



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estudo geométrico das equações do terceiro e quarto graus

JHOYNE RIOS DE MENEZES OLIVEIRA

Orientador: PROF. DR. DARLAN FERREIRA DE OLIVEIRA

Feira de Santana-Bahia

Novembro/2024

JHOYNE RIOS DE MENEZES OLIVEIRA

Estudo geométrico das equações do terceiro e quarto graus

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira.

Feira de Santana-Bahia

Novembro/2024

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteadó - UEFS

Oliveira, Jhoyne Rios de Menezes

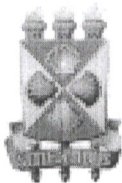
O47e Estudo geométrico das equações do terceiro e quarto graus./ Jhoyne Rios de Menezes Oliveira. – 2024.
54 f.: il.

Orientador: Darlan Ferreira de Oliveira
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Feira de Santana, 2024.

1. Interpretação geométrica. 2. Equações cúbicas e quárticas. 3. I. Oliveira, Darlan Ferreira de, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 514.124

Maria de Fátima de Jesus Moreira - Bibliotecária - CRB-5/1120

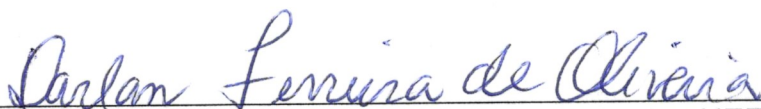


Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciencias Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



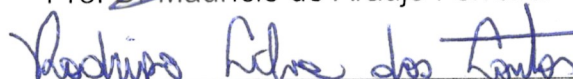
Ata da Sessão pública de defesa de dissertação do discente Jhoyne Rios de Menezes Oliveira do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos vinte dias do mês de dezembro de dois mil e vinte quatro, às 14 horas, na sala MT55 localizada no Módulo 5 - UEFS, ocorreu a defesa da dissertação apresentada sob o título “**ESTUDO GEOMÉTRICO DAS EQUAÇÕES DO TERCEIRO E QUARTO GRAUS**”, do discente, **Jhoyne Rios de Menezes Oliveira** do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Darlan Ferreira de Oliveira (Orientador, UEFS), Maurício de Araújo Ferreira (UEFS) e Rodrigo Silva dos Santos (UFRB). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores. Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito aprovado. Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 20 de dezembro de 2024.

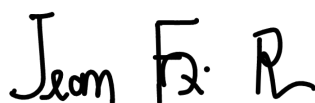


Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira (Orientador, UEFS)


Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira (UEFS)


Prof. Dr. Rodrigo Silva dos Santos (UFRB)

Visto do Coordenador:



Agradecimentos

Este trabalho para mim é a realização de um sonho e me deixa muito orgulhoso. Agradeço primeiramente a Deus por está comigo sempre nos momentos bons e ruins e me dar forças para lher dar com as adversidades da vida e me fortalecer sempre, só o Senhor sabe momentos que eu era desacreditado por todos e o Senhor me fortaleceu e sempre me fez acreditar em mim.

Agradeço a minha esposa Ruth e minha princesinha Ceci por está sempre ao meu lado em todos os momentos me trazendo sempre felicidade e amor. Amo vocês para sempre e sempre!!! Vocês são a razão de minha vida e o motivo para eu acordar todo dia cedo e ir trabalhar.

Agradecer a minha vó Dandi- in memoriam por ter me dado amor e alegria na infância com lembranças que me deixam feliz até hoje em dia. Amo a senhora!!!

Agradecer a meus pais Zé Carlos e Nete pelo apoio na época que iniciei na Universidade até quando comecei a atuar no meu primeiro emprego. Amo vocês!!!

Agradecer a meus irmãos Natália e Janerson por momentos que já vivenciamos de felicidade. Amo vocês!!!

Agradeço a meus colegas de Universidade e Profmat pelo apoio e parceria de sempre, em especial a Marcelo que é um irmão que tenho da UEFS que me incentivou sempre.

Agradeço aos professores da UFOB, UEFS e do PROFMAT, em especial a Fabíola pelo incentivo de sempre, Gilson da época da UFOB e meu orientador e grande incentivador Darlan Oliveira por ter sido um grande professor para mim tanto na graduação quando lecionou Geometria e Álgebra Linear II quanto no Mestrado Profissional lecionando a disciplina matemática discreta e sendo meu orientador, grande exemplo de profissional e excelente orientador. Obrigado por tudo meu amigo.

Resumo

Neste trabalho fizemos um estudo das equações do terceiro e quarto graus sob um ponto de vista geométrico. Mostramos como, num certo sentido, as raízes de uma equação cúbica estão associadas aos vértices de um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência cujo raio está em função dos coeficientes de tal equação e como as raízes de uma equação quártica estão associadas às abscissas de quatro pontos sobre uma circunferência cujo raio está em função dos coeficientes da equação. No trabalho apresentamos todos os argumentos necessários para o entendimento destes problemas e concluimos mostrando como a partir de tais construções podemos obter um procedimento que com o auxílio de uma calculadora científica nos dá as raízes de uma equação quártica específica, que tem duas raízes reais positivas e duas raízes reais negativas.

Abstract

In this work we studied the third and fourth degree equations from a geometric point of view. We show how, in a certain sense, the roots of a cubic equation are associated with the vertices of an equilateral triangle circumscribed to a circle whose radius is a function of the coefficients of such an equation and how the roots of a quartic equation are associated with the abscissa of four points on a circle whose radius is a function of the coefficients of the equation. In the work we present all the necessary arguments to understand these problems and conclude by showing how from such constructions we can obtain a procedure that, with the help of a scientific calculator, gives us the roots of a specific quartic equation, which has two positive real roots and two negative real roots.

Lista de Figuras

1.1	Circunferência circunscrita a um triângulo equilátero	13
1.2	Teorema das Cordas	14
2.1	Circunferência Γ inscrita no triângulo equilátero $X_1X_2X_3$	23
2.2	Triângulo equilátero $X_1X_2X_3$	26
3.1	Retas perpendiculares e secantes a uma circunferência Γ	33
3.2	Par de retas paralelas as retas perpendiculares secantes a circunferência Γ .	34
3.3	Duas Retas se interceptando no ponto A_2	36
3.4	Duas Retas se interceptando no ponto A_1	37
3.5	Relação entre o raio de uma circunferência Γ e as raízes de uma equação quártica	41

Sumário

Agradecimentos	5
Resumo	6
Abstract	7
Introdução	11
1 Conceitos preliminares	12
1.1 O Teorema Fundamental da Álgebra	12
1.2 Conceitos Geométricos	12
1.3 Relações de Girard	14
2 A geometria da equação do terceiro grau	18
2.1 Discriminante da equação cúbica	19
2.2 Estudo geométrico das raízes da equação cúbica	22
3 A geometria da equação do quarto grau	31
3.1 Interpretação geométrica da equação $x^4 + cx^2 + dx + e = 0$ com $e > 0$	32
3.2 Equação cúbica associada a uma equação quártica	42
4 Sequência didática	47

4.1	Aula 1- Relações de Girard e Lema 3.2.1	47
4.2	Aula 2 - Forma incompleta de uma equação do 3 ^o grau	49
4.3	Aula 3 - Discriminante da equação cúbica	50
4.4	Aula 4 - Resolução de uma equação cúbica incompleta	51
4.5	Aula 5 - Resolução de uma equação quártica	52
Considerações finais		55

Introdução

Um dos grandes temas abordados pela Álgebra constitui-se na resolução de equações algébricas. Encontrar métodos capazes de resolver estas sentenças matemáticas sempre foi um assunto estudado pelos matemáticos no decorrer da história. A Educação Básica contempla o estudo das equações do primeiro e segundo grau, é quando os alunos começam a ter o primeiro contato com resolução de equações e interpretação gráfica, por exemplo, quando são apresentadas as parábolas para as funções do 2º grau. Já para as equações de grau maior que dois os livros didáticos, em sua maioria, não abordam. Então, podemos nos perguntar se uma abordagem geométrica é apropriada para equações de grau maior. Essa limitação na abordagem para as equações polinomiais no ensino médio nos motivou a realização desse trabalho.

O objetivo deste trabalho é fazer uma abordagem geométrica das equação do terceiro e quarto grau. O ponto de partida deste estudo é dado com a análise do artigo "The secret geometry of the quartic equation" do matemático George Plousos. Inicialmente com conceitos preliminares de geometria e as relações de Girard que é um método utilizado para encontrar raízes de polinômios, sendo as equações cúbicas e quárticas muito difíceis de serem solucionados tamanha quantidade de soluções. Aborda-se a equação do 3º grau com sua característica e o método de resolução de Cardano-Tartaglia com a influência do discriminante no quantitativo de raízes reais. Após, é feito o estudo geométrico das raízes cúbicas e a partir da geometria solucionarmos alguns exemplos. A equação quártica é estudada com sua característica e sua geometria com os coeficientes da equação quártica relacionadas a uma circunferência Γ de raio R .

O trabalho foi organizado da seguinte maneira. No primeiro capítulo, introduziremos as definições e os resultados preliminares, necessários para o desenvolvimento do nosso estudo. No segundo capítulo, trata-se da interpretação geométrica da equação do terceiro grau, relacionando as raízes desta equação com um triângulo equilátero, que circunscreve uma circunferência. Já no terceiro capítulo, estudamos a interpretação geométrica da equação quártica, relacionando suas raízes com duas retas perpendiculares secantes a uma circunferência centrada na origem.

Capítulo 1

Conceitos preliminares

Neste capítulo introduziremos alguns conteúdos matemáticos que serão úteis no entendimento dos conceitos apresentados neste trabalho.

1.1 O Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema 1.1.1 (Teorema Fundamental da Álgebra) *Todo polinômio de grau n com coeficientes complexos tem exatamente n raízes complexas.*

Teorema 1.1.2 (Teorema da Raiz Complexa Conjugada) *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $z = a + bi$ uma raiz complexa de um polinômio com coeficientes reais. Então $\bar{z} = a - bi$ também é uma raiz do polinômio.*

Corolário 1.1.1 *Se o grau de um polinômio com coeficientes reais é ímpar, então o polinômio tem pelo menos uma raiz real.*

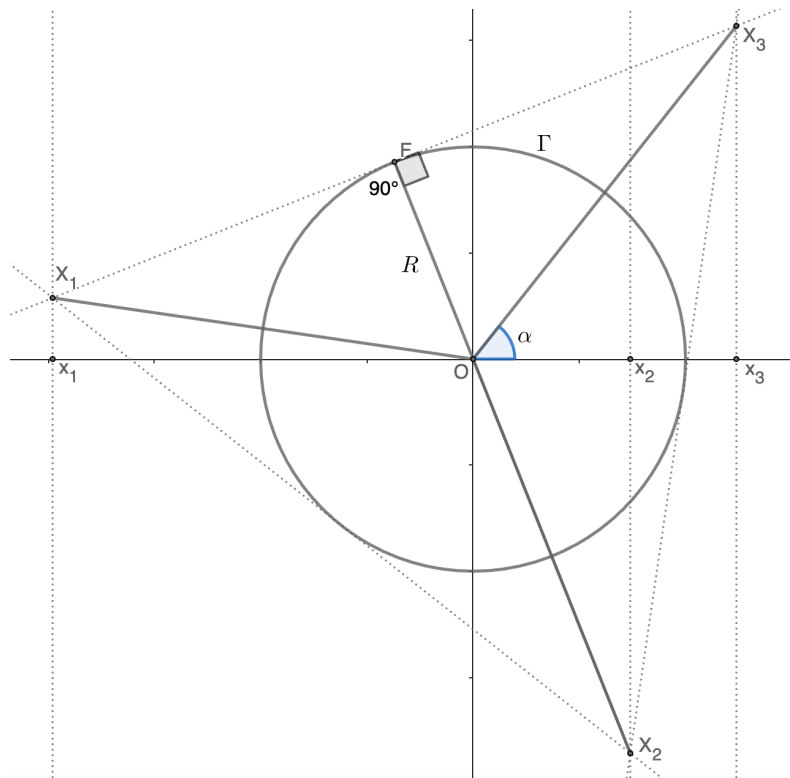
1.2 Conceitos Geométricos

Proposição 1.2.1 *Seja $X_1X_2X_3$ um triângulo equilátero. Se R é o raio da circunferência inscrita em $X_1X_2X_3$ então a circunferência circunscrita a $X_1X_2X_3$ tem raio $2R$.*

Demonstração. Conforme Figura 1.1 o triângulo FOX_3 é retângulo em F . O ângulo $\widehat{FX_3O} = \pi/6$. Segue daí que

$$\operatorname{sen} \pi/6 = \frac{R}{\overline{OX_3}}$$

de onde obtemos que $OX_3 = 2R$. Logo o raio da circunferência circunscrita tem medida $2R$.



Fonte: Autor

Figura 1.1: Circunferência circunscrita a um triângulo equilátero

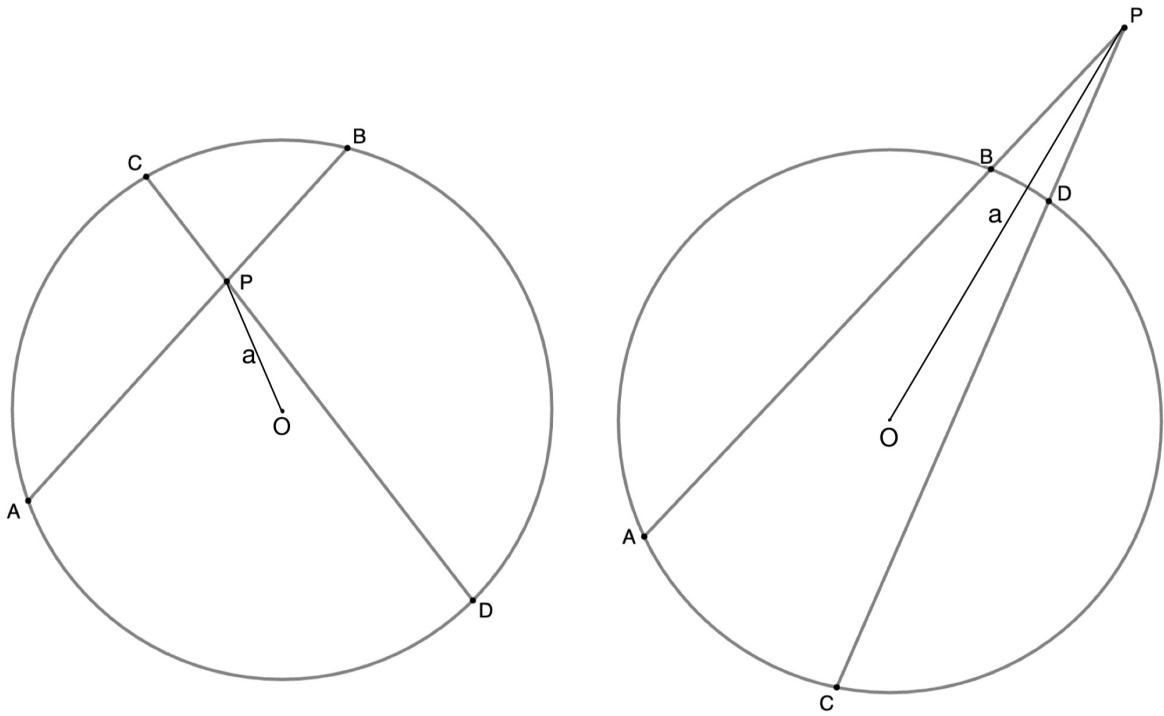
No que segue utilizaremos o Teorema das cordas, muito utilizado na geometria plana e que relacionando as cordas de uma circunferência com seu raio.

Teorema 1.2.1 (Teorema das cordas) *Considerando as Figura 1.2 valem as seguintes relações:*

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = |R^2 - a^2|$$

Demonstração. Sejam dadas uma circunferência Γ de centro O e raio R , duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ que se interceptam num ponto P no interior da circunferência. Ao traçarmos os segmentos AC e BD temos os triângulos ACP e BPD . Note que os ângulos $\angle ACP$ e $\angle PBD$ são congruentes pois estão sobre o arco capaz do segmento AD e o mesmo ocorre com os ângulos $\angle CAP$ e $\angle BDP$. Os ângulos $\angle CPA$ e $\angle BPD$ possuem a mesma medida pois são opostos pelo vértice. Segue daí que os triângulos ACP e DBP , nesta ordem de vértices, são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo. Portanto,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$$



Fonte: Autor

Figura 1.2: Teorema das Cordas

de onde concluímos que

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

Por fim, considere um diâmetro da circunferência passando por P e $\overline{OP} = a$. Temos

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = (R + a) \cdot (R - a) = R^2 - a^2.$$

Caso o ponto esteja no exterior da circunferência encontramos, de forma análoga, que

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = (a + R) \cdot (a - R) = a^2 - R^2.$$

1.3 Relações de Girard

No que segue faremos uso frequente das conhecidas relações de Girard que relacionam as raízes de um polinômio $p(x)$ de grau n ,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

com seus coeficientes complexos a_i . Segue do Teorema Fundamental da Álgebra que este polinômio tem exatamente n raízes complexas, $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$. A partir destas raízes

defina os números

$$\begin{aligned}
S_1 &= - \sum_{i=1}^n x_i = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n) \\
S_2 &= \sum_{i_1 < i_2 = 2}^n x_{i_1} x_{i_2} = x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n \\
S_3 &= - \sum_{i_1 < i_2 < i_3 = 3}^n x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} = -(x_1 x_2 x_3 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n) \\
&\vdots \\
S_k &= (-1)^k \sum_{i_1 < \cdots < i_k = k}^n x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = (-1)^k (x_1 \cdots x_k + \cdots + x_{i_{n-k+1}} \cdots x_n).
\end{aligned}$$

Proposição 1.3.1 (Relações de Girard) *Considere o polinômio $p(x)$ de grau n ,*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

onde os coeficientes a_i são números complexos. Valem as relações

$$\frac{a_{n-k}}{a_n} = S_k, \quad \text{onde } 1 \leq k \leq n,$$

se, e somente se, $x_1, \dots, x_n$ são raízes de $p(x)$.

Para um melhor entendimento, faremos o enunciado e demonstração da Proposição 1.3.1 para um polinômio de grau 4.

Proposição 1.3.2 (Relações de Girard) *Considere o polinômio do quarto grau*

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Valem as relações

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \tag{1.1}$$

$$\frac{c}{a} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 \tag{1.2}$$

$$-\frac{d}{a} = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \tag{1.3}$$

$$\frac{e}{a} = x_1 x_2 x_3 x_4. \tag{1.4}$$

se, e somente se, x_1, x_2, x_3, x_4 são raízes de $p(x)$.

Demonstração. Se x_1, x_2, x_3, x_4 são raízes de $p(x)$ o mesmo se fatora como

$$\begin{aligned} p(x) &= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\ &= a(x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)x^2 \\ &\quad - (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x + x_1x_2x_3x_4) \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de $p(x)$ com sua forma fatorada temos

$$\begin{aligned} b &= -a(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ c &= a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \\ d &= -a(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \\ e &= a(x_1x_2x_3x_4) \end{aligned}$$

de onde se obtém as relações.

Reciprocamente, suponha que valem as relações 1.1 à 1.4. Vamos mostrar que x_1 é raiz de $p(x)$. A prova de que x_2, x_3 e x_4 são raízes é análoga. Segue das relações 1.1 e 1.2 que

$$c = a\left(x_1\left(-\frac{b}{a} - x_1\right) + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\right)$$

e das relações 1.3 e 1.4 que

$$dx_1 = -a\left(x_1^2(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + \frac{e}{a}\right)$$

As duas últimas igualdades nos dão

$$(c + ax_1\left(\frac{b}{a} + x_1\right))x_1^2 = -dx_1 - e$$

e esta igualdade se escreve como

$$ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e = 0,$$

onde verificamos que x_1 é raiz de $p(x)$.

Exemplo 1.3.1 *Determine a equação do terceiro grau cujas raízes são $x_1 = 1, x_2 = 2$ e $x_3 = 3$.*

Utilizaremos a relação de girard para encontrarmos os valores de a, b, c e d do polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Assim, $\frac{-b}{a} = 1 + 2 + 3$, então $b = -6a$, $\frac{c}{a} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3$, então $c = 11a$, e $\frac{-d}{a} = 1 \cdot 2 \cdot 3$,

então $d = -6a$.

Observa-se que o a pode ser qualquer valor, colocaremos $a = 1$. Assim teremos:

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Capítulo 2

A geometria da equação do terceiro grau

No que segue vamos estudar, do ponto de vista geométrico, a equação do terceiro grau, também chamada de equação cúbica, da forma

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, \text{ com } A, B, C, D \in \mathbb{R} \text{ e } A \neq 0.$$

Desde que $A \neq 0$ podemos dividir ambos os membros da equação por A obtendo

$$x^3 + \frac{B}{A}x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A} = 0.$$

Fazendo $b = \frac{B}{A}$, $c = \frac{C}{A}$ e $d = \frac{D}{A}$ a equação se reescreve como

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

e, por fim, introduzindo a transformação $x = y - \frac{b}{3}$ obtemos

$$\begin{aligned} x^3 + bx^2 + cx + d &= \left(y - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d \\ &= y^3 - 3y^2\frac{b}{3} + 3y\frac{b^2}{9} - \frac{b^3}{27} + by^2 - 2\frac{b^2}{3}y + \frac{b^3}{9} + cy - \frac{cb}{3} + d \\ &= y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)y - \frac{2b^3}{27} - \frac{cb}{3} + d. \end{aligned}$$

Essa transformação nos mostra que podemos restringir o estudo das equações do terceiro grau ao estudo das equações do terceiro grau incompletas no termo quadrático, ou seja, equações cujo coeficiente do termo quadrático é nulo, do tipo

$$x^3 + px + q = 0.$$

Observação 2.0.1 *Na sequência deste trabalho chamaremos esse tipo de equação de equação incompleta apenas.*

Na seção a seguir mostraremos em quais condições sobre p e q a equação cúbica incompleta tem raízes reais.

2.1 Discriminante da equação cúbica

Um discriminante é um número real que nos fornece informação sobre como classificar as raízes de uma equação. Como exemplo, temos o discriminante associado a equação do segundo grau,

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com coeficientes reais, que estudamos nas series finais do ensino fundamental, o conhecido discriminante Delta, dado pela fórmula

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Sabemos que

- (i) $\Delta > 0$ se, e somente se, a equação possui duas raízes reais distintas.
- (ii) $\Delta = 0$ se, e somente se, a equação possui raízes múltiplas, ou seja, possui duas raízes reais e iguais.
- (iii) $\Delta < 0$ se, e somente se, a equação possui um par de raízes complexas conjugadas.

Para ver que as afirmações (i), (ii) e (iii) são verdadeiras primeiro note que sendo x_1, x_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ temos que $\Delta = a^2(x_1 - x_2)^2$. De fato,

$$\begin{aligned} a^2(x_1 - x_2)^2 &= a^2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] \\ &= a^2\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}\right] \\ &= a^2\left[\frac{b^2}{a^2} - \frac{4ac}{a^2}\right] \\ &= b^2 - 4ac \\ &= \Delta. \end{aligned}$$

Se $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$, respectivamente, segue da fórmula de Báskara que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes reais distintas, duas raízes reais e iguais ou duas raízes

complexas conjugadas.

Reciprocamente, segue do Teorema 1.1.2 que sendo $z = u + vi$ uma raiz complexa de uma equação polinomial com coeficientes reais então $\bar{z} = u - vi$ também o é. Desse modo se x_1, x_2 são raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ então ou x_1 e x_2 são reais distintos, de onde obtemos $\Delta > 0$, ou $x_1 = x_2$, que nos dão $\Delta = 0$ ou x_1 e x_2 são raízes complexas conjugadas de onde encontramos

$$\Delta = a^2(a + bi - a + bi)^2 = a^2(2bi)^2 = -4a^2b^2 < 0.$$

Voltemos a equação cúbica $x^3 + px + q = 0$ com coeficientes reais. Baseado na motivação descrita acima para o discriminante da equação do segundo grau temos a seguinte definição para o discriminante da equação cúbica.

Definição 2.1.1 *Considere a equação cúbica $x^3 + px + q = 0$ com coeficientes reais. Definimos o discriminante desta equação pelo número real*

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$$

onde x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação cúbica.

Como consequência imediata desta definição temos a proposição.

Proposição 2.1.1 *Considere a equação cúbica $x^3 + px + q = 0$ com coeficientes reais. Então,*

- (i) $\Delta > 0$ se, e somente se, a equação possui três raízes reais distintas.
- (ii) $\Delta = 0$ se, e somente se, a equação possui raízes múltiplas, ou seja, possui pelo menos duas raízes reais e iguais.
- (iii) $\Delta < 0$ se, e somente se, a equação possui um par de raízes complexas conjugadas.

Demonstração. Os itens (i) e (ii) são de verificação imediata. Para ver que vale (iii) considere as raízes $x_1, x_2 = a + bi$ e $x_3 = a - bi$. Temos

$$\begin{aligned}\Delta &= (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 \\ &= (x_1 - (a + bi))^2(x_1 - (a - bi))^2(2bi)^2 \\ &= ((x_1 - a) - bi)^2((x_1 - a) + bi)^2(-4b^2) \\ &= ((x_1 - a)^2 + b^2)^2(-4b^2) \\ &< 0.\end{aligned}$$

Reciprocamente, se a equação não possui um par de raízes complexas conjugadas então as raízes são reais de onde obtemos que $\Delta \geq 0$.

De forma similar ao que foi feito para o discriminante da equação do segundo grau também podemos escrever o discriminante da equação cúbica em função dos coeficientes reais p e q da equação. Temos a seguinte proposição:

Proposição 2.1.2 *Considere a equação cúbica $x^3 + px + q = 0$ com coeficientes reais. Então,*

$$\Delta = -27q^2 - 4p^3$$

Demonstração. Observe que $0 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2p$. Segue daí que

$$\begin{aligned}\Delta &= (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)(x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3)(x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3) \\ &= (-x_3^2 - 2p - 2x_1x_2)(-x_2^2 - 2p - 2x_1x_3)(-x_1^2 - 2p - 2x_2x_3).\end{aligned}$$

Note que $x_1x_2 = p - x_3(x_1 + x_2) = p + x_3^2$ e, analogamente, $x_1x_3 = p + x_2^2$ e $x_2x_3 = p + x_1^2$. Temos

$$\begin{aligned}\Delta &= (-x_3^2 - 2p - 2x_1x_2)(-x_2^2 - 2p - 2x_1x_3)(-x_1^2 - 2p - 2x_2x_3) \\ &= (-x_3^2 - 2p - 2p - 2x_3^2)(-x_2^2 - 2p - 2p - 2x_2^2)(-x_1^2 - 2p - 2p - 2x_1^2) \\ &= -(3x_3^2 + 4p)(3x_2^2 + 4p)(3x_1^2 + 4p) \\ &= -(9x_2^2x_3^2 + 12p(x_2^2 + x_3^2) + 16p^2)(3x_1^2 + 4p) \\ &= -(9x_2^2x_3^2 + 12p(-2p - x_1^2) + 16p^2)(3x_1^2 + 4p) \\ &= -(9x_2^2x_3^2 - 24p^2 - 12px_1^2 + 16p^2)(3x_1^2 + 4p) \\ &= (-9x_2^2x_3^2 + 8p^2 + 12px_1^2)(3x_1^2 + 4p) \\ &= -27x_1^2x_2^2x_3^2 - 36px_2^2x_3^2 + 24px_1^2 + 32p^3 + 36px_1^4 + 48px_1^2 \\ &= -27q^2 - 36px_2^2x_3^2 + 72px_1^2 + 32p^3 + 36px_1^4.\end{aligned}$$

De forma análoga obtemos

$$\Delta = -27q^2 - 36px_1^2x_3^2 + 72px_2^2 + 32p^3 + 36px_2^4$$

e

$$\Delta = -27q^2 - 36px_1^2x_2^2 + 72px_3^2 + 32p^3 + 36px_3^4.$$

Somando as três expressões para Δ encontramos

$$3\Delta = -81q^2 - 36p(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) + 72p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 96p^3 + 36p(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4).$$

Agora, note que,

$$\begin{aligned} p^2 &= x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + 2(x_1 + x_2 + x_3)x_1 x_2 x_3 \\ &= x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 \end{aligned}$$

e como $x_i^3 + px_i + q = 0$ para $i = 1, 2, 3$ temos $x_i^4 + px_i^2 + qx_i = 0$ e

$$\sum_{i=1}^3 x_i^4 = -p \sum_{i=1}^3 x_i^2 - q \sum_{i=1}^3 x_i = 2p^2.$$

Assim

$$3\Delta = -81q^2 - 36p(p^2) + 72p(-2p) + 96p^3 + 36p(2p^2)$$

de onde obtemos

$$\Delta = -27q^2 - 4p^3.$$

2.2 Estudo geométrico das raízes da equação cúbica

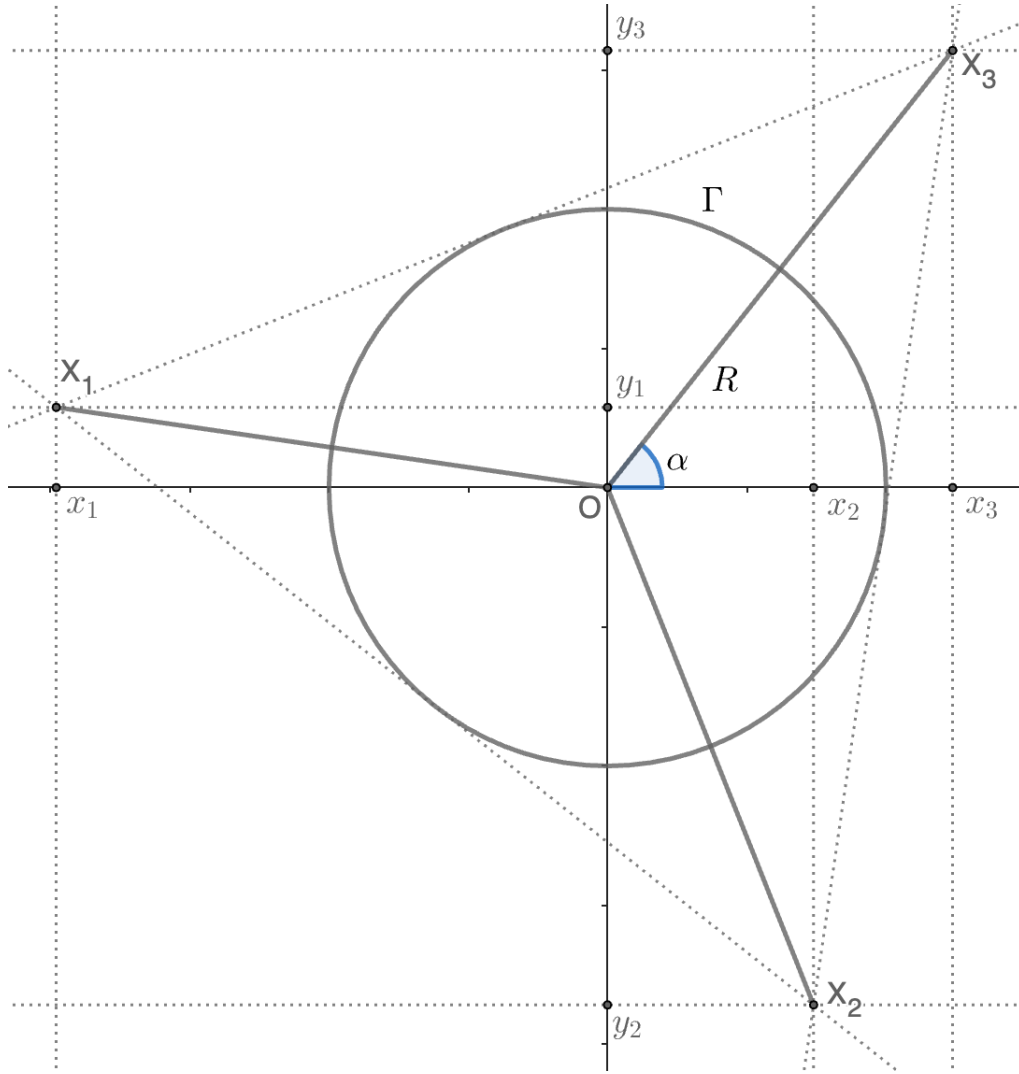
No que segue estaremos interessados apenas em estudar equações cúbicas do tipo $x^3 + px + q = 0$ que possuem raízes reais, ou seja, equações cúbicas nas quais $\Delta \geq 0$. Uma condição necessária para que isso ocorra é termos $p < 0$. Esse tipo de equação tem uma interessante interpretação geométrica. Suas raízes podem ser vistas como as projeções de três pontos que estão sobre uma circunferência cujo raio é dado em função do coeficiente p da equação.

Proposição 2.2.1 *Considere uma circunferência Γ de raio R e centrada na origem dos eixos. Seja $X_1 X_2 X_3$ um triângulo equilátero que circunscreve Γ . Se*

$$X_1 = (x_1, y_1), \quad X_2 = (x_2, y_2) \quad e \quad X_3 = (x_3, y_3),$$

então

- (i) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$,
- (ii) $y_1 + y_2 + y_3 = 0$,
- (iii) $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -3R^2$.



Fonte: O autor

Figura 2.1: Circunferência Γ inscrita no triângulo equilátero $X_1X_2X_3$

Demonstração. Conforme Figura 2.1 e Proposição 1.2.1, note que sendo $X_1X_2X_3$ equilátero temos $\overline{OX_1} = \overline{OX_2} = \overline{OX_3} = 2R$ e $X_1\hat{O}X_2 = X_1\hat{O}X_3 = X_2\hat{O}X_3 = \frac{2\pi}{3}$. Usando as relações trigonométricas no triângulo retângulo temos

$$\begin{aligned} x_1 &= 2R \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \\ x_2 &= 2R \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \\ x_3 &= 2R \cos \alpha. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 2R \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) + 2R \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) + 2R \cos \alpha \\
&= 2R \left(\cos \alpha \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{2\pi}{3} \right) + 2R \left(\cos \alpha \cos \frac{4\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{4\pi}{3} \right) + 2R (\cos \alpha) \\
&= 2R \left(-\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \cos \alpha \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

O que prova a relação (i). Com o mesmo raciocínio, obtemos

$$\begin{aligned}
y_1 &= 2R \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \\
y_2 &= 2R \sin \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) \\
y_3 &= 2R \sin \alpha.
\end{aligned}$$

de onde, somando-se essas igualdades, encontramos

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 + y_3 &= 2R \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) + 2R \sin \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) + 2R \sin \alpha \\
&= 2R \left(-\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \sin \alpha \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de onde conclui-se que vale a relação (ii). Para ver que vale a relação (iii) usamos as identidades

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2R \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \\
x_2 &= 2R \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) \\
x_3 &= 2R \cos \alpha.
\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}
x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \left(2R \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(2R \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right)\right) + \left(2R \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(2R \cos \alpha\right) \\
&\quad + \left(2R \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right)\right)\left(2R \cos \alpha\right) \\
&= 4R^2 \left[\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \cos \alpha \right] \\
&= 2R^2 \left[\cos(2\alpha + 2\pi) + \cos(-2\pi/3) + \cos(2\alpha + 2\pi/3) \right. \\
&\quad \left. + \cos(2\pi/3) + \cos(2\alpha + 4\pi/3) + \cos(4\pi/3) \right] \\
&= 2R^2 \left[\cos(2\alpha) + \cos(2\pi/3) + \cos(2\alpha) \cos(2\pi/3) - \sin(2\alpha) \sin(2\pi/3) \right. \\
&\quad \left. + \cos(2\pi/3) + \cos(2\alpha) \cos(4\pi/3) - \sin(2\alpha) \sin(4\pi/3) + \cos(4\pi/3) \right] \\
&= 2R^2 \left[\cos(2\alpha) - 1/2 + \cos(2\alpha)(-1/2) - \sin(2\alpha)(\sqrt{3}/2) \right. \\
&\quad \left. (-1/2) + \cos(2\alpha)(-1/2) - \sin(2\alpha)(-\sqrt{3}/2) - (1/2) \right] \\
&= -3R^2.
\end{aligned}$$

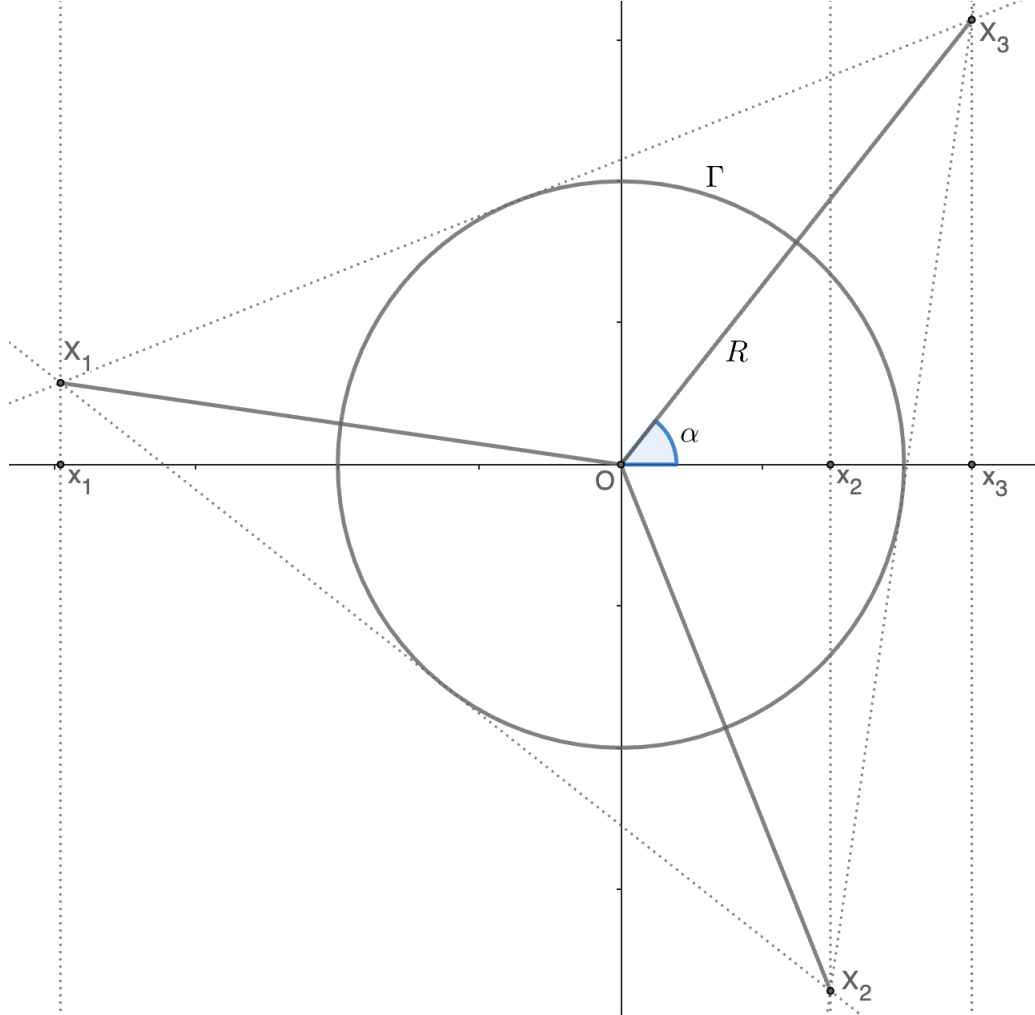
Observação 2.2.1 A proposição anterior nos permite a seguinte conclusão. Dada uma equação cúbica $x^3 + px + q = 0$ com $\Delta \geq 0$ suas raízes podem ser obtidas como as abcissas dos vértices de um determinado triângulo equilátero que circunscreve a circunferência Γ de raio $R = \sqrt{\frac{-p}{3}}$ e centrada na origem. A dificuldade aqui é que existem infinitos triângulos equiláteros circunscrevendo essa circunferência. Em todos estes triângulos as abcissas x_1, x_2 e x_3 de seus vértices satisfazem as relações

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad e \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p,$$

mas, no entanto, não temos a garantia que $x_1x_2x_3 = -q$.

Proposição 2.2.2 Suponha que o triângulo $X_1X_2X_3$ da Figura 2.2 é aquele cujas abcissas de seus vértices nos dão as soluções da equação cúbica $x^3 + px + q = 0$. Note que se tivermos $0 \leq \alpha < \pi/6$ teremos apenas a raiz x_3 positiva. De fato, $\alpha + \frac{2\pi}{3}$ está no segundo quadrante e $\alpha + \frac{4\pi}{3}$ está no terceiro quadrante onde o cosseno é negativo. Nesse caso teremos $x_1x_2x_3 = -q > 0$ donde concluímos que $q < 0$. Se tivermos $\pi/6 < \alpha < \pi/2$ teremos apenas a raiz x_1 negativa, pois $\alpha + \frac{2\pi}{3}$ está no segundo ou terceiro quadrantes onde o cosseno é negativo e $\alpha + \frac{4\pi}{3}$ está no quarto quadrante onde o cosseno é positivo.

Nesse caso teremos $x_1x_2x_3 = -q < 0$ donde concluímos que $q > 0$. Se $\alpha = \pi/2$ ou $\alpha = \pi/6$ temos uma raiz nula e nesse caso $q = 0$.



Fonte: O autor

Figura 2.2: Triângulo equilátero $X_1X_2X_3$

Temos que a raiz x_3 é dada por $x_3 = 2R \cos \alpha$. Substituindo a raiz x_3 na equação e usando a relação $-p = 3R^2$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 + px + q \\ &= 8R^3 \cos^3 \alpha + 2Rp \cos \alpha + q \\ &= 8R^3 \cos^3 \alpha - 6R^3 \cos \alpha + q. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por $2R^3$ encontramos

$$4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = -\frac{q}{2R^3}.$$

Por outro lado temos a seguinte relação trigonométrica

$$\begin{aligned}
 \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) \\
 &= \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\
 &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\
 &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha \\
 &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.
 \end{aligned}$$

Segue destas duas últimas identidades que

$$\cos 3\alpha = -\frac{q}{2R^3}.$$

Note que esta última igualdade faz sentido. De fato, como estamos considerando $\Delta \geq 0$ e usando o fato que $R^2 = -p/3$ temos

$$\begin{aligned}
 -27q^2 - 4p^3 &\geq 0 \\
 27q^2 + 4p^3 &\leq 0 \\
 27q^2 + 4(-3R^2)^3 &\leq 0 \\
 q^2 - 4R^6 &\leq 0 \\
 \left(\frac{q}{2R^3}\right)^2 - 1 &\leq 0
 \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$-1 \leq \frac{q}{2R^3} \leq 1.$$

Assim, definimos α como

$$\alpha = \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{q}{2R^3} \right).$$

As ideias abordadas acima mostram a validade da seguinte proposição.

Proposição 2.2.3 *Considere a equação cúbica $x^3 + px + q = 0$ com coeficientes reais e $\Delta \geq 0$. As raízes desta equação são dadas por*

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 2R \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \\
 x_2 &= 2R \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) \\
 x_3 &= 2R \cos \alpha.
 \end{aligned}$$

onde

$$R = \sqrt{-p/3} \quad e \quad \alpha = \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{q}{2R^3} \right).$$

Exemplo 2.2.1 *Encontre, com o auxílio de uma calculadora científica, as raízes da equação cúbica*

$$x^3 - 19x + 30 = 0.$$

Solução. Observe que $p = -19$ e $q = 30$. Como $q > 0$ temos apenas uma raiz negativa. Essas raízes são dadas pelas fórmulas na Proposição 2.2.3. Temos que

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{-p/3} \\ &= \sqrt{19/3} \\ \alpha &= \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{q}{2R^3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{30}{2(\sqrt{19/3})^3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{45\sqrt{3}}{19\sqrt{19}} \right) \end{aligned}$$

Com o auxílio de uma calculadora científica obtemos $\alpha \approx 53,413$ graus. Assim,

$$\cos \alpha \approx \cos(53,413) \approx 0,596$$

de onde obtemos, usando a calculadora, que

$$\begin{aligned} x_1 &= 2R \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 2\sqrt{19/3} \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 2\sqrt{19/3} \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 2R \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= 2\sqrt{19/3} \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= 2\sqrt{19/3} \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 2R \cos \alpha \\ &= 2\sqrt{19/3} \cos \alpha \\ &= 3. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.2 *Encontre as raízes da equação cúbica*

$$x^3 - 8x - 8 = 0.$$

Solução. Observe que $p = -8$ e $q = -8$. Como $q < 0$ temos apenas uma raiz positiva. Essas raízes são dadas pelas fórmulas na Proposição 2.2.3. Temos que

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{-p/3} \\ &= \sqrt{8/3} \\ \alpha &= \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{q}{2R^3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{8}{2(\sqrt{8/3})^3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{8}} \right) \end{aligned}$$

Com o auxílio de uma calculadora científica obtemos $\alpha \approx 7,761$ graus. Assim,

$$\cos \alpha \approx \cos(7,761) \approx 0,991$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= 2R \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 2\sqrt{8/3} \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 2\sqrt{8/3} \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 2R \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= 2\sqrt{8/3} \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= 2\sqrt{8/3} \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) \\ &\approx -1,236 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 2R \cos \alpha \\ &= 2\sqrt{8/3} \cos \alpha \\ &\approx 3,236. \end{aligned}$$

Note que como $x_1 = -2$ é uma raiz exata da equação, podemos obter exatamente as outras duas raízes usando as relações de Girard,

$$-2 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{e} \quad -2x_2x_3 = 8,$$

ou seja, temos o sistema

$$\begin{cases} x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2x_3 &= -4 \end{cases}$$

cujas soluções são dadas pela equação do segundo grau $x^2 - 2x + 4 = 0$ que são $x_2 = 1 - \sqrt{5}$ e $x_3 = 1 + \sqrt{5}$. Por fim, percebe-se que, de fato temos

$$1 - \sqrt{5} \approx -1,236 \quad \text{e} \quad 1 + \sqrt{5} \approx 3,236$$

como obtidos pela proposição.

Capítulo 3

A geometria da equação do quarto grau

No que segue vamos estudar, do ponto de vista geométrico, a equação do quarto grau da forma

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0, \text{ com } A, B, C, D, E \in \mathbb{R} \text{ e } A \neq 0.$$

Desde que $A \neq 0$ podemos dividir ambos os membros da equação por A obtendo

$$x^4 + \frac{B}{A}x^3 + \frac{C}{A}x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A} = 0.$$

Fazendo $b = \frac{B}{A}$, $c = \frac{C}{A}$, $d = \frac{D}{A}$ e $e = \frac{E}{A}$ a equação se reescreve como

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

e, por fim, introduzindo a transformação $x = y - \frac{b}{4}$ obtemos

$$\begin{aligned} x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e &= \left(y - \frac{b}{4}\right)^4 + b\left(y - \frac{b}{4}\right)^3 + c\left(y - \frac{b}{4}\right)^2 + dy + e \\ &= y^4 - 4y^3\frac{b}{4} + 6y^2\frac{b^2}{16} - 4y\frac{b^3}{64} + \frac{b^4}{256} + \\ &\quad + b\left(y^3 - 3y^2\frac{b}{4} + 3y\frac{b^2}{16} - \frac{b^3}{64}\right) + c\left(y^2 - 2y\frac{b}{4} + \frac{b^2}{16}\right) + d\left(y - \frac{b}{4}\right) + e \\ &= y^4 + \left(-\frac{3b^2}{8} + c\right)y^2 + \left(\frac{8b^3}{64} - \frac{bc}{2} + d\right)y + \left(-\frac{3b^4}{256} + \frac{cb^2}{16} - \frac{db}{4} + e\right) \\ &= y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0. \end{aligned}$$

Essa transformação nos mostra que podemos restringir o estudo das equações do quarto grau ao estudo das equações do quarto grau incompletas do tipo

$$x^4 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Esse tipo de equação tem uma interessante interpretação geométrica quando o coeficiente e é positivo. Suas raízes podem ser vistas como as projeções de quatro pontos sobre uma circunferência, cujo raio é dado em função dos coeficientes c, d e e .

3.1 Interpretação geométrica da equação

$$x^4 + cx^2 + dx + e = 0 \text{ com } e > 0$$

Agora, vamos interpretar geometricamente a equação do quarto grau,

$$x^4 + cx^2 + dx + e = 0 \text{ com } e > 0.$$

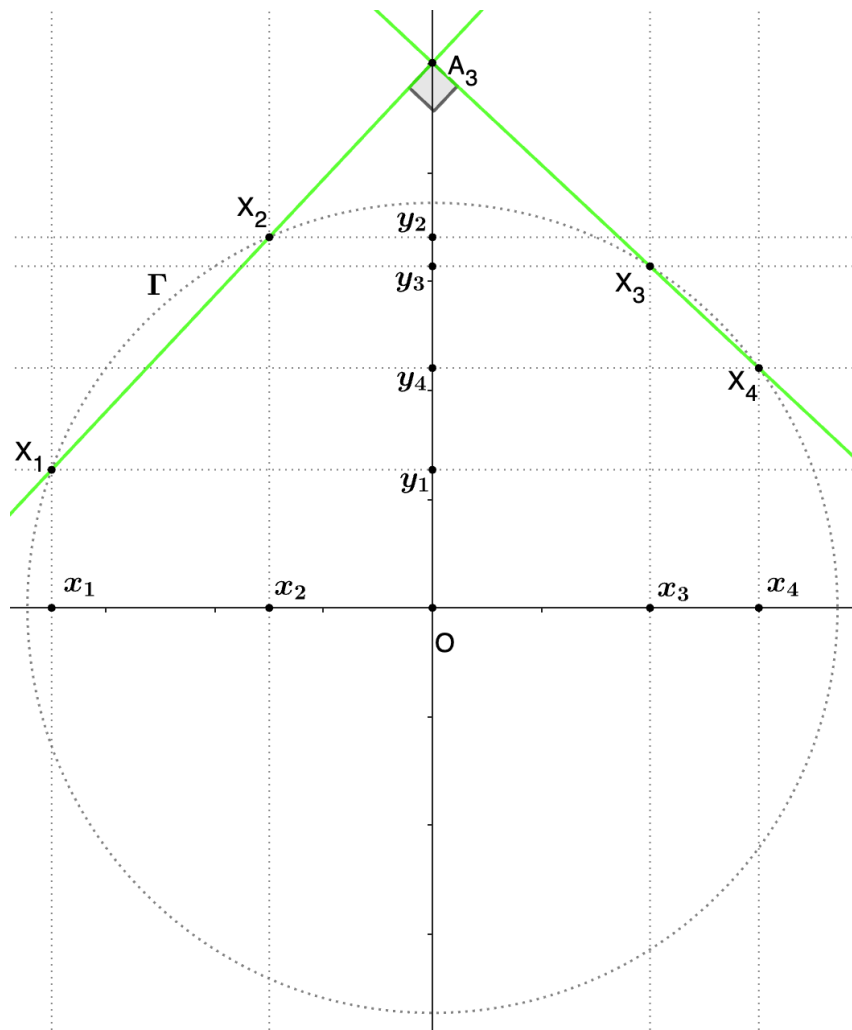
Desde que o coeficiente de x^3 é nulo as raízes x_1, x_2, x_3 e x_4 desta equação tem soma zero e como $e > 0$ podemos apenas ter o caso onde duas raízes são negativas e duas raízes são positivas. Consideremos, sem perda de generalidade, $x_1 \leq x_2 < 0 < x_3 \leq x_4$. Além de terem soma zero, vale destacar que estas raízes satisfazem as relações de Girard, ou seja, valem as identidades

$$\begin{aligned} c &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ d &= -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \\ e &= x_1x_2x_3x_4. \end{aligned} \tag{3.1}$$

No que segue vamos enunciar uma proposição, que mostra uma interessante relação geométrica que há entre as raízes de uma equação do quarto grau com uma circunferência cujo raio R é obtido em função dos coeficientes c, d e e . Para este fim, considere um par de retas perpendiculares concorrendo num ponto $A = (0, a)$, que sem perda de generalidade suporemos $a > 0$, e uma circunferência Γ com um raio R e centrada na origem dos eixos de modo que Γ intercepte cada reta exatamente em dois pontos. Por construção sempre teremos dois pontos com abscissas positivas e dois pontos com abscissas negativas que denotaremos por X_1, X_2, X_3 e X_4 onde X_1 e X_2 tem abscissas $x_1 < x_2$ negativas enquanto X_3 e X_4 tem abscissas $x_3 < x_4$ positivas.

Na Figura 3.5 foi considerado um par de retas perpendiculares concorrendo no ponto $A_3 = (0, a_3)$. A primeira reta é secante à Γ pelos pontos X_1 e X_2 e a segunda reta é

secante à Γ pelos pontos X_3 e X_4 e estão destacadas em verde. Baseado na construção



Fonte: Autor

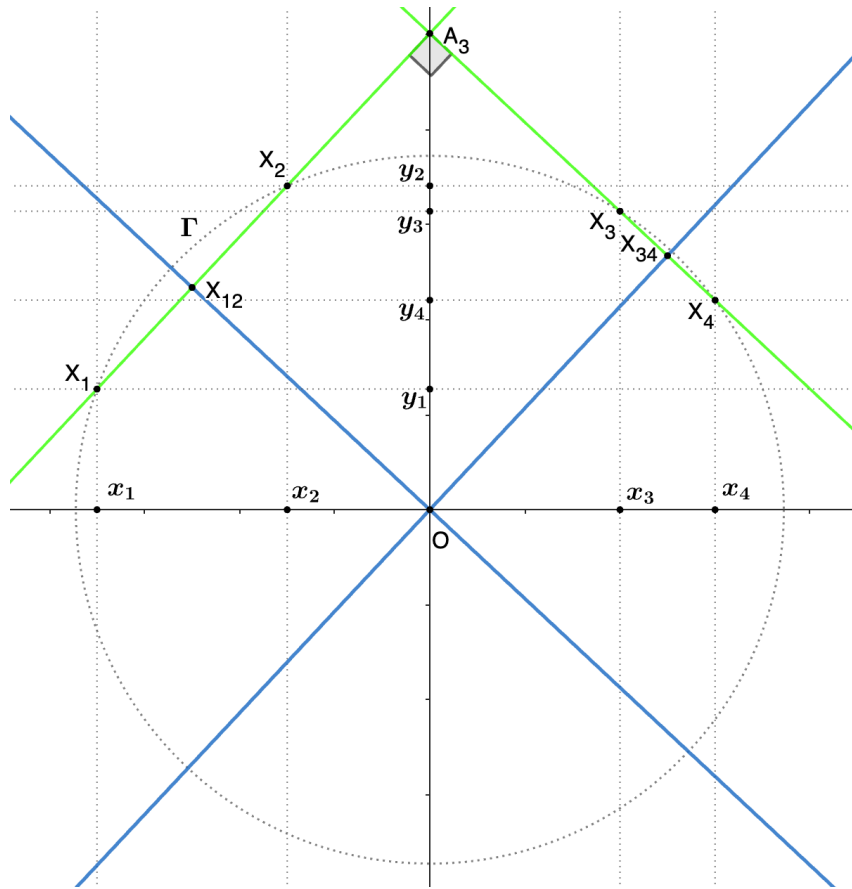
Figura 3.1: Retas perpendiculares e secantes a uma circunferência Γ

apresentada acima temos o seguinte lema:

Lema 3.1.1 *Considere um par de retas perpendiculares concorrendo no ponto $A_3 = (0, a_3)$ e secantes a uma circunferência Γ , a primeira pelos pontos X_1 e X_2 de abscissas negativas $x_1 < x_2$ e a segunda pelos pontos X_3 e X_4 de abcissas positivas $x_3 < x_4$, conforme ilustrado na Figura 3.1. Valem as seguintes relações:*

- (a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
- (b) $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 2a_3$
- (c) $y_1y_2 + y_3y_4 = a_3^2 - R^2$
- (d) $x_1x_2 + x_3x_4 = a_3^2 - R^2$
- (e) $y_1y_2y_3y_4 = -R^4 - cR^2 + e$

Provas de (a) e de (b). Na Figura 3.2 temos em azul um par de retas paralelas ao par de retas dadas na hipótese.



Fonte: Autor

Figura 3.2: Par de retas paralelas as retas perpendiculares secantes a circunferência Γ

Note que os pontos de interseção X_{12} e X_{34} são os pontos médios dos segmentos X_1X_2 e X_3X_4 , respectivamente. Segue daí que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_3} &= \overrightarrow{OX_{12}} + \overrightarrow{OX_{34}} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OX_3} + \overrightarrow{OX_4}) \\ &= \frac{1}{2}((x_1, y_1) + (x_2, y_2) + (x_3, y_3) + (x_4, y_4)) \\ &= \frac{1}{2}((x_1 + x_2 + x_3 + x_4, y_1 + y_2 + y_3 + y_4))\end{aligned}$$

e como $\overrightarrow{OA_3} = (0, a_3)$ concluímos que $\sum_{i=1}^4 x_i = 0$ e $\sum_{i=1}^4 y_i = 2a_3$.

Prova de (c). Como as retas $\overleftrightarrow{X_1X_2}$ e $\overleftrightarrow{X_3X_4}$ se interceptam no ponto A_3 segue do

Teorema das cordas, 1.2.1, que

$$\overline{A_3X_1} \cdot \overline{A_3X_2} = R^2 - a_3^2 = \overline{A_3X_3} \cdot \overline{A_3X_4}.$$

Temos

$$\begin{aligned} [x_1^2 + (a_3 - y_1)^2][x_2^2 + (a_3 - y_2)^2] &= (R^2 - a_3^2)^2 \\ [x_3^2 + (a_3 - y_3)^2][x_4^2 + (a_3 - y_4)^2] &= (R^2 - a_3^2)^2 \end{aligned}$$

Como $x_i^2 + y_i^2 = R^2, i = 1, \dots, 4$, obtemos

$$\begin{aligned} [(R^2 + a_3^2) - 2a_3y_1][(R^2 + a_3^2) - 2a_3y_2] &= (R^2 - a_3^2)^2 \\ [(R^2 + a_3^2) - 2a_3y_3][(R^2 + a_3^2) - 2a_3y_4] &= (R^2 - a_3^2)^2 \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} (R^2 + a_3^2)^2 - 2a_3(R^2 + a_3^2)(y_1 + y_2) + 4a_3^2y_1y_2 &= (R^2 - a_3^2)^2 \\ (R^2 + a_3^2)^2 - 2a_3(R^2 + a_3^2)(y_3 + y_4) + 4a_3^2y_3y_4 &= (R^2 - a_3^2)^2. \end{aligned}$$

Somando-se as duas últimas igualdades obtemos

$$\begin{aligned} 2(R^2 + a_3^2)^2 - 2a_3(R^2 + a_3^2)(2a_3) + 4a_3^2(y_1y_2 + y_3y_4) &= 2(R^2 - a_3^2)^2 \\ 4a_3^2(y_1y_2 + y_3y_4) &= 2(R^2 - a_3^2)^2 - 2(R^2 + a_3^2)^2 + 4a_3^2(R^2 + a_3^2) \\ 4a_3^2(y_1y_2 + y_3y_4) &= 2(R^2 - a_3^2 + R^2 + a_3^2)(R^2 - a_3^2 - R^2 - a_3^2) + 4a_3^2(R^2 + a_3^2) \\ 4a_3^2(y_1y_2 + y_3y_4) &= 2(2R^2)(-2a_3^2) + 4a_3^2(R^2 + a_3^2) \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$y_1y_2 + y_3y_4 = a_3^2 - R^2.$$

Prova de (d). Temos

$$\begin{aligned} \overline{OA_3}^2 &= \overline{OX_{12}}^2 + \overline{OX_{34}}^2 \\ a_3^2 &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 + y_4}{2}\right)^2 \\ 4a_3^2 &= \sum_{i=1}^4 (x_i^2 + y_i^2) + 2(x_1x_2 + x_3x_4 + y_1y_2 + y_3y_4) \\ 4a_3^2 &= 4R^2 + 2(x_1x_3 + x_2x_4 + a_3^2 - R^2) \end{aligned}$$

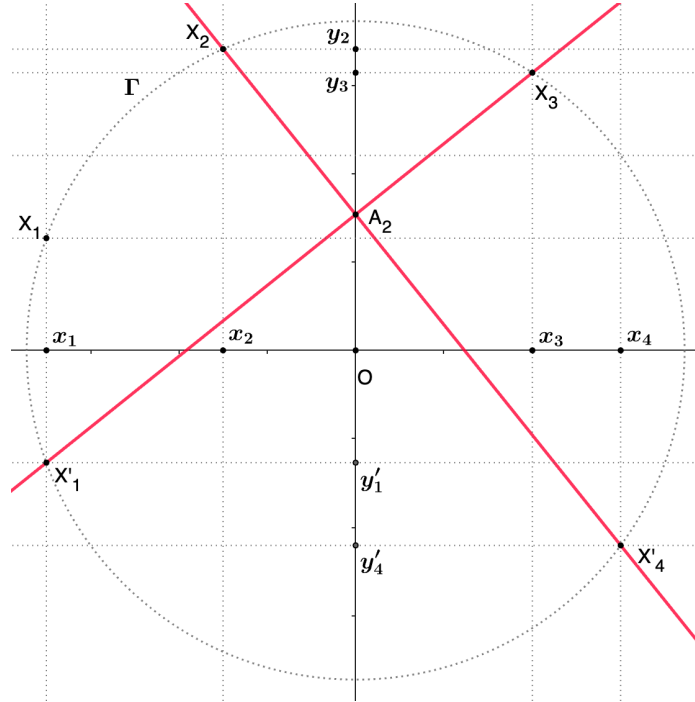
de onde obtemos que

$$x_1x_2 + x_3x_4 = a_3^2 - R^2.$$

Prova de (e). Segue do item (c) que

$$\begin{aligned}
a_3^2 - R^2 &= y_1 y_2 + y_3 y_4 \\
(a_3^2 - R^2)^2 &= (y_1 y_2 + y_3 y_4)^2 \\
&= y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2 + 2y_1 y_2 y_3 y_4 \\
&= (R^2 - x_1^2)(R^2 - x_2^2) + (R^2 - x_3^2)(R^2 - x_4^2) + 2y_1 y_2 y_3 y_4 \\
&= R^4 - R^2 x_1^2 - R^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + R^4 - R^2 x_3^2 - R^2 x_4^2 + x_3^2 x_4^2 + 2y_1 y_2 y_3 y_4 \\
&= 2R^4 - R^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2 + 2y_1 y_2 y_3 y_4 \\
&= 2R^4 + 2cR^2 + (x_1 x_2 + x_3 x_4)^2 - 2x_1 x_2 x_3 x_4 + 2y_1 y_2 y_3 y_4 \\
&= 2R^4 + 2cR^2 + (a_3^2 - R^2)^2 - 2e + 2y_1 y_2 y_3 y_4 \\
0 &= 2R^4 + 2cR^2 - 2e + 2y_1 y_2 y_3 y_4 \\
y_1 y_2 y_3 y_4 &= -R^4 - cR^2 + e.
\end{aligned}$$

Nas Figuras 3.3 e 3.4 mostramos mais duas construções obtidas com os pontos X_1, X_2, X_3 e X_4 e seus simétricos em relação ao eixo das abcissas denotados por X'_1, X'_2, X'_3 e X'_4 , respectivamente. Para a prova da proposição a seguir que se baseia nas construções

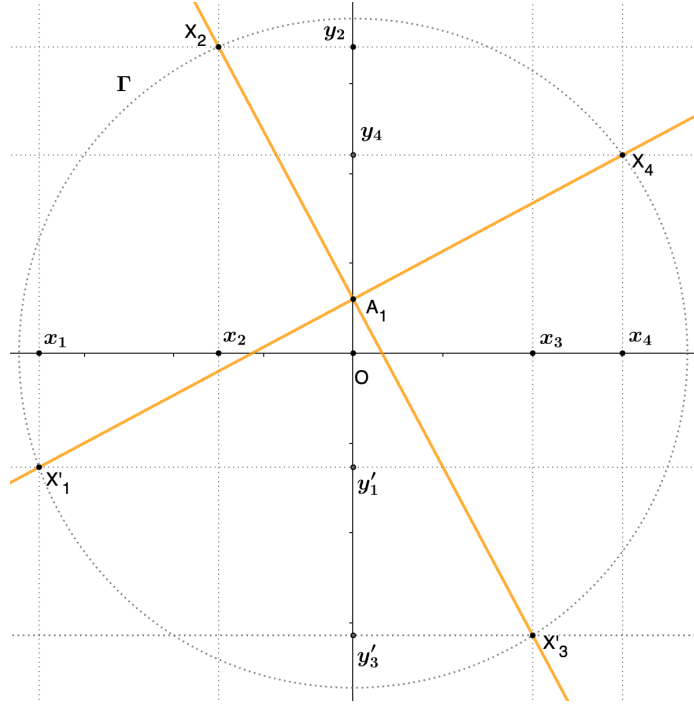


Fonte: Autor

Figura 3.3: Duas Retas se interceptando no ponto A_2

acima temos o seguinte lema:

Lema 3.1.2 *Para as abcissas e ordenadas dos pontos X_1, X_2, X_3 e X_4 temos as seguintes*



Fonte: Autor

Figura 3.4: Duas Retas se interceptando no ponto A_1

identidades

$$(a) \sum_{i=1}^4 x_i^2 = -2c$$

$$(b) \sum_{i=1}^4 x_i^4 = 2c^2 - 4e$$

$$(c) \sum_{i=1}^4 y_i^4 = 4R^4 + 4cR^2 + 2c^2 - 4e.$$

Demonstração. Prova de (a). Como as abcissas dos pontos tem soma nula obtemos

$$0 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2 + 2c.$$

Prova de (b). Lembremos que para cada x_i vale $x_i^4 + cx_i^2 + dx_i + e = 0$. Aplicando o somatório obtemos

$$\sum_{i=1}^4 x_i^4 + c \sum_{i=1}^4 x_i^2 + d \sum_{i=1}^4 x_i + 4e = 0$$

de onde se conclui que

$$\sum_{i=1}^4 x_i^4 = -c(-2c) - d(0) - 4e = 2c^2 - 4e.$$

Prova de (c). Por fim, note que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 y_i^4 &= \sum_{i=1}^4 (y_i^2)^2 \\
&= \sum_{i=1}^4 (R^2 - x_i^2)^2 \\
&= \sum_{i=1}^4 R^4 - 2 \sum_{i=1}^4 R^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^4 x_i^4 \\
&= 4R^4 + 4cR^2 + 2c^2 - 4e.
\end{aligned}$$

Proposição 3.1.1 *Com relação as construções apresentadas nas Figuras 3.3 e 3.4 valem as seguintes afirmações:*

- (a) $\overrightarrow{X_2 X'_4} \perp \overrightarrow{X'_1 X_3}$.
- (b) $\overrightarrow{X'_1 X_4} \perp \overrightarrow{X_2 X'_3}$.

Demonstração. Prova do item (a). Vamos mostrar que o produto escalar dos vetores $\overrightarrow{X'_1 X_3}$ e $\overrightarrow{X_2 X'_4}$ é nulo. De fato, observando que $y'_1 = -y_1$ e $y'_4 = -y_4$ temos

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{X_2 X'_4}, \overrightarrow{X'_1 X_3} \rangle &= \langle (x_4 - x_2, y'_4 - y_2), (x_3 - x_1, y_3 - y'_1) \rangle \\
&= \langle (x_4 - x_2, -y_4 - y_2), (x_3 - x_1, y_3 + y_1) \rangle \\
&= x_3 x_4 - x_1 x_4 - x_2 x_3 + x_1 x_2 - y_3 y_4 - y_1 y_4 - y_2 y_3 - y_1 y_2
\end{aligned}$$

e como $x_1 x_2 + x_3 x_4 = y_1 y_2 + y_3 y_4$ pelo 3.1.1 obtemos

$$\langle \overrightarrow{X_2 X'_4}, \overrightarrow{X'_1 X_3} \rangle = -x_1 x_4 - x_2 x_3 - y_1 y_4 - y_2 y_3.$$

Agora, aplicando o Lema 3.1.2 aos somatórios obtemos

$$\begin{aligned}
(x_1 x_4 + x_2 x_3)^2 &= x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2 + 2e \\
&= \frac{(x_1^2 + x_4^2)^2 - x_1^4 - x_4^4 + (x_2^2 + x_3^2)^2 - x_2^4 - x_3^4}{2} + 2e \\
&= \frac{(2R^2 - y_1^2 - y_4^2)^2 + (2R^2 - y_2^2 - y_3^2)^2 - \sum_{i=1}^4 x_i^4}{2} + 2e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4R^4 + (y_1^2 + y_4^2)^2 - 4R^2(y_1^2 + y_4^2)}{2} \\
&+ \frac{4R^4 + (y_2^2 + y_3^2)^2 - 4R^2(y_2^2 + y_3^2)}{2} - \frac{2c^2 - 4e}{2} + 2e \\
&= 4R^4 + \frac{\sum_{i=1}^4 y_i^4}{2} + y_1^2 y_4^2 + y_2^2 y_3^2 - 2R^2 \sum_{i=1}^4 y_i^2 - c^2 + 4e \\
&= 4R^4 + \frac{4R^4 + 4cR^2 + 2c^2 - 4e}{2} + y_1^2 y_4^2 + y_2^2 y_3^2 - 2R^2 \sum_{i=1}^4 (R^2 - x_i^2) - c^2 + 4e \\
&= 4R^4 + 2R^4 + 2cR^2 + c^2 - 2e + y_1^2 y_4^2 + y_2^2 y_3^2 - 2R^2(4R^2 + 2c) - c^2 + 4e \\
&= -2R^4 - 2cR^2 + 2e + y_1^2 y_4^2 + y_2^2 y_3^2
\end{aligned}$$

e usando a identidade (e) do Lema 3.1.1 obtemos

$$\begin{aligned}
(x_1 x_4 + x_2 x_3)^2 &= -2R^4 - 2cR^2 + 2e + y_1^2 y_4^2 + y_2^2 y_3^2 \\
&= 2y_1 y_2 y_3 y_4 + y_1^2 y_4^2 + y_2^2 y_3^2 \\
&= (y_1 y_4 + y_2 y_3)^2.
\end{aligned}$$

Como $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$ e os y_i são todos positivos encontramos

$$y_1 y_4 + y_2 y_3 = -(x_1 x_4 + x_2 x_3)$$

de onde concluimos que

$$\langle \overrightarrow{X'_1 X_3}, \overrightarrow{X_2 X'_4} \rangle = -x_1 x_4 - x_2 x_3 - y_1 y_4 - y_2 y_3 = 0.$$

Prova do item (b). A prova do item (b) é análoga a do item (a).

Como consequências imediatas desta proposição temos os seguintes lemas:

Lema 3.1.3 *Sejam os pontos X_1, X_2, X_3 e X_4 como obtidos no Lema 3.1.1. Considere o par de retas $\overleftrightarrow{X'_1 X_3}$ e $\overleftrightarrow{X_2 X'_4}$, secantes a circunferência Γ e concorrendo no ponto A_2 , conforme ilustrado na Figura 3.3. Valem as seguintes relações:*

- (a) $A_2 = (0, a_2)$ onde $-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 2a_2$
- (b) $-y_1 y_3 - y_2 y_4 = a_2^2 - R^2$
- (c) $x_1 x_3 + x_2 x_4 = a_2^2 - R^2$.

Demonstração. Prova de (a) Segue da Proposição 3.1.1 que $\overleftrightarrow{X'_1 X_3} \perp \overleftrightarrow{X_2 X'_4}$ e usando

o mesmo argumento com X_{13} e X_{24} pontos médios dos segmentos X_1X_3 e X_2X_4 , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA_2} &= \overrightarrow{OX_{13}} + \overrightarrow{OX_{24}} \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_3}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OX_2} + \overrightarrow{OX_4}) \\
&= \frac{1}{2}((x_1, y'_1) + (x_3, y_3) + (x_2, y_2) + (x_4, y'_4)) \\
&= \frac{1}{2}((x_1 + x_2 + x_3 + x_4, -y_1 + y_2 + y_3 - y_4)).
\end{aligned}$$

Como $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ temos $\overrightarrow{OA_2} = (0, a_2)$ onde $-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 2a_2$.

Provas de (b) e (c) As provas de (b) e (c) são análogas as feitas no Lema 3.1.1 trocando o índice 2 pelo índice 3, e vice versa, a_3 por a_2 e observando que $y'_1 = -y_1$ e $y'_4 = -y_4$.

Lema 3.1.4 *Sejam os pontos X_1, X_2, X_3 e X_4 como obtidos no Lema 3.1.1. Considere o par de retas secantes a circunferência Γ , $\overleftrightarrow{X'_1X_4}$ e $\overleftrightarrow{X_2X'_3}$, concorrendo no ponto A_1 , conforme ilustrado na Figura 3.4. Valem as seguintes relações:*

- (a) $A_1 = (0, a_1)$ onde $-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 = 2a_1$
- (b) $-y_1y_4 - y_2y_3 = a_1^2 - R^2$
- (c) $x_1x_4 + x_2x_3 = a_1^2 - R^2$.

Demonstração. Análoga a prova do Lema 3.1.3. A proposição a seguir evidencia uma propriedade geométrica que relaciona o raio da circunferência Γ com os coeficientes da equação quártica que tem x_1, x_2, x_3 e x_4 como raízes.

Proposição 3.1.2 *Seja um ponto $A = (0, a)$ e um par de retas perpendiculares correndo em A e secantes a uma circunferência Γ nos pontos X_1, X_2, X_3 e X_4 com abcissas $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$, respectivamente. Então x_1, x_2, x_3 e x_4 , são raízes da equação*

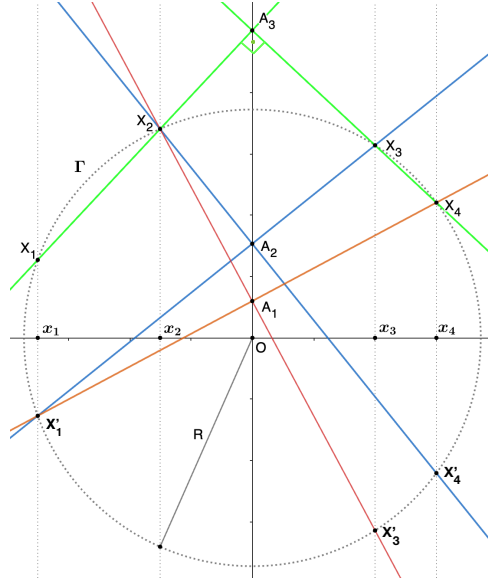
$$x^4 + cx^2 + dx + e = 0$$

e o raio de Γ é dado por

$$R = \sqrt{\frac{d^2}{4e} - c}.$$

Demonstração da proposição 3.1.2. Segue do Lema 3.1.1 que

$$y_1y_2y_3y_4 = -R^4 - cR^2 + e$$



Fonte: Autor

Figura 3.5: Relação entre o raio de uma circunferência Γ e as raízes de uma equação quártica

e usando o fato que $x_i^2 + y_i^2 = R^2, i = 1, \dots, 4$, obtemos

$$(-R^4 - cR^2 + e)^2 = y_1^2 y_2^2 y_3^2 y_4^2$$

$$(-R^4 - cR^2 + e)^2 = (R^2 - x_1^2)(R^2 - x_2^2)(R^2 - x_3^2)(R^2 - x_4^2)$$

$$(R^4 + cR^2 - e)^2 = (R + x_1)(R + x_2)(R + x_3)(R + x_4)(R - x_1)(R - x_2)(R - x_3)(R - x_4)$$

$$(R^4 + cR^2 - e)^2 = (R^4 + cR^2 - dR + e)(R^4 + cR^2 + dR + e)$$

$$(R^4 + cR^2 - e)^2 = (R^4 + cR^2 + e)^2 - d^2 R^2$$

de onde se conclui que

$$d^2 R^2 = (R^4 + cR^2 + e)^2 - (R^4 + cR^2 - e)^2$$

$$= (2R^4 + 2cR^2)2e$$

$$d^2 = (2R^2 + 2c)2e$$

$$= 4R^2 e + 4ec$$

$$4R^2 e = d^2 - 4ec$$

$$R^2 = \frac{d^2}{4e} - c$$

$$R = \sqrt{\frac{d^2}{4e} - c}.$$

3.2 Equação cúbica associada a uma equação quártica

Nesta seção vamos mostrar como obter uma específica equação cúbica a partir de uma equação quártica

$$x^4 + cx^2 + dx + e = 0, \text{ com } e > 0,$$

dada. Para este fim usaremos os Lemas 3.1.1, 3.1.3 e 3.1.4 que nos dão as identidades

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_3x_4 = a_3^2 - R^2 \\ x_1x_3 + x_2x_4 = a_2^2 - R^2 \\ x_1x_4 + x_2x_3 = a_1^2 - R^2. \end{cases}$$

as quais relacionam as raízes x_1, x_2, x_3 e x_4 da equação quártica.

Definição 3.2.1 *A equação cúbica*

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \gamma = 0$$

associada à equação quártica $x^4 + cx^2 + dx + e = 0$ é a equação que tem como raízes

$$\begin{cases} x'_3 = x_1x_2 + x_3x_4 \\ x'_2 = x_1x_3 + x_2x_4 \\ x'_1 = x_1x_4 + x_2x_3. \end{cases}$$

Usando as relações de Girard temos o seguinte lema:

Lema 3.2.1 *Se x_1, x_2, x_3 e x_4 são raízes da equação quártica $x^4 + cx^2 + dx + e = 0$, com coeficientes reais e $e > 0$, então a equação cúbica a ela associada é dada por*

$$x'^3 - cx'^2 - 4ex' - d^2 + 4ec = 0.$$

Demonstração. Seja

$$x'^3 + \alpha x'^2 + \beta x' + \gamma = 0$$

a equação cúbica associada a equação quártica que tem como raízes x_1, x_2, x_3 e x_4 , com $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$. Segue das relações de Girard, 1.3.1, na equação quártica que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = c \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -d \\ x_1x_2x_3x_4 = e \end{cases}$$

e, novamente, usando as relações de Girard na equação cúbica, temos

$$\begin{aligned}
\alpha &= -(x'_1 + x'_2 + x'_3) \\
&= -(x_1x_2 + x_3x_4 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_1x_4 + x_2x_3) \\
&= -c,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= x'_1x'_2 + x'_1x'_3 + x'_2x'_3 \\
&= (x_1x_4 + x_2x_3)(x_1x_3 + x_2x_4) + (x_1x_4 + x_2x_3)(x_1x_2 + x_3x_4) + (x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_2 + x_3x_4) \\
&= x_1^2x_3x_4 + x_4^2x_1x_2 + x_3^2x_1x_2 + x_2^2x_3x_4 + x_1^2x_2x_4 + x_4^2x_1x_3 + x_2^2x_1x_3 + x_3^2x_2x_4 \\
&\quad + x_1^2x_2x_3 + x_3^2x_1x_4 + x_2^2x_1x_4 + x_4^2x_2x_3 \\
&= x_1^2(x_3x_4 + x_2x_4 + x_2x_3) + x_2^2(x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4) \\
&\quad + x_3^2(x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4) + x_4^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\
&= x_1^2(c - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4) + x_2^2(c - x_1x_2 - x_2x_3 - x_2x_4) \\
&\quad + x_3^2(c - x_1x_3 - x_2x_3 - x_3x_4) + x_4^2(c - x_1x_4 - x_2x_4 - x_3x_4) \\
&= x_1^2(c - x_1(x_2 + x_3 + x_4)) + x_2^2(c - x_2(x_1 + x_3 + x_4)) \\
&\quad + x_3^2(c - x_3(x_1 + x_2 + x_4)) + x_4^2(c - x_4(x_1 + x_2 + x_3)) \\
&= x_1^2(c + x_1^2) + x_2^2(c + x_2^2) \\
&\quad + x_3^2(c + x_3^2) + x_4^2(c + x_4^2) \\
&= c \sum_{i=1}^4 x_i^2 + \sum_{i=1}^4 x_i^4 \\
&= c(-2c) + (2c^2 - 4e) \\
&= -4e.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\gamma &= -x'_1x'_2x'_3 \\
&= (x_1x_4 + x_2x_3)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_2 + x_3x_4) \\
&= x_1^2e + x_1^2x_2^2x_3^2 + x_2^2e + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_3^2e + x_4^2e + x_2^2x_3^2x_4^2 \\
&= e(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} x_i^2x_j^2x_k^2 \\
&= -2ec + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} x_i^2x_j^2x_k^2.
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
 d^2 &= (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)^2 \\
 &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} x_i^2 x_j^2 x_k^2 + 2(x_1x_2e + x_1x_3e + x_2x_3e + x_1x_4e + x_2x_4e + x_3x_4e) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} x_i^2 x_j^2 x_k^2 + 2ec.
 \end{aligned}$$

Por fim , temos

$$\begin{aligned}
 \gamma &= -2ec + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} x_i^2 x_j^2 x_k^2 \\
 &= -2ec + d^2 - 2ec \\
 &= d^2 - 4ec.
 \end{aligned}$$

Como aplicação desta técnica vejamos como resolver algumas equações quárticas.

Exemplo 3.2.1 *Resolva a equação quártica*

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0.$$

Solução. Note que está equação tem soma das raízes igual a zero e coeficiente e positivo o que nos permite aplicar o método do capítulo anterior. A equação cúbica a ela associada é dada por

$$x'^3 + 15x'^2 - 96x' - 1540 = 0.$$

Podemos reescrever esta equação da seguinte forma

$$(x' + 5)^3 - 171(x' + 5) - 810 = 0$$

Utilizaremos para solução desta equação cúbica o método trabalhado nos capítulos anteriores. Temos

$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{\frac{171}{3}} = \sqrt{57} \\
 \alpha &= \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{810}{2(\sqrt{57})^3}\right) \approx 6,58677555...
 \end{aligned}$$

Sendo x'_1, x'_2 e x'_3 as raízes da equação cúbica associada obtemos com o auxílio de uma calculadora científica que

$$x'_1 + 5 = 2R \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = -9$$

$$x'_2 + 5 = 2R \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = -6$$

$$x'_3 + 5 = 2R \cos(\alpha) = 15$$

Portanto, $x'_1 = -14$, $x'_2 = -11$ e $x'_3 = 10$ são as raízes da equação cúbica associada. Voltemos agora para as equações que definem as raízes da equação cúbica associada em função das raízes da equação quártica. Temos

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_3x_4 = 10 \\ x_1x_3 + x_2x_4 = -11 \\ x_1x_4 + x_2x_3 = -14 \end{cases}$$

Para resolver o sistema acima usamos que $c = -15$ de onde obtemos $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = -2c = 30$. Segue da primeira equação do sistema que

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_3x_4 &= 10 \\ 2x_1x_2 + 2x_3x_4 &= 20 \\ (x_1 + x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 + (x_3 + x_4)^2 - x_3^2 - x_4^2 &= 20 \\ 2(x_1 + x_2)^2 - 30 &= 20 \\ (x_1 + x_2)^2 &= 25 \\ x_1 + x_2 &= -5, \text{ pois } x_1 < x_2 < 0 \end{aligned}$$

e, como $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, obtemos $x_3 + x_4 = 5$.

Agora, lembremos que

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 &= -d = -(-10) = 10 \\ x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) &= 10 \\ 5x_1x_2 - 5x_3x_4 &= 10 \\ x_1x_2 - x_3x_4 &= 2 \\ x_1x_2 - (10 - x_1x_2) &= 2 \\ x_1x_2 &= 6. \end{aligned}$$

Esta última igualdade combinada com a equação $x_1 + x_2 = -5$ nos dá $x_1 = -3$ e $x_2 = -2$ desde que $x_1 < x_2 < 0$.

Sustituindo os valores de x_1 e x_2 na segunda e terceira equações do sistema temos

$$\begin{cases} -3x_3 - 2x_4 = -11 \\ -2x_3 - 3x_4 = -14 \end{cases}$$

cuja solução é $x_3 = 1$ e $x_4 = 4$. Assim, as soluções da equação quártica

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$$

são $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 4$.

Capítulo 4

Sequência didática

Neste capítulo apresentaremos uma sequência didática para o trabalho numa turma de 3º ano do ensino médio. Trata-se de uma sequência de aulas interligadas com o objetivo de explorar a resolução de equações quárticas utilizando uma equação cúbica associada.

4.1 Aula 1- Relações de Girard e Lema 3.2.1

Nesta primeira aula o professor deve explorar primeiramente as relações de Girard que serão de fundamental importância para encontrar as raízes de uma equação quártica. O professor deve iniciar introduzindo alguns exemplos de equações polinomiais de terceiro e quarto graus mostrando as relações entre as raízes e os coeficientes destas equações. Num segundo momento o professor apresenta o Lema 3.2.1 e pede que os alunos encontrem a equação cúbica associada de algumas exemplos de equações quárticas.

- *Tema da aula:* Equações cúbicas e quárticas
- *Conteúdo:* Relações de Girard e Lema 3.2.2
- *Objetivos:* Encontrar a equação cúbica associada a uma equação quártica

$$ax^4 + cx^2 + dx + e = 0, \text{ com } e > 0$$

- *Tempo:* 1 hora e 40 minutos
- *Desenvolvimento:*

O professor iniciará a aula relembrando as relações de Girard, que é um conteúdo visto no estudo de Polinômios, através de uma aula expositiva no quadro explorando exercícios que impliquem na prática deste conteúdo. Como sugestão, poderia ser visto com os alunos como se obter um polinômio conhecidas previamente suas raízes. Para este fim os alunos poderiam resolver os seguintes exercícios:

Exercício 4.1.1 *Sabendo que $-1, 3$ e 5 são raízes de um polinômio de grau 3, encontre este polinômio.*

Exercício 4.1.2 *Utilizando o mesmo raciocínio encontre o polinômio de grau 4 cujo suas raízes são $-6, -3, 4$ e 5 .*

Após um tempo de mais ou menos 20 minutos da realização desta tarefa por parte dos alunos o professor deve intervir e resolver os exercícios no quadro para esclarecer possíveis dúvidas encontradas pelos alunos na realização da atividade. A aula terá continuidade com a apresentação e explicação, por parte do professor, de como se aplica o Lema 3.2.1 a equações quárticas. Na sequência o professor através de um exemplo de equação quártica com coeficiente $b = 0$ e $e > 0$ mostra aos alunos como encontrar a equação cúbica associada. Como sugestão o professor pode resolver o seguinte exemplo:

Exemplo 4.1.1 *Encontre a equação cúbica associada a equação*

$$x^4 - 2x^2 - 6x + 10 = 0.$$

Utilizando o Lema 3.2.1, o professor obtém a equação cúbica associada

$$y^3 + 2y^2 - 40y - 116 = 0.$$

Após a resolução do exemplo, o professor então deve pedir a turma que resolva o seguinte exercício:

Exercício 4.1.3 *Encontre a equação cúbica associada a equação*

$$x^4 + 3x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Para a realização deste exercício sugerimos que seja dado um tempo de 20 minutos. Após o término da atividade por parte dos alunos o professor finaliza a aula corrigindo o exercício.

- *Materiais necessários:* Piloto azul e preto e apagador

- *Avaliação:* Participativa
- *Referências:* [9]

4.2 Aula 2 - Forma incompleta de uma equação do 3º grau

Esta segunda aula será dedicada ao estudo das equações do 3º grau. O ponto principal a ser abordado é que uma equação do terceiro grau na sua forma completa,

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

com coeficientes reais e $A \neq 0$, pode ser reescrita na forma incompleta onde o coeficiente do termo quadrático é zero, isto é, na forma

$$x^3 + px + q = 0.$$

- *Tema da aula:* Equação cúbica
- *Conteúdo:* Forma incompleta de uma equação cúbica
- *Objetivos:* Construir a equação incompleta de uma equação cúbica
- *Tempo:* Uma aula de 50 minutos
- *Desenvolvimento:* Nesta aula o professor deve trabalhar somente com equações cúbicas. A sugestão é que o professor a partir de três números reais escreva a equação cúbica que tenha estes números como raízes e, na sequência, através de uma mudança de variável obtenha a equação incompleta a ela associada. Propomos para esta tarefa o seguinte exemplo que deve ser resolvido pelo professor:

Exemplo 4.2.1 *Escreva na forma reduzida a equação cúbica*

$$x^3 + 18x^2 - 5x + 3 = 0.$$

Fazendo a substituição: $x = y - 6$ o professor obtém a equação incompleta

$$y^3 - 113y + 465 = 0.$$

Após este exemplo sugerimos que o professor divida a turma em quatro equipes e entregue a cada uma delas uma equação cúbica completa para que os alunos encontrem sua forma incompleta. O professor pode usar as quatro equações abaixo:

- Equipe 1: $x^3 - 12x^2 + 11x + 1 = 0$
- Equipe 2: $x^3 - 18x^2 + 2x + 11 = 0$
- Equipe 3: $x^3 - 3x^2 + 13x + 10 = 0$
- Equipe 4: $x^3 - 6x^2 + 7x + 18 = 0$

Após 20 minutos o professor recolhe as atividades para pontuar as equipes e finalizar a aula.

- *Materiais necessários:* Piloto e apagador
- *Avaliação:* Participativa e resolução de questões

4.3 Aula 3 - Discriminante da equação cúbica

Uma vez que os alunos conseguem reescrever uma equação cúbica completa na sua forma incompleta

$$x^3 + px + q = 0$$

podemos, através do discriminante

$$\Delta = -27q^2 - 4p^3,$$

classificar as raízes desta equação como reais ou complexas. O objetivo desta aula é interpretar o discriminante de uma equação cúbica incompleta. O professor deve introduzir a Proposição 2.1.1 a qual afirma que quando $\Delta \geq 0$ temos três raízes reais para a equação cúbica incompleta. Para este fim o professor deve investigar o discriminante de alguns exemplos de equações cúbicas incompletas. Podem ser usados os seguintes exemplos que serão resolvidos pelo professor.

Exemplo 4.3.1 *Classifique quanto a serem reais ou complexas as raízes da equação*

$$x^3 - 10x + 2 = 0.$$

Exemplo 4.3.2 *Classifique quanto a serem reais ou complexas as raízes da equação*

$$x^3 + 5x - 6 = 0.$$

- *Tema da aula:* Equação cúbica incompleta
- *Conteúdo:* Discriminate
- *Objetivos:* Classificar as raízes de uma equação cúbica
- *Tempo:* 50 minutos
- *Desenvolvimento:* O professor inicia a aula lembrando como podemos obter a partir de uma equação cúbica completa a sua forma incompleta. A sugestão é que o professor peça que os alunos resolvam o seguinte exercício e concluam que a equação não possui raízes reais.

Exemplo 4.3.3 *Classifique quanto a serem reais ou complexas as raízes da equação*

$$x^3 - x + 5 = 0.$$

- *Materiais necessários:* Piloto, apagador
- *Avaliação:* Participativa
- *Referência:* [2]

4.4 Aula 4 - Resolução de uma equação cúbica incompleta

Nesta aula o professor deve mostrar como utilizar a fórmula de resolução de uma equação cúbica incompleta com o auxílio de uma calculadora científica.

- *Tema da aula:* Equação cúbica
- *Conteúdo:* Expressões algébricas, trigonometria, radiciação

- *Objetivos:* Encontrar as raízes de uma equação cúbica incompleta com $\Delta \geq 0$
- *Tempo:* 1 hora e 40 minutos

- *Desenvolvimento:*

O professor inicia a aula lembrando como se escreve uma equação cúbica na sua forma incompleta. Após esse momento o professor apresenta a fórmula resolutive dada na Proposição 2.2.3 para obter as raízes de uma equação cúbica incompleta e como usa-la com o auxílio de uma calculadora científica. Para este fim sugerimos que o professor faça os seguintes exemplos:

Exemplo 4.4.1 *Encontre as raízes da equação $x^3 - 8x - 8 = 0$.*

Na resolução o professor deve primeiro verificar se a equação tem de fato raízes reais. Em caso afirmativo, deve mostrar a aplicação da fórmula com ênfase no uso correto da calculadora científica já que serão necessários alguns cálculos que não são usuais por parte dos alunos.

Exemplo 4.4.2 *Encontre as raízes da equação $x^3 - 19x + 30 = 0$.*

O professor pode estipular 30 minutos para os estudantes realizarem a tarefa e, na sequência, resolve a atividade de forma que todos possam compreender os passos usados na manipulação da calculadora científica.

- *Materiais necessários:* Calculadora científica, piloto e apagador.
- *Avaliação:* Participativa
- *Referências:* Capítulo 2 deste trabalho.

4.5 Aula 5 - Resolução de uma equação quártica

O objetivo desta aula é obter as raízes de uma equação quártica da forma

$$x^4 + cx^2 + dx + e = 0$$

com coeficientes reais e $e > 0$.

- *Tema da aula:* Equação quártica
- *Conteúdo:* Sistema de equações, resolução de equações polinomiais, uso da calculadora científica.
- *Objetivo:* Encontrar as soluções das equações quárticas através da equação cúbica associada
- *Tempo:* 1 hora e 40 minutos
- *Desenvolvimento:*

O professor deve iniciar a aula apresentando um exemplo de equação quártica na forma

$$x^4 + cx^2 + dx + e = 0$$

com coeficientes reais e $e > 0$. Na sequência deve ser explorada mais uma vez as Relações de Girard para explicar aos alunos que este tipo de equação tem soma das raízes igual a zero e produto das raízes positivo, já que $e > 0$. Decorre daí que duas raízes devem ser negativas e as outras duas devem ser positivas. Na sequência o professor deve pedir que os alunos relembrem a primeira aula e escrevem a equação cúbica associada a esta equação quártica. Em seguida os alunos devem encontrar a forma incompleta da equação cúbica associada a equação quártica e, então, o professor deve pedir que os alunos a resolvam com o método aprendido na aula anterior.

O professor pode resolver o seguinte exercício:

Exercício 4.5.1 *Encontre as raízes da equação*

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0.$$

O professor deve conduzir a resolução deste exercício com os seguintes passos:

Passo 1. Os alunos devem encontrar a equação cúbica associada obtendo

$$x'^3 + 15x'^2 - 96x' - 1540 = 0.$$

Passo 2. Os alunos devem encontrar a equação cúbica incompleta associada a

$$x'^3 + 15x'^2 - 96x' - 1540 = 0$$

obtendo

$$(x' + 5)^3 - 171(x' + 5) - 810 = 0$$

que é o mesmo que

$$y^3 - 171y - 810 = 0$$

fazendo $y = x' + 5$.

Passo 3. Os alunos devem encontrar as raízes da equação

$$y^3 - 171y - 810 = 0$$

obtendo $y_1 = -9$, $y_2 = -6$ e $y_3 = 15$ e, por consequência, $x'_1 = -14$, $x'_2 = -11$ e $x'_3 = 10$.

Passo 4. Os alunos devem encontrar as raízes da equação quártica resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x'_3 = x_1x_2 + x_3x_4 \\ x'_2 = x_1x_3 + x_2x_4 \\ x'_1 = x_1x_4 + x_2x_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 = x_1x_2 + x_3x_4 \\ -11 = x_1x_3 + x_2x_4 \\ -14 = x_1x_4 + x_2x_3. \end{cases}$$

Este sistema pode ser resolvido como feito no Exemplo 3.2.1 obtendo as raízes

$$x_1 = -3 \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 1 \quad \text{e} \quad x_4 = 4.$$

- *Materiais necessários:* Calculadora científica, piloto, apagador.
- *Avaliação:* Construtivista
- *Referências:* Capítulo 3 deste trabalho.

Considerações finais

Este trabalho propôs uma abordagem geométrica das equações polinomiais do terceiro e quarto graus relacionando alguns conteúdos de geometria plana vistos na educação básica com conteúdos algébricos tais como equações polinomiais. O ensino de geometria nas escolas públicas do nosso país deixa muito a desejar e, por muitas vezes, é tida como uma parte da matemática afastada da álgebra. Na verdade, a geometria pode ser pensada de forma paralela com diversas outras áreas, em particular com a própria álgebra, como tentamos fazer no desenvolvimento deste trabalho. Da mesma forma, as equações de terceiro e quarto graus são trabalhadas nas escolas somente no 3º ano do ensino médio no conteúdo de polinômios e, mesmo assim, com uma abordagem limitada e bastante rápida, fazendo com que os estudantes tenham muita dificuldade no entendimento destas equações de grau maior que dois. Esse trabalho tem o objetivo de mostrar que estas equações podem ser pensadas sobre um aspecto geométrico, que não substitui a proposta algébrica mas sim, acrescenta um outro ponto de vista para auxiliar no entendimento deste conteúdo.

Referências Bibliográficas

- [1] Plousos, George. *The Secret Geometry of the Quartic Equation*. [https : //www.academia.edu/78165341/The_secret_geometry_of_the_quartic_equation](https://www.academia.edu/78165341/The_secret_geometry_of_the_quartic_equation).2020.
- [2] Lima, Elon Lages. *A Equação do Terceiro Grau*. Revista Matemática Universitária, No.5, Junho/1987.
- [3] Silva, Marcos Noé Pedro da . *Relação fundamental da trigonometria*, Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/relacao-fundamental-trigonometria.htm>. Acesso em 22 de setembro de 2024.
- [4] Salvado, Cláudio D´Alessandro. *Teorema Fundamental da Álgebra: Ferramentas para Demonstrar para Alunos do Ensino Médio*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA.
- [5] RAMOS, Danielle de Miranda. *Funções trigonométricas do arco duplo*, Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-arco-duplo.htm>. Acesso em 22 de setembro de 2024.
- [6] RIGONATTO, Marcelo. *Fórmulas de transformação de soma em produto*, Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/formulas-transformacao-soma-produto.htm>. Acesso em 22 de setembro de 2024.
- [7] MELO, Pâmella Raphaella. *O que são vetores?*, Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/fisica/o-que-sao-vetores.htm>. Acesso em 22 de setembro de 2024.
- [8] Silva, Luis Paulo Moreira. *Relações métricas na circunferência: relação entre cordas*, Mundo educação. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/relacoes-metricas-na-circunferencia-relacao-entre-cordas.htm>. Acesso em 22 de setembro de 2024.
- [9] CASAROTO, Patrícia. Um estudo sobre equações polinomiais dedicado ao Ensino Básico. Tese (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, SP. 2013.