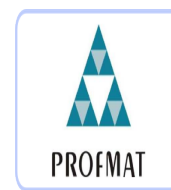




UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Explorando conteúdos de Matemática Básica através de problemas intrigantes

EVALDO MAURÍCIO OLIVEIRA DE SANTANA

Orientador: PROF. DR. DARLAN FERREIRA DE OLIVEIRA

Feira de Santana-Bahia

Dezembro/2024



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



Explorando conteúdos de Matemática Básica através de problemas intrigantes

EVALDO MAURÍCIO OLIVEIRA DE SANTANA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira.

Feira de Santana-Bahia

Dezembro/2024

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteadó - UEFS

S223e Santana, Evaldo Maurício Oliveira de
Explorando conteúdos de Matemática básica através de problemas intrigantes./
Evaldo Maurício Oliveira de Santana. – 2024.
75 f.: il.

Orientador: Darlan Ferreira de Oliveira
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Feira de
Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2024.

1. Matemática – Ensino. 2. Teorema de Pitágoras. 3. Figuras planas .4. Problemas
intrigantes. I. Oliveira, Darlan Ferreira de, orient. II. Universidade Estadual de Feira
de Santana. III. Título.

CDU: 51(07)

Maria de Fátima de Jesus Moreira - Bibliotecária - CRB-5/1120



Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciencias Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Ata da Sessão pública de defesa de dissertação do discente Evaldo Maurício Oliveira de Santana do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos vinte e três dias do mês de dezembro de dois mil e vinte quatro, às 9 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: <https://meet.google.com/inr-bweb-rde> da dissertação apresentada sob o título “EXPLORANDO CONTEÚDOS DE MATEMÁTICA BÁSICA ATRAVÉS DE PROBLEMAS INTRIGANTES”, do discente **Evaldo Maurício Oliveira de Santana** do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Darlan Ferreira de Oliveira (Orientador, UEFS), Fabíola de Oliveira Pedreira (UEFS) e Sara Ruth Bispo de Menezes Oliveira (UFRB). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores. Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito **APROVADO**. Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 23 de dezembro de 2024.

Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira (Orientador, UEFS)

Documento assinado digitalmente
SARA RUTH BISPO DE MENEZES OLIVEIRA
Data: 23/12/2024 10:53:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a Dr^a Fabíola de Oliveira Pedreira (UEFS)



Documento assinado digitalmente
FABIOLA DE OLIVEIRA PEDREIRA
Data: 23/12/2024 14:26:30-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dr^a. Sara Ruth Bispo de Menezes Oliveira (UFRB)

Visto do Coordenador:



Documento assinado digitalmente
JEAN FERNANDES BARROS
Data: 23/12/2024 17:53:03-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

*Dedico este trabalho a Deus,
por me conceder esta oportuni-
dade.*

Agradecimentos

Expresso minha gratidão a Deus pela dádiva da vida, por me conceder a oportunidade de ingressar neste curso e por sempre colocar em meu caminho pessoas de grande valor, sem as quais, certamente não teria alcançado este objetivo. A Ele, toda a minha gratidão.

À minha esposa, Tatiane, que com amor, paciência e companheirismo incondicional, esteve sempre ao meu lado, compartilhando todas as dificuldades e alegrias, e me incentivando em cada passo dessa jornada.

À minha mãe, Maria de Lourdes, pelo amor incondicional e pelo incentivo constante, e ao meu pai, Everaldo (in memoriam), por todo o carinho e ensinamentos que me proporcionou.

Aos meus irmãos, Elison, Everaldo Júnior e Anna Izabel, pelo apoio constante, e ao meu sobrinho Elber (in memoriam), pelo carinho que sempre me deu.

Aos professores deste curso, que generosamente compartilharam seus valiosos conhecimentos, contribuindo para meu crescimento. Em especial, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira, pela paciência, incentivo constante e ensinamentos inestimáveis.

Aos amigos e colegas de turma com quem tive a honra de conviver — Sidney, Joselândio, Manuelito, Felipe, Carla, Diego, Gil, Emerson, Augusto, Fabíola, Ana, Fábio, Patrícia, Francis, Jhoyne, Berg, Alexandro e Mário — pelo aprendizado, apoio e momentos de amizade que compartilhamos.

À dona Joelma, por todo o incentivo e ajuda nas manhãs de sexta-feira.

Aos meus colegas de trabalho pela generosidade e por sempre estarem me incentivando.

Às professoras Dr^a. Fabíola de Oliveira Pedreira e Dr^a. Sara Ruth Bispo de Menezes Oliveira, membros da banca examinadora, por gentilmente aceitarem o convite e contribuírem para a conclusão deste trabalho

A todos os funcionários do Módulo V e a todas as pessoas que, de alguma forma,

contribuíram com este momento, o meu mais sincero agradecimento.

Gostaria também de agradecer à SBM pela promoção, organização e coordenação deste curso.

Por fim, agradeço à CAPES, pois o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - código de financiamento 001. .

*“Tudo tem o seu tempo determinado, e
há tempo para todo o propósito debaixo
do céu.”
(Ec 3.1)*

Resumo

Este trabalho tem como objetivo propor algumas alternativas para ensinar conteúdos de matemática básica a partir da investigação de problemas intrigantes, utilizando para isso todo o arcabouço matemático que há por trás desses problemas. Como exemplos, escolhemos alguns problemas que permitem a abordagem de conteúdos tais como, áreas de figuras planas, Teorema de Pitágoras, equação de retas, matrizes e determinantes, etc.. Foi feito um breve experimento com material concreto do Problema do Quadrado Perdido onde os alunos puderam interagir trocando ideias e evidenciando as possíveis técnicas para suas soluções. Uma análise das percepções dos alunos foi feita e com base nas discussões dos resultados obtidos propomos uma sequência didática no sentido de que o aluno tenha um aprendizado agradável e significativo.

Palavras-chave: Problemas Intrigantes. Ensino de Matemática Básica. Áreas de Figuras Planas. Teorema de Pitágoras. Problema do Quadrado Perdido.

Abstract

This work aims to propose some alternatives for teaching basic mathematics concepts through the investigation of intriguing problems, using the entire mathematical framework behind these problems. As examples, we selected problems that allow the exploration of topics such as areas of plane figures, the Pythagorean Theorem, linear equations, matrices, and determinants, among others. A brief experiment was conducted using concrete materials related to the Missing Square Problem, where students interacted, exchanged ideas, and identified possible techniques for solving it. An analysis of the students' perceptions was carried out, and based on the discussion of the obtained results, we propose a didactic sequence to provide students with an enjoyable and meaningful learning experience.

Keywords: Intriguing Problems. Basic Mathematics Teaching. Areas of Plane Figures. Pythagorean Theorem. Missing Square Problem.

Lista de Figuras

1.1	Retângulo de lados m_1 e m_2	17
1.2	Área de um paralelogramo	18
1.3	Área do triângulo	19
1.4	Triângulo Retângulo em B	20
1.5	Teorema de Pitágoras	21
1.6	Semelhança de Triângulos	22
1.7	Reta que passa pelos pontos A e B	23
1.8	Pontos colineares	25
2.1	Peças do Quadrado Perdido	27
2.2	Triângulo base	28
2.3	Triângulo base completamente preenchido	28
2.4	Triângulo base preenchido parcialmente	29
2.5	O ponto G não está na reta que passa por A e F	34
2.6	O ponto G' não está na reta que passa por A e F	34
2.7	O ponto G não pertence a reta que passa por A e F	35
2.8	Cartas de um Baralho	37
2.9	Cartas expostas sobre a mesa	38
2.10	Pilha de cartas após o recolhimento	38
2.11	Cartas reorganizadas após o recolhimento	39

3.1	Quadrado Mágico de ordem 3	46
3.2	Quadrado Mágico de ordem 4	47
3.3	Quadrado Mágico de ordem 5	47
3.4	Quadrado com centro $C_3 = 5$	48
3.5	Quadrado com centro $C_3 = 5$	49
3.6	Números dispostos na matriz 9×9	50
3.7	Quadrado Mágico de ordem 5.	50
3.8	Quadrado com centro $C_3 = e$	52
3.9	Quadrado com centro $C_3 = e$	53
4.1	Primeiro contato	57
4.2	Triângulo completo	58
A.1	Retângulo	70
A.2	Paralelogramo ABCD	71
A.3	Retângulo AEFD	71
A.4	Triângulo ABC	72
B.1	Peças	73

Sumário

Agradecimentos	4
Resumo	7
Abstract	8
Introdução	13
1 Preliminares	15
1.1 Áreas de Figuras Planas	15
1.2 Teorema de Pitágoras	20
1.3 Semelhança de Triângulos	21
1.4 Equação da Reta	22
1.5 Matrizes e Determinantes	23
1.5.1 Matrizes	23
1.5.2 Matriz Transposta	24
1.5.3 Determinantes	24
2 Enigmas Matemáticos	27
2.1 O Problema do Quadrado Perdido	27
2.1.1 Primeiro argumento - Usando Áreas de Figuras Planas	29
2.1.2 Segundo argumento - Usando o Teorema de Pitágoras	31

2.1.3	Terceiro argumento - Usando Equação da Reta	33
2.1.4	Quarto argumento - Usando Semelhança de Triângulos	34
2.1.5	Quinto argumento - Usando Determinantes	35
2.2	O Truque da Carta Desconhecida	36
2.3	Adivinhando um Número Pensado	40
3	Explorando Quadrados Mágicos	45
3.1	Exemplos de Quadrados Mágicos	46
3.1.1	Construção de um Quadrado Mágico de ordem ímpar	47
3.1.2	Quadrados Mágicos Generalizados	51
4	Sequência Didática	56
4.1	Experimento sobre a percepção dos alunos sobre o Problema do Quadrado Perdido	56
4.2	Proposta de sequência didática para o Problema do Quadrado Perdido.	60
	Conclusão	66
	Referências	68
A	Área do Retângulo e do Triângulo	70
B	Passo a passo para construção do Problema do Quadrado Perdido	73

Introdução

Nos dias de hoje na educação básica, não é raro o professor queixar-se sobre as dificuldades encontradas no dia a dia das salas de aula, qualquer que seja a sua área ou disciplina. Essa situação não é diferente quando falamos sobre o ensino de matemática no Brasil, pelo contrário, de acordo com os índices que avaliam a educação em nosso país, os estudantes têm tido desempenho cada dia pior. Esse grave fato requer uma profunda reflexão por parte de toda a sociedade e principalmente por nós professores de matemática da educação básica.

Também é verdade que a matemática por vezes padece da falta de interesse dos alunos que até chegam a sentir medo ao se deparar com alguma situação que exija o pensamento matemático. Muito desses casos ocorrem por conta dos estigmas que são historicamente atribuídos ao ensino de matemática: como a matemática é difícil, só pessoas inteligentes conseguem aprender matemática, dentre outros motivos. No entanto, hoje em dia sabemos através dos avanços da neurologia que as pessoas não nascem boas ou ruins para aprenderem matemática. Segundo [15], progressos da neurologia apontam que nossa estrutura cerebral está apta para esta ou aquela área do conhecimento desde que sejam associadas experiências de aprendizagens a uma certa satisfação pessoal que lhe traga de alguma forma felicidade.

Continuando com essa reflexão, qual seria o motivo ou os motivos que justifiquem os baixos índices de aprendizagem dos estudantes em matemática? Tentando responder este questionamento, podemos citar uma série de fatores que contribuem para dificultar o processo de ensino-aprendizagem de matemática em nosso país como, por exemplo, a formação de baixa qualidade dos alunos nos anos iniciais, o período de pandemia, as salas de aulas cheias, os diversos estímulos aos quais os alunos estão expostos durante as aulas e aqui destacamos as tecnologias concentradas no uso do aparelho celular. Enfim, uma série de fatores contribuem para distrair e “roubar” a atenção dos alunos.

Por outro lado, a matemática é uma disciplina que tem seu grau de abstração e que requer a máxima atenção possível com o intuito de que os conteúdos trabalhados sejam aprendidos pelos alunos de forma plena. Assim, considerando a atenção dispensada pelo

aluno imprescindível para o aprendizado da matemática, pensamos em um tema que contemple duas situações, aprisione a atenção do aluno e, ao mesmo tempo, crie uma janela de oportunidades para introduzirmos e explorarmos os mais diversos conteúdos da matemática básica. É com este pensamento que encontramos nos temas intrigantes um ambiente propício para ensinar matemática de uma forma leve e atrativa de modo que o aluno possa sentir satisfação ao compreender as justificativas que envolvem suas respectivas soluções.

Nesse sentido selecionamos alguns problemas interessantes, que trazem na sua essência enigmas matemáticos. Nessa etapa do percurso encontramos o momento propício para explicar os mais diversos conteúdos matemáticos baseados em uma motivação concreta. Ao passo que o problema é apresentado ao aluno, uma atmosfera mágica é criada para o processo ensino aprendizagem, pois este momento de curiosidade do aluno é todo convertido em atenção à explicação do professor.

No Capítulo 2, iniciamos explorando o problema do Paradoxo do Quadrado Perdido, onde quatro figuras geométricas são organizadas aparentemente como um triângulo retângulo, cujos catetos medem $5 \text{ u.c.} \times 13 \text{ u.c.}$, de duas formas distintas. Numa primeira organização o triângulo aparece completamente preenchido enquanto que na segunda organização é percebida a falta de um quadrado de lado 1 u.c. . O problema serve de ponto de partida para a discussão de temas como, Teorema de Pitágoras, equação de uma reta, áreas de figuras planas, semelhança de triângulos, dentre outros. O problema seguinte, denominado O truque da Carta Desconhecida, consiste em adivinhar uma carta de baralho escolhida aleatoriamente dentre um conjunto de cartas organizadas no formato de uma matriz quadrada sobre uma mesa onde podemos explorar a ideia de matriz e sua transposta. Na sequência exploramos expressões algébricas com os problemas de adivinhação de números pensados.

No Capítulo 3, abordamos o problema dos Quadrados Mágicos que envolvem os conceitos de resolução de sistemas de equações lineares, progressões aritméticas, soma dos termos de uma progressão aritmética, matrizes, além de investigar padrões interessantes nos quadrados mágicos, regras para a suas construções e também algumas curiosidades que, de alguma forma, contribuem para formalizar, num certo sentido, algumas propriedades inerentes a estes quadrados.

Por fim, no quarto capítulo, apresentamos uma sequência didática com a finalidade de auxiliar na aplicação em sala de aula de algumas ideias exploradas nesse Trabalho com a finalidade de solucionar o Problema do Quadrado Perdido.

Capítulo 1

Preliminares

Pensando em facilitar a revisitação dos conteúdos tratados ao longo desse trabalho, neste capítulo trouxemos uma breve revisão da matemática básica envolvida nas discussões apresentadas nos capítulos a seguir.

1.1 Áreas de Figuras Planas

Intuitivamente, e a grosso modo, a área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado.

Iniciamos lembrando que um polígono é uma região do plano limitada por uma curva fechada formada por segmentos de reta que se encontram nas extremidades. Cada segmento é um lado do polígono e o ponto de encontro de dois segmentos adjacentes é um vértice. Um polígono é dito não convexo quando existem dois pontos pertencentes ao polígono e o segmento por eles formado não pertença ao polígono.

No que segue usaremos *u.c.* como nossa unidade de comprimento e *u.a.* como nossa unidade de área.

Para que um conceito qualquer de área para polígonos tenha utilidade, são postuladas que as seguintes propriedades (intuitivamente desejáveis) sejam válidas:

1. Polígonos congruentes tem áreas iguais.
2. Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos (isto é, se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice ou uma aresta), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

3. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.
4. A área de um quadrado de lado 1 *u.c.* é igual a 1 *u.a.*.

Valendo os postulados de 1 a 4, acima, particione um quadrado de lado $n \in \mathbb{N}$ em n^2 quadrados de lado 1 *u.c.* cada. Denotando a área do quadrado maior, em *u.a.*, por A_n , devemos ter A_n igual a soma das áreas desses n^2 quadrados de lado 1 *u.c.* de maneira que

$$A_n = n^2 \text{ u.a..}$$

Considere, agora, um quadrado de lado m/n , com $m, n \in \mathbb{N}$, e área $A_{m/n}$. Arranje n^2 cópias do mesmo, empilhando n quadrados de lado m/n por fila, em n filas, formando assim um quadrado de lado $\frac{m}{n} \cdot n = m$. Tal quadrado maior terá, como já sabemos, área m^2 e, por outro lado, como ele está particionado em n^2 quadrados menores, cada um dos quais de lado m/n , sua área é igual à soma das áreas desses n^2 quadrados, isto é,

$$m^2 = n^2 \cdot A_{m/n}.$$

Portanto,

$$A_{m/n} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

é a área de um quadrado de lado racional m/n .

Podemos usar essa informação para obter a área de um quadrado de lado real. Este é o conteúdo da proposição a seguir.

Proposição 1.1.1 *Um quadrado de lado l tem área l^2 .*

Demonstração Para um $k \in \mathbb{N}$, tomamos os números racionais x_k e y_k tais que

$$x_k < l < y_k \text{ e } y_k - x_k < \frac{1}{k}$$

Em seguida, construímos quadrados de lados x_k e y_k , o primeiro contido no quadrado dado e o segundo o contendo. Como já sabemos calcular áreas de quadrados de lado racional, o postulado 3, acima, garante que a área A_l do quadrado de lado l deve satisfazer as desigualdades

$$x_k^2 < A_l < y_k^2.$$

Desde que

$$x_k^2 < l^2 < y_k^2$$

vale

$$-y_k^2 < -l^2 < -x_k^2$$

de onde obtemos

$$x_k^2 - y_k^2 < A_l - l^2 < y_k^2 - x_k^2.$$

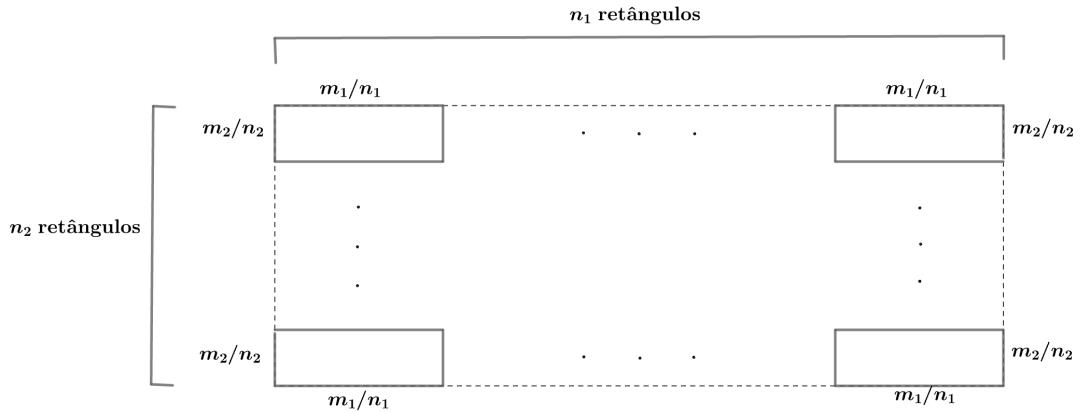
Segue daí que

$$\begin{aligned} |A_l - l^2| < y_k^2 - x_k^2 &= (y_k - x_k)(y_k + x_k) \\ &< \frac{1}{k}(y_k - x_k + 2x_k) \\ &< \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} + 2l\right) \end{aligned}$$

vale para todo $k \in \mathbb{N}$, de onde concluímos que $|A_l - l^2| = 0$, isto é, $A_l = l^2$.

Proposição 1.1.2 *Um retângulo de lados medindo a e b tem área de medida ab .*

Demonstração De modo análogo ao que foi feito na Proposição 1.1.1, podemos considerar um retângulo de lados $m, n \in \mathbb{N}$ particionado em mn quadrados de lado 1 u.c. onde concluímos que sua área é mn . Em seguida, tomamos um retângulo de lados $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$, com $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e com $n_1 n_2$ cópias do mesmo, montamos o retângulo de lados m_1 e m_2 conforme Figura 1.1.



Fonte: Autor

Figura 1.1: Retângulo de lados m_1 e m_2

Note que a área do retângulo da Figura 1.1 é, por um lado, $m_1 m_2$ e, por outro lado, $n_1 n_2 \cdot R$ onde R é a medida da área dos retângulos de lados $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$. Segue daí que

$$R = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \left(\frac{m_1}{n_1}\right) \cdot \left(\frac{m_2}{n_2}\right).$$

Por fim, tomamos um retângulo de lados a e b reais positivos e, para $k \in \mathbb{N}$, racionais

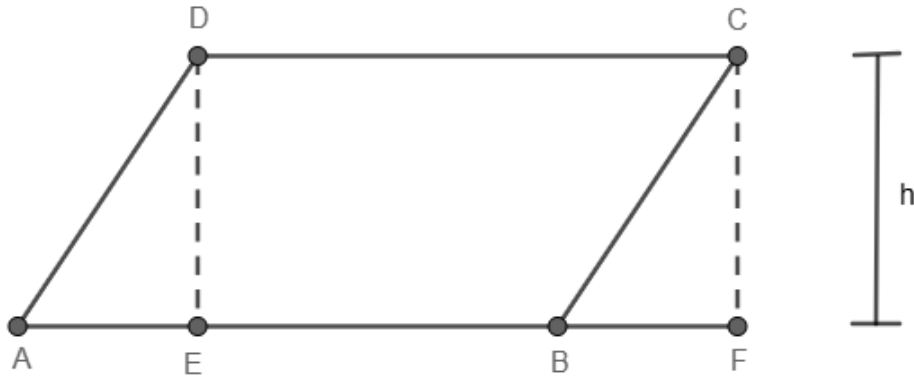
x_k, y_k, u_k e v_k , tais que $x_k < a < y_k$, $u_k < b < v_k$ e $y_k - x_k < \frac{1}{k}$, $v_k - u_k < \frac{1}{k}$. Sendo A a área do retângulo de lados a e b , um agrupamento a análogo ao feito para quadrados garante que A e ab pertencem, ambos, ao intervalo $(u_k x_k, y_k v_k)$ e

$$\begin{aligned} |A - ab| &< v_k y_k - u_k x_k = (v_k - u_k) y_k + u_k (y_k - x_k) \\ &< \frac{1}{k} (y_k + u_k) < \frac{1}{k} ((y_k - x_k) + 2x_k + (v_k - u_k) + 2u + k) \\ &< \frac{1}{k} \left(\frac{2}{k} + 2a + 2b \right) \end{aligned}$$

vale para todo $k \in \mathbb{N}$ de onde concluímos que $A = ab$.

Proposição 1.1.3 *A área de um paralelogramo de base a e altura h , é igual a ah .*

Demonstração Sejam $ABCD$ um paralelogramo de diagonais AC e BD e E e F respectivamente os pés das perpendiculares baixadas de D e C à reta $\overrightarrow{AB}$. Ademais, suponha, sem perda da generalidade, que $E \in AB$.



Fonte: Autor

Figura 1.2: Área de um paralelogramo

É imediato verificar que os triângulos ADE e BCF são congruentes pelo caso CH, de

modo que $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ e (pelo postulado 1.) $A(ADE)=A(BCF)$. Então, temos

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(ADE) + A(BEDC) \\ &= A(BCF) + A(BEDC) \\ &= A(CDEF) \end{aligned}$$

Por outro lado, CDEF é um retângulo de altura h e base EF , de modo que

$$\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{AE} = \overline{AB} = a$$

Portanto, segue da Proposição 1.1.2 que $A(ABCD) = A(EFCD) = ah$.

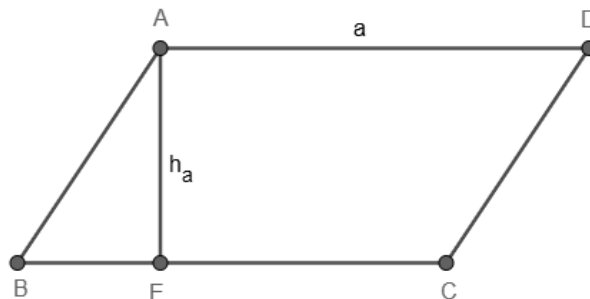
De posse dessa fórmula para o cálculo de área de paralelogramos, podemos obter facilmente uma fórmula para a área de triângulos, mediante o artifício discutido na proposição a seguir.

Proposição 1.1.4 *Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ e altura h_a , h_b e h_c , respectivamente relativas aos lados a, b e c . Então,*

$$A(ABC) = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

Em particular, $ah_a = bh_b = ch_c$.

Demonstração Seja $S = A(ABC)$ e D a interseção da reta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ por A com a reta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por C . Então $ABC \equiv CDA$ por ALA



Fonte: Autor

Figura 1.3: Área do triângulo

(uma vez que $\hat{BAC} = \hat{DCA}$, AC é lado comum e $\hat{BCA} = \hat{DAC}$), de sorte que

$A(ABC) = A(CDA)$ pelo postulado 1. Mas, como ABCD é um paralelogramo de base a e altura h_a , segue da proposição anterior que

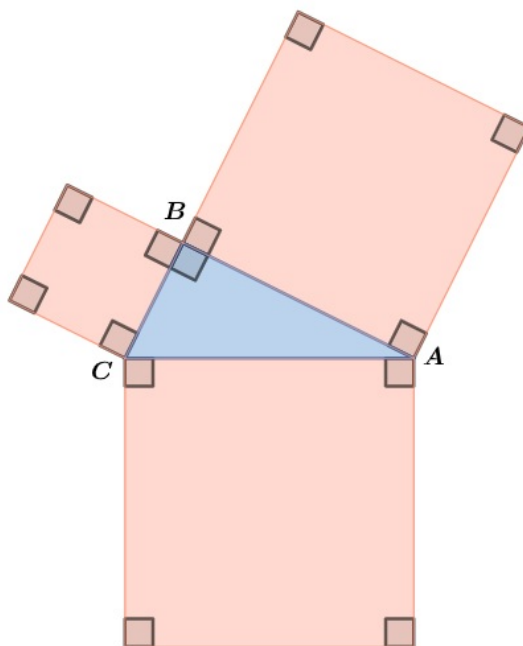
$$2S = A(ABC) + A(CDA) = A(ABCD) = ah_a.$$

Portanto, $A(ABC) = S = \frac{1}{2}ah_a$, e as outras duas igualdades podem ser obtidas de modo análogo.

1.2 Teorema de Pitágoras

Em um triângulo retângulo, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados sobre os lados que formam o mesmo ângulo reto.

Considere o triângulo da Figura 1.4 cujo ângulo reto é $\hat{A}BC$. Vale o seguinte teorema:

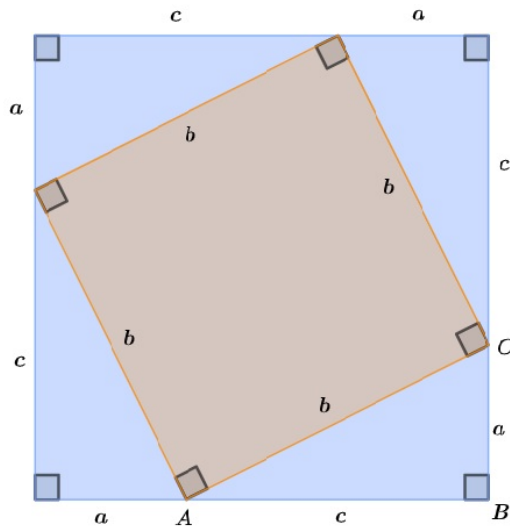


Fonte: Autor

Figura 1.4: Triângulo Retângulo em B

Teorema 1.2.1 (Teorema de Pitágoras) *O quadrado da medida do lado AC (oposto ao ângulo reto) é igual a soma dos quadrados das medidas dos lados AB e BC (que formam o ângulo reto $\hat{A}BC$).*

Demonstração. Seja o triângulo retângulo ABC reto em B e considere a disposição de quatro triângulos congruentes a ABC como mostra a Figura 1.5. É fácil deduzir que a figura em rosa é um quadrado de lado b . Temos que a área do quadrado de lado $a + c$ é igual a soma das áreas dos quatro triângulos com a área do quadrado de lado b , isto é, temos



Fonte: Autor

Figura 1.5: Teorema de Pitágoras

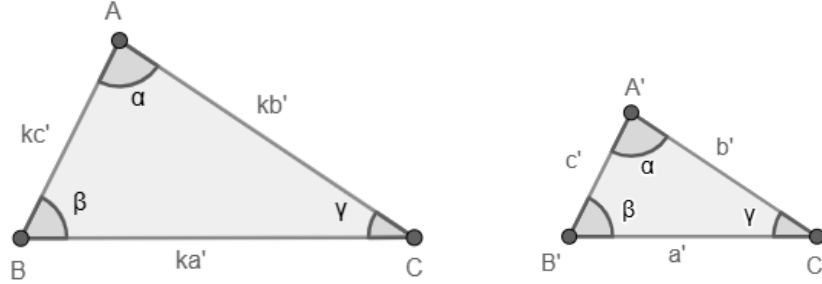
$$\begin{aligned}(a + c)^2 &= 4 \cdot \frac{ac}{2} + b^2 \\ a^2 + c^2 + 2ac &= 2ac + b^2 \\ a^2 + c^2 &= b^2\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

1.3 Semelhança de Triângulos

Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e do outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma, ver Figura 1.6. Fisicamente, dois triângulos são semelhantes se pudermos dilatar e/ou girar e/ou refletir e/ou transladar um deles, obtendo o outro ao final das referidas operações.

Na Figura 1.6, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes com correspondências de



Fonte: Autor

Figura 1.6: Semelhança de Triângulos

vértices $A \longleftrightarrow A'$, $B \longleftrightarrow B'$, $C \longleftrightarrow C'$ e existe um $k > 0$ tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$$

Tal real positivo k é denominado a **razão de semelhança** entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, nessa ordem (observe que a razão de semelhança entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, nessa ordem, é $\frac{1}{k}$).

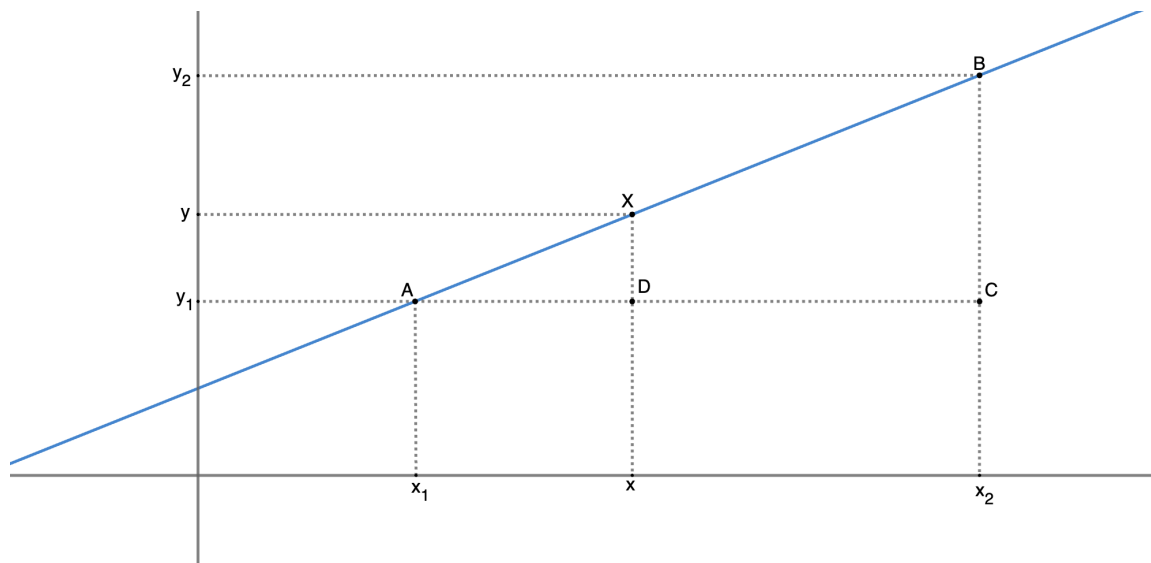
Escrevemos $ABC \sim A'B'C'$ para denotar que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \longleftrightarrow A'$, $B \longleftrightarrow B'$, $C \longleftrightarrow C'$.

1.4 Equação da Reta

Considera a reta que passa pelos pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ como mostra a Figura 1.7 .

Para que um ponto $X = (x, y)$ pertença a essa reta devemos ter que os triângulos retângulos ADX , reto em D , e ACB , reto em C , sejam semelhantes. Segue daí que

$$\frac{\overline{DX}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}},$$



Fonte: Autor

Figura 1.7: Reta que passa pelos pontos A e B

ou seja,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Nesta última igualdade chamamos o número $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ de coeficiente angular de onde obtemos

$$\begin{aligned} y - y_1 &= a(x - x_1) \\ y &= ax + (y_1 - ax_1) \end{aligned}$$

e, fazendo $b = y_1 - ax_1$ obtemos a equação reduzida da reta

$$y = ax + b.$$

Vale ressaltar que sendo θ o ângulo que a reta faz com o eixo x então $\tan \theta = a$ e b é a ordenada do ponto de interseção entre a reta e o eixo y quando a reta é não vertical.

1.5 Matrizes e Determinantes

1.5.1 Matrizes

Quando tratamos de matrizes é comum estabelecermos uma relação com organização de elementos em disposições retangulares com mn elementos distribuídos em m linhas e n colunas. É verdade que os números são com maior frequência os elementos de uma matriz.

A título de exemplo podemos citar uma planilha de registro de ponto de uma empresa, onde estão registrados o número de horas trabalhadas dos funcionários, sendo que nas linhas estão dispostas a relação nominal de cada funcionário enquanto que nas colunas estão registrados os dias de um mês ou os meses de um ano a depender da conveniência. Enfim, trata-se de uma ferramenta matemática muito prática para o gerenciamento de dados.

De maneira mais objetiva, diremos que uma matriz $m \times n$ é uma lista de números a_{ij} com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ onde o elemento a_{ij} será localizado na referida tabela pelo cruzamento da i -ésima linha com a j -ésima coluna, conforme podemos ver na ilustração abaixo

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Na matriz M chamamos o elemento a_{ij} de ij -ésimo elemento da matriz M e o denotamos por $M = [a_{ij}]_{m \times n}$.

1.5.2 Matriz Transposta

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, a matriz transposta de A , a qual denotamos por A^t , é a matriz obtida de A quando trocamos as colunas pelas linhas de A , de modo que o elemento que está na linha i e na coluna j de A^t é o elemento da linha j e da coluna i de A , ou seja, se $A = [a_{ij}]$ e $A^t = [a'_{ij}]$ então, $a'_{ij} = a_{ji}$.

1.5.3 Determinantes

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , o determinante de A , o qual denotamos por $\det A$, é um número obtido a partir dos elementos de A como é mostrado nos exemplos abaixo para matrizes de ordens 1, 2 e 3, respectivamente.

- Se a ordem de A é 1, então $\det A$ será o próprio elemento de A . Como exemplo, considerando a matriz $A = [5]$ temos que $\det A = 5$.
- Se a ordem de A é 2, então $\det A$ será a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Veja o exemplo da matriz

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\det D = (1 \cdot 4) - (3 \cdot 2) = 4 - 6 = -2.$$

- Se a ordem de A for 3, podemos aplicar a conhecida Regra de Sarrus para o cálculo do determinante. Temos para uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

que

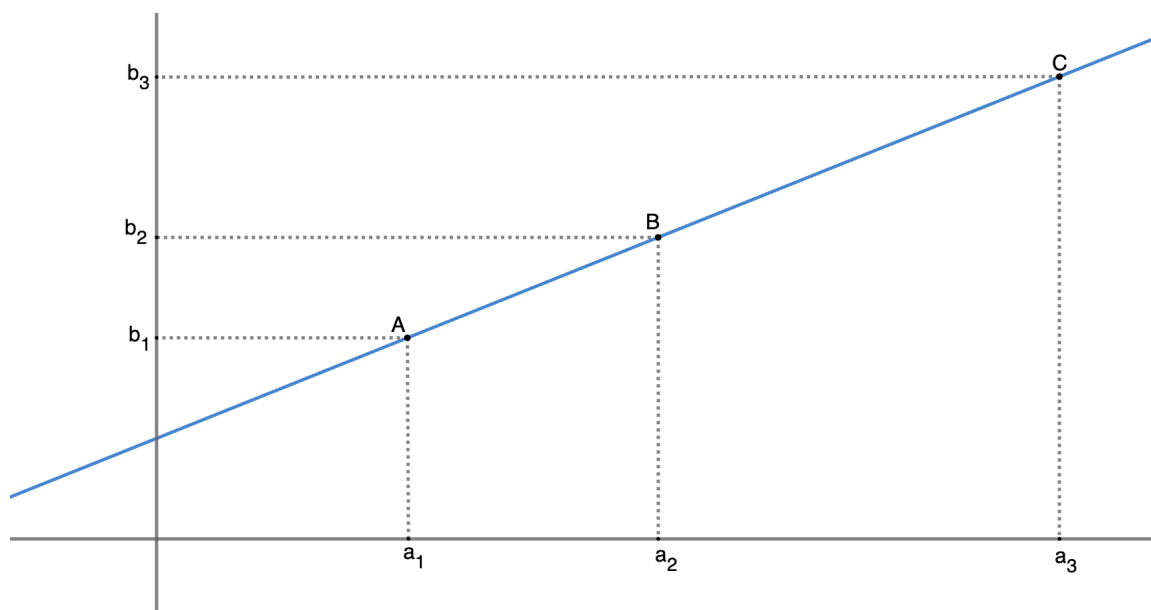
$$\det A = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 c_2 b_3$$

Uma aplicação interessante dos determinantes de ordem 3 é que para três pontos colineares

$$A = (a_1, b_1), \quad B = (a_2, b_2) \quad \text{e} \quad C = (a_3, b_3)$$

, isto é, três pontos que pertencem a uma mesma reta, devemos ter o determinante da matriz A a seguir, nulo.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{bmatrix}$$



Fonte: Autor

Figura 1.8: Pontos colineares

De fato, conforme a Figura 1.8 temos que

$$\begin{aligned}\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} &= \frac{b_3 - b_1}{a_3 - a_1} \\ (b_3 - b_1)(a_2 - a_1) &= (b_2 - b_1)(a_3 - a_1) \\ b_3a_2 - b_3a_1 - b_1a_2 + b_1a_1 &= b_2a_3 - b_2a_1 - b_1a_3 + b_1a_1 \\ a_1b_2 + b_1a_3 + a_2b_3 &= a_2b_1 + a_3b_2 + a_1b_3\end{aligned}$$

e como

$$\det A = a_1b_2 + a_3b_1 + a_2b_3 - a_2b_1 - a_3b_2 - a_1b_3$$

segue o resultado.

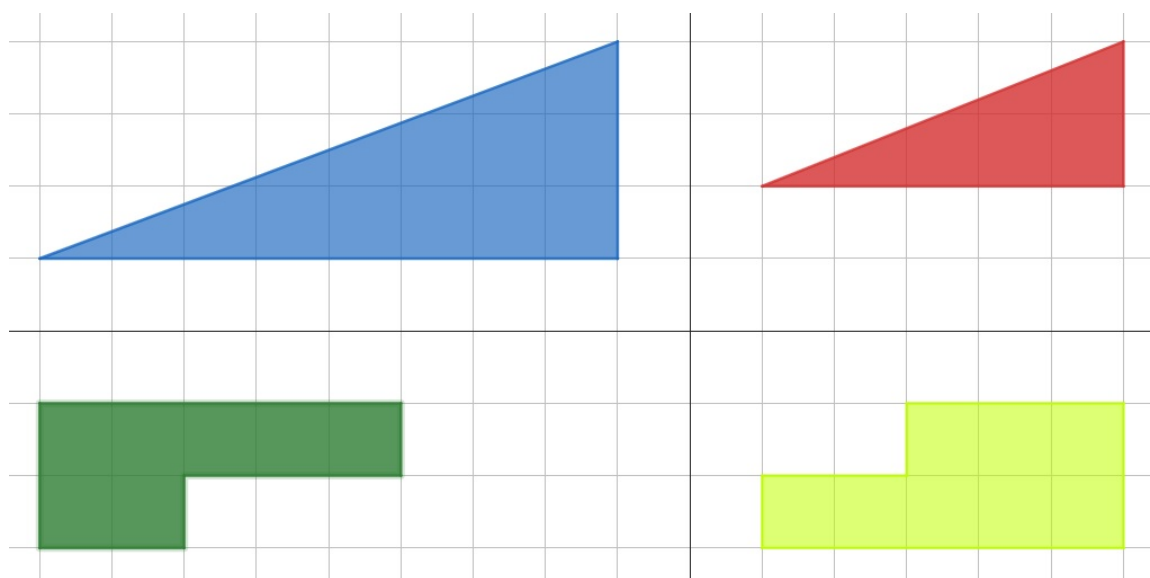
Capítulo 2

Enigmas Matemáticos

Nas duas seções que compõem este capítulo apresentaremos dois problemas intrigantes que mexem com a imaginação de quem os investiga. Elucidaremos o mistério por trás desses problemas usando abordagens que se utilizam de conteúdos da matemática básica.

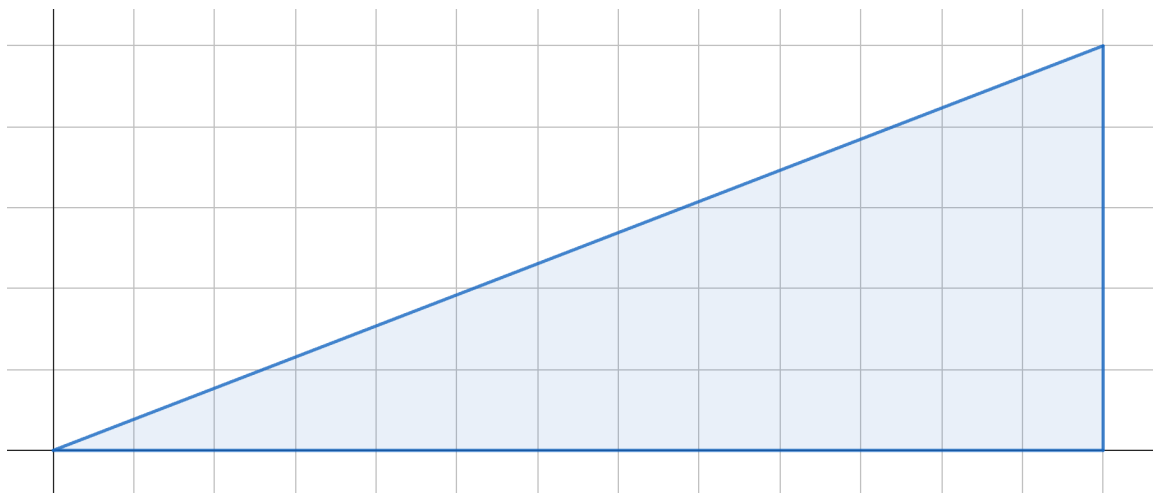
2.1 O Problema do Quadrado Perdido

Segundo [11] o Problema do Quadrado Perdido é uma ilusão de ótica com figuras geométricas planas e foi elaborado pelo mágico norte-americano Paul Jerome Curry (1917-1986). No Problema do Quadrado Perdido, quatro figuras geométricas, ver Figura 2.1, são organizadas sobre um triângulo base, ver Figura 2.2, de duas formas distintas.



Fonte: Autor

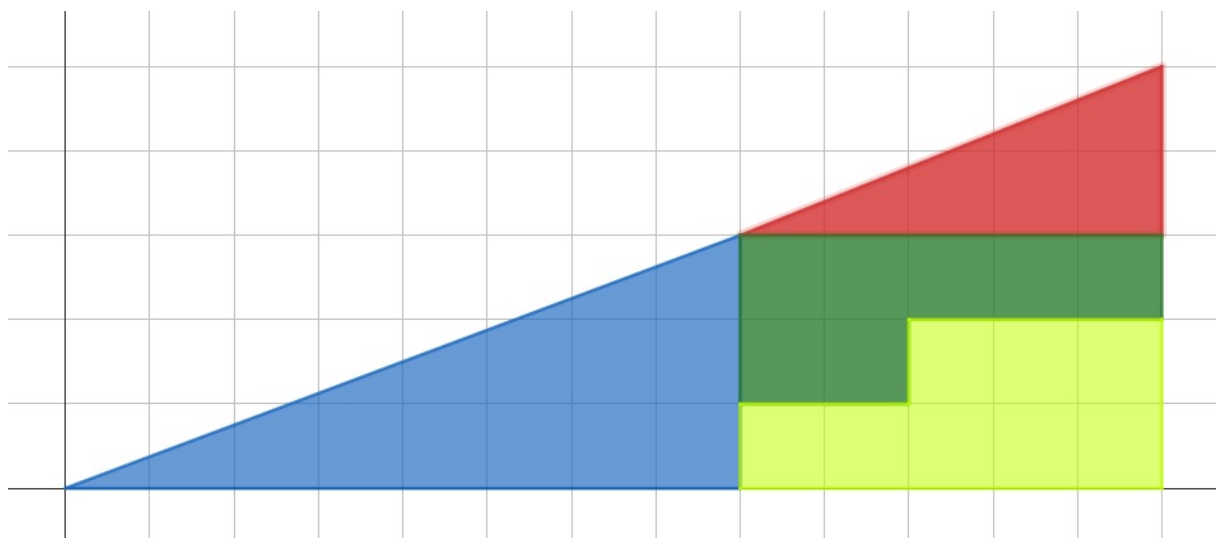
Figura 2.1: Peças do Quadrado Perdido



Fonte: Autor

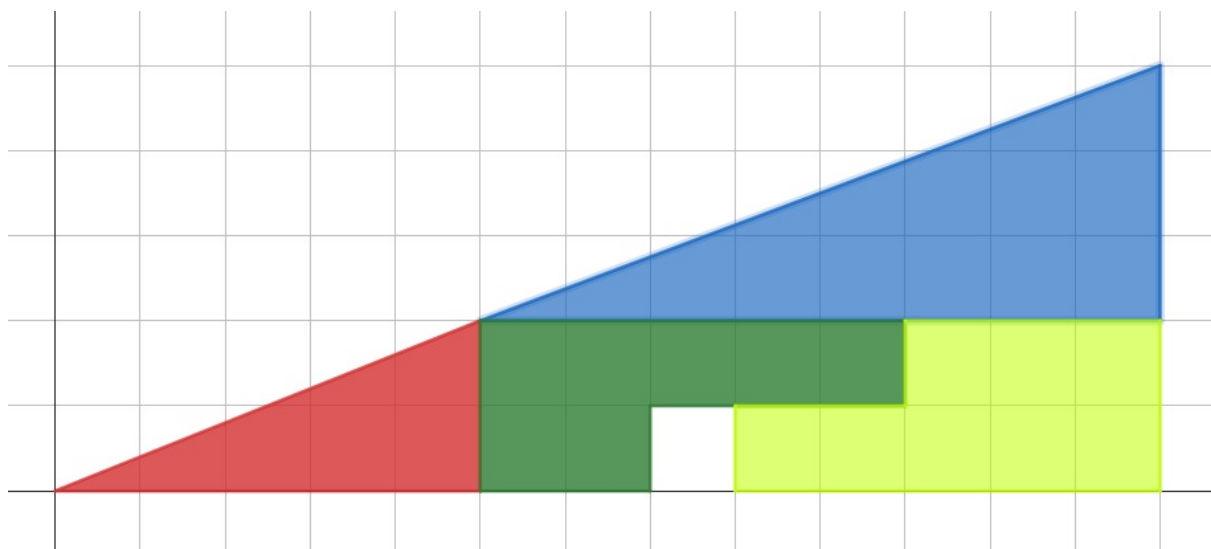
Figura 2.2: Triângulo base

Na primeira organização, ver Figura 2.3, o triângulo base é completamente preenchido pelas figuras, enquanto que na segunda organização, ver Figura 2.4, um quadrado de lado 1 unidade de comprimento não é preenchido.



Fonte: Autor

Figura 2.3: Triângulo base completamente preenchido



Fonte: Autor

Figura 2.4: Triângulo base preenchido parcialmente

Isso sugere que as quatro peças, por um lado, na primeira organização, tem área igual a do triângulo base enquanto que, na segunda organização, tem área 1 unidade de área a menos que a área do triângulo base. Obviamente esse fato é impossível, visto que as áreas das quatro figuras é invariavelmente a mesma, independentemente da organização proposta. Na sequência daremos alguns argumentos matemáticos que explicam a ocorrência deste fato.

Podemos justificar este enigma geométrico de diversas formas, tais como pelo cálculo de áreas de figuras planas, através do Teorema de Pitágoras, usando equações de retas, explorando o conceito de semelhança de triângulos, dentre outras maneiras. No que segue, vamos mostrar essa inconsistência usando algumas das ferramentas matemáticas acima mencionadas.

2.1.1 Primeiro argumento - Usando Áreas de Figuras Planas

O processo de comparar áreas de regiões planas por recorte e colagem nos remete aos procedimentos utilizados por diferentes civilizações da antiguidade – Egípcia, Babilônica, Indiana, Chinesa e Grega, na resolução de problemas envolvendo áreas. Os problemas mais comuns de medição baseados nos volumes de sólidos e áreas das figuras planas, na maior parte, eram calculados corretamente. Área de retângulos, triângulos e trapézios isósceles foram obtidas corretamente, provavelmente por um processo de “decomposição e composição”, semelhante aos encontrados nas geometrias praticadas pelos povos Indianos e Chineses, conforme [14]. O nosso problema se mostra intrigante pois aparentemente há o sumiço de uma parte da área conforme a decomposição e posterior composição é

proposta. Para explicar o que está ocorrendo vamos considerar a seguinte nomenclatura;

A_1 é a medida da área do triângulo base;

A_2 é a medida da área do triângulo vermelho;

A_3 é a medida da área do triângulo azul;

A_4 é a medida da área da figura verde;

A_5 é a medida da área da figura amarela.

A seguir temos as medidas, em unidades de comprimento ($u.c.$), das figuras planas observadas na Figura 2.1 .

O triângulo base tem base medindo 13 $u.c.$ e altura 5 $u.c.$ e, portanto, tem área A_1 , medindo em unidades de área ($u.a.$)

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{13 \times 5}{2} \\ &= 32,5 \text{ u.a..} \end{aligned}$$

O triângulo vermelho tem base medindo 5 $u.c.$ e altura 2 $u.c.$ e, portanto, tem área A_2 , medindo

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{5 \times 2}{2} \\ &= 5 \text{ u.a..} \end{aligned}$$

O triângulo azul tem base medindo 8 $u.c.$ e altura 3 $u.c.$ e, portanto, tem área A_3 , medindo

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{8 \times 3}{2} \\ &= 12 \text{ u.a..} \end{aligned}$$

A figura verde é formada por 7 quadrados de lado 1 $u.c.$ e, portanto, tem área $A_4 = 7 \text{ u.a..}$ Por fim, a figura amarela é formada por 8 quadrados de lado 1 $u.c.$ e, portanto, tem área $A_5 = 8 \text{ u.a..}$

Note que a soma das áreas das figuras e triângulos é dada por

$$A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 32 \text{ u.a..}$$

Por outro lado quando essas peças são organizadas no triângulo base de modo a preenchê-lo completamente, como sugere a Figura 2.3, passam juntas a somar uma área igual

a área do triângulo base que é $32,5 \text{ u.a.}$ e quando organizadas no triângulo base de outro modo, como sugere a Figura 2.4, passam a preenchê-lo parcialmente, deixando um quadrado de lado 1 u.c. vazio, ou seja, passam juntas a somar uma área igual a área do triângulo base menos 1 u.a. , isto é, $31,5 \text{ u.a.}$

É óbvio que a área correta da região que é composta pela união das áreas das quatro peças é 32 u.a. , resultado da soma das áreas de cada uma das peças, entretanto ocorre uma ilusão de ótica ao organizarmos as peças sobre o triângulo base o que nos leva a ter uma percepção equivocada de que a organização das peças feitas na Figura 2.3 preenche completamente o triângulo base, bem como falta uma unidade de área na organização feita na Figura 2.4 .

Ocorre que tanto na primeira como na segunda organização, há uma sutil quebra de direção nas hipotenusas dos triângulos retângulos oriundos dessas organizações, tão sutil que torna-se difícil a sua percepção imediata. Na primeira organização, conforme Figura 2.3, a hipotenusa do triângulo vermelho se encontra com a hipotenusa do triângulo azul num ponto interior do triângulo base. Sendo assim existe um triângulo cujos lados são as hipotenusas do triângulo base, do triângulo vermelho e do triângulo azul que está inteiramente contido no triângulo base e com área $0,5 \text{ u.a.}$ que é a diferença entre as áreas do triângulo base e a área da figura formada pela primeira organização. Na segunda organização, Figura 2.4, a hipotenusa do triângulo vermelho se encontra com a hipotenusa do triângulo azul num ponto exterior do triângulo base. Sendo assim, existe um triângulo cujos lados são as hipotenusas do triângulo base, do triângulo vermelho e do triângulo azul que está contido fora do triângulo base e com área $0,5 \text{ u.a.}$ que é a diferença entre a área da figura formada pela segunda organização mais a área do quadrado vazio que medem juntas 33 u.a. menos a área do triângulo base.

2.1.2 Segundo argumento - Usando o Teorema de Pitágoras

Como podemos observar, na organização das peças na Figura 2.3, aparentemente a medida da hipotenusa do triângulo base coincide com o soma das medidas das hipotenusas dos triângulos em azul e vermelho. Vamos mostrar que essa percepção é falsa. De fato, temos as seguintes medidas para as hipotenusas desses triângulos.

O triângulo azul tem catetos de medidas 3 *u.c.* e 8 *u.c.* logo sua hipotenusa h_a mede

$$\begin{aligned}h_a^2 &= 8^2 + 3^2 \\&= 64 + 9 \\&= 73 \\&= \sqrt{73}.\end{aligned}$$

O triângulo vermelho tem catetos de medidas 2 *u.c.* e 5 *u.c.* logo sua hipotenusa h_v mede

$$\begin{aligned}h_v^2 &= 5^2 + 2^2 \\&= 25 + 4 \\&= 29 \\&= \sqrt{29}.\end{aligned}$$

O triângulo base tem catetos de medidas 5 *u.c.* e 13 *u.c.* logo sua hipotenusa h_b mede

$$\begin{aligned}h_b^2 &= 13^2 + 5^2 \\&= 169 + 25 \\&= 194 \\&= \sqrt{194}.\end{aligned}$$

O argumento que usaremos se baseia em mostrar que os números $\sqrt{29}$, $\sqrt{73}$ e $\sqrt{194}$ formam um triângulo. Para isso usaremos a seguinte afirmação:

Dados três números reais, a, b e c , existe um triângulo com estas medidas de lados se, e somente se, $a + b > c$, $a + c > b$ e $b + c > a$.

De fato,

$$\begin{aligned}\sqrt{194} + \sqrt{73} &> \sqrt{29} \quad \text{e} \\ \sqrt{194} + \sqrt{29} &> \sqrt{73}\end{aligned}$$

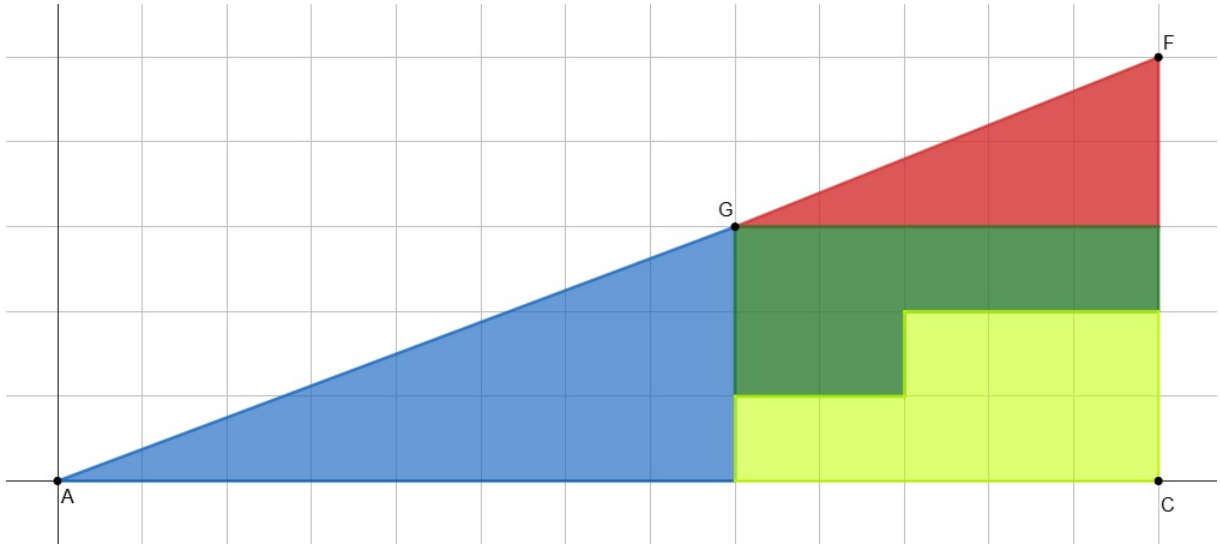
são evidentes. Para a última desigualdade temos

$$\begin{aligned}
73 \times 29 &= 2117 \\
&> 2116 \\
&= 46 \times 46 \\
\sqrt{73} \times \sqrt{29} &> 46 \\
2\sqrt{73} \times \sqrt{29} &> 92 \\
73 + 2\sqrt{73} \times \sqrt{29} + 29 &> 92 + 73 + 29 \\
(\sqrt{73} + \sqrt{29})^2 &> 194 \\
\sqrt{73} + \sqrt{29} &> \sqrt{194}
\end{aligned}$$

Conclui-se daí que as respectivas hipotenusas não estão alinhadas, ou seja, existe um triângulo de lados medindo $\sqrt{29}$, $\sqrt{73}$ e $\sqrt{194}$.

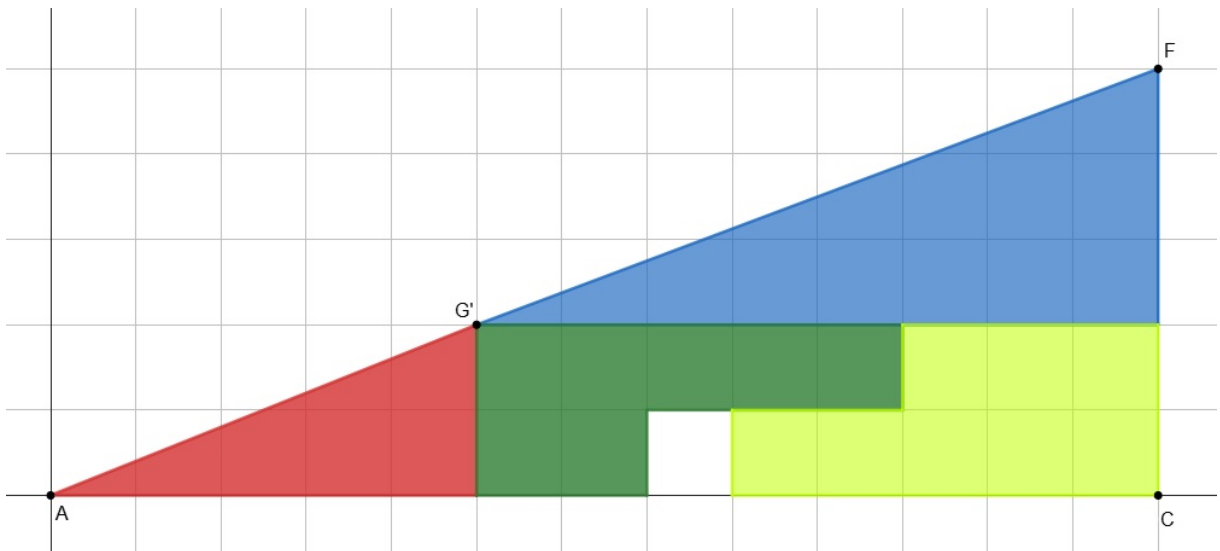
2.1.3 Terceiro argumento - Usando Equação da Reta

Observe a Figura 2.5. O triângulo ACF representa o triângulo base. A reta que passa pelos pontos $A = (0, 0)$ e $F = (13, 5)$ é dada por $y = \frac{5}{13}x$. No entanto o ponto $G = (8, 3)$ não pertence a esta reta. De fato, note que o ponto de abscissa $x = 8$ que pertence a reta tem ordenada $y = \frac{40}{13}$. Logo, G é um ponto interior ao triângulo base e $ACFG$ é um quadrilátero não convexo. Agora, observe a Figura 2.6. Do mesmo modo o triângulo base é o triângulo ACF . A reta que passa pelos pontos A e F continua sendo $y = \frac{5}{13}x$ e, do mesmo modo, temos que o ponto $G' = (5, 2)$ não pertence a esta reta. De fato, note que o ponto de abscissa $x = 5$ que pertence a reta tem ordenada $y = \frac{25}{13}$. Logo, G' é um ponto exterior ao triângulo base e $ACFG'$ é um quadrilátero convexo. Por fim, concluímos que o que falta para o quadrilátero não convexo $ACFG$ preencher o triângulo base ACF é um triângulo AGF de área $0,5 \text{ u.a.}$ e o que o quadrilátero convexo $ACFG'$ excede da área do triângulo base ACF é um triângulo $AG'F$ de área $0,5 \text{ u.a.}$, semelhante ao triângulo AGF visto que possuem os três lados congruentes. Logo o vazio que se dá num quadrado de área 1 u.a. ocorre para compensar o preenchimento das áreas dos dois triângulos AGF e $AG'F$ que somam 1 u.a. .



Fonte: Autor

Figura 2.5: O ponto G não está na reta que passa por A e F .



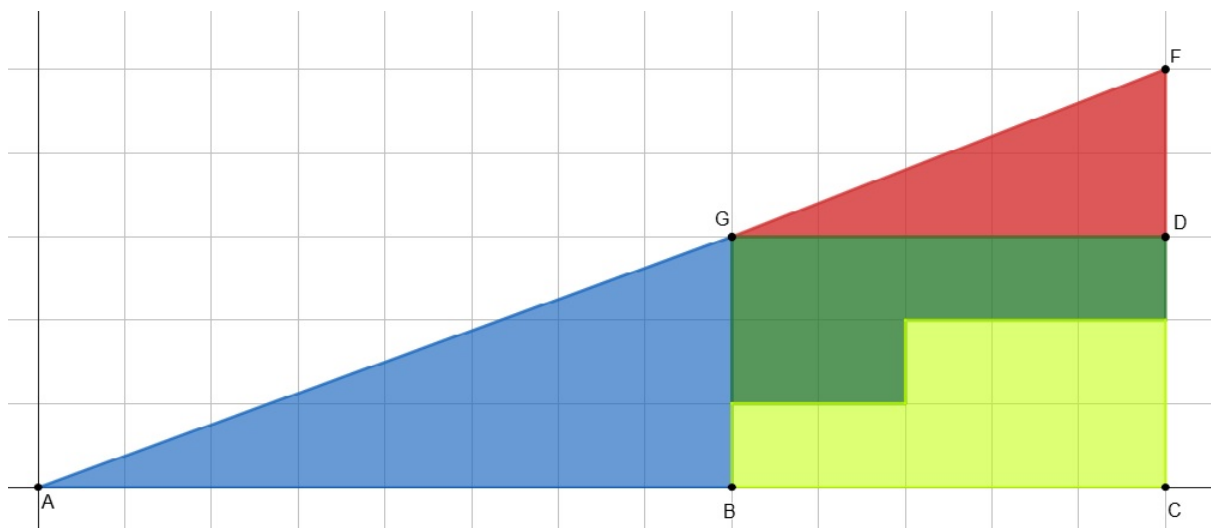
Fonte: Autor

Figura 2.6: O ponto G' não está na reta que passa por A e F .

2.1.4 Quarto argumento - Usando Semelhança de Triângulos

Nosso argumento, agora, se baseia em usar semelhança de triângulos para mostrar que a Figura 2.7 não é um triângulo. De fato, se tal figura fosse um triângulo teríamos que os triângulos ABG , GDF e ACF seriam semelhantes pelo caso AA , ângulo-ângulo, pois teriam os ângulos $\widehat{GAB} = \widehat{FAC} = \widehat{FGD}$ congruentes além de serem retângulos. Isto implicaria na proporcionalidade entre seus lados correspondentes, isto é, teríamos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{GD}}{\overline{DF}}.$$



Fonte: Autor

Figura 2.7: O ponto G não pertence a reta que passa por A e F .

No entanto, essas igualdades não se verificam pois

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BG}} = \frac{8}{3}, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{13}{5} \text{ e } \frac{\overline{GD}}{\overline{DF}} = \frac{5}{2}.$$

De forma análoga, a figura da segunda organização também não é um triângulo. A explicação do sumiço do quadrado na reorganização segue a mesma ideia utilizada nos argumentos anteriores.

2.1.5 Quinto argumento - Usando Determinantes

Por fim, vamos utilizar como argumento o conceito de Determinantes para verificar que ambas as organizações das peças acima citadas não constituem um triângulo retângulo. Vamos mostrar que os pontos que aparentemente aparecem sobre a hipotenusa do triângulo base, tanto na primeira como na segunda organizações não estão alinhados. Para isso, vamos checar o valor do determinante, caso seja nulo os três pontos estão alinhados, caso contrário, os mesmos são vértices de um triângulo com área igual ao módulo deste determinante. Conforme Figura 2.7 temos os pontos $A = (0, 0)$, $F = (13, 5)$ e $G = (8, 3)$.

Calculando o determinante obtemos

$$\begin{aligned}
 |\det(AFG)| &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13 & 5 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= |(0 \times 5 \times 1 + 0 \times 1 \times 8 + 1 \times 13 \times 3) - (8 \times 5 \times 1 + 3 \times 1 \times 0 + 1 \times 13 \times 0)| \\
 &= |(0 + 0 + 39) - (40 + 0 + 0)| \\
 &= |39 - 40| \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Agora vamos considerar os pontos $A = (0, 0)$, $F = (13, 5)$ e $G' = (5, 2)$, ver Figura 2.6, vamos calcular o seu determinante.

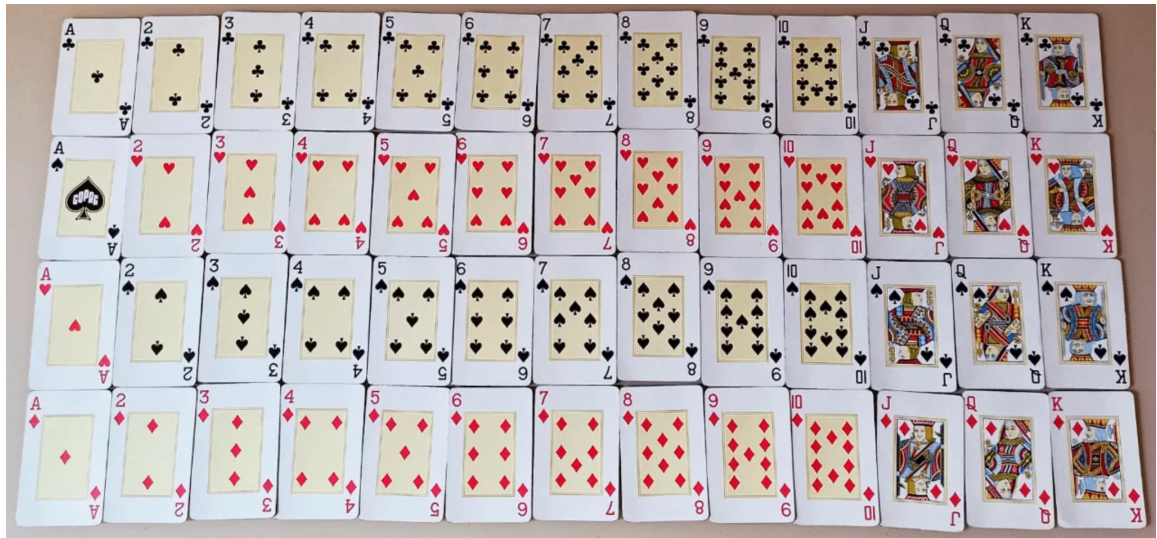
$$\begin{aligned}
 \det(AFG') &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (0.5.1 + 0.1.5 + 1.13.2) - (5.5.1 + 2.1.0 + 1.13.0) \\
 &= (0 + 0 + 26) - (25 + 0 + 0) \\
 &= 26 - 25 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Tanto $\det(AFG)$ quanto $\det(AFG')$ apresentam resultados diferentes de 0, ou seja, nenhuma das duas organizações representa um triângulo, o que equivale a dizer que os pontos A, G e F e A, G' e F não estão sobre uma mesma reta, confirmando que aparente a hipotenusa, na verdade, é composta por dois seguimentos de reta com ligeira mudança de direção.

2.2 O Truque da Carta Desconhecida

Um baralho é um conjunto de cartas que é utilizado nos mais variados tipos de jogos. Normalmente, um baralho possui 52 cartas divididas em 4 grupos, denominados naipes, com 13 cartas cada um. Na Figura 2.8 temos, na sequência, as cartas dos naipes de Ouros, Paus, Espadas e Copas.

Acredita-se que o baralho foi criado pelo francês Jacquemin Gringonneur, sob encomenda do rei Carlos VI de França. Assim, Gringonneur teria criado o baralho para representar as divisões sociais da França através dos naipes. O naipe de Copas represen-



Fonte: Autor

Figura 2.8: Cartas de um Baralho

taria o clero, o naipe de Ouros a burguesia, o naipe de Espada os militares e o naipe de Paus os camponeses.

O truque da carta desconhecida consiste em adivinhar uma carta escolhida aleatoriamente por uma pessoa dentre um conjunto de cartas previamente expostas. Como exemplo, vamos apresentar o truque com o conjunto de cartas a seguir,

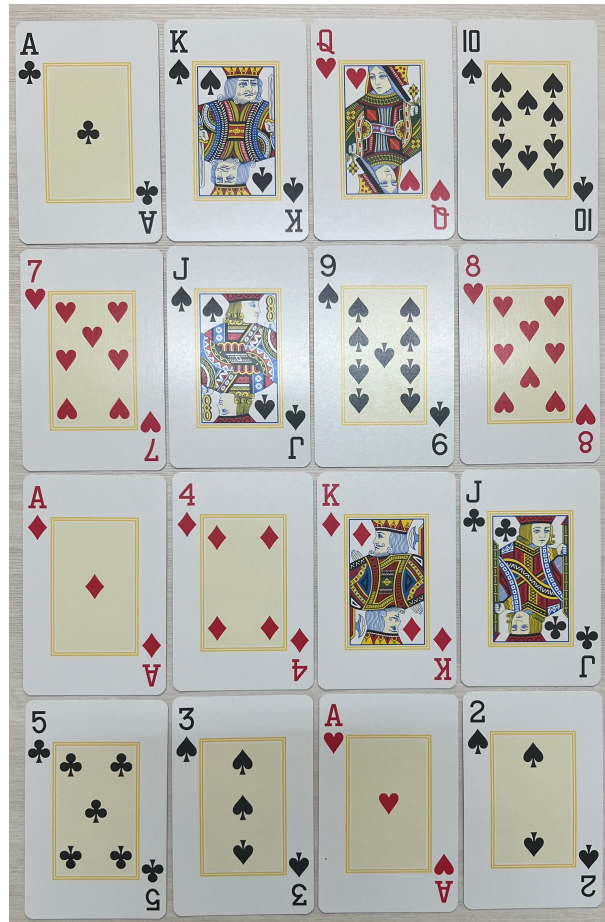
$$\{A\clubsuit, K\spadesuit, 4\diamondsuit, 8\heartsuit, 10\spadesuit, J\clubsuit, 5\clubsuit, 7\heartsuit, 2\spadesuit, A\diamondsuit, Q\heartsuit, 9\spadesuit, K\diamondsuit, 3\spadesuit, A\heartsuit, J\spadesuit\}$$

Digamos que um professor peça a um aluno que escolha dentre as cartas do exemplo anterior uma carta e guarde esta informação para si. Suponha que a carta escolhida pelo aluno seja a carta $9\spadesuit$. Então o professor pede para o aluno embaralhar as cartas entregando a ele o baralho. Em seguida o professor dispõe essas cartas em forma de uma matriz quadrada 4×4 e pergunta ao aluno em qual linha sua carta aparece. O aluno então responde, como era de se esperar, que a carta está na linha 2 conforme Figura 2.9 .

Após esta informação, o professor recolhe as cartas da esquerda para a direita da linha de cima até a linha de baixo ficando com uma pilha de cartas onde a primeira é um $A\clubsuit$ e a última é um $2\spadesuit$ conforme mostra a Figura 2.10 .

Em seguida ele reorganiza as cartas sobre a mesa, distribuindo-as de cima para baixo, começando da coluna da esquerda até a coluna da direita conforme Figura 2.11 .

Por fim, o professor pergunta novamente ao aluno em que linha a carta está. O aluno, como pode ser visto na Figura 2.11, responde que a carta por ele escolhida está na linha 3. O professor então responde que a carta escolhida pelo aluno é um $9\spadesuit$.



Fonte: Autor

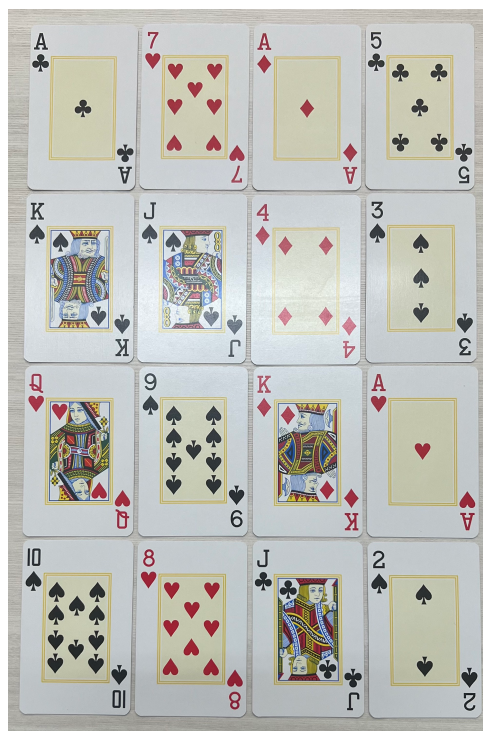
Figura 2.9: Cartas expostas sobre a mesa



Fonte: Autor

Figura 2.10: Pilha de cartas após o recolhimento

Pois bem, nesse momento, o aluno deve se perguntar: “como o professor conseguiu advinhar qual a carta que eu escolhi?”



Fonte: Autor

Figura 2.11: Cartas reorganizadas após o recolhimento

A matemática por trás desse truque está ligada ao conceito de matriz transposta. Para localizar um elemento em uma matriz é preciso saber apenas a linha e a coluna onde o elemento se encontra. Quando o professor dispõe o conjunto de cartas em forma de matriz

$$\{A_{\clubsuit}, K_{\spadesuit}, 4_{\diamondsuit}, 8_{\heartsuit}, 10_{\spadesuit}, J_{\clubsuit}, 5_{\clubsuit}, 7_{\heartsuit}, 2_{\spadesuit}, A_{\diamondsuit}, Q_{\heartsuit}, 9_{\spadesuit}, K_{\diamondsuit}, 3_{\spadesuit}, A_{\heartsuit}, J_{\spadesuit}\}$$

e pede para que o aluno diga a linha onde está a carta escolhida, o aluno já lhe dá a primeira informação. Quando o professor recolhe as cartas e as reorganiza sobre a mesa, distribuindo-as de cima para baixo, começando da coluna da esquerda até a coluna da direita, na verdade, ele está as organizando de forma a obter a matriz transposta da matriz da disposição inicial. Quando ele pede novamente que o aluno diga em qual linha a carta está nessa nova organização e o aluno responde que está na linha 3, o aluno está na verdade dizendo que o elemento está na coluna 3 da matriz da disposição inicial, ou seja, ele informou a linha e a coluna que o elemento se encontra na matriz da disposição inicial. Então o professor finaliza o truque dizendo que a carta escolhida pelo aluno é um $9_{\spadesuit}$, isto é, a carta que está na linha 2 e coluna 3 da matriz obtida na disposição inicial.

Vejamos essa equivalência com as matrizes a seguir. Quando o aluno diz que a carta

está na linha 2 ele informa que pode ser uns dos elementos, a_{21}, a_{22}, a_{23} ou a_{24} .

$$\begin{pmatrix} A\clubsuit & K\spadesuit & Q\heartsuit & 10\spadesuit \\ 7\heartsuit & J\spadesuit & 9\spadesuit & 8\heartsuit \\ A\diamondsuit & 4\diamondsuit & K\diamondsuit & J\clubsuit \\ 5\clubsuit & 3\spadesuit & A\heartsuit & 2\spadesuit \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Quando o professor reorganiza as cartas, ou seja, as coloca de forma transposta e o aluno diz que a carta está na linha 3 ele informa que pode ser algum dos elementos, a_{13}, a_{23}, a_{33} ou a_{43} .

$$\begin{pmatrix} A\clubsuit & 7\heartsuit & A\diamondsuit & 5\clubsuit \\ K\spadesuit & J\spadesuit & 4\diamondsuit & 3\spadesuit \\ Q\heartsuit & 9\spadesuit & K\diamondsuit & A\heartsuit \\ 10\spadesuit & 8\heartsuit & J\clubsuit & 2\spadesuit \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Assim, o aluno diz, sem perceber que a carta escolhida está na interseção dos conjuntos

$$\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}\} \text{ e } \{a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}\},$$

que é o elemento $a_{23} = 9\spadesuit$.

2.3 Adivinhando um Número Pensado

Nesta seção vamos abordar o problema de descobrir um número pensado por uma pessoa e, nesse contexto, vamos explorar conteúdos da matemática básica envolvendo soma, produto, divisão, subtração, expressões algébricas e divisibilidade.

É muito provável que, em algum momento de nossa jornada estudantil, em conversas acadêmicas ou até mesmo em rodas de amigos, alguém tenha nos apresentado um problema de adivinhação com números tal como no exemplo a seguir.

Um professor pede para um aluno pensar num número. De forma oculta e com o auxílio de uma calculadora o professor pede que o aluno multiplique o número por 3 e em seguida some 6 ao resultado. Na sequência o professor pede ao aluno que divida o resultado por 3 e subtraia na sequência o número pensado. Então, como um passe de mágica o professor diz que o número no visor da calculadora do aluno é 2.

Qual o truque por trás dessa suposta adivinhação? Na verdade, esse problema serve como uma boa motivação para dar sentido ao estudo de uma expressão algébrica e das

incógnitas que a compõem.

Quando o professor pede que o aluno pense num número ele não sabe qual o número o aluno pensou e, então, ele atribui a expressão algébrica de valor x para representar o número pensado pelo aluno. Quando o professor pede para que o aluno multiplique o número por 3 o professor atribui a expressão algébrica $3x$ ao resultado que se transforma em $3x + 6$ após o aluno atender o pedido do professor de somar 6 ao resultado. Então, após o professor pedir que aluno divida o resultado por 3 o professor associa a expressão algébrica $\frac{3x+6}{3}$ que simplificando vale $x + 2$. Por fim, quando o professor pede ao aluno que subtraia o valor pensado o professor associa a expressão $x + 2 - x$ que vale 2. Assim o professor, mesmo sem saber qual o número pensado pelo aluno, é capaz de adivinhar a resposta que consta na calculadora do aluno, ou seja, tem o valor 2. Na Tabela abaixo podemos ver de forma mais clara as operações feitas pelo aluno e as respectivas expressões algébricas associadas pelo professor em cada etapa supondo que o aluno tenha pensado no número 11.

Etapa	Professor	Expressão associada	Calculadora do aluno
1	Pense num número	x	11
2	Multiplique por 3	$3x$	$3 \times 11 = 33$
3	Some 6	$3x+6$	$33 + 6 = 39$
4	Divida por 3	$x+2$	$39 \div 3 = 13$
5	Subtraia o número pensado	2	$13 - 11 = 2$

Observe que independentemente do número pensado pelo aluno o resultado é sempre 2. Vejamos mais um exemplo.

O professor pede para um aluno pensar num número. De forma oculta e com o auxílio de uma calculadora o professor pede que o aluno multiplique o número por 6 e em seguida some 15 ao resultado. Na sequência o professor pede ao aluno que divida o resultado por 3 e subtraia na sequência o número 4. O professor pergunta ao aluno qual o resultado visto no visor da calculadora. Após esta informação o professor então adivinha o número pensado pelo aluno

Para entender o procedimento suponha que aluno tenha pensado no número 17. Então o aluno o multiplica por 6 e obtém 102. Em seguida o aluno acrescenta 15 encontrando 117. Após dividir esse resultado por 3 o aluno obtém 39. Em seguida o aluno subtrai 4 do resultado obtendo 35. Após informar ao professor que o número obtido foi 35 o professor prontamente adivinha que o número pensado foi 17. Vejamos como o professor usou expressões algébricas para decifrar o número pensado pelo aluno.

Quando o professor pede que o aluno pense num número ele associa a expressão algébrica de valor x para representar o número pensado. Em seguida o professor associa a expressão algébrica $6x$ ao resultado da multiplicação do número pensado por 6.

Na sequência o professor associa a expressão $6x + 15$ após pedir que o aluno acrescente 15 ao resultado e em seguida associa a expressão $2x + 5$ ao número obtido pelo aluno após dividir o resultado por 3. Por fim o professor associa a expressão $2x + 1$ após pedir que o aluno subtraia 4 do resultado. Quando o aluno informa que o número obtido após os cálculos é 35 o professor então iguala sua expressão algébrica obtida ao valor informado, ou seja, o professor tem agora a seguinte equação

$$2x + 1 = 35$$

que após ser resolvida atribui ao número x pensado pelo aluno o valor de $x = 17$.

Na Tabela abaixo podemos ver as operações feitas pelo aluno e as respectivas expressões algébricas associadas pelo professor em cada etapa.

Etapa	Professor	Expressão associada	Calculadora do aluno
1	Pense num número	x	17
2	Multiplique por 6	$6x$	$6 \times 17 = 102$
3	Some 15	$6x+15$	$102 + 15 = 117$
4	Divida por 3	$2x+5$	$117 \div 3 = 39$
5	Subtraia o número 4	$2x+1$	$39 - 4 = 35$

Passemos agora a um problema de adivinhação mais elaborado.

O professor pede ao aluno que pense em um número de três algarismos e o repita ao lado para obter um número de seis algarismos. Na sequência o professor pede ao aluno que o divida por 11 e o resultado divida por 7. Por fim o professor pede ao aluno que divida o resultado pelo número pensado. Então o professor adivinha que o número no visor da calculadora do aluno é 13.

Para entendermos as ideias usadas pelo professor vejamos um exemplo. Suponha que aluno tenha pensado no número 587. Então o aluno repete este número ao lado obtendo o número 587587. Em seguida o aluno divide esse número por 11 e depois por 7 obtendo no visor da calculadora o número 7631. Por fim, o aluno divide esse número por 587 e obtém o número 13.

Na tabela abaixo podemos ver as operações feitas pelo aluno e as respectivas expressões algébricas associadas pelo professor em cada etapa.

Etapa	Professor	Expressão associada	Calculadora do aluno
1	Pense num número	x	587
2	Repita ao lado	$1000x+x=1001x$	587587
3	Divida por 11	$1001x \div 11 = 91x$	$587587 \div 11 = 53417$
4	Divida por 7	$91x \div 7 = 13x$	$53417 \div 7 = 7631$
5	Divida pelo número pensado	$13x \div x = 13$	$7631 \div 587 = 13$

Como podemos constatar, a chave para essa adivinhação está escondida no fato de que quando repetirmos um número de três algarismos ao lado do mesmo estamos na verdade o multiplicando por 1001. Ao mesmo tempo esse número tem uma fatoração muito interessante, $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Assim, quando o professor pede que o aluno divida sucessivamente por 7 e 11 o resultado obtido deve ser, como constatado, o número 13. O professor poderia, na sequência, pedir que o aluno pensasse em um outro número e ao invés de pedir que o aluno o dividisse por 7 e 11, poderia pedir que a divisão fosse agora por 7 e 13 ou 11 e 13, obtendo, respectivamente, 11 e 7 como os números adivinhados.

Finalizamos esta seção com um problema de adivinhação da idade de uma pessoa e de quantas vezes ela come Pizza por semana.

Um grupo de amigos está reunido e Pedro afirma que consegue adivinhar a idade de Paulo além de dizer quantos dias ele come Pizza por semana. Pedro então pede que Paulo pense na quantidade de vezes que ele come Pizza por semana, avisa que este número deve ser compreendido entre 1 e 9. Após Paulo confirmar que pensou no número Pedro pede que ele o multiplique por 2 e ao resultado some 5. Na sequência Pedro pede que Paulo multiplique o resultado por 50 e some o número 1663. Por fim, Pedro pede que Paulo subtraia do número obtido o ano de seu nascimento. Pedro então pergunta qual o número obtido e Paulo anuncia que obteve como resultado o número 637. Pedro então afirma que Paulo tem 48 anos e come Pizza 7 vezes por semana.

Na tabela abaixo podemos ver as operações feitas por Paulo e as respectivas expressões algébricas associadas por Pedro em cada etapa.

Etapa	Pedro	Expressão associada	Calculadora do Paulo
1	Pense num número	x	7
2	Multiplique por 2	$2x$	$2 \times 7 = 14$
3	Some 5	$2x + 5$	$14 + 5 = 19$
4	Multiplique por 50	$(2x + 5) \times 50 = 100x + 250$	$19 \times 50 = 950$
5	Some 1663	$100x + 250 + 1663 = 100x + 1913$	$950 + 1663 = 2613$
6	Subtraia o ano de nascimento	$100x + 1913 - 1976 = 100x - 63$	$2613 - 1976 = 637$

Após Paulo anunciar que o número encontrado é 637, Pedro monta a seguinte equação com a expressão, $100x - 63$, que é padrão de ser obtida por ele

$$100x - 63 = 637.$$

Após resolvê-la, Pedro consegue descobrir que $x = 7$ e Paulo, então, come Pizza 7 dias por semana. Para descobrir como Pedro descobre a idade basta observar a sexta etapa

da tabela. Nela consta a expressão

$$100x + 1913 - 1976 = 100x - 63$$

e segue daí que

$$\begin{aligned} 637 + 111 &= 100x - 63 + 111 \\ &= 100x + 1913 - 1976 + 111 \\ &= 100x + 2024 - 1976 \\ &= 100x + 48 \\ &= x48. \end{aligned}$$

Podemos agora elucidar como Pedro, logo após Paulo anunciar que o número obtido é 637, adivinha que Paulo além de comer Pizza 7 dias na semana tem 48 anos. Pedro nada mais fez que somar ao resultado o número 111 obtendo 748 de um lado e $2024 - 1976 = 48$ do outro lado que é sua idade, onde conclui que o primeiro dígito é o número de dias na semana que Paulo come Pizza e os dois últimos dígitos informam a idade.

Capítulo 3

Explorando Quadrados Mágicos

Neste capítulo vamos explorar um problema muito interessante, conhecido como Problema do Quadrado Mágico. Ele consiste em organizar numa tabela uma lista de números de tal forma que as linhas, colunas e diagonais dessa tabela mantenham sempre a mesma soma. Vamos observar que este problema é uma boa alternativa para o estudo de sistemas de equações lineares, progressões aritméticas, matrizes, dentre outros conteúdos. Algumas informações sobre a origem desse problema estão disponíveis em [13] .

Um Quadrado Mágico de ordem n é um quadrado subdividido em n^2 subquadrados onde em cada um destes subquadrados é alocado um dos números da sequência

$$1, 2, \dots, n^2 - 1, n^2$$

, de modo que, a soma dos números nos subquadrados agrupados numa mesma vertical, numa mesma horizontal e numa mesma diagonal principal e secundária resulta sempre num mesmo valor S_n que chamaremos de soma mágica. Um Quadrado Mágico de ordem n pode ser visto como uma matriz quadrada de ordem n cujas entradas são os números $(a_{ij}) \in \{1, 2, \dots, n^2 - 1, n^2\}$, com $1 \leq i, j \leq n$, dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

onde a soma dos elementos da linha i é dada por $\sum_{j=1}^n a_{ij} = S_n$, a soma dos elementos da coluna j é dada por $\sum_{i=1}^n a_{ij} = S_n$, a soma dos elementos da diagonal principal é dada por

$\sum_{i=1}^n a_{ii} = S_n$ e a soma dos elementos da diagonal secundária é dada por $\sum_{i=1}^n a_{(n+1-i)(i)} = S_n$.
 Segue daí que a soma mágica S_n é dada por

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}$$

3.1 Exemplos de Quadrados Mágicos

No que segue apresentamos alguns exemplos de Quadrados Mágicos.

Exemplo 3.1.1 Na Figura 3.1, temos a ilustração de um Quadrado Mágico de ordem 3 numa dada organização. Observe que na organização desse Quadrado Mágico a soma dos elementos de quaisquer linhas, colunas ou diagonais, isto é, a soma mágica é dada por

$$S_3 = \frac{1}{3}(1 + 2 + \cdots + 8 + 9) = 15$$

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Fonte: Autor

Figura 3.1: Quadrado Mágico de ordem 3

Exemplo 3.1.2 Na Figura 3.2, temos a ilustração de um Quadrado Mágico de ordem 4 cujos elementos são os números $1, 2, 3, \dots, 16$, numa dada organização. Observe que na organização desse Quadrado Mágico a soma dos elementos de quaisquer linhas, colunas ou diagonais, é sempre 34

$$S_4 = \frac{1}{4}(1 + 2 + \cdots + 8 + 16) = 34$$

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Fonte: Autor

Figura 3.2: Quadrado Mágico de ordem 4

Exemplo 3.1.3 Na Figura 3.3, temos a ilustração de um Quadrado Mágico de ordem 5 cujos elementos são os números $1, 2, 3, \dots, 25$, numa dada organização. Observe que na organização desse Quadrado Mágico a soma dos elementos de quaisquer linhas, colunas ou diagonais, é sempre 65

$$S_3 = \frac{1}{5}(1 + 2 + \dots + 8 + 25) = 65$$

11	4	17	10	23
24	12	5	18	6
7	25	13	1	19
20	8	21	14	2
3	16	9	22	15

Fonte: Autor

Figura 3.3: Quadrado Mágico de ordem 5

3.1.1 Construção de um Quadrado Mágico de ordem ímpar

1. Construção de um Quadrado Mágico de ordem 3

Vamos começar mostrando a construção de um Quadrado Mágico de ordem 3. Sejam os números $1, 2, 3, \dots, 9$ e considere uma matriz 5×5 obtida de uma matriz 3×3 acrescentando-se uma linha 0 antes e uma linha 4 depois e uma coluna 0 antes e uma coluna 4 depois. Vamos alocar os números na matriz 5×5 da seguinte forma

$$\begin{array}{lll} a_{20} = 1 & a_{11} = 4 & a_{02} = 7 \\ a_{31} = 2 & a_{22} = 5 & a_{13} = 8 \\ a_{42} = 3 & a_{33} = 6 & a_{24} = 9. \end{array}$$

	C0	C1	C2	C3	C4
L0			7		
L1		4		8	
L2	1		5		9
L3		2		6	
L4			3		

Fonte: Autor

Figura 3.4: Quadrado com centro $C_3 = 5$

Agora, fazemos a seguinte identificação. Trocamos o índice 0 pelo índice 3 e o índice 4 pelo índice 1 numa linha ou coluna, isto é, obtemos os seguintes elementos a_{ij} em relação a matriz 3×3 ,

$$\begin{array}{lll} a_{23} = 1 & a_{11} = 4 & a_{32} = 7 \\ a_{31} = 2 & a_{22} = 5 & a_{13} = 8 \\ a_{12} = 3 & a_{33} = 6 & a_{21} = 9. \end{array}$$

o que nos dá o Quadrado Mágico de ordem 3 representado na Figura 3.5 .

		7		
	4	3	8	
1	9	5	1	9
	2	7	6	
		3		

Fonte: Autor

Figura 3.5: Quadrado com centro $C_3 = 5$

2. Construção de um Quadrado Mágico de ordem 5

De modo análogo vamos mostrar a construção de um Quadrado Mágico de ordem 5. Sejam os números $1, 2, 3, 4, \dots, 24, 25$ e considere uma matriz 9×9 obtida de uma matriz 5×5 acrescentando-se duas linhas, (-1) e 0 , antes e duas linhas, 6 e 7 , depois além de duas colunas, (-1) e 0 , antes e duas colunas, 6 e 7 , depois. Vamos alocar os números na matriz 9×9 da seguinte forma

$$\begin{array}{ccccc}
a_{3(-1)} = 1 & a_{20} = 6 & a_{11} = 11 & a_{02} = 16 & a_{(-1)3} = 21 \\
a_{40} = 2 & a_{31} = 7 & a_{22} = 12 & a_{13} = 17 & a_{04} = 22 \\
a_{51} = 3 & a_{42} = 8 & a_{33} = 13 & a_{24} = 18 & a_{15} = 23 \\
a_{62} = 4 & a_{53} = 9 & a_{44} = 14 & a_{35} = 19 & a_{26} = 24 \\
a_{73} = 5 & a_{64} = 10 & a_{55} = 15 & a_{46} = 20 & a_{37} = 25
\end{array}$$

Agora, fazemos a seguinte identificação. Trocamos o índice (-1) pelo índice 4 , o índice 0 pelo índice 5 , o índice 6 pelo índice 1 e o índice 7 pelo índice 2 numa linha ou coluna, isto é, obtemos os seguintes elementos a_{ij} em relação a matriz 5×5 ,

$$\begin{array}{ccccc}
a_{34} = 1 & a_{20} = 6 & a_{11} = 11 & a_{52} = 16 & a_{43} = 21 \\
a_{45} = 2 & a_{31} = 7 & a_{22} = 12 & a_{13} = 17 & a_{54} = 22 \\
a_{51} = 3 & a_{42} = 8 & a_{33} = 13 & a_{24} = 18 & a_{15} = 23 \\
a_{12} = 4 & a_{53} = 9 & a_{44} = 14 & a_{35} = 19 & a_{21} = 24 \\
a_{23} = 5 & a_{14} = 10 & a_{55} = 15 & a_{41} = 20 & a_{32} = 25
\end{array}$$

	C-1	C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
L-1					21				
L0				16		22			
L1			11		17		23		
L2		6		12		18		24	
L3	1		7		13		19		25
L4		2		8		14		20	
L5			3		9		15		
L6				4		10			
L7					5				

Fonte: Autor

Figura 3.6: Números dispostos na matriz 9×9

o que nos dá o Quadrado Mágico de ordem 5 representado na Figura 3.7.

	C-1	C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
L-1					21				
L0				16		22			
L1			11	4	17	10	23		
L2		6	24	12	5	18	6	24	
L3	1		7	25	13	1	19		25
L4		2	20	8	21	14	2	20	
L5			3	16	9	22	15		
L6				4		10			
L7					5				

Fonte: Autor

Figura 3.7: Quadrado Mágico de ordem 5.

3. Construção de um Quadrado Mágico de ordem $2n + 1$

Podemos generalizar a ideia usada nas construções dos Quadrados Mágicos de ordem 3 e 5 para construir um Quadrado Mágico de ordem ímpar $2n + 1$, $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Sejam os números $1, 2, 3, 4, \dots, 4n^2 + 4n, (2n + 1)^2$ e considere uma matriz auxiliar $B = [b_{ij}]_{(4n+1) \times (4n+1)}$ obtida de uma matriz principal $A = [a_{ij}]_{(2n+1) \times (2n+1)}$ acrescentando-se n linhas, $(1 - n), (2 - n), \dots, 0$, antes e n linhas, $(2n + 2), (2n + 3), \dots, 3n + 1$, depois, assim como n colunas, $(1 - n), (2 - n), \dots, 0$, antes e n colunas, $(2n + 2), (2n + 3), \dots, (3n + 1)$, depois. Vamos distribuir os números na matriz $B = [b_{ij}]_{(4n+1) \times (4n+1)}$ da seguinte forma

$$\begin{array}{ccccccc} a_{(n+1)(1-n)} = 1 & \cdots & a_{(n+1-j)(1-n+j)} = (2n+1)j + 1 & \cdots & a_{(1-n)(1+n)} = 4n^2 + 2n + 1 \\ \vdots & = & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{(n+1+i)(1-n+i)} = i + 1 & & a_{(n+1-j+i)(1-n+j+i)} = (2n+1)j + i + 1 & & a_{(1-n+i)(1+n+i)} = (4n^2 + 2n + j) \\ \vdots & = & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{(3n+1)(1+n)} = 2n + 1 & \cdots & a_{(3n+1-j)(1+n+j)} = (2n+1)(j+1) & \cdots & a_{(n+1)(3n+1)} = (2n+1)^2 \end{array}$$

Agora, fazemos a seguinte identificação. Se um elemento a_{ij} tem um dos índices i ou j menor do que 1 o trocamos por $i + n$ ou $j + n$ e se tem um dos índices i ou j maior do que $2n + 1$ o trocamos por $i - n$ ou $j - n$.

3.1.2 Quadrados Mágicos Generalizados

Uma pergunta natural que poderíamos fazer nesse momento é se para uma sequência qualquer de números reais

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9$$

existe uma organização destes números de modo a satisfazer as condições de um Quadrado Mágico de ordem 3. A resposta é negativa. Veremos que existe uma condição para que uma sequência de números reais quaisquer e distintos possa ser organizada de modo a satisfazer as condições de um Quadrado Mágico de ordem 3. Chamaremos de Quadrado Mágico Generalizado de ordem n , a disposição em forma de matriz quadrada de ordem n de n^2 números reais de modo que a soma dos elementos numa mesma linha, numa mesma coluna e numa mesma diagonal, seja sempre o mesmo valor S_n , que chamaremos de soma mágica. No que segue, vamos explorar essas ideias. Vamos começar introduzindo o conceito de termo central de um Quadrado Mágico Generalizado de ordem ímpar n

como sendo o elemento

$$C_n = a_{(\frac{n+1}{2})(\frac{n+1}{2})}$$

da matriz que representa o Quadrado Mágico, isto é, o elemento que ocupa a linha $\frac{n+1}{2}$ e a coluna $\frac{n+1}{2}$.

Propriedade 3.1.1 *O termo central de um Quadrado Mágico Generalizado de ordem 3 é igual a*

$$C_3 = \frac{1}{3}S_3.$$

Demonstração. Considere o quadrado da Figura 3.9 onde o termo central é $C_3 = e$.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Fonte: Autor

Figura 3.8: Quadrado com centro $C_3 = e$

Temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} a + e + i = S_3 \\ g + e + c = S_3 \\ b + e + h = S_3 \\ d + e + f = S_3 \end{cases}$$

Somando-se as equações desse sistema obtemos

$$\begin{aligned} 4S_3 &= (a + e + i) + (g + e + c) + (b + e + h) + (d + e + f) \\ &= a + b + c + d + e + f + g + h + i + 3e \\ 4S_3 &= 3S_3 + 3e \end{aligned}$$

de onde obtemos que $e = \frac{1}{3}S_3$.

Proposição 3.1.1 (Forma de um Quadrado Mágico Generalizado de ordem 3)
Considere os números reais $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9$. Estes números podem ser organizados num Quadrado Mágico Generalizado de ordem 3 se, e somente se,

existem números reais a, b tais que

$$a_1 = \frac{4}{3}S_3 - 2a - b \quad (3.1)$$

$$a_2 = S_3 - a - b \quad (3.2)$$

$$a_3 = \frac{2}{3}S_3 - b \quad (3.3)$$

$$a_4 = \frac{2}{3}S_3 - a \quad (3.4)$$

$$a_5 = \frac{1}{3}S_3 \quad (3.5)$$

$$a_6 = a \quad (3.6)$$

$$a_7 = b \quad (3.7)$$

$$a_8 = -\frac{1}{3}S_3 + a + b \quad (3.8)$$

$$a_9 = -\frac{2}{3}S_3 + 2a + b. \quad (3.9)$$

Demonstração. Suponha que os números reais a, b, c, d, e, f, g, h e i podem ser dispostos num Quadrado Mágico Generalizado de ordem 3 como na Figura 3.9. Temos

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Fonte: Autor

Figura 3.9: Quadrado com centro $C_3 = e$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a + b + c & = & S_3 \\ d + e + f & = & S_3 \\ g + h + i & = & S_3 \\ a + d + g & = & S_3 \\ b + e + h & = & S_3 \\ c + f + i & = & S_3 \\ a + e + i & = & S_3 \\ c + e + g & = & S_3. \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema acima nas variáveis livres a e b obtemos

$$\begin{cases} c &= S_3 - a - b \\ d &= \frac{4}{3}S_3 - 2a - b \\ e &= \frac{1}{3}S_3 \\ f &= -\frac{2}{3}S_3 + 2a + b \\ g &= -\frac{1}{3}S_3 + a + b \\ h &= \frac{2}{3}S_3 - b \\ i &= \frac{2}{3}S_3 - a. \end{cases}$$

Agora, note que

$$\begin{cases} c - d &= -\frac{1}{3}S_3 + a \\ h - c &= -\frac{1}{3}S_3 + a \\ i - h &= b - a \\ e - i &= -\frac{1}{3}S_3 + a \\ a - e &= -\frac{1}{3}S_3 + a \\ b - a &= b - a \\ g - b &= -\frac{1}{3}S_3 + a \\ f - g &= -\frac{1}{3}S_3 + a. \end{cases}$$

Considerando $e < a < b$ temos $-\frac{1}{3}S_3 + a > 0$ e $b - a > 0$ onde valem as desigualdades

$$d < c < h < i < e < a < b < g < f.$$

Segue daí que podemos escolher

$$a_1 = d, a_2 = c, a_3 = h, a_4 = i, a_5 = e, a_6 = a, a_7 = b, a_8 = g, a_9 = f.$$

Corolário 3.1.1 *Os números $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9$, podem ser organizados num Quadrado Mágico de ordem 3 se o termo central a_5 é a média aritmética de dois termos equidistantes a ele, ou seja*

$$a_5 = \frac{a_i + a_{10-i}}{2}$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_9}{2} &= \frac{d + f}{2} = \frac{1}{3}S_3 = a_5 \\ \frac{a_2 + a_8}{2} &= \frac{c + g}{2} = \frac{1}{3}S_3 = a_5 \\ \frac{a_3 + a_7}{2} &= \frac{h + b}{2} = \frac{1}{3}S_3 = a_5 \\ \frac{a_4 + a_6}{2} &= \frac{i + a}{2} = \frac{1}{3}S_3 = a_5.\end{aligned}$$

Exemplo 3.1.4 Verifique se os números

$$-24, -19, -14, -8, -3, 2, 8, 13, 18$$

podem ser organizados num Quadrado Mágico de ordem 3.

Observe que

$$\frac{-24 + 18}{2} = \frac{-19 + 13}{2} = \frac{-14 + 8}{2} = \frac{-8 + 2}{2} = -3.$$

Portanto, segue do Corolário 3.1.1 que existe uma maneira de dispor estes números em forma de Quadrado Mágico.

Exemplo 3.1.5 Verifique se é possível uma organização dos números 3, 5, 8, 9, 10, 12, 15, 16 e 18 de modo a obter um Quadrado Mágico de ordem 3.

Observe que

$$\frac{3 + 18}{2} \neq 10$$

logo pelo Corolário 3.1.1 estes números não podem ser organizados em forma de um Quadrado Mágico.

Teorema 3.1.1 Considere uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_9)$ de razão r , Existe um Quadrado Mágico cujos elementos são os termos dessa progressão.

Demonstração. Temos que os termos da P. A. são da forma $a_i = a_1 + (i - 1)r$ e $a_5 = a_1 + 4r$. Temos que

$$\frac{a_i + a_{10-i}}{2} = \frac{a_1 + (i - 1)r + a_1 + (10 - i - 1)r}{2} = \frac{2a_1 + 8r}{2} = a_5$$

onde concluímos do Corolário 3.1.1 que existe uma organização em forma de Quadrado Mágico para os termos dessa P. A..

Capítulo 4

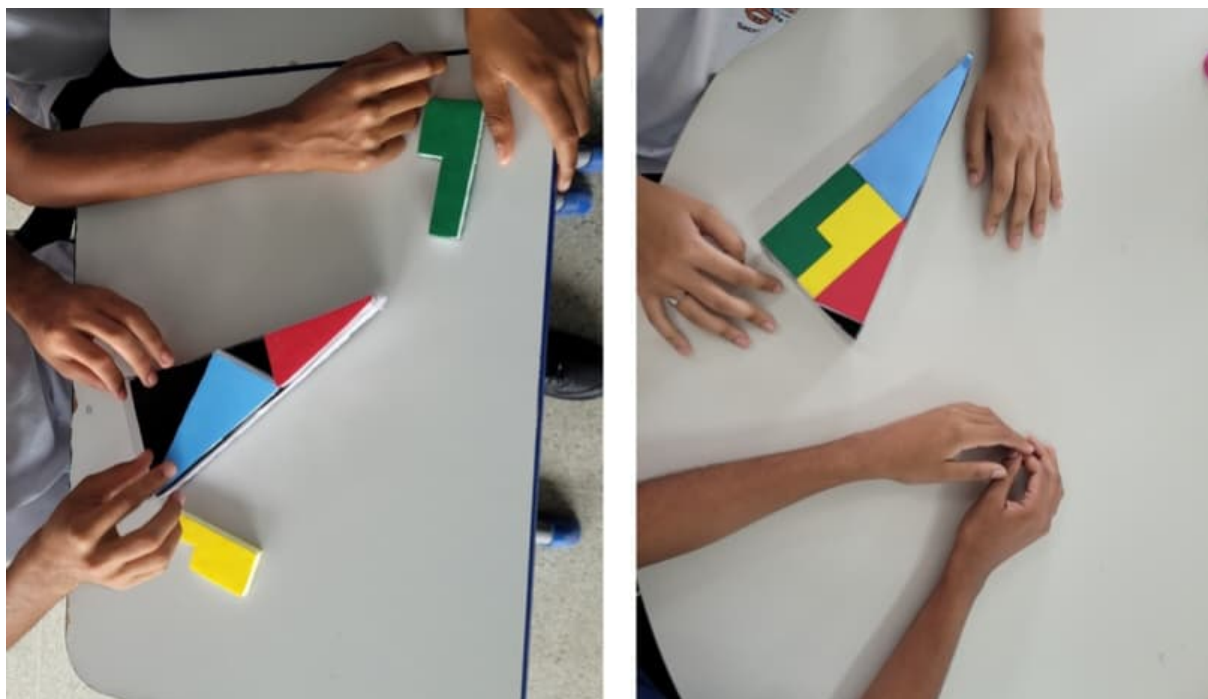
Sequência Didática

Este capítulo está dividido em duas partes. A primeira parte trás relatos de algumas percepções dos alunos sobre sua experiência com o problema do Quadrado Perdido. Na segunda parte, de posse da experiência obtida com os alunos, propomos uma sequência didática com o Problema do Quadrado Perdido com o objetivo de explorar diferentes conteúdos matemáticos. A sequência foi dividida em quatro encontros de 50 min. Inicialmente, no primeiro encontro, o aluno deve ser apresentado ao Problema do Quadrado Perdido de modo que possa levantar seus questionamentos e possíveis soluções para o mesmo. No segundo encontro, será levantado o conhecimento prévio dos alunos sobre alguns conteúdos da matemática básica, tais como: áreas de figuras planas, semelhança de triângulos, equação da reta, Teorema de Pitágoras, dentre outros. Em seguida, uma revisão sobre estes conteúdos necessários para desenvolver este trabalho. No terceiro encontro, daremos uma primeira explicação para o Problema do Quadrado Perdido utilizando os conteúdos de área de figuras planas e o Teorema de Pitágoras. No quarto encontro, o professor deverá elucidar o enigma utilizando os conteúdos de semelhança de triângulos e equação da reta.

4.1 Experimento sobre a percepção dos alunos sobre o Problema do Quadrado Perdido

O primeiro contato entre os alunos e as peças do Problema do Quadrado Perdido gera uma série de reações por parte dos alunos, que vão do espanto pelo sumiço do quadrado em uma das organizações até a curiosidade pelos conteúdos matemáticos envolvidos em sua solução. Uma situação interessante que nos chamou a atenção na apresentação do problema foi a curiosidade despertada nesses alunos que se mostraram ansiosos pela sua

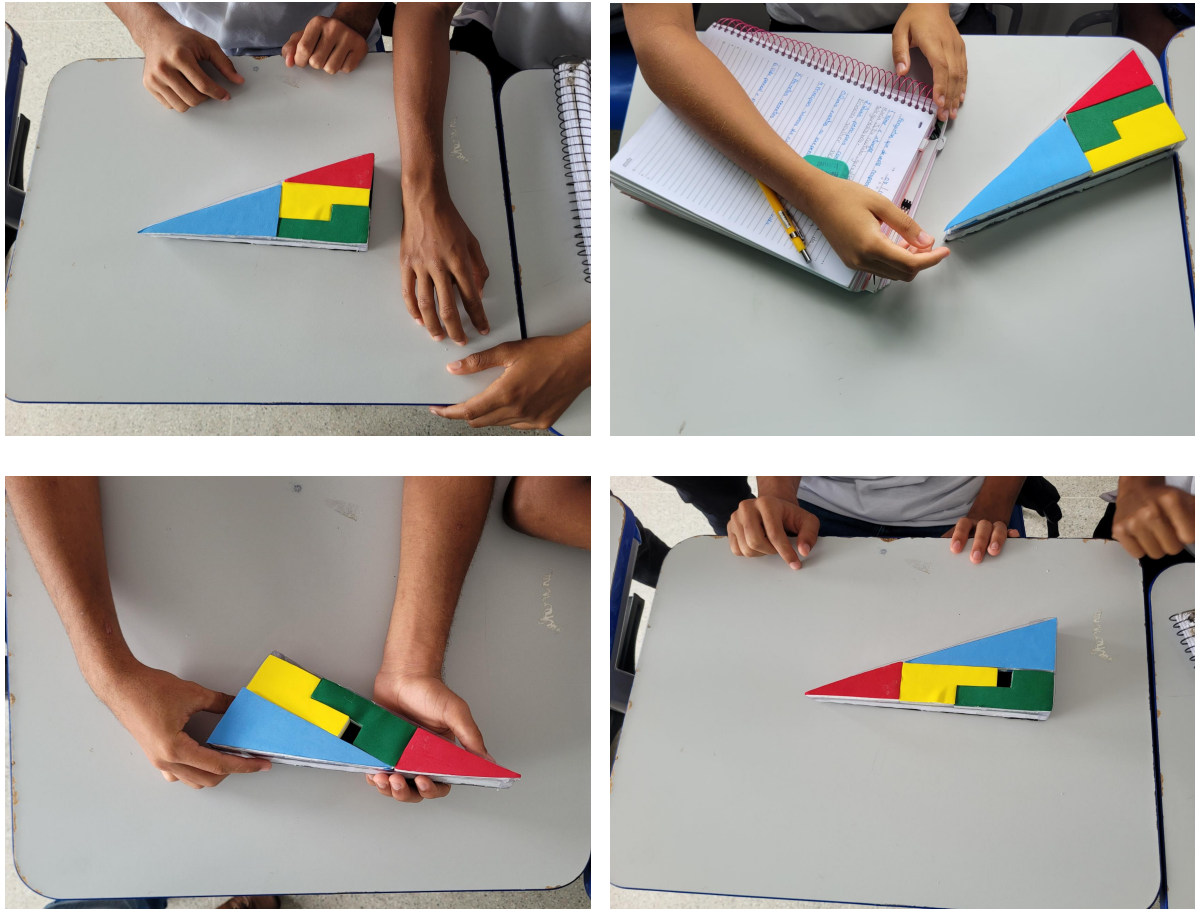
resolução. Os alunos deram início ao experimento analisando as peças e tentando encaixá-las livremente no triângulo base, tentavam de todas as formas, com o intuito de preenchê-lo totalmente. Muitos tiveram dificuldades em encaixar as peças no triângulo base pois pareciam não compreender bem a aparente possibilidade de existir uma semelhança entre os triângulos menores e o triângulo base. Este fato chamou nossa atenção, conforme podemos ver na Figura 4.1.



Fonte: Autor

Figura 4.1: Primeiro contato

A partir daí com inúmeras tentativas e erros os alunos conseguem sob nossa intervenção organizar as peças dentro do triângulo base das duas formas propostas, uma preenchendo completamente o triângulo base e a outra deixando vazio um quadrado. Surge, então, o espanto generalizado. Todos eles se questionam como se justifica esse espaço vazio entre as peças que estão contidas no interior do triângulo base.



Fonte: Autor

Figura 4.2: Triângulo completo

Um aluno escreveu baseado na Figura 4.2:

“O triângulo formado pelas peças fica com um pequeno espaço quadrado faltando quando colocamos o triângulo vermelho na parte inferior do triângulo formado pelas peças, mas quando colocamos o triângulo vermelho na parte de cima do triângulo formado pelas peças sobra um espaço triangular na lateral do triângulo formado, que é equivalente a área do quadrado vazio”.

Nesse caso, vale lembrar que quando o aluno refere-se a parte inferior e parte superior, ele toma como base do triângulo o cateto de maior medida.

As impressões produzidas ao manusear o material são diversas, vejamos o que outro aluno escreveu:

“A forma que se organiza as peças pode influenciar a área perdida”

Outro aluno escreveu ainda:

“Que esse mesmo quadrado - o quadrado perdido - tem a mesma área pequena igual a folguinha da lateral do lado maior do triângulo, uma coisa bem difícil de entender de

primeira. Uma atividade bem legal e com esse trabalho é possível entender as formas geométricas, etc...”

Após esse momento, caracterizado pelo aguçamento da curiosidade dos alunos, começaram a surgir as dúvidas e os questionamentos sobre o porquê daquele espaço vazio surgir uma vez que todos eles tem a mesma percepção de que as duas organizações das peças deveriam preencher completamente, sem faltar e nem sobrar, a região que é a superfície do triângulo base. Entretanto, com algumas explicações, eles começam a compreender o que há por trás desse enigma matemático.

Inicialmente, lhes foi pedido que observassem ambas as organizações, através de uma visualização do alto. Neste caso eles tem a oportunidade de comparar o alinhamento dos lados do triângulo base com os lados dos triângulos formados pelas organizações das peças. Em seguida perguntei o que lhes chamava a atenção. Várias respostas foram dadas, inclusive, respostas que destoam completamente do problema, mas a maioria disse que via uma pequena folga na vizinhança do maior lado do triângulo base na organização que preenchia completamente o triângulo base. Nesse momento perguntamos se o maior lado do triângulo formado pelas organizações das peças seria mesmo um segmento de reta. A partir daí, alguns alunos perceberam que essa pequena folga surge na organização que preenche completamente o triângulo base mas não aparece na organização que deixa um quadrado vazio. Nesse momento começa a surgir a percepção de que o maior lado do triângulo formado nas duas organizações das peças não é um segmento de reta e sim a união de dois segmentos não colineares que se encontram dentro do triângulo base, na organização que preenche completamente o triângulo base, e fora do triângulo base, na organização que deixa um quadrado vazio.

Outro fato notado foi a motivação que o problema conseguiu gerar em cada um deles. Todos ficaram entusiasmados em descobrir primeiro uma forma para encaixar as peças e em seguida como explicar o que estava acontecendo. Um aluno escreveu:

“Achei a aula deveras interessante, porque o professor me explicou como funciona o experimento e também me explicou o funcionamento da medição de áreas triangulares. Fiquei muito motivado para pesquisar mais sobre geometria de triângulos”.

Ainda nesse sentido outros alunos escreveram:

“Ao fazermos essa aula prática despertou o nosso interesse de saber por que ao fazermos os triângulos da segunda forma fica sobrando uma área”.

“Achei muito interessante a atividade dinâmica em sala de aula, foi algo inovador e fez com que prestássemos mais atenção, porque realmente é muito interessante.”

“Eu achei uma coisa muito interessante, por que tem duas formas de montar o triângulo, isso é incrível porque aprendemos bastante sobre geometria e podemos aplicar isso na vida real, eu gostaria que o professor fizesse isso na sala, para que todos possam entender melhor e si divertir aprendendo, é importante explorar diferentes métodos e descobrir novas formas de resolver problemas”.

4.2 Proposta de sequência didática para o Problema do Quadrado Perdido.

Nessa seção apresentaremos uma proposta de sequência didática com aplicação voltada tanto para o 9º ano do Ensino Fundamental quanto para o 1º Ensino Médio.

1º Encontro

- **Conteúdo:** Compreendendo o Problema do Quadrado Perdido.
- **Habilidades:** (EM13MAT505)
- **Objetivo:** Manusear e conhecer o Problema do Quadrado Perdido.
- **Tempo:** 50 min
- **Recursos utilizados:** 01 exemplar do problema em material concreto por grupo, notebook, projetor, quadro e marcador para quadro branco.

Sugerimos que o professor inicie a aula fazendo uma apresentação do Problema do Quadrado Perdido, onde durante esta apresentação ele poderá utilizar o texto da Seção 2.1 e também o software Geogebra. Sugerimos ainda que esse momento inicial dure 10 min e que na sequência o professor dê as seguintes orientações:

- Sugerimos que divida a turma em grupos de cinco alunos.
- Peça para cada um deles deixar lápis e papel sobre a mesa.
- Distribua um exemplar do Problema do Quadrado Perdido em material concreto a cada grupo.
- Peça para os alunos organizarem as peças das duas formas propostas e, em seguida anotarem todas as suas percepções.

- Informe que eles dispõem de 10 min para essa etapa.

Durante esses 20 min das duas etapas anteriores o professor deverá estar circulando e direcionando os alunos nesse processo de investigação. Na sequência, nos próximos 10 minutos, peça para os alunos compartilharem suas percepções e conclusões. Em seguida, o professor deverá usar os 10 min restantes para, juntamente com as falas dos alunos, encaminhar propostas superficiais que dão uma ideia para uma solução do enigma.

2º Encontro

- **Conteúdo:** Área do retângulo, áreas do triângulo, teorema de Pitágoras e equação da reta.
- **Habilidades:** (EM13MAT307) e (EM13MAT302)
- **Objetivo:** Aula de revisão dos conteúdos os quais utilizaremos posteriormente.
- **Tempo:** 50 min
- **Recursos utilizados:** Quadro, marcador para quadro branco lápis e caderno.

Neste encontro o professor deve auxiliar os alunos rememorando as “fórmulas” utilizadas para calcular as áreas do retângulo e do triângulo, o Teorema de Pitágoras e a expressão da equação afim ou reduzida da reta. Então o professor solicitará aos alunos que sigam as seguintes orientações:

- Peça para a turma se dividir em grupos de 05 alunos cada, de preferências os mesmos grupos do encontro anterior.
 - Peça para cada um deles deixar sobre a mesa lápis, borracha e papel.
 - Em seguida entregue uma folha com a atividade localizada no Apêndice A e pelo fato de ser uma revisão, se achar interessante, percorra as seguintes etapas.
1. Inicie relembando a fórmula da área do retângulo aos alunos, escrevendo-a no quadro (dê ênfase aos conceitos de base e altura relativa). Mostre que as áreas do paralelogramo e do retângulo contidos no Apêndice A são equivalentes e a partir daí conclua com a fórmula da área do triângulo. Sugerimos que o professor utilize um tempo de 10 min para essa etapa da revisão. Em seguida cumpra a próxima etapa.

2. Escreva o Teorema de Pitágoras no quadro e em seguida, utilize a simples dedução contida na Seção 1.2 para demonstrá-lo. Sugerimos ainda que o professor utilize um tempo de 10 min para essa etapa da revisão. A seguir cumpra a próxima etapa.
3. Sugerimos que o professor peça a turma que lhe dê as coordenadas de dois pontos distintos no plano cartesiano previamente desenhado. Após os pontos marcados o professor deverá encontrar os coeficientes angular e linear e escrever a equação da reta conforme descrito na Seção 1.4. Sugerimos que professor utilize um tempo de 20 min para essa etapa da revisão.

3º Encontro

- **Conteúdo:** Área do retângulo e área do triângulo.
- **Habilidades:** (EM13MAT307)
- **Objetivo:** Justificar o Problema do Quadrado Perdido utilizando os conteúdos de áreas planas.
- **Tempo:** 50 min
- **Recursos utilizados:** Notebook, projetor, quadro, marcador para quadro branco lápis e caderno.

Neste encontro o professor deve orientar os alunos a calcular as áreas de cada uma das peças em separado, ou seja, calcular a área dos triângulos, base, azul e vermelho, bem como das peças amarela e verde e em seguida comparar as áreas das duas organizações com a área do triângulo base. Então o professor solicitará aos alunos que sigam as seguintes orientações:

- Peça para a turma se dividir em grupos de 05 alunos cada, de preferências os mesmos grupos do encontro anterior.
- Peça para cada um deles deixar sobre a mesa lápis, borracha e papel.
- Em seguida entregue uma folha com as Figuras 2.2, 2.3 e 2.4 e escreva a seguinte questão no quadro. Nesse momento também é interessante projetá-las no quadro com auxílio do software Geogebra.

1. Considerando A_1 a medida da área do triângulo base, A_2 a medida da área do triângulo vermelho, A_3 a medida da área do triângulo azul, A_4 a medida da área da Figura verde e A_5 a medida da área da Figura amarela, encontre a medida das áreas A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 . Sugerimos que o professor dê 10 min para que os alunos resolvam essa questão deixando suas respectivas justificativas. Em seguida proponha a próxima questão.
2. Sejam A_6 a área da organização completa (aquela que preenche completamente o triângulo base) e A_7 a área da organização incompleta (aquela que deixa de preencher um quadrado no triângulo base). A partir de A_2, A_3, A_4 e A_5 determine A_6 e A_7 . Sugerimos que o professor aguarde 10 min, pois apesar de ser bem trivial, esperamos que eles próprios concluam que $A_7 = A_6 + 1$ onde 1 é exatamente a área do quadrado perdido. Em seguida proponha a seguinte questão:
3. Compare as áreas A_1, A_6 e A_7 e escreva-as em ordem crescente.

Sugerimos que 5 min sejam suficientes. Após esse período, espera-se que eles concluam que $A_6 < A_1 < A_7$. Assim o professor deve argumentar que nenhuma das duas organizações se encaixariam perfeitamente dentro do triângulo base e, em seguida, questionar os alunos sobre o que está acontecendo, uma vez que os lados dos triângulos formados pelas duas organizações e do triângulo base são, pelo menos intuitivamente, iguais entre si. Por fim, deve-se concluir que há uma pequena variação na hipotenusa dos triângulos formados pelas organizações das peças o que nos garante que ambas as figuras não são um triângulo e sim um quadrilátero, ou seja, o lado correspondente a hipotenusa das organizações não são um segmento de reta, e sim dois segmentos consecutivos com uma ligeira mudança de direção ora exterior ao triângulo base, ora interior ao triângulo base.

4º Encontro

- **Conteúdo:** Teorema de Pitágoras.
- **Habilidades:** (EF09MA13)
- **Objetivo:** Justificar o Problema do Quadrado Perdido utilizando o Teorema de Pitágoras.
- **Tempo:** 50 min
- **Recursos utilizados:** Notebook, projetor, quadro, marcador para quadro branco lápis e caderno.

Neste encontro o professor deve orientar os alunos a encontrar as medidas dos lados correspondentes às respectivas hipotenusas do triângulo base, dos triângulos azul e vermelho e em seguida usar o fato de que dados três segmentos distintos a união deles formará um triângulo se, somente se, a soma das medidas de dois quaisquer é maior que a medida do terceiro. Em seguida o professor solicitará aos alunos que sigam as seguintes orientações:

- Peça para a turma se dividir em grupos de 05 alunos cada, de preferências os mesmos grupos do encontro anterior.
- Peça para cada um deles deixar sobre a mesa lápis, borracha e papel.
- Em seguida entregue uma folha com as Figuras 2.2, 2.3 e 2.4 e escreva a seguinte questão no quadro. Nesse momento também é interessante projetá-las no quadro com auxílio do software Geogebra.

1. Sejam 2 *u.c.* e 5 *u.c.* os catetos do triângulo vermelho, 3 *u.c.* e 8 *u.c.* os catetos do triângulo azul e 5 *u.c.* e 13 *u.c.* os catetos do triângulo base. Calcule a medida da hipotenusa de cada um deles. Essa atividade poderá ser feita em 5 min.

Após esse período espera-se que os alunos tenham encontrado $\sqrt{29}$, $\sqrt{73}$ e $\sqrt{194}$ e então o professor pode tomar mais 10 min deste encontro para reforçar com a turma a condição de existência de um triângulo, isto é, três segmentos distintos formarão um triângulo se, e somente se, a soma de quaisquer dois deles supera a medida do terceiro. Então, o professor solicita a próxima atividade a qual sugerimos 10 min.

2. Sejam $\sqrt{29}$, $\sqrt{73}$ e $\sqrt{194}$ as medidas de três segmentos de reta. Verifique se realmente eles formam um triângulo. Sugerimos que para verificar as três desigualdades eles poderão utilizar o quadrado da soma de dois termos.

Após este período esperamos que tenham conseguido fazer a verificação, então o professor deverá argumentar que a existência do triângulo cujos lados são as hipotenusas dos triângulos base, azul e vermelho, garante que nenhuma das organizações das peças forma um triângulo e que, na verdade, o que aparentemente é uma hipotenusa é, de fato, a união de dois segmentos adjacentes não colineares.

5º Encontro

- **Conteúdo:** Equação da reta.
- **Habilidades:** (EM13MAT401)

- **Objetivo:** Justificar o Problema do Quadrado Perdido utilizando a equação da reta.
- **Tempo:** 50 min
- **Recursos utilizados:** Notebook, projetor, quadro, marcador para quadro branco, lápis e caderno.

Neste encontro o professor deve orientar os alunos a encontrar a equação da reta que contém a hipotenusa do triângulo base e verificar se o ponto G , ver Figura 2.5, referente ao vértice comum aos triângulos vermelho e azul, na primeira organização e se o ponto G' referente ao vértice comum aos triângulos vermelho e azul, ver Figura 2.6, na segunda organização, pertencem ou não a reta que contém a hipotenusa do triângulo base.

O professor deve iniciar a aula dando as seguintes orientações:

- Peça para a turma se dividir em grupos de 05 alunos cada, de preferências os mesmos grupos do encontro anterior.
- Peça para cada um deles deixar sobre a mesa lápis, borracha e papel.
- Em seguida entregue uma folha com as Figuras 2.2, 2.3 e 2.4 e escreva a seguinte questão no quadro. Nesse momento também é interessante projetá-las no quadro com auxílio do software Geogebra.

1. Considerando a figura que representa o triângulo base, localize os vértices desse triângulo que são extremidades da sua hipotenusa e em seguida determina a equação reduzida da reta que contém esses dois pontos. Sugerimos que o professor dê 10 min para essa tarefa.

Após eles encontrarem a equação da reta que contém a hipotenusa do triângulo base o professor irá induzi-los a verificarem se os pontos G e G' pertencem a hipotenusa do triângulo base calculando a ordenada das respectivas abscissas dos referidos pontos. Para essa tarefa sugerimos 10 min.

2. Utilizando a equação da reta encontrada determine a ordenada para as abscissas de G e G' , respectivamente.
3. Em seguida compare as ordenadas encontradas com as ordenadas dos vértices dos triângulos azul e vermelho nas primeira e segunda organizações.

Após essa tarefa o professor deve concluir junto com a turma que G e G' não pertencem a reta que contém a hipotenusa do triângulo base o que garante que ambas as organizações não formam um triângulo e sim um quadrilátero .

Conclusão

Dentre as várias dificuldades enfrentadas em sala de aula durante o processo de ensino-aprendizagem de matemática, podemos destacar que a falta de atenção dos alunos é uma das que mais podem contribuir para o distanciamento entre o aluno e o aprendizado dos conteúdos de matemática. Buscando encontrar alternativas que contribuam para enfrentarmos dessa dificuldade é que, neste trabalho, procuramos apresentar alguns problemas intrigantes que permitirão ao professor trabalhar conteúdos de matemática básica com aplicação prática no dia a dia do aluno.

Nessa perspectiva, apresentamos o problema do quadrado perdido, o problema da carta desconhecida, o problema dos quadrados mágicos, entre outros. Inicialmente apresentamos algumas soluções para o problema do quadrado perdido utilizando alguns conteúdos de matemática, como áreas de figuras planas, Teorema de Pitágoras, equação da reta, semelhança de triângulos e determinantes. Associamos também o conceito de matrizes ao truque da carta desconhecida bem como ao problema do quadrado mágico de ordem ímpar. Em seguida apresentamos uma proposta de sequência didática para aplicação do problema do quadrado perdido onde em algumas das etapas desta sequência pudemos abordar diferentes conteúdos de matemática para explicar a solução do problema.

A utilização de problemas intrigantes enquanto uma ferramenta pedagógica deu indícios de um enorme poder potencializador do processo de ensino-aprendizagem em matemática. Tivemos essa importante percepção a partir do breve experimento feito com os alunos ao manusear o problema do quadrado perdido em material concreto. Pudemos constatar *in loco* vários pontos positivos assim como diversas dificuldades enfrentadas pelos alunos, o que de certa forma evidencia a necessidade de uma ferramenta pedagógica nos moldes os quais propomos nesse trabalho. Sobre os pontos positivos é importante citar a curiosidade como fator motivador do interesse e da atenção dispensada pelos alunos ao interagirem com o problema do quadrado perdido, ambas direcionadas para desvendar um mistério cuja solução é construída abordando conteúdos de matemática básica de forma agradável e contextualizada. Ainda segundo Sá (2018), a matemática não é uma ciência difícil, pronta e sem utilidades, a matemática é para todos e pode ser estudada através de atividades lúdicas, história sobre a matemática, bem como por desafios diversos que

envolvam conteúdos matemáticos. Para contornar as dificuldades enfrentadas pelos alunos evidenciadas durante o experimento, propusemos uma sequência didática que explica o problema do quadrado perdido utilizando conteúdos de matemática. Entendemos que a proposta de uma sequência didática para explicar problemas intrigantes é uma ferramenta eficaz e capaz de aliar o aprendizado do aluno a sua satisfação pessoal.

Em função do tempo, não foi possível expandir este experimento no sentido de atingir um maior número de alunos, assim como também não foi possível submeter os demais problemas a experimentação com os mesmos. Nesse sentido, pensamos no futuro dar seguimento e expandir este trabalho, o qual sugerimos ser feito através da ampliação do experimento do quadrado perdido com maior número de alunos e submeter os problemas da carta desconhecida e do quadrado mágico à experimentação e também construir e aplicar as suas respectivas sequências didáticas.

Atravessar este momento de grandes dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de matemática exige de nós, professores, uma atenção especial para compreender os desafios que estamos enfrentando e um esforço contínuo para buscar soluções eficazes. Nesse sentido, esperamos que a proposta apresentada em nosso trabalho contribua de maneira expressiva para enriquecer a prática pedagógica dos colegas, professores de matemática, além de promover um aprendizado mais significativo e duradouro para seus alunos.

Com essa intenção, selecionamos problemas que estabelecem um diálogo direto com conteúdos relevantes da matemática básica, buscando integrá-los de forma agradável e contextualizada. Nosso intuito é contribuir para o acréscimo de ferramentas e estratégias que não apenas auxiliem na compreensão dos conteúdos, mas também despertem o interesse e a curiosidade dos estudantes, incentivando-os a participar ativamente do processo de aprendizagem.

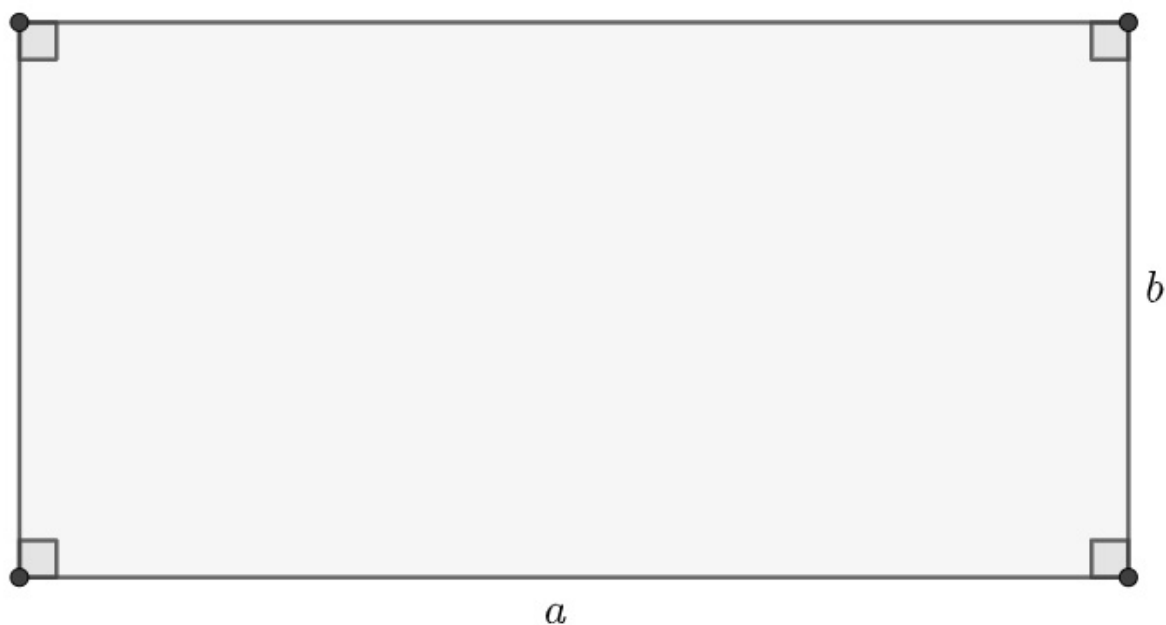
Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, Lenimar Nunes de. Quadrados Mágicos. UFPB - João Pessoa, PB, 2023.
- [2] BENVIDES, Fabrício Siqueira; MUNIZ NETO, Antônio Caminha. Material Teórico - Matrizes e Sistemas Lineares: O Conceito de Matriz. Portal da Matemática/OBMEP. <https://portaldaoobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=75>. Acessado 09 de outubro de 2024.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 25 de outubro de 2024.
- [4] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. Geometria Analítica. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- [5] HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília S. Introdução à Álgebra Linear. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção PROFMAT).
- [6] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David Mauro; PÉRIGO, Roberto. Matemática: Volume Único. São Paulo: Atual, 1997.
- [7] LIMA, Elon; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio. Vol. 3. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção Professor de Matemática).
- [8] MENEZES, Luana Paula Goulart de; PEREIRA, Vitor Marques. A problemática do quadrado perdido e sua relação geométrica com a sequência de Fibonacci. Professor de Matemática Online, v. 8, n. 5, p. 560-566, 2020. DOI: 10.21711/2319023x2020/pmo841.
- [9] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. Tópicos de Matemática Elementar. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2013. (Coleção Professor de Matemática)
- [10] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. Geometria - 2. ed. - Rio de Janeiro, RJ: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

- [11] NÓS, Rudimar Luiz; SENTONE, Francielle Gonçalves. Explorando paradoxos geométricos nas aulas de Geometria. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, 2017.
- [12] ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. Tópicos de História da Matemática. 2. ed., 2. impressão. Rio de Janeiro: SBM, 2019. (Coleção Profmat).
- [13] SÁ, Ilydio Pereira de. A Magia da Matemática - Atividades Ivestigativas, Curiosidades e Histórias da Matemática - 4^a Edição. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2018.
- [14] SANTOS, Edilene Simões Costa dos; MUNIZ, Cristiano Alberto; GASPAR, Maria Terezinha Jesus. A construção do conceito de área a partir de atividades fundamentadas na história da Matemática. Série Histórica da Matemática para o Ensino, v. 5. São Paulo: Sociedade Brasileira de História da Matemática; Livraria da Física, 2015.
- [15] VIANA, Marcelo. Histórias da Matemática: Da Contagem dos Dedos à Inteligência Artificial. 1. ed. São Paulo: Tinta-da-China Brasil, 2024.

Apêndice A

Área do Retângulo e do Triângulo



Fonte: Autor

Figura A.1: Retângulo

Com a ajuda do professor, identifique a base e a altura do retângulo acima e em seguida escreva a fórmula para calcular sua área: (Aqui chamaremos a área do retângulo de A)

$A =$ _____

Observe as equivalências entre as áreas do paralelogramo ABCD e do retângulo AEFD a seguir:

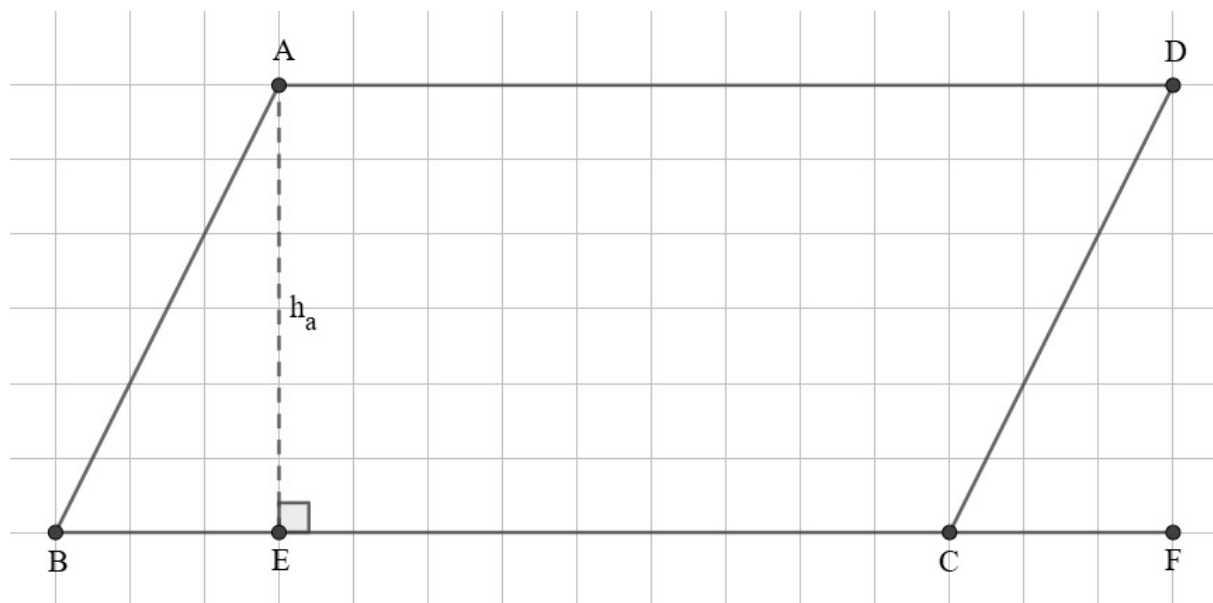
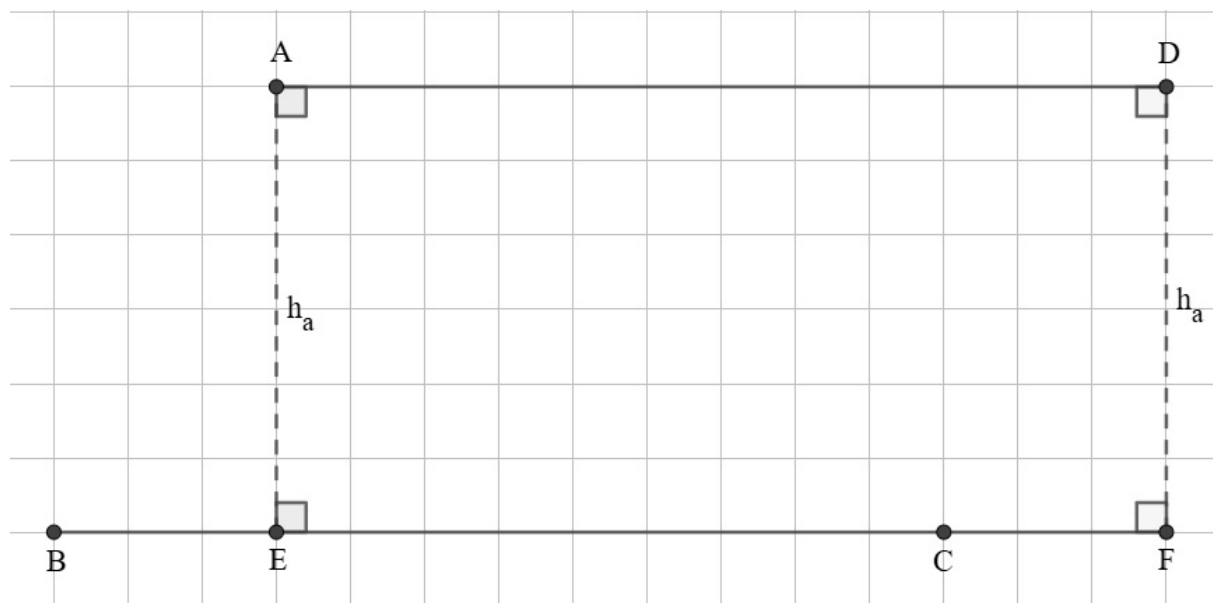
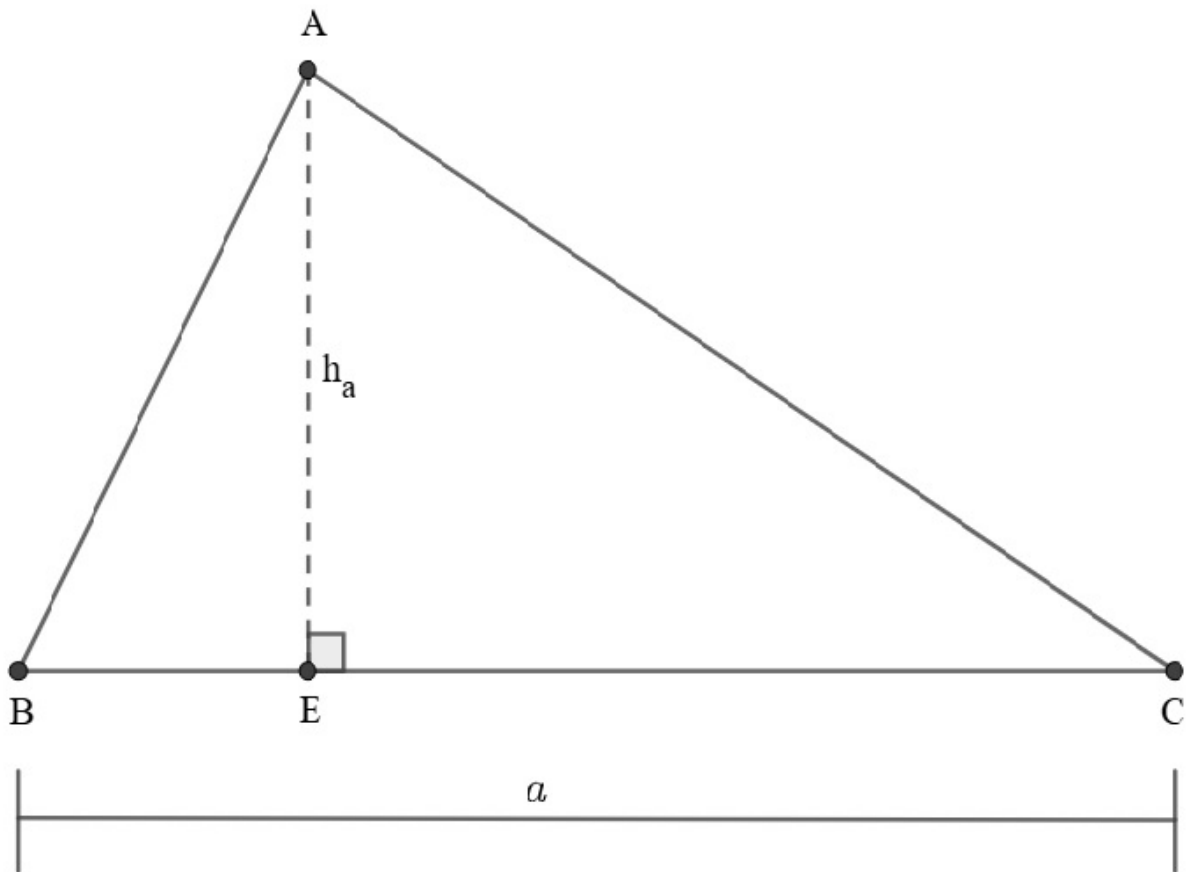


Figura A.2: Paralelogramo ABCD



Fonte: Autor

Figura A.3: Retângulo AEFD



Fonte: Autor

Figura A.4: Triângulo ABC

Agora escreva a fórmula para calcular a área do triângulo: (Aqui chamaremos a área do triângulo de S)

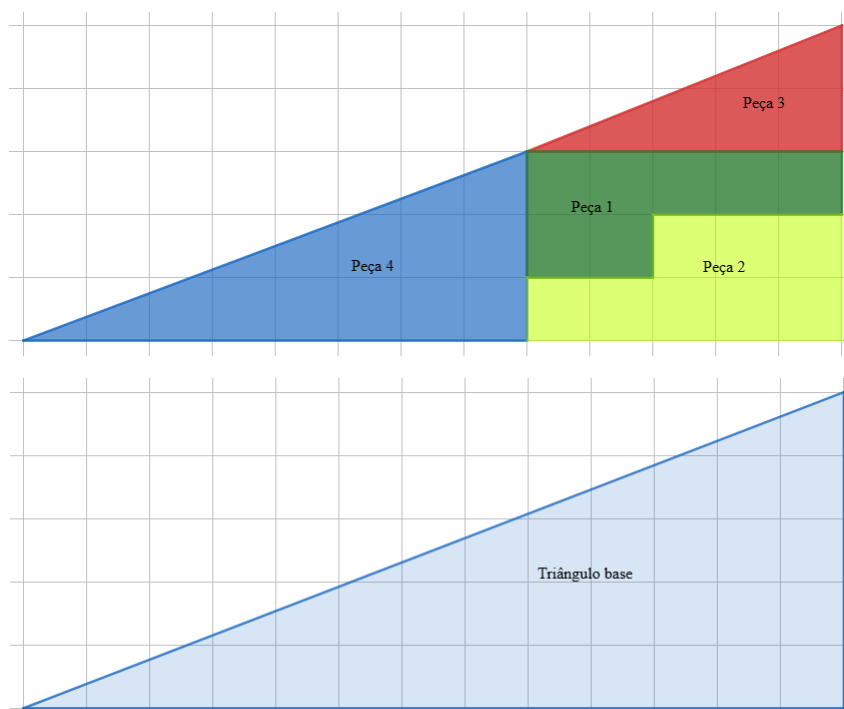
$$S = \underline{\hspace{2cm}}$$

Apêndice B

Passo a passo para construção do Problema do Quadrado Perdido

Introdução

O Problema do Quadrado Perdido consiste em um quebra-cabeça composto de quatro peças e uma peça adicional, o triângulo base, utilizado como suporte para o encaixe das peças. As peças são descritas conforme a seguir:



Fonte: Autor

Figura B.1: Peças

- Peça 1: 7 unidades.
- Peça 2: 8 unidades.
- Peça 3: Triângulo 5 x 2 u.c.
- Peça 4: Triângulo 8 x 3 u.c.
- Triângulo base: 13 x 5 u.c.

Observação: Recomenda-se a confecção deste material preferencialmente com EVA de 1 cm de espessura ou algum emborrachado mais rígido. Para este caso será utilizado a unidade de comprimento 1cm.

Materiais Necessários

- EVA de 1 cm de espessura (em cinco cores distintas).
- Acrílico para as laterais.
- Cola quente e bastão de cola quente.
- Tesoura.
- Estilete.
- Régua e esquadro.
- Caneta.

Passo a Passo para Construção

Preparação do Triângulo Base

1. Utilizando uma régua e uma caneta, desenhe sobre o EVA um retângulo de 13 cm x 5 cm.
2. Trace uma diagonal no retângulo.
3. Com o auxílio de um estilete, recorte o retângulo.
4. Corte o retângulo ao longo da diagonal, dividindo-o em dois triângulos idênticos.

Construção das Peças do Problema

1. Utilize um dos triângulos obtidos como base para desenhar as quatro peças do quebra-cabeça.
2. Recorte as peças com o estilete, garantindo precisão para um encaixe perfeito.
3. Usando o modelo das peças, confeccione cada uma das peças em uma cor distinta de EVA.

Montagem das Laterais do Triângulo Base

1. Para criar o espaço de organização das peças, utilize tiras de acrílico com largura equivalente ao dobro da espessura do EVA (aproximadamente 2 cm).
2. Certifique-se de que o comprimento das tiras de acrílico seja igual às medidas das laterais do triângulo base.
3. Apare as extremidades das tiras de acrílico para obter um acabamento adequado.
4. Fixe as tiras de acrílico nas laterais do triângulo base utilizando cola quente.

Considerações Finais

Após seguir os passos descritos, o Problema do Quadrado Perdido estará finalizado e pronto para o uso.