frac{\cancel{7!} \cdot \cancel{4} \cdot \cancelto{1}{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{10 \cdot \cancelto{3}{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7!}} = \frac{1}{30}.$$

3. (TEIXEIRA, 2020, p. 66) Jéssica deseja preparar um lanche com pão de forma e mais três ingredientes, que ela irá escolher entre alface, tomate, queijo e

carne. O valor calórico das porções de cada ingrediente que ela pode utilizar está indicado no quadro a seguir. Supondo que Jéssica prepare aleatoriamente

Ingrediente	Valor calórico (em kcal)
Pão de forma (*P*)	130
Alface (*A*)	10
Tomate (*T*)	18
Queijo (*Q*)	55
Carne (*C*)	110

um lanche, qual é o espaço amostral que representa todas as possibilidades de escolha em relação:

(a) aos ingredientes. **(b)** ao valor calórico.

Uma das possibilidades em relação aos ingredientes é (*P*, *A*, *T*, *Q*).

Solução:

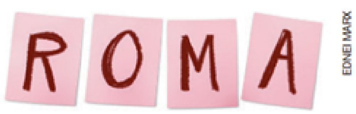
(a) $S = \{(P, A, T, Q), (P, A, T, C), (P, A, Q, C), (P, T, Q, C)\}$.

(b) Considerando as combinações possíveis descritas no item (a) e o valor calórico de cada ingrediente, temos:

- $P, A, T, Q : 130 + 10 + 18 + 55 = 213$
- $P, A, T, C : 130 + 10 + 18 + 110 = 268$
- $P, A, Q, C : 130 + 10 + 55 + 110 = 305$
- $P, T, Q, C : 130 + 18 + 55 + 110 = 313$

Assim, $S = \{213, 268, 305, 313\}$.

4. (LEONARDO, 2020, p. 130) Em 4 cartelas, escrevem se as letras R, O, M e A, uma em cada cartela. As cartelas são, então, depositadas em um saco.



Qual é a probabilidade de, retirando uma a uma as cartelas do saco, formarmos, na ordem de saída, a palavra AMOR?

Solução:

O número de agrupamentos formados pelas letras, em ordem de saída, uma a uma, é o número de permutações das 4 letras: $P_4 = 4! = 24$.
Há um único agrupamento que interessa: A, M, O, R.
Logo, a probabilidade é $\dfrac{1}{24}$.

5. (BONJORNO; GIOVANNI JÚNIOR; SOUZA, 2020, p. 120) Em uma gaveta, há três canetas de tinta azul, duas de tinta preta, quatro de tinta verde e três que estão sem carga de tinta. Escolhendo uma dessas canetas ao acaso, determine a probabilidade de a caneta:

   (a) escrever em qualquer cor;

   (b) não escrever;

   (c) escrever em azul.

   Solução:

   (a) O total de canetas é $3 + 2 + 4 + 3 = 12$; então, para a escolha de uma caneta ao acaso, há 12 possibilidades. O evento "retirar uma caneta que escreva em qualquer cor" possui $12 - 3 = 9$ elementos, visto que, das 12 canetas, há 3 canetas sem carga de tinta.
   Logo a probabilidade de ocorrência do evento é $\dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$.

   (b) Há 3 canetas sem carga de tinta, então a probabilidade de retirar uma caneta que não escreva é $\dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

   (c) Há 3 canetas de tinta azul, então a probabilidade de retirar uma caneta que escreva em azul é $\dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

6. (DANTE; VIANA, 2020, p. 73) Na Física, o conceito de densidade é a relação entre a medida de massa de um material e a medida de volume que ele ocupa no espaço. Um valor de referência é a densidade da água, que ocupa 1 cm^3 de espaço para cada grama de massa. O fato de um objeto afundar ou boiar na água tem relação direta com a densidade. Considere uma situação em que pequenos recipientes de densidade desprezível serão preenchidos com determinada substância. Se a medida de densidade dessa substância for maior do que 1 g/cm^3, o recipiente afunda; do contrário, boia. Veja a lista de materiais e as respectivas medidas de densidade.

Medida de densidade de materiais

Material	Densidade (g/cm^3)
Aço	7,8
Chumbo	11,3
Cobre	8,96
Etanol	0,789
Ferro	7,87
Gelatina	1,27
Glicerina	1,26
Leite	1,03
Madeira	0,5
Mercúrio	13,5
Ouro	19,3
Platina	21,5
Quartzo	2,65

Fonte de consulta: TODA MATÉRIA. *Densidade.* Disponível em: https://www.todamateria.com.br/densidade/. Acesso em: 9 jul. 2020.

Qual é a probabilidade de escolhermos aleatoriamente um desses materiais e ele boiar na água?

Solução: São 13 materiais, dos quais 2 (etanol e madeira) possuem densidade menor do que ou igual a $1g/cm^3$. Portanto, a probabilidade de escolhermos aleatoriamente um desses materiais e ele boiar na água é $\frac{2}{13}$.

7. (BONJORNO; GIOVANNI JÚNIOR; SOUZA, 2020, p.120) Com os algarismos 3, 5 e 7, formamos todos os números de três algarismos possíveis, sem repetição. Escolhendo um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de essa escolha recair em um número:

   (a) múltiplo de 3?

   (b) par?

   Solução:

   (a) A quantidade de números de 3 algarismos, sem repetição, formados por 3, 5 e 7 é o número de permutações desses três algarismos, isto é, $3! = 6$.
   Sabendo que um número é múltiplo de 3 se a soma dos valores absolutos de seus algarismos é múltiplo de 3, observando que $3+5+7 = 15$ (múltiplo de 3) e considerando, ainda, a comutatividade da adição, qualquer número formado pelos algarismos 3, 5 e 7 é múltiplo de 3.
   Trata-se, então, de um evento certo, cuja probabilidade é igual a 1.

   (b) Em um número par, o algarismo das unidades é par; portanto, formar um número par com os algarismos 3, 5 e 7 é um evento impossível, cuja probabilidade é igual a 0.

8. (LONGEN; BLANCO, 2020, p. 96 - Adaptado) Pedro, mais uma vez, acordou atrasado para ir à escola! Meio sonolento ainda, foi ao armário de roupas, abriu a gaveta de meias, pegou um pé de meia sem olhar e calçou em um dos pés; depois, pegou outro pé de meia sem olhar e calçou no outro pé. Detalhe: na gaveta das meias havia inicialmente 6 pares de meias diferentes, totalmente espalhadas, isto é, 12 pés de meia misturados.

(a) Nesse experimento, as meias são diferentes apenas na estampa. É um experimento aleatório?

(b) Qual é o espaço amostral desse experimento? Quantos são os elementos do espaço amostral?

(c) Qual é o evento favorável a Pedro? Quantos são os elementos do evento?

(d) É mais provável que Pedro acerte ou erre as meias de um mesmo par? Explique como pensou.

(e) Qual é a probabilidade de Pedro ter calçado os dois pés com o mesmo par de meias?

Solução:

(a) Sim, não se sabe antecipadamente qual meia será retirada.

(b) O espaço amostral é o conjunto das possíveis duplas de meias; então, seu número de elementos é igual ao número de combinações das 12 meias retiradas 2 a 2, isto é: $C_{12,2} = \dfrac{12!}{2! \cdot 10!} = \dfrac{\overset{6}{\cancel{12}} \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{10!}} = 66.$

(c) O evento é escolher duas meias do mesmo par. Como são 6 possibilidades de pares, o número de elementos do evento é 6.

(d) É mais provável que erre. Justificativa: resposta pessoal.

(e) $\dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{6}{66} = \dfrac{1}{11}.$

Outra forma de se obter essa resposta: Ao retirar, inicialmente, qualquer pé de meia, restarão na gaveta 11 pés, dos quais apenas 1 forma o par com o que Pedro já pegou, logo a probabilidade de formar o par é: $\dfrac{1}{11}$.

9. (LEONARDO, 2020, p. 130) Cristina tem na carteira quatro notas de R\$ 10,00, duas de R\$ 50,00 e uma de R\$ 100,00. Para pagar uma conta de R\$ 40,00 no supermercado, ela puxa duas notas da carteira, aleatoriamente. Qual é a probabilidade de Cristina não precisar puxar outra nota?

Solução: Observa-se que há uma única situação em que Cristina precisará puxar outra nota após tirar, aleatoriamente, 2 notas da carteira: se ela tirar 2 notas de R\$ 10,00. Como ela possui 4 notas de R\$ 10,00, o número de modos de tirar 2 dessas notas é dado por $C_{4,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2!}} = 6.$

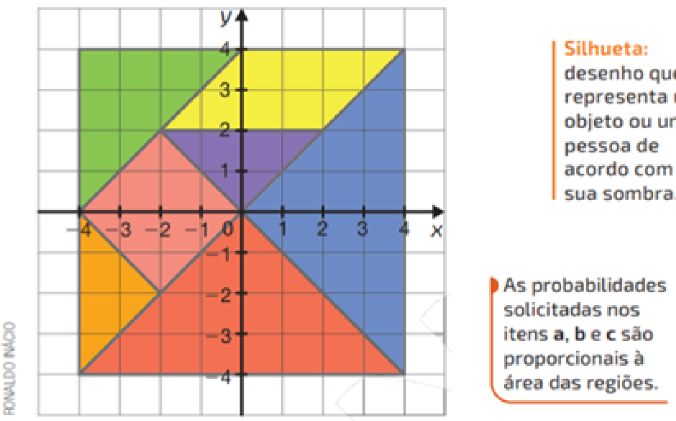
O número total de modos de tirar 2 das 7 notas que Cristina possui é dado por $C_{7,2} = \dfrac{7!}{2! \cdot 5!} = \dfrac{7 \cdot \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = 21.$

Das 21 maneiras de retirar duas notas, não são favoráveis apenas as 6 maneiras de tirar duas notas de R\$ 10,00; Assim o número de casos favoráveis é $21 - 6 = 15$.

Portanto a probabilidade de Cristina não precisar puxar outra nota é $\frac{15}{21} = \frac{5}{7}$.

10. Nas eleições municipais de 2024, Feira de Santana teve 3 candidatos a prefeito e 411 candidatos a vereador. Considerando que há possibilidade de votar nulo ou, ainda, votar em branco, para um ou os dois cargos, de quantos modos distintos um eleitor feirense pode ter feito sua escolha de votação?
Solução:
Há 5 maneiras de votar para prefeito: votando em um dos 3 candidatos, ou votando em branco, ou votando nulo.
Semelhantemente, há 413 modos de votar para vereador.
Como os eventos "votar para prefeito" e "votar para vereador" são independentes, basta aplicar o princípio multiplicativo para obter o número de modos distintos que um eleitor feirense teve para fazer sua escolha de votação: $5 \cdot 413 = 2065$.

11. (TEIXEIRA, 2020, p. 73) O tangram é um quebra-cabeça chinês de origem milenar, composto por sete peças cujas formas lembram figuras geométricas planas que, organizadas, podem formar cerca de 1 700 silhuetas. Os chineses o chamam de "Tábua de sabedoria" ou "Tábua das sete sabedorias". Considere o seguinte tangram em um plano cartesiano.



(a) Qual é a probabilidade de, ao marcarmos aleatoriamente um ponto pertencente ao tangram, esse ponto:
- pertencer à região alaranjada?
- pertencer à região roxa?
- não pertencer à região azul?

(b) Se marcarmos um ponto pertencente ao tangram com abscissa -3, qual é a probabilidade de esse ponto pertencer à região vermelha? E à região verde?

(c) Ao marcarmos um ponto pertencente ao tangram com ordenada positiva, qual é a probabilidade de esse ponto pertencer à região amarela?

Solução:

O tangran da figura dada é um quadrado de lado 8, logo sua área é $8^2 = 64$.

(a)
- A região alaranjada é um triângulo de área igual a $\dfrac{4 \cdot 2}{2} = 4$.
  A probabilidade de, ao marcarmos aleatoriamente um ponto pertencente ao tangram, esse ponto pertencer à região alaranjada é, então, de $\dfrac{4}{64} = \dfrac{1}{16}$.
- A região roxa é um triângulo de área igual a $\dfrac{4 \cdot 2}{2} = 4$.
  A probabilidade de, ao marcarmos aleatoriamente um ponto pertencente ao tangram, esse ponto pertencer à região roxa é, então, de $\dfrac{4}{64} = \dfrac{1}{16}$.
- A região azul é um triângulo de área igual a $\dfrac{8 \cdot 4}{2} = 16$.
  A probabilidade de, ao marcarmos aleatoriamente um ponto pertencente ao tangram, esse ponto pertencer à região azul é de $\dfrac{16}{64} = \dfrac{1}{4}$.

  Os eventos "pertencer à região azul" e "não pertencer à região azul" são complementares. Portanto, a probabilidade de, ao marcarmos aleatoriamente um ponto pertencente ao tangram, esse ponto não pertencer à região azul é de $1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

(b) Os pontos com abscissa -3 pertencentes ao tangram formam o segmento de reta de extremos $(-3, -4)$ e $(-3, 4)$, cujo comprimento é igual a 8.

A região vermelha contém uma parte do segmento, com comprimento igual a 1. Portanto a probabilidade de marcarmos um ponto pertencente ao tangram com abscissa -3 e esse ponto pertencer à região vermelha é igual a $\dfrac{1}{8}$.

A região verde contém a parte do segmento com comprimento 3. Portanto a probabilidade de marcarmos um ponto pertencente ao tangram com abscissa -3 e esse ponto pertencer à região verde é igual a $\dfrac{3}{8}$.

(c) A região do tangram formada pelos pontos de ordenada positiva é um retângulo de área igual a $8 \cdot 4 = 32$.

A região amarela, inteiramente contida no retângulo, é um paralelogramo de área igual $4 \cdot 2 = 8$.

Portanto, ao marcarmos um ponto pertencente ao tangram com ordenada positiva, a probabilidade de esse ponto pertencer à região amarela é igual a $\dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.

2.5 Aula 5: Estudando um problema particular de probabilidade

Objetivo geral: Estudar o problema "Suponha que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso. Então, qual a probabilidade de que três números consecutivos sejam tirados?"

Objetivos específicos:

- Compreender o problema tema da aula;
- Determinar a solução, mesclando experimentação e cálculo, de casos particulares do problema;
- Conjecturar, a partir dos casos resolvidos, a fórmula de Euler que soluciona o problema apresentado.

Ações do professor:

- Apresentar o tema e os objetivos da aula;
- Promover um breve relato de alunos, voluntários, sobre os resultados da pesquisa solitada em aula anterior; se algum aluno com comprometimento da comunicação oral tornar disponível o seu trabalho, fazer a leitura para a turma;
- Apresentar folha impressa com a situação-problema e a tabela para anotação dos resultados da atividade (Apêndice D);
- Fazer a leitura juntamente com os alunos e certificar-se de que houve entendimento da situação-problema;
- Organizar a turma em duplas (preferencialmente, novas duplas em relação às da aula anterior);
- Entregar um kit de fichas numeradas de 1 a 6 (Apêndice E) para cada dupla e solicitar aos alunos que determinem, empiricamente, as soluções do problema para os valores de n respectivamente iguais a 3, 4, 5 e 6. À medida em que obtiverem os resultados, os alunos preencherão a tabela recebida na folha impressa, a qual será utilizada, também, na atividade seguinte;
- Após os alunos apresentarem seus resultados, informar sobre a existência de uma fórmula que generaliza a solução, citando seu criador. Poderá dizer: "Sabem que Euler encontrou uma fórmula que determina a solução para qualquer valor de n? Vamos conjecturar (explicar o significado do termo, se for necessário) agora, com auxílio de um jogo, qual é a fórmula do Euler?";

- Apresentar através da Atividade no Wordwall, no modelo roleta aleatória ou cartas aleatórias, um conjunto de dez fórmulas para que os alunos conjecturem sobre qual dentre elas é a fórmula de Euler. Poderá, a fim de motivar um maior engajamento em relação à atividade, convidar um aluno de cada dupla, por vez, para girar a roleta.

Ações dos alunos:

- Acompanhar a leitura da situação-problema apresentada pelo professor, refletir e comentar sobre o entendimento dela;
- Determinar as soluções para os valores propostos pelo professor e preencher a tabela;
- Participar da atividade proposta pelo professor, observar as fórmulas apresentadas e, realizando testagem dos valores anotados na tabela, presumir qual é a fórmula de Euler.

Recursos utilizados:

- Atividade impressa;
- Kits de fichas (podem ser impressas ou escritas manualmente e recortadas em papel resistente) numeradas de 1 a 6, em quantidade suficiente para a turma organizada em duplas;
- Material do aluno: lápis ou caneta, borracha, folha para rascunho;
- Recurso digital: Wordwall.

Avaliação:

- Interesse;
- Participação;
- Cooperação;
- Desempenho nas atividades.

É importante que o professor comente sobre o funcionamento do jogo antes de iniciar de fato a atividade, especialmente pela possibilidade que há de, no primeiro giro da roleta, ou na primeira carta virada, já se obter a fórmula. No momento em que considere oportuno, antes ou após a realização da atividade, poderá conduzir os alunos à verificação de questões como:

A) Qual a probabilidade de se obter a fórmula correta no primeiro giro da roleta ou na primeira carta virada?

São 10 fórmulas, e apenas 1 é a correta; logo essa probabilidade é igual $\frac{1}{10} = 10\%$.

B) Qual a probabilidade de se obter a fórmula correta no segundo giro da roleta ou na segunda carta virada?

Para que a fórmula correta seja obtida no segundo giro da roleta ou na segunda carta virada, considerando o modo sugerido de aplicação da atividade, isto é, eliminando-se as fórmulas à medida em que forem "reveladas", deve-se ter:

- ✓ primeiro giro ou primeira carta: ocorrência de fórmula incorreta, o que nos dá a probabilidade de $\frac{9}{10}$;
- ✓ segundo giro ou segunda carta: ocorrência de fórmula correta dada a ocorrência de incorreta anteriormente; logo a probabilidade é igual a $\frac{\cancel{9}}{10} \cdot \frac{1}{\cancel{9}} = \frac{1}{10} = 10\%$.

C) Qual a probabilidade de só se obter a fórmula correta no último giro da roleta ou na última carta virada?

Obter a fórmula correta apenas no último giro da roleta ou na última carta virada indica a não obtenção em uma sequência de 9 tentativas anteriores.

Considerando a eliminação, sucessivamente, das fórmulas reveladas, essa probabilidade é dada por: $\frac{\cancel{9}}{10} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{1}} \cdot = \frac{1}{10} = 10\%$.

Observando essa última expressão, percebe-se que a probabilidade de acertar a fórmula em qualquer dos giros da roleta ou qualquer das cartas viradas, se forem sucessivamente eliminadas as fórmulas, à medida em que forem reveladas, é sempre igual a 10%.

Se julgar pertinente, o professor pode comentar que, se tivesse sido feita a opção pelo critério de não eliminar as fórmulas "reveladas", o espaço amostral do experimento não teria sofrido alteração a cada rodada. Nesse caso:

- ✓ A probabilidade de acertar a fórmula na segunda tentativa seria igual a $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{100} = 9\%$;
- ✓ Para obter a fórmula correta apenas no último giro da roleta ou na última carta virada, como os eventos "acertar a fórmula" e "não acertar a fórmula" são complementares, com probabilidades respectivamente iguais a $\frac{1}{10}$ e $\frac{9}{10}$, pode-se aplicar o método binomial de probabilidades, considerando a ocorrência de 9 resultados de insucesso seguidos de 1 resultado de sucesso, nessa ordem. Desse modo, a probabilidade seria igual a $\left(\frac{9}{10}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 = \frac{9^9}{10^{10}} = \frac{387.420.489}{10.000.000.000} \approx 3,87\%$.

Respostas esperadas no preenchimento da tabela:

- ✓ Para $n = 3$, "escolher 3 números consecutivos dentre números de 1 a 3" é um evento certo, portanto $P(E_3) = 1$;

✓ Para $n = 4$, tem-se o evento "escolher 3 números consecutivos dentre números de 1 a 4", cujo número de elementos é igual a 2; o número de elementos do espaço amostral é o total de possibilidades da escolha de 3 dentre 4 números, isto é, $C_{4,3} = 4$; portanto $P(E_4) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$;

✓ Para $n = 5$, tem-se o evento "escolher 3 números consecutivos dentre números de 1 a 5", cujo número de elementos é igual a 3; o número de elementos do espaço amostral é o total de possibilidades da escolha de 3 dentre 5 números, isto é, $C_{5,3} = 10$; portanto $P(E_5) = \dfrac{3}{10}$;

✓ Para $n = 6$, tem-se o evento "escolher 3 números consecutivos dentre números de 1 a 6", cujo número de elementos é igual a 4; o número de elementos do espaço amostral é o total de possibilidades da escolha de 3 dentre 6 números, isto é, $C_{6,3} = 20$; portanto $P(E_6) = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$.

Após registrarem esses valores na tabela, os alunos a utilizarão para realizar a próxima atividade.

Tabela preenchida com os resultados encontrados:

n	$P(E_n)$
3	1
4	$\dfrac{1}{2}$
5	$\dfrac{3}{10}$
6	$\dfrac{1}{5}$

Fórmulas utilizadas na atividade no Wordwall:

1. $P(E_n) = n$
2. $P(E_n) = n - 2$
3. $P(E_n) = \dfrac{n}{3}$
4. $P(E_n) = \dfrac{n+1}{4}$
5. $P(E_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n-2}}$
6. $P(E_n) = \dfrac{1}{n-2}$
7. $P(E_n) = \dfrac{5-n}{2}$
8. $P(E_n) = \dfrac{n^2}{23n-60}$
9. $P(E_n) = \dfrac{3n^2-31n+86}{20}$
10. $P(E_n) = \dfrac{6}{n(n-1)}$

Realizando as testagens nas fórmulas e comparando os resultados obtidos, sucessivamente, com os valores de n e das respectivas probabilidades registrados na tabela, tem-se:

- ✓ $P(E_n) = n$ não é válida para nenhum dos valores;
- ✓ $P(E_n) = n - 2$, $P(E_n) = \dfrac{n}{3}$, $P(E_n) = \dfrac{n+1}{4}$ e $P(E_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n-2}}$ são válidas apenas para $n = 3$;
- ✓ $P(E_n) = \dfrac{1}{n-2}$, $P(E_n) = \dfrac{5-n}{2}$ e $P(E_n) = \dfrac{n^2}{23n-60}$ são válidas para $n = 3$ e para $n = 4$;
- ✓ $P(E_n) = \dfrac{3n^2 - 31n + 86}{20}$ é válida para $n = 3$, para $n = 4$ e para $n = 5$;
- ✓ $P(E_n) = \dfrac{6}{n(n-1)}$ é válida para $n = 3$, para $n = 4$, para $n = 5$ e para $n = 6$, isto é, para todos os valores registrados na tabela.

Em seguida à atividade, o professor lançará questionamentos, tais como: "Em vista da impossibilidade de testagem para os infinitos valores de n e considerando a validade da fórmula $P(E_n) = \frac{6}{n(n-1)}$ para todos os valores testados, ela pode ser generalizada para a situação em questão, isto é, pode-se concluir que ela é válida para quaisquer valores de n, incluindo os não testados?"

Sem deixar de valorizar as respostas dos alunos, ratificando-as ou não, conforme o teor delas, acrescentará, se não surgir nas respostas, a informação acerca da necessidade de demonstração para se validar a generalização de determinadas afirmações matemáticas. Dará, então, o direcionamento para as atividades das aulas seguintes, que consistirão na apresentação de algumas demonstrações já realizadas e na demonstração da fórmula, cuja hipótese de validade foi levantada.

2.6 Aula 6: Entendendo a necessidade e a estrutura de uma demonstração

Objetivo geral: Entender por que razão e de que forma se faz demonstração matemática.

Objetivos específicos:

- Perceber a necessidade e a importância de demonstrações matemáticas;
- Conhecer elementos da estrutura de uma demonstração matemática direta;
- Oportunizar o contato com alguns exemplos de demonstração matemática.

Ações do professor:

- Apresentar o tema e os objetivos da aula;

- Retomar o questionamento feito no final da aula anterior sobre a necessidade de uma demonstração matemática para validar determinadas afirmações nessa área de conhecimento;
- Utilizando projetor de slides ou TV, apresentar o conceito, as características e, ao menos, dois exemplos de demonstrações diretas relacionadas a conteúdos já estudados pelos alunos;
- Responder perguntas ou comentários dos alunos, caso ocorram;
- Organnizar a turma em grupos de até quatro componentes e entregar a cada grupo pedaços de papel contendo partes não ordenadas de uma demonstração para serem postas em sequência.

Ações dos alunos:

- Observar as demonstrações apresentadas pelo professor e realizar comentários e/ou perguntas pertinentes;
- Em grupo, colocar em ordem as partes da demonstração recebidas do professor.

Recursos utilizados:

- Computador;
- Projetor de slides ou TV;
- Papéis contendo partes de uma demonstração;

Avaliação:

- Interesse;
- Participação;
- Cooperação.

O professor apresentará os exemplos de demonstração, chamando a atenção dos alunos para as particularidades que devem ser observadas na escrita desse gênero textual, quais sejam:

✓ Escrever claramente a afirmação que se deseja demonstrar;

✓ Indicar o início com uma das expressões “Demonstração” ou “Prova”;

✓ Escrever a demonstração, utilizando linguagem clara, através da fomulação de sentenças completas e bem estruturadas, lançando mão, se for necessário, de fórmulas, equações ou outros argumentos matemáticos já validados;

✓ Indicar o final com um marcador, que pode ser a abreviação C.Q.D de "conforme queríamos demonstrar" ou um dos símbolos ■ ou □.

Exemplos de demonstrações que podem ser apresentadas:

Exemplo 1

Teorema 2.1. *A soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau* $ax^2 + bx + c = 0$ *são, respectivamente, iguais a* $-\frac{b}{a}$ *e* $\frac{c}{a}$.

Demonstração. Considere a equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são coeficientes e $a \neq 0$.

Da fórmula resolutiva da equação, sabemos que as raízes são

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{com} \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Efetuando a soma das raízes, obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b \cancel{- \sqrt{\Delta}} - b \cancel{+ \sqrt{\Delta}}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Efetuando o produto das raízes, obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= \frac{(-b) \cdot (-b) + (-b) \cdot \sqrt{\Delta} + (-\sqrt{\Delta}) \cdot (-b) + (-\sqrt{\Delta}) \cdot \sqrt{\Delta}}{2a \cdot 2a} \\ &= \frac{b^2 - \cancel{b\sqrt{\Delta}} + \cancel{b\sqrt{\Delta}} - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} \\ &= \frac{\cancel{4}ac}{\cancel{4}\cancelto{a}{a^2}} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Portanto, a soma e o produto das raízes x_1 e x_2 de uma equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ são, respectivamente:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

■

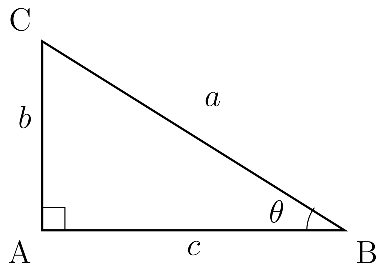
Exemplo 2

Teorema 2.2 (Relação Fundamental da Trigonometria)**.** *Qualquer que seja a medida do ângulo θ, vale a igualdade* $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Demonstração para os ângulos agudos, no triângulo retângulo:

Demonstração. Considere o triângulo retângulo ABC, onde:

- a é o comprimento da hipotenusa;
- b é o comprimento do cateto oposto ao ângulo θ;
- c é o comprimento do cateto adjacente ao ângulo θ.



Pela definição de seno e de cosseno, sabemos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{c}{a}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \\ &= \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \\ &= \frac{b^2 + c^2}{a^2} \quad \text{(I)} \end{aligned}$$

Pelo teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), obtemos:

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

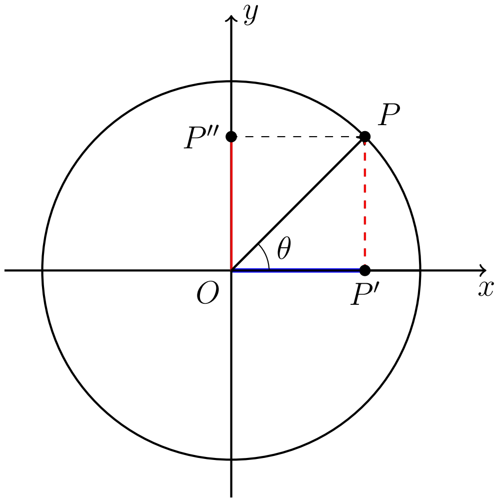
Portanto, qualquer que seja a medida do ângulo θ em um triângulo retângulo, vale a igualdade:

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

■

Demonstração para os ângulos de quaisquer medidas:

Demonstração. Seja a circunferência trigonométrica, centrada em O e de raio unitário, e seja um ponto P sobre a circunferência.
Sem perda de generalidade, consideremos P pertencente ao primeiro quadrante. Para os casos de P pertencer a qualquer dos outros quadrantes, pode-se proceder analogamente, após efetuar-se a redução ao primeiro quadrante.



O segmento $\overline{OP}$ define um ângulo θ em relação ao eixo dos x. As projeções P' e P'' do ponto P sobre os eixos x e y definem, respectivamente, o cosseno e o seno do ângulo θ, de modo que

$$\overline{OP'} = \cos\theta \quad \text{e} \quad \overline{OP''} = \operatorname{sen}\theta.$$

Observando que $\overline{P'P} \cong \overline{OP''}$ e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $OP'P$, retângulo em P', obtemos:

$$\begin{aligned}(P'P)^2 + (OP')^2 = (OP)^2 \quad &\Longrightarrow \quad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1^2 \\ &\Longrightarrow \quad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.\end{aligned}$$

Portanto, qualquer que seja a medida de um ângulo θ, vale a igualdade:

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

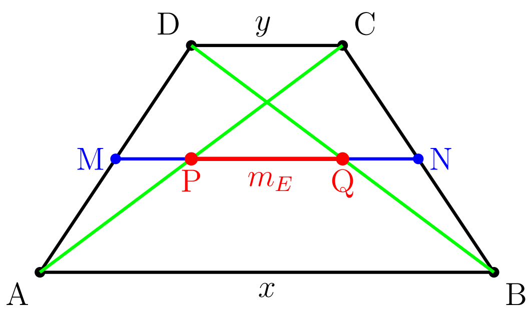
$\blacksquare$

Exemplo 3

Definição 2.3 (Mediana de Euler)**.** Em um quadrilátero, a mediana de Euler é o segmento de reta que une os pontos médios das diagonais.

Teorema 2.4 (Mediana de Euler no trapézio)**.** *Em um trapézio, a medida da mediana de Euler é igual ao módulo da semidiferença das medidas das bases.*

Demonstração. Considere o trapézio $ABCD$,



em que:

- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases, cujas medidas são respectivamente iguais a x e y;
- $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são os lados não paralelos;
- M e N são os respectivos pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$;
- $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as diagonais;
- P e Q são os respectivos pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$;
- $\overline{PQ}$, de medida m_E, é a mediana de Euler.

Vamos mostrar que

$$m_E = \left|\frac{x-y}{2}\right|.$$

No trapézio $ABCD$, verificamos que

$$\left.\begin{array}{l}\text{M é o ponto médio de } \overline{AD} \\ \text{N é o ponto médio de } \overline{BC}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{MN} \text{ é base média de } ABCD \therefore MN = \frac{x+y}{2}.$$

No triângulo ACD temos que

$$\left.\begin{array}{l}\text{M é o ponto médio de } \overline{AD}\\ \text{P é o ponto médio de } \overline{AC}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{MP} \text{ é base média de } \Delta ACD \Longrightarrow \overline{MP} \| \overline{DC}.$$

Da semelhança dos triângulos APM e ACD, temos que $MP = \dfrac{y}{2}$.

No triângulo BDC, temos que

$$\left.\begin{array}{l}\text{Q é o ponto médio de } \overline{BD}\\ \text{N é o ponto médio de } \overline{BC}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{QN} \text{ é base média de } \Delta BDC \Longrightarrow \overline{QN} \| \overline{DC}.$$

Da semelhança dos triângulos BNQ e BCD, temos que $QN = \dfrac{y}{2}$.

$$\begin{array}{rcl} MN = MP + PQ + QN & \Longrightarrow & \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{y}{2} + m_E + \dfrac{y}{2} \\ & \Longrightarrow & \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{y + 2m_E + y}{2} \\ & \Longrightarrow & x + \cancel{y} = \cancel{y} + 2m_E + y \\ & \Longrightarrow & x - y = 2m_E \\ & \Longrightarrow & m_E = \dfrac{x-y}{2}. \end{array}$$

Como podemos ter $x < y$ ou $x > y$, a conclusão será expressa sob módulo.

Portanto, $m_E = \left|\dfrac{x-y}{2}\right|$.

■

Outra possibilidade de demonstração para o exemplo 1

Esta será utilizada na atividade de ordenação dos parágrafos de uma demonstração, disponibilizada em formato para impressão no Apêndice F.

Demonstração. Considere a equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são coeficientes e $a \neq 0$.

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação. Então, podemos escrevê-la na forma fatorada:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Expandindo o produto $a(x - x_1)(x - x_2)$, temos:

$$\begin{array}{rcl} a(x - x_1)(x - x_2) & = & a\left[x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2\right] \\ & = & a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right] \\ & = & ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2. \end{array}$$

Então, podemos reescrever a equação como:

$$ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = 0.$$

Comparando essa última expressão com a forma geral, temos:

$$ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c.$$

Igualando os coeficientes correspondentes, obtemos:

$$\begin{aligned} -a(x_1 + x_2) = b \quad &\Longrightarrow \quad x_1 + x_2 = \frac{b}{-a} \\ &\Longrightarrow \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ \text{e}& \\ ax_1x_2 = c \quad &\Longrightarrow \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Portanto, a soma e o produto das raízes de uma equação de segundo grau $ax^2+bx+c = 0$ são, respectivamente:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

e

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

■

2.7 Aula 7: Demonstrando a fórmula de Euler que soluciona o problema estudado

"Suponha que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso. Então, a probabilidade de que três números consecutivos sejam tirados é $\frac{6}{n(n-1)}$."

Objetivo geral: Demonstrar a fórmula de Euler para o cálculo da probabilidade de ocorrência de três números consecutivos ao serem retirados aleatoriamente 3 dentre n bilhetes numerados consecutivamente de 1 a n:

Objetivos específicos:

- Aplicar o conhecimento acerca da estrutura de uma demonstração matemática direta;
- Realizar a demonstração da fórmula de Euler, objeto de estudo da sequência didática.

Ações do professor:

- Apresentar o tema e os objetivos da aula;

- Responder perguntas ou comentários, caso ocorram;
- Dividir a turma em grupos de até cinco componentes e tomar conhecimento da escolha do anfitrião de cada grupo;
- Explicar o que é e como se realiza a dinâmica World Café;
- Propor a demonstração da fórmula de Euler, numa dinâmica World Café;
- Circular entre as mesas, auxiliando no que for necessário;
- Promover a socialização dos trabalhos realizados.

Ações dos alunos:

- Observar as informações apresentadas pelo professor e realizar comentários e/ou perguntas pertinentes;
- Organizar-se em grupo, conforme orientações do professor e escolher o anfitrião do grupo;
- Participar da dinâmica proposta para a demonstração da fórmula de Euler.

Recursos utilizados:

- Folhas de papel em branco e canetas ou lápis para as anotações dos alunos;
- Fichas numeradas, disponíveis no Apêndice E (deixar um kit sobre cada mesa, para o caso de os alunos sentirem necessidade);
- Bombons (ou outra guloseima semelhante) e toalhas (se a escola já não possuir, podem ser confeccionadas com material de baixo custo, a exemplo de TNT, o importante é garantir o aspecto da organização) para as mesas do World Café.

Avaliação:

- Interesse;
- Participação;
- Cooperação;
- Desempenho.

World Café é uma metodologia de conversa em grupo, utilizada em diferentes áreas, que oportuniza a construção e a sistematização colaborativa de conhecimento sobre um assunto ou o levantamento coletivo de estratégias para a solução de um determinado problema.

Essa metodologia surgiu casualmente, quando, em 1995, a reunião de um grupo de líderes empresariais e acadêmicos, na residência de um deles, na Califórnia, foi interrompida pela chuva, de modo que os participantes, espontaneamente, dividiram-se em grupos menores e passaram a conversar e registrar as ideias surgidas a partir das conversas em guardanapos de papel; houve revezamento dos componentes pelos grupos, o que gerou uma interação entre todos os presentes e um compartilhamento de pensamentos e percepções, dando origem a uma experiência de inteligência coletiva.

O nome "World Café" foi escolhido para convidar as pessoas a conversarem de modo informal e descontraído, como se estivessem em uma mesa de um café.

Atualmente, o World Café tornou-se uma tecnologia social, uma organização que propicia convocação e suporte à conversa colaborativa em todo o mundo.

Numa dinâmica presencial de World Café, um componente de cada grupo exerce a função de anfitrião, permanecendo na mesma mesa, enquanto os demais se deslocam pelas outras mesas em cada rodada de conversa; em cada rodada, as ideias que surgem são registradas nos papéis disponíveis, em forma de texto, desenho, gráfico etc. Cabe ao anfitrião, a cada nova composição da mesa, sintetizar as ideias levantadas na(s) rodada(s) anterior(es), apresentando, inclusive, os registros já feitos, de modo a favorecer a compreensão do grupo.

Para saber mais sobre essa metodologia, acesse as informações diretamente no site da organização The World Café (TWC).

A aplicação da metodologia nesta aula requer preparação antecipada do ambiente: é necessário organizar as mesas; dispor sobre elas o material a ser utilizado (papel, caneta, bombons ou outra guloseima); em ambientes outros, o nome da metodologia sugere a disponibilização de café, mas isso não parece ser viável na escola, dentre outras razões, pelo tempo de duração da aula; distribuir, em torno de cada mesa, cadeiras em quantidade igual à de componentes que formam os grupos.

Cada grupo iniciará a discussão acerca da organização das ideias e dos passos que deverão seguir para realizar a demonstração da fórmula, anotando em papel disponibilizado sobre a mesa. Fazendo-se necessário, pode-se recorrer à manipulação das fichas numeradas impressas para a Aula 5, a fim de que os alunos organizem mentalmente a ideia utilizada na determinação do número de casos favoráveis.

Decorrido o tempo estabelecido para cada etapa, os alunos, exceto o anfitrião, deslocar-se-ão para outra mesa e darão continuidade à discussão a partir da síntese da discussão do grupo anterior, apresentada pelo anfitrião. E assim continua a dinâmica, até que todos os grupos tenham compartilhado suas ideias, sendo que o último grupo em cada mesa fará a redação final da demonstração.

A organização dessa dinâmica é semelhante à de Rotação por Estações de Aprendizagem, divergindo pelo fato de que a interação principal na Rotação por Estações de Aprendizagem fica restrita a cada grupo, enquanto no World Café há interação entre todos os grupos, por intermédio do anfitrião.

Por conseguinte, a observação feita para a preparação da aula em Rotação por Estações é também válida para o planejamento da aula com aplicação do World Café: é preciso lembrar da necessidade de destinar parte do tempo da aula à exposição inicial sobre os objetivos e a organização da metodologia, em especial se for aplicá-la pela primeira vez na turma, bem como à finalização da aula, com a entrega da atividade realizada.

A distribuição do tempo foi planejada do seguinte modo, considerando uma aula de 50 minutos.

- ✓ Considerações iniciais e orientações: 5 minutos;
- ✓ Realização das atividades: 40 minutos, tempo que será dividido igualmente para a passagem em cada mesa, conforme o número de grupos formados; pelo conhecimento que tem da turma, o professor poderá considerar dividir esse tempo reservando um período ligeiramente maior para a última rodada de conversa, na qual será finalizada a formalização da demonstração;
- ✓ Recolhimento das atividades e considerações finais: 5 minutos.

Demonstração da fórmula de Euler

Teorema 2.5. *Suponha que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso. Então, a probabilidade de que três números consecutivos sejam tirados é* $\dfrac{6}{n(n-1)}$.

Demonstração. O número total de maneiras de escolher 3 bilhetes de um conjunto de n bilhetes é dado por $C_{n,3} = \dfrac{n!}{3! \cdot (n-3!)}$.

Para que três bilhetes sejam consecutivos, eles devem ser da forma $\{i, i+1, i+2\}$, com i variando de 1 a $n-2$. Então, há $n-2$ conjuntos de 3 bilhetes consecutivos possíveis.

A probabilidade de ocorrência do evento "Tirar três números consecutivos" é a razão entre o número de combinações favoráveis, $n-2$, e o número total de combinações possíveis, isto é, o número total de maneiras de escolher 3 bilhetes de um conjunto de n bilhetes:

$$\begin{aligned}
P(E_n) &= \frac{n-2}{\dfrac{n!}{3! \cdot (n-3!)}} \\
&= \frac{(n-2) \cdot 3! \cdot (n-3)!}{n!} \\
&= \frac{\cancel{(n-2)} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{(n-3)!}}{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)} \cdot \cancel{(n-3)!}} \\
&= \frac{6}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Formar pessoas capacitadas a atender as demandas de uma sociedade em plena era do conhecimento é um desafio; para superá-lo, é preciso saber praticar uma educação contextualizada, onde os conceitos aprendidos não sejam vazios de sentido e que, além disso, sejam coerentes não apenas no campo das ideias, mas, sobretudo, na vivência; onde os conteúdos se interrelacionem com outros de sua ou de outras áreas do conhecimento.

A integração de elementos de diferentes componentes curriculares permite que sejam exploradas diferentes linguagens na comunicação da aprendizagem, possibilitando um aprofundamento da compreensão dos conceitos, bem como a promoção de uma comunicação inclusiva, considerando diferentes estilos de aprendizagem em função de necessidades e aptidões individuais.

Neste trabalho, procurou-se oferecer uma oportunidade para trabalhar o conteúdo Probabilidade, na terceira série do Ensino Médio, com a utilização de recursos digitais e de metodologias ativas de aprendizagem, tendo a história da Matemática como estratégica metodológica auxiliar.

A probabilidade é um tema da Matemática para o qual não há dificuldade de contextualização, visto que possui muitas aplicações em várias áreas do conhecimento e da atividade humana, de modo que é muito provável que cada estudante tenha contato direto com pelo menos uma das aplicações.

A utilização de recursos tecnológicos digitais possibilita o enriquecimento do processo ensino-aprendizagem, tornando-o mais dinâmico e interativo, e facilita a comunicação entre o professor e os alunos, os quais já utilizam cotidianamente recursos dessa natureza.

A História da Matemática pode ser útil para os professores, possibilitando o conhecimento da matemática do passado e melhorando, por conseguinte, a compreensão do que vão ensinar, fornecendo materiais históricos para incrementar sua prática e ampliando o entendimento de seu trabalho.

Em relação aos alunos, tem-se a perspectiva de apresentar a Matemática como uma ciência dinâmica e historicamente construída, contribuir com uma melhor compreensão dos conceitos e com a percepção da necessidade e das particularidades da linguagem matemática, além de servir como elemento motivador da aprendizagem.

Portanto, incluir a história da Matemática nas aulas desse componente curricular contribui para que os estudantes percebam que o conhecimento matemático é social e historicamente construído, e essa construção tem se dado pelo trabalho de muitas pessoas que, seja por atribuição profissional, seja por admiração pessoal, dedicaram-se a estudar essa que é denominada como a "rainha das ciências".

Dentre inúmeros personagens que, ao longo da história, se dedicaram à construção e ao desenvolvimento do conhecimento matemático, destaca-se Leonhard Euler, considerado um dos matemáticos mais profícuos de todos os tempos. Ele contribuiu com todas as áreas da Matemática do seu tempo, no século XVIII; suas contribuições foram tantas, que até trinta anos após sua morte havia trabalhos seus sendo publicados, pela Academia de São Petesburgo, onde desempenhou a maior parte de suas atividades acadêmicas.

Sua história, repleta de momentos apoteóticos, mas, também, de desafios, contratempos e reveses em diversas áreas, traz, até os dias hodiernos, inspiração e motivação para qualquer que deseje continuar a escrever, tanto a sua própria história quanto a fascinante e magnífica história da matemática.

Considerando-se que neutralidade ou imparcialidade não são características do processo ensino-aprendizagem, resultados satisfatórios só serão alcançados na medida em que os sujeitos nele envolvidos tenham consciência de sua intencionalidade e, por conseguinte, assumam coletivamente as responsabilidades por ele demandadas.

Referências Bibliográficas

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; SOUZA, P. R. C. d. *Prisma matemática: Estatística, combinatória e probabilidade*. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BRASIL, M. d. E. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL, M. d. E. *Lei nº 14.533, de 11 de janeiro de 2023. Política Nacional de Educação Digital*. 2023.

BRASIL, P. C. N. matemática. *Secretaria de Educação Fundamental-Brasília: MEC/SEF*, 1997.

BRASIL, S. d. E. F. *Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: língua portuguesa*. Brasília: MEC/SEF, 1998. 106 p.

BROLEZZI, A. C. *A arte de contar: história da matemática e educação matemática*. 1. ed. São Paulo: Editora da Livraria da Física, 2014.

CABRAL, N. F. *Sequências didáticas: estrutura e elaboração*. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CARNEIRO, I. *O surgimento da Análise Combinatória: como tudo começou!* 2021. YouTube. Disponível em: ⟨https://www.youtube.com/watch?v=wt_Lc-gDpyg⟩, Acesso em: 13 nov. 2025.

CARVALHO, V. d. Linguagem matemática e sociedade: refletindo sobre a ideologia da certeza. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. A. E. (Ed.). *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009. p. 101–116.

CERQUEIRA, D. S. *Estratégias didáticas para o ensino da Matemática*. 2013. Acesso em: 13 nov. 2024. Disponível em: ⟨https://novaescola.org.br/conteudo/2197/estrategias-didaticas-para-oensino-da-matematica⟩.

CHIARI, A. S. d. S. Tecnologias digitais e educação matemática: relações possíveis, possibilidades futuras. *Revista do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)*, v. 11, n. 26, 2018. Acesso em 15/11/2024. Disponível em: ⟨https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/6570/5496⟩.

CORRÊA, R. A. Linguagem matemática, meios de comunicação e educação matemática. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. A. E. (Ed.). *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009. p. 93–116.

DANTE, L. R.; VIANA, F. *Matemática em contextos: análise combinatória, probabilidade e computação*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

DIAMANTINO, V. *KAHOOT: Como usar nas aulas presenciais ou online*. 2019. YouTube. Disponível em: ⟨https://www.youtube.com/watch?v=6MWUMYmAImo⟩, Acesso em: 19 nov. 2025.

D'AMBROSIO, U. *Educação matemática: da teoria à prática*. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

GARCIA, M. F. et al. Novas competências docentes frente às tecnologias digitais interativas. *Teoria E Prática Da Educação*, v. 14, n. 1, p. 79–87, 2011. Acesso em: 14 nov. 2024. Disponível em: ⟨https://periodicos.uem.br/ojs/index.php/TeorPratEduc/article/view/16108/8715⟩.

GUIMARÃES, K. P. *Desafios e Perspectivas para o Ensino da Matemática*. Curitiba: Ibpex, 2010.

KAHOOT! ⟨https://kahoot.com/⟩. Acesso em: 19 nov. 2025.

LARA, E. M. d. O. As metodologias ativas e o aprender com tecnologias. In: LUCHESI, B. M.; LARA, E. M. de O.; SANTOS, M. A. dos (Ed.). *Guia prático de introdução às metodologias ativas de aprendizagem [recurso eletrônico]*. Campo Grande, MS: Ed. UFMS, 2022. cap. 8. Acesso em 14/11/2024. Disponível em: ⟨https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/4667⟩.

LARA, I. C. M. d. O ensino da matemática por meio da história da matemática: possíveis articulações com a etnomatemática. *VIDYA*, v. 33, n. 2, p. 12, 2013. Acesso em: 11 nov. 2024. Disponível em: ⟨https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/254⟩.

LEONARDO, F. M. de (Ed.). *Conexões: matemática e suas tecnologias - Estatística e Probabilidade*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.

LONGEN, A.; BLANCO, R. M. *Interação matemática: a estatística e a resolução de problemas por meio de análise combinatória e probabilidade*. 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2020.

LOPES, J. A. O livro didático, o autor e as tendências em educação matemática. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. A. E. (Ed.). *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009. p. 35–62.

LUCHESI, B. M.; LARA, E. M. de O.; SANTOS, M. A. dos. *Guia prático de introdução às metodologias ativas de aprendizagem [recurso eletrônico]*. Campo Grande, MS: Ed. UFMS, 2022. Acesso em 14/11/2024. Disponível em: ⟨https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/4667⟩.

MENTIMETER. ⟨https://www.mentimeter.com/pt-BR⟩. Acesso em: 17 nov. 2025.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. História da matemática: uma prática social de investigação em construção. *Educação em Revista*, v. 18, n. 36, 2002. Acesso em: 11 nov. 2024. Disponível em: ⟨https://periodicos.ufmg.br/index.php/edrevista/article/view/44978⟩.

MUNIZ, C. A. *Pedagogia Educação e Linguagem Matemática*. Brasília: Universidade de Brasília, 2007.

PACHECO, V.; MASCARENHAS, R. *Guia Prático — Como usar o Mentimeter em suas aulas*. 2021. YouTube. Disponível em: ⟨https://www.youtube.com/watch?v=3m73am9LjFw⟩, Acesso em: 17 nov. 2025.

PESSOA, A. C. G. Sequência didática. In: *Glossário Ceale: Termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores*. Belo Horizonte: CEALE, 2014.

PORTUGUESA, R. *Guião do Socrative*. 2016. ⟨https://support.kahoot.com/hc/pt-br/articles/115002884788-Como-fazer-um-kahoot-Guia-completo⟩. Acesso em: 19 nov. 2025.

ROCHA, M. L. P. C.; FORTALEZA, F. J. d. S. Argumentos e abordagens da história da matemática na perspectiva pedagógica: concepções de professores da educação básica. *REMATEC*, v. 10, n. 18, 2016. Acesso em: 18 nov. 2024. Disponível em: ⟨https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/311⟩.

SANTOS, S. A. Explorações da linguagem escrita nas aulas de matemática. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. A. E. (Ed.). *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009. p. 127–141.

SASSAKI, C. Para uma aula diferente, aposte na rotação por estações de aprendizagem. *Revista Nova Escola*, Outubro 2016. Acesso em: 4 nov. 2024.

SOCRATIVE. ⟨https://www.socrative.com/⟩. Acesso em: 18 nov. 2025.

SOUZA, J. R. d. *Multiversos matemática: Estatística e probabilidade*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

SUPORT.KAHOOT. *Como fazer um kahoot? Guia completo*. ⟨https://support.kahoot.com/hc/pt-br/articles/115002884788-Como-fazer-um-kahoot-Guia-completo⟩. Acesso em: 19 nov. 2025.

TEIXEIRA, L. A. *Diálogo Matemática e suas Tecnologia: Estatística e Probabilidade*. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2020.

WORDWALL. ⟨https://wordwall.net/pt⟩. Acesso em: 19 nov. 2025.

APÊNDICES

Aqui estão disponibilizados os materiais que serão utilizados impressos, em formato adequado a essa finalidade.

Apêndice A

Estações de aprendizagem

Este material contém as instruções para a realização, pelos grupos de alunos, de cada atividade da Rotação por Estações de Aprendizagem, aplicada na Aula 1. Constitui-se, também, no material entregável a ser recolhido ao final da aplicação da metodologia.

GRUPO: ______

ESTAÇÃO 1 – História da Análise Combinatória

Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=wt_Lc-gDpyg

Atividades:

1) Assistam ao vídeo (Duração: 3min42s);

2) Respondam às perguntas, com base nas informações apresentadas no vídeo:
   A) Qual é o documento mais antigo contendo problemas matemáticos?

   B) Qual o conceito de Análise Combinatória?

GRUPO: ______

ESTAÇÃO 2 – Análise Combinatória no ENEM

Atividade: Resolvam as questões abaixo.

1) (ENEM 2009) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

   A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

   A. uma combinação e um arranjo, respectivamente.
   B. um arranjo e uma combinação, respectivamente.
   C. um arranjo e uma permutação, respectivamente.
   D. duas combinações.
   E. dois arranjos.

2) (ENEM Digital 2020) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @. O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras “edu” apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem. Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado. De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?
   A. 59
   B. 60
   C. 118
   D. 119
   E. 120

GRUPO: _______

ESTAÇÃO 3 – Jogo “Número Secreto”

Disponível em: https://quebracabecas.github.io/?desafio=127

Atividades

1) Acessem o jogo;
2) Leiam as instruções;
3) Descubram o número secreto;
4) Respondam às questões que se seguem ao jogo;
5) Tirem um print da atividade respondida, **ou** anotem aqui as respostas.

Quantas senhas poderiam ser criadas com a condição inicial do problema?

A) $9 \cdot 7 \cdot 7$

B) $10 \cdot 9 \cdot 8$

C) $8 \cdot 8 \cdot 7$

D) $8 \cdot 7 \cdot 6$

Explique seu raciocínio para responder à questão anterior.

GRUPO: _______

ESTAÇÃO 4 – Distinguindo agrupamentos

Atividade: Analisem e respondam as seguintes questões:

1) Seu grupo nesta atividade é formado por quantos componentes?

2) De quantos modos vocês podem se organizar em fila para sair da sala?

3) Se vocês estivessem competindo entre si, de quantos modos poderia ser composto um pódio de três lugares?

4) Se tivessem que escolher três componentes para compartilhar com o restante da turma a impressão do grupo sobre esta atividade, de quantos modos poderiam escolher seus representantes?

Apêndice B

Texto para leitura complementar

(DANTE; VIANA, 2020)

Os autores apresentam um panorama da evolução do estudo da probabilidade, desde o século XV até o século XIX. Mostram como os jogos de azar foram a grande motivação inicial para o desenvolvimento da teoria de probabilidade e como, mais adiante, com Euler, D'Alembert e Laplace, as probabilidades passaram a ser utilizadas, também, em problemas das Ciências Humanas.

Leitura e compreensão

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Como surgiu o conceito de probabilidade?

As imagens não estão representadas em proporção

Nos séculos XV e XVI, matemáticos italianos começaram a conceituar a ideia de probabilidade. Em 1494, o monge franciscano e célebre matemático Luca Pacioli (1445-1517) escreveu um livro contendo problemas de probabilidade chamado *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (Resumo da aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade). Esse livro trouxe fama a Pacioli, permitindo que ele se tornasse professor de Matemática na corte do duque Ludovico Sforza (1452-1508), em Milão (Itália), tendo como estudante Leonardo da Vinci (1452-1519).


Reprodução/Museu de Capodimonte, Nápoles, Itália.

O retrato de Luca Pacioli e seu aluno, de Jacopo de Barbari, *c.* 1495 (óleo sobre madeira, 99 cm × 120 cm).

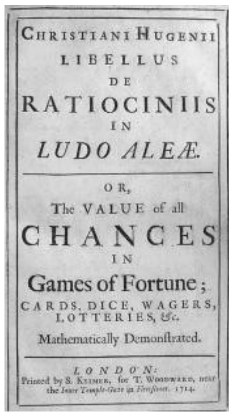

Look and Learn/Bridgeman Images/Fotoarena

Retrato de Girolamo Cardano, de Luis Figuier, c. 1876 (litografia).

Girolamo Cardano (1501-1576) nasceu em Pavia (Itália), formou-se em Medicina e trabalhou na universidade dessa mesma cidade, atuando como um cientista polivalente, uma vez que as pesquisas dele envolviam Matemática, Medicina, Física, Química, Astrologia, Astronomia e jogos. Unindo o interesse por Matemática e jogos, Cardano escreveu a obra *Liber de Ludo Aleae* (O livro dos jogos de azar) em 1526, mas ele só foi publicado em 1663. Por esse motivo, muitos matemáticos contemporâneos a Cardano não tiveram oportunidade de lê-lo.

Blaise Pascal (1623-1662), o grande personagem da teoria das probabilidades, era filho do matemático Étienne Pascal (1588-1651). De início, Étienne não queria que o filho Blaise se dedicasse à Matemática e procurou dar a ele estímulos em outras áreas, porém isso de nada adiantou, pois o talento do jovem para a Matemática se revelou cedo. Aos 14 anos já acompanhava o pai nas reuniões da Academia Mersénne, em Paris (França), e aos 16 anos publicou o primeiro trabalho em Geometria intitulado *Essay pour les coniques* (Ensaio para as cônicas).

A formalização da teoria das probabilidades nasceu das discussões matemáticas que aconteciam por correspondência entre Pascal e Pierre de Fermat (1607-1665). Antes da teoria das probabilidades, esse ramo da Matemática era trabalhado apenas de maneira intuitiva. As cartas trocadas entre Pascal e Fermat – que citaram por vezes os problemas propostos por Chevalier de Méré (1607-1684), amigo de Blaise e fanático por jogos de dados – foram fundamentais para o desenvolvimento dos conceitos modernos de probabilidade e as respectivas propriedades. Pascal ficou famoso pelos conhecimentos de probabilidade ao resolver o problema do jogo interrompido. Na época, perguntava-se como um prêmio deveria ser dividido entre dois jogadores se, por algum motivo, o jogo não chegasse ao fim. É um problema como o da abertura deste capítulo.


CHRISTIANI HUGENII
LIBELLUS
DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.
OR,
The VALUE of all
CHANCES
IN
Games of Fortune;
CARDS, DICE, WAGERS, LOTTERIES, &c.
Mathematically Demonstrated.
LONDON:

Reprodução/Coleção particular

Capa do livro *Libellus de ratiociniis in ludo aleae*, de Christian Huygens.

Pouco tempo depois, o cientista holandês Christian Huygens (1629-1695), inspirado nessas discussões, publicou, em 1657, o primeiro livro realmente voltado ao estudo das probabilidades, *Libellus de ratiociniis in ludo aleae* (Sobre o raciocínio em jogos de azar, ou O valor de todas as chances em jogos de fortuna: cartas, dados, apostas, loterias, etc. – Matematicamente demonstrado), um tratado sobre problemas relacionados com jogos de dados.

Devido ao apelo popular dos jogos de azar, a teoria das probabilidades se tornou bastante popular, desenvolvendo-se rapidamente durante o século XVIII. Nesse período, as principais contribuições ao campo da probabilidade foram realizadas por Jakob Bernoulli (1654-1705) e Abraham de Moivre (1667-1754), que em 1718 escreveu o livro *The doctrine of chances* (Doutrina das probabilidades).

Mais tarde, Leonhard Euler (1707-1783) e Jean-Baptiste D'Alembert (1717-1783) desenvolveram outros estudos sobre probabilidades, aplicando-os à Economia, às Ciências Sociais e a loterias.

Album/Fotoarena/Museu Nacional do Palácio de Versalhes e Trianon, Versalhes, França.

Retrato de Laplace, de Pierre-Narcisse Guerin, c. 1827 (1,46 m × 1,13 m).

O astrônomo e matemático francês Pierre de Laplace (1749-1827) introduziu ideias novas de cálculo e aplicações de probabilidades no livro dele: *Teoria analítica das probabilidades* (1812). Ele desenvolveu a definição explícita de probabilidade em espaços finitos e equiprováveis, como a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos. Antes de Laplace, a teoria das probabilidades era voltada para o desenvolvimento de técnicas matemáticas aplicadas aos jogos de azar. Laplace aplicou as ideias probabilísticas a muitos problemas científicos e práticos, como teoria de erros, cálculos de seguros, mecânica e estatística.

De acordo com Boyer (2012),

> A teoria das probabilidades deve mais a Laplace que a qualquer outro matemático. A partir de 1774, ele escreveu muitos artigos sobre o assunto, cujos resultados incorporou no clássico *Théorie analytique des probabilités* [Teoria analítica das probabilidades], de 1812. Ele considerou a teoria em todos os aspectos e em todos os níveis [...].

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. p. 329.

Mais recentemente, os nomes de Jules Henri Poincaré (1854-1912), Émile Borel (1871-1956) e John von Neumann (1903-1957) aparecem ligados ao estudo de probabilidades e teoria dos jogos.

Fonte de consulta: BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. p. 197, 200, 253, 260-262, 309, 329.

Apêndice C

Lista de exercícios

Nesta seção, tem-se a lista de exercícos para aplicação na Aula 4.

UNIDADE ESCOLAR: ____

TURNO: ____________________ SÉRIE: ______ TURMA: _____ DATA:___/___/_____

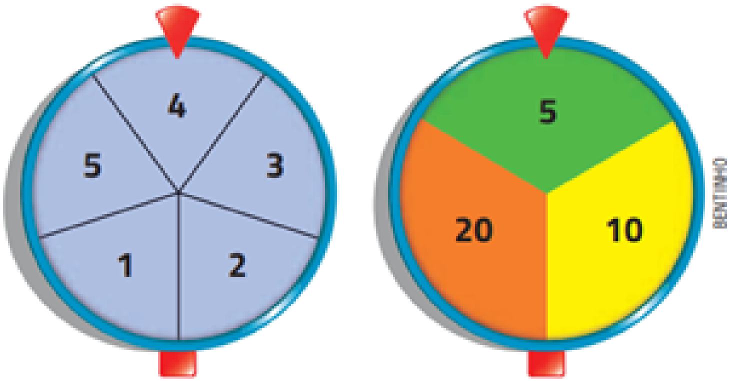
COMPONENTE CURRICULAR: MATEMÁTICA PROFESSOR(A): ______________________

ESTUDANTES: ____

____

EXERCÍCIOS

1. (SOUZA, 2020, p.103) Na promoção de certa loja, quando um cliente realiza uma compra acima de R$ 200,00, ele gira duas roletas e ganha um cupom de desconto. O valor desse cupom corresponde ao produto dos números indicados nas roletas, em reais. Observe.



Dica

Cada roleta foi dividida em partes iguais.
No exemplo acima, o valor do cupom corresponde a R$ 20,00, pois $4 \cdot 5 = 20$.

   (a) Quantas são as composições de multiplicação possíveis de serem obtidas nesse sorteio? Se necessário, construa uma árvore de possibilidades.

   (b) Determine o espaço amostral com todas as opções de valores do cupom de desconto.

2. (LEONARDO, 2020, p. 130) Dez pessoas, das quais 4 são de uma mesma família, serão colocadas aleatoriamente em fila. Qual é a probabilidade de as 4 pessoas da família ficarem juntas?

3. (TEIXEIRA, 2020, p. 66) Jéssica deseja preparar um lanche com pão de forma e mais três ingredientes, que ela irá escolher entre alface, tomate, queijo e carne. O valor calórico das porções de cada ingrediente que ela pode utilizar está indicado no quadro a seguir.

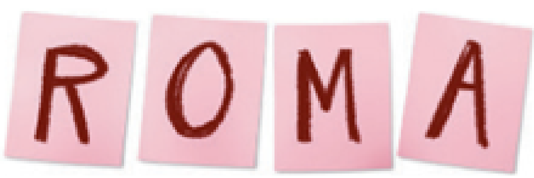
Ingrediente	Valor calórico (em kcal)
Pão de forma (*P*)	130
Alface (*A*)	10
Tomate (*T*)	18
Queijo (*Q*)	55
Carne (*C*)	110

Supondo que Jéssica prepare aleatoriamente um lanche, qual é o espaço amostral que representa todas as possibilidades de escolha em relação:

(a) aos ingredientes. **(b)** ao valor calórico.

Uma das possibilidades em relação aos ingredientes é (*P*, *A*, *T*, *Q*).

4. (LEONARDO, 2020, p. 130) Em 4 cartelas, escrevem se as letras R, O, M e A, uma em cada cartela. As cartelas são, então, depositadas em um saco.



EDNEI MARX

Qual é a probabilidade de, retirando uma a uma as cartelas do saco, formarmos, na ordem de saída, a palavra AMOR?

5. (BONJORNO; GIOVANNI JÚNIOR; SOUZA, 2020, p. 120) Em uma gaveta, há três canetas de tinta azul, duas de tinta preta, quatro de tinta verde e três que estão sem carga de tinta. Escolhendo uma dessas canetas ao acaso, determine a probabilidade de a caneta:

(a) escrever em qualquer cor;

(b) não escrever;

(c) escrever em azul.

6. (DANTE; VIANA, 2020, p. 73) Na Física, o conceito de densidade é a relação entre a medida de massa de um material e a medida de volume que ele ocupa no espaço. Um valor de referência é a densidade da água, que ocupa 1 cm^3 de espaço para cada grama de massa. O fato de um objeto afundar ou boiar na água tem relação direta com a densidade. Considere uma situação em que pequenos recipientes de densidade desprezível serão preenchidos com determinada substância. Se a medida de densidade dessa substância for maior do que 1 g/cm^3, o recipiente afunda; do contrário, boia. Veja a lista de materiais e as respectivas medidas de densidade.

Medida de densidade de materiais

Material	Densidade (g/cm^3)
Aço	7,8
Chumbo	11,3
Cobre	8,96
Etanol	0,789
Ferro	7,87
Gelatina	1,27
Glicerina	1,26
Leite	1,03
Madeira	0,5
Mercúrio	13,5
Ouro	19,3
Platina	21,5
Quartzo	2,65

Fonte de consulta: TODA MATÉRIA. *Densidade.* Disponível em: https://www.todamateria.com.br/densidade/. Acesso em: 9 jul. 2020.

Qual é a probabilidade de escolhermos aleatoriamente um desses materiais e ele boiar na água?

7. (BONJORNO; GIOVANNI JÚNIOR; SOUZA, 2020, p.120) Com os algarismos 3, 5 e 7, formamos todos os números de três algarismos possíveis, sem repetição. Escolhendo um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de essa escolha recair em um número:

(a) múltiplo de 3?

(b) par?

8. (LONGEN; BLANCO, 2020, p. 96 - Adaptado) Pedro, mais uma vez, acordou atrasado para ir à escola! Meio sonolento ainda, foi ao armário de roupas, abriu a gaveta de meias, pegou um pé de meia sem olhar e calçou em um dos pés; depois, pegou outro pé de meia sem olhar e calçou no outro pé. Detalhe: na gaveta das meias havia inicialmente 6 pares de meias diferentes, totalmente espalhadas, isto é, 12 pés de meia misturados.

(a) Nesse experimento, as meias são diferentes apenas na estampa. É um experimento aleatório?

(b) Qual é o espaço amostral desse experimento? Quantos são os elementos do espaço amostral?

(c) Qual é o evento favorável a Pedro? Quantos são os elementos do evento?

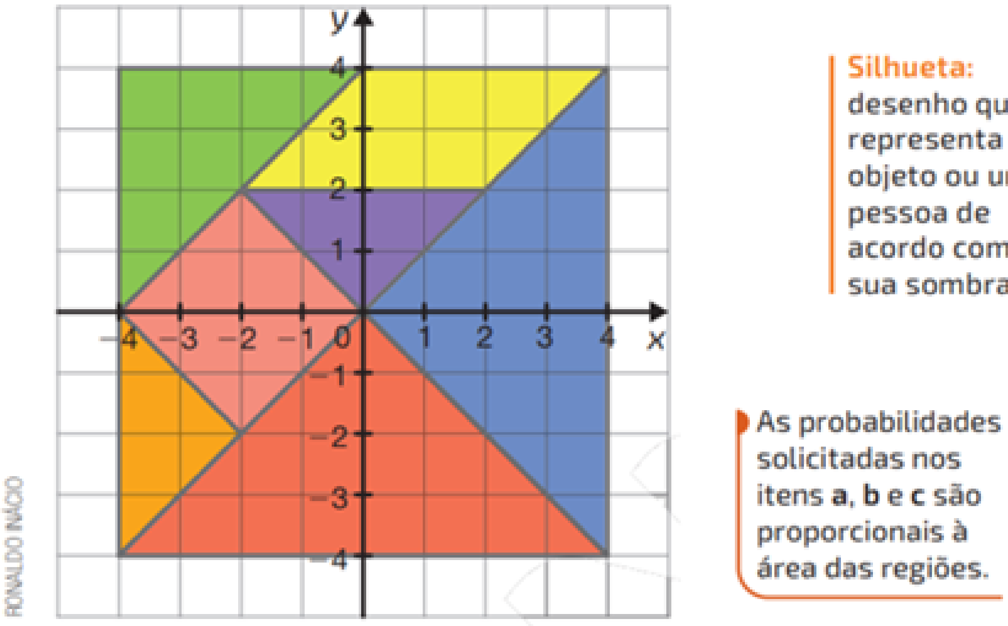
(d) É mais provável que Pedro acerte ou erre as meias de um mesmo par? Explique como pensou.

(e) Qual é a probabilidade de Pedro ter calçado os dois pés com o mesmo par de meias?

9. (LEONARDO, 2020, p. 130) Cristina tem na carteira quatro notas de R$ 10,00, duas de R$ 50,00 e uma de R$ 100,00. Para pagar uma conta de R$ 40,00 no supermercado, ela puxa duas notas da carteira, aleatoriamente. Qual é a probabilidade de Cristina não precisar puxar outra nota?

10. Nas eleições municipais de 2024, Feira de Santana teve 3 candidatos a prefeito e 411 candidatos a vereador. Considerando que há possibilidade de votar nulo ou, ainda, votar em branco, para um ou os dois cargos, de quantos modos distintos um eleitor feirense pode ter feito sua escolha de votação?

11. (TEIXEIRA, 2020, p. 73) O tangram é um quebra-cabeça chinês de origem milenar, composto por sete peças cujas formas lembram figuras geométricas planas que, organizadas, podem formar cerca de 1 700 silhuetas. Os chineses o chamam de "Tábua de sabedoria" ou "Tábua das sete sabedorias". Considere o seguinte tangram em um plano cartesiano.



(a) Qual é a probabilidade de, ao marcarmos aleatoriamente um ponto pertencente ao tangram, esse ponto:

- pertencer à região alaranjada?
- pertencer à região roxa?
- não pertencer à região azul?

(b) Se marcarmos um ponto pertencente ao tangram com abscissa -3, qual é a probabilidade de esse ponto pertencer à região vermelha? E à região verde?

(c) Ao marcarmos um ponto pertencente ao tangram com ordenada positiva, qual é a probabilidade de esse ponto pertencer à região amarela?

Apêndice D

Atividade em dupla

Nesta seção tem-se a atividade a ser aplicada na aula 5, contendo o enunciado do problema a ser trabalhado e a tabela em que os estudantes, em dupla, anotarão os resultados encontrados para quatro casos particulares do problema.

UNIDADE ESCOLAR: ______________________________			
TURNO: ______________	SÉRIE: ______	TURMA: _____	DATA:____/____/______
COMPONENTE CURRICULAR: MATEMÁTICA		PROFESSOR(A): ______________________	
ESTUDANTES: ______________________________			
______________________________			

ATIVIDADE

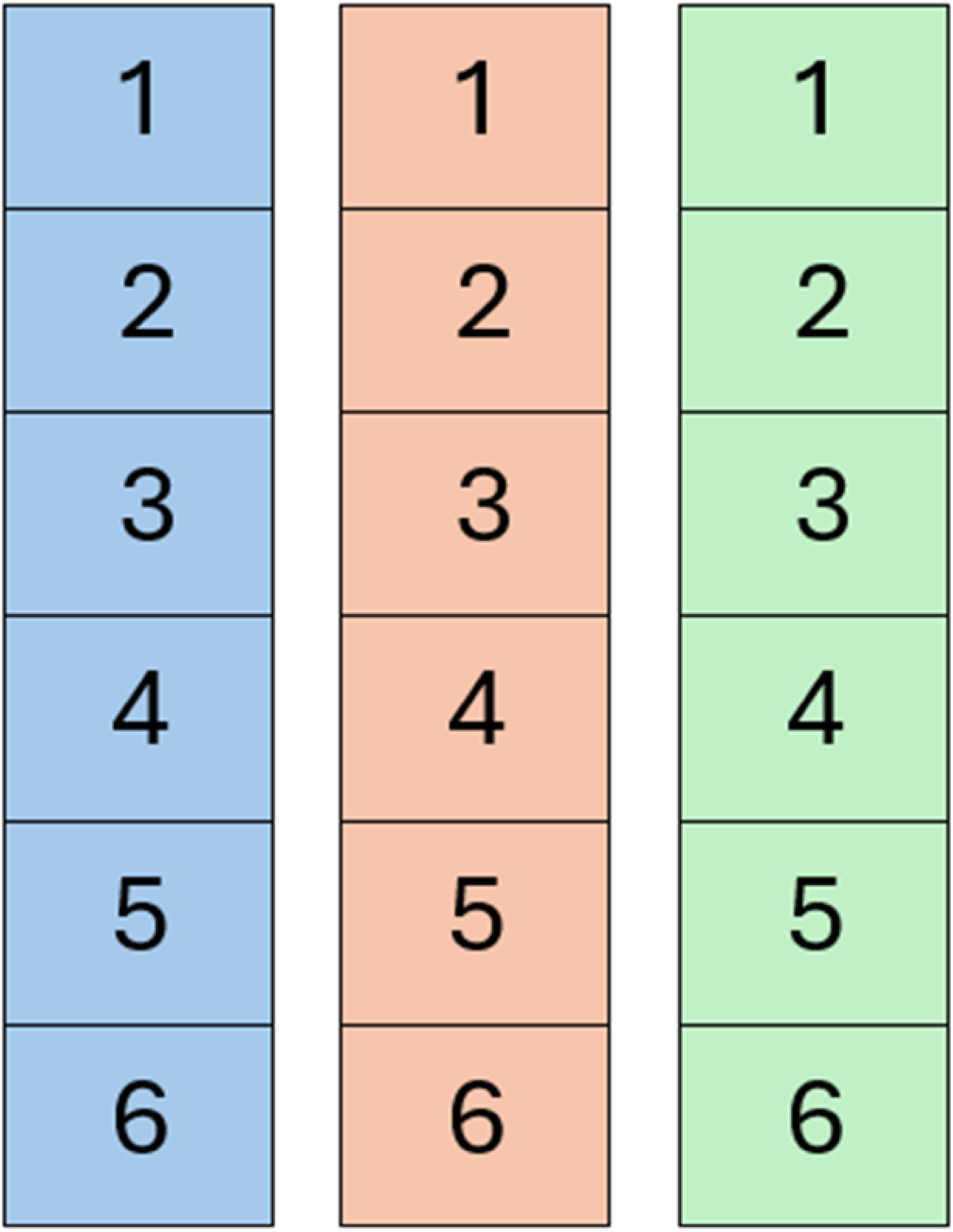
Suponham que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso. Então, qual a probabilidade de que três números consecutivos sejam tirados? Utilizando as fichas numeradas, verifiquem os resultados para os valores indicados e preencham a tabela abaixo:

n	$P(E_n)$
3	
4	
5	
6	

Apêndice E

Fichas numeradas

As fichas numeradas constituem-se no material que será impresso e recortado para ser entregue aos alunos na aula 5. Esse material possibilitará uma percepção empírica da resolução da atividade em dupla.


1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5
6

Apêndice F

Parágrafos de uma demonstração para ordenar

Este apêndice contém uma demonstração completa, com os parágrafos espaçados.

Como a atividade será feita em grupo, a fonte do texto está bastante aumentada, a fim de facilitar a visualização e a leitura por todos os componentes em cada grupo.

O professor imprimirá o documento em quantidade igual à de grupos que sabe, de antemão, serão formados na turma.

Após imprimir, recortará os parágrafos para cada via impressa e, no momento da realização da atividade, os entregará embaralhados para que os alunos, em grupo, restabeleçam a ordem inicial de inserção dos parágrafos na demonstração.

Eles terão as pistas do início e do fim, pela observação dos marcadores.

A soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ são, respectivamente, iguais a $-\dfrac{b}{a}$ e $\dfrac{c}{a}$.

Demonstração. Considere a equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são coeficientes e $a \neq 0$.

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação. Então, podemos escrevê-la na forma fatorada:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Expandindo o produto $a(x - x_1)(x - x_2)$, temos:

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a\left[x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2\right] \\ &= a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right] \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2. \end{aligned}$$

Então, podemos reescrever a equação como:

$$ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = 0.$$

Comparando essa última expressão com a forma geral, temos:

$$ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c.$$

Igualando os coeficientes correspondentes, obtemos:

$$\begin{aligned} -a(x_1 + x_2) = b \implies x_1 + x_2 &= \frac{b}{-a} \\ \implies x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

e

$$ax_1x_2 = c \implies x_1x_2 = \tfrac{c}{a}.$$

Portanto, a soma e o produto das raízes de uma equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ são, respectivamente:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

e

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

■